UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

VIVIANE BEATRIZ HUMMES

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU: UM ESTUDO SOBRE A NOÇÃO DE EQUIVALÊNCIA COMO CONCEITO SUBSUNÇOR

PORTO ALEGRE
2014

VIVIANE BEATRIZ HUMMES

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU:

um estudo sobre a noção de equivalência como conceito subsunçor

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Márcia Rodrigues Notare Meneghetti.

PORTO ALEGRE

2014

CIP - Catalogação na Publicação

Hummes, Viviane Beatriz
Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau: um estudo sobre a noção de equivalência como conceito subsunçor / Viviane Beatriz Hummes. -- 2014.
124 f.

Orientador: Márcia Rodrigues Notare Meneghetti.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2014.

1. Equações do primeiro grau. 2. Aprendizagem Significativa. 3. Noção de Equivalência. 4. Conceito subsunçor. I. Meneghetti, Márcia Rodrigues Notare, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

VIVIANE BEATRIZ HUMMES

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU:
um estudo sobre a noção de equivalência como conceito subsunçor

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Márcia Rodrigues Notare Meneghetti.

Aprovado em 04 de abril de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Dr. Alvino Alves Sant'Ana (UFRGS)

Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso (UFRGS)

Dr. Rogério Ricardo Steffenon (UNISINOS)

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Professora Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneguetti, por seu apoio e disponibilidade em me orientar, além da dedicação, das sugestões e da confiança depositada em meu trabalho, fatores fundamentais para a conclusão desta pesquisa.

Ao corpo docente e à coordenação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS, pela competência e dedicação empenhadas na qualificação deste programa.

Aos professores membros da banca examinadora, por aceitarem avaliar este trabalho de dissertação e pelas valiosas sugestões para o enriquecimento desta pesquisa.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul, pelo auxílio e apoio concedido, que foi de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas da Secretaria Municipal de Educação de Porto Alegre, pelo apoio e por viabilizar a aplicação da sequência didática desenvolvida nesta pesquisa.

Aos meus familiares, que estiveram sempre comigo, me apoiando e confiando no meu potencial. Em especial à minha mãe Ledi, exemplo de mulher e de professora, pelo estímulo e incentivo.

Aos amigos que, de alguma maneira, estiveram presentes ao longo desta pesquisa, me ajudando e me incentivando. Em especial à minha amiga Adriana Breda, pelas conversas, risadas, companheirismo e valiosas contribuições para esta pesquisa.

Ao meu marido Damerson, pelo suporte incondicional durante toda a minha jornada, o incentivo e o conforto oferecido nos momentos difíceis.

RESUMO

Este trabalho tem a finalidade de apresentar uma proposta de estudo que procura analisar se a compreensão da noção de equivalência é um conceito subsunçor necessário para a Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau. À luz da teoria de David Ausubel, procuramos investigar se atividades que relacionam o equilíbrio existente em uma balança de dois pratos com uma igualdade entre os termos de uma equação podem funcionar como organizadores prévios facilitadores da Aprendizagem Significativa dos estudantes. A pesquisa foi desenvolvida em uma turma do oitavo ano do Ensino Fundamental, em uma escola da rede municipal de ensino de Porto Alegre, a partir de uma abordagem qualitativa, utilizando como método o estudo de caso. A interpretação dos dados resultantes foi realizada a partir da elaboração, da aplicação e da análise de uma sequência didática. As atividades foram realizadas a partir de situações propostas por dois Objetos Digitais de Aprendizagem que utilizam a balança de dois pratos, como suporte representacional. Assim, após analisarmos os resultados obtidos ao longo das sessões que compunham a sequência didática desenvolvida, percebemos que a noção de equivalência é um conceito fundamental para a Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau, mas não é o único. Além disso, concluímos, através da análise das atividades realizadas, que a noção de equivalência, existente em uma equação, pode ser considerada um conceito subsunçor necessário para ancorar a aprendizagem de equações do primeiro grau e, desta forma, proporcionar a Aprendizagem Significativa dos estudantes.

Palavras-chave: Equações do primeiro grau. Aprendizagem Significativa. Equivalência. Balança de dois pratos.

ABSTRACT

This work aims at presenting a study proposal on the possibility of usage of the concept of equivalence as a subsumer concept to the development of Meaningful Learning of first degree equations. In the light of David Ausubel's theory of learning, we try to investigate whether activities that relate the existing balance in a twin-pan balance to the equality between the terms of an equation could work as advance organizers to make students' Meaningful Learning easier. The work was developed in a seventh year of elementary school class, at a municipal school in Porto Alegre, through a qualitative approach, having as a method a case study. Through the creation, application and analysis of an instructional sequence we have carried the analysis and interpretation of the resulting data. The activities were done based on the situations proposed by two Digital Learning Objects that used a twin-pan balance as a representational support. Thus, after analysing the results obtained in the sessions that were part of the instructional sequence developed, we perceived that the notion of equivalence is a fundamental concept to the Meaningful Learning of first degree equations, but it is not the only one. Moreover, we have concluded, through the activities performed, that the understanding of equivalence existing in an equation can be considered a subsumed concept necessary to anchor the new learning and, therefore, provide Meaningful Learning of first degree equations.

Keywords: First Degree Equations. Meaningful learning. Equivalence. Twin-pan balance.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAP/UFRGS: Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul
IM/UFRGS: Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRGS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul
IF/UFRGS: Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul
ODA: Objeto Digital de Aprendizagem
BIOE/MEC: Banco Internacional de Objetos Educacionais do Ministério da Educação

SUMÁRIO

1 DA INICIAÇÃO À DOCÊNCIA AO LIMIAR DA PESQUISA

Ao nos depararmos com a tarefa de produzir uma pesquisa, independente de sua natureza, sempre recorremos à nossa bagagem de conhecimento para que possamos desenvolvê-la de forma satisfatória. Muitas vezes, essa bagagem começa a ser carregada a partir de nossas origens, seja no convívio familiar, escolar, social ou profissional. As bases que constituem os sujeitos, com certeza, são uma parcela muito importante no desenvolvimento futuro de um profissional, influindo fortemente nas suas decisões e na sua formação.

Nesta pesquisa acadêmica, a situação não é diferente. Este capítulo introdutório tem a intenção de convidar o leitor a acompanhar uma breve descrição, feita em primeira pessoa, de alguns recortes da história acadêmica e profissional da pesquisadora que, de alguma maneira, colaboraram para definir e desenvolver esta dissertação de mestrado.

Desta forma, inicio este capítulo introdutório apontando os principais fatores que contribuíram para a escolha da profissão, descrevo as primeiras experiências docentes e concluo no que consiste em uma inquietante procura por respostas a questões relacionadas à melhoria da qualidade de ensino de Matemática.

As vivências sociais, escolares e familiares contribuem para a formação de qualquer profissional, inclusive para aqueles que querem ser professores. Comigo não foi diferente, esta profissão que tanto me fascina é ponto marcante na história da minha família. Minha mãe tem quatro irmãos e todos, incluindo ela, são professores. Posso dizer que meu primeiro contato com este profissional vem deste fato. Além disso, frequentei a escola acompanhando as experiências de minha mãe e, mesmo antes de me tornar docente, pude vivenciar a rotina de um professor.

À medida que fui avançando as séries escolares, tornou-se cada vez mais evidente minha afinidade com as aulas de Matemática. Nestes momentos, realizava as atividades propostas com muita presteza e dedicação. Inclusive as tarefas extraclasse, que eram feitas com muita autonomia, compromisso e preocupação em auxiliar colegas para os quais os conceitos da Matemática, muitas vezes, eram obstáculos. Quando encerrei o antigo Segundo Grau, estava decidida a prestar vestibular para o curso de Licenciatura em Matemática.

Em busca da concretização de um sonho, ingressei no curso desejado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) em 2003 e, no ano seguinte, iniciei uma prática docente na disciplina de Laboratório de Prática de Ensino e Aprendizagem em Matemática, ministrada pelo Professor Doutor Marcus Vinícius de Azevedo Basso, onde pude estar em contato direto com uma turma de alunos pela primeira vez. Nesta disciplina, alunos da graduação participavam de um projeto de extensão, em parceria com o Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (CAP/UFRGS), cujo principal objetivo era auxiliar e orientar os alunos na compreensão dos conceitos abordados durante o horário tradicional da aula de Matemática. Para isso, era possibilitada aos alunos do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (IM/UFRGS) a utilização de diferentes estratégias de ensino, dentre elas: a utilização de tecnologias digitais e materiais concretos; e criação, elaboração e execução de problemas e exercícios. Desde a minha participação nesta disciplina da graduação, pude perceber que o ensino de Álgebra, para alunos do Ensino Básico, representava um desafio para os professores, sobretudo em relação aos conceitos a serem ensinados e à metodologia mais adequada a ser empregada.

Durante três semestres letivos, em três níveis das disciplinas de laboratório de ensino, pude trabalhar com alunos de vários graus de escolaridade, desde o sexto ano do Ensino Fundamental até o terceiro ano de Ensino Médio. A partir desta prática, tive a oportunidade de desenvolver características importantes em um professor, como: autonomia, comprometimento individual e coletivo, conhecer diferentes ferramentas e métodos de ensino, além de oportunizar uma situação de prática próxima à realidade vivida após a formatura, numa proposta de cooperação entre professores, licenciandos e alunos.

Após concluir o curso de Licenciatura em Matemática, passei a colocar em prática o que havia aprendido durante minhas vivências na graduação e fui aplicar meus conhecimentos em outras salas de aula. Antes de ingressar no curso de mestrado, já havia trabalhado em todos os anos das séries finais do Ensino Fundamental e em todas as séries do Ensino Médio como professora de Matemática. Além disso, havia lecionado a disciplina de Física no primeiro ano do Ensino Médio, durante um ano, numa escola da rede pública de Porto Alegre. Durante minha experiência em sala de aula, sempre me incomodou o tratamento dado ao ensino de Álgebra.

Quando trabalhei no Ensino Médio, verifiquei que, para a maioria dos meus alunos, inclusive os da disciplina de Física, não havia uma aprendizagem efetiva em Álgebra, pois estes não atribuíam significados para a resolução de uma equação do primeiro ou segundo graus, por exemplo, deixando de resolvê-la ou apenas resolvendo-a através de um procedimento puramente mecânico. Desde então, senti a necessidade de pesquisar acerca dos principais motivos que levam à dificuldade de aprendizagem em Álgebra de alunos de todas as séries do Ensino Básico.

A partir das minhas vivências, passei a acreditar que as inovações no ensino de Álgebra dependem não só de uma renovação das concepções dos professores, porém esta deve estar acompanhada de uma reestruturação didático metodológica do trabalho em sala de aula. Neste sentido, é necessário renovar o atual ensino de Matemática, não só em termos de tópicos e conteúdos a serem ensinados, mas também em termos de estratégias de ensino. Nessa perspectiva, acredito que pesquisas que ofereçam subsídios para os professores, no sentido da melhoria desse quadro, podem ser realizadas a partir da elaboração, adaptação e aplicação de atividades que possam contribuir na busca de um ensino de Álgebra na qual o aluno atribua o significado esperado.

Ao ingressar no mestrado profissionalizante do programa de Pós-Graduação de Ensino de Matemática da UFRGS, minhas indagações na tentativa de compreender as dificuldades de aprendizagem em Álgebra ainda eram muito amplas. Neste sentido, passou a ser necessário avaliar a possibilidade de refinar minha investigação.

Nesta época, eu lecionava em duas turmas de sétimo ano do Ensino Fundamental, em uma escola da rede estadual de ensino, na cidade de Porto Alegre. Durante este ano, nestas turmas, eu iniciaria o estudo de equações do primeiro grau, conteúdo normalmente desenvolvido nesta etapa da escolaridade. Desta forma, pensei em elaborar uma sequência de atividades cujo objetivo seria identificar uma maneira de tornar a aprendizagem de equações do primeiro grau significativa para os alunos.

Sendo assim, iniciou-se uma busca em abordar o ensino de equações do primeiro grau não somente a partir de resoluções técnicas e procedimentais para obtenção de suas soluções, mas com a intenção de estabelecer uma interpretação por parte dos alunos, para que estes pudessem atribuir significados aos resultados obtidos.

Neste mesmo ano, participei de um evento da área da Educação Matemática onde, durante uma palestra proferida pelo Professor Doutor Marco Antônio Moreira do Instituto de Física da UFRGS (IF/UFRGS), conheci a teoria de aprendizagem cognitiva desenvolvida por David Paul Ausubel, a Teoria da Aprendizagem Significativa. Teoria esta, que tem como preocupação fundamental o estudo da aprendizagem escolar e suas implicações para o desenvolvimento de métodos de ensino eficazes.

A partir deste momento, pude estabelecer minha questão de pesquisa: **A compreensão do conceito de equivalência, a partir da associação entre o equilíbrio de uma balança de dois pratos e a igualdade existente entre os termos de uma equação, pode facilitar a Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau?**

Compreendo que, para chegar à proposta final, isto é, o local de chegada de uma longa caminhada, é necessário estabelecer, durante a jornada, algumas questões específicas que auxiliam no desenvolvimento da pesquisa. Nesta perspectiva, outras questões se tornaram imprescindíveis: A noção de equivalência é um conceito fundamental para tornar a aprendizagem de equações do primeiro grau significativa? Que outros conceitos da Matemática são necessários para facilitar a Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau? De que maneira podemos planejar, implementar e validar uma sequência didática que possibilite a realização de um ensino significativo de equações do primeiro grau?

Com a questão de pesquisa definida, concentramos nossos esforços em investigar, por meio de uma sequência de atividades, a ocorrência de Aprendizagem Significativa do conteúdo de equações do primeiro grau em uma turma de alunos. Contudo, em função de uma mudança nos rumos da profissão da professora-pesquisadora, a pesquisa não pôde ser realizada na escola estadual de Porto Alegre e teve que ocorrer em uma escola municipal do mesmo município. Assim, este estudo foi realizado em uma turma do segundo ano do terceiro ciclo, equivalente ao oitavo ano do Ensino Fundamental, ano em que, normalmente, os alunos estudam equações do primeiro grau nas escolas municipais de Porto Alegre.

Com este foco, pensamos em elaborar atividades com a intenção de favorecer a Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau em uma turma do oitavo ano do Ensino Fundamental. Desta forma, é necessário frisar que a análise proposta nesta investigação tem caráter qualitativo e esta não pode ser generalizada, pelo fato de ser um fenômeno subjetivo, particular e por se tratar de um estudo pontual a um grupo específico de alunos. Contudo, amplia o quadro de investigações fundamentadas na Teoria da Aprendizagem Significativa.

As contribuições desse estudo estão diretamente relacionadas a questões de ensino-aprendizagem de Matemática e à prática do professor de Matemática como pesquisador da área, haja vista que a prática de qualquer pesquisa se inicia em inquietações, questionamentos e dúvidas, percorre pela investigação do problema e acarreta em resultados, não em sua forma final, mas sim, em respostas, que durante o processo de investigação, permitem reformulações de ideias, conceitos, teorizações, implicando em uma constante diversificação do sujeito pesquisador e suas possibilidades de produção de novos saberes.

Por isso, o objetivo maior dessa proposta investigativa é **compreender de que maneira podemos abordar as concepções de Álgebra para que haja Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau**.

Entendemos que para chegar ao objetivo estabelecido são necessários alguns objetivos específicos que auxiliem no processo de análise: Investigar de que maneira a concepção de equivalência pode contribuir na compreensão do processo de resolução de uma equação do primeiro grau; identificar outros conceitos da Matemática que podem propiciar a Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau; planejar, justificar, implementar e validar uma sequência didática que possibilite a realização de um ensino significativo de equações do primeiro grau.

Assim, dividimos o texto deste trabalho em sete capítulos. No primeiro capítulo, fazemos uma introdução e apresentamos a proposta da pesquisa. No segundo capítulo, apresentamos uma revisão bibliográfica sobre pesquisas que investigaram as razões que embasam as dificuldades apresentadas por alunos durante a aprendizagem de equações do primeiro grau e de que forma nosso trabalho se diferencia destas pesquisas.

No terceiro capítulo, apresentamos uma revisão da literatura sobre o Ensino da Álgebra dividida em quatro seções. Na primeira seção, apresentamos alguns aspectos históricos do ensino de Álgebra no Brasil, sob a óptica de Miguel, Fiorentini e Miorim (1992). Na segunda, terceira e quarta seções falamos sobre as concepções da Educação Algébrica, respectivamente, de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); de Usiskin (1995); e de Lins e Gimenez (1997).

No quarto capítulo, apresentamos a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (1980), que fundamenta nosso estudo. Dividimos o quinto capítulo em quatro seções. Na primeira parte, apresentamos as características da nossa pesquisa. Em seguida, na segunda e terceira seções, descrevemos os sujeitos da pesquisa e os instrumentos utilizados para a coleta de dados da pesquisa. Por fim, na quarta parte, apresentamos a sequência de atividades, os recursos utilizados para a realização das aulas e o questionário elaborado para buscar evidências da Aprendizagem Significativa dos estudantes.

No capítulo 6 fazemos uma análise do material coletado à luz da teoria de Ausubel (1980) e das concepções da Educação Algébrica e, finalmente, no capítulo 7, apresentamos nossas considerações finais.

2 AS EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU NO ÂMBITO DAS PESQUISAS

Para realizar uma pesquisa, seja ela de natureza científica ou de outra característica, cabe ao pesquisador identificar o panorama em que ela está inserida. Nesse sentido, é fundamental que o investigador conheça outras investigações acerca da temática estudada. No nosso estudo, buscamos investigações que tratam do conceito de equação do primeiro grau e, mais especificamente, das dificuldades apresentadas por estudantes da escola básica quando desafiados a solucionar uma equação. A partir da exploração que fizemos, constatamos que a literatura que aborda o conceito de equação é muito ampla. Nesse contexto, muitas pesquisas procuram as razões para as dificuldades apresentadas pelos alunos durante a aprendizagem de equações. São exemplos de trabalhos dessa natureza as pesquisas de Araujo (1999), Salandini (2011), Daniel (2007), Freitas (2002), Teles (2002), Ribeiro (2007) e Lima (2007).

Em sua tese de doutorado, Araujo (1999) apresentou uma pesquisa que teve como principal objetivo investigar as relações existentes entre a escolha profissional e as habilidades e atitudes em relação a Matemática. Para tanto, a autora analisou a maneira como alunos de diversos níveis de conhecimento em Matemática e estudantes de graduação de diferentes áreas do conhecimento, no caso exatas, biológicas e humanas, solucionavam problemas algébricos. Os sujeitos da pesquisa, deste estudo de natureza quantitativa, foram 145 alunos concluintes do Ensino Médio e 233 universitários, ambos grupos pertencentes a instituições localizadas na cidade de Campinas, São Paulo.

Através da análise realizada a partir da coleta de dados da pesquisa, a autora concluiu que os resultados da investigação descreviam diferenças no desempenho entre universitários das diferentes áreas de conhecimento, destacando-se a área das exatas como superior às outras, já que os sujeitos desta área tiveram uma atitude mais positiva em relação à Matemática. Além disso, Araujo (1999) constatou que, na resolução dos problemas propostos, os alunos que a autora caracterizou como "menos capazes" não fizeram uso de procedimentos algébricos para solucionar os problemas, utilizando-se, apenas, de estimativas e/ou realizando operações aritméticas com os números apresentados no enunciado. Nesse sentido, a autora pôde inferir que os erros apresentados pelos alunos se deram devido às dificuldades destes com a Álgebra, tanto em relação ao nível conceitual, por exemplo o uso indevido do princípio de equivalência, quanto pelo uso incorreto de propriedades e operações algébricas. Concluiu, assim, que os resultados demonstraram a necessidade de uma abordagem escolar que procure estabelecer um ensino de Álgebra mais significativo[1] para os estudantes, apesar de sua escolha profissional.

Em uma investigação em nível de mestrado, Salandini (2011) analisou a possibilidade de se abordar, através da Modelagem Matemática, o estudo de equações com alunos do Ensino Básico. Nessa perspectiva, em sua pesquisa, o autor buscou responder qual era a viabilidade de se introduzir o conceito de equação do primeiro grau utilizando a Modelagem Matemática como estratégia de ensino em uma turma de alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental de uma escola particular localizada no interior do Estado de São Paulo. A partir de elaboração, desenvolvimento e validação de uma sequência didática, que, durante o desenvolvimento das atividades propostas, fez uso de um recurso tecnológico, no caso o *software Microsoft Excel*, o autor criou um conjunto de atividades para introdução do conceito de equação no Ensino Fundamental.

Embasado na teoria da Modelagem Matemática, sob os enfoques de Bassanezi (2006) e Barbosa (2001), os dados foram analisados em relação ao número de respostas corretas e, em seguida, uma análise qualitativa dos tipos de erros e acertos apresentados demonstraram os resultados obtidos. Nesse sentido, o autor concluiu que a utilização da Modelagem Matemática, como estratégia de ensino, propiciou a compreensão dos problemas propostos e a obtenção de sua solução para as situações apresentadas. Além disso, ao comparar dois grupos de alunos – um que utilizou as planilhas eletrônicas e outro que apenas realizou as atividades sem fazer uso da tecnologia – Salandini (2011), observou que o primeiro grupo teve um desempenho melhor, evidenciando que a Modelagem Matemática e o uso do computador como estratégia de ensino facilitou a aprendizagem dos alunos. Nessa perspectiva, o autor reitera que outras pesquisas relacionando a Modelagem Matemática e tecnologias informáticas para tratar da resolução de equações do primeiro grau no Ensino Fundamental sejam realizadas.

Daniel (2007), realizou uma pesquisa diagnóstica que tratou de verificar os erros e averiguar os procedimentos e estratégias que oito alunos de uma turma de oitava série do Ensino Fundamental, de uma escola estadual do interior do estado de São Paulo, utilizavam para resolver

[1] Araujo (1999) utiliza a palavra “significativo” em sua pesquisa, no entanto, não atribui o termo a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel.

equações do primeiro grau. Nessa pesquisa de cunho qualitativo, que gerou sua dissertação de mestrado, o autor utilizou o *software Aplusix*, dispositivo virtual recomendado para o ensino de Álgebra, como ferramenta de apoio para o ensino de equações do primeiro grau.

A partir da identificação e análise dos erros mais corriqueiros, registrados através da utilização da ferramenta "videocassete" do *software Aplusix*, o autor verificou que erros relacionados aos conceitos de equivalência e operações inversa foram os mais frequentes e, nesse sentido, foram os que mais contribuíram para soluções erradas apresentadas nas resoluções de equações do primeiro grau dos alunos. Ademais, embora o autor tenha verificado avanços importantes nas resoluções dos alunos após a utilização do *software*, ao comparar os resultados do pré-teste e do pós-teste estes erros foram os que mais persistiram.

Em sua pesquisa de mestrado, a partir de uma investigação de cunho qualitativo, Freitas (2002) analisou os erros relacionados aos aspectos conceituais e à compreensão dos procedimentos nas resoluções de equações do primeiro grau. Ao averiguar os erros cometidos por alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola particular de São Paulo, ao resolverem equações do primeiro grau com coeficientes inteiros, o autor verificou que grande parte dos sujeitos da pesquisa apresentou soluções vinculadas à mecanização de técnicas associadas à utilização de frases como: "isolar o x" e "passar e mudar o sinal". Tal fato ficou evidente ao analisar que estes alunos não conseguiam validar a solução encontrada, pois estes não conseguiam interpretar o valor obtido como sendo solução da equação. Justificavam o resultado obtido pelas aplicações e regras utilizadas para resolver a equação.

Ao realizar uma pesquisa cujo objetivo era compreender como e porquê os alunos erram ao resolverem equações do primeiro grau, o autor aponta para melhorias em relação a uma abordagem do ensino de equações, em particular sobre seus métodos de resoluções, de modo a contribuir para a compreensão dos alunos.

Em uma pesquisa de mestrado, Teles (2002) realizou um estudo diagnóstico, a partir da análise em duas coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental. Nessa pesquisa, a autora investigou de que forma a compreensão das propriedades de equivalência e de operações aritméticas inversas interferem no estudo de Álgebra, mais especificamente, na resolução de equações do primeiro grau. Nesse sentido, para coleta de dados, um teste individual escrito foi realizado com um grupo de 62 alunos que cursavam ou o Ensino Fundamental ou o Ensino Médio. Ao analisar as respostas dos alunos, a autora verificou que as propriedades da igualdade não foram utilizadas corretamente e, desta forma, a maior parte dos sujeitos da pesquisa evidenciou não compreender o conceito de equação, no sentido de equilíbrio. Além disso, a autora acredita que os erros registrados nas resoluções apresentadas pelos alunos ao resolveram equações do primeiro grau são parcialmente herdados da Aritmética ou decorrentes da ruptura existente entre a Aritmética e a Álgebra.

Ribeiro (2007), em sua tese de doutorado, apresentou um estudo sobre os significados da noção de equação no ensino da Matemática. Numa pesquisa de cunho teórico o autor fez um levantamento histórico a partir de pesquisas na área da Educação Matemática e de fontes bibliográficas históricas, além de um estudo matemático da noção de equação. Os dados, analisados sob à luz das teorias de Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval e da Transposição Didática, de Yves Chevallard, sugerem multisignificados para a noção de equações. Nessa perspectiva, os resultados apontam para três diferentes significados da noção de equação: “[...] uma relacionada a um caráter pragmático, outra relacionada a um caráter geométrico e uma terceira relacionada a um caráter estrutural” (RIBEIRO, 2009, p.83).

Segundo o autor, os diferentes significados para a noção de equação foram produzidos, em parte, pois consideram a noção de equação enquanto objeto de estudo – conforme aparece ao longo da história – já a outra parte, acredita na concepção de equação como um algoritmo – como é encontrado nos livros didáticos. O autor discute, ainda, a relevância de compreender equação, primeiramente, desprendido de definições ou formalismos, considerando-a como uma noção primitiva que pode ser utilizada de maneira axiomática e de maneira corriqueira.

Lima (2007), em sua tese de doutorado, buscou compreender os significados atribuídos pelos alunos do Ensino Médio a equações do primeiro grau e aos métodos de resolução. A partir de um estudo estatístico realizado com alunos dos dois primeiros anos do Ensino Médio, da região metropolitana de São Paulo, a autora concluiu que grande parte dos sujeitos da pesquisa considera uma concepção de equação como uma conta que deve ser efetuada. Nesta concepção, que ela chama de concepção Conta, “[...] o sinal de igual é visto como um sinal operacional” (LIMA, 2007, p. 282) e não como um símbolo próprio de uma relação de equivalência.

Ao pesquisarmos os estudos citados nesta seção, foi possível verificar as principais concepções responsáveis por estabelecer algumas das dificuldades apresentadas pelos alunos em termos de resolução de equações do primeiro grau. Acreditamos que a concepção operacional do sinal de igual é o fator mais determinante na construção de equivalência entre equações. Neste sentido, estas adversidades integram a partida de nosso trabalho.

Nossa investigação busca compreender de que forma a abordagem dada ao ensino de conceitos de Álgebra favorece a Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau. Neste sentido, dentre as concepções previamente determinadas, a partir da literatura, encontram-se as relacionadas com o conhecimento dos alunos quanto às propriedades de equivalência. Este foco é a principal diferença desta pesquisa em relação às pesquisas citadas neste capítulo.

3 ENSINO DE ÁLGEBRA

Neste capítulo, na primeira seção, apresentamos alguns aspectos históricos do ensino de Álgebra no Brasil, sob a óptica de Miguel, Fiorentini e Miorim (1992). Nessa perspectiva, destacamos os percursos históricos que o ensino da Álgebra perpassou durante os movimentos educacionais brasileiros e como estes influenciam no modo como atualmente ensinamos Álgebra.

Nas seções seguintes, destacamos algumas investigações teóricas da Educação Matemática e como estas estabelecem diferentes concepções da Educação Algébrica. De maneira alguma, pretendemos listar todas as concepções da Educação Algébrica existentes. Nossa intenção, nesse primeiro momento, é analisar e compreender de que maneira diferentes concepções da Educação Algébrica influenciam na Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau.

3.1 ASPECTOS HISTÓRICOS E REFLEXÕES ACERCA DA EDUCAÇÃO ALGÉBRICA NO BRASIL

O cenário atual do ensino de Álgebra no Brasil foi, aos poucos, sendo construído e, a partir das várias etapas de seu desenvolvimento, chegou a seu estado atual. Nessa perspectiva, uma breve discussão sobre como se deu o processo de constituição da Educação Algébrica brasileira torna-se necessária para compreender como o ensino de Álgebra é abordado em sala de aula nos dias atuais.

Esta seção apresenta um resgate da pesquisa de Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), que discute o ensino da Álgebra a partir de uma perspectiva histórica. Sob este olhar, serão destacados os percursos históricos que o ensino da Álgebra perpassou através dos movimentos educacionais brasileiros e como estes influenciam no modo como atualmente ensinamos Álgebra na Escola Básica.

Em um artigo cuja discussão apresentada faz alusão a um pêndulo, Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), contrapõem o ensino de Álgebra e de Geometria ao longo da história da educação Matemática brasileira. Através da descrição de fatos históricos e apoiando-se na análise de manuais didáticos, programas e propostas curriculares oficiais e estudos históricos sobre o ensino da Matemática brasileira, destacam que, em certos momentos da história escolar, os holofotes estavam voltados mais ao ensino da Geometria e, em outros, o maior destaque foi dado ao ensino de Álgebra. Os autores iniciam a discussão destacando fatos a respeito do ensino de Matemática antes do Movimento da Matemática Moderna, durante este período e concluem o estudo destacando a tendência atual no ensino de Álgebra e Geometria.

De acordo com a pesquisa de Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), a intenção de se introduzir legalmente a Álgebra no ensino brasileiro inicia-se a partir da Carta Régia de 19 de agosto de 1799. Assim, é apenas no início do século XIX que, pela primeira vez, o estudo de Álgebra passa a fazer parte do ensino secundário brasileiro que, até então, dividia o ensino de Matemática em três eixos: Aritmética, Geometria e Trigonometria. Nesta época, para cada uma das três áreas havia programas de ensino, livros e professores diferentes. A partir da reforma Francisco Campos (1931), a Álgebra, juntamente com a Aritmética, a Geometria e a Trigonometria, passa a estabelecer um conjunto de componentes curriculares que recebe o nome de “Matemática”. Nesta época, nas diversas tentativas de se criar uma organização de forma seriada para o ensino secundário, percebeu-se que “quase sempre o estudo completo da Álgebra sucedia o estudo completo da Aritmética e antecedia o estudo completo de Geometria.” (MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992, p. 40).

A partir deste momento, aparentemente, havia se estabelecido um equilíbrio no ensino dessas quatro áreas (Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria). Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) destacam, no entanto, que esse equilíbrio era, na realidade, enciclopédico, pois existia somente em nível de legislação. Na prática, em sala de aula, era possível verificar que havia muita diferença entre o plano legal e a realidade escolar, haja vista que, naquele momento, não havia uma consciência clara em relação à importância de cada um desses quatro campos.

Nesta época, destacou-se um ensino de caráter mais reprodutivo, sem clareza, em que tudo era considerado importante e essencial. O ensino de Matemática era abordado com ênfase na memorização e na utilização de regras, evidenciando uma ausência de reflexão crítica acerca dos conteúdos e das formas de abordá-los.

Neste período, o movimento oscilatório – descrito por Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) através da alusão a um pêndulo – pendia mais para o ensino de Geometria, que era considerada mais relevante, pois sua abordagem era feita de maneira mais rigorosa e, na maioria das vezes, de forma axiomático-dedutiva.

Em contraposição, autores como Moraes, Bezerra e Sousa (1959) destacam que a Álgebra tinha um caráter mais instrumental, útil para resolver equações e problemas, cuja abordagem era, preponderantemente, mecânica e automatizada, restrita às regras de transformação das expressões algébricas. Este fato culminou para que, durante esta fase da história da Educação Matemática no Brasil, os tópicos relativos à Álgebra se mantivessem praticamente inalterados. Outro destaque em relação ao ensino de Álgebra nesta época, é que havia uma relação de complementaridade entre Aritmética e Álgebra: a Álgebra, devido ao seu poder de generalização, era encarada como ferramenta mais potente que a Aritmética, pelas suas possibilidades na resolução de problemas.

Dando sequência à ordem cronológica, nos meados da década de 1960, iniciava-se o Movimento da Matemática Moderna, movimento internacional do ensino de Matemática que propiciou mudanças significativas nas práticas escolares. De acordo com Búrigo (2010), as principais contribuições desse movimento no Brasil foram:

> [...] a criação de vários grupos de estudo dedicados ao ensino da Matemática, a realização sistemática de cursos para professores num período de quinze anos, a reformulação de livros didáticos e a inclusão de novos tópicos nos programas curriculares do ensino primário e secundário. (BURIGO, 2010, p. 1).

