

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO
DOUTORADO EM ADMINISTRAÇÃO

Monize Sâmara Visentini

**NOVAS ABORDAGENS PARA A
RESOLUÇÃO INTEGRADA DOS
PROBLEMAS DE GERAÇÃO DA
TABELA DE HORÁRIOS E DE
ESCALONAMENTO DE VEÍCULOS
COM FROTA HETEROGÊNEA**

Porto Alegre
2014

CIP - Catalogação na Publicação

Sâmara Visentini, Monize

NOVAS ABORDAGENS PARA A RESOLUÇÃO INTEGRADA DOS
PROBLEMAS DE GERAÇÃO DA TABELA DE HORÁRIOS E DE
ESCALONAMENTO DE VEÍCULOS COM FROTA HETEROGÊNEA /
Monize Sâmara Visentini. -- 2014.

164 f.

Orientador: Denis Borenstein.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio
Grande do Sul, Escola de Administração, Programa de
Pós-Graduação em Administração, Porto Alegre, BR-RS,
2014.

1. Tabela de horários. 2. Escalonamento de
veículos. 3. Frota heterogênea. 4. Otimização. I.
Borenstein, Denis, orient. II. Título.

Monize Sâmara Visentini

**NOVAS ABORDAGENS PARA A
RESOLUÇÃO INTEGRADA DOS
PROBLEMAS DE GERAÇÃO DA
TABELA DE HORÁRIOS E DE
ESCALONAMENTO DE VEÍCULOS
COM FROTA HETEROGÊNEA**

Tese apresentada como requisito para a obtenção
do grau de Doutor em Administração pelo
Programa de Pós-Graduação em Administração
da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador:
Prof. Dr. Denis Borenstein

Porto Alegre
2014

AGRADECIMENTOS

A realização deste Doutorado foi, sem sombra de dúvidas, meu maior desafio profissional até este momento. Em quatro anos experimentei os mais diversos sentimentos e coloquei à prova, muitas vezes, a minha determinação. Entretanto, foi nesses momentos que encontrei pessoas especiais, que me incentivaram a seguir em frente. Que essas pessoas sejam recompensadas como fui ao encontrá-las pelo caminho. Tenho muitos agradecimentos a realizar e estou tentando fazê-los já no decorrer desses anos, pois não seria possível expressar somente com palavras a minha gratidão. Acima de tudo, agradeço a Deus por iluminar a minha trajetória e colocar no meu caminho essas pessoas, sem as quais eu não teria chegado até aqui.

Aos meus Pais agradeço o incentivo e a preocupação constante com o meu bem-estar. O amor que sempre me dedicaram e o esforço que realizaram para que eu fosse em busca dos meus objetivos não são passíveis de se agradecer com palavras, por isso também procuro retribuir com amor.

De uma forma muito carinhosa agradeço ao meu amor, Rodrigo, um dos maiores colaboradores desta conquista. Sou imensamente grata pela paciência, pelo cuidado e por compartilhar dos meus sonhos. Mais do que isso, serei eternamente grata pela tua dedicação a mim e a minha família.

Ao Prof. Denis Borenstein agradeço pela compreensão das minhas dificuldades e pela persistência em acreditar que elas seriam vencidas. Além de um excelente orientador para as atividades acadêmicas, que contribui sobremaneira para a qualidade do meu trabalho, o Prof. Denis foi também um confidente para minhas angústias, procurando me fazer entender que “um Doutorado bem feito não existe sem sofrimento”.

Ao Prof. Olinto C. B. de Araújo agradeço, mais uma vez, por ter aceitado participar conosco desta empreitada e por tê-la feito com tamanha dedicação. Agradeço não somente pelas excelentes contribuições a esta tese, como também por todo o conhecimento compartilhado e incentivo para a realização deste trabalho.

Ao Prof. Felipe Martins Müller, agradeço por ter aberto as portas da Universidade Federal de Santa Maria para que pudéssemos fortalecer nosso grupo de pesquisa, bem como as contribuições realizadas na elaboração desta tese. Neste mesmo sentido, agradeço à Prof^a. Luciana S. Buriol e ao Prof. João Luiz Becker por estarem participando da avaliação e do aprimoramento deste estudo.

Estendo os agradecimentos ao Prof. Mauri Leadir Löbner, pela sua dedicação à amizade que construímos desde a minha graduação. Mesmo não participando diretamente na realização deste Doutorado, o Prof. Mauri é um dos grandes incentivadores desta vitória.

Tenho que agradecer também aos amigos e colegas, que partilharam comigo mui-

tos momentos importantes. À minha amiga Debora Bobsin por me incluir nas suas orações, cuidar de mim como uma irmã e dividir comigo “angústias e alegria da vida acadêmica”. Ao Gilmar Casalinho e ao Gabriel Braido agradeço o companheirismo e as infinitas horas de estudo, risadas e acolhimento que vocês me proporcionaram. Aos meus amigos, Danielle Ullrich, Josiane de Oliveira, Kenny Basso e Priscilla Chagas, os melhores colegas de Doutorado que eu poderia ter, agradeço por possibilitarem que os dias mais difíceis se tornassem um motivo para nos reunirmos e fortalecer nossa amizade. Agradeço também ao William Prigol Lopes por estar sempre disponível a me ajudar e compartilhar conhecimentos. Por fim, agradeço a colaboração imprescindível do Alberto F. Kummer Netto, dedicando seu tempo, atenção e paciência às minhas angústias e exigências.

Aos colegas da Universidade Federal da Fronteira Sul, agradeço a compreensão e a parceria dedicada. Agradeço também à CAPES por financiar meus estudos neste curso de Doutorado.

A todas estas pessoas e aquelas que participaram de forma direta ou indireta na construção desta Tese e aqui não foram mencionados, meu **muito obrigada!**

“Em relação a todos os atos de iniciativa e de criação, existe uma verdade fundamental cujo desconhecimento mata inúmeras ideias e planos esplêndidos: a de que no momento em que nos comprometemos definitivamente, a providência move-se também. Toda uma corrente de acontecimentos brota da decisão, fazendo surgir a nosso favor toda sorte de incidentes e encontros e assistência material que nenhum homem sonharia que viesse em sua direção. O que quer que você possa fazer ou sonhe que possa, faça. Coragem contém genialidade, poder e magia. Comece agora.”

— GÖETHE

RESUMO

Nesta tese são propostas três novas abordagens para a resolução do problema integrado de geração de tabela de horários e escalonamento de veículos com frota heterogênea. Duas delas são modelos de Programação Linear Inteira (PLI), com o objetivo de otimizar simultaneamente esses problemas tendo como base uma rede tempo-espaço (TSN, do inglês *Time-Space Network*). A terceira é uma nova metodologia de inserção de janelas de tempo para os modelos de PLI propostos, a partir de pequenas alterações na estrutura da TSN. Para validar esses modelos foram utilizadas instâncias reais, advindas do sistema de transporte público da cidade de Santa Maria, RS, Brasil, e aleatórias de grande porte. O modelo com aplicação das janelas de tempo, denominado VTSP-TW (do inglês *Vehicle Type Scheduling Problem with Time Windows*), possibilitou redução substancial no número de veículos, se comparado ao escalonamento realizado na prática. Além disso, comparando-se com outras abordagens disponíveis na literatura, o mesmo gerou rede de menor dimensão e resolveu instâncias de grande porte em tempo computacional inferior, despontando como uma proposta alternativa à aplicação de janelas de tempo ao escalonamento de veículos com frota heterogênea. Os resultados dos modelos de PLI também indicaram significativas reduções no número de veículos, podendo contribuir para o aprimoramento da tomada de decisão no planejamento do transporte público. O modelo VTSP-SCT (do inglês *Vehicle Type Scheduling Problem with Sequential Changes of Timetable*) resolveu instâncias de 5000 viagens e três tipos de veículos na otimalidade, com apoio do software IBM® ILOG® CPLEX® Optimization Studio V12.5. Já o modelo VTSP-CCT (do inglês *Vehicle Type Scheduling Problem with Combinatorial Changes of Timetable*) necessitou de suporte heurístico para resolver as instâncias de grande porte. Assim, desenvolveu-se e aplicou-se a ele a técnica de Geração de Colunas, que possibilitou a resolução dessas instâncias e gerou resultados iguais ou melhores do que aqueles proporcionados pelo VTSP-SCT. Os resultados das três abordagens propostas indicam que as mesmas podem contribuir para a otimização do planejamento do transporte público, tendo em vista que levam a economias significativas no número de veículos escalonados. Além disso, como os intervalos de ajuste da tabela de horários são bastante curtos, obtém-se alterações sutis, modificando minimamente a rotina dos passageiros, o que possibilita a aplicação dessas abordagens ao contexto real.

ABSTRACT

In this thesis we propose three new approaches to solve in an integrated way the timetable generation problem and the vehicle-type scheduling problem. Two of them are Integer Linear Programming (ILP) models aiming at simultaneously optimizing these problems based on a time-space network (TSN). The third one is a new methodology for inserting time windows to the proposed ILP models, based on small changes in the TSN structure. To validate these models we applied real instances from a public transportation system of the city of Santa Maria, RS, Brazil, and large random instances. The model with time window application, defined as VTSP-TW (Vehicle Type Scheduling Problem with Time Windows), enabled substantial reduction of vehicle numbers, compared to vehicle scheduling performed in practice. Moreover, comparing with other approaches available in the literature, the VTSP-TW generated smaller networks and solved large instances with less computational time, emerging as an alternative to the application of time windows to the vehicle-type scheduling problem. The ILP models results also showed significant reductions in the vehicle numbers, which may contribute to the improvement of decision making in the public transport planning. The VTSP-SCT (Vehicle Type Scheduling Problem with Sequential Changes of Timetable) solved instances with 5000 service trips and three types of vehicles with optimal solution, supported from IBM® ILOG® CPLEX® Optimization Studio V12.5. In contrast the VTSP-CCT (Vehicle Type Scheduling Problem with Combinatorial Changes of Timetable) required heuristic support to solve large instances. Thus, we developed and applied a Column Generation algorithm, which enabled the resolution of these instances generating equal to or better results than those provided by the VTSP-SCT. The results of the three proposed approaches indicate that they may contribute to optimizing the public transport planning leading to significant savings in terms of scheduled vehicles. Moreover, as the timetable changes are fairly short, it is slightly modified, minimally modifying the passengers routine, which enables the application of these approaches to real context.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Processo de planejamento do trânsito	25
Figura 2	Planejamento dos Sistemas de Transporte	26
Figura 3	Multiplicação dos arcos de serviço para uma janela de tempo de ± 2 minutos	41
Figura 4	Visão esquemática das abordagens propostas	48
Figura 5	Grafo da TSN gerado para validação da rede	53
Figura 6	TSN com cinco viagens, uma garagem e três terminais	60
Figura 7	Sobreposição da TSN para frota heterogênea	61
Figura 8	Pré-processamento de arcos <i>deadhead</i> sugerido por Kliewer, Mellouli e Suhl (2002, 2006)	62
Figura 9	Pré-processamentos aplicado à TSN	64
Figura 10	Pseudo-código para implementação dos arcos de janela de tempo	69
Figura 11	Representação da rede com janelas de tempo de 2 minutos	70
Figura 12	Representação de atrasos sucessivos na tabela de horários	71
Figura 13	Situação ilustrativa de extrapolação da janela de tempo definida	72
Figura 14	Comparação entre horizontes de tempo para a inclusão de arcos de janela de tempo	73
Figura 15	Comparativo da aplicação de arcos de janela de tempo entre viagens consecutivas	74
Figura 16	Situação na qual o modelo VTSP-TW apresenta maior compatibilidade de arcos	76
Figura 17	Algoritmo para a geração dos intervalos de viagens do modelo VTSP-SCT	79
Figura 18	Agrupamento sequencial de viagens no modelo VTSP-SCT	79
Figura 19	Algoritmo para a geração dos intervalos de viagens do modelo VTSP-CCT	82
Figura 20	Combinação no agrupamento de viagens no modelo VTSP-CCT	82
Figura 21	Pseudocódigo para a geração de colunas adaptado de Weider (2007)	88
Figura 22	Definição dos intervalos k e k' , considerando $\Delta t=1$ minuto	89
Figura 23	Algoritmo de geração de colunas para a obtenção da solução inteira na GC (FURINI <i>et al.</i> , 2012)	96
Figura 24	Tabela de horários parcial atual e sugerida para a instância real 530_16 com a aplicação do modelo VTSP-TW para T_{tw} de 1 e 2 minutos	102