Um dos principais objetivos deste movimento era a unificação dos três campos fundamentais da Matemática escolar através da introdução de tópicos unificadores, como a teoria dos conjuntos, as funções e as estruturas algébricas.

Com o surgimento do Movimento da Matemática Moderna, a Álgebra passou a ter maior destaque, recebendo mais rigor e assumindo uma maior preocupação em relação às características lógico-estruturais dos conteúdos e à precisão da linguagem. Assim, o cunho pragmático, útil para resolver problemas, deixou de caracterizar o ensino de Álgebra. Nesta época, o programa de Álgebra começava pelo estudo da teoria de conjuntos e a ênfase era nas operações e nas suas propriedades.

Em contrapartida, houve uma tentativa de mudar a maneira euclidiana clássica do ensino de Geometria para uma mais atualizada e rigorosa. Contudo, esta intenção fracassa, conforme apontam Miguel, Fiorentini e Miorim (1992, p. 48).

O caráter eclético que passa a assumir o ensino de Geometria – decorrente, em grande parte, do descrédito no papel que se acreditava estar ela desempenhando até então no ensino e da incompreensão do novo papel e do novo enfoque que deveria passar a desempenhar – acaba relegando-a a um segundo plano e, gradativamente, por essa e por outras razões, passa a configurar-se um quadro no qual a Geometria não ocupa um lugar significativo no currículo escolar.

Em função da grande ênfase dada ao ensino de Álgebra pelo Movimento da Matemática Moderna, os conteúdos de Geometria deixaram de se destacar como potencialmente ricos e, de certa forma, perderam seu lugar no currículo. Nesta fase, ocorre o abandono do ensino da Geometria. A busca na superação desse abandono passou a ser a grande preocupação após esse período, como concluem Miorim, Miguel e Fiorentini (1992, p. 21): "ocorre, então, por parte dos educadores matemáticos, um esforço no sentido de recuperar o ensino da geometria".

Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), enfatizam que, depois do Movimento da Matemática Moderna, a Álgebra parece retomar seu papel anteriormente ocupado, ou seja, de um estudo com a finalidade de resolver equações e problemas. Embora tenha-se investido esforços na intenção de recuperar o valor instrumental da Álgebra, seu caráter inicial foi mantido. Para os autores, a Álgebra, apesar de ocupar boa parte dos livros didáticos atuais, não tem recebido a devida atenção nos debates, estudos e reflexões a respeito do ensino da Matemática. Comentam sobre o ensino da Álgebra: "A maioria dos professores ainda trabalha a Álgebra de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões" (p. 40).

Nesse sentido, ao longo da nossa experiência em sala de aula, constatamos que a maioria dos alunos demonstra dificuldades em relação à resolução de equações, especificamente equações de primeiro grau. É possível observar, nestes alunos, que não há uma aprendizagem efetiva em Álgebra, pois estes não atribuem significados para a resolução de uma equação, apenas resolvendo-a por meio de um procedimento puramente mecânico.

Desta forma, para modificar este panorama, consideramos que investigações acadêmicas relacionadas à elaboração, aplicação e análise de tarefas escolares podem auxiliar professores do ensino básico a realizarem um ensino de Álgebra na qual o aluno possa atribuir o significado desejado.

Diante do exposto, esta pesquisa de mestrado busca realizar um estudo sobre o ensino de equações do primeiro grau de modo a torná-lo significativo para os alunos.

3.2 AS CONCEPÇÕES DA EDUCAÇÃO ALGÉBRICA DE FIORENTINI, MIORIM E MIGUEL

Nesta seção, apresentaremos as concepções da Educação Algébrica sob o ponto de vista de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e de que maneira os autores se posicionam quanto à forma como se trabalha Álgebra na escola. Os autores estabelecem três categorias de concepções: (1) linguístico-pragmática, (2) fundamentalista-estrutural e (3) fundamentalista-analógica. Passaremos, então, a descrever e analisar essas concepções:

1) Linguístico-pragmática: Preponderante no Brasil e em outros países durante todo o século XIX até a metade do do século XX, esta concepção considera que o mais importante na Educação Algébrica é a aquisição das técnicas e procedimentos requeridos pelo transformismo algébrico. Nessa perspectiva, o principal papel do ensino da Álgebra é viabilizar um instrumento técnico para resolver equações ou problemas equacionáveis. O importante não é a natureza ou relevância do problema, mas sim a forma como é criado. Portanto, o currículo é formado por uma sequência de tópicos que iniciam nas expressões algébricas (cálculo literal), perpasam pelas operações com as expressões e as equações e terminam na resolução de problemas com base nessas equações.

2) Fundamentalista-estrutural: Essa concepção surge durante o Movimento da Matemática Moderna e predomina no país nas décadas de 1970 e 1980. Em contraposição à primeira concepção, surge então, como uma nova forma de concepção algébrica que, baseada na linguística-postulacional, passa a ser o alicerce pedagógico da disciplina nos vários aspectos da Matemática escolar. Sua principal característica é fazer o estudo das estruturas das operações, com a realização da justificação lógica de cada passagem. Acreditava-se que a justificativa lógica dos fatos matemáticos garantiria não apenas a transposição desses resultados para qualquer problema ou situação dentro da Matemática, como também a aplicação em qualquer outra área do conhecimento.

3) Fundamentalista–analógica: Esta concepção volta a relacionar o papel pedagógico da Álgebra como instrumento de resolução de problemas. No entanto, há uma tentativa de se efetuar uma síntese das duas anteriores, procurando recuperar o valor instrumental da Álgebra, mas fazendo uso de recursos analógicos, geométricos (uso da noção de área para ensinar produtos notáveis) ou físicos (uso da balança de dois pratos para ensinar resolução de equações). Neste sentido, procurou-se no ensino de Álgebra a significação dos conceitos algébricos e a apropriação de sua linguagem, a partir da relação entre a Álgebra e a Geometria. A relação com a Geometria era justificada por promover um apelo visual. O uso de expressões algébricas e os seus termos eram justificados pelo uso do cálculo da área de quadrados e retângulos e o volume de cubos e prismas, por exemplo.

No quadro 1, destacamos a preocupação geral de cada uma das concepções da Educação Algébrica apontadas pelos autores.

CONCEPÇÃO	PREOCUPAÇÃO	CARACTERÍSTICA
Linguística – pragmática	Fundamentalista	Transformismo preponderantemente mecânico – formal
Fundamentalista – estrutural	Fundamentar o transformismo algébrico	Fundamentação de natureza lógico – estrutural
Fundamentalista – analógica	Fundamentar o transformismo algébrico	Fundamentação de caráter predominantemente geométrico

Quadro 1: Resumo das concepções da Educação Algébrica de Fiorentini, Miorim e Miguel

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) fazem uma síntese comparativa entre as três concepções e veem um ponto comum e didaticamente não positivo, que é a redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica. Todas as três tomam como ponto de partida a existência de uma Álgebra simbólica já constituída e reduz-se o ensino e aprendizagem ao transformismo algébrico. Conforme apontam os autores

> [...] as primeiras tenderam a priorizar a linguagem em detrimento do pensamento, também as últimas acabaram enfatizando o ensino de uma linguagem algébrica já constituída, em detrimento da construção do pensamento algébrico e de sua linguagem. (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993, p. 85).

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) nos chamam a atenção que, para repensarmos a Educação Algébrica, devemos necessariamente repensar a relação que se estabelece entre pensamento e linguagem, pois a tendência da Educação Algébrica tem sido acreditar que o pensamento só se manifesta e se desenvolve através da manipulação sintática da linguagem. Eles explicam, portanto, sobre o que pensam em relação ao pensamento e a linguagem.

Subsiste entre pensamento algébrico e linguagem não uma relação de subordinação, mas uma relação de natureza dialética, o que nos obriga, para melhor entendê-la, colocar as questões de quais seriam os elementos caracterizados de um tipo de pensamento que poderia ser qualificado como algébrico.

Visando desenvolver uma relação de interdependência da linguagem e do pensamento matemático, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) propõem uma quarta concepção da Educação Algébrica que está em contraposição às três citadas anteriormente. Essa concepção sugere começarmos o ensino de Álgebra por meio da exploração "situações-problema relativamente abertas ou problematização de fatos tidos como aritméticos ou geométricos que demandem a construção de generalizações, a representação de número generalizado ou de grandezas incógnitas e variáveis" (p. 33-34).

Os autores sugerem uma nova maneira de organizar um currículo para a Educação Algébrica, no que se deve considerar como sendo relevante na Álgebra escolar e, também, no modo como se deve encaminhar o processo de ensino e de aprendizagem. No entanto, o que ainda se observa nos dias atuais, em termos de Educação Básica, está fortemente relacionado com a concepção fundamentalista-analógica, pois a aquisição das técnicas e procedimentos requeridos pelo transformismo algébrico ainda é muito valorizada, embora tente-se disfarçar esta intenção utilizando-se de recursos analógicos.

De fato, o que se observa é que, normalmente, o primeiro contato do aluno com a Álgebra escolar se dá a partir do estudo de equações. Além disso, acreditamos que há uma insistência em tratar a Álgebra apenas como um instrumento técnico para resolver equações ou problemas equacionáveis o que causa muitas defasagens em termos de quais conceitos da Álgebra o aluno deve saber ao concluir o Ensino Básico.

3.3 AS CONCEPÇÕES DA EDUCAÇÃO ALGÉBRICA DE ZALMAN USISKIN

Em um artigo que discute as diferentes concepções da Álgebra escolar, Usiskin (1995) destaca que a Álgebra abordada na escola básica está relacionada com a compreensão do significado das letras, frequentemente chamadas de variáveis, e das operações que estão relacionadas com estas variáveis. Nesta perspectiva, o autor salienta que a principal característica da Álgebra escolar é a utilização das letras como símbolo para representar objetos e, muitas vezes, os alunos do Ensino Básico iniciam o estudo de Álgebra quando encontram variáveis pela primeira vez.

Neste sentido, Usiskin (1995) afirma que as concepções de variável comportam muitas definições, conotações e símbolos, destacando que resumir o estudo das variáveis a uma única concepção implica em simplificar e distorcer os objetivos da Álgebra escolar. O autor assevera que as concepções de variável confirmam a importância da Álgebra e as possibilidades de suas aplicações, além da relação entre essas e os distintos usos das variáveis, destacando que:

> A Álgebra continua sendo um veículo para resolução de certos problemas, mas também é mais do que isso. Ela fornece meios para se desenvolverem e se analisarem relações. E é a chave para caracterização e a compreensão das estruturas matemáticas. Dados esses trunfos e a matematização crescente da sociedade, não é de surpreender que a álgebra seja hoje a área-chave de estudo da matemática da escola secundária e que essa posição de destaque provavelmente perdure por muito tempo. (USISKIN, 1995, p. 21).

Tais concepções são classificadas, segundo Usiskin (1995), de quatro maneiras: (1) Álgebra como Aritmética generalizada, (2) Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, (3) Álgebra como estudo de relações entre grandezas e (4) Álgebra como estudo das estruturas. Descrevemos, a seguir, essas concepções:

1) A Álgebra como aritmética generalizada: Nesta concepção, as variáveis assumem a função de traduzir e generalizar modelos matemáticos, operações e expressar através da Álgebra conceitos aritméticos. Nesta perspectiva, pensa-se nas variáveis como generalizadoras de modelos. Por exemplo, o que se espera do aluno é que ele possa generalizar igualdades como $1 + 4 = 4 + 1$, na qual a ordem das parcelas não altera a soma, escrevendo-as como $a + b = b + a$. Nessa concepção da Álgebra como Aritmética generalizada, as ações importantes para o estudante de escola básica são as de traduzir e generalizar.

2) A Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas: Nesta concepção, as incógnitas têm a finalidade de simplificar e resolver um problema matemático. É o caso de problemas do tipo: Adicionando 13 ao quádruplo de um número, resulta em 25. Que número é esse? Espera-se que os alunos traduzam o problema para a linguagem algébrica, chegando à seguinte expressão: $4x + 13 = 25$. Em relação à concepção de Álgebra como Aritmética generalizada, a solução do problema encerra-se ao traduzir-se este problema da linguagem natural para a linguagem algébrica. Contudo, para a concepção da Álgebra como estudo de procedimentos, o problema apenas iniciou, pois a partir desse momento, os alunos aplicam procedimentos para resolver a equação até obter sua solução.

Usiskin (1995) destaca que, ao resolver este tipo de problema, muitos alunos apresentam dificuldades na passagem da Aritmética para a Álgebra, haja vista que, aritmeticamente, a resolução deste problema consiste em subtrair 13 de 25 e dividir o resultado por 4. No entanto, a forma algébrica $4x + 13$ envolve a adição de 13 e a multiplicação por 4, que são operações inversas da subtração e da divisão. Para escrever a equação, raciocinamos de maneira contraria a que utilizamos para resolver o problema aritmeticamente.

Nesta concepção, Usiskin (1995) afirma que as variáveis são ou *incógnitas* ou *constantes* e as principais instruções são, diferentemente da primeira concepção, *simplificar* e *resolver*. Nesta percepção, o aluno necessita ter, além da capacidade de traduzir o problema para a linguagem algébrica, dominar técnicas para manipular as equações a fim de obter sua solução. A letra tem caráter de incógnita, um valor a ser encontrado e não algo que varia.

3) A Álgebra como estudo de relações entre grandezas: Esta concepção está diretamente relacionada com o estudo das fórmulas, pois estas não apresentam as variáveis como incógnitas ou letras utilizadas para generalizar modelos numéricos. Por exemplo, quando escrevemos a fórmula da área de um retângulo: A = b.h, não se está buscando solução para esta forma, ou seja, não se resolve nada. A diferença entre esta concepção e as anteriores é que, de fato, neste caso, as variáveis variam.

Descrevendo esta concepção, Usiskin (1995, p. 15) exemplifica: "O que ocorre com o valor de 1/x quando x se torna cada vez maior?". O objetivo desta questão não é determinar o valor de x, logo, x não é uma incógnita. Da mesma forma, ao apresentá-la para um aluno, não é sugerido que este traduza o problema para a linguagem algébrica, conforme a concepção 2. Há um modelo a ser generalizado, no entanto, não se trata de um modelo que se pareça com aritmética, pois não faz sentido perguntar, por exemplo, o que aconteceria com o valor de ½ quando 2 se torna cada vez maior. Neste caso, temos um modelo fundamentalmente algébrico. (USISKIN, 1995, p. 16).

Além disso, Usiskin (1995) esclarece que, nesta concepção, uma variável pode ser tanto um argumento que "representa os valores do domínio de uma função" (p. 16) quanto um parâmetro que "representa um número do qual dependem outros números" (p. 16).

4) A Álgebra como o estudo das estruturas: Nessa concepção, a variável é caracterizada como um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades. Sob esta perspectiva, as atividades desenvolvidas pelos alunos fazem uso das variáveis sem atribuição de um significado numérico, isto é, sua resolução é fundamentalmente realizada através da manipulação algébrica das variáveis determinadas por propriedades. Este fato distancia esta concepção das demais.

Usiskin (1995) destaca que, em cursos superiores, a Álgebra trata do estudo de estruturas como, por exemplo, grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais e que isso parece ter pouca ou nenhuma semelhança com a Álgebra da Escola Básica, embora sejam essas estruturas que fundamentam a resolução de equações nesse nível de ensino. Ao fazer esta comparação, o autor destaca que, embora na Escola Básica não estejam explícitas, essas estruturas são fundamentais para que se possa argumentar aos alunos por que certas equações podem ou não serem resolvidas. Nesse sentido, os alunos desta etapa escolar tendem a tratar as variáveis sem atribuir-lhes significado.

O quadro 2, apresenta um resumo sobre as diferentes concepções de Álgebra e a relação existente com os diferentes usos das variáveis.

Concepção da Álgebra	**Uso das variáveis**
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Quadro 2: Resumo das concepções da Educação Algébrica de Zalman Usiskin

Na concepção de Usiskin (1995) Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, as variáveis são incógnitas. É neste universo que está inserido nosso estudo, pois as variáveis de uma equação do primeiro grau são incógnitas.

3.4 AS CONCEPÇÕES DA EDUCAÇÃO ALGÉBRICA DE LINS E GIMENEZ

Dentre pesquisadores que estabelecem categorias para classificar as concepções da Educação Algébrica destacam-se Lins e Gimenez que, em sua obra, discutem algumas características do processo de produção de significados para a Álgebra e a Aritmética.

Em sua discussão, Lins e Gimenez (1997) destacam que, corriqueiramente, a Álgebra escolar é tratada como generalização da Aritmética. Sob esta óptica, os autores argumentam que a ideia de que aprender Aritmética deve vir antes de aprender Álgebra além de não ter fundamento, em muitas situações, é prejudicial. Nesta perspectiva, conforme destacam os autores, as leituras tradicionais: “Álgebra é a Aritmética generalizada” e “Álgebra é a estrutura da Aritmética” são possíveis, mas estreitas demais para uma educação Matemática.

Para Lins e Gimenez, a Álgebra escolar representa um momento de ruptura da educação Matemática escolar. Este corte desperta alguns questionamentos: a introdução da Álgebra no sétimo e oitavo anos é precoce? Será que os alunos teriam no sétimo e oitavo anos atingido a maturidade intelectual requerida? A solução seria adiar a introdução da Álgebra? Para Lins e Gimenes (1997, p. 10) *“...é preciso começar mais cedo o trabalho com Álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra.”*

Em se tratando especificamente da Álgebra, Lins e Gimenez (1997) esclarecem que “não há consenso a respeito do que seja pensar algebricamente” (p. 89). Para os autores, a atividade algébrica está estreitamente relacionada a conteúdos e na tentativa de se relacionar o que é e o que não é Álgebra.

Esta ideia, instituída a partir de uma base conteudista, possibilita aos educadores matemáticos, segundo Lins e Gimenez (1997), chegar a um consenso sobre quais são e de que forma trabalhar os conteúdos de Álgebra. Contudo, esse conceito traz consigo alguns problemas que se estabelecem no fato de que esse tipo de abordagem não nos permite identificar dois itens fundamentais: a) saber se existem outros tópicos que deveriam estar presentes entre esses conteúdos e, também, b) organizar um currículo para o ensino de Álgebra determinando quais são os tópicos mais relevantes, sem incluir apenas conteúdos tradicionalmente estabelecidos nos currículos.

Neste sentido, Lins e Gimenez (1997) verificam algumas concepções da Educação Algébrica e defendem que essa atividade é descrita por muitos como “fazer ou usar Álgebra”, e que uma forma mais comum desse aspecto é a que descreve a atividade algébrica como “calcular com letras”. Desta forma, destacam duas perspectivas: atividade algébrica caracterizada pelo uso das notações; e atividade algébrica caracterizada por conteúdos.

Nesta perspectiva, concluem que “caracterizações por conteúdo ou por notação deixam de fora coisas que gostaríamos de caracterizar como atividade algébrica” (LINS; GIMENEZ, 1997, p.99).

As diversas compreensões do que é atividade algébrica são responsáveis pelas várias tendências de abordagens para a Educação Algébrica. Nesta perspectiva, Lins e Gimenez (1997) destacam três principais concepções da Educação Algébrica: (1) letrista, (2) letrista-facilitadora e (3) Modelagem Matemática. A seguir, destacamos estas concepções:

1) Letrista: Sob a óptica desta concepção, a atividade algébrica resume-se ao cálculo com letras e algoritmos. Suas atividades caracterizam-se pelo desenvolvimento de técnicas (algoritmos) e depois pela prática (exercícios), não havendo reflexão nem investigação sobre a Álgebra. Esta tendência se destaca como uma atividade de *cálculo literal* e, segundo os autores, é esta visão que ocorre na maior parte dos livros didáticos brasileiros.

2) Letrista-Facilitadora: Esta concepção ainda apresenta uma abordagem letrista, contudo considera que a capacidade de lidar com expressões literais é alcançada por "abstração", por meio da manipulação de situações "concretas" ou material concreto.

Lins e Gimenez (1997) consideram que essa abordagem é insatisfatória, pois pesquisas realizadas com estudantes sugerem que, embora, algumas vezes, a utilização de material concreto seja útil, estes não estabeleceram relação entre o trabalho desenvolvido com o material concreto e o que transpunham para o formal.

Neste sentido, os autores acreditam que fazer uso de situações concretas como estratégia facilitadora para a passagem do pensamento "concreto" para o pensamento "formal" cria um distanciamento que gera dificuldades na passagem de atividades concretas para outras formais relativas ao mesmo conteúdo.

3) Modelagem Matemática: Outra concepção de Educação Algébrica seria aquela em que o *concreto* também está presente, como ponto de partida, porém com um sentido diferente da concepção Letrista-Facilitadora, pois é visto como o real, e as atividades são situações reais ou realistas.

Nessa perspectiva, as tarefas propostas são de investigação de situações reais e a Álgebra não é o objeto primeiro de estudo, e sim mais um instrumento de leitura do mundo. Nesse sentido, Lins e Gimenez (1997) destacam que "a Educação Algébrica se dá na medida em que a produção de conhecimento algébrico serve ao propósito de iluminar ou organizar uma situação, como ferramenta e não como objetivo primário do estudo" (p. 109).

Após constituírem essas considerações sobre atividade e Educação Algébrica, os autores propõem outra abordagem, pois consideram que as letristas e as letristas-facilitadoras não são suficientes. Nesta perspectiva, Lins e Gimenez (1997) desenvolvem um projeto de programa para a Educação Algébrica, no entanto, devido a sua extensão e propósito do presente trabalho, não descreveremos aqui. Esta proposta se baseia na Teoria dos Campos Semânticos de Rômulo Campos Lins.

O quadro 3, apresenta um resumo sobre as diferentes concepções de Álgebra de Lins e Gimenez (1997) e as diversas compreensões do que é atividade algébrica.

Concepção da Álgebra	**Atividade Algébrica**
Letrista	Cálculo Literal (cálculo com letras e algoritmos)
Letrista-Facilitadora	Abstração (manipulação de material concreto)
Modelagem Matemática	Investigação de situações reais (instrumento de leitura do mundo)

Quadro 3: Resumo das concepções da Educação Algébrica de Lins e Gimenez

4 A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE AUSUBEL

Neste capítulo, apresentamos aspectos da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Paul Ausubel, assim como as contribuições e relações com a pesquisa realizada e a prática implementada.

David Paul Ausubel desenvolveu uma teoria de aprendizagem cognitiva, conhecida como Teoria da Aprendizagem Significativa. Esta teoria tem como preocupação fundamental o estudo da aprendizagem escolar e suas implicações para o desenvolvimento de métodos de ensino eficazes. Neste sentido, o referencial teórico utilizado neste trabalho tem como base a teoria de Ausubel (1968, 1978, 1980)[2].

Ausubel (1980) propõem que, a partir dos conhecimentos pré-existentes na estrutura cognitiva do indivíduo, é que acontece a Aprendizagem Significativa. Ou seja, para que haja Aprendizagem Significativa, é necessário que os novos conteúdos tenham relação com os conteúdos pré-existentes, pois, assim, poderão ser modificados e darão outras significações àquelas já existentes. Conforme coloca o próprio autor (1980, iv):

> Se tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um só princípio, diria o seguinte: o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Averigue isso e ensine-o de acordo.

Assim, a Aprendizagem Significativa ocorre quando uma nova informação é relacionada a uma estrutura de conhecimento particular e específica, prévia, a qual Ausubel (1980) chamou de *conceito subsunçor* ou, simplesmente, *subsunçor*. Nessa perspectiva, para que um estudante possa organizar outros conhecimentos em sua estrutura cognitiva, as novas informações devem ser associadas a conteúdos prévios importantes do aprendiz, ou seja, a conceitos subsunçores relevantes.

Ausubel (1980) vê o armazenamento de informações na mente humana como sendo altamente organizado, formando uma hierarquia conceitual na qual elementos mais específicos de conhecimento são relacionados (e assimilados) a conceitos e preposições mais gerais, mas

[2] As referências 1978 e 1980, respectivamente, a segunda edição do texto "Educational Psychology: a Cognitive View" e a tradução desta edição para o português, têm os co-autores J.D. Novak e H. Hanesian. Ao longo desta seção, assim como nas seguintes, será usada basicamente a referência de 1980, porém, por uma questão de simplicidade, ela será citada somente como (Ausubel, 1980) ou, no caso de páginas, (1980, p...).

inclusivos. *Estrutura cognitiva* significa, portanto, uma estrutura hierárquica de subsunçores que são abstrações da experiência do indivíduo (MOREIRA e MASINI, 2011).

Para a teoria ausubeliana, o subsunçor vai se modificando à medida que se relaciona com a nova informação, tornando-se mais inclusivo e interagindo mais facilmente com as novas informações recebidas. Ademais, os subsunçores podem apresentar grandes diferenças de um aprendiz para outro, de acordo com as aprendizagens de cada um, pois, para Ausubel (2002), a habilidade de modificar conceitos significativos por parte do educando é uma função do grau geral de desenvolvimento ou da capacidade intelectual do mesmo.

Desta forma, o conceito novo deve fazer sentido para quem o está aprendendo e deve ser apresentado numa linguagem que também faça sentido, pois a linguagem desempenha um papel de facilitador da Aprendizagem Significativa através da recepção e descoberta e, sem ela, a aprendizagem pode ser elementar (AUSUBEL, 2002). Assim, a linguagem na teoria ausubeliana é um fator que contribui para a formação de conceitos, para a manipulação dos mesmos e para a resolução de problemas.

Para Moreira (2000), cada disciplina apresenta seus símbolos próprios, caracteristicamente palavras próprias e ensiná-las significa ensinar uma linguagem, um modo de falar e ver o mundo, considerando que cada linguagem desempenha uma maneira de perceber a realidade e enfatiza que "praticamente tudo que chamamos de 'conhecimento' é linguagem". (MOREIRA 2000, p. 8).

Partilhamos da ideia de que cada disciplina, e em especial a Matemática, apresenta uma linguagem própria, com símbolos característicos e inseparáveis e aprender essa linguagem implica em perceber, refletir, abstrair e expressar diferentemente sobre o mundo.

Os estudantes trazem conceitos próprios, adquiridos com a observação dos fatos de seu dia-a-dia ou da sua vivência escolar e, de alguma maneira, elaboram um modelo para sua interpretação. Por exemplo, alguns alunos podem ter ideias prévias sobre equivalência, simbologia e linguagem algébrica e esses conceitos, já existentes em sua estrutura cognitiva, servirão como subsunçores para o conceito matemático de equação e a relação entre eles. Ter a noção do que os alunos já sabem, inclusive de quais são suas concepções espontâneas é, na teoria ausubeliana, imprescindível para que ocorra Aprendizagem Significativa.

Ausubel (1980) destaca, ainda, que, para acontecer a Aprendizagem Significativa, é fundamental que as informações a serem assimiladas possuam conceitos relacionáveis na estrutura cognitiva do aprendiz, de forma substantiva e não arbitrária, com vínculo direto ao conhecimento pretendido, o qual deve ter significado lógico. Desta forma, o aprendiz deve se predispor a relacionar o material também, de forma substantiva e não arbitrária, à sua estrutura cognitiva. De forma não arbitrária significa que o novo material irá se relacionar com conhecimentos especificamente relevantes, que são os subsunçores (MOREIRA, 1999).

Entre outros fatores, a aprendizagem vai depender do material disponibilizado ao aluno. Esse material deve possuir “significado lógico” e ter relação com os subsunçores preexistentes na estrutura cognitiva do aluno. Além disso, é necessário que o aluno esteja disposto a aprender (MOREIRA e MASINI, 2011). Se não houver interesse geral por parte do aluno, não haverá relação afetiva favorável, o que poderá impedir a ancoragem dos novos conceitos aos subsunçores existentes em sua estrutura cognitiva.

Por outro lado, Ausubel (1980) argumenta que a Aprendizagem Mecânica ocorre quando conceitos inéditos são apresentados ao aprendiz e, por utilizarem muito pouca ou nenhuma informação prévia na estrutura cognitiva, estes são armazenados de maneira aleatória. Contudo, no momento em que é mecanicamente assimilada, passa a se integrar ou criar novas estruturas cognitivas.

Na Aprendizagem Mecânica não há relação entre as novas informações e os subsunçores relevantes do estudante. Entretanto, há situações em que o aprendiz não possui subsunçores que tenham relação com os novos conceitos; nesses casos, é necessário, antes, introduzi-los através da Aprendizagem Mecânica.

Nestas situações, Ausubel (1980) sugere fazer uso de organizadores prévios como recurso didático facilitador da Aprendizagem Significativa. Segundo Moreira (2006), os organizadores prévios são materiais introdutórios que se apresentam no início de cada conteúdo desenvolvido. O seu nível de generalidade, inclusividade e abstração é maior do que o assunto que antecede.

Ausubel (1980) destaca que os organizadores prévios devem ser utilizados quando o aprendiz não possui, em sua estrutura cognitiva, subsunçores que aportem novas aprendizagens ou quando se constatar que os subsunçores existentes em sua estrutura cognitiva não são suficientemente cognoscíveis, estáveis e não organizados para desempenhar as funções de ancoragem do novo conhecimento. Tais instrumentos também podem servir como ativadores dos subsunçores que não estavam sendo usados pelo aprendiz, mas que estão presentes na sua estrutura cognitiva.

> A principal estratégia advogada nesse livro, para deliberadamente manipular a estrutura cognitiva de modo a aumentar a facilitação proativa e minimizar a interferência proativa, envolve o uso de materiais adequados relevantes e inclusive introdutórios (organizadores) que são maximalmente claros e estáveis. Estes organizadores são normalmente introduzidos antes do próprio material de aprendizagem e são usados para facilitar o estabelecimento de uma disposição significativa para a aprendizagem. Os organizadores antecipatórios ajudam o aluno a reconhecer que elementos dos novos materiais de aprendizagem podem ser significativamente aprendidos relacionando-os com aspectos especificamente relevantes da estrutura cognitiva existente. (AUSUBEL, 1980, p.143)

Moreira (2008) salienta que é muito difícil afirmar se um determinado material é ou não um organizador prévio, argumentando que tal fato está condicionado à natureza do material de aprendizagem, do nível de desenvolvimento cognitivo do aprendiz e do seu grau de experiência prévia com a tarefa de aprendizagem.

Além disso, Moreira e Masini (2011) argumenta que, apesar da utilização de organizadores prévios ser apenas uma tática apresentada por Ausubel (1980) para manipular a estrutura cognitiva do indivíduo com a intenção de facilitar a Aprendizagem Significativa, esta tem sido a característica mais investigada da teoria. E, apesar de já terem sido realizadas várias pesquisas para testar a eficácia dos organizadores prévios, os resultados encontrados ainda são contraditórios. O autor argumenta que, talvez, isto seja consequência de que os principais aspectos da teoria tenham sido ignorados nestas pesquisas, destacando que: “Por exemplo, de acordo com a teoria, não se pode esperar que os organizadores facilitem a aprendizagem de informações “sem significado”, e sim de materiais potencialmente significativos.” (MOREIRA e MASINI, 2011, P.23)

No decorrer de seus estudos sobre organizadores prévios, Ausubel (1980) afirma que um organizador prévio pode ser expositivo ou comparativo. Ele será um organizador prévio expositivo quando o novo material de aprendizagem não for familiar ao aprendiz. Neste caso, o organizador prévio deverá conter ideias e conceitos novos baseados no que o aprendiz já sabe, suprindo a falta de ideias ou proposições relevantes, tendo uma relação de superordenação com o novo material de aprendizagem. Já um organizador prévio comparativo deverá ser utilizado para integrar ou discriminar os novos conceitos similares ou distintos dos já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz, ou seja, quando o novo material de aprendizagem for familiar entre o que o aprendiz já sabe e o novo conceito (MOREIRA e SOUSA, 2003).

Segundo Ausubel (1980), quando o aluno não apresenta ideias pertinentes sobre um assunto específico o professor deve fazer uso do organizador expositivo. Nesse sentido, este tipo de organizador prévio deve ser utilizado quando o aprendiz está aprendendo um assunto novo, ou seja, no momento em que se tratar de um tema desconhecido para os alunos. Desta forma, esses organizadores teriam uma correspondência de superordenação com o novo conhecimento a ser ensinado.

É o caso, por exemplo, de um texto que trata da escrita dos números ao longo da história que serviria como introdução ao estudo do sistema de numeração decimal. Esse texto seria apresentado num nível maior de abrangência. Ao utilizar este tipo de organizador prévio, o aprendiz pode ser favorecido por uma visão geral do conteúdo, antes do detalhamento dos seus elementos constitutivos.