Figura 25 Tabela de horários parcial atual e sugerida para a instância real 530_16 com a aplicação do modelo VTSP-SCT para Δt de 3 minutos	112
Figura 26 Tabela de horários parcial atual e sugerida para a instância real 530_16 com a aplicação do modelo VTSP-CCT para Δt de 3 minutos	119
Figura 27 Comparação entre o número de arcos de janela de tempo ativados na CG e no modelo VTSP-SCT para as instâncias de 2000 viagens	122
Figura 28 Comparação entre o número de viagens agrupadas na CG e no modelo VTSP-SCT para as instâncias de 1000 viagens	122
Figura 29 Tempo total para a resolução da Geração de Colunas nas instâncias testadas	124
Figura 30 Sumário das principais características das três abordagens propostas	126
Figura 31 Pseudocódigo para a criação dos arcos <i>deadhead</i>	139
Figura 32 Pseudocódigo para a criação dos arcos de espera entre os terminais	139
Figura 33 Pseudocódigo para a criação dos arcos de espera na garagem	140
Figura 34 Pseudocódigo para a criação dos arcos <i>pull-in</i> e <i>pull-out</i>	140
Figura 35 Pseudocódigo para a criação dos arcos de circulação	140

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Descrição das instâncias reais	54
Tabela 2	Número de arcos <i>deadhead</i> na rede tempo-espaço e na rede baseada em conexões	58
Tabela 3	Tabela de horários para três terminais	60
Tabela 4	Nós <i>deadhead</i> reduzidos no pré-processamento da TSN	65
Tabela 5	Nós da garagem reduzidos no pré-processamento da TSN	67
Tabela 6	Possíveis combinações dos arcos de serviço no intervalo de índice $k' = 1$	90
Tabela 7	Características das instâncias testadas	98
Tabela 8	Características dos modelos VTSP, VTSP-TW e de Kliewer para as instâncias reais	100
Tabela 9	Resultados em termos de solução dos modelos VTSP, VTSP-TW e de Kliewer para as instâncias reais	101
Tabela 10	Relação proporcional entre os modelos VTSP, VTSP-TW e de Kliewer para as instâncias reais	103
Tabela 11	Resultados em termos de solução dos modelos VTSP, VTSP-TW e de Kliewer para algumas instâncias de característica aleatória	105
Tabela 12	Relação proporcional entre os modelos VTSP, VTSP-TW e de Kliewer para algumas instâncias de característica aleatória	106
Tabela 13	Resultados computacionais do modelo VTSP-SCT para as instâncias reais	110
Tabela 14	Resultados em termos de solução do modelo VTSP-SCT para as médias de algumas instâncias de característica aleatória	115
Tabela 15	Resultados computacionais do modelo VTSP-CCT para as instâncias reais	118
Tabela 16	Resultados em termos de solução do modelo VTSP-CCT, com aplicação de Geração de Colunas, para as médias de algumas instâncias de característica aleatória	121
Tabela 17	Qualidade da CG desenvolvida	125
Tabela 18	Resultados em termos de solução do modelo VTSP para as médias das instâncias de característica aleatória	141
Tabela 19	Resultados em termos de solução dos modelos VTSP-TW e de Kliewer para as médias das instâncias aleatórias	142

Tabela 20	Resultados em termos de solução dos modelos VTSP-TW e de Kli- ewer para as médias das instâncias aleatórias em horário de pico . . .	143
Tabela 21	Relação proporcional entre os modelos VTSP, VTSP-TW e de Kli- ewer para as médias das instâncias aleatórias	144
Tabela 22	Relação proporcional entre os modelos VTSP, VTSP-TW e de Kli- ewer para as médias das instâncias aleatórias em horário de pico . . .	145
Tabela 23	Resultados em termos de solução do modelo VTSP-SCT para as médias das instâncias de característica aleatória (1000 viagens) . . .	146
Tabela 24	Resultados em termos de solução do modelo VTSP-SCT para as médias das instâncias de característica aleatória (2000 viagens) . . .	147
Tabela 25	Resultados em termos de solução do modelo VTSP-SCT para as médias das instâncias de característica aleatória (3000 viagens) . . .	148
Tabela 26	Resultados em termos de solução do modelo VTSP-SCT para as médias das instâncias de característica aleatória (4000 viagens) . . .	149
Tabela 27	Resultados em termos de solução do modelo VTSP-SCT para as médias das instâncias de característica aleatória (5000 viagens) . . .	150
Tabela 28	Resultados em termos de solução do modelo VTSP-CCT, com apli- cação de Geração de Colunas, para as médias das instâncias de característica aleatória (1000 viagens)	151
Tabela 29	Resultados em termos de solução do modelo VTSP-CCT, com apli- cação de Geração de Colunas, para as médias das instâncias de característica aleatória (2000 viagens)	152
Tabela 30	Resultados em termos de solução do modelo VTSP-CCT, com apli- cação de Geração de Colunas, para as médias das instâncias de característica aleatória (3000 viagens)	153
Tabela 31	Tempos computacionais para resolver a Geração de Colunas do mo- delo VTSP-CCT para as instâncias de 1000 e 2000 viagens	154
Tabela 32	Tempos computacionais para resolver a Geração de Colunas do mo- delo VTSP-CCT para as instâncias de 3000 e 4000 viagens	155
Tabela 33	Especificações das viagens da Figura 22	156
Tabela 34	Resultados do Iteração 1 do PMRR	159
Tabela 35	Resultados do Iteração 2 do PMRR	161
Tabela 36	Resultados do Iteração 3 do PMRR	162

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANTP	Associação Nacional dos Transportes Públicos
ATU	Associação dos Transportadores Urbanos de Passageiros de Santa Maria
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
GC	Geração de Colunas
MD-VSP	<i>Multi-Depot Vehicle Scheduling Problem</i> ou Problema de Escalonamento de Veículos com Múltiplas Garagens
PL	Programação Linear ou Programa Linear
PLI	Programação Linear Inteira ou Programa Linear Inteiro
PLIM	Programação Linear Inteira Mista ou Programa Linear Inteiro Misto
PMR	Problema Mestre Restrito
PMRR	Problema Mestre Restrito Relaxado
SD-VSP	<i>Single-Depot Vehicle Scheduling Problem</i> ou Problema de Escalonamento de Veículos para uma Única Garagem
TSN	<i>Time-Space Network</i> ou Rede tempo-espaço
VSP	<i>Vehicle Scheduling Problem</i> ou Problema de Escalonamento de Veículos
VTSP	<i>Vehicle Type Scheduling Problem</i> ou Problema de Escalonamento de Veículos com Frota Heterogênea
VTSP-CCT	<i>Vehicle Type Scheduling Problem with Combinatorial Change of Timetable</i> ou Problema de Escalonamento de Veículos com Frota Heterogênea e Modificações Combinatórias na Tabela de Horários
VTSP-SCT	<i>Vehicle Type Scheduling Problem with Sequential Change of Timetable</i> ou Problema de Escalonamento de Veículos com Frota Heterogênea e Modificações Sequenciais na Tabela de Horários
VTSP-TW	<i>Vehicle Type Scheduling Problem with Time Windows</i> ou Problema de Escalonamento de Veículos com Frota Heterogênea e Janelas de Tempo

LISTA DE SÍMBOLOS

A^{se}	Conjunto dos arcos de serviço
A_u^{se}	Conjunto dos arcos de serviço alocados em intervalos unitários
A_k^{se}	Conjunto dos arcos de serviço pertencentes ao intervalo k
A^{wait}	Conjunto dos arcos de espera
A^{dh}	Conjunto dos arcos <i>deadhead</i>
A^{pin}	Conjunto dos arcos <i>pull-in</i>
A^{pout}	Conjunto dos arcos <i>pull-out</i>
A^c	Conjunto dos arcos de circulação
A^{tw}	Conjunto dos arcos de janela de tempo
F	Conjunto dos tipos de veículos
K	Conjunto dos intervalos de índice k
K_{ij}	Conjunto dos intervalos que contém a viagem de serviço (i, j)
$K_{k'}$	Conjunto dos índices dos intervalos que definem o intervalo interseccionado $k' \in K'$
K'	Conjunto dos intervalos interseccionados de índice k'
$Q_{k'}$	Conjunto das possíveis combinações factíveis dos arcos de serviço alocados em intervalos interseccionados
$Q'_{k'}$	Conjunto restrito das possíveis combinações factíveis dos arcos de serviço alocados em intervalos interseccionados
c_{ijf}	Custo do veículo do tipo $f \in F$ que trafega pelo arco (i, j)
s_i	Terminal de partida de uma viagem
s_j	Terminal de chegada de uma viagem
t_i	Hora da partida de uma viagem
t_j	Hora de chegada de uma viagem
t_{0s}	Hora de partida da primeira viagem do dia
t_{hs}	Hora de partida da última viagem do dia

Δt	Parâmetro de intervalo de tempo (em minutos) dos modelos VTSP-SCT e VTSP-CCT
t_{tw}	Parâmetro da janela de tempo (em minutos)
p_f	Parâmetro de capacidade do veículo do tipo $f \in F$
P_k	Demanda total esperada para o intervalo de índice $k \in K$
P_{ij}	Demanda esperada no arco de serviço (i, j)

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	18
1.1 OBJETIVOS	21
1.2 DEFINIÇÃO DE TERMOS	22
1.3 ESTRUTURA DA TESE	23
2 REVISÃO DA LITERATURA	24
2.1 ETAPAS DO PLANEJAMENTO NO TRANSPORTE PÚBLICO	24
2.2 O PROBLEMA DE GERAÇÃO DA TABELA DE HORÁRIOS	27
2.3 O PROBLEMA DE ESCALONAMENTO DE VEÍCULOS	30
2.3.1 O problema de escalonamento de veículos com frota heterogênea	33
2.4 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DA TABELA DE HORÁRIOS E ESCALONAMENTO DE VEÍCULOS	40
3 MÉTODO DO ESTUDO	47
3.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	47
3.2 CONSTRUÇÃO DOS MODELOS	50
3.3 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DOS MODELOS	52
3.4 VALIDAÇÃO DOS MODELOS	52
3.4.1 Descrição das instâncias reais	53
3.4.2 Descrição das instâncias aleatórias	55
3.4.3 Parametrização dos modelos	56
3.5 IMPLEMENTAÇÃO DA SOLUÇÃO	57
4 REPRESENTAÇÃO DO MODELO VTSP ATRAVÉS DA REDE TEMPO-ESPAÇO	58
4.1 PROCEDIMENTO DE REDUÇÃO DA TSN	62
4.1.1 Aplicação das reduções da TSN	63
5 NOVAS ABORDAGENS PARA A RESOLUÇÃO INTEGRADA DO PROBLEMA DE GERAÇÃO DA TABELA DE HORÁRIOS E DO VTSP	68
5.1 ABORDAGEM COM JANELAS DE TEMPO: VTSP-TW	68
5.2 INTEGRANDO A GERAÇÃO DA TABELA DE HORÁRIOS E O VTSP	77
5.2.1 Modelo VTSP-SCT	77
5.2.2 Modelo VTSP-CCT	81
6 TÉCNICA DE GERAÇÃO DE COLUNAS PARA A RESOLUÇÃO DO VTSP-CCT	86
6.1 PANORAMA SOBRE A TÉCNICA DE GERAÇÃO DE COLUNAS	86
6.2 A GERAÇÃO DE COLUNAS PROPOSTA PARA RESOLVER O VTSP-CCT	89
6.2.1 Problema Mestre	89

6.2.2 Subproblema	93
6.2.3 Geração de Colunas	95
7 RESULTADOS COMPUTACIONAIS	97
7.1 RESULTADOS COMPUTACIONAIS PARA O VTSP-TW	99
7.1.1 Testes com instâncias reais	99
7.1.2 Testes com instâncias aleatórias	104
7.2 RESULTADOS COMPUTACIONAIS PARA O VTSP-SCT	108
7.2.1 Testes com instâncias reais	108
7.2.2 Testes com instâncias aleatórias	113
7.3 RESULTADOS COMPUTACIONAIS PARA O VTSP-CCT	116
7.3.1 Testes com instâncias reais	117
7.3.2 Testes com instâncias aleatórias	119
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS	127
REFERÊNCIAS	132
APÊNDICES	138

1 INTRODUÇÃO

Com o aumento da população nos centros urbanos, a demanda por transporte também tem se tornado cada vez maior. Como resultado, observa-se um crescimento acelerado do tráfego nas cidades, o que cria problemas de mobilidade urbana como congestionamentos, poluição do ar e sonora, e acidentes (FARAHANI *et al.*, 2013). Uma forma de minimizar essa situação é a melhor utilização do sistema de transporte público.