Por outro lado, Ausubel (1980) sugere o uso do organizador comparativo para tratar de assuntos de aprendizagem que sejam familiares ao aprendiz. Nesse sentido, o autor defende que este tipo de organizador prévio aumenta a discriminalidade entre as ideias novas e as existentes, que são essencialmente diferentes, mas que podem causar alguma confusão.

Desta forma, essa categoria de organizador prévio será utilizada quando o aluno dispuser de ideias claras e disponíveis sobre o assunto a ser tratado e deverá destacar as semelhanças e diferenças que existem entre o conteúdo a ser aprendido e aquele que está disponível na mente do aluno.

Moreira (2006) destaca que os organizadores prévios têm como principais objetivos: aumentar a pré-disposição para a Aprendizagem Significativa; fornecer um suporte para a tarefa de aprendizagem; relacionar as novas ideias com as que o aluno já domina, o que permite que aquelas sejam melhor discriminadas e assimiladas; e fazer uma ponte entre o que é sabido e aquilo que é preciso saber para aprender mais rapidamente o novo material. Moreira (2006) aponta que “Segundo Ausubel, a principal função do organizador prévio é a de servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber a fim de que o novo material possa ser aprendido de forma significativa.” (p. 137).

Ausubel (1980) defende que a aprendizagem pode ocorrer de quatro maneiras diferentes: por recepção significativa; por recepção mecânica; por descoberta significativa; e por descoberta mecânica. O quadro 4, a seguir, organiza essas dimensões para o processo de aprendizagem.

As dimensões do processo de aprendizagem	
Como o aprendiz obtém os conceitos?	Por recepção
	Por descoberta
Como o aprendiz interioriza os conceitos?	De forma mecânica
	De forma significativa

Quadro 4: A aprendizagem na teoria da assimilação

Dessa forma, o aprendiz obtém os conceitos:

Por recepção: todos os conteúdos são apresentados na sua forma final ao aprendiz, sem que este tenha que descobrir regras ou princípios sozinho para poder entendê-los e aplicá-los. Apenas se exige ao aluno que interiorize a matéria de modo a poder reproduzir no futuro.

Por descoberta: Os conteúdos não são dados sob forma final, pelo que o aprendiz terá que descobrir alguma regra ou princípio antes de os poder interiorizar (incorporando-os na sua estrutura cognitiva).

O aprendiz interioriza os conceitos obtidos:

De forma mecânica: Quando a tarefa ou material de aprendizagem não é significativo nem ao ser apresentado nem se torna significativo durante o processo de interiorização. Ocorre quando há associações arbitrárias; falta conhecimento prévio relevante; ou a estratégia de interiorização adotada é arbitrária.

De forma significativa: Quando a tarefa ou material é tornado significativo ou compreendido no processo de interiorização. Ocorre quando a tarefa implica relacionar uma nova noção com outras já familiares ao aluno; ou quando o aluno adota uma estratégia adequada para tornar significativa a matéria.

De acordo com a teoria ausubeliana, cabe ao professor investigar e diagnosticar os conceitos subsunçores que o aluno possui e, neste sentido, buscar recursos que possam produzir uma Aprendizagem Significativa. Nessa perspectiva, a utilização de organizadores prévios para identificar ou desenvolver os conceitos subsunçores necessários para a Aprendizagem Significativa é uma excelente estratégia para facilitar a aprendizagem dos assuntos a serem apresentados.

Em nossa pesquisa, procuramos elaborar, aplicar e analisar uma sequência de atividades de tal maneira que, a partir do seu desenvolvimento, fosse possível identificar os conceitos subsunçores dos alunos em relação às equações do primeiro grau e, na ausência destes, verificar se estas atividades poderiam funcionar como organizadores prévios.

No próximo capítulo, apresentamos alguns aspectos referentes ao processo metodológico de coleta dos dados, caracterizamos a pesquisa e descrevemos as tarefas elaboradas.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentamos as escolhas feitas para desenvolver a análise deste estudo dissertativo. Desta forma, dividimos esta seção em quatro partes. Inicialmente, apresentamos um relato sobre a abordagem metodológica na qual nos detivemos, caracterizando nossa pesquisa como uma investigação qualitativa. Em seguida, na segunda e terceira partes, respectivamente, descrevemos os sujeitos da pesquisa e os instrumentos de coleta de dados. Por fim, na quarta parte, destacamos o processo de construção da sequência de atividades assim como os recursos utilizados durante as aulas.

5.1 CARACTERÍSTICAS DA PESQUISA

A abordagem metodológica escolhida para essa pesquisa foi a qualitativa que, segundo Günther (2006), tem a pretensão de aprofundar a compreensão dos fenômenos que investiga a partir de uma análise rigorosa e criteriosa desse tipo de informação, no qual o mais importante é o estudo das relações como compreensão e não apenas como transmissão de dados.

Nesse tipo de abordagem, o mais importante é compreender o processo de como as coisas acontecem e é nesse sentido que o método deve se adequar ao objeto de estudo, contemplando todas as variáveis como sendo importantes. Nesse sentido, diferentemente de uma análise quantitativa, não tem como objetivo testar hipóteses para comprová-las ou invalidá-las ao final do estudo; a intenção é a de compreender e reconstruir conhecimentos existentes sobre os temas investigados.

O foco de interesse deste estudo incide naquilo que é particular. Nesta perspectiva, para a realização dessa pesquisa, optamos pelo *estudo de caso* com um grupo de alunos do segundo ano do terceiro ciclo, equivalente ao oitavo ano do Ensino Fundamental, em uma escola da rede municipal de Porto Alegre. Para Ponte (1994), um estudo de caso refere-se a um estudo de uma entidade definida e, nesse sentido, caracteriza-se em uma análise muito particular, uma situação específica e única em diversos aspectos

> O investigador não pretende modificar a situação, mas compreendê-la tal como ela é. Para isso apóia-se numa "descrição grossa" (*thick description*), isto é, factual, literal, sistemática e tanto quanto possível completa do seu objeto de estudo. No entanto, [...] Pode ter igualmente um profundo alcance analítico, interrogando a situação, confrontando-a com outras situações já conhecidas e com as teorias existentes. (PONTE, 1994, p. 2-3).

Desta forma, as especificidades da pesquisa – a escola onde foi realizada a pesquisa; o plano político pedagógico da escola; os conteúdos abordados; a situação socioeconômica dos alunos – são entidades únicas, mas podem ter semelhanças com outros casos e situações. E, nesta perspectiva, o leitor pode aproveitar esta pesquisa para fazer comparações e desenvolver novas ideias, produzir novos significados, desenvolver novas compreensões a respeito do objeto de estudo e do assunto aqui apresentados.

5.2 SUJEITOS DA PESQUISA

Esta pesquisa foi realizada em uma escola da Rede Municipal de Ensino de Porto Alegre e os alunos envolvidos frequentavam as aulas regulares do segundo ano do terceiro ciclo da escola em questão. A sequência de atividades da pesquisa foi realizada no turno inverso ao horário de aula das turmas e foram oferecidas como aulas opcionais não vinculadas às aulas regulares de Matemática.

Inicialmente, das três turmas de segundo ano do terceiro ciclo da escola, dezessete alunos disponibilizaram-se a participar das aulas no turno inverso. Contudo, desde o primeiro encontro somente dez alunos participaram das atividades propostas e apenas cinco alunos estiveram presentes em todas as aulas do experimento prático da pesquisa.

Acreditamos que, tal fato está relacionado com questões sociais e organizacionais dos alunos envolvidos. A escola está localizada numa comunidade da periferia do município de Porto Alegre, onde a maioria dos estudantes vive em situação de vulnerabilidade social. Nesta comunidade, existe muita dificuldade de organização familiar, o que dificulta a frequência na escola em horários diversos ao da sala de aula. Além disso, muitos alunos estão inseridos em projetos no contra turno, participando de diferentes atividades que compõem a proposta de Educação Integral da Rede Municipal de Ensino de Porto Alegre.

A identidade dos sujeitos de pesquisa foi protegida por pseudônimos e um termo de consentimento informado (APÊNDICE A) foi assinado entre a pesquisadora, a orientadora e os responsáveis legais pelos alunos. Os sujeitos da pesquisa foram Ana, Bruno, Carla, Dani, Ella, Fredo, Guido, Heide, Igor e July.

Os encontros da pesquisa ocorreram uma vez por semana, durante cinco semanas. As aulas tinham a duração de dois períodos de cinquenta minutos.

5.3 COLETA DE DADOS

A coleta de dados da pesquisa ocorreu durante os meses de maio e junho de 2013. Ao longo do período, a implementação das atividades foi sofrendo algumas alterações e novos materiais foram surgindo para serem analisados.

Nesta investigação, foram utilizados os seguintes instrumentos de coleta de dados:

Diário de campo: durante a realização das aulas, a professora-pesquisadora registrou comentários feitos pelos alunos oralmente nos grupos ou em conversas com a mesma; observações a respeito do andamento do trabalho; questionamentos interessantes que surgiam ao longo das aulas. Neste sentido, o diário de campo permitiu sistematizar as experiências para posteriormente analisar os resultados.

Os apontamentos feitos no diário de campo não necessariamente retratam a realidade em si, mas a realidade vista na óptica da professora-investigadora, com as suas percepções e a suas concepções.

Registro dos alunos: ao longo de todas as aulas, os alunos faziam algum registro escrito, fosse para explicitar a resolução de alguma questão proposta, fosse para registrar alguma outra impressão sobre as atividades realizadas.

Fotografias e gravações das aulas: durante algumas aulas, foram fotografados e gravados momentos da realização e discussão das atividades propostas.

Questionário final: Para coletar as principais impressões dos alunos após o desenvolvimento da sequência didática, foi realizado um questionário final que tinha a intenção de identificar evidências da Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau.

5.4 SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Nesta pesquisa, procuramos realizar uma abordagem do ensino das equações de primeiro grau levando em consideração aspectos da teoria da Aprendizagem Significativa (AUSUBEL, 1980). Para tanto, procuramos elaborar uma sequência de atividades, cujo objetivo era identificar e/ou desenvolver alguns conceitos subsunçores que acreditamos que os alunos devam apresentar para aprender significativamente este conteúdo do ensino de Álgebra. Ou seja, baseando-se na crença de que um dos fatores de maior influência na aprendizagem refere-se àquilo que o aluno já conhece (AUSUBEL, 1980), nossa intenção era desenvolver materiais de ensino que propiciassem a Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau.

Desta forma, a sequência de atividades descrita neste capítulo é constituída de um conjunto de tarefas escolares, elaboradas na tentativa de verificar se a utilização da balança de dois pratos, como suporte representacional, oportuniza a compreensão do conceito de equivalência existente em uma equação, propiciando, assim, a Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau. Assim, procuramos verificar se a noção de equivalência era um conceito subsunçor necessário para que os alunos aprendessem significativamente o processo de resolução de uma equação do primeiro grau. Ou seja, no caso de identificarmos que os alunos não possuíam em sua estrutura cognitiva o conceito de equivalência em termos de uma equação, procuramos verificar se as atividades realizadas poderiam funcionar como organizadores prévios, que proporcionassem aos estudantes a compreensão da noção de equivalência e, assim, facilitar a Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau.

O quadro 5 organiza, em aulas, a sequência das atividades realizadas durante a pesquisa.

Aula	Recurso utilizado	Descrição
1	ODA[3] Equação do 1º Grau	Quadros dos slides 3 e 4: noção de equivalência em termos de uma balança de dois pratos.
2	ODA Equação do 1º Grau	Quadros dos slides 5 e 6: representação e resolução por símbolos e por letras.
3	ODA Balanza Algebraica	Resolução de equações com coeficientes naturais
4	ODA Balanza Algebraica Negativos	Resolução de equações com coeficientes inteiros
5	Folhas impressas	Resolução de equações; Questionário Final

Quadro 5: Descrição dos recursos utilizados e das atividades realizadas por aula

Assim, nesta seção, apresentamos as atividades que foram desenvolvidas com os sujeitos da pesquisa a partir da utilização de dois Objetos Digitais de Aprendizagem (ODAs). Com a intenção de favorecer a compreensão da noção de equivalência, foram utilizados dois dispositivos virtuais. Estes ODAs procuram estabelecer a noção de equivalência, a partir da associação do equilíbrio de uma balança de dois pratos com uma igualdade matemática.

Desta maneira, procurou-se explorar atividades que permitiam ao aluno expressar a igualdade da forma que considerasse mais conveniente. Assim, aproveitando esta diversidade de formas apresentadas, foram propostas discussões até que fosse possível escrever uma equação em linguagem matemática.

Da mesma forma, verificamos ao longo da pesquisa que atividades que favorecem a compreensão da simbologia e linguagem algébrica, podem contribuir para a Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau. Assim, mesmo nas atividades que fazem uso da

[3] Objeto Digital de Aprendizagem (ODA).

balança de dois pratos, abordamos uma maneira de traduzir para a linguagem algébrica a representação dos pesos[4] colocados em cada um dos pratos da balança.

Nossa intenção de utilizar os ODAs nas aulas de Matemática vai ao encontro das ideias de Pierre Levy (1999), que defende o uso das tecnologias digitais em sala de aula. O autor afirma que elas fornecem novas formas de acesso à informação, pois suas memórias são dinâmicas e podem ser partilhadas em um grande número de indivíduos, constituindo um potencial de inteligência conjunta/coletiva entre os grupos humanos.

Da mesma forma, acreditamos que o uso do computador na escola não serve como uma máquina pronta para transmitir o conhecimento. Conforme aponta Valente (2008), a grande utilização desse instrumento é o pacto interacional que ele, juntamente com o aprendiz, constituem. Nesse sentido, para (NICOLA e RODRIGUES, 2011, p.02) "[...] objetos de aprendizagem são recursos disponibilizados pela internet com o objetivo de promover o conhecimento e que recebem diferentes definições, dependendo do autor que o estiver usando."

Abordar a representação de pesos em uma balança de dois pratos através da tecnologia digital disponibiliza-nos um objeto dinâmico e manipulável que, diferentemente da balança concreta, garante a precisão no equilíbrio. Nesse sentido, concordamos com as ideias de Gravina e Basso:

> A tecnologia digital coloca à nossa disposição ferramentas interativas que incorporam *sistemas dinâmicos de representações* na forma de objetos *concreto-abstratos*. São concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados e são abstratos porque respondem às nossas elaborações e construções mentais. (2012, p. 14)

Dessa forma, acreditamos que, em termos de sala de aula, utilizar uma balança concreta dificultaria estabelecer uma situação em que fosse possível verificar exatamente a massa de um objeto, por exemplo.

Ademais, esperamos que as atividades realizadas com os sujeitos desta pesquisa (APÊNDICE B) possam ser aplicadas e que sirvam de inspiração para que outros professores possam criar novas tarefas escolares, aplicá-las e analisá-las.

---

[4] Na linguagem cotidiana, é muito comum utilizar o termo peso de maneira equivocada. Sabemos que quando uma pessoa diz estar consultando o seu peso ou o peso de algum objeto, na realidade está verificando sua massa. Contudo, no convívio social, os alunos utilizam a palavra peso para designar sua própria massa ou a massa de alguma peça. Assim, nas atividades desenvolvidas com os estudantes, utilizamos a palavra peso, apesar de estarmos nos referindo a massa dos objetos.

Entendemos que a aplicação de atividades, elaboradas por nós ou não, possibilitará a outros professores a identificação dos diferentes tipos de pensamentos expressos por seus alunos. Assim, a análise das produções dos estudantes poderá direcionar o trabalho do professor em sala de aula. Neste sentido, percebemos que as atividades realizadas nesta pesquisa devem realmente ser vistas como protótipos, no sentido de que podem ser aplicadas da maneira que estão, podem ser revistas, modificadas ou podem somente inspirar novas tarefas.

A seguir, dividimos a descrição das atividades realizadas em três seções. As duas primeiras tratam das aulas realizadas com o auxílio dos dois ODAs utilizados nesta pesquisa: “Equação do 1º Grau” e “Balanza Algebraica”. Por fim, na terceira seção, apresentamos o questionário final desta pesquisa instrumento utilizado para verificar a Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau.

5.4.1 Objeto Digital de Aprendizagem Equação do 1º Grau

Nas duas primeiras aulas, para desenvolvermos o estudo da igualdade com o sentido de equivalência, utilizamos o ODA “Equação do 1º grau”[5]. Trata-se de um *slide show* com animação que faz parte do acervo do Banco Internacional de Objetos Educacionais do Ministério da Educação (BIOE/MEC), cujo objetivo é proporcionar aos alunos o desenvolvimento e a ampliação do conceito de equações por meio da observação de algumas situações em uma balança de dois pratos.

A animação aborda o assunto equações do primeiro grau por meio de algumas situações nas quais pesos[6] de valores conhecidos são colocados em um prato de uma balança, que tem no outro prato pesos de valores desconhecidos. Em um segundo momento, são discutidos alguns problemas que objetivam a representação Matemática do equilíbrio da balança. Na Figura 1, exibimos a interface inicial do ODA “Equação do 1º grau”.[7]

[5] Disponível em: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/3813
[6] Nas atividades desenvolvidas com os sujeitos da pesquisa utilizamos a palavra peso ao invés de falar em massa dos objetos, pois este é o termo utilizado pelo autor do ODA Equações do 1º Grau.
[7] Todas as imagens desta seção foram capturadas a partir com um *print screen* do ODA Equações do 1º Grau.

Figura 1: Interface inicial do ODA Equação do 1º Grau

Este *slide show* com animação é composto de catorze slides. Contudo, nesta pesquisa utilizamos apenas os oito primeiros, pois, consideramos que, para nosso estudo, os demais slides não eram relevantes. Descrevemos, a seguir, o conteúdo tratado em cada um dos slides utilizados.

Nos dois primeiros slides, o narrador apresenta a balança de dois pratos e explica como ela funciona. Inicialmente, esclarece dizendo: "Hoje as balanças são quase todas eletrônicas, mas ainda são usadas balanças de pratos, como essa que agora está equilibrada". Neste momento, há uma animação que eleva um dos pratos, que estava mais para baixo, até ele ficar no mesmo nível do outro prato, proporcionando que o aluno visualize a posição dos pratos quando a balança está em equilíbrio. A Figura 2 ilustra alguns momentos desta animação.

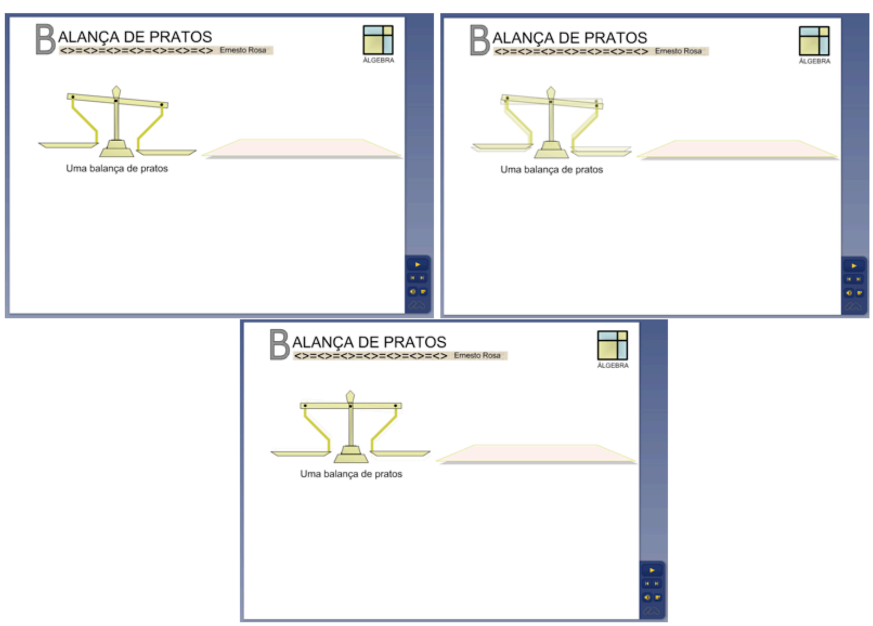


Figura 2: Balança em equilíbrio no ODA Equação do 1º Grau

Em seguida, o narrador apresenta alguns pesos e pacotes: “Aqui nós temos pesos de um quilograma, de cinco quilogramas e pacotes de variados pesos”. A Figura 3 mostra os pesos e os pacotes.

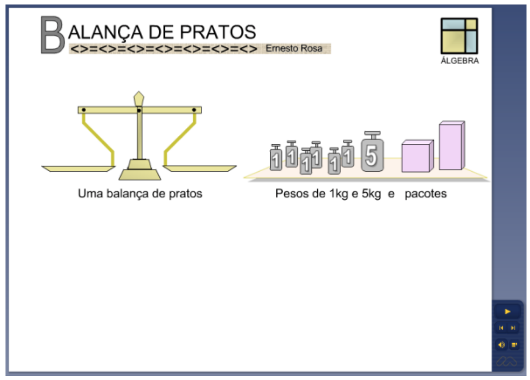


Figura 3: Pesos e pacotes no ODA Equações do 1º Grau

Ao final do slide 2, a animação ilustra duas situações que mostram o que acontece quando se coloca diferentes pesos nos pratos. Neste momento, o narrador verbaliza: “Essa balança tem um quilograma em um prato. O que vai acontecer? O prato mais pesado fica embaixo. Agora foram colocados dois quilogramas no outro prato. O que vai acontecer? O prato mais pesado fica embaixo”. A Figura 4 registra estes momentos.

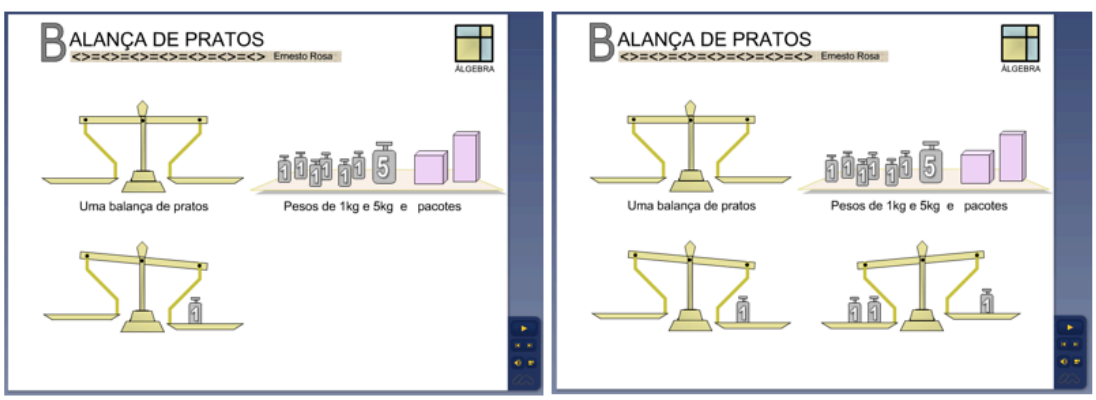


Figura 4: Pesos diferentes nos pratos no ODA Equação do 1º Grau

Na sequência, ao exibir-se o slide 3, solicita-se aos alunos que respondam as perguntas que o narrador faz a cada quadro deste slide. Nesta pesquisa, à medida que a animação ilustrava diferentes balanças, diferenciadas em itens (a, b, c, d), e o narrador fazia as perguntas, o *slide show* era parado e dava-se tempo para que os alunos pudessem fazer o registro escrito de suas respostas. No primeiro quadro, o narrador pergunta “Por que a balança está desequilibrada?” (Figura 5).

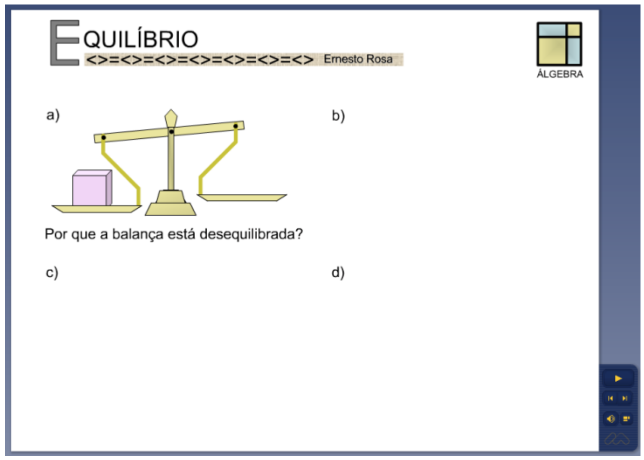


Figura 5: Slide 3, quadro 1 do ODA Equação do 1º Grau

No quadro seguinte, pergunta “E agora? Quanto pesa o pacote?”. Respondendo, em seguida “três quilogramas, porque nenhum prato foi para baixo. A balança está equilibrada.” (Figura 6).

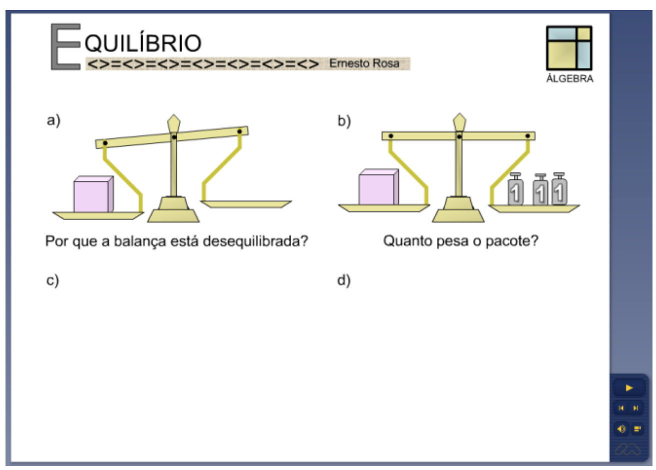


Figura 6: Slide 3, quadro 2 do ODA Equação do 1º Grau

No terceiro quadro do slide 3, o narrador pergunta: “Quanto pesa este outro pacote?” (Figura 7). Em seguida, responde “A balança está equilibrada. No prato da direita há três quilogramas. Logo, no outro prato, também, tem três quilogramas. Daí o pacote pesa dois quilogramas.”

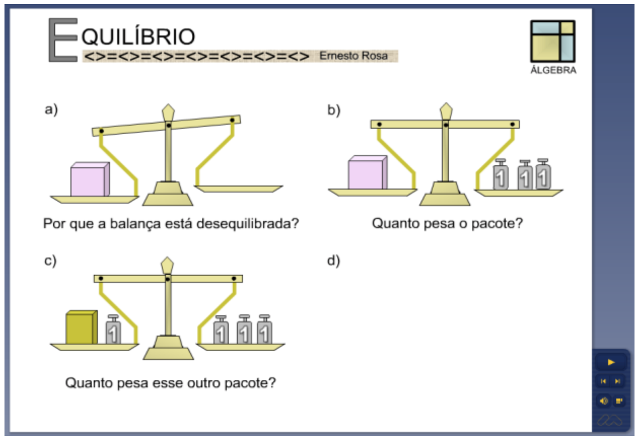


Figura 7: Slide 3, quadro 3 do ODA Equação do 1º Grau

Por fim, o narrador encerra o slide 3 perguntando, ao exibir o quadro 4, “E agora? Quanto pesa o pacote?” (Figura 8). Em seguida, responde: “Em cada prato há cinco quilogramas, porque a balança está equilibrada. Logo, o pacote pesa três quilogramas.”

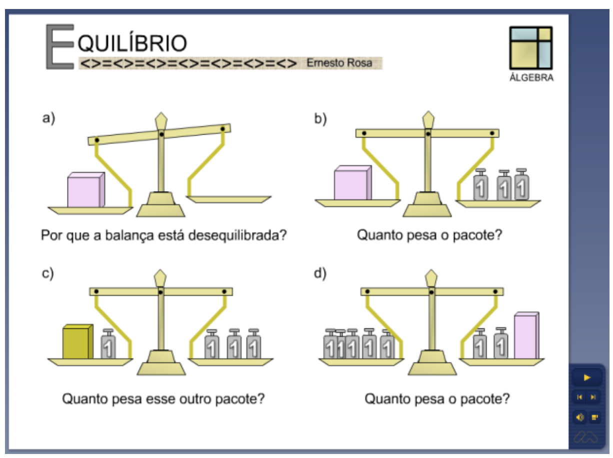


Figura 8: Slide 3, quadro 4 do ODA Equação do 1º Grau

Da mesma maneira, nesta pesquisa, à medida que foi sendo exibido cada quadro do slide 4 (Figura 9), o *slide show* foi pausado para que os alunos pudessem registrar as respostas das perguntas que foram sendo feitas, uma a uma. Em seguida, assim que os alunos responderam, o *slide show* foi novamente iniciado e os alunos ouviram a explicação do narrador para aquelas perguntas. No quadro 1, o narrador pergunta: “Qual é o peso deste pacote?”. E responde “Não dá para saber porque a balança está desequilibrada. Sabemos apenas que o pacote pesa mais de dois quilogramas.”.

No quadro 2, o narrador indaga “E essa outra balança?”. Respondendo, em seguida, “três pacotes mais um quilograma fica igual a quatro quilogramas daí cada pacote pesa um quilograma. Isso se forem de mesmo peso. Em cada experiência os pacotes são de mesmo peso. Substitua na balança cada pacote por um quilograma para ver se dá certo.”.

No quadro 3, o narrador coloca “Mais uma. Três pacotes mais dois quilogramas pesam o mesmo que oito quilogramas. Para dar oito quilogramas, é preciso que três pacotes pesem seis quilogramas. Daí cada um pesa dois quilogramas. Substitua cada pacote por dois quilogramas para testar.”.

E finaliza, no quadro 4, dizendo “Última. Essa é difícil! Não vale por tentativa! Ou melhor, vale! Mas, para problemas mais difíceis não ficará tão fácil. E agora? Fica para depois. Vamos em frente”. A Figura 9 ilustra os quadros do slide 4.

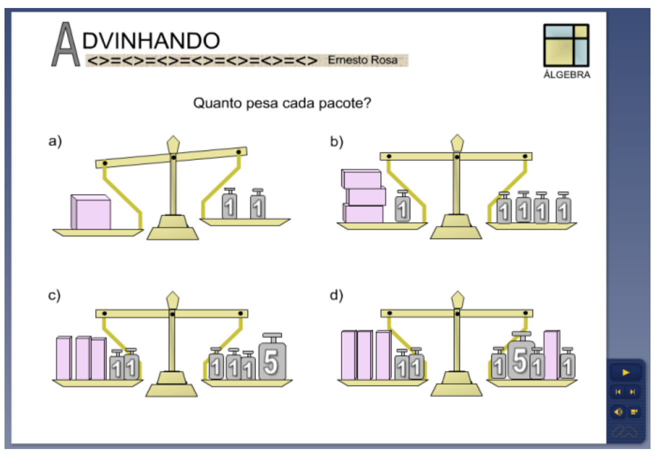


Figura 9: Slide 4 do ODA Equação do 1º Grau

A seguir, no slide 5 (Figura 10), o autor retoma a situação ilustrada na balança do item c do slide anterior e apresenta uma maneira de descobrir o peso dos pacotes retirando-se pesos equivalentes de ambos os pratos da balança. Nas palavras do narrador: “Três pacotes mais dois quilogramas equivalem a oito quilogramas. Vamos retirar dois quilogramas de cada lado da balança. A balança continua balanceada. Olha a primeira balança. Olha a segunda. Sumiram dois quilogramas de cada prato. Continuando, vamos pegar um terço do peso de cada prato. Vamos dividir por três. Isso dá dois quilogramas para o pacote.” A Figura 10, evidencia a intenção do autor.

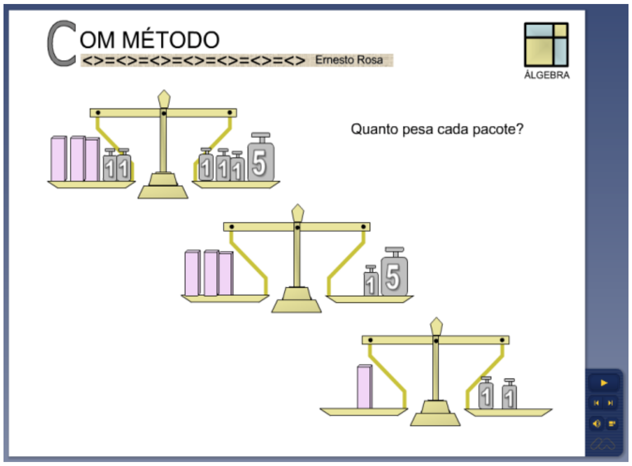


Figura 10: Slide 5 do ODA Equação do 1º Grau

No slide 6 (Figura 11), o autor sugere uma situação em que há pacotes de ambos os lados da balança. Da mesma forma, como nos outros casos, sugeriu-se aos alunos que eles buscassem uma forma de identificar o peso dos pacotes. Em seguida que os alunos registravam suas soluções, apresentava-se a resolução do narrador: “Retiramos dois quilogramas do prato da esquerda e, também, dois quilogramas do prato da direita. Em seguida, retiramos um pacote de cada lado. Dividimos por dois e, pronto. O pacote tem três quilogramas.” A Figura 11 apresenta a resolução do narrador.

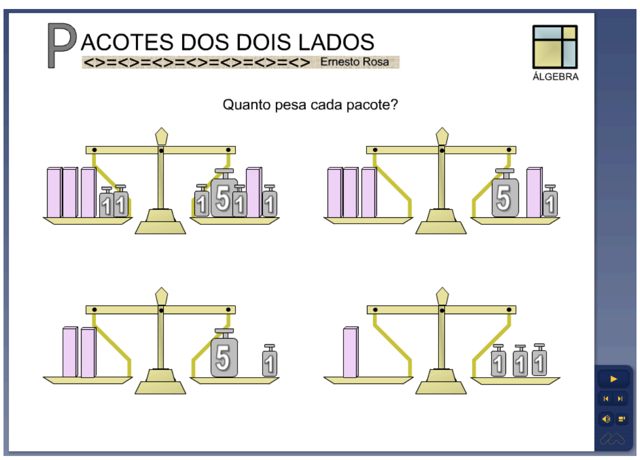


Figura 11: Slide 6 do ODA Equação do 1º Grau

No slide 7 (Figura 12), o autor apresenta a mesma situação do slide anterior. Contudo, neste momento, sugere uma tradução para a linguagem algébrica daquilo que está representado na balança de dois pratos. Assim, o autor escreve uma equação do primeiro grau utilizando a letra *x* para representar o peso do pacote. Conforme coloca o narrador: “Chamando de *x* o peso do pacote, temos no primeiro prato três pacotes mais dois quilogramas e escrevemos 3x + 2. No segundo prato, temos um pacote mais oito quilogramas e escrevemos x + 8. A balança está equilibrada e podemos colocar o sinal igual”.

Feito isso, o narrador encontra o peso do pacote ao retirar pesos e pacotes iguais de ambos os pratos da balança, mantendo o equilíbrio. Da mesma forma, vai retirando números e a letra *x* dos dois lados da equação, estabelecendo uma relação entre os pesos e os pacotes da balança com os números e a letra *x* da equação. Conforme coloca o narrador: “Retirando dois quilogramas de cada lado, a equação fica 3x = x + 6. Compare com a primeira equação. Sumiu dois de cada lado. Agora, tiramos um pacote de cada lado. E some um *x* de cada lado da equação, ficando 2x = 6. Tira metade de cada prato e a equação fica x = 3, que fornece o peso do pacote.” A Figura 12 registra a resolução do autor.

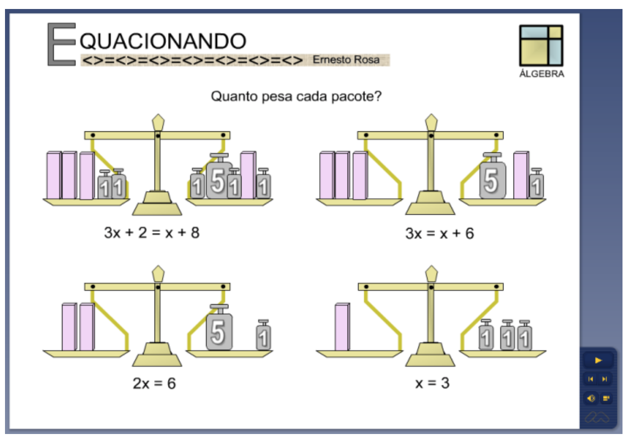


Figura 12: Slide 7 do ODA Equação do 1º Grau

Em seguida, no slide 8, o autor faz o mesmo procedimento utilizando outra situação descrita pela balança, conforme a Figura 13.

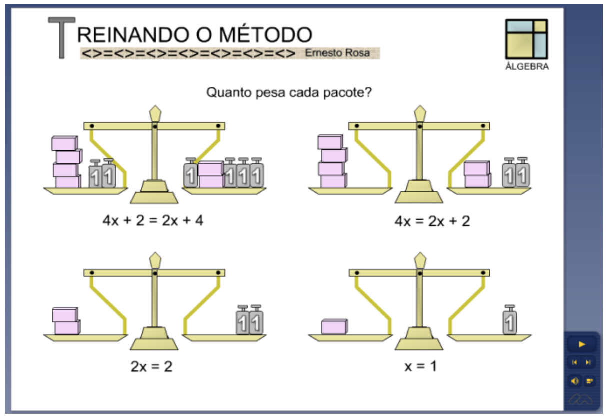


Figura 13: Slide 8 do ODA Equação do 1º Grau

5.4.2 Objeto Digital de Aprendizagem Balanza Algebraica

Durante a terceira e quarta aulas, dando continuidade ao estudo da igualdade com o sentido de equivalência, utilizamos o dispositivo virtual "Balanza Algebraica"[8], que pertence ao acervo de Objetos Digitais de Aprendizagem do Banco Nacional de Manipuladores Virtuais da Utah State University. Este ODA permite resolver equações do primeiro grau através do uso de uma balança de dois pratos. O primeiro passo é equilibrar a balança colocando o número apropriado de blocos de unidade e de blocos com um X, cujo peso é desconhecido, em cada um dos pratos da balança. Na Figura 14, exibimos a interface inicial do ODA "Balanza Algebraica".[9]

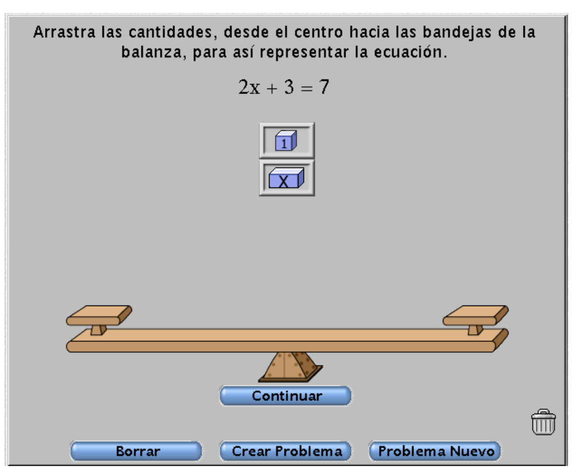


Figura 14: Interface inicial do ODA Balanza Algebraica

[8] Disponível em http://nlvm.usu.edu/es/nav/topic_t_2.html
[9] Todas as imagens desta seção foram capturadas a partir de um *print screen* do ODA Balanza Algebraica.

Para representar a equação na balança basta clicar nos blocos e arrastá-los até um dos pratos da balança. Quando o bloco é solto, este se coloca no prato da balança. Quando colocamos o primeiro bloco em uma das bandejas, a balança se inclina para baixo do lado onde foi colocado o bloco, mostrando que, desta forma, não há equilíbrio. Contudo, quando a equação está corretamente representada, os pratos voltam a estar equilibrados. Não é possível clicar no botão “Continuar” até que se tenha representado de maneira correta a equação, de modo que a balança esteja equilibrada.

Após representar a equação, colocando os blocos correspondentes na balança, realizam-se operações algébricas em ambos os lados da equação ao mesmo tempo que se faz em ambos os pratos da balança com o objetivo de terminar com um único bloco X em um dos pratos da balança, por meio do qual podemos verificar a solução em termos de número de blocos de unidade no prato oposto, conforme Figura 15.

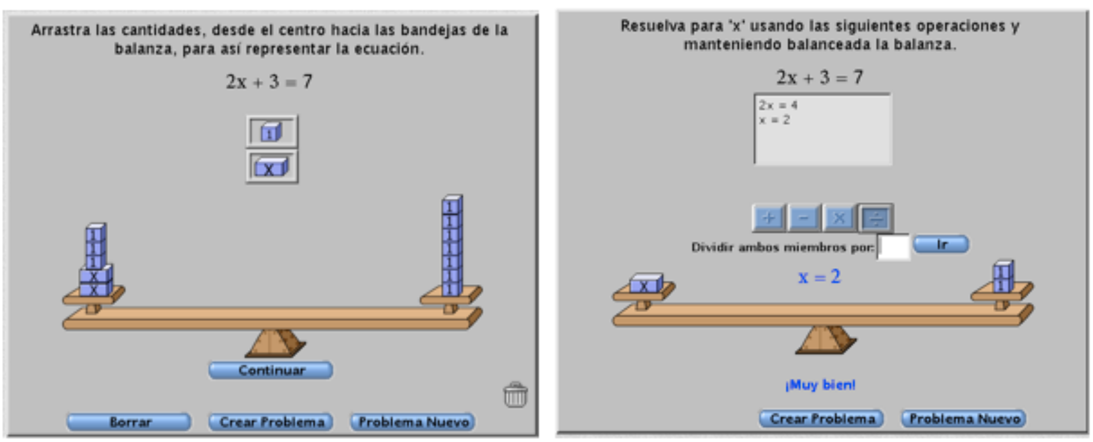


Figura 15: Resolução de uma equação através do ODA Balanza Algebraica

A principal intenção deste ODA é fazer com que os estudantes percebam que não é possível aplicar uma operação em apenas um dos lados de uma equação. Os alunos devem verificar que os lados de uma equação são equivalentes e que a cada operação algébrica, aplicada em ambos os lados da equação, já que é o único tipo de manipulação que o dispositivo virtual permite, produz outra equação que expressa a mesma igualdade, de tal maneira que ambos os lados seguem equilibrados. Resolver uma equação significa executar uma série de operações que nos levem a uma equação equivalente na qual termine em uma única incógnita X em um dos pratos da balança.

Este manipulador não tem uma série predeterminada de operações a realizar. O usuário escolhe a operação que desejar, depois de cada operação a equação mostrada é atualizada de maneira tal que a equação original e a forma equivalente mais recentes são visualizadas.

Destacamos, ainda, que o usuário pode optar por representar qualquer lado da equação em qualquer um dos pratos da balança e depois de clicar no botão “Continuar” poderá trabalhar com o formato de equação que tenha escolhido. As únicas operações permitidas são aquelas que deixam números inteiros positivos como coeficientes. Por exemplo, não é possível dividir por dois a menos que o número seja par. O usuário deve decidir quando a equação tiver sido resolvida. O dispositivo virtual não mostra nenhum tipo de aviso quando resta um único bloco X em qualquer um dos pratos de modo que o aluno pode continuar com outra série de operações se assim desejar.

Em nosso estudo, para que os alunos resolvessem algumas das equações disponibilizadas pelo ODA, cada um utilizando um computador, apresentamos uma sequência de instruções que deveriam ser atendidas pelos estudantes. O registro da resolução das equações deveria também ser feito em papel e, posteriormente, entregues à professora-pesquisadora. As instruções foram as seguintes:

1. Arraste as quantidades, desde o centro até os pratos da balança para, assim, representar a equação, de acordo com a imagem abaixo (Figura 16).

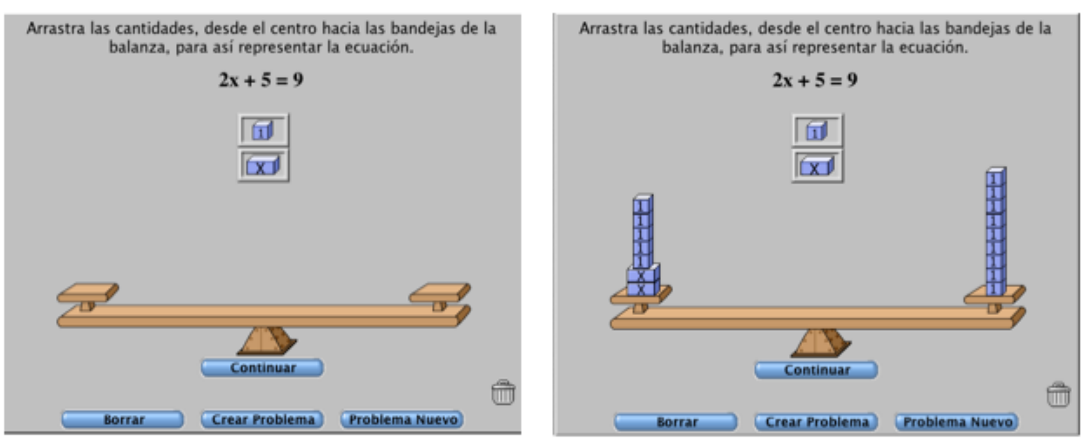


Figura 16: Representação na balança de uma equação disponibilizada pelo ODA Balanza Algebraica

2. A seguir, clique no botão “Continuar”.

3. Resolva a equação utilizando as operações disponibilizadas pelo programa de forma que a balança sempre se mantenha equilibrada, Figura 17.

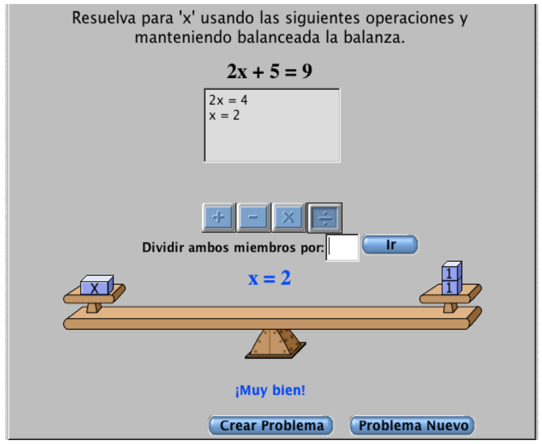


Figura 17: Resolução da equação proposta pelo ODA Balanza Algebraica.

4. Registre o que você fez no *software* numa folha de papel para entregar à professora.

5. A seguir clique no ícone “Problema Nuevo”.

Como a balança de dois pratos nos permite apenas ilustrar quantidades positivas, já que recria uma situação concreta do cotidiano, no caso uma medida de massa, a Utah State University criou uma versão para o ODA “Balanza Algebraica” que utiliza também números negativos, ampliando o universo de resolução de equações do primeiro grau para o conjunto dos números inteiros.

Da mesma forma que na versão para números positivos, para representar a equação na balança basta clicar nos blocos e arrastá-los até um dos pratos da balança. Contudo, os números negativos e múltiplos negativos de X tem sua própria representação e atuam de maneira oposta a dos positivos: um número positivo inclina a bandeja para baixo, já um número negativo move a bandeja para cima. Os negativos são representados por balões de cor vermelha que elevam as bandejas.

Desta maneira, da mesma forma que em exemplos de equações onde os termos são positivos, os alunos tiveram que resolver e registrar por escrito algumas equações utilizando também números negativos. Primeiramente, arrastando as quantidades, desde o centro até os pratos da balança para, assim, representar a equação (Figura 18).

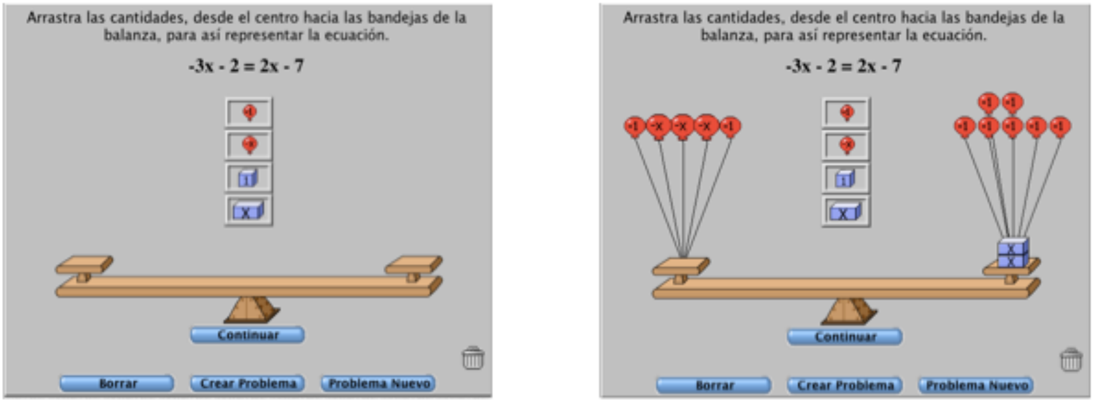


Figura 18: Representação de uma equação com números negativos do ODA Balanza Algebraica

Em seguida, clicando no botão "Continuar" e resolvendo a equação fazendo uso de operações que mantém a balança equilibrada, Figura 19.

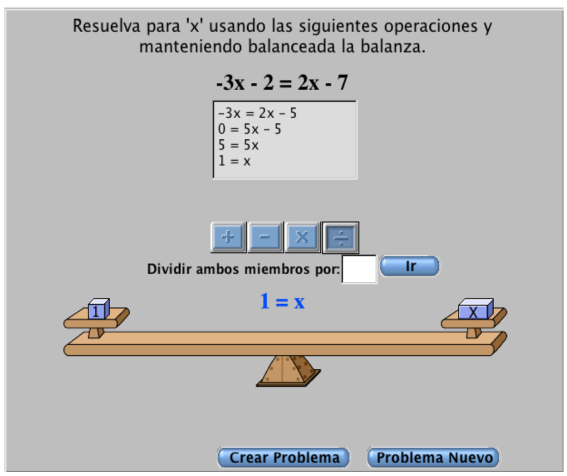


Figura 19: Resolução da equação com números negativos proposta pelo ODA Balanza Algebraica.

Após os alunos resolverem algumas equações no ODA Balanza Algebraica, na quinta aula, elaboramos uma atividade com o objetivo de verificar se os alunos conseguiriam resolver equações sem o auxílio do dispositivo virtual. Nesta atividade, solicitamos aos alunos que resolvessem algumas equações ou explicassem o motivo pelo qual elas não poderiam ser resolvidas, conforme questão abaixo:

Resolva as equações ou explique por que elas não podem ser resolvidas[10]:

a) $4x = 12$

b) $3x + 2 = 20$

[10] A atividade foi criada pela professora-pesquisadora.

c) $2x - 3 = 9$

d) $2x - 2 = x + 8$

e) $x + 2 = x + 3$

f) $3x + 2 = 4x$

g) $5x - 10 = - 3x - 2$

h) $2x + 15 = 8x + 3$

i) $8x - 3 = 5x - 2 + 3x$

5.4.3 Questionário Final: Buscando Evidências da Aprendizagem Significativa

Para Ausubel (1980), os alunos memorizam não somente fórmulas como também proposições, causas, exemplos e maneiras de resolver determinados problemas. Nesta perspectiva, realizar com os alunos um teste com questões semelhantes às abordadas durante as aulas possibilita respostas memorizadas ou mecânicas. Para que isso não aconteça, o autor propõe a formulação de questões novas e não convencionais, que exijam a máxima transformação do conhecimento adquirido (MOREIRA, 1999).

Desta forma, uma possibilidade de verificar ou mesmo garantir que a aprendizagem seja realmente significativa é trabalhar com exemplos e problemas novos que exijam máxima transferência de conhecimento. Outra seria solicitar que o estudante diferencie ideias relacionadas, mas não idênticas, ou pedir que ele identifique elementos de um conceito num dado exemplo ou elementos de conceitos similares.

Desta maneira, buscamos elaborar um questionário (APÊNDICE C) de tal modo que pudéssemos registrar as concepções dos alunos em relação às equações do primeiro grau após realizarem a sequência de atividades, verificando, assim, se ocorreu Aprendizagem Significativa.

Na última aula, convidamos os alunos a responderem a este questionário final. A primeira pergunta, referia-se às dificuldades encontradas durante a utilização do *software* "Balanza Algebraica". Em seguida, perguntamos qual era a preferência do aluno em relação a maneira de resolver as equações propostas. Se eles preferiam buscar uma solução para as equações utilizando o *software* "Balanza Algebraica" ou sem fazer uso do *software*. Nesse sentido, esperávamos compreender qual havia sido a impressão do aluno sobre a utilização de um recurso digital para resolver equações.

Além disso, procuramos, através de outras questões, verificar se o conceito de equivalência poderia, de fato, funcionar como um organizador prévio facilitador da Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau. Nesse sentido, as perguntas foram:

O que acontece se eu somar 10 somente ao primeiro membro da equação $x + 2 = 7$?

Explique com palavras como você faz para descobrir o valor de x em $x + 2 + 10 = 7 + 10$?

Verifique quais das equações tem o número um como solução: $8x - 3 = 5$; $4x + 1 = x + 4$; $2x - 3 = x + 1$; $5 - 2x + 8 = -1$.

Verifique se as seguintes equações são equivalentes[11] a $4x + 2 = 2x + 10$, cuja solução é 4: $2x + 1 = x + 5$; $8x + 4 = 4x + 20$; $4 + 4x = 20$; $4x = 16$; $8x + 4 = 20x + 4$.

No próximo capítulo, apresentamos a análise dos dados realizada a partir dos registros feitos pelos alunos, das observações apontadas no diário de campo da professora-pesquisadora, das gravações realizadas durante as aulas e das respostas dos estudantes ao questionário final.

[11] Duas equações são ditas equivalentes se possuírem a mesma raiz.

6 ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Durante as etapas do processo de desenvolvimento desta pesquisa, foram realizados vários registros da atuação dos alunos em cada etapa das atividades propostas. Dentre esses, destacamos as produções dos alunos em relação as tarefas propostas durante a utilização dos ODAs "Equações do 1º Grau" e "Balanza Algebraica". Além disso, fazemos uma análise das respostas apresentadas pelos alunos frente ao questionário realizado com a intenção de verificar evidências da Aprendizagem Significativa após realizarem a sequência de atividades.

Nesta parte da pesquisa, descrevemos qualitativamente, segundo os referenciais teóricos e metodológicos já apresentados, a análise das produções dos alunos em cada atividade, tomando como base o objetivo da investigação e os aportes teóricos que subsidiam esta pesquisa. Outras produções somam-se a essa análise, como as gravações de áudio das aulas e os registros do diário de campo da professora-pesquisadora.

É válido destacar que as análises que se seguem apresentam caráter interpretativo e são fruto das observações e considerações que os referenciais teóricos permitem estabelecer mediante as produções dos alunos. Desta forma, dividimos este capítulo em três seções que resgatam as atividades realizadas pelos alunos durante este estudo, destacando e analisando os resultados obtidos em cada atividade.

6.1 ANÁLISE DA PRODUÇÃO DOS ALUNOS EM RELAÇÃO AO ODA EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Iniciamos a primeira aula apresentando o *slide show* com animação "Equações do 1º grau". No primeiro momento, exibimos os slides 1 e 2, onde o autor do ODA apresenta e explica o mecanismo de funcionamento de uma balança de dois pratos.

Feito isso, exibimos os slides 3 e 4 e paramos o vídeo em cada um dos quadros em que o narrador do ODA faz uma pergunta, para que os alunos pudessem respondê-las. Nestes momentos, os alunos faziam o registro em papel e, além disso, as observações e os raciocínios expressados oralmente pelos alunos eram registrados no diário de campo da professora-pesquisadora. Depois, o *slide show* continuava para que, assim, os alunos pudessem ouvir a explicação do narrador do ODA.

A primeira pergunta foi em relação à balança da Figura 20: Por que a balança está desequilibrada? Uma parte dos alunos respondeu que a balança estava desequilibrada, pois um dos pratos da balança estava mais pesado, conforme colocaram os alunos Ana, Bruno, Carla e Igor: “Porque a esquerda está com o peso e a direita não.” (Ana). “Porque o prato esquerdo está mais pesado.” (Bruno). “O bloco está colocando peso de um lado apenas.” (Carla). “Porque o prato está com um peso e o outro não tem nada.” (Igor).

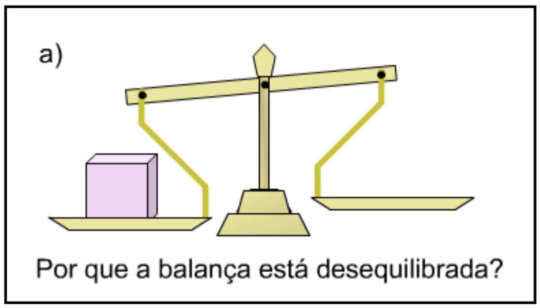


Figura 20: Slide 3, pergunta 1 do ODA Equações do 1º Grau

Já a outra parte dos alunos, respondeu que o desequilíbrio se devia ao fato de haver um pacote em apenas um dos pratos da balança. Isto ficou evidente nas falas dos alunos Dani, Ella, Fredo, Guido, Heide e July: “Porque o pacote só está em um dos pratos.” (Dani). “Porque um lado tem uma caixa e o outro não tem nada.” (Ella). “O lado esquerdo está mais pesado porque tem um pacote.” (Fredo). “Porque o pacote é mais pesado do que vento então faz descer o lado que está pesado.” (Guido). “A balança está desequilibrada porque tem um pacote em um dos pratos.” (Heide). “Ela está desequilibrada porque o pacote só está em um lado da balança e o outro não tem nada para pesar.” (July).

A partir das respostas dadas pelos alunos, percebemos que, nos dois tipos de argumentações registradas, fica evidente que os alunos compreenderam que há um desequilíbrio na balança quando um dos pratos está mais para baixo que o outro. Neste sentido, acreditamos que estes alunos já possuíam ideias prévias sobre o que seria uma equivalência em termos da balança de dois pratos e, desta forma, consideramos, segundo Ausubel (1980), que estes alunos apresentavam o conceito subsunçor relativo a esta concepção, pois responderam corretamente à questão proposta, mesmo que de maneiras distintas.

Em relação à segunda pergunta do slide 3, Figura 21, todos os alunos responderam que o pacote pesava três quilogramas. Mais uma vez, evidencia-se o fato dos alunos compreenderem de que forma a balança deve se comportar para que esteja equilibrada. Destacamos as respostas dos alunos Carla, Dani e Heide: "3kg porque foi posto 3kg do outro lado também." (Carla). "3 quilos porque no segundo prato mostra 3 pesinhos de 1 quilo." (Dani). "O pacote pesa 3kg porque os três pesos tem o valor de 1kg cada." (Heide).

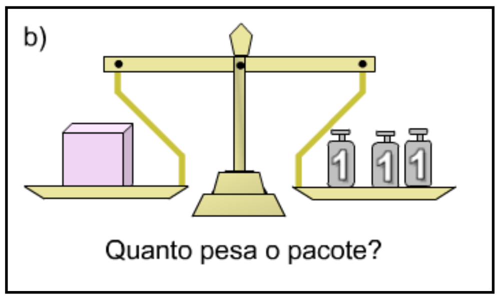


Figura 21: Slide 3, pergunta 2 do ODA Equações do 1º Grau

Na terceira pergunta do slide 3, Figura 22, a maioria dos alunos respondeu corretamente o peso do pacote. Conforme as respostas dos alunos Dani, Guido e Heide: "2kg porque mostra o pesinho junto com o pacote." (Dani). "O pacote deve pesar 2kg porque já tem um quilo na balança." (Guido). "Este pacote pesa 2kg e o peso que está a seu lado tem 1kg e no outro prato tem 3 pesos de 1kg e a balança está equilibrada." (Heide). Contudo, alguns alunos tiveram dificuldades para explicar porque o pacote pesava dois quilogramas, de acordo com as respostas dos alunos Ana, Ella e Igor: "Pesa 2kg porque o peso está igual." (Ana). "O pacote pesa 2 quilogramas porque a balança esta igual dos dois lados." (Ella). "2kg porque a balança está equilibrada." (Igor).

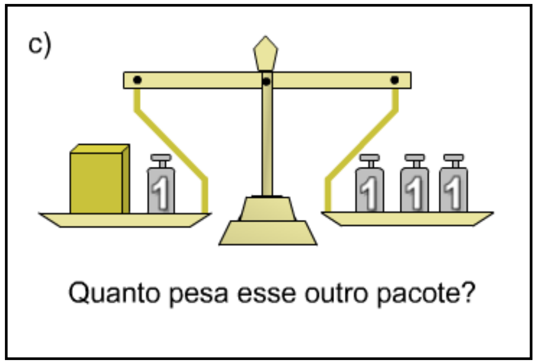


Figura 22: Slide 3, pergunta 3 do ODA Equações do 1º Grau

Outra parte dos alunos respondeu incorretamente, afirmando que o pacote pesava 3kg, ignorando o peso de 1kg do prato da esquerda. Isso ficou evidente nas respostas dos alunos Bruno, Carla, Fredo e July: "3kg porque a balança direita tem 3kg e a direita está equilibrada." (Bruno). "3kg porque dos dois lados tem a mesma quantidade." (Carla). "3kg pois o peso está igual nos dois lados." (Fredo). "3kg porque o pacote deve ter 2kg, eu acho." (July).

Consideramos que, apesar de alguns alunos não terem respondido corretamente qual era o peso do pacote, os alunos compreenderam que a balança estava em equilíbrio. Desta forma, através de suas respostas, os alunos demonstraram que, mesmo aqueles que não conseguiram determinar o peso correto do pacote, compreenderam que a balança desta situação estava equilibrada. Este fato evidencia, mais uma vez, que estes alunos possuíam em sua estrutura cognitiva o conceito subsunçor relacionado à equivalência em termos de uma balança de dois pratos.

Embora, a primeira vista, a situação descrita pela balança da questão quatro pareça ser mais complexa, Figura 23, com exceção da aluna Ana, que respondeu que o pacote pesava 5kg, a maioria dos alunos respondeu corretamente quanto pesava o pacote, conforme as respostas dos alunos Bruno, Dani, Guido e July: "Pesa 3kg porque do lado esquerdo tem 5kg e do lado direito também, mas tem dois pesos de 1kg." (Bruno). "3kg porque no prato da esquerda mostra 5 pesinhos de 1kg e no prato da direita mostra um pacote e 2 pesinhos. Então o pacote tem 3kg." (Dani). "O pacote pesa 3kg porque já tinha do outro lado 5kg e o lado que está o pacote tinha 2kg." (Guido). "Num lado tem 5kg e no outro 2kg então deve ter 3kg no pacote." (July).

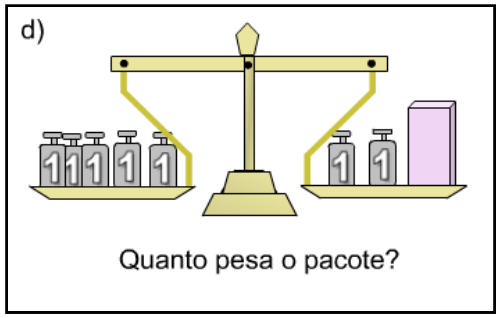


Figura 23: Slide 3, pergunta 4 do ODA Equações do 1º Grau.

As respostas dos alunos demonstram, mais uma vez, que eles compreenderam a associação que há entre o equilíbrio da balança de dois pratos e o sentido de equivalência, e de que forma esta equivalência facilita na identificação do peso do pacote em questão.

A primeira pergunta do slide 4 “Qual é o peso desse pacote?” causou estranhamento nos alunos, pois a balança desta situação em questão não estava equilibrada, Figura 24.

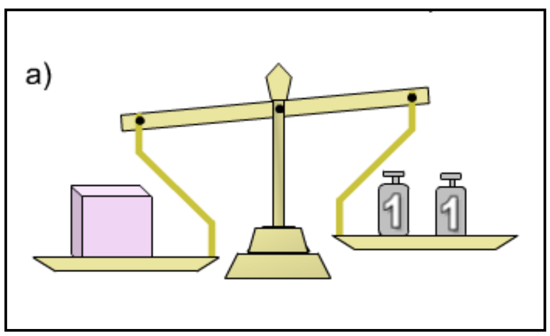


Figura 24: Slide 4, quadro 1 do ODA Equações do 1º Grau.

Contudo, a maior parte dos alunos respondeu qual era o peso do pacote, o que podemos verificar nas respostas dos alunos Ana, Bruno, Dani, Ella, Fredo, Guido e July: “O pacote pesa 3kg e os pesos 2kg, porque de uma lado tem 3kg e do outro 2kg.” (Ana). “3kg porque o lado direito tem 2kg e o lado esquerdo está baixo, então deve ser mais pesado.” (Bruno). “3kg porque no prato da direita tem 2 pesos de 1kg e no da esquerda tem um pacote que está mais pesado do que o da direita e se nós colocarmos mais um pesinho no da direita iria ficar igual: 3kg.” (Dani). “O pacote pesa 3kg porque de um lado tem 2 pesinhos já do outro não tem nenhum peso, isto quer dizer que o pacote pesa 3kg.” (Ella). “O pacote tem 3kg porque não sei.” (Fredo). “O pacote deve pesar 3kg porque tem 2kg no outro lado e o lado do pacote está mais pesado daí 3kg." (Guido). "O pacote pesa 3kg porque cada garrafa pesa 1kg, como tem duas garrafas pesa 2kg." (July).