A fim de implementar melhorias nesse sistema, deve-se considerar quatro etapas de planejamento do transporte público (FRELING; WAGELMANS; PAIXÃO, 1999; de LEONE; FESTA; MARCHITTO, 2011): a tabela de horários, o escalonamento de veículos, o escalonamento da tripulação e a rotação da tripulação. Na elaboração da tabela de horários, a frequência das linhas e os horários de partida e chegada das viagens são definidos; no escalonamento de veículos, para cada viagem será atribuído um veículo; e nos planejamentos de tripulação, os motoristas são direcionados aos veículos e às viagens.

Na prática, geralmente essas etapas são planejadas de modo isolado. Algumas empresas delegam para diferentes gerentes a realização de cada fase do planejamento, ignorando a necessidade de uma abordagem integrada. Dada a complexidade de cada etapa, são várias as simplificações da realidade observadas nos modelos de otimização do planejamento do transporte público.

Tratando-se especificamente do problema de escalonamento de veículos (VSP, do inglês *Vehicle Scheduling Problem*), área amplamente estudada nas últimas décadas, há escassez de estudos considerando frota heterogênea na literatura de transportes, em comparação à frota homogênea (CEDER, 2011a). No contexto do transporte público, uma frota heterogênea compreende diferentes tipos de ônibus que variam

em capacidade, velocidade ou equipamentos. Problemas de escalonamento de veículos com frota heterogênea (VTSP, do inglês *Vehicle-Type Scheduling Problem*), são classificados por Ceder (2011a) como aqueles que integram a programação de veículos e a melhor escolha do tipo de veículo necessário para cada viagem, mantendo o nível da qualidade do serviço prestado. No transporte público, muitos fatores influenciam a inclusão da frota heterogênea, como a substituição da frota, novas tecnologias para os ônibus, oportunidades de mercado, demanda crescente, reutilização em novas linhas de ônibus de veículos desativados, entre outros. Percebe-se, assim, a importância de se considerar este aspecto quando do escalonamento dos veículos no planejamento do transporte público.

Frotas de ônibus heterogêneas são identificadas na maioria das grandes cidades ao redor do mundo. A pesquisa de Roman (2012), com órgãos de trânsito de cidades dos Estados Unidos, Canadá e Porto Rico identificou que na cidade de Nova York há 4.344 ônibus em circulação, sendo que 3.704 possuem mais de 35 metros de comprimento e 640 são articulados. Já na União Europeia, a International Association of Public Transport (2010) realizou uma pesquisa para avaliar as principais características das frotas de ônibus urbanos em dezenas de países e descobriu que, na Áustria, 52,50% são ônibus articulados, enquanto que na Bélgica apenas 12,10% o são. Em relação à América do Sul, na cidade de São Paulo há 14.864 ônibus em circulação para atendimento a população dividida em cinco tipos diferentes, variando conforme as capacidades (PREFEITURA DE SÃO PAULO, 2010).

A programação da frota heterogênea não está somente relacionada ao interesse econômico das empresas de ônibus, influenciando também na qualidade da viagem oferecida aos passageiros e nas características do trânsito urbano. Uma viagem feita por um ônibus articulado, por exemplo, pode atender à demanda de duas viagens consecutivas realizadas por ônibus menores, sem prejuízos aos passageiros. Ao tratar a heterogeneidade da frota em um problema é interessante que se analise a demanda que deverá ser atendida, tendo em vista que se pode direcionar os tipos de veículos conforme o número de passageiros previstos para cada viagem. Outra consequência do uso da frota heterogênea é a possibilidade de se alterar, sutilmente, a tabela de horários e melhorar ainda mais o escalonamento dos veículos utilizados. As alterações na tabela de horários podem ocorrer através da inclusão de janelas de tempo no

VTSP ou de modificações do problema de modo a integrar as duas primeiras etapas do planejamento do transporte público. Otimizando simultaneamente os problemas de geração da tabela de horários e de escalonamento de veículos com frota heterogênea obtém-se mais flexibilidade nos horários de partida das viagens e maior compatibilidade de viagens, possibilitando reduções no custo total do planejamento.

Baseando-se nessas considerações, propõe-se três novas abordagens para a integração do problema de geração da tabela de horários e do VTSP. Duas delas são modelos de Programação Linear Inteira (PLI), com o objetivo de otimizar simultaneamente esses problemas tendo como base uma rede espaço-tempo (TSN, do inglês *Time-Space Network*). A terceira é uma nova metodologia de inserção de janelas de tempo para os modelos de PLI propostos, a partir de alterações na estrutura da TSN, com fácil implementação computacional e possibilidade de aplicação à instâncias de grande porte com rápida resolução computacional.

Um diferencial dessas abordagens consiste na consideração da demanda para a redefinição da tabela de horários e para o escalonamento dos veículos, fator raramente aplicado nos modelos de otimização do sistema de transporte. Aliado à utilização da frota heterogênea, a compreensão do comportamento da demanda faz-se totalmente necessária dada a possibilidade de escalonamento de veículos com diferentes capacidades, buscando sempre aliar qualidade no atendimento, satisfação do passageiro e a minimização dos custos de transporte. Nos horários de pico, por exemplo, podem-se utilizar veículos de maior capacidade do que nos demais horários do dia; caso contrário, é preciso empregar mais veículos para atender a demanda, o que aumentaria o custo total do sistema. Ao escalonar diferentes tipos de veículos, conforme variação da demanda, permite-se aos gestores maior flexibilidade na realização do planejamento das atividades.

É importante ressaltar que a abordagem adotada neste trabalho de geração da tabela de horários integrada ao VTSP consiste em redefinir os horários de algumas viagens de uma tabela ativa. Assim, não é desenvolvida uma tabela de horários inicial para suportar as atividades diárias do transporte público, mas são aprimoradas as tabelas já existentes, garantindo melhor distribuição das viagens e qualidade nos serviços prestados aos passageiros. Modificações sutis na tabela de horários, alterando os horários de partida ou chegada de algumas viagens num intervalo de tempo

curto, permitem aumentar drasticamente o espaço de soluções possíveis (KLIEWER; AMBERG; AMBERG, 2012), possibilitando graus de liberdade adicionais ao VTSP. Alguns autores definem a etapa de geração da tabela de horários como pertencente ao planejamento tático do transporte público (CEDER; WILSON, 1986), já outros o enquadram no planejamento operacional (FRELING; WAGELMANS; PAIXÃO, 1999; de LEONE; FESTA; MARCHITTO, 2011); assim, como a proposta desta tese consiste na modificação de uma tabela de horários já existente, enquadra-se esta etapa do planejamento como operacional, juntamente com o escalonamento dos ônibus. Trabalhos com a perspectiva de integração da formulação e resolução da tabela de horários e do VTPS, tendo como base a TSN, não foram identificados na literatura, o que garante o caráter inédito desta investigação.

Dados disponibilizados pela Associação Nacional dos Transportes Públicos (ANTP, 2012), de que a população dos municípios com mais de 60 mil habitantes realizou, em 2011, 61,3 bilhões de viagens, sendo 17,7 bilhões pelo transporte público, motivam a realização deste estudo, visto a sua importância prática, não somente acadêmica. Ainda, segundo a ANTP (2012), quando as viagens são classificadas por porte dos municípios, percebe-se que a participação do transporte público gira expressivamente em torno de 20% à exceção das cidades acima de 1 milhão de habitantes, nas quais atinge 36%. Os ônibus públicos no Brasil, no ano de 2011, destacaram-se como o terceiro meio de transporte mais utilizado, seguindo o transporte a pé e de bicicleta (1º) e de carros particulares e motocicletas (2º), sendo o ônibus o responsável pelo deslocamento de 40 milhões de passageiros diariamente, atendendo 87% da demanda de transporte público coletivo nacional. A frota de ônibus municipais e metropolitanos no Brasil (ANTP, 2012) ultrapassou os 105 mil veículos, dados que reforçam a necessidade do desenvolvimento de ferramentas que contribuam no aprimoramento das operações de um dos meios de transporte mais utilizados no país.

A fim de definir os propósitos desta tese, na Seção 1.1 são descritos o objetivo geral e os objetivos específicos que nortearam o estudo.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é *propor novas abordagens para a resolução integrada dos problemas de geração da tabela de horários e de escalonamento de veículos*

com frota heterogênea, a fim de subsidiar a tomada de decisão no planejamento do transporte público.

Como *objetivos específicos*, destacam-se:

- Realizar uma busca abrangente da literatura acerca dos problemas de geração de tabela de horários e do escalonamento de veículos, a fim de ampliar a compreensão teórica dos mesmos.
- Desenvolver modelos e técnicas para a integração dos problemas de geração da tabela de horários e de escalonamento de veículos com frota heterogênea.
- Desenvolver um método de solução para resolver os modelos propostos para instâncias de grande porte.
- Aplicar as abordagens propostas em situações reais do transporte público, de modo a validá-las sob o ponto de vista prático.
- Comparar as soluções geradas pelo método de solução proposto com as soluções utilizadas na prática da operação dos sistemas de transporte público.

1.2 DEFINIÇÃO DE TERMOS

Tendo em vista que redes de fluxo são amplamente utilizadas nas técnicas de resolução de problemas de escalonamento de veículos e que a grande maioria dos trabalhos de otimização do VTSP são publicados em língua estrangeira, prioritariamente o inglês, faz-se necessário apresentar a definição dos principais termos utilizados nesta tese.

- Arcos expressos (*Deadhead arc*): arcos que representam as viagens em vazio na rede tempo-espaço.
- Arcos pull-in (*Pull-in arcs*): arco referente à saída de um veículo da garagem em direção a um terminal.
- Arcos pull-out (*Pull-out arcs*): arco referente à saída de um veículo de um terminal em direção à garagem.
- Garagem (*Depot*): Facilidade que acolhe a frota de veículos de uma determinada empresa.

- Tabela de horários (*Timetable*): Estrutura de dados que contém as viagens a serem realizadas por um sistema de transportes públicos.
- Viagem (*Trip*): Deslocamento de um veículo, com origem e destino determinados, e com horários estabelecidos para início e fim.
- Viagem em vazio ou viagem expressa (*Deadhead trip*): Viagem realizada por um veículo entre dois terminais, em que não é efetuada a condução de passageiros.

As definições para os termos, em língua portuguesa, foram realizadas a partir da busca na literatura nacional acerca do problema e através de informações de especialistas e gestores que realizam o escalonamento de ônibus e tripulações na prática.

1.3 ESTRUTURA DA TESE

Este trabalho é composto por oito capítulos a partir desta introdução, na qual contextualiza-se o problema investigado e definem-se os objetivos do estudo. No Capítulo 2 apresenta-se a revisão de literatura, no intuito de fundamentar teoricamente o objeto desta investigação. A discussão teórica perpassa a estrutura do planejamento no transporte público, para, a partir dessas definições, detalhar os problemas de geração da tabela de horários e de escalonamento de veículos com ênfase na frota heterogênea. Por fim, são revisados estudos que integraram os problemas de otimização da tabela de horários e do escalonamento de veículos.

No Capítulo 3, são definidos os procedimentos metodológicos que nortearam a elaboração do estudo. Já no Capítulo 4 apresenta-se a estrutura da rede tempo-espaço (TSN), que serviu de base para a formulação matemática dos modelos propostos. Cada um desses modelos é detalhadamente descrito no Capítulo 5 e, no Capítulo 6, a técnica de Geração de Colunas desenvolvida para apoiar a resolução de um dos modelos é discutida. Os experimentos computacionais são apresentados no Capítulo 7 e no Capítulo 8 são realizadas as considerações finais desta tese, destacando os resultados alcançados, contribuições esperadas, limitações da pesquisa e proposições de novas investigações.