Acreditamos que, embora a questão proposta não tivesse uma solução numérica, os alunos insistiram em dar uma resposta deste tipo, pois, muito provavelmente, estes estudantes estão acostumados com a ideia de que todos os problemas relacionados à Matemática devem ter uma resposta numérica. Apesar da balança estar desequilibrada, fato que impossibilita verificarmos uma resposta exata para o peso do pacote, estes estudantes responderam que o peso do pacote era três quilogramas, ainda que tenham evidenciado que compreenderam que a balança desta questão estava desequilibrada.

Apesar da maioria dos alunos terem dado uma resposta numérica para a questão proposta, os alunos Heide e Igor responderam que não poderiam afirmar qual era o peso dos pacotes, já que a balança estava desequilibrada: "Não se pode saber porque a balança está desequilibrada, pode ser qualquer peso acima de 2kg." (Heide). "Como vou saber? Pode ser qualquer peso acima de 2kg." (Igor). É evidente que estes alunos compreenderam que só é possível determinar o peso do pacote em situações em que a balança está equilibrada.

No entanto, apesar dos demais alunos afirmarem qual era o peso do pacote, embora a balança estivesse desequilibrada, os mesmos compreenderam que, como o lado da balança em que estava o pacote estava com o prato mais para baixo o pacote pesava mais que dois quilogramas. Nesse sentido, afirmaram que o peso do pacote era três quilogramas, muito provavelmente por ser três o número natural imediatamente maior que o dois e estes alunos possuírem muito pouco conhecimento sobre números pertencentes a outros conjuntos numéricos que não os números naturais.

Desta forma, embora os alunos tenham errado ao atribuírem um valor ao pacote em uma balança que estava desequilibrada, eles compreenderam que a balança apresentava um desequilíbrio, pois entenderam que não havia uma equivalência entre os pesos de ambos os pratos da balança. Mais uma vez, ficou evidente a familiaridade dos estudantes com o conceito subsunçor de equivalência em uma balança de dois pratos.

Em relação à balança seguinte, ilustrada no slide 4, Figura 25, todos os alunos responderam corretamente que o peso de cada pacote era de 1kg.

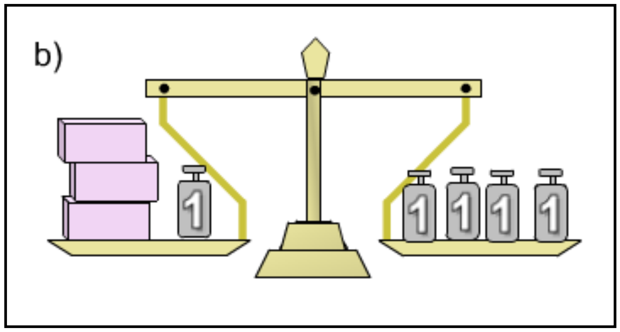


Figura 25: Slide 4, quadro 2 do ODA Equações do 1º Grau.

Alguns exemplos são as respostas dos alunos Bruno, Dani e Heide: “Cada pacote pesa 1kg porque do lado direito tem 4kg e do esquerdo tem os pacotes e o peso de 1kg.” (Bruno). “1kg porque tem 4 pesinhos de 1kg no prato da direita e 3 pacotes e 1 pesinho juntos no prato da esquerda.” (Dani). “Cada pacote pesa 1kg porque a balança está equilibrada e tem 1 peso de 1kg ao seu lado e no outro prato tem 4 pesos de 1kg.” (Heide). Esta situação, também, demonstra que os alunos compreenderam o conceito de equivalência apoiando-se na representação de pesos e pacotes em uma balança de pratos.

Da mesma forma, a maioria dos estudantes respondeu corretamente qual era o peso do pacote ilustrado no quadro 3 do slide 4, Figura 26, embora, muitos estudantes tenham tido muita dificuldade para registrar por escrito a justificativa encontrada para o pacote desta situação pesar 2kg.

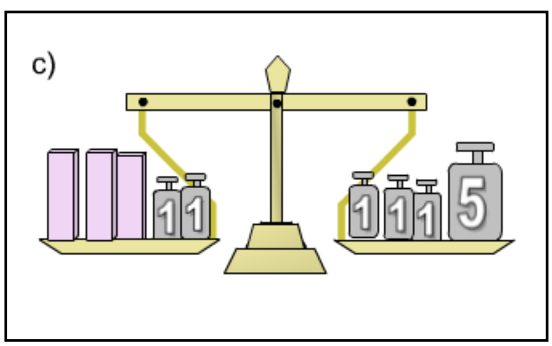


Figura 26: Slide 4, quadro 3 do ODA Equações do 1º Grau.

Conforme colocaram os alunos Ana, Carla, Guido, Fredo, Heide e Igor: “Pesa 2kg cada pacote, porque cada pacote tem 2kg e a balança está equilibrada.” (Ana). “2 kg em cada pacote porque do outro lado tem 8kg.” (Carla). “Cada pacote deve pesar 2kg, porque tem 2 pesos e do outro lado tem 8 pesos.” (Guido). “Eles tem o peso igual porque tem 2kg cada pacote, por isso é igual.” (Fredo). “Cada pacote tem 2kg e a balança está equilibrada e tem 8kg em cada prato.”

(Heide). “Cada pacote pesa 2kg, porque a balança está equilibrada isso quer dizer que cada pacote tem 2kg.” (Igor).

Ademais, alguns alunos justificaram de maneira mais clara qual era o valor dos pacotes. Podemos notar isso nas respostas apresentadas pelos estudantes Bruno, Dani e Ella: “Os pacotes pesam 6kg porque do lado direito tem 8kg e do lado esquerdo tem os pacotes e dois pesos de 1kg.” (Bruno). “Tem 2kg porque o peso está equilibrado, cada prato possui 8kg então dá para perceber que cada pacote possui 2kg.” (Dani). “Cada pacote pesa 2kg porque do lado da direita tem 8kg, já na esquerda só tem dois quilinhos e mais 3 pacotes que pesam 2kg, então tudo junto pesa 8 kg.” (Ella).

Nesta situação, apenas a aluna July respondeu incorretamente qual era o peso do pacote: “Cada pacote deve pesar 5kg. Porque cada um pesa 1 kg.” (July). A partir das observações anotadas no diário de campo da professora-pesquisadora, foi possível verificar que esta aluna compreendeu que havia um equilíbrio entre os pratos da balança, pois evidenciou tal fato ao verbalizar em relação a situação proposta. Contudo, acreditamos que a aluna July não conseguiu chegar a uma conclusão satisfatória quanto ao peso do pacote, pois teve dificuldades em compreender a situação apresentada que exibia em um dos pratos, além dos pacotes, dois pesos de um quilograma cada. Desta forma, a equivalência apresentada na situação proposta pela balança – três pacotes mais dois quilogramas equivalem a oito quilogramas – não foi considerada por July para que ela chegasse a uma resposta correta.

A questão 4 do slide 4 possui um grau de dificuldade um pouco maior que as situações abordadas até este ponto, pois apresenta uma balança com pacotes em ambos os pratos, Figura 27.

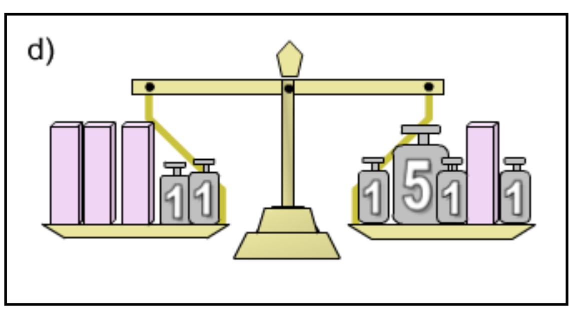


Figura 27: Slide 4, quadro 4 do ODA Equações do 1º Grau.

Neste sentido, uma boa parte dos alunos respondeu que não sabia como resolver. É o caso dos alunos Ana, Bruno, Igor e July. Uma outra parcela de alunos respondeu corretamente qual era o peso dos pacotes, como podemos notar nas respostas de Carla, Dani, Ella, Fredo e Heide: “Cada pacote pesa 3kg.” (Carla). “Cada pacote pesa 3kg porque no prato direito possui 11kg e na esquerda também.” (Dani). “Cada pacote tem 3kg porque do lado direito tem só 1 pacote que tem 3kg já no lado direito tem 3 pacotes que tem 3 kg então tudo pesa 11kg.” (Ella). “Eu acho que tem 3kg em cada pacote.” (Fredo). “Cada pacote pesa 3kg pois a balança está equilibrada e tem 11kg em cada prato.” (Heide).

De alguma maneira, estes alunos conseguiram descobrir qual era o peso dos pacotes da balança ilustrada na situação acima, embora não tenha se estabelecido, nesta aula, nenhum método ou procedimento para resolver este tipo de problema. Nesse sentido, foi possível observar que os estudantes utilizaram o conceito de equivalência para chegarem a algum resultado possível, pois, concluíram que ambos os pratos da balança continham onze quilogramas de peso. Nas respostas registradas pelos estudantes não fica evidente de que maneira eles chegaram à conclusão de que o pacote pesava três quilogramas, no entanto, ao serem questionados pela professora-pesquisadora como chegaram a uma resposta correta para o peso do pacote, os mesmos esclareceram o raciocínio utilizado. Na sequência deste texto, registramos a estratégia de resolução utilizada pelos alunos.

Ao possibilitar aos alunos diferentes situações onde eles deveriam descobrir qual era o peso indicado nas balanças de dois pratos, disponibilizadas nos slides 3 e 4 do *slide show* com animação, foi possível verificar que o conceito de equivalência em uma balança de dois pratos era um conceito subsunçor existente na estrutura cognitiva dos alunos. Desta maneira, acreditamos que o ODA “Equações do 1º grau” funcionou como um organizador prévio, possibilitando a identificação e desenvolvimento do conceito subsunçor de equivalência, o que acreditamos ser fundamental para facilitar a Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau (AUSUBEL, 1980).

Desta forma, ao realizarmos as atividades propostas pelo ODA “Equações do 1º Grau” com os sujeitos da pesquisa, foi possível verificar que este recurso digital possibilitou a constatação e o aprimoramento do conceito subsunçor da noção de equivalência em termos de uma balança de dois pratos. De acordo com a teoria ausubeliana acreditamos que, neste sentido, o ODA em questão funcionou como um organizador prévio comparativo, pois, em nosso estudo, a partir do momento em que passamos a tratar da equivalência em termos de uma equação fazemos uma comparação com a equivalência em uma balança de dois pratos, objeto familiar ao aprendiz, facilitando, assim, a Aprendizagem Significativa do estudante.

No slide 5, o autor propõe resolver o problema do item c (slide 4) a partir do que ele chama de "método", que corresponde em retirar pesos iguais de ambos os lados da balança. Antes de exibir a explicação apresentada pelo narrador do ODA no slide 5, a professora-pesquisadora propôs uma discussão com a turma sobre o que poderia ser feito para se descobrir o peso do pacote, na expectativa de que a ideia de se retirar os mesmos pesos dos dois pratos das balanças partisse intuitivamente dos alunos.

A partir dos registros do diário de campo, foi possível notar que, durante a discussão, a maior parte dos alunos utilizou-se do raciocínio de que do lado direito da balança havia um total de oito quilogramas, então, como a balança estava em equilíbrio, do outro também deveria haver oito quilogramas. Desta forma, como haviam dois quilogramas que eram dos pesos, sobrariam seis quilogramas para os pacotes. Como os pacotes eram três e iguais, cada pacote deveria pesar dois quilogramas.

Ou seja, a estratégia de retirar pesos iguais de ambos os lados da balança não é intuitiva ou natural para os alunos. Nesta perspectiva, acreditamos que o fato de retirar objetos iguais de ambos os lados da balança não alterar o equilíbrio da balança não era um conceito subsunçor dos estudantes da pesquisa. Consideramos que manipular algebricamente ambos os lados de uma equação do primeiro grau sem alterar sua equivalência é uma excelente maneira de desenvolver sua resolução. Assim, torna-se necessário propor atividades que favoreçam a compreensão deste conceito afim de torná-lo um conceito subsunçor para que a resolução de uma equação do primeiro grau tenha significado para o estudante e não seja apenas um conjunto de estratégias decoradas, uma "receita de bolo" que indica em que momentos "passa-se o *x* pra cá e os números para lá.".

No slide 6, o autor propõe resolver o problema do item d (slide 4), retirando-se pesos iguais de ambos os lados da balança. Da mesma forma que no slide 5, antes de exibir a explicação do narrador no slide 6, a professora pesquisadora propôs uma discussão com a turma sobre o que poderia ser feito para se descobrir o peso do pacote, na expectativa, neste momento, de que os alunos utilizassem a experiência que tiveram para descobrir o peso do pacote do exemplo anterior.

Ao serem questionados sobre o que poderiam fazer para descobrir o peso do pacote, os alunos estabeleceram outras equivalências, validadas pelo equilíbrio da balança como, por exemplo, concluir que, como havia dois quilogramas em ambos os pratos, significava que três pacotes pesavam o mesmo que um pacote mais seis quilogramas. Desta forma, dois pacotes pesariam seis quilogramas e, portanto, um pacote deveria pesar três quilogramas.

Mais uma vez, os alunos evidenciaram que conseguiram resolver o problema proposto utilizando-se de uma estratégia distinta de retirar objetos iguais de ambos os pratos da balança, mantendo o equilíbrio existente. Apesar de terem assistido a um exemplo apresentado pelo autor do ODA "Equações do 1º Grau", os estudantes insistiram em utilizar outra maneira de resolver o problema. Neste sentido, acreditamos que os estudantes evidenciaram que as informações expostas no exemplo apresentado pelo autor do ODA não se relacionaram com aspectos relevantes da estrutura do conhecimento dos estudantes, ou seja, neste processo a nova informação não interagiu com conceitos subsunçores existentes na estrutura cognitiva dos aprendizes.

Assim, os alunos chegaram a uma conclusão correta para a situação proposta e puderam comprovar isso valendo-se apenas do conceito de equivalência e de seu conhecimento prévio em relação às operações aritméticas básicas. Nessa perspectiva, surpreendeu-nos positivamente o raciocínio desenvolvido pelos alunos para chegaram ao peso do pacote, em ambas as situações apresentadas, pois os mesmos não utilizaram nenhuma estratégia pré-estabelecida ou método convencionado para resolver os problemas propostos.

Apesar de reconhecermos a relevância de o aluno dominar técnicas de resolução de equações, consideramos que uma das funções da Álgebra é a de ser um instrumento poderoso para resolver problemas, conforme aponta Usiskin (1995), ao estabelecer uma das concepções da Educação Algébrica – Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas. Contudo, consideramos que a ênfase dada ao ensino de equações no ensino de Álgebra e a maneira como este ensino é realizado colaboram para que o aluno não aprecie utilizar outras estratégias para resolver problemas. Muitas vezes, este fato é enfatizado por professores que estabelecem que só é possível resolver o problema fazendo uso das equações. Desta maneira, acreditamos que a diversidade de estratégias para resolver um mesmo problema e a investigação da relação existente entre elas é uma boa maneira de desenvolver o trabalho em sala de aula e, muitas vezes, de dar significado à resolução com o uso da manipulação simbólica.

Conforme apontam Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) houve uma tendência dominante no ensino da Álgebra durante todo o século XIX até a metade do século XX, que era o de proporcionar um instrumento técnico para resolver equações ou problemas equacionáveis. Os autores denominaram esta concepção da Educação Algébrica de Línguístico-pragmática, que considerava que o mais relevante no ensino de Álgebra não era a natureza ou relevância do problema, mas sim a forma como este era resolvido.

Após as discussões estabelecidas, foi exibida a explicação do professor do vídeo, disponível nos slides 5 e 6. Nestes momentos, os alunos puderam observar a resolução do autor do vídeo para as situação propostas. No slide 5, o narrador resolve o problema retirando pesos iguais de ambos os pratos da balança e, depois, divide por três o peso restante no prato da direita para obter, assim, o peso de um pacote. Já no slide 6, o narrador retira dois quilogramas de ambos os pratos da balança e, em seguida, retira um pacote de cada lado da balança, finalizando ao dividir o peso total de um dos pratos por dois que equivale ao número de pacotes do outro lado da balança.

Embora o autor do ODA "Equações do 1º Grau" faça uso de um método de resolução de equações para resolver os problemas propostos, acreditamos que, para estas situações, não há necessidade de se fazer uso deste tipo de procedimento. Tal fato fica evidente nas resoluções apresentadas pelos alunos.

O uso de balanças de dois pratos no ensino de equações é citado por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), ao estabelecerem a concepção fundamentalista-analógica, determinando que em um momento da Educação Algébrica houve uma tentativa de fazer uso de recursos analógicos físicos como o uso de balança de dois pratos para ensinar resolução de equações e, desta forma, estabeleceu-se uma tentativa de resgatar o valor instrumental da Álgebra.

Acreditamos que, nas situações propostas no ODA e, em praticamente todas as circunstâncias apresentadas em uma balança de dois pratos, não há necessidade de se fazer uso das equações para determinar o peso de um pacote ou outra coisa qualquer. Contudo, esta pode ser uma importante ferramenta para que seja possível estabelecer a compreensão do conceito de equivalência existente em uma equação e, neste sentido, facilitar a Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau. Nesta perspectiva, a balança de dois pratos pode ser um organizador prévio comparativo facilitador da aprendizagem.

É evidente que equações do tipo 5x – 13 = 3x – 2x – 12 ou $4x - 2 = \frac{2x+5}{2}$ não podem ser facilmente representadas por pacotes e pesos em uma balança de dois pratos e, neste sentido, as técnicas e procedimento de resolução de equações são praticamente inevitáveis.

É importante que o aluno saiba avaliar as vantagens e desvantagens do uso da manipulação simbólica para resolver um problema, antes de efetuar qualquer procedimento. Nesta perspectiva, ao longo do trabalho com Álgebra, o professor deve incentivar seus alunos a estabelecerem diferentes estratégias para a resolução de problemas e, desta forma, dar liberdade para que estes elejam qual mecanismo é o mais eficaz. Como afirma Arcavi (1995)

> Defendemos que ter sentido do símbolo deve incluir uma sensibilidade intuitiva sobre quando usar os símbolos no processo de resolução de um problema e, inversamente, quando abandonar o tratamento simbólico para usar instrumentos melhores. (p. 40/41)

Nos slides 7 e 8, o autor procura traduzir a representação dos objetos nas balanças para a linguagem algébrica. No entanto, o faz utilizando imediatamente a variável x para representar o peso dos pacotes. Através da nossa experiência em sala de aula, pudemos notar que, impor precocemente o uso de letras quando se inicia o estudo de Álgebra no Ensino Fundamental, muitas vezes, prejudica a compreensão da simbologia e linguagem algébrica (USISKIN, 1995).

Neste sentido, propusemos aos alunos que criassem uma maneira de traduzir para a linguagem algébrica a representação dos pesos da balança. Assim, foi solicitado aos alunos que relacionassem os pesos e os pacotes dos pratos através de uma igualdade que representasse o equilíbrio das balanças.

Neste momento, os estudantes criaram diversos símbolos para representar os pesos e os pacotes de cada um dos pratos das balanças apresentadas. Ao compararmos a representação apresentada por um mesmo aluno no item a) em relação a representação criada para a balança do item b), alguns alunos utilizaram símbolos diferentes para representar os pesos e os pacotes de cada item. Assim, estes alunos não estabeleceram um padrão para a simbologia, ou seja, utilizaram símbolos distintos para representar o peso dos pacotes em cada item, além de um símbolo distinto também para cada peso de um quilograma ou de cinco quilogramas. Embora, ainda, o desenho do peso de um quilograma presente em ambas as balanças fosse igual. É o caso dos alunos Ana (Figura 28), Carla (Figura 29), Fredo (Figura 30) e Julya (Figura 31).

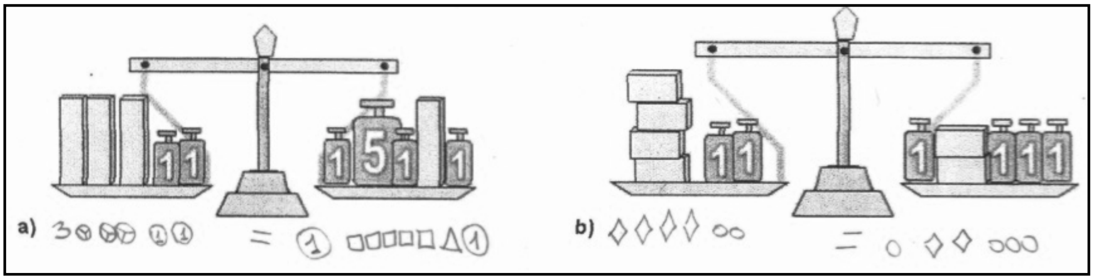


Figura 28: Representação através de símbolos apresentada pela aluna Ana.

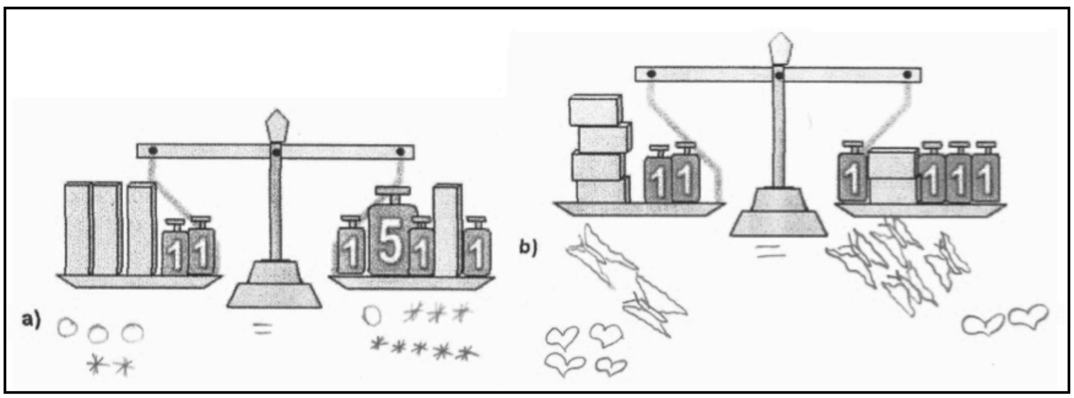


Figura 29: Representação através de símbolos apresentada pela aluna Carla.

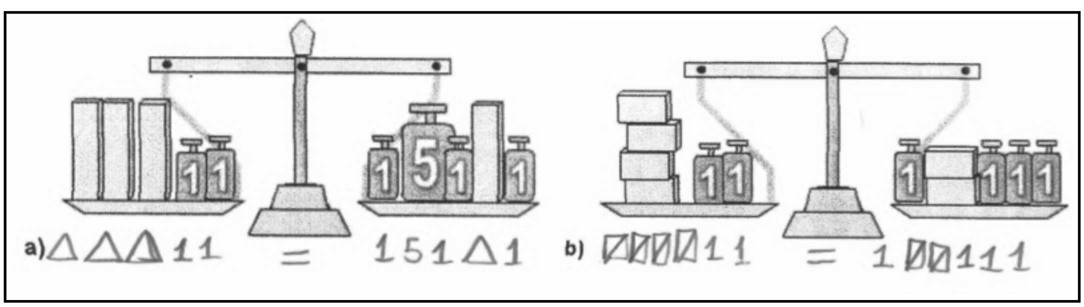


Figura 30: Representação através de símbolos apresentada pelo aluno Fredo.

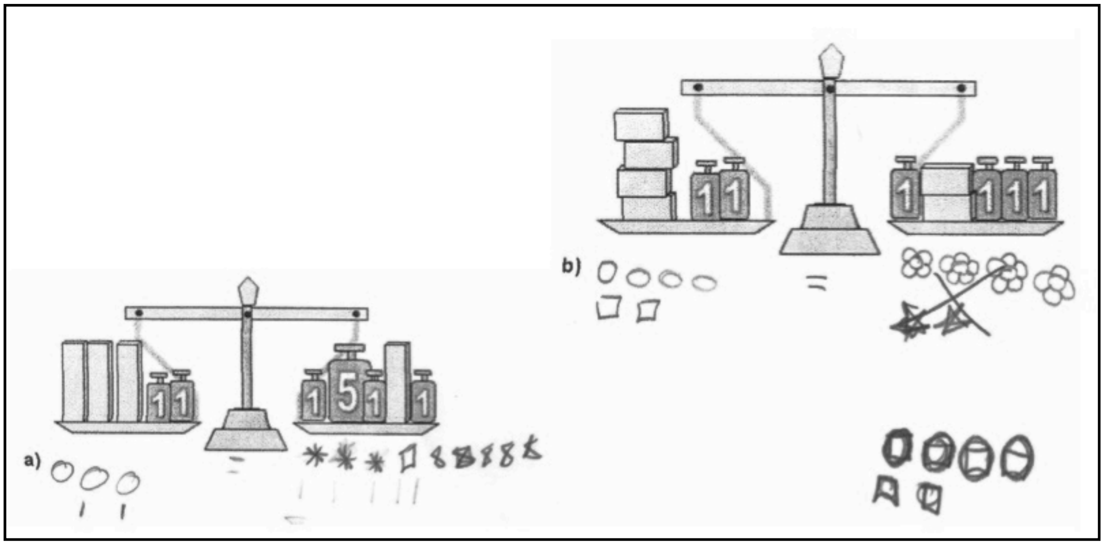


Figura 31: Representação através de símbolos apresentada pela aluna Julya.

É evidente que, para estes alunos, foi difícil estabelecer uma simbologia para representar a igualdade estabelecida pela equivalência dos pratos de cada uma das balanças. Isto demonstra que o uso de símbolos ou letras para representar as situações propostas através de uma equação não fazia sentido para estes estudantes. Assim, acreditamos que estes alunos não apresentavam ideias prévias sobre simbologia ou linguagem algébrica. Nesta perspectiva, as respostas apresentadas desafiaram-nos a buscar uma alternativa para estabelecer estas ideias na estrutura cognitiva dos alunos.

Já outros alunos, criaram um símbolo para representar o pacote e um símbolo para representar os pesos e fizeram uso dos mesmos símbolos em ambos os itens, a e b. Acreditamos que essa representação apresenta um avanço em relação aos demais alunos, pois estes estudantes estabelecem uma mesma simbologia para os pesos e para os pacotes das balanças das duas situações propostas. No entanto, estes alunos também não utilizam letras para representar o peso desconhecido dos pacotes, evidenciando, mais uma vez, que esta forma de representação não é natural, tão pouco faz parte da estrutura cognitiva dos estudantes. Conforme a representação criada por Dani (Figura 32), por Ella (Figura 33) e por Bruno (Figura 34).

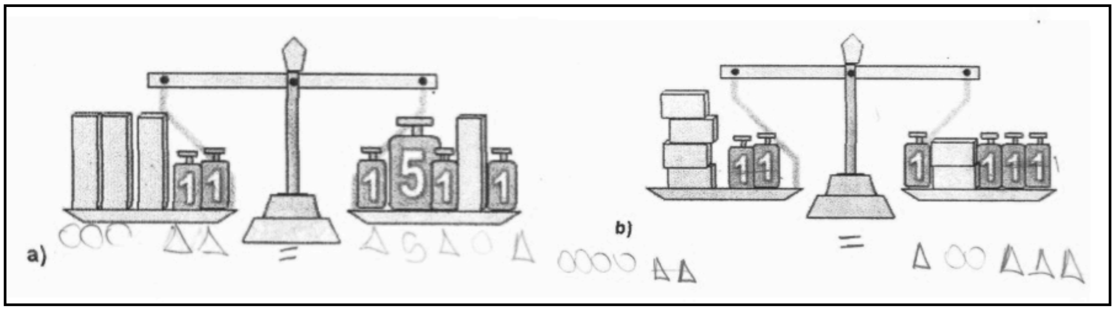


Figura 32: Representação através de símbolos apresentada pela aluna Dani.

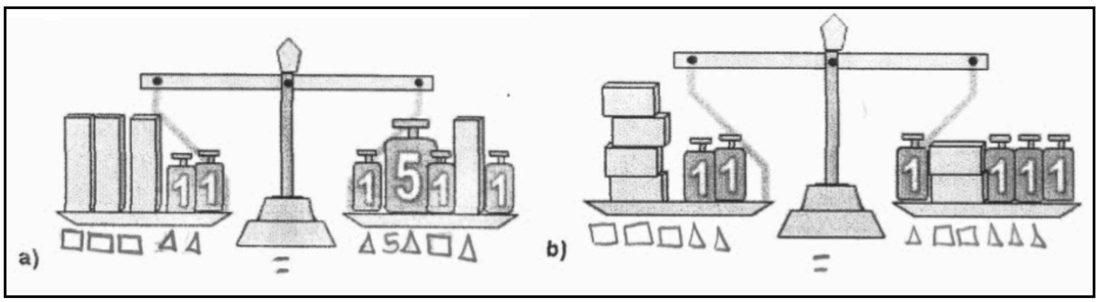


Figura 33: Representação através de símbolos apresentada pela aluna Ella.

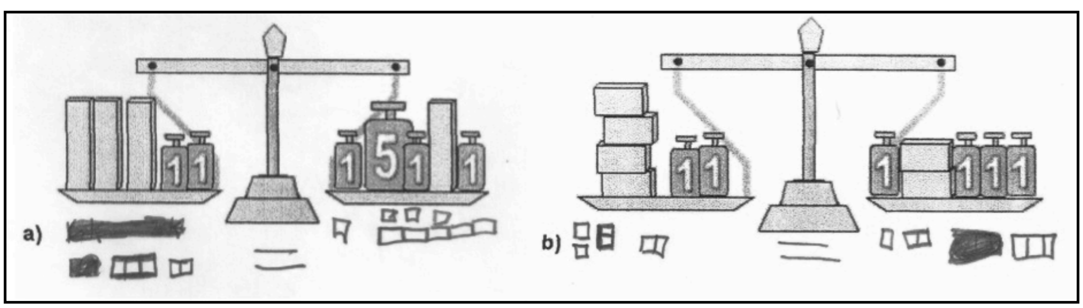


Figura 34: Representação através de símbolos apresentada pelo aluno Bruno.

Houve, ainda, alguns alunos que registraram, inclusive, o peso de cada símbolo. Isso pôde ser observado nas resoluções de Guido (Figura 35) e Heide (Figura 36). Em relação a estes estudantes, é possível verificar um avanço ainda maior em relação aos demais, pois estes alunos demonstraram que, além de criarem uma simbologia para representar o equilíbrio da balança através de uma igualdade, utilizaram-se do conceito de equivalência para destacar o peso de cada um dos pacotes em questão.

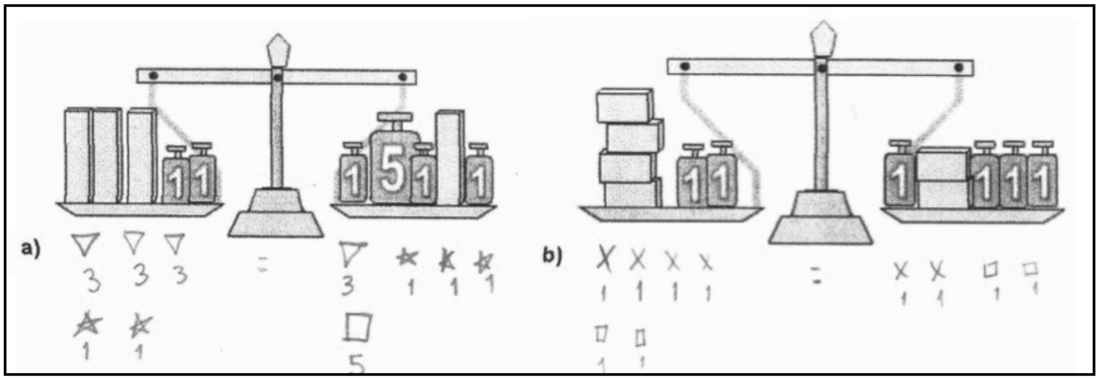


Figura 35: Representação através de símbolos apresentada pelo aluno Guido.

Figura 36: Representação através de símbolos apresentada pela aluna Heide.

A partir dos símbolos criados pelos alunos, foi possível observar que nenhum deles fez uso de letras para representar os pacotes e/ou os pesos. Este fato corrobora a ideia que temos em relação à forma como se introduz o ensino de Álgebra na escola básica. Em geral, quando se inicia o estudo de Álgebra no Ensino Fundamental, acreditamos que há uma imposição rápida e precoce do uso de símbolos. É como se o uso de linguagem corrente tivesse que ser quase totalmente desprezada.

Neste sentido, acreditamos que esta atividade funcionou como um organizador prévio, pois, através dela foi possível verificar se os estudantes apresentavam ideias prévias sobre simbologia ou linguagem algébrica em termos de equações. Até este momento, os sujeitos da pesquisa demonstravam não possuir conceitos subsunçores sobre linguagem algébrica. Contudo, percebemos a necessidade de desenvolver outras atividades que pudessem confirmar nossa hipótese ou até mesmo constituir este conceito.