2 REVISÃO DA LITERATURA

O transporte público é crucial na sociedade moderna, visto que confrontados com congestionamento de tráfego, problemas de estacionamento nos centros urbanos e aumento acelerado da poluição, os cidadãos podem optar pela utilização de meios de transporte coletivos, desde que atendam a critérios de qualidade no serviço e preço adequado. Guihaire e Hao (2008a) assinalam que é dever e objetivo das empresas de transporte público fornecer essas condições, para ajustar corretamente o sistema e atingir os objetivos de maximizar a qualidade do serviço prestado ao usuário e minimizar os custos de operação. Para que isso seja possível, as etapas do planejamento do sistema de transporte público devem estar em sintonia. A fim de contribuir nessa tarefa, propõe-se otimizar conjuntamente as duas primeiras etapas do sistema: a geração da tabela de horários e o escalonamento de veículos.

Nas seções que seguem, detalha-se a estrutura do planejamento do transporte público e realiza-se um apanhado teórico acerca dos problemas de geração da tabela de horários e de escalonamento de veículos com ênfase na frota heterogênea. Finalmente, a última seção contempla a revisão de trabalhos que versam sobre soluções integradas para os problemas de otimização da tabela de horários e do escalonamento de veículos, que contribuíram para o desenvolvimento dos modelos propostos nesta tese.

2.1 ETAPAS DO PLANEJAMENTO NO TRANSPORTE PÚBLICO

Um sistema de transportes é composto pelos passageiros e bens a serem transportados, pelos veículos que efetuam os deslocamentos e pela rede de infraestrutura de transportes que permite a operação do sistema (MANHEIM, 1980). Assim, no planejamento operacional do transporte público, diferentes etapas são consideradas, de

acordo com suas complexidades. Ceder e Wilson (1986) apresentam o planejamento de ônibus como uma sequência de decisões sistemáticas, considerando o desenho da rede (rotas) como etapa inicial. Os dados de saída apresentados na Figura 1 tornam-se importantes contribuições para as decisões do nível inferior.

Figura 1 – Processo de planejamento do trânsito

Entradas independentes	Atividade do planejamento	Saídas	Nível de decisão
Dados de demanda Indicadores de desempenho da rota	Desenho da rede	Alterações de rota Novas rotas Estratégias operacionais	Estratégico
Subsídios disponíveis Ônibus disponíveis Políticas de serviço	Configuração de frequências	Serviço de frequências	Tático
Demanda por hora do dia Horas da primeira e última viagem do dia Tempos de execução	Desenvolvimento da tabela de horários	Hora de partida das viagens Hora de chegada das viagens	Tático
Tempos de viagens em vazio Tempos de recuperação Restrições de escalonamento Estrutura de custos	Escalonamento de ônibus	Escalonamento dos ônibus	Operacional
Regras de trabalho dos motoristas Estrutura de custos	Escalonamento de motoristas	Escalonamento dos motoristas	Operacional

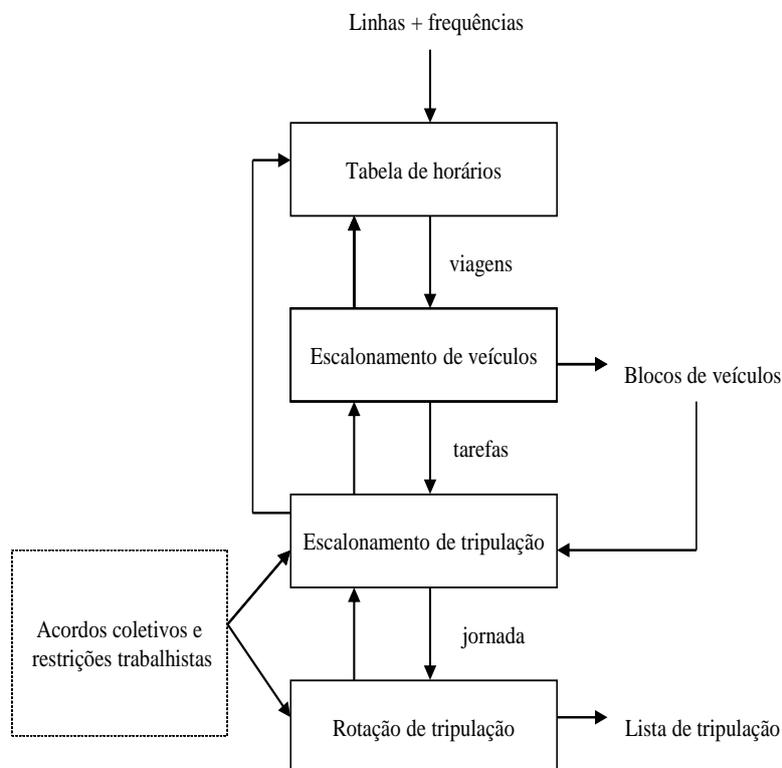
Fonte: adaptado de Ceder e Wilson (1986) e Guihaire e Hao (2008a)

Nessa estrutura, cada uma das atividades é classificada em um nível de planejamento do transporte público. No nível estratégico alocam-se os problemas decisórios de longo prazo que, após serem implementados, estarão consolidados por período de tempo abrangente, como definições de infraestrutura e o desenho da rede. No nível tático, encontram-se os problemas de médio e longo prazos, visto que são solucionados, geralmente, com caráter permanente, mas há necessidades de redefinições conforme alterações em algumas entradas do sistema, como a elaboração da tabela de horários. Por fim, no nível operacional, estão os problemas que ocorrem na operação de um serviço específico, como o escalonamento de veículos ou de tripulação, e possuem redefinições frequentes.

Freling, Wagelmans e Paixão (1999) e de Leone, Festa e Marchitto (2011) reduzem a classificação de Ceder e Wilson (1986) a quatro etapas fundamentais ao planejamento operacional do transporte público: a tabela de horários, o escalonamento de veículos, o escalonamento da tripulação e rotação da tripulação, conforme a Figura 2. Nesta classificação, as etapas de desenho da rede e de configuração das frequências (mencionadas em Ceder e Wilson (1986)) fornecem os dados de entrada

para a geração da tabela de horários.

Figura 2 – Planejamento dos Sistemas de Transporte



Fonte: adaptado de Freling, Wagelmans e Paixão (1999).

O serviço de transporte é composto por um conjunto de linhas que correspondem às viagens de ônibus entre dois terminais de uma mesma cidade. Para cada linha, a frequência é determinada pela demanda, pela infraestrutura disponível e pelo requerimento de serviços por parte dos passageiros. Então, uma tabela de horários é construída, resultando em viagens caracterizadas por um local e horário de início e fim. Esta etapa, na concepção de Freling, Wagelmans e Paixão (1999) e de Leone, Festa e Marchitto (2011) é de nível operacional, em contrapartida à classificação de nível tático realizada por Ceder e Wilson (1986).

As etapas subsequentes são o escalonamento de veículos e o de tripulação, que correspondem a direcionar os veículos para as viagens e a tripulação para os veículos, respectivamente. Para o primeiro, cada escala é definida como uma jornada de ônibus que começa em uma garagem e retorna para a mesma garagem. O objetivo é minimizar o custo total dos ônibus usados e do funcionamento. Custos de funcionamento podem ser minimizados eliminando viagens em vazio, ou seja, viagens

sem passageiros. Baita *et al.* (2000) ainda acrescentam os custos de tempo ocioso; tempo de deslocamento sem passageiro; consumo de combustível e número de motoristas. A programação diária de cada ônibus é conhecida como bloco de veículo. Já no escalonamento da tripulação, tem-se que determinar as jornadas (conjunto de tarefas para um dia de trabalho) para os motoristas a partir de uma dada garagem para cobrir todas as viagens. Esse problema é extremamente importante do ponto de vista econômico, dado o alto custo que incorre. Por fim, a elaboração da rotação de tripulação é a construção do escalonamento da tripulação para o longo prazo, como um mês ou meio ano.

Entre esses níveis de planejamento existe um sistema de retroalimentações (*feedback*) entre cada atividade e as demais, pois todas estão interligadas, umas mais fortemente do que outras (PRATA, 2009). Assim, o planejamento pode ser mais eficiente se suas atividades forem definidas de modo integrado; entretanto, como cada uma das etapas do planejamento é extremamente complexa, é matematicamente inviável considerar o processo todo de uma única vez (FRELING; WAGELMANS; PAIXÃO, 1999). O planejador deve sempre gerir o trade-off entre os ganhos de efetividade advindos da integração e a complexidade do sistema a ser planejado.

Nas seções seguintes são realizadas considerações acerca dos problemas de geração da tabela de horários e de escalonamento de veículos, seguidos de um apanhado bibliográfico dos trabalhos que resolvem esses problemas de modo integrado. Esses trabalhos foram norteadores do desenvolvimento dos modelos propostos e resolvidos nesta tese.

2.2 O PROBLEMA DE GERAÇÃO DA TABELA DE HORÁRIOS

O problema de geração das tabelas de horário no transporte público consiste, basicamente, em determinar os horários de partida e chegada das linhas de ônibus a partir de cada terminal. A tabela de horários de cada linha, geralmente, é composta por um tempo de partida para um terminal inicial, o tempo de partida previsto de cada ponto de ônibus da rota e uma previsão de horário de chegada no terminal final (GUIHAIRE; HAO, 2008a). Essas informações servem como dados de entrada para o escalonamento de veículos.

Geralmente, o principal objetivo deste problema é a sincronização entre duas

viagens, a fim de minimizar o tempo de espera do passageiro nos casos de transbordo. Wu, Tang e Zhang (2013) ressaltam que a geração das tabelas de horários é um problema de otimização complicado no planejamento de transporte público, pois deve considerar a sincronização das tabelas de todos os veículos ao determinar a hora de partida de cada viagem, para que as transferências dos passageiros de um ônibus para o outro sejam bem cronometradas. Outro objetivo na geração da tabela de horários é a distribuição uniforme dos horários de partida das viagens ao longo de um determinado período de tempo. Isso significa, por exemplo, que não é permitido a todos os veículos partirem em um curto intervalo de tempo e, na sequência, por um longo intervalo de tempo, nada acontecer.

Como os parâmetros da tabela de horários são os primeiros mecanismos a identificar o tempo de cada viagem no planejamento do transporte público, cabe ao gestor aumentar a sincronização entre as viagens e a mobilidade e satisfação dos passageiros. As decisões de nível tático de gerar a tabela de horários são cruciais no processo de planejamento da rede de transporte público, visto que a qualidade do serviço e os planejamentos subsequentes de veículos e tripulação dependem desta solução (IBARRA-ROJAS; RIOS-SOLIS, 2012).

Conforme Michaelis e Schöbel (2009), dado um conjunto de terminais V e um conjunto de veículos F , a geração das tabelas de horários pode ser representada por duas funções $\pi^{arr} : V \times F \rightarrow \mathbb{N}$, $\pi^{dep} : V \times F \rightarrow \mathbb{N}$ atribuindo um tempo de chegada e de partida para cada veículo em cada estação, respectivamente. A fim de evitar um número excessivo de índices para a geração da tabela de horários, a utilização de *event activity networks* é sugerida, em que os eventos consistem em todas as chegadas e partidas de todos os veículos em todos os terminais. Cada um dos eventos é ligado por arcos correspondentes aos diferentes tipos de atividade, sendo as mais importantes as de direcionamento dos veículos entre os terminais, as de espera dos veículos nos terminais e as de transferência dos passageiros entre dois veículos (ou trens). O problema de geração da tabela de horários é NP-difícil, conforme prova de Ibarra-Rojas e Rios-Solis (2012).