Nesta perspectiva, após os alunos estabelecerem uma maneira de representar os pesos dos pratos através de uma igualdade, a professora-pesquisadora solicitou aos alunos que anotassem todos os passos realizados para encontrar o peso dos pacotes, utilizando agora a simbologia criada por eles. Desta forma, esperávamos que os alunos verificassem que, assim, estabelecia-se a necessidade de se convencionar um símbolo para os pesos dos pacotes e outro símbolo para os pesos.

Muitos alunos apresentaram dificuldades para chegar ao peso dos pacotes, através do método que consiste em retirar pesos e pacotes iguais de ambos os lados, apresentado pelo autor do ODA "Equações do 1º Grau". Nesta etapa, acreditamos que para os alunos, principalmente por não terem padronizado uma mesma simbologia para cada pacote e/ou peso, foi muito difícil registrar os passos para obtenção da solução da equação através dos símbolos. É o caso da aluna Carla que, por exemplo no item a, utilizou "bolinha" para representar o peso de 1kg e, também, o peso de 5kg, Figura 37.

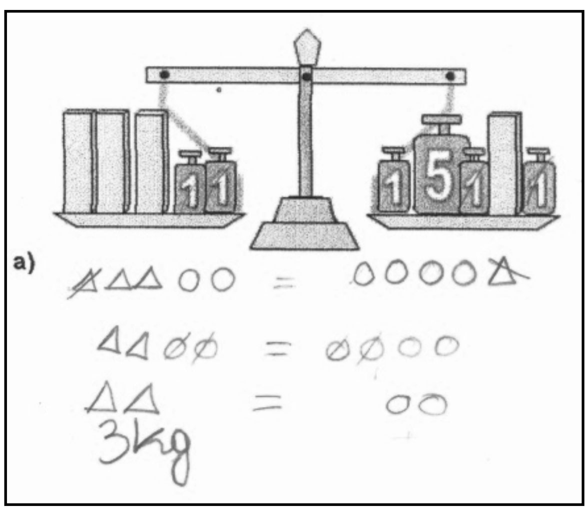


Figura 37: Resolução do item a apresentada por Carla através dos símbolos criados pela aluna.

Apesar de Carla saber que o peso do pacote era 3kg, pois esta havia respondido qual era o peso do pacote da situação apresentada pela balança em uma questão anterior, a estudante ficou confusa em relação a forma como poderia concluir, através da manipulação dos símbolos, qual era o peso do pacote. Mais uma vez, enfatizamos que, nesta situação, não é necessário fazer uso de uma equação para identificar o peso do pacote em questão. Contudo, nesta atividade, nosso objetivo era verificar se o uso de letras para representar o peso desconhecido do pacote era um conceito subsunçor existente na estrutura cognitiva dos alunos.

No entanto, no item b, Carla conseguiu manipular corretamente os símbolos de ambos os lados da igualdade e chegar a uma conclusão idêntica a apresentada sem a utilização do método de tirar pesos e pacotes iguais de ambos os lados da balança, conforme Figura 38.

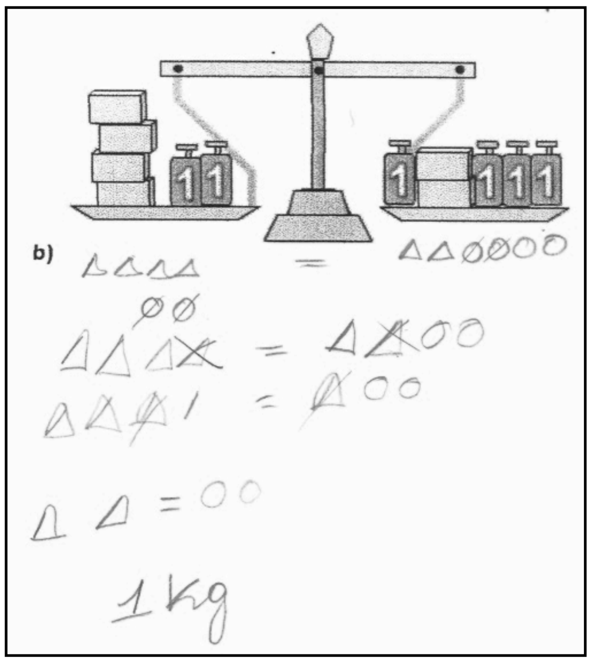


Figura 38: Resolução do item b apresentada por Carla através dos símbolos criados pela aluna.

Houve, também, alunos que utilizaram símbolos diferentes para o peso de 5kg e os pesos de 1kg da balança do item a. A aluna Dani utilizou triângulo e quadrado, respectivamente. Neste caso, diante do impasse triângulo + quadrado, a aluna concluiu que, como o triângulo representava o peso de 1kg e o quadrado o peso de 5kg os dois juntos pesariam 6kg e, ao invés de criar um novo símbolo para representar um peso de 6kg, a aluna utilizou o valor numérico 6 para o peso total, Figura 39.

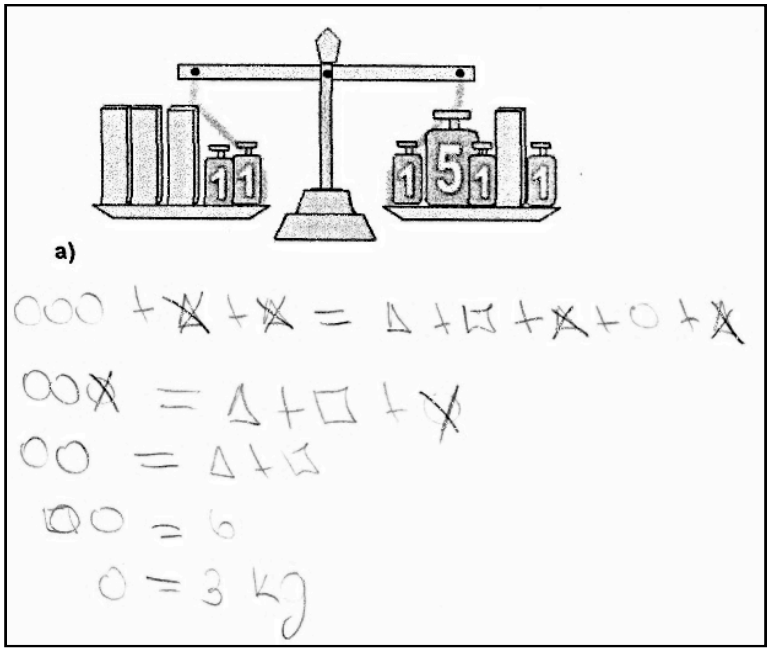


Figura 39: Resolução do item a apresentada por Dani através dos símbolos criados pela aluna.

O mesmo não ocorreu na resolução do item b, pois a situação representada pela balança não apresentava pesos diferentes de 1kg, Figura 40.

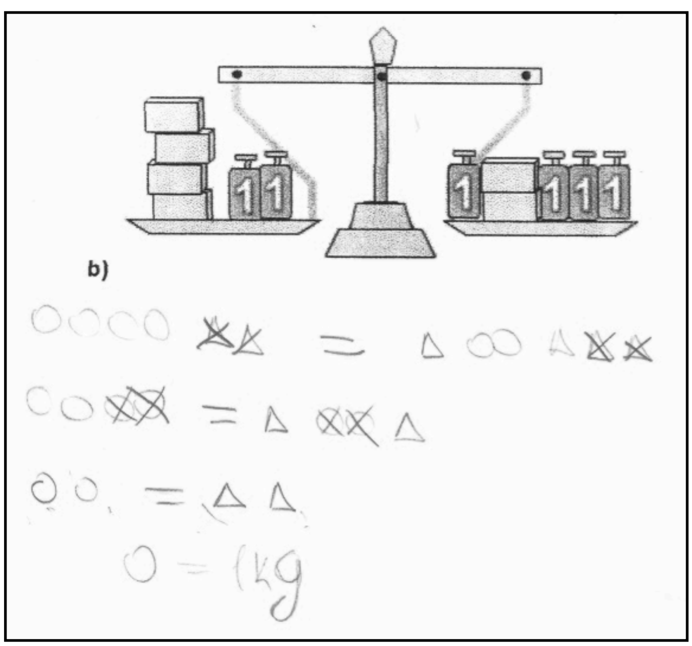


Figura 40: Resolução do item b apresentada por Dani através dos símbolos criados pela aluna.

Houve, ainda, outros casos em que foi atribuído um símbolo para os pacotes e utilizado os valores numéricos dos pesos. Exemplos destas resoluções foram expressados pelos alunos Guido e Igor, Figura 41 e Figura 42, respectivamente.

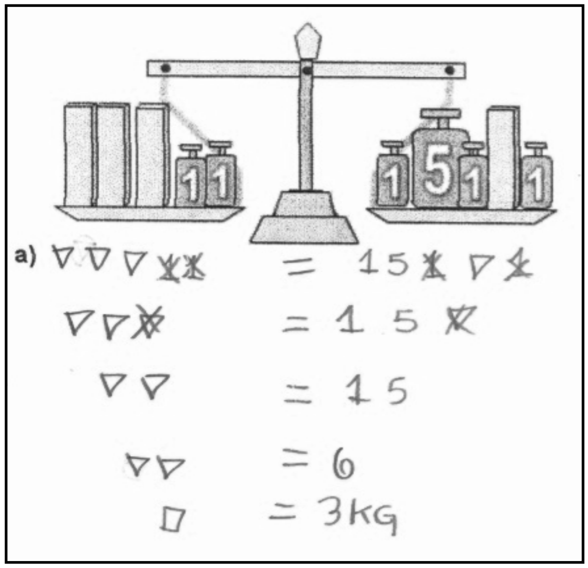


Figura 41: Resolução do item a apresentada por Guido através dos símbolos criados pelo aluno.

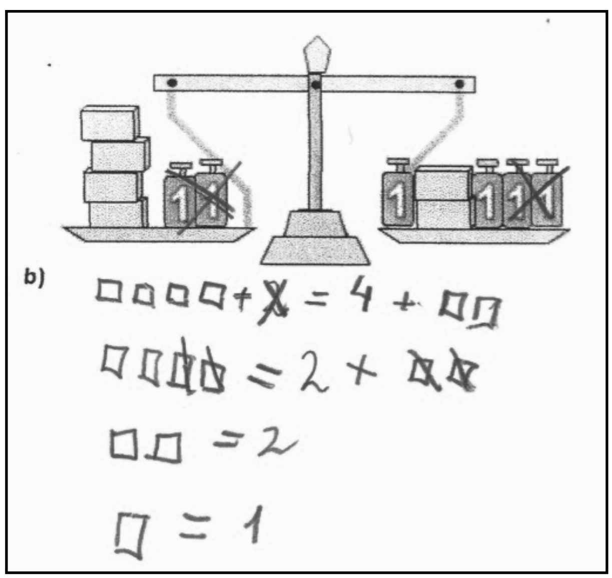


Figura 42: Resolução do item a apresentada por Guido através dos símbolos criados pelo aluno.

Já outros alunos utilizaram e manipularam corretamente os símbolos da igualdade e, assim, chegaram corretamente ao peso dos pacotes. É o caso das alunas Ana e Heide, Figura 43 e Figura 44, respectivamente.

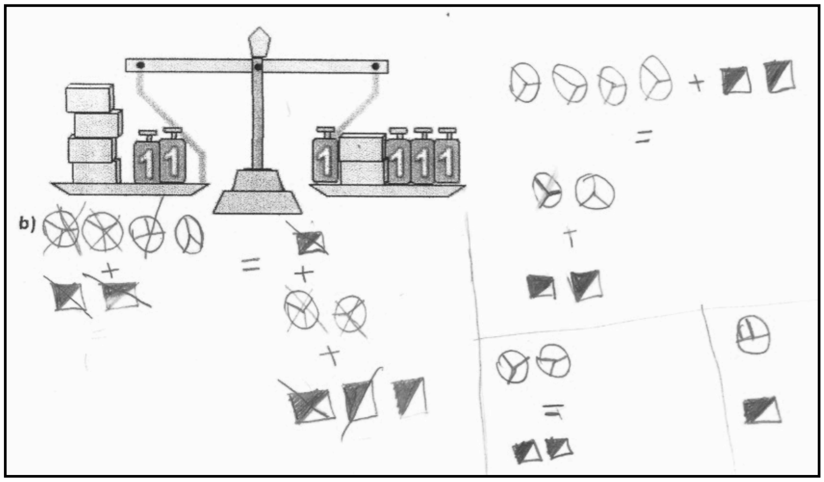


Figura 43: Resolução do item b apresentada por Ana através dos símbolos criados pela aluna.

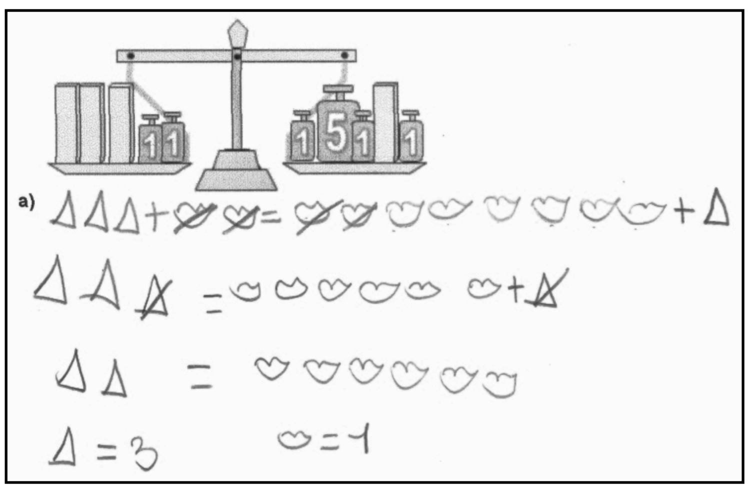


Figura 44: Resolução do item a apresentada por Heide através dos símbolos criados pela aluna.

Durante a resolução das situações apresentadas nas balanças propostas, os alunos apresentaram algumas dificuldades devido à simbologia escolhida. Neste sentido, ficou evidente ser necessário estabelecer uma simbologia comum a todos de forma a facilitar sua manipulação. Assim, ao discutirmos com os alunos sobre isso, destacamos este fato para argumentar aos estudantes a necessidade de se convencionar o uso de um mesmo símbolo para representar o peso desconhecido do pacote. Dessa forma, acreditamos que esta atividade funcionou como organizador prévio para verificar se a utilização de uma letra para representar uma incógnita era um conceito subsunçor dos sujeitos da pesquisa. No entanto, esta atividade não foi suficiente para estabelecer este conceito na estrutura cognitiva dos alunos. Logo, tornou-se necessário buscar uma maneira de possibilitar a compreensão do uso das letras por parte dos alunos para, então, auxiliar na Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau.

Dessa forma, refletimos sobre as ideias de Ausubel (1980) em relação à forma como o aprendiz obtém os conceitos. Neste momento da pesquisa, percebemos que a ideia de utilizar letras para representar o peso desconhecido dos pacotes das balanças não surgiria por descoberta (AUSUBEL, 1980). Assim, percebemos a necessidade de apresentar aos estudantes uma maneira convencional de representar através de símbolos a equivalência representada pelo equilíbrio em uma balança de dois pratos. Ou seja, com esta atividade, esperávamos que os alunos percebessem a necessidade de se chegar a um acordo de que todos usaríamos um mesmo símbolo para representar o peso desconhecido do pacote. Nesse sentido, acreditamos que não seria por descoberta que os alunos concluiriam que falaríamos todos a mesma língua se utilizássemos uma letra para o peso do pacote.

Quando todos acabaram suas representações simbólicas para os pacotes e pesos das balanças, foram apresentados os slides 7 e 8 na intenção de que os alunos notassem a simbologia utilizada pelo professor do vídeo, no caso a letra x para representar o peso dos pacotes.

Feito isso, solicitamos aos alunos que relacionassem os pesos dos pratos das balanças, através de uma igualdade fazendo uso de letras para representar o peso desconhecido dos pacotes e números para representar os pesos dos pratos das balanças. Assim, à medida que fossem eliminando pesos e pacotes iguais de ambos os pratos da balança, os estudantes deveriam registrar, através da simbologia criada, as etapas de resolução das equações.

Todos os alunos chegaram ao peso correto dos pacotes, ou seja, descobriram qual era o valor que cada letra estava representando. Além disso, alguns alunos utilizaram a mesma letra para representar o peso desconhecido dos pacotes em ambas as situações apresentadas. É o caso das alunas Ana (Figura 45) e Carla (Figura 46).

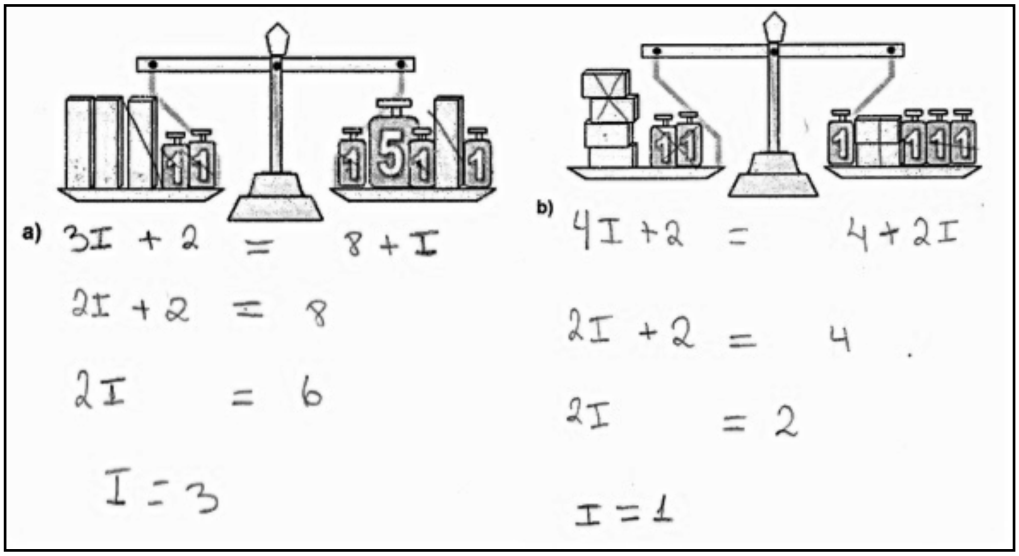


Figura 45: Resolução apresentada por Ana através das letras usadas pela aluna.

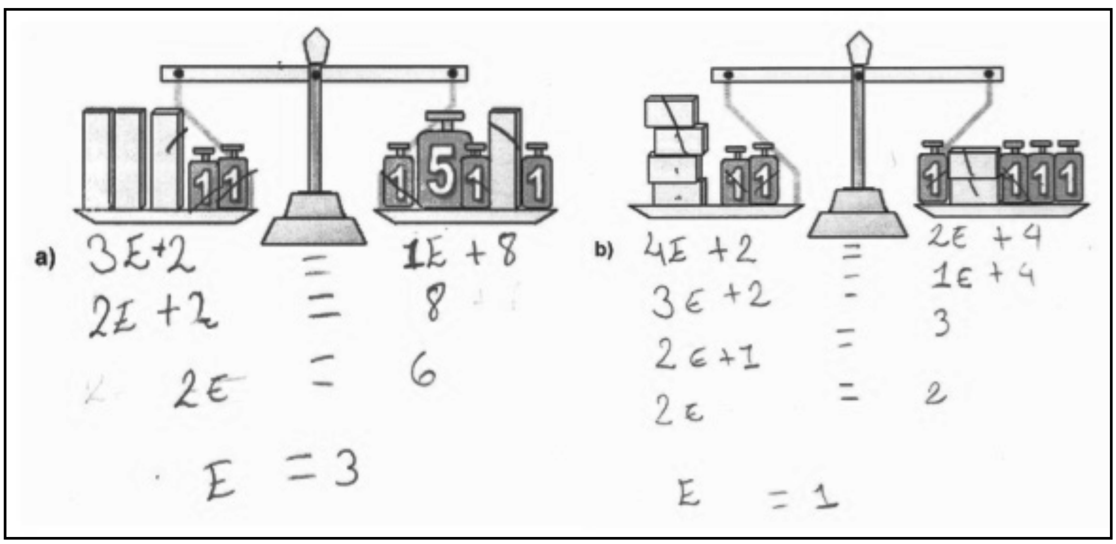


Figura 46: Resolução apresentada por Carla através dos letras usadas pela aluna.

Já outros alunos preferiram usar letras diferentes em cada uma das situações apresentadas, conforme as resoluções de Fredo (Figura 47) e Heide (Figura 48).

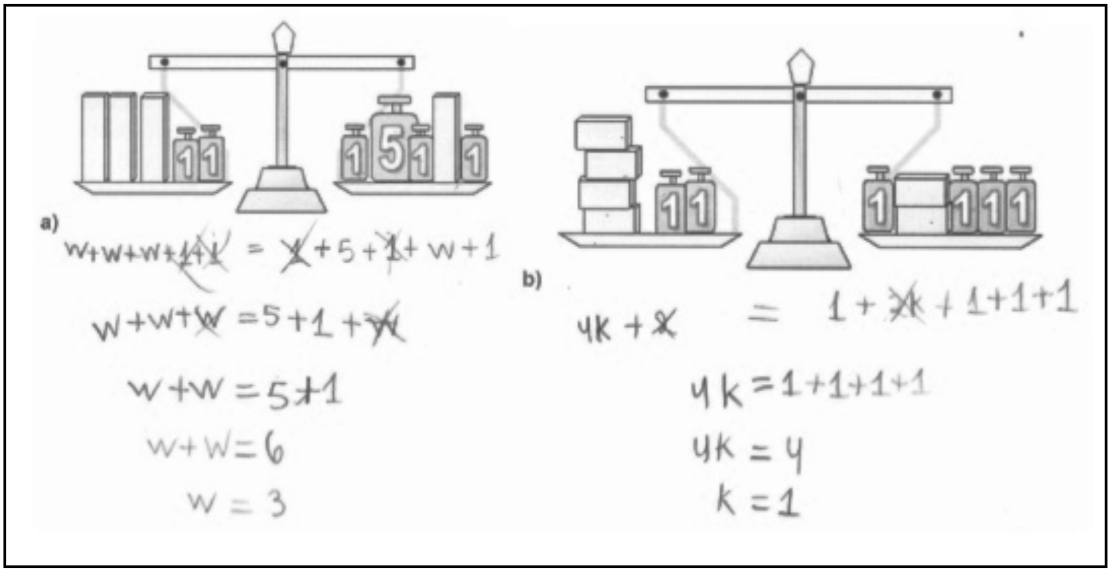


Figura 47: Resolução apresentada por Fredo através dos letras usadas pelo aluno.

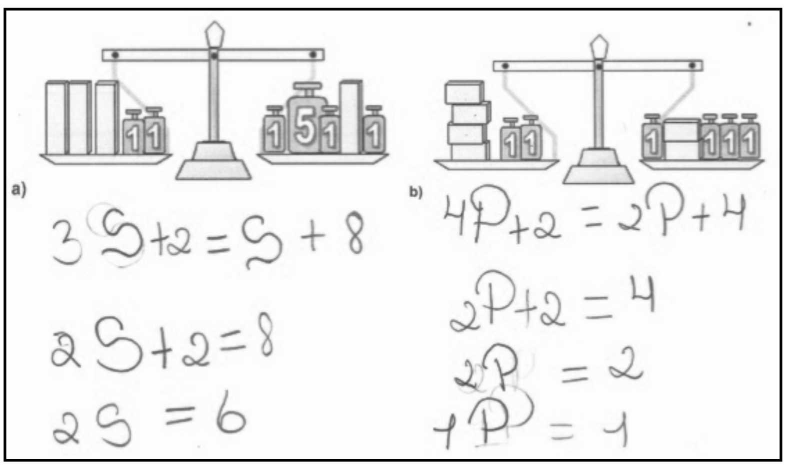


Figura 48: Resolução apresentada por Heide através dos letras usadas pela aluna.

Com esta atividade foi possível notar que, de fato, a utilização de letras para representar o peso desconhecido dos pacotes nas situações apresentadas nas balanças de dois pratos não é uma ideia natural para os estudantes. Contudo, o estabelecimento, através de um organizador prévio expositivo, do uso de uma letra para representar uma incógnita possibilitou aos alunos chegar mais facilmente ao peso do pacote. Assim, corroboramos com a ideia de que impor precocemente o uso de letras favorece um ensino mecanizado de equações do primeiro grau.

Acreditamos que, com as atividades propostas pelo ODA “Equações do 1º Grau”, foi possível identificar e desenvolver alguns conceitos subsunçores necessários para a ocorrência de Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau. Assim, a utilização deste recurso digital de aprendizagem funcionou como uma estratégia para apresentar o conteúdo de equações do primeiro grau de forma a, deliberadamente, influenciar a estrutura cognitiva dos aprendizes para que o novo conceito fosse formado a partir de conceitos já existentes.

Nas primeiras atividades, foi possível verificar que a noção de equivalência, em termos de uma balança de dois pratos, era um conceito subsunçor dos participantes da pesquisa. Assim, apoiando-se neste conceito existente na estrutura cognitiva dos aprendizes, a partir de um organizador prévio comparativo, instauramos o conceito de noção de equivalência existente em uma equação.

Através do conjunto da segunda parte de atividades do dispositivo virtual, foi possível verificar que, para os alunos, não era natural utilizar letras para representar uma incógnita. Ou seja, os alunos não possuíam nenhuma ideia prévia sobre linguagem algébrica. Assim, mudamos o rumo da atividade afim de torná-la um organizador prévio para o estabelecimento deste conceito nos alunos. Assim, não apenas o novo material se tornou familiar e significativo para o aprendiz, mas os conceitos já existentes foram selecionados e utilizados de forma integrada.

Na próxima sessão, analisamos as produções dos alunos em relação às tarefas propostas durante a utilização do ODA Balanza Algebraica.

6.2 ANÁLISE DA PRODUÇÃO DOS ALUNOS EM RELAÇAO AO ODA BALANZA ALGEBRAICA

Na terceira aula, solicitamos aos alunos que resolvessem algumas equações do primeiro grau utilizando o ODA “Balanza Algebraica”. Como não há uma ordem de resolução das equações apresentadas pelo dispositivo virtual, ou seja, todas as vezes que se solicita um novo problema surge uma equação aleatória, cada aluno resolveu diferentes equações.

Em geral, os alunos não apresentaram dificuldade, nem em termos de manipulação do ODA “Balanza Algebraica”, nem em relação à resolução das equações. Durante a utilização do

ODA, os alunos resolveram equações do tipo ax + b = cx + d com a, b, c e d números inteiros positivos e a diferente de zero. Todas as soluções encontradas pertenciam ao conjunto dos números naturais.

Grande parte dos estudantes, representou com muita facilidade cada equação sugerida pelo ODA na balança, através dos blocos X e de unidades. Acreditamos que, neste momento, já havia uma familiarização dos alunos com a situação em que se estabelece uma relação entre uma equação e o equilíbrio dos pesos dos dois pratos de uma balança, pois, anteriormente, especificamente nas duas primeiras aulas, foi trabalhado este conceito através do ODA "Equações do 1º Grau". Neste sentido, acreditamos que esta atividade funcionou como organizador prévio comparativo (AUSUBEL, 1980), pois era familiar ao aprendiz. Ou seja, a atividade proposta continha elementos que relacionavam os conhecimentos prévios dos alunos com os novos conhecimentos. Assim, os conhecimentos adquiridos pelos alunos anteriormente ajudaram-os a compreender a atividade nova.

Podemos verificar isto através das resoluções apresentadas pelos sujeitos da pesquisa. Destacamos uma das equações resolvidas pela aluna Ella: 3x + 5 = 2x + 6. A estudante resolveu a equação, primeiramente, subtraindo o número cinco de ambos os termos da equação e, da mesma forma, retirando-se cinco blocos de uma unidade de ambos os pratos da balança. Em seguida, Ella subtraiu 2x de ambos os lados da equação, ao mesmo tempo que retirou dois blocos X de cada lado da balança. Assim, Ella chegou ao resultado x = 1. A Figura 49 ilustra a resolução realizada por Ella.

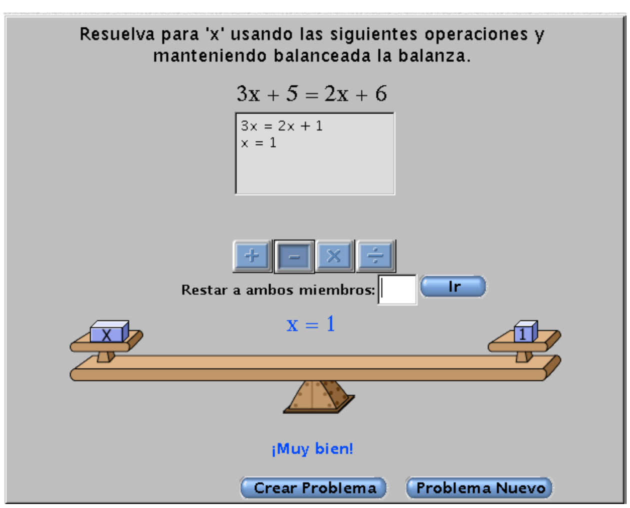


Figura 49: Resolução da equação 3x + 5 = 2x + 6 realizada por Ella no ODA Balanza Algebraica.

Assim como Ella, os outros estudantes quase não apresentaram dificuldades para resolverem as equações propostas pelo dispositivo virtual. Acreditamos que, nesse sentido, o ODA Balanza Algebraica propiciou que os alunos compreendessem o conceito de equivalência existente em uma equação do primeiro grau.

Contudo, ao utilizarem a versão do programa para números negativos, os alunos estranharam a representação dos pesos negativos através de balões. Neste sentido, foi difícil para os alunos compreenderem que ao invés de retirar pesos de ambos os lados das equação agora eles teriam de colocar pesos. Desta forma, os alunos enfrentaram alguns obstáculos para descobrir qual era o peso do bloco X.

No entanto, à medida que foram resolvendo mais equações, a resolução foi ficando mais evidente para os estudantes, da mesma maneira que com números positivos. Os estudantes foram percebendo que bastava efetuar sempre a mesma operação de ambos os lados da equação para chegar a uma solução para o peso do bloco X . Ausubel (1980) aponta que a assimilação de conhecimentos ocorre sempre que uma nova informação interage com outra existente na estrutura cognitiva. Ou seja, o fato dos alunos conseguirem chegar a uma solução para as equações que envolviam números negativos utilizando um raciocínio semelhante ao usado com números positivos evidencia que os aprendizes assimilaram o conhecimento adquirido.

Dentre as resoluções apresentadas pelos alunos, foi possível verificar que alguns, ao iniciar a resolução com números negativos, realizaram algumas operações que não facilitavam a obtenção de sua solução. Estes alunos faziam operações aritméticas de ambos os lados da equação, mas quanto mais operações faziam, maior era o número de blocos ou balões que surgiam, dificultando que o aluno chegasse a uma conclusão sobre a solução da equação. Consideramos que, ao se depararem com este tipo de equação, estes alunos ainda não haviam compreendido o que estavam fazendo, pois estavam apenas reproduzindo a estratégia realizada para resolver as equações no universo dos números naturais. Acreditamos que, neste momento, a aprendizagem de equações do primeiro grau ainda não era significativa, pois os conceitos subsunçores presentes na estrutura cognitiva dos alunos não era suficiente para solucionar a equação, evidenciando a falta de alguns conceitos necessários para ancorar o novo conhecimento.

Por exemplo, uma das equações resolvidas pela aluna Heide foi $4x - 5 = -x + 5$. Para solucionar esta equação, a aluna primeiramente, adicionou cinco de ambos os lados da equação e a balança do ODA Balanza Algebraica mostrou como resultado desta operação quatro blocos X no prato da esquerda e um balão –X mais dez blocos unitários do lado direito. Em termos de equação o resultado ficou 4x = -x + 10, conforme Figura 50.