Para a geração da tabela de horários, também devem ser levados em consideração a frequência de tempo que se quer aplicar entre as partidas das viagens, podendo esses serem constantes ou irregulares. No primeiro caso (*clock-face*), bastante comum

nos países europeus, as partidas por linha são realizadas com o mesmo intervalo de tempo (por exemplo, a cada 10 minutos). O objetivo desta modalidade é aumentar a atratividade e versatilidade do transporte público, visto que são mais fáceis de memorizar. Além disso, proporcionam melhor integração com outros modais de transporte, bem como o escalonamento de veículos e tripulação para as empresas de transporte público, em virtude dos padrões de repetição. O caso oposto acontece quando os horários de partida das viagens são puramente impulsionados pela demanda (*irregular headways*). Assim, as partidas das viagens não possuem um padrão de horários constante, como é o caso das tabelas de horários das linhas de ônibus da maioria das cidades brasileiras. Como existem demandas diferentes de passageiros para cada uma das faixas horárias de um dia, é necessário que se observe as características da demanda nas transições dessas faixas horárias, minimizando a criação de espaçamentos ou sequenciamentos muito próximos de viagens.

Ceder (2002) afirma que os critérios básicos para a determinação das frequências são proporcionar espaço adequado nos veículos para atender a demanda de passageiros e garantir uma frequência mínima do serviço. Esse autor descreve quatro métodos para calcular as frequências. Dois métodos são baseados em *point-check* (contando os passageiros a bordo do ônibus em trânsito em determinados pontos), e dois no *ride-check* (contando os passageiros ao longo de toda a rota de trânsito). De maneira geral, nos métodos *point-check*, a frequência é a divisão entre o número de passageiros no ponto de maior carga de passageiros e a ocupação desejada do veículo; e nos *ride-check*, a frequência é a divisão entre a carga média de passageiros e a ocupação desejada.

Cabe destacar que o conceito de otimização da tabela de horários, adotado nos modelos desenvolvidos nesta tese, não recai na geração de uma tabela de horários inicial para suportar as atividades do sistema de transporte público, mas sim no aprimoramento das tabelas já existentes, a fim de garantir uma melhor distribuição das viagens ao longo do dia, assegurando qualidade nos serviços prestados aos passageiros. Desse modo, optou-se por não abordar nesta seção os modelos de geração da tabela de horários, mas discutir na seção 2.4 a revisão dos trabalhos que otimizam conjuntamente a tabela de horários e o escalonamento de veículos.

Recomenda-se as leituras de Guihaire e Hao (2008a) e Farahani *et al.* (2013) como

excelentes referências de trabalhos teóricos sobre a geração da tabela de horários. No primeiro, os autores apresentam uma revisão teórica global sobre o planejamento do transporte público nos níveis estratégicos e táticos, analisando artigos desde o ano de 1925 até 2007. Eles examinam 69 trabalhos acerca do desenho da rede, configuração das frequências e geração da tabela de horários e as combinações dessas abordagens. Farahani *et al.* (2013) também revisam artigos com foco nos níveis de decisão estratégico e tático da rede de transporte público. A análise, bastante ampla, abrange o período de 1974 até 2011, concentrando a discussão em definições, classificações, objetivos, restrições, variáveis de decisão e métodos de solução de cada artigo. Entretanto, os autores somente consideram os trabalhos de geração da tabela de horários que estão integrados às decisões de tipologia da rede de transporte público.

2.3 O PROBLEMA DE ESCALONAMENTO DE VEÍCULOS

O Problema de Escalonamento de Veículos para uma única garagem (SD-VSP, do inglês *Single-Depot Vehicle Scheduling Problem*)¹ tornou-se uma área de pesquisa amplamente estudada nos últimos 40 anos (BUNTE; KLIEWER, 2009), e pode ser definido como: dado um conjunto de viagens com tempos de partida e chegada fixos, locais de partida e chegada fixos e tempos de viagem entre todos os pares de estações, o objetivo é encontrar uma atribuição de viagens para os veículos em que:

- Cada viagem é coberta exatamente uma vez;
- Cada veículo realiza uma sequência de viagens viável e;
- Os custos totais são minimizados.

Daduna e Paixão (1995) indicam que, baseado na teoria dos grafos, o VSP pode ser definido como a determinação do conjunto de circuitos de menor custo em um grafo, de modo que todas as viagens são cobertas. Se o custo fixo associado aos veículos é elevado, o VSP corresponde a encontrar o número mínimo de veículos necessários para realizar todas as viagens.

¹Os termos VSP e SD-VSP são referentes ao mesmo problema, podendo ser encontrado na literatura com ambas as nomenclaturas.

Baseados nessa premissa, existem diversos tipos de formulações matemáticas, conforme descrito por Bunte e Kliwer (2009): o modelo de decomposição mínima (*Minimal Decomposition Model*), modelo de atribuição (*Assignment Model*), modelo de quase-atribuição (*Quasiassignment Model*), modelo de transporte (*Transportation Model*) e modelo de fluxo em redes (*Network Flow Model*). Esses modelos são utilizados para os casos com uma única garagem e são relativamente “fáceis” de resolver, visto que podem ser formulados como um problema para qual os algoritmos de tempo polinomial são conhecidos (BUNTE; KLIEWER, 2009).

Freling, Wagelmans e Paixão (2001) apresentam uma formulação simplificada de quase-atribuição para o VSP, conforme segue: Seja $N = \{1, 2, \dots, n\}$ o conjunto de viagens, numeradas de acordo com a ordem crescente de tempo de início das viagens, e $E = \{(i, j) \mid i < j, i, j \text{ compatíveis } i \in N, j \in N\}$, o conjunto de arcos correspondentes às viagens em vazio. Os nós s e t representam a garagem d . A rede de escalonamento de veículos caracteriza-se por $G = \langle V, A \rangle$, sendo direcionada acíclica com nós $V = N \cup \{s, t\}$, e arcos $A = E \cup (s \times N) \cup (N \times t)$. Um caminho de s para t na rede representa um escalonamento viável para um veículo, e um escalonamento viável completo é um conjunto de caminhos disjuntos de s para t tais que cada nó em N é coberto.

Seja c_{ij} o custo do veículo do arco $(i, j) \in A$, o qual é usualmente alguma função da viagem e do tempo ocioso. Usando variáveis x_{ij} , com $x_{ij} = 1$ se um veículo cobre a viagem j diretamente após a viagem i , e $x_{ij} = 0$ caso contrário, o modelo de quase-atribuição do VSP pode ser formulado como:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$s.t. \quad \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N, \quad (2)$$

$$\sum_{i:(i,j) \in A} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N, \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (4)$$

A função objetivo (1) busca minimizar os custos de alocação dos veículos. As restrições (2) e (3) garantem que cada viagem é atribuída a exatamente um antecessor e um sucessor, isto é, essas restrições garantem que a rede é particionada em

um conjunto de caminhos disjuntos de s para t . Por fim, a restrição (4) impõe o caráter binário à variável de decisão.

Quando há mais de uma garagem, o problema passa a ser definido como Problema de Escalonamento de Veículos com múltiplas garagens (MD-VSP), provado por Bertossi, Carraresi e Gallo (1987) como NP-difícil. Para o MD-VSP é possível que ônibus iniciem as viagens a partir de diferentes garagens, mas devem voltar à garagem de onde partiram ao final da jornada. O MD-VSP possui um modelo matemático bastante complexo, no qual a quantidade de variáveis e restrições é elevada para instâncias de médio e grande porte (PRATA, 2009).

Bunte e Kliwer (2009) indicam que as formulações para esse problema podem ser classificadas dentre uma dessas abordagens: modelo de commodity único (*single-commodity model*); modelo multi-commodity (*multi-commodity model*), que geralmente são extensões dos problemas de fluxo de rede do VSP; e o modelo de partição de conjuntos (*Set Partitioning Model*).

Dentre essas formulações, o modelo *multi-commodity* é o mais amplamente utilizado (RIBEIRO; SOUMIS, 1994; PEPIN *et al.*, 2009), e pode ser formulado (BERTOSSO; CARRARESI; GALLO, 1987) considerando uma rede $G^d = \langle V^d, A^d \rangle$ para cada garagem $d \in D$, em que V^d denota o conjunto de nós e A^d o conjunto de arcos. Ainda, T representa o conjunto de viagens e V^d é um conjunto que contém um nó para cada viagem $i \in T$ e um par de nós, $o(d)$ e $e(d)$, que representam o início e o fim de uma designação do veículo associado à garagem d , respectivamente. Assim, $V^d = \{o(d), e(d)\} \cup T$. No conjunto A^d existem três tipos de arcos: arcos *pull-in*, *pull-out* e de conexão. Existe um arco *pull-in* $(o(d), i)$ para cada viagem do nó $i \in T$. Simetricamente, existe um arco *pull-out* $(i, e(d))$ para cada viagem do nó $i \in T$. Finalmente, existe um arco de conexão (i, j) para cada par de nós de viagens, i e $j \in T$. O custo c_{ij} de um arco $(i, j) \in A^d$ é igual aos custos de viagem e de espera associados a ele. Considera-se também as variáveis binárias x_{ij} , $(i, j) \in A^d$, $d \in D$, em que $x_{ij} = 1$ se o arco (i, j) for atendido e, $x_{ij} = 0$ caso contrário.

O MD-VSP pode ser formulado como se segue:

$$\min \sum_{d \in D} \sum_{(i,j) \in A^d} c_{ij} x_{ij}^d \quad (5)$$

$$s.t. \quad \sum_{d \in D} \sum_{j: (i,j) \in A^d} x_{ij}^d = 1 \quad \forall i \in T \quad (6)$$

$$\sum_{j: (o(d),j) \in A^d} x_{o(d),j}^d \leq v_d \quad \forall d \in D \quad (7)$$

$$\sum_{j: (j,i) \in A^d} x_{ji}^d - \sum_{j: (i,j) \in A^d} x_{ij}^d = 0 \quad \forall i \in V^d \setminus \{o(d), e(d)\}, d \in D \quad (8)$$

$$x_{ij}^d \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A^d, d \in D \quad (9)$$

A função objetivo (5) minimiza os custos totais, enquanto a restrição (6) assegura que cada viagem seja executada apenas uma vez por veículo. Já a restrição (7) limita o número de veículos para cada garagem e a restrição (8), de conservação de fluxo, define estruturas de caminhos múltiplos para cada garagem. Por fim, os requisitos para as variáveis binárias são encontrados em (9).

Além do número de garagens, outra variante para o VSP recai sobre as características da frota utilizada no atendimento das viagens. A maioria dos problemas propostos na literatura sobre o escalonamento de veículos no transporte público considera frota homogênea ao invés de diferentes tipos de veículos (CEDER, 2011a); entretanto, na prática, mais de um tipo é utilizado. Um dos motivos para a falta de estudos sobre o tema, justificam Torrance, Haire e Machemehl (2009), é que as diferenças entre os tipos de veículos introduzem complexidades ao problema de escalonamento, pois os mesmos não podem ser arbitrariamente designados para um tipo de serviço ou rota. Tal situação representa uma simplificação de contexto, que não se sustenta em situações práticas, principalmente no transporte público. Muitos fatores práticos influenciam a inclusão de frota de ônibus heterogênea nos problemas de escalonamento de veículos, como a substituição ou a renovação das frota; novas tecnologias, como veículos com elevador para portadores de necessidades especiais; crescente demanda; reutilização de veículo de linhas de ônibus desativadas, etc. Tendo em vista esses aspectos e o foco central desta tese, na sequência, são apresentados alguns trabalhos que resolveram o escalonamento de veículos com frota heterogênea.

2.3.1 O problema de escalonamento de veículos com frota heterogênea

O problema de escalonamento de veículos com frota heterogênea (VTSP) possui os mesmos objetivos do VSP, entretanto, pode-se atribuir veículos com diferentes

capacidades para cada viagem, desde que o custo total do problema seja minimizado.

Kliewer, Mellouli e Suhl (2002) resolveram um MD-VSP com múltiplos tipos de veículos, sendo que cada tipo de veículo era designado para uma garagem específica. Previamente à resolução do problema, a frota heterogênea é distribuída nas garagens. Após esta etapa, resolvem o MD-VSP como um problema de frota homogênea, pois não há mais a necessidade de alocar os veículos para cada garagem. Eles utilizam uma rede tempo-espço para representar o problema, que não é formulado matematicamente no artigo.

A aplicação deste problema é também publicada por Kliewer, Mellouli e Suhl (2006), utilizando grandes instâncias (7068 viagens e 5 garagens). Para a resolução, os veículos são divididos pelas garagens, conforme seus tipos e linhas que atendem; na sequência, é construída uma camada de rede para cada combinação de tipo de veículo por garagem. O tempo computacional para resolver o problema é de, aproximadamente, 3 horas, utilizando suporte dos softwares CPLEX 8.0 e PTV-AG. Uma das principais contribuições dos trabalhos de Kliewer, Mellouli e Suhl (2002, 2006) é o esquema de agregação dos arcos correspondentes às viagens expressas, capaz de reduzir substancialmente o tamanho da rede tempo-espço a uma fração do seu tamanho original.

Gintner, Kliewer e Suhl (2005) também utilizam a rede tempo-espço para resolver um MD-VSP com múltiplos tipos de veículos. Adotando uma metodologia de resolução similar à de Kliewer, Mellouli e Suhl (2002, 2006), eles constroem uma camada de rede para cada combinação de tipo de veículo por garagem. O que se nota nessa aplicação da frota heterogênea, é que não há a consideração da demanda como parâmetro para o escalonamento dos veículos. Na realidade, os autores simplificam a complexidade do problema ao tratá-lo como um conjunto de vários VSP, sendo que em cada um deles há a designação de uma garagem e o tipo de veículo que será comportado por ela. Diferentemente desses modelos, que não tratam a demanda explicitamente quando da consideração da frota heterogênea, os modelos propostos nesta tese consideram a demanda de modo explícito na formulação matemática para escalonar os diferentes tipos de veículos.

Nesse trabalho, Gintner, Kliewer e Suhl (2005) apresentam um modelo de programação linear, sendo $N = 1, 2, \dots, n$ o conjunto de viagens, e D o conjunto de

garagens, considerando que em cada garagem há somente um tipo de veículo, ou seja, diferentes tipos de veículos devem ser alocados em diferentes garagens. A rede de escalonamento de veículos é definida por $G^d = \langle V^d, A^d \rangle$, correspondendo à garagem d , o qual é um grafo direcionado acíclico com nós V^d e arcos A^d . Já c_{ij} é o custo do veículo do arco $(i, j) \in A^d$, o qual é usualmente alguma função da viagem ou do tempo ocioso. O custo dos veículos de arcos representando atividade de tempo ocioso no depósito é 0. Além disso, um custo fixo para a utilização de um veículo é definido no arco de circulação. Seja $N^d(n) \in A^d$ o arco correspondente à viagem n na rede de escalonamento de veículos G^d .

A variável de decisão x_{ij}^d indica se um arco (i, j) é usado e atribuído à garagem d ou não. Para cada variável de decisão um limite superior (*upper bound*) é definido como:

$$u_{ij}^d = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{ij}^d \text{ corresponde a uma viagem da tabela de horários} \\ u^d & \text{se } x_{ij}^d \text{ corresponde a um arco de circulação, sendo } u^d \text{ a capacidade da garagem } d \\ M & \text{caso contrário, em que } M \text{ é o número máximo de veículos disponíveis} \end{cases}$$

O modelo pode então ser formulado como se segue:

$$\min \sum_{d \in D} \sum_{(i,j) \in A^d} c_{ij}^d x_{ij}^d \quad (10)$$

$$s.t. \quad \sum_{d \in D} \sum_{(i,j) \in N^d(n)} x_{ij}^d = 1 \quad \forall n \in N \quad (11)$$

$$\sum_{j:(i,j) \in A^d} x_{ij}^d - \sum_{j:(j,i) \in A^d} x_{ij}^d = 0 \quad \forall i \in V^d, \forall d \in D \quad (12)$$

$$0 \leq x_{ij}^d \leq u_{ij}^d \quad \forall (i, j) \in A^d, \forall d \in D \quad (13)$$

$$x_{ij}^d \in \mathbb{N} \quad \forall (i, j) \in A^d, \forall d \in D \quad (14)$$

A função objetivo (10) busca minimizar a soma dos custos totais dos veículos. A restrição (11) garante que cada viagem deve ser coberta por um veículo, enquanto a restrição (12) visa a conservação do fluxo da rede, indicando que o fluxo de entrada é igual ao fluxo de saída para cada nó. Já a restrição (13) garante que x_{ij}^d e u_{ij}^d possuam valores positivos e a restrição (14) assegura a integralidade de x_{ij}^d . Como neste problema cada tipo de veículo está relacionado a uma garagem, a frota heterogênea não é considerada explicitamente na sua formulação, estando intrínseca ao conjunto D .

Como método de solução, os autores apresentam uma heurística de duas fases,

que fixa algumas conexões a priori. A ideia básica da heurística é resolver primeiro um número simplificado de modelos, como um VSP para cada garagem, e então procurar por cadeias de viagens comuns em cada uma das soluções. Se a mesma sequência de viagens é incluída em cada solução, os autores classificam esta como uma “cadeia estável” e assumem que pode ocorrer na solução ótima global. As cadeias estáveis atuam como viagens na otimização exata do modelo, reduzindo-o significativamente. Esta técnica, que produz soluções muito próximas da otimalidade, é chamada de “*fix-and-optimize*”, pois primeiro fixa algumas variáveis e depois utiliza a técnica de otimização.

van den Heuvel, van den Akker e Niekerk (2008) ampliam a formulação de Gintner, Kliewer e Suhl (2005), incluindo o tipo de veículo na formulação, bem como a demanda de passageiros e possibilitando que mais de um veículo realize uma mesma viagem; entretanto os autores consideram apenas uma garagem. Assim, são propostas duas novas formulações: na primeira, mais de um tipo de veículo pode atender a uma viagem, tornando o problema de difícil resolução; e na segunda, que visa minimizar em partes a complexidade da primeira, permite-se que vários veículos do mesmo tipo atendam a mesma viagem, sendo que os ônibus são distribuídos uniformemente no tempo. Se, por exemplo, há uma viagem a cada hora, e serão necessários dois ônibus de um determinado tipo, um veículo sairia do terminal a cada meia-hora. Isso é obtido através da inclusão de viagens de serviço adicionais na rede tempo-espaco. Esse problema, ao flexibilizar a frota, aumenta significativamente a complexidade de resolução computacional se comparado ao VSP para um único tipo de veículo.

O objetivo dos escalonamentos dos diferentes tipos de veículos para executar as viagens é sempre atender a demanda, previamente conhecida, considerando que os veículos se deslocam a partir de uma única garagem. Para o primeiro problema, que permite que diferentes tipos de ônibus possam realizar uma mesma viagem, tem-se V como o conjunto de nós da rede tempo-espaco, A como o conjunto de arcos, e $N = 1, 2, \dots, n$ como o conjunto de viagens. A rede de escalonamento de veículos é definida por $G = \langle V, A \rangle$, a qual é um grafo direcionado acíclico com nós V e arcos A . Considere ainda $N(n) \in A$ o arco correspondente à viagem n na rede G de escalonamento de veículos, associado ao tipo de veículo permitido para n .

Para cada nó $v \in V$ os conjuntos (i, j) e (j, l) denotam o conjunto de arcos de entrada e saída, respectivamente; e $f \in F_{ij}$ o veículo utilizado no arco $(i, j) \in A$, sendo F o conjunto de todos os veículos disponíveis. Por c_{ijf} entende-se o custo do veículo f que trafega no arco $(i, j) \in A$, sendo este custo uma função do tempo de viagem e do tempo ocioso. A variável de decisão x_{ijf} é referente à quantidade de fluxo do veículo f através do arco (i, j) . Define-se p_f como a capacidade de passageiros do ônibus tipo f e P_{ij} como o número esperado de passageiros no arco (i, j) . Assim, a formulação é apresentada como se segue:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{f \in F_{ij}} c_{ijf} x_{ijf} \quad (15)$$

$$s.t. \quad \sum_{f \in F_{ij}} p_f x_{ijf} \geq P_{ij} \quad \forall (i, j) \in S \quad (16)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{f \in F_{ij}} x_{ijf} - \sum_{(j,l) \in A} \sum_{f \in F_{jl}} x_{jlf} = 0 \quad \forall j \in V \quad (17)$$

$$x_{ijf} \in \mathbb{N} \quad \forall (i, j) \in A, \forall f \in F_{ij} \quad (18)$$

A função objetivo (15) minimiza o custo total dos veículos. A restrição (16) permite que múltiplos tipos de veículos sejam selecionados, desde que suas capacidades conjuntas sejam superiores à demanda, já a restrição (17) assegura as propriedades de fluxo da rede. A restrição (18) garante que variável de decisão x_{ijf} seja não-negativa e inteira.

Para o segundo problema, van den Heuvel, van den Akker e Niekerk (2008), permitem que vários veículos de um mesmo tipo atendam a uma viagem. Para tanto, deve-se substituir a restrição (16) por outro conjunto de restrições (19-21). Neste caso, acrescenta-se à formulação uma nova variável binária, y_{fn} , igual a 1 se a viagem n for servida pelo veículo do tipo f ; e 0, caso contrário. Também, b_{fn} refere-se ao número de ônibus do tipo f que é necessário para transportar o total de passageiros esperado na viagem n . Por fim, N_{fn} denota o conjunto de arcos de viagens do ônibus tipo f associado com a viagem n . As restrições a serem adicionadas são:

$$\left(\sum_{(i,j) \in N_{fn}} \frac{1}{b_{fn}} x_{ij} \right) - y_{fn} = 0 \quad \forall f \in F, \forall n \in N \quad (19)$$

$$\sum_{f \in F} y_{fn} = 1 \quad \forall n \in N \quad (20)$$

$$y_{fn} \in \{0, 1\} \quad \forall f \in F, \forall n \in N \quad (21)$$

A restrição (19) possibilita que mais de um veículo do mesmo tipo realize uma viagem; a (20) garante que todas as viagens sejam cobertas por veículos do tipo f ; e a restrição (21) assegura o caráter binário da variável y_{fn} . Cabe ressaltar que, para este caso, quando vários ônibus são necessários para atender a demanda de uma viagem, esta é dividida em várias viagens de um ônibus, espalhadas uniformemente no tempo. Se, por exemplo, há uma viagem por hora e são necessários dois veículos de determinado tipo, cada um deles deve partir a cada meia-hora. Isso é obtido adicionando-se arcos de serviço (viagens) na rede tempo-espaco em um pré-processamento à resolução do problema.

Após encontrado o escalonamento adequado, os autores realizam pequenas modificações na tabela de horários previamente utilizada, através da aplicação de uma Metaheurística (*Simulated Annealing*), com o objetivo de melhor adequar os veículos à demanda existente para cada viagem. São testadas instâncias reais da companhia de ônibus holandesa Connexxion. Os resultados deste problema, integrando a frota heterogênea e as modificações na tabela de horários, indicam economias de até 8% se comparados aos resultados do problema resolvido por Kliewer, Mellouli e Suhl (2006), no qual não havia sincronização com a tabela de horários. Dentre os trabalhos encontrados na literatura, o de van den Heuvel, van den Akker e Niekerk (2008) é o que apresenta maiores similaridades com as novas abordagens propostas nesta tese. Entretanto, nessas novas abordagens, a modificação da tabela de horários e o escalonamento da frota heterogênea são realizados de modo simultâneo, a partir da formulação matemática integrada desses problemas, não necessitando de pós-processamento para ajustar os horários de partida das viagens.

Laurent e Hao (2008) integram ao VTSP o problema de escalonamento da tripulação, levando em consideração viagens de longa distância e apenas uma garagem. Para resolver o problema, eles aplicam uma Metaheurística GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*), na qual a construção da solução inicial é baseada na técnica de programação por restrições e a fase de busca local utiliza um mecanismo de vizinhança composta (*Ejection Chain*). Para validar a qualidade desse

modelo integrado, os autores o comparam com a abordagem sequencial, conduzindo experimentos computacionais com sete instâncias reais de diferentes configurações e dois tipos de ônibus. Os resultados indicam o predomínio da abordagem integrada sobre a sequencial, tanto em termos de economia no número de motoristas quanto em termos de poder computacional para resolver as instâncias de maior porte. Mesmo considerando a frota heterogênea, neste modelo também não se utiliza a demanda como um parâmetro para o escalonamento dos veículos, sendo esses direcionados para viagens específicas, classificadas de acordo com características não definidas no artigo. O fato de não se conhecer essas características, que poderiam ser especificações de trajetos, especialização do motorista para dirigir determinado tipo de ônibus ou a própria demanda, direcionam este problema à mesma situação aplicada em Kliwer, Mellouli e Suhl (2002, 2006) e Gintner, Kliwer e Suhl (2005), no qual são resolvidos vários problemas de frota homogênea, um para cada tipo de veículo, e não, efetivamente, o escalonamento de veículos com frota heterogênea.

Em trabalho posterior, Laurent e Hao (2009) consideram a frota heterogênea no contexto de um MD-VSP e o formulam como um problema de coloração de grafos. Eles testam sete instâncias reais de transporte intermunicipal, com oito categorias de veículos. Uma Busca Tabu é desenvolvida com o objetivo de minimizar o número total de veículos, indicando bons resultados em termos de qualidade de solução e baixo tempo computacional.

Com um foco mais abrangente, Oughalime *et al.* (2009) demonstram um esforço inicial com relação à inclusão de frota heterogênea na formulação do problema de escalonamento de ônibus e tripulações. Os autores apresentam um modelo de programação por objetivos, desenvolvido especificamente para os ônibus do Campus da Universidade Kebangsaan, na Malásia. Eles propõem uma formulação específica ao problema estudado, considerando cinco tipos diferentes de veículos. Entretanto, o problema é somente formulado, não sendo apresentados resultados nem sugestões de métodos para a sua resolução.

Dentre esses trabalhos analisados, o de van den Heuvel, van den Akker e Niekerk (2008) é o que mais se aproxima das novas abordagens propostas nesta tese. Entretanto, esses autores realizam o escalonamento de veículos e as modificações na tabela de horários de modo sequencial, enquanto nos modelos propostos a resolução é feita

de modo integrado. Outra vantagem dos novos modelos é que eles são resolvidos na otimalidade para a maioria das instâncias testadas, sendo que no modelo VTSP-SCT não há necessidade de nenhum suporte heurístico para a resolução, inclusive para instâncias de grande porte.

2.4 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DA TABELA DE HORÁRIOS E ESCALONAMENTO DE VEÍCULOS

A abordagem simultânea da modificação da tabela de horários e do escalonamento de veículos é pouco explorada de modo integrado na literatura (GUIHAIRE; HAO, 2010), e pode gerar benefícios ao sistema de transporte público. Nos artigos pesquisados, observou-se que a resolução conjunta dos problemas de geração ou modificação da tabela de horários e o escalonamento de veículos pode ocorrer de três modos: 1) pelo acréscimo de janelas de tempo ao modelo de escalonamento de veículos; 2) pela otimização conjunta da tabela de horários e do escalonamento dos veículos; ou 3) pela geração sequencial da tabela de horários, seguida pelo escalonamento dos veículos e posterior retroalimentação deste resultado na otimização da tabela de horários.

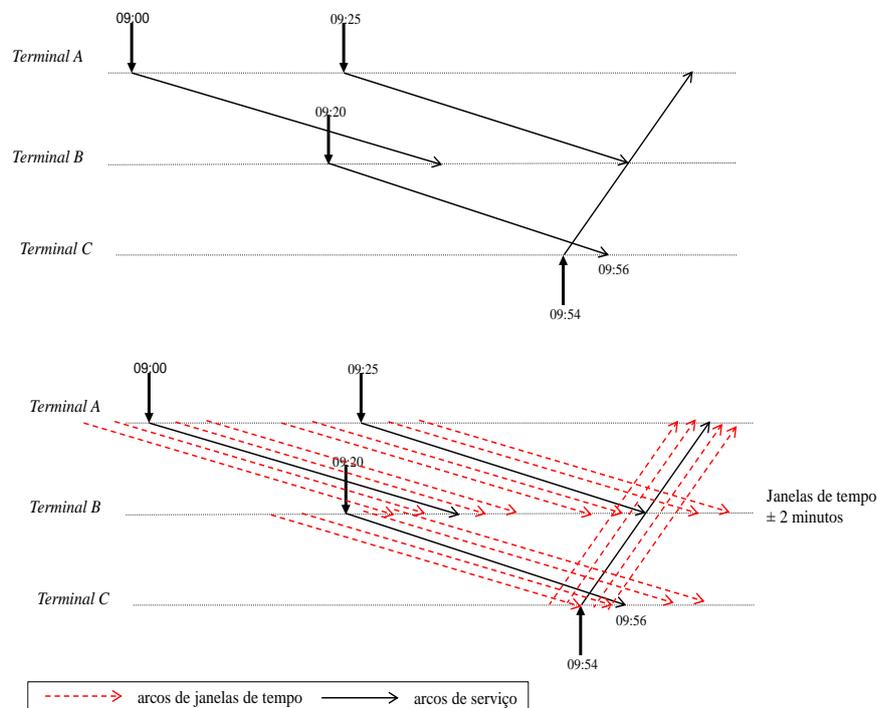
Ferland e Fortin (1989) consideram o problema de escalonamento de veículos com janelas de tempo e introduzem uma heurística para a resolução. A abordagem consiste em identificar os pares de viagens que oferecem bons custos de oportunidade para a redução do custo total do problema e, assim, encontrar formas de modificar o horário de partida de uma viagem, dentro de um intervalo de janela de tempo, e garantir a sua ligação com uma viagem compatível. Testes computacionais indicaram que os custos são minimizados quando são flexibilizados os horários de partida das viagens.

Ampliando o número de garagens, Desaulniers, Lavigne e Soumis (1998) formularam o MD-VSP com janelas de tempo como um modelo de fluxo *multi-commodity* não-linear inteiro. O objetivo do problema consiste em alocar a frota para executar todas as tarefas respeitando as restrições de janela de tempo e capacidade dos veículos. Para a resolução foi utilizada a técnica de geração de colunas incorporada em uma estrutura *branch-and-bound*. A versão heurística e a versão ótima do algoritmo foram testadas em instâncias aleatórias. Os resultados indicaram soluções

ótimas para instâncias pequenas e médias e boas soluções heurísticas (limitando o número de nós da árvore a serem explorados) para grandes instâncias (600 tarefas e 5 garagens), em tempo razoável (uma hora).

Kliewer, Bunte e Suhl (2006) também resolvem o MD-VSP com janelas de tempo. Baseando-se em uma rede tempo-espço, arcos de janela de tempo são adicionados ao conjunto dos demais arcos da rede, originando o conjunto de “arcos estendidos”. Os arcos de janela de tempo, nesta abordagem, são caracterizados como “arcos sombra” dos arcos de serviço originais, e representam o deslocamento (adiantamento ou atraso) de uma viagem em alguns minutos. Para cada viagem, arcos de janela de tempo são inseridos e assumem valores discretos, geralmente de 1 ou 2 minutos. Na Figura 3 é apresentado um exemplo com quatro arcos de serviço e uma janela de tempo de ± 2 minutos para cada viagem. Este exemplo demonstra que, ao se antecipar a viagem que inicia às 9h20 no terminal B em 2 minutos, esta viagem poderá ser compatível com a viagem que inicia às 9h54 no terminal C.

Figura 3 – Multiplicação dos arcos de serviço para uma janela de tempo de ± 2 minutos



Fonte: adaptado de Kliewer, Bunte e Suhl (2006) e Kliewer, Amberg e Amberg (2012).

A inserção de arcos de janela de tempo pode gerar um número excessivo de arcos, exigindo tempo de solução computacional extremamente alto. Em virtude disso,

Kliewer, Bunte e Suhl (2006) e Kliewer, Amberg e Amberg (2012) desenvolveram técnicas de pré-processamento para evitar criação de arcos de janela de tempo que não possibilitam a compatibilidade com outras viagens de serviço, quando comparado com o arco de serviço original. No pré-processamento, todos os arcos de janela de tempo são checados para identificar se algum deles possibilita a conexão com uma nova viagem de serviço. Se isso ocorre, o arco é mantido na rede, caso contrário, é excluído. Somente um arco, considerando o arco de serviço e todos os arcos de janela de tempo gerados a partir dele, pode ser mantido na rede. Esse procedimento faz com que a implementação computacional para os arcos de janela de tempo exija um tempo elevado.

Como o modelo torna-se altamente complexo em virtude da inclusão dos arcos de janela de tempo, em Kliewer, Bunte e Suhl (2006) são apresentadas duas heurísticas para ajudar na resolução do escalonamento dos veículos. A primeira, *trip shortening*, usa uma análise do tipo “e se”, resolvendo o escalonamento de veículos para a tabela de horários original com janelas de tempo iguais para todas as viagens. A solução indica as viagens em que os deslocamentos no horário conduzem a conexões adicionais e, conseqüentemente, reduzem o número de veículos. Assim, a solução do problema é obtida modificando as viagens indicadas. A segunda, uma heurística de corte, utiliza as janelas de tempo em viagens específicas, como as alocadas em horários de pico. Este método de solução proporcionou igual redução no número de veículos, se comparada à primeira, mas com tempo computacional muito menor.

Referente ao modelo matemático, cada novo arco de janela de tempo adicionado requer a inclusão de uma variável de fluxo; entretanto, não há a necessidade de formular matematicamente novas restrições. As restrições equivalentes à inclusão de novos nós na rede tempo-espaco são implicitamente adicionadas no modelo pela consideração do conjunto de arcos estendidos, sem que a estrutura do modelo seja alterada. Dada a conotação de fluxo apresentada nesse modelo, o arco de janela de tempo se traduz em uma viagem para trás ou para a frente no tempo, que pode implicar em modificação explícita na tabela de horários ou, simplesmente, ser desconsiderada, dado o intervalo mínimo sob o qual é aplicada. Nesse último caso, os gestores optam por não divulgar à população as modificações nos horários de partida das viagens, tendo em vista que as alterações de poucos minutos são

inerentes aos erros de medição no planejamento, de acordo com as particularidades do trânsito. Essa abordagem impulsionou o desenvolvimento, neste trabalho, de uma nova aplicação de janelas de tempo, com maior facilidade de implementação computacional e sem necessidade de pré-processamento para resolução, conforme descrito na Seção 5.1.

Em publicação posterior, Kliewer, Amberg e Amberg (2012) adicionam o problema de escalonamento de tripulação ao trabalho apresentado por Kliewer, Bunte e Suhl (2006), e utilizam uma combinação de relaxação Lagrangeana e geração de colunas para resolver o problema integrado. As heurísticas desenvolvidas no trabalho de Kliewer, Bunte e Suhl (2006) também são utilizadas como suporte para a resolução do problema. A partir de instâncias disponíveis na literatura, economias no número de veículos e tripulação são encontradas nessa abordagem integrada se comparado a trabalhos anteriores (HUISMAN; FRELING; WAGELMANS, 2005; STEINZEN *et al.*, 2010), que não utilizaram janelas de tempo.

Guihaire e Hao (2008b) combinam a geração da tabela de horários e o problema de escalonamento de veículos com uma única garagem, a fim de minimizar o tempo total de espera dos passageiros nos terminais. Eles propõem uma heurística de busca local iterada para resolver o problema e baseiam os experimentos em uma rede de trânsito urbano da França. A pesquisa é expandida em Guihaire e Hao (2010) através da adição do objetivo de minimizar o tempo de viagens vazias. A heurística proposta no trabalho anterior é utilizada e em cada iteração a tabela de horários é alterada e o escalonamento ótimo é recomputado. A abordagem de resolução dos problemas de modo integrado apresenta maior redução de custos se comparada à abordagem sequencial, na qual primeiro é gerada a tabela de horários e depois o escalonamento dos veículos.

Já Fournier (2010) utiliza o problema de geração de tabela de horários como base para a solução do problema de escalonamento de veículos. Para a geração da tabela de horários, são necessárias as faixas horárias iniciais e as demandas das viagens na ida e na volta de uma linha de ônibus. Baseando-se nessas informações, o número total de viagens por linha é definido, através de um modelo de programação inteira. A partir deste ponto, as viagens são geradas com uma heurística gulosa, sendo constante o tempo de partida entre as viagens. Tendo a frequência de viagens,

resolve-se o problema de escalonamento de veículos de modo sequencial.

Um procedimento heurístico também é aplicado por Weiszer, Fedorko e Cujan (2010) e Weiszer (2011). Os autores implementam um algoritmo genético multi-objetivo para a integração da otimização da tabela de horários com aspectos do escalonamento de veículos. Os objetivos do problema consistem em minimizar o tempo de transferência de passageiros nos terminais e, simultaneamente, minimizar o número de veículos necessários para operar a tabela de horários apresentada. Os testes são realizados em apenas 4 linhas definidas aleatoriamente, indicando que a heurística é capaz de otimizar os objetivos conflitantes. Entretanto, dada essa pequena instância, não se pode concluir sobre a aplicabilidade da abordagem para instâncias maiores. Fedorko e Weiszer (2012) detalham a metodologia de aplicação do algoritmo e apresentam a seleção do operador de crossover (crossover de dois pontos) e o número suficiente de gerações, que possibilitam os melhores resultados.

Ibarra-Rojas e Rios-Solis (2011) abordam o planejamento da rede de ônibus de Monterrey, México, e propõem uma formulação inteira bi-objetivo para resolver os problemas de maximizar o número de sincronizações de ônibus para evitar aglomerações ao longo da rede e minimizar o número de veículos, considerando uma única garagem e único tipo de veículo. Não são realizados testes computacionais para testar os modelos. Complementarmente, em Ibarra-Rojas e Rios-Solis (2012) são apresentadas algumas considerações teóricas sobre esse problema, como a sua prova de complexidade NP-difícil e os estágios de um pré-processamento para eliminar variáveis de decisão. Para pequenas instâncias, a formulação pré-processada apresenta pelo menos 44% menos variáveis e restrições do que a formulação original. Experimentos computacionais foram realizados utilizando uma heurística de busca local desenvolvida especificamente para tratar o problema. Instâncias geradas aleatoriamente, com base em informações fornecidas por um especialista da rede de ônibus do Monterrey, foram testadas. As soluções, obtidas rapidamente para instâncias de aproximadamente 200 viagens, foram analisadas por um especialista em transportes de Monterrey e indicaram ser de boa qualidade (referente ao número de sincronizações).

Já em Ceder (2011a) há a integração da frota heterogênea e da tabela de horários. A partir da Teoria de Déficit da Função (TDF do inglês *deficit-function theory*),

diferentes tipos de veículos, já relacionados com viagens específicas, são escalonados. Conforme definição desse autor, a TDF representa o número deficitário de veículos em um terminal particular em um sistema de transporte multi-terminal. A partir dessa premissa, o problema é formulado como um fluxo de rede de custo mínimo e objetiva designar a quantidade mínima de veículos a determinada tabela de horários. Uma heurística é desenvolvida para resolver o problema e são apresentados três exemplos fictícios para explicar seus princípios. O procedimento heurístico permite a inclusão de mudanças nos horários de partida das viagens, dentro de um limite de tolerância (adiantar ou atrasar), seguindo alguma regra contida na TDF.

Ceder (2011b) considera as duas primeiras fases do planejamento do transporte público e propõe a construção de tabelas de horários alternativas conforme a demanda de passageiros, definindo os tipos de veículos que podem atendê-las, a partir de um procedimento heurístico. Tendo como ponto de partida as tabelas de horários prévias, o escalonamento dos veículos é realizado heurísticamente, incorporando componentes da TDF, já aplicada por Ceder (2011a), que tem como base o número de veículos necessários em um terminal. De modo bem simplificado, a heurística consiste em ordenar os veículos em ordem decrescente de custo, para após resolver o problema de escalonamento de veículos de diferentes tipos usando a TDF. A introdução de viagens expressas ao escalonamento dos veículos também é definido através da heurística, possibilitando a redução do tamanho da frota. Esse procedimento é testado com dados reais, originários de empresas de ônibus de Auckland, Nova Zelândia.

Recentemente, Ceder, Hassold e Dano (2013) desenvolveram uma metodologia multi-objetivo para criar horários de ônibus usando vários tamanhos de veículos, com dois objetivos simultâneos: primeiro, minimizar o tempo de espera dos passageiros nos terminais e, segundo, minimizar o desvio de número de passageiros observados e desejados em cada ônibus. Para tanto, duas heurísticas foram desenvolvidas e testadas em instâncias de Auckland, Nova Zelândia, demonstrando bons resultados em termos de redução de espera dos passageiros e melhor aproveitamento dos veículos. Entretanto, o modelo só pode ser aplicado a linhas de ônibus individuais, não podendo considerar rotas interligadas ou um conjunto de linhas. Para tanto, os autores sugerem que pesquisas futuras devem ser realizadas nesta direção,

sincronizando o escalonamento de veículos de diferentes tipos e a geração da tabela de horários, pois este tipo de análise combinada “irá demonstrar como minimizar o custo operacional, melhorando, simultaneamente, a qualidade dos serviços ao permitir o escalonamento de vários tamanhos de ônibus” (p. 216). É nesta direção, de minimizar custos operacionais e atender a demanda de passageiros com qualidade, que são desenvolvidos os três modelos desta tese.

No Capítulo 3, apresentado na sequência, são definidos os procedimentos metodológicos que nortearam este trabalho.

3 MÉTODO DO ESTUDO

Para nortear a aplicação de técnicas de pesquisa operacional na resolução de problemas, há uma sequência de fases usuais (WAGNER, 1986; ANDRADE, 1998; GOLDBARG; LUNA, 2005; ARENALES *et al.*, 2007; HILLIER; LIEBERMAN, 2010), que podem ser sumariamente descritas como: (i) definição do problema; (ii) construção do modelo; (iii) solução do modelo; (iv) validação do modelo e (v) implementação da solução. Na prática, essas fases influenciam-se mutuamente durante a realização do trabalho, podendo ocorrer simultaneamente. O fluxo de análise quantitativa desta tese seguirá essa estrutura de fases, conforme descrito nas seções seguintes.

3.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O problema integrado de geração da tabela de horários e escalonamento de veículos com frota heterogênea combina as duas primeiras etapas do planejamento operacional do transporte público. Dado um conjunto de viagens com um horizonte de planejamento fixo, propõe-se minimizar o custo do escalonamento ou o número total de veículos.

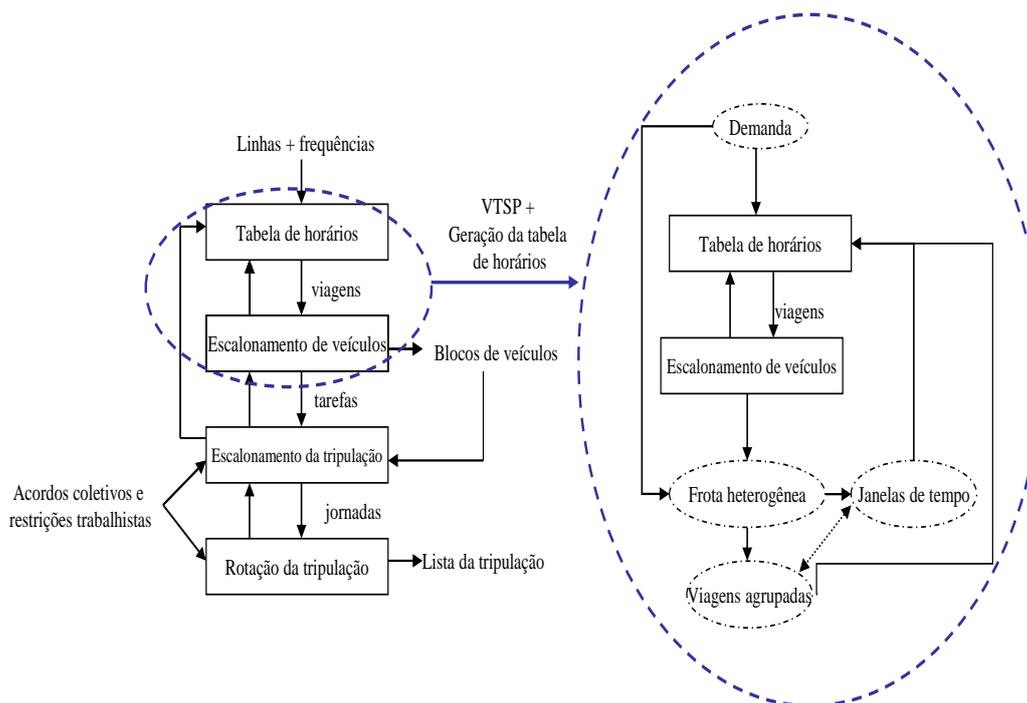
Cada viagem de ônibus ocorre em uma rede de transporte determinada por um conjunto de nós e um conjunto de arcos. Cada nó da rede representa uma localização geográfica (terminal) e uma posição no tempo. A localização geográfica de uma viagem inclui um terminal de ônibus inicial e um final. Muitos terminais adicionais podem aparecer durante a rota do ônibus, entretanto esses terminais não são relevantes para o propósito do escalonamento. Já cada arco da rede representa o tempo de deslocamento do veículo em movimento (transportando passageiros ou vazio) ou o tempo de veículo parado na garagem ou em um terminal. Uma viagem

entre os nós (i, j) é definida com base em quatro dados:

- (t_i) horário de partida da viagem
- (s_i) terminal de partida da viagem
- (t_j) horário de chegada da viagem
- (s_j) terminal de chegada da viagem

Assim, uma viagem (i, j) caracteriza-se como uma 4-tuple $(t_i(i), s_i(i), t_j(j), s_j(j))$, sendo a definição de viagem a noção fundamental da teoria de escalonamento de veículos (PALÚCH, 2011). A partir desses esclarecimentos iniciais, na Figura 4 apresenta-se um esquema simplificado dos fatores incidentes sobre o problema tratado nesta tese.

Figura 4 – Visão esquemática das abordagens propostas



Fonte: Elaborado pela autora.

A Figura 4 indica como as duas fases iniciais do planejamento são integradas no problema tratado, a partir da definição das viagens em uma tabela de horários previamente estabelecida. Conhecendo a demanda de cada viagem e utilizando a frota heterogênea, pode-se escalonar os veículos e alterar a tabela de horários de

modo simultâneo. A resolução do problema integrado pode ser realizada por meio de duas metodologias, que impactam de modo distinto na tabela de horários.

A primeira consiste no agrupamento de viagens que possuem mesmo terminal de chegada e partida e distam os horários de partida em poucos minutos. A partir da definição do intervalo em que viagens podem ser agrupadas, as mesmas têm suas demandas somadas e o modelo deve selecionar os veículos mais adequados para atendê-las. Dessa forma, a demanda de duas ou mais viagens pré-definidas pode ser atendida por apenas um veículo, dadas as possibilidades da frota heterogênea. O reflexo de tal agrupamento é a diminuição do número de viagens da tabela de horários e, conseqüentemente, a redução do número de veículos necessários para atender à população. Exemplos práticos da aplicação desta metodologia, e que motivaram o seu desenvolvimento, são situações em que ônibus com mesmo itinerário possuem partidas muito próximas, sendo que o ônibus que parte primeiro lota rapidamente e é ultrapassado pelo que partiu na sequência, com boa parte dos assentos vazios. Conhecida a demanda de cada um desses veículos, pode-se definir um único veículo de maior capacidade, apto a atender a demanda de ambos, fechando um dos horários de partida da tabela. Além dessa, outra situação envolve a aquisição de novos veículos para a substituição de veículos antigos. Conhecendo as possibilidades de agrupamento de viagens, os gestores podem optar por veículos com capacidade suficiente para atender a demanda somada dessas viagens, mantendo a qualidade do atendimento aos passageiros.

Já a segunda metodologia refere-se a aplicação de janelas de tempo. Essas janelas consistem em pequenos intervalos de tempo em que uma viagem pode ter seu horário de partida atrasado ou adiantado, a fim de possibilitar compatibilidade de viagens que anteriormente não era possível. Por exemplo, imagine um veículo que chega em um terminal as 10h e outro que parte do mesmo terminal as 9h58min. Nesta situação, seriam necessários dois veículos; entretanto, se forem aplicadas janelas de tempo de 2 minutos, pode-se adiantar a chegada da viagem das 10h em 2 minutos e este mesmo veículo atender a viagem das 9h58min. A compatibilidade dos veículos é definida, também, pela demanda de cada viagem.

A aplicação tanto do agrupamento