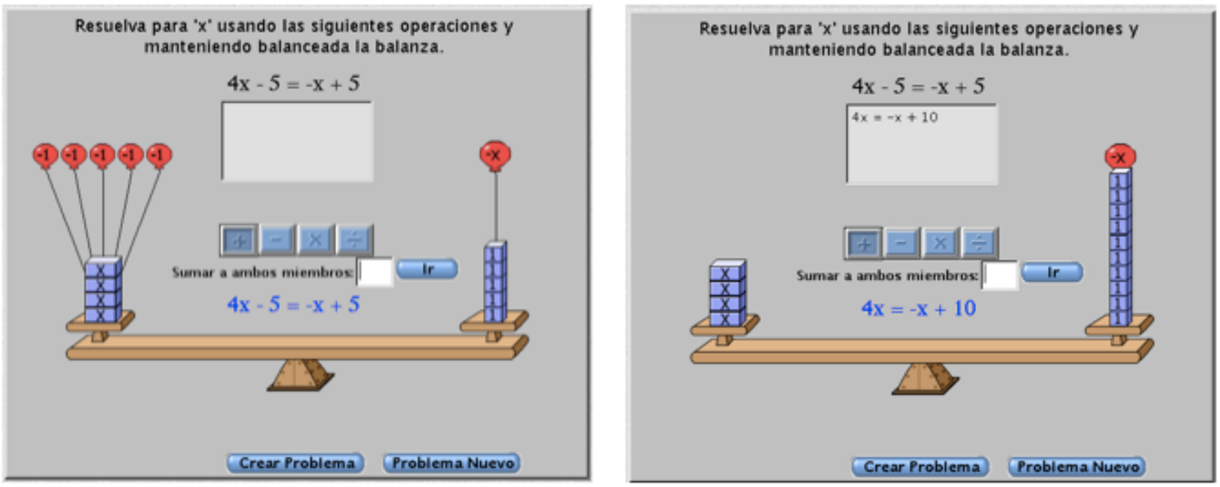


Figura 50: Resolução da equação 4x – 5 = – x + 5 (parte a) realizada por Heide no ODA Balanza Algebraica.

Em seguida, a aluna retirou um bloco X de ambos os lados da balança e o resultado da equação equivalente foi 3x = -2x + 10 (Figura 51). Neste momento, a aluna estranhou o que aconteceu, pois quando esta resolvia uma equação onde todos os termos eram positivos, ao subtrair uma quantidade determinada de blocos X de ambos os lados da balança, o programa mostrava como solução um equação equivalente a primeira, mas que tinha blocos X em apenas um dos pratos da balança. Assim, a aluna conseguia identificar rapidamente qual era o peso X.

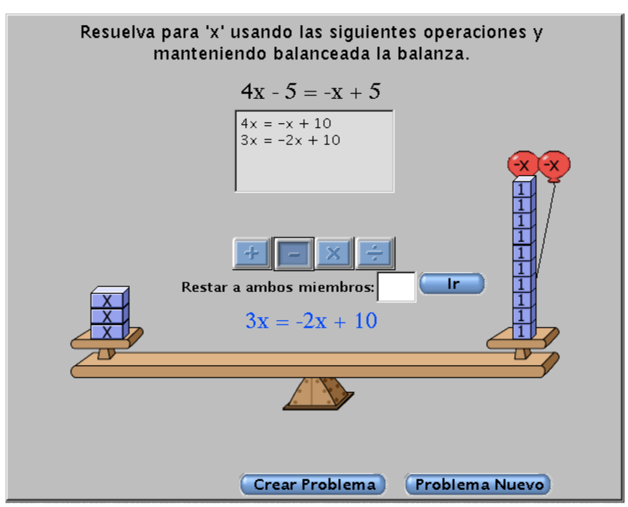


Figura 51: Resolução da equação 4x – 5 = – x + 5 (parte b) realizada por Heide no ODA Balanza Algebraica.

No entanto, ao subtrair de ambos os lados um bloco X, obtendo uma equação equivalente onde cada termo tinha um valor em X a aluna foi estimulada a pensar sobre outra forma de resolver a equação. Concluindo que para que ela ficasse com blocos X em apenas um dos pratos da balança deveria adicionar 2x de ambos os lados. Assim, a aluna obteve a equação equivalente 5x = 10 e logo concluiu que o peso do bloco X era 2. A Figura 52 ilustra a solução encontrada pela aluna Heide.

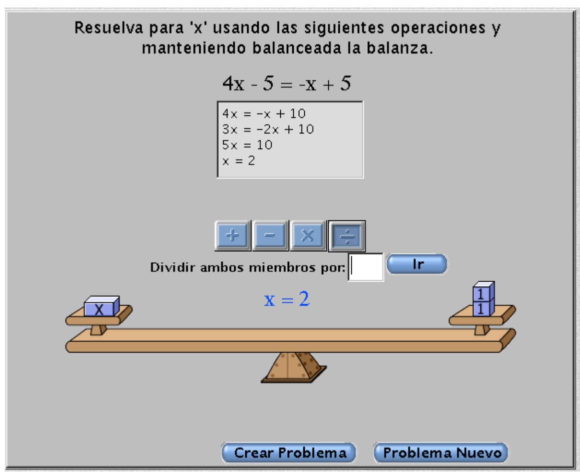


Figura 52: Resolução da equação 4x – 5 = – x + 5 (parte c) realizada por Heide no ODA Balanza Algebraica.

Vários outros alunos passaram por situações semelhantes a esta ao resolverem as equações propostas pelo ODA Balanza Algebraica Negativos. Nestes momentos, os alunos foram incentivados a refletir sobre uma maneira diferente de resolver a equação. Pois, ao solucionarem várias equações apenas com números positivos, os alunos, de certa maneira, haviam mecanizado uma maneira de resolver e, no momento que encontraram uma situação distinta das anteriores, sentiram necessidade de refletir sobre a situação encontrada. Como os alunos encontraram a solução para as equações com números negativos, acreditamos que eles utilizaram o conceito de equivalência estabelecido a partir das atividades anteriores. Neste sentido, o novo conhecimento interagiu e se incorporou de maneira substancial e não arbitrária a conhecimentos relevantes existentes na estrutura cognitiva dos alunos (AUSUBEL, 1980).

Desta forma, constatamos que os alunos resolveram as equações propostas utilizando as inversas das operações apresentadas com o intuito de encontrar o valor da incógnita através de equações equivalentes. Assim, consideramos que os alunos demonstraram compreender que o sinal de igual em uma equação representa uma equivalência. E, através das operações inversas, é possível chegar a uma solução para os tipos de equações apresentadas.

Da mesma forma, ao resolverem as equações propostas sem a utilização do ODA "Equações do 1º Grau", os alunos demonstraram que compreenderam o conceito de equivalência e que este serviu como ponte para o aprendizado de equações do primeiro grau. Nesta perspectiva, acreditamos que o conceito de equivalência favoreceu a aprendizagem dos alunos, tanto por satisfazer as condições necessárias quanto por propiciar os princípios facilitadores da Aprendizagem Significativa.

Finalizamos este capítulo na próxima seção, na qual apresentamos nossa análise em relação ao questionário realizado com os alunos na intenção de encontrar evidências da Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau.

6.3 EVIDÊNCIAS DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Ausubel (1980) afirma que uma das evidências da Aprendizagem Significativa é que o aluno consiga relatar os atributos relevantes de um conceito ou os elementos essenciais de uma proposição. Neste sentido, procuramos elaborar um questionário (Apêndice C) afim de verificar se os alunos haviam aprendido significativamente o conteúdo de equações do primeiro grau.

As duas primeiras perguntas do questionário final são referentes à utilização do ODA Balanza Algebraica como recurso para aprendizagem de equações. Na primeira questão, os alunos deveriam responder quais haviam sido as dificuldades encontradas durante a utilização do *software*. A maioria dos alunos respondeu que a maior dificuldade encontrada foi em relação aos números negativos, conforme apontam as respostas dos alunos Heide e Guido: "As dificuldades foram com os números negativos, pois ficou mais difícil de fazer com eles." (Heide). "Eu achei difícil a parte dos negativos, porque tinha os balões que acabaram me confundindo um pouco." (Guido).

Assim, foi possível verificar que as principais dificuldades apresentadas durante a utilização do ODA Balanza Algebraica, destacadas pelos alunos, foram as mesmas que verificamos durante a análise das produções dos estudantes.

Na segunda questão do questionário, os alunos deveriam responder se eles preferiram resolver as equações utilizando os botões de operações oferecidos pelo dispositivo virtual *Balanza Algebraica* ou sem fazer uso destes botões. Não nos surpreendeu o fato de todos os alunos responderem que preferiram fazer a resolução das equações propostas utilizando os botões do *software*. Destacamos as respostas apresentadas por Ella e July: “Os botões, porque no papel foi mais difícil descobrir quanto pesava o bloco.” (Ella). “Eu achei mais fácil com os botões porque eu conseguia ver o que estava acontecendo.” (July).

Ao fazer uso do ODA *Balanza Algebraica* para resolver as equações propostas, o aluno tem à sua disposição uma ferramenta que possibilita a realização da mesma operação de ambos os lados de uma equação e apresenta, imediatamente, como solução uma equação equivalente à primeira. Diferentemente de quando esta resolução é realizada sem o auxílio do instrumento digital, que obriga o aluno a pensar em qual será a equação equivalente. Desta forma, torna-se evidente que os alunos prefiram usar a tecnologia que lhes dá a garantia da reposta ao invés de confiarem em seu próprio raciocínio.

A partir da terceira questão do questionário é que, de fato, buscamos encontrar evidências da Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau. Assim, a pergunta três: O que acontece se eu somar 10 somente ao primeiro membro da equação $x + 2 = 7$? Todos os alunos que responderam ao questionário afirmaram que haveria uma alteração na equivalência da equação, embora a maioria tenha utilizado termos provenientes da palavra “desequilíbrio” para se referir à desigualdade. Podemos verificar isso nas respostas apresentadas por Guido, Ana, Julya, Heide e Ella. “Vai ficar mais pesado de um lado só” (Guido). “A equação vai ficar desequilibrada” (Ana). “Vai desequilibrar. O lado que colocar o 10 vai ficar mais pesado.” (Julya). “A equação vai ficar desigual.” (Heide). “De uma lado vai ter mais peso”. (Ella).

As respostas dos alunos evidenciam que os aprendizes compreenderam que uma equação representa uma igualdade entre termos e, ao se alterar apenas um desses termos, ocorre um “desequilíbrio” na equação. Ou seja, a partir do momento em que se adiciona o número 10 em apenas um dos membros da equação, esta deixa de representar uma igualdade. Desta maneira, as justificativas apresentadas pelos alunos demonstraram que estes compreenderam o conceito de equivalência em termos de uma equação do primeiro grau.

Assim, acreditamos que as atividades realizadas a partir da associação entre o equilíbrio em uma balança de dois pratos e a igualdade de uma equação auxiliaram na Aprendizagem Significativa dos estudantes.

Na quarta questão, os alunos deveriam responder com palavras o que fazer para descobrir o valor de x em $x + 2 + 10 = 7 + 10$. Destacamos a resolução apresentada pelo aluno Guido: "Eu vou tirar o 10 de cada lado. Dai vai ficar $x + 2 = 7$. Daí vou deixar o x e vou tirar 2 e vai ficar 5. E o valor de x é 5." (Guido).

De maneira geral, todos os alunos conseguiram resolver a equação e, assim, determinaram o valor de x. Destacamos a resolução de Guido, pois, assim como nas respostas dos demais, fica evidente que, para resolver a equação, o aluno utiliza as inversas das operações, mantendo sempre a igualdade entre os termos da equação. Não podemos afirmar com certeza se os alunos, ao resolverem esta questão, demonstraram ter aprendido significativamente a manipulação algébrica que possibilita a resolução de uma equação. Contudo, através das resoluções dos estudantes, é possível garantir que eles compreenderam o conceito de equivalência e, através deste conceito, conseguiram resolver uma equação. Ou seja, em suas respostas os alunos demonstraram ter aprendido significativamente a resolver equações do primeiro grau.

Na questão 5, solicitamos aos alunos que verificassem quais das equações indicadas tinham o número um como solução. As equações eram:

a) $8x - 3 = 5$

b) $4x + 1 = x + 4$

c) $2x - 3 = x + 1$

d) $5 - 2x + 8 = -1$

Quase todos os alunos saíram resolvendo as equações propostas. Quando chegavam à solução $x = 1$, concluíam que o número um era solução da equação. Contudo, houve uma aluna (Heide) que, para verificar se o número um era solução das equações, atribuía um ao valor de x e verificava se dos dois lados da equação dava o mesmo resultado. Assim, quando a equação apresentava o mesmo resultado em ambos os membros, a aluna concluía que o número um era solução da equação, do contrário concluía que não era.

Em nenhum momento, durante a realização desta pesquisa, propôs-se atividades que solicitavam que os alunos verificassem se determinado número era solução das equações propostas. Os enunciados das atividades realizadas apenas solicitavam que os alunos resolvessem equações. Nesta perspectiva, acreditamos que os alunos, ao responderem a questão cinco deste questionário, demonstraram que compreenderam significativamente o que é e como se obtém a solução de uma equação do primeiro grau.

Acreditamos que a aluna Heide tenha resolvido a questão de uma maneira mais prática e, de certa forma, mais aprimorada em relação aos demais colegas. Contudo, cabe salientar, que ambos os tipos de soluções apresentadas estão corretas e possibilitam a verificação da solução das equações.

Na sexta questão foi solicitado aos alunos que verificassem se as equações indicadas eram equivalentes à equação $4x + 2 = 2x + 10$, cuja raiz é 4. As equações indicadas eram:

a) $2x + 1 = x + 5$

b) $8x + 4 = 4x + 20$

c) $4 + 4x = 20$

d) $4x = 16$

e) $8x + 4 = 20x + 4$

Todas estas equações são equivalentes às equações do enunciado, com exceção da última. Para responder esta questão, todos os alunos resolveram as equações indicadas e, neste processo, não apresentaram dificuldades. Ao chegarem a uma solução, as equações as quais os estudantes chegaram a solução $x = 4$, concluíram que eram equivalentes à equação do enunciado. E, como o resultado da equação do item e) foi diferente de 4, concluíram que esta não era equivalente.

É importante destacar que, no decorrer da pesquisa, também não foi utilizado o termo equações equivalentes em nenhuma das atividades desenvolvidas nem nas discussões realizadas. Nesse sentido, os alunos evidenciaram a compreensão de que o que garante que duas ou mais equações sejam equivalentes é o fato de terem a mesma solução.

Ausubel (1980) afirma que uma das evidências da Aprendizagem Significativa é que o aluno consiga descrever os atributos mais importantes de um conceito ou os principais elementos de uma proposição. Para responder as questões propostas neste questionário, os alunos formularam proposições com suas próprias interpretações. Verificamos, então, a ocorrência de Aprendizagem Significativa, uma vez que não houve arbitrariedade, pois os estudantes já haviam integrado as ideias iniciais conseguindo, também, com interpretação própria conceituar o objeto em estudo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos nossa caminhada partindo de uma inquietação decorrente de nossa experiência em sala de aula – nos incomodava o tratamento dado ao ensino de Álgebra na escola básica. Em nossas experiências, percebemos uma tendência mecanicista e carente de compreensão por parte dos alunos na aprendizagem de equações do primeiro grau.

Tínhamos uma ideia ampla do que gostaríamos de investigar. Desta forma, quando iniciamos nossa pesquisa, foi necessário refinar nossas indagações para que a pesquisa em nível de mestrado desse conta de responder. Tivemos muitas vivências e perpassamos por muitos acontecimentos e aprendizagens até que pudéssemos estabelecer um rumo.

A partir do momento que conhecemos a Teoria da Aprendizagem Significativa, tentamos compreender de que maneira o ensino de Álgebra poderia ser mais significativo para os alunos a ponto de, ao chegarem no Ensino Médio, compreendam o processo de resolução de uma equação.

Enquanto estudávamos a teoria de Ausubel, sentimos a necessidade de pesquisar sobre as concepções da Álgebra na visão de diversos autores. Além disso, entendemos ser necessário pesquisar sobre os acontecimentos da Educação Algébrica brasileira.

Convencidos de que um dos conceitos necessário para a compreensão significativa do conteúdo de equações do primeiro grau era o de equivalência, estabelecemos nossa questão principal e as questões secundárias de pesquisa.

Assim sendo, durante o desenvolvimento da dissertação e da proposta didática, discutimos a pergunta norteadora feita em nosso projeto: **A compreensão do conceito de equivalência, a partir da associação do equilíbrio existente em uma balança de dois pratos com uma igualdade entre os termos de uma equação, pode facilitar a Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau?**

Buscando respostas para nossos questionamentos, elaboramos e aplicamos uma sequência didática que nos possibilitou reflexões proporcionadas pela análise dos materiais produzidos pelos alunos. Salientamos que estamos olhando para esta pesquisa como um todo, ou seja, estamos considerando as observações desde seu início até a construção das últimas análises.

Com a realização das atividades proporcionadas pelo ODA “Equações do 1º Grau”, dois aspectos importantes se destacaram durante a análise da produção dos sujeitos da pesquisa. Na primeira parte das atividades, os alunos demonstraram que o conceito de equivalência, existente em uma balança de dois pratos, era um conceito subsunçor presente em suas estruturas cognitivas. Ao perceber isso, compreendemos que este dispositivo virtual poderia funcionar como um organizador prévio comparativo, pois poderíamos abordar o conceito de equivalência em uma equação a partir da associação do equilíbrio da balança de dois pratos com a igualdade entre termos de uma equação.

Já a segunda parte das atividades propostas pelo ODA "Equações do 1º Grau", proporcionou a oportunidade de verificarmos se o uso de letras como incógnitas era um conceito subsunçor dos alunos. Ao solicitar que os estudantes representassem a situação apresentada por uma balança de dois pratos equilibrada através de uma igualdade entre símbolos, os alunos apresentaram muitas dificuldades e, sobretudo, não conseguiram por si próprios fazer o uso de letras nesta representação. Assim, constatamos que os alunos não possuíam o conceito subsunçor em relação à linguagem algébrica e, desta forma, a segunda parte de atividades do *software* funcionou como um organizador prévio expositivo para aprendizagem deste conceito.

Para enfatizar este conceito, utilizamos o ODA "Balanza Algebraica". Durante a utilização deste *software*, os alunos puderam representar através de equações as situações apresentadas em uma balança de dois pratos e, através da realização de operações algébricas, resolveram equações. Neste sentido, os alunos demonstraram que o conceito de equivalência foi um conceito âncora para o aprendizado de equações do primeiro grau.

Com a realização das atividades proporcionadas pelos dois objetos de aprendizagem utilizados, percebemos que a noção de equivalência é um conceito fundamental para a Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau, mas não é o único conceito necessário. Durante o desenvolvimento da sequência de atividades, tornou-se evidente o fato de que os alunos precisam vivenciar, antes do ensino de equações, atividades que possibilitem a representação por símbolos (letras e outros), assim como, a escrita de expressões literais simples para representar resultado de contagem ou de medida. A dificuldade em admitir que números podem ser representados por símbolos, apresentada pelos alunos, indica que antes do estudo de equações e das técnicas de resolução é necessário explorar situações, em contextos variados, para desenvolver a compreensão do uso da linguagem simbólica.

Ao buscarmos evidências da Aprendizagem Significativa, concluímos que os sujeitos da pesquisa compreenderam significativamente o sinal de igualdade em uma equação do primeiro grau. Assim, acreditamos que as atividades realizadas com a comparação entre o equilíbrio de uma balança de dois pratos e a igualdade entre termos de uma equação do primeiro grau proporcionaram a Aprendizagem Significativa dos sujeitos da pesquisa.

Consideramos, também, ser importante registrar que, nesse estudo, pela utilização de tecnologias, pôde-se fazer uma importante conexão entre os conhecimentos prévios que os alunos já tinham construído, com o conhecimento científico que foi sendo construído, um aspecto fundamental para a ocorrência da Aprendizagem Significativa, segundo Ausubel (1980). Na verdade, os conhecimentos científicos foram sendo construídos conforme os estudantes iam ampliando seus conhecimentos prévios, uma vez que se privilegiou e se utilizou os conceitos trazidos pelo grupo de estudantes, que foram o ponto de partida, para a construção de conceitos de equação. E isso foi feito por meio da investigação, do debate e dos registros, mediados pelos recursos tecnológicos. Os estudantes tiveram a oportunidade de interagir com estes recursos, ação que facilitou de forma significativa a aprendizagem de conceitos mais complexos.

Este estudo também mostrou que as tecnologias auxiliam no desenvolvimento de significação dos conteúdos a serem estudados, bem como no processo de construção do conhecimento. No entanto, destacamos ser necessário um planejamento criterioso por parte do professor no que diz respeito a sua utilização em sala de aula. Além disso, salientamos que, neste estudo, foram fundamentais as mediações promovidas pela professora-pesquisadora em todo o processo.

De maneira geral, os ODAs utilizados desempenharam papel preponderante para a aprendizagem dos conceitos durante as aulas deste estudo, uma vez que auxiliaram os estudantes no trânsito entre o concreto e os níveis de conhecimento mais abstratos. Neste sentido, compreender o conceito de equivalência associando o equilíbrio existente em uma balança de dois pratos com uma igualdade entre os termos de uma equação facilitou a Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau.

Assim, através da sequência didática realizada, consideramos que foi possível realizar um ensino significativo de equações do primeiro grau. No entanto, é importante destacar que durante o percurso algumas atividades não apresentaram sucesso e outras tiveram que ser readaptadas. Seria muita pretensão da nossa parte dizer que tudo deu certo quando na verdade tivemos muitos percalços ao longo da nossa caminhada.

Além disso, é importante destacar que essa pesquisa trata-se de um estudo qualitativo e, por isso, os resultados obtidos, assim como as conclusões aqui apresentadas, não podem ser generalizados. Ademais, salientamos que a pesquisa iniciou com dez alunos e apenas cinco participaram de todas as aulas e responderam ao questionário final.

Destacamos, também, que além das evidências da Aprendizagem Significativa encontradas nas respostas dos alunos frente ao questionário final, tempos depois, obtivemos retorno da professora regente de Matemática dos alunos participantes da pesquisa. A mesma, declarou que a participação do alunos nas atividades propostas refletiu no desempenho nas atividades realizadas nas aulas de Matemática, pois nas tarefas que tratavam de equações do primeiro grau, os alunos demonstraram compreender de maneira significativa as situações propostas.

O curso de mestrado e esta pesquisa proporcionaram a possibilidade de reflexão sobre a prática docente e nos transformaram enquanto professores de Matemática. Desta forma, esperamos que os resultados deste trabalho possam, de alguma forma, contribuir para a formação inicial ou continuada de professores de Matemática, assim como ajudou a ampliar a nossa visão sobre a importância de adotar novas práticas docentes.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, Elizabeth Adorno. Influências das habilidades e das atitudes em relação à matemática e a escolha profissional. Campinas: UNICAMP, 1999. 232 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

ARCAVI, Abraham. O Sentido do Símbolo: Atribuindo um Sentido Informal à Matemática Formal, em Álgebra, História, Representação. Série Reflexão em Educação Matemática, v.2, p.38-72, Rio de Janeiro, 1995.

AUSUBEL, David Paul. **Educational psychology: a cognitive view.** New York: Holt, Renehart and Winston, 1968.

AUSUBEL, David Paul; NOVAK, Joseph Donald; HANESIAN, Helen. **Educational psychology: a cognitive view.** 2ª Ed. New York: Holt, Renehart and Winston, 1978.

AUSUBEL, David Paul; NOVAK, Joseph Donald; HANESIAN, Helen. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

AUSUBEL, David Paul. **Aquisição e retenção do conhecimento: uma perspectiva cognitiva.** Lisboa: Paralelo Editora, 2002.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: Anais da 24ª Reunião Anual da ANPED, Rio de Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** São Paulo: Contexto, 2006.

BÚRIGO, Elisabete Zardo. Tradições modernas: reconfigurações da matemática escolar nos anos 1960. **Boletim de Educação Matemática***,* Rio Claro, v. 23, n. 35b, p. 277-300, abril. 2010.

DANIEL, José Anísio. Um estudo de equações algébricas de 1° grau com o auxílio do software Aplusix. São Paulo: PUC/SP, 2007. 117 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 1, p. 78-91, março. 1993.

FREITAS, Marcos Agostinho de. Equação do 1º grau: métodos de resolução e análise de erros no Ensino Médio. São Paulo: PUC/SP, 2002. 137 f. Dissertação (Mestrado em Educação

Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

GRAVINA, Maria Alice; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Mídias digitais na educação matemática. In: Matemática, Mídias Digitais e Didática - tripé para formação de professores de Matemática. Porto Alegre: UFRGS, 2012. P. 11-35.

GUINTHER, Hartmut. Pesquisa qualitativa versus pesquisa quantitativa: esta é a questão? **Psicologia: Teoria e Pesquisa**, Brasília, v. 22, n. 2, p. 201-209, maio/ago. 2006.

LÉVY, Pierre. **Cibercultura.** São Paulo: Editora 34, 1999.

LIMA, Rosana Nogueira de. Equações algébricas no Ensino Médio: Uma jornada por diferentes Mundos da Matemática. São Paulo: PUC/SP, 2007. 358 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e Álgebra para o século XXI**. 7ª edição. Campinas: Papirus, 1997.

MIGUEL, Antônio; FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo? **Pró-Posições**, Campinas, v. 3, n. 1, p. 39-54, março. 1992.

MORAES, Ceres Marques de; BEZERRA, Jairo Manoel; SOUSA, Julio César de Mello e. **Apostilas de didática especial em matemática**. Rio de Janeiro: CADES, 1959, 220p.

MOREIRA, Marco Antônio. **Aprendizagem Significativa**. Brasília: Editora UnB, 1999.

MOREIRA, Marco Antônio. Aprendizagem Significativa subversiva. In: ENCONTRO INTERNACIONAL SOBRE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA, 3., 2000, Peniche. Actas. Monte de Caparica: Grafema, 2000. P. 33-45.

MOREIRA, Marco Antônio; SOUSA, C. M. S. G. De. Organizadores prévios como recurso didático. In: MOREIRA, M. A. Aprendizagem significativo: fundamentación teórica y estratégias facilitadoras. Porto Alegre: UFRGS, 2003. P. 129-146.

MOREIRA, Marco Antônio. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora da UnB, 2006.

MOREIRA, Marco Antônio. Organizadores Prévios e Aprendizagem Significativa. Revista Chilena de Educación Científica, Santiago do Chile, v. 7, n. 2, p. 23-30, 2008.

MOREIRA, Marco Antônio; MASINI, Elcie Salzano. **Aprendizagem Significativa: a teoria de David Ausubel.** São Paulo: Centauro, 2011.

NICOLA, Luciane Becker ; RODRIGUES, Alessandra Pereira. Objetos de aprendizagem como potencializadores no estudo da Biologia. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 9, n. 1, jul. 2011.

PONTE, João Pedro da. O estudo de caso na investigação em educação matemática. **Quadrante**, vol. 3, n. 1, p 3-18, 1994.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. Equações e seus Multisignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico. São Paulo: PUC/SP, 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ROSA, Ernesto. **Equações do primeiro grau**, 2004. Disponível em: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/3813. Acesso em: 24 mai. 2013.

SALANDINI, Everton Jonathan de Andrade. A Modelagem Matemática na introdução do conceito de equação para alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental. São Paulo: PUC/SP, 2011. 110 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

TELES, Rosinalda Aurora de Melo. A relação entre aritmética e álgebra na matemática escolar: um estudo sobre a influência da compreensão das propriedades da igualdade e do conceito de operações inversas com números racionais na resolução de equações polinomiais do 1o grau. Recife: UFPE, 2002. 296 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilização das variáveis. In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Org.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

UTAH STATE UNIVERSITY. Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales. **Balanza Algebraica**. Utah; 2010. Disponível em: http://nlvm.usu.edu/es/nav/topic_t_2.html. Acesso em: 30 mai. 2013.

VALENTE, José Armando. Por que o computador na educação? In: Salgado, M. U. C. & Amaral, A. L (Eds). **Tecnologia na Educação: ensinando e aprendendo com as TIC: guia do cursista**. Brasília: Ministério da Educação, 2008. P. 193-210.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ___________________, responsável pelo(a) aluno(a) ____ declaro, por meio deste termo, que concordo em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **Aprendizagem Significativa de Equações do 1º Grau: um estudo de caso com alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental**, desenvolvida pela pesquisadora Viviane Beatriz Hummes. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é orientada pela Profª. Drª. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone xxxxxxxxxx ou e-mail xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx. Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

1. Planejar, justificar, implementar e validar uma sequência didática que proporcione a aprendizagem significativa de equações do 1º grau.
2. Investigar uma maneira de abordar o ensino de Álgebra para que haja aprendizagem significativa das equações do 1º grau.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (dissertação de mestrado, artigos científicos, seminários etc.), identificadas apenas por pseudônimos. A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em aula, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos e gravações, obtidos durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como dissertação de mestrado, artigos científicos, seminários, etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado. Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar a pesquisadora responsável na escola ou e-mail xxxxxxxxxxxxxxx. Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______

Assinatura do Responsável: ____

Assinatura da Pesquisadora: ____

Assinatura da Orientadora da pesquisa: ____

APÊNDICE B – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Para desenvolver com estudantes do Ensino Fundamental o estudo da igualdade com o sentido de equivalência, sugerimos a utilização do Objeto Digital de Aprendizagem (ODA) Equação do 1º grau. Trata-se de um *slide show* com animação que faz parte do acervo do Banco Internacional de Objetos Educacionais do Ministério da Educação (BIOE/MEC), cujo objetivo é proporcionar aos alunos o desenvolvimento e a ampliação do conceito de equações por meio da observação de algumas situações em uma balança de dois pratos. O ODA pode ser obtido no endereço virtual <http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/3813>.

A animação aborda o assunto equações do primeiro grau por meio de algumas situações nas quais pesos de valores conhecidos são colocados em um prato de uma balança, que tem no outro prato pesos de valores desconhecidos. Em um segundo momento, são discutidos alguns problemas que objetivam a representação Matemática do equilíbrio da balança. Na Figura 1, exibimos a interface inicial do ODA “Equação do 1º grau”.

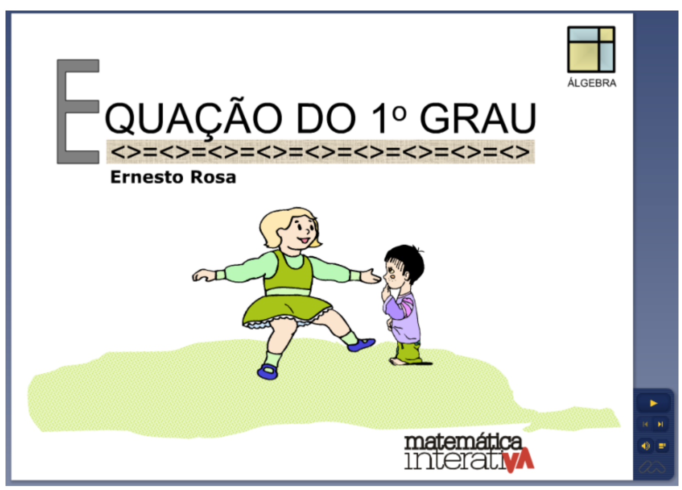


Figura 1: Interface inicial do ODA Equação do 1º Grau

Este *slide show* com animação é composto de catorze slides. Nos dois primeiros slides, o narrador apresenta a balança de dois pratos e explica como ela funciona. Inicialmente, esclarece dizendo: “Hoje as balanças são quase todas eletrônicas, mas ainda são usadas balanças de pratos, como essa que agora está equilibrada”. Neste momento, há uma animação que eleva um dos pratos, que estava mais para baixo, até ele ficar no mesmo nível do outro prato, proporcionando que o aluno visualize a posição dos pratos quando a balança está em equilíbrio. A Figura 2 ilustra alguns momentos desta animação.

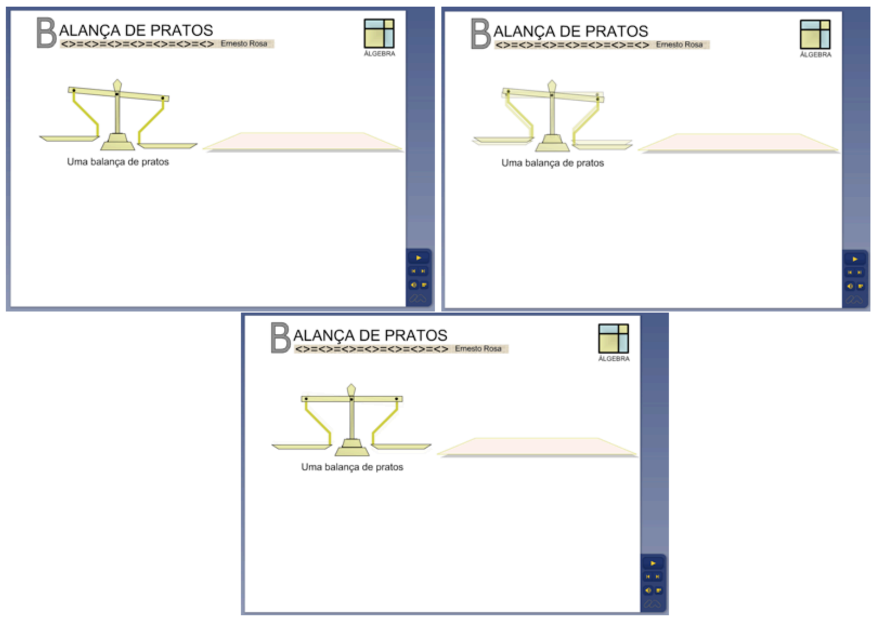


Figura 2: Balança em equilíbrio no ODA Equação do 1º Grau

Em seguida, o narrador apresenta alguns pesos e pacotes: “Aqui nós temos pesos de um quilograma, de cinco quilogramas e pacotes de variados pesos”. A Figura 3 mostra os pesos e os pacotes.

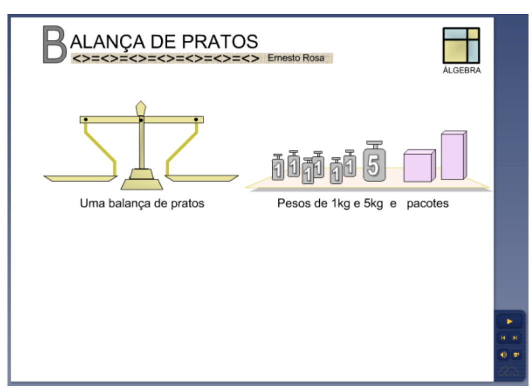


Figura 3: Pesos e pacotes no ODA Equações do 1º Grau

Ao final do slide 2, a animação ilustra duas situações que mostram o que acontece quando se coloca diferentes pesos nos pratos. Neste momento, o narrador verbaliza: “Essa balança tem um quilograma em um prato. O que vai acontecer? O prato mais pesado fica embaixo. Agora foram colocados dois quilogramas no outro prato. O que vai acontecer? O prato mais pesado fica embaixo". A Figura 4 registra estes momentos.

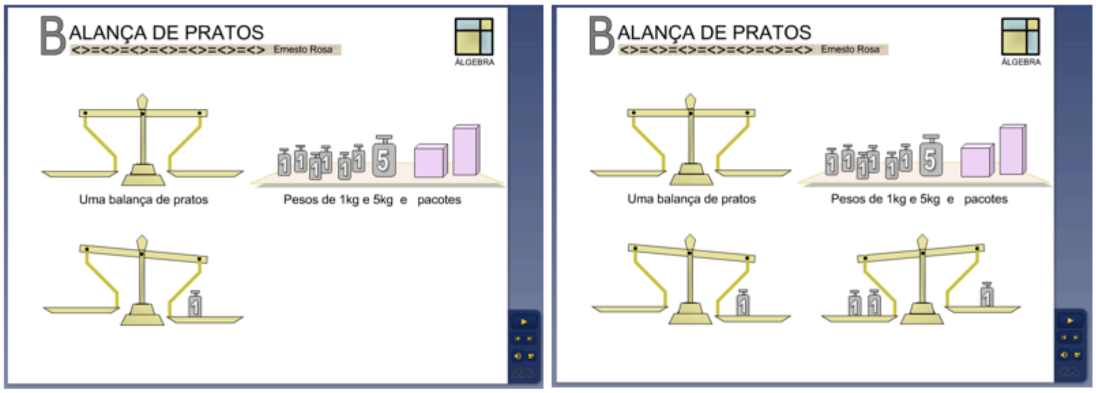


Figura 4: Pesos diferentes nos pratos no ODA Equação do 1º Grau

Na sequência, ao exibir-se os slide 3 (Figura 5) e slide 4 (Figura 6), é interessante pedir aos alunos que eles respondam as perguntas que o narrador faz a cada quadro destes slides. Sugerimos que, à medida que a animação ilustra diferentes balanças, diferenciadas em itens (a, b, c, d), e o narrador faz as perguntas, o *slide show* seja parado e que seja dado um tempo para que os estudantes possam fazer o registro escrito de suas respostas.

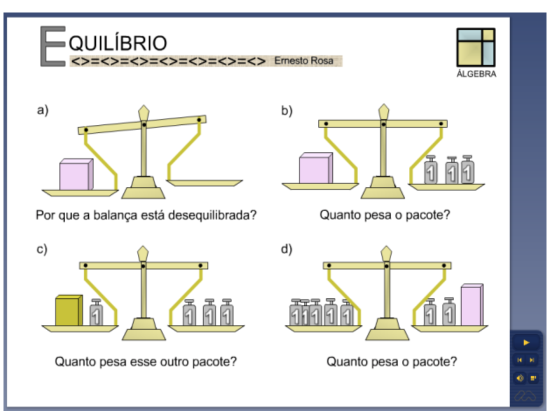


Figura 5: Slide 3 do ODA Equação do 1º Grau

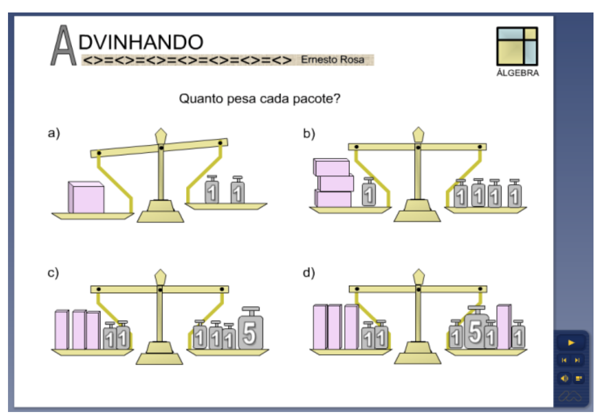


Figura 6: Slide 4 do ODA Equação do 1º Grau

No slide 5 (Figura 7), o autor retoma a situação ilustrada na balança do item c do slide anterior e apresenta uma maneira de descobrir o peso dos pacotes retirando-se pesos equivalentes de ambos os pratos da balança. Nas palavras do narrador: "Três pacotes mais dois quilogramas equivalem a oito quilogramas. Vamos retirar dois quilogramas de cada lado da balança. A balança continua balanceada. Olha a primeira balança. Olha a segunda. Sumiram dois quilogramas de cada prato. Continuando, vamos pegar um terço do peso de cada prato. Vamos dividir por três. Isso dá dois quilogramas para o pacote." A Figura 7, evidencia a intenção do autor.

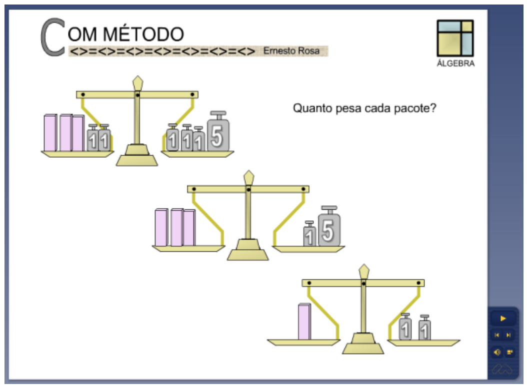


Figura 7: Slide 5 do ODA Equação do 1º Grau

No slide 6 (Figura 8), o autor sugere uma situação em que há pacotes de ambos os lados da balança. Da mesma forma, como nos outros casos, sugere-se aos alunos que eles busquem uma forma de identificar o peso dos pacotes.

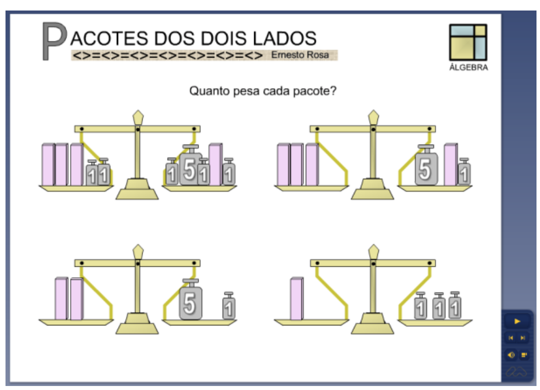


Figura 8: Slide 6 do ODA Equação do 1º Grau

No slide 7 (Figura 9), o autor apresenta a mesma situação do slide anterior. Contudo, neste momento, sugere uma tradução para a linguagem algébrica daquilo que está representado na balança de dois pratos. Assim, o autor escreve uma equação do primeiro grau utilizando a letra *x* para representar o peso do pacote. Conforme coloca o narrador: "Chamando de *x* o peso do pacote, temos no primeiro prato três pacotes mais dois quilogramas e escrevemos 3x + 2. No segundo prato, temos um pacote mais oito quilogramas e escrevemos x + 8. A balança está equilibrada e podemos colocar o sinal igual".

Feito isso, o narrador encontra o peso do pacote ao retirar pesos e pacotes iguais de ambos os pratos da balança, mantendo o equilíbrio. Da mesma forma, vai retirando números e a letra *x* dos dois lados da equação, estabelecendo uma relação entre os pesos e os pacotes da balança com os números e a letra *x* da equação. Conforme coloca o narrador: "Retirando dois quilogramas de cada lado, a equação fica 3x = x + 6. Compare com a primeira equação. Sumiu dois de cada lado. Agora, tiramos um pacote de cada lado. E some um *x* de cada lado da equação, ficando 2x = 6. Tira metade de cada prato e a equação fica x = 3, que fornece o peso do pacote." A Figura 9 registra a resolução do autor.

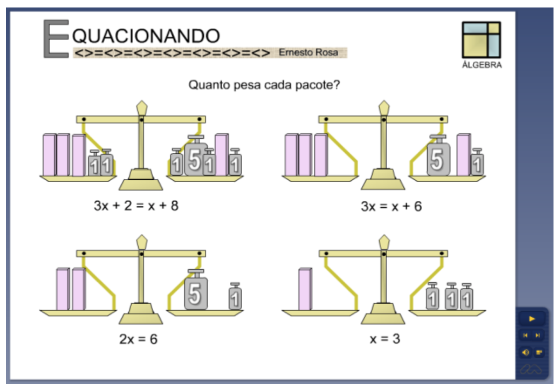


Figura 9: Slide 7 do ODA Equação do 1º Grau

Em seguida, no slide 8, o autor faz o mesmo procedimento utilizando outra situação descrita pela balança, conforme a Figura 10.

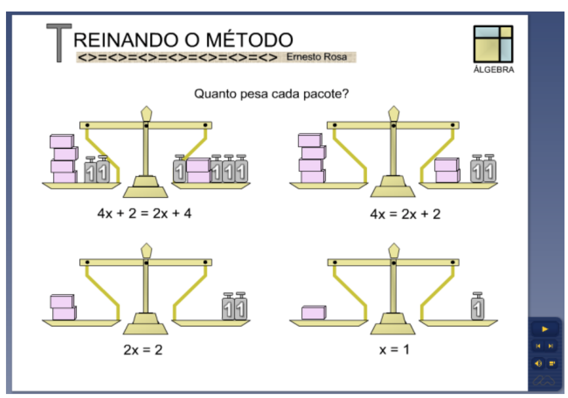


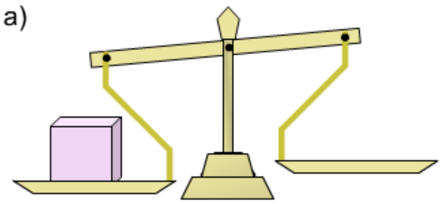
Figura 10: Slide 8 do ODA Equação do 1º Grau

A seguir, apresentamos um conjunto de atividades para que os alunos possam realizar o registro de suas produções em relação ao ODA Equações do 1º Grau.

Atividades – Objeto Digital de Aprendizagem Equações do 1º Grau

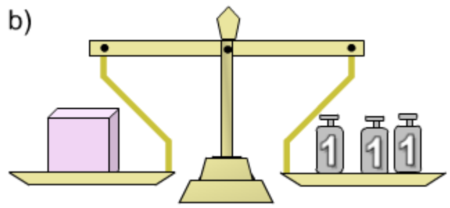
1) Responda as perguntas em cada um dos itens abaixo, justificando sua resposta.

a)



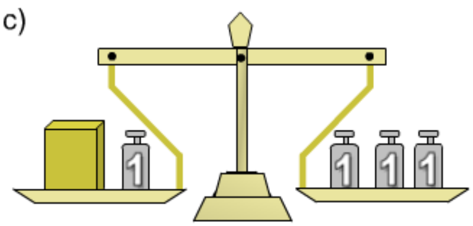
Por que a balança está desequilibrada?

b)



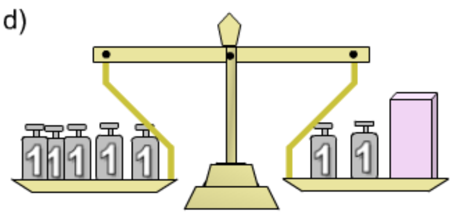
Quanto pesa o pacote?

c)



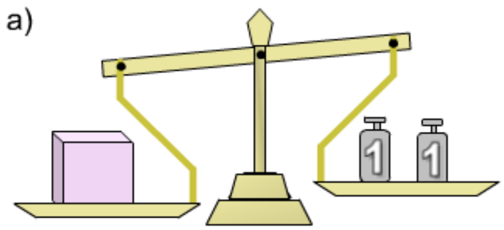
Quanto pesa esse outro pacote?

d)

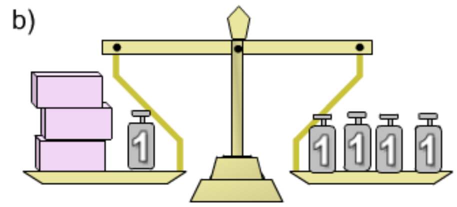


Quanto pesa o pacote?

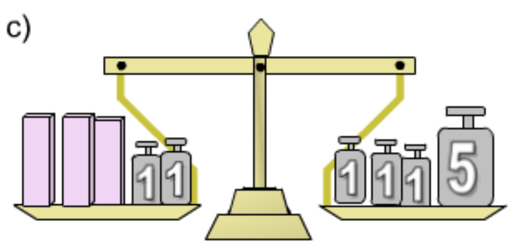
Quanto pesa o pacote?



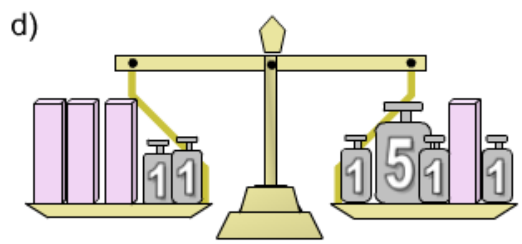
Quanto pesa cada pacote?



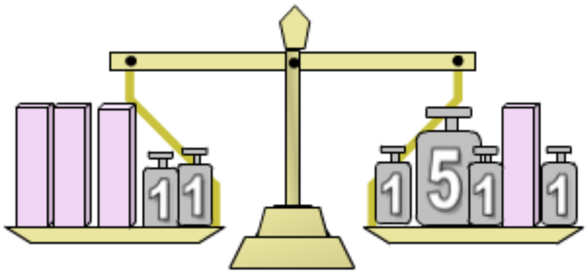
Quanto pesa cada pacote?



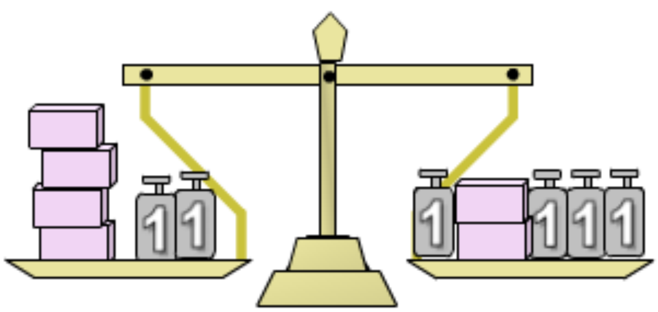
Quanto pesa cada pacote?



2) Relacione os pesos dos pratos através de uma igualdade que represente o equilíbrio das balanças:

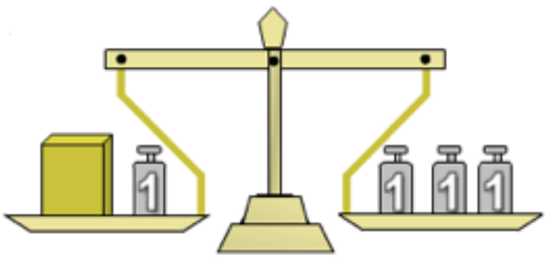


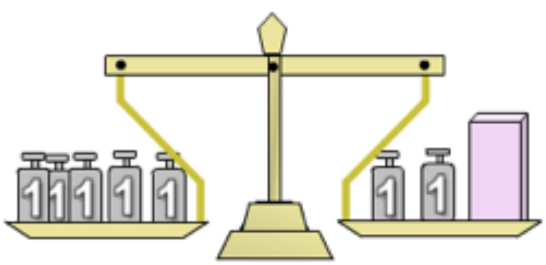
a)

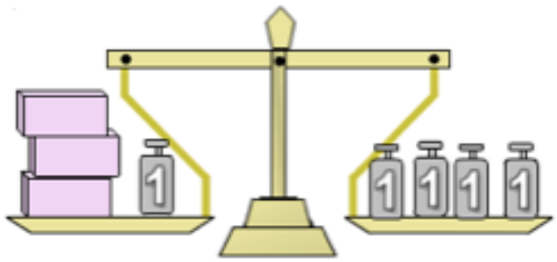


b)

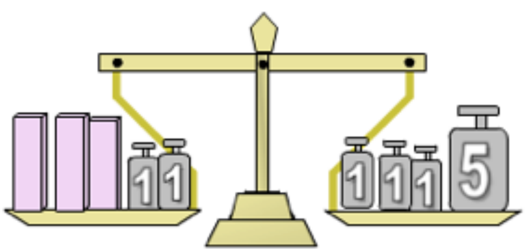
3) Relacione os pesos dos pratos através de uma igualdade que represente o equilíbrio da balança. A seguir, retire objetos iguais de ambos os pratos da balança e vá registrando os objetos que restam através de uma igualdade.

a) 

b) 



c)



d)

Para dar continuidade ao estudo da igualdade com o sentido de equivalência, sugerimos a utilização do dispositivo virtual “Balanza Algebraica”, que pertence ao acervo de Objetos Digitais de Aprendizagem do Banco Nacional de Manipuladores Virtuais da Utah State University. Este ODA permite resolver equações do primeiro grau através do uso de uma balança de dois pratos. O primeiro passo é equilibrar a balança colocando o número apropriado de blocos de unidade e de blocos com um X, cujo peso é desconhecido, em cada um dos pratos da balança. Na Figura 11, exibimos a interface inicial do ODA “Balanza Algebraica” que poderá ser acessado no endereço < http://nlvm.usu.edu/es/nav/topic_t_2.html>.

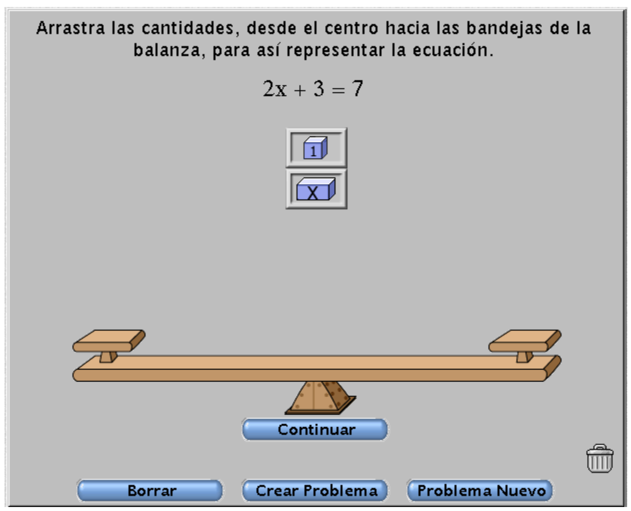


Figura 11: Interface inicial do ODA Balanza Algebraica

Para representar a equação na balança basta clicar nos blocos e arrastá-los até um dos pratos da balança. Quando o bloco é solto, este se coloca no prato da balança. Quando colocamos o primeiro bloco em uma das bandejas, a balança se inclina para baixo do lado onde foi colocado o bloco, mostrando que, desta forma, não há equilíbrio. Contudo, quando a equação está corretamente representada, os pratos voltam a estar equilibrados. Não é possível clicar no botão “Continuar” até que se tenha representado de maneira correta a equação, de modo que a balança esteja equilibrada.

Após representar a equação, colocando os blocos correspondentes na balança, realizam-se operações algébricas em ambos os lados da equação ao mesmo tempo que se faz em ambos os pratos da balança com o objetivo de terminar com um único bloco X em um dos pratos da balança, por meio do qual podemos verificar a solução em termos de número de blocos de unidade no prato oposto, conforme Figura 12.

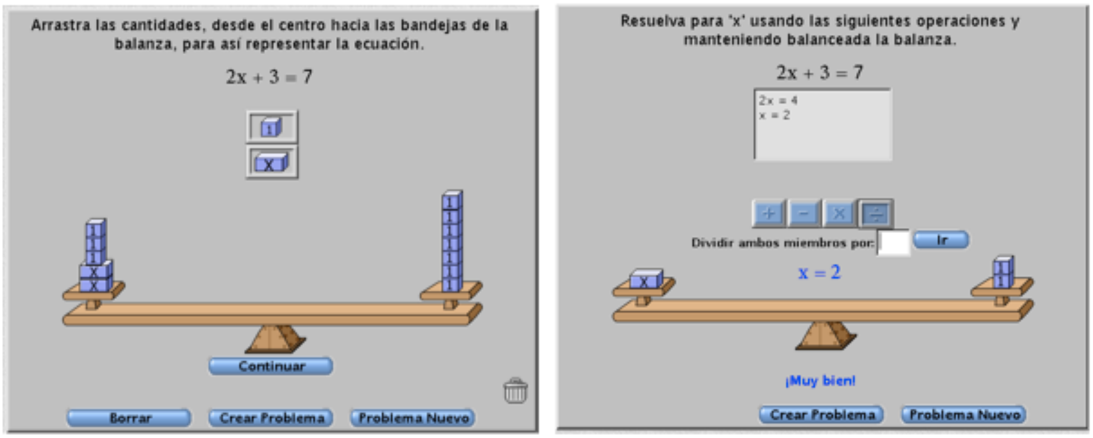


Figura12: Resolução de uma equação através do ODA Balanza Algebraica

A principal intenção deste ODA é fazer com que os estudantes percebam que não é possível aplicar uma operação em apenas um dos lados de uma equação. Os alunos devem verificar que os lados de uma equação são equivalentes e que a cada operação algébrica, aplicada em ambos os lados da equação, já que é o único tipo de manipulação que o dispositivo virtual permite, produz outra equação que expressa a mesma igualdade, de tal maneira que ambos os lados seguem equilibrados. Resolver uma equação significa executar uma série de operações que nos levem a uma equação equivalente na qual termine em uma única incógnita X em um dos pratos da balança.

Este manipulador não tem uma série predeterminada de operações a realizar. O usuário escolhe a operação que desejar, depois de cada operação a equação mostrada é atualizada de maneira tal que a equação original e a forma equivalente mais recentes são visualizadas.

Destacamos, ainda, que o usuário pode optar por representar qualquer lado da equação em qualquer um dos pratos da balança e depois de clicar no botão “Continuar” poderá trabalhar com o formato de equação que tenha escolhido. As únicas operações permitidas são aquelas que deixam números inteiros positivos como coeficientes. Por exemplo, não é possível dividir por dois a menos que o número seja par. O usuário deve decidir quando a equação tiver sido resolvida. O dispositivo virtual não mostra nenhum tipo de aviso quando resta um único bloco X em qualquer um dos pratos de modo que o aluno pode continuar com outra série de operações se assim desejar.

Como a balança de dois pratos nos permite apenas ilustrar quantidades positivas, já que recria uma situação concreta do cotidiano, no caso uma medida de massa, a Utah State University criou uma versão para o ODA “Balanza Algebraica” que utiliza também números negativos, ampliando o universo de resolução de equações do primeiro grau para o conjunto dos números inteiros.

Da mesma forma que na versão para números positivos, para representar a equação na balança basta clicar nos blocos e arrastá-los até um dos pratos da balança. Contudo, os números negativos e múltiplos negativos de X tem sua própria representação e atuam de maneira oposta a dos positivos: um número positivo inclina a bandeja para baixo, já um número negativo move a bandeja para cima. Os negativos são representados por balões de cor vermelha que elevam as bandejas.

Desta maneira, da mesma forma que em exemplos de equações onde os termos são positivos, os alunos devem resolver a situação proposta, primeiramente, arrastando as quantidades, desde o centro até os pratos da balança para, assim, representar a equação (Figura 13).

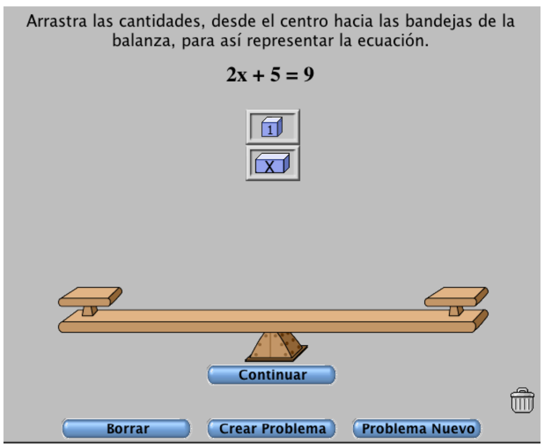
Figura 13: Representação de uma equação com números negativos do ODA Balanza Algebraica

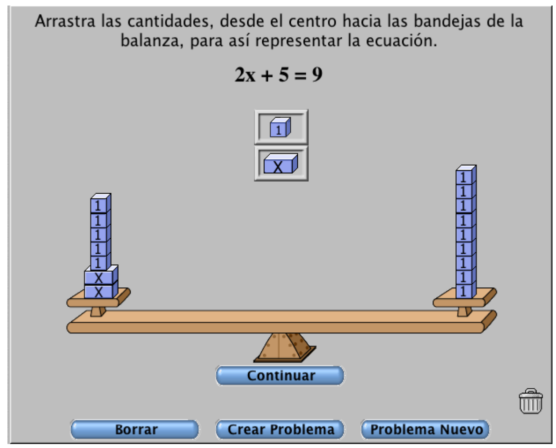
A seguir, apresentamos uma sequência de instruções que podem ser propostas para os estudantes, afim de que o registro das resoluções das equações poderão, também, serem realizados em papel e, posteriormente, entregues ao professor.

Atividades – Objeto Digital de Aprendizagem Balanza Algebraica

Instruções:

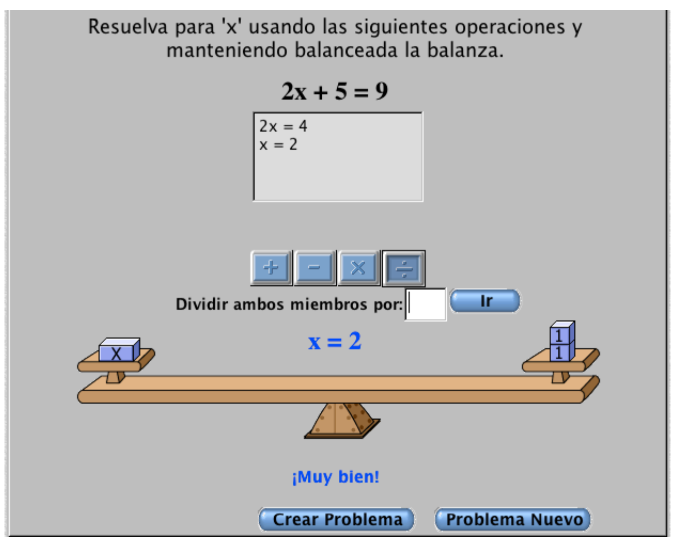
1. Arraste as quantidades, desde o centro até os pratos da balança para, assim, representar a equação.





2. A seguir clique no botão 

3. Resolva a equação utilizando operações que mantém a balança equilibrada.



4. Registre o que você fez no *software* numa folha de papel para entregar à professora.

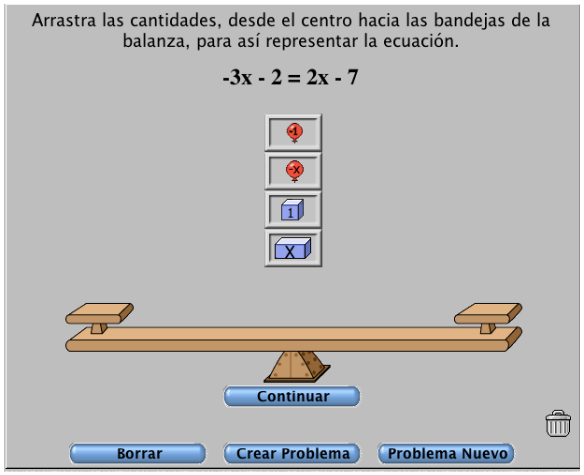
5. A seguir clique no ícone 

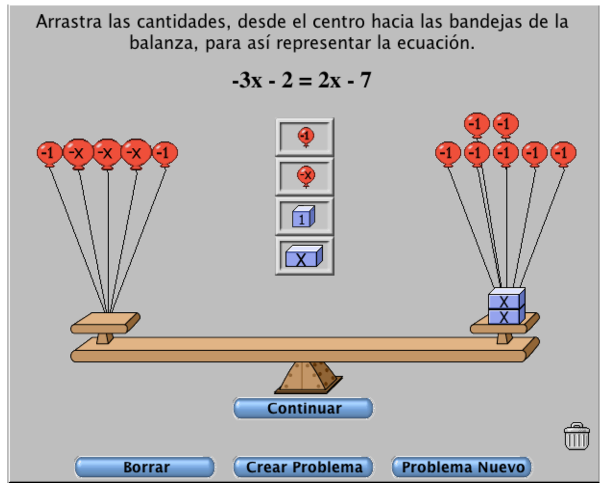
6. Resolva nove equações para entregar à professora.

Atividades – Objeto Digital de Aprendizagem Balanza Algebraica Negativos

Instruções:

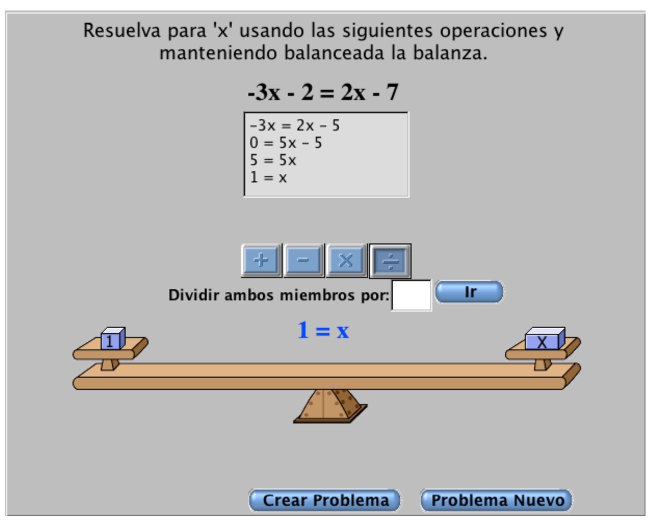
1. Arraste as quantidades, desde o centro até os pratos da balança para, assim, representar a equação.





2. A seguir clique no botão 

3. Resolva a equação utilizando operações que mantém a balança equilibrada.



4. Registre as operações que você fez no software para entregar à professora.

5. A seguir clique no ícone 

6. Resolva nove equações para entregar à professora.

Espaço para registro da resolução das equações com o uso dos botões do software

Equação 1	Equação 2	Equação 3
Equação 4	Equação 5	Equação 6
Equação 7	Equação 8	Equação 9

Resolva 6 equações oferecidas pelo *software Balanza Algebraica*, mas sem fazer uso dos botões de operações disponibilizados pela programa.

Equação 1	Equação 2	Equação 3
Equação 4	Equação 5	Equação 6

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO FINAL

1. Quais foram as dificuldades encontradas durante a utilização do *software Balanza Algebraica*?

2. Você preferiu resolver as equações utilizando os botões de operações do *software Balanza Algebraica* ou sem fazer uso destes botões? Justifique sua resposta.

3. O que acontece se eu somar 10 somente ao primeiro membro da equação $x + 2 = 7$?

4. Explique com palavras como você faz para descobrir o valor de x em $x + 2 + 10 = 7 + 10$?

5. Verifique quais das equações tem o número um (1) como solução:

a) $8x - 3 = 5$

b) $4x + 1 = x + 4$

c) $2x - 3 = x + 1$

d) $5 - 2x + 8 = -1$

6. Verifique se as equações dos itens abaixo são equivalentes a $4x + 2 = 2x + 10$, cuja solução é 4:

a) $2x + 1 = x + 5$

b) $8x + 4 = 4x + 20$

c) $4 + 4x = 20$

d) $4x = 16$

e) $8x + 4 = 20x + 4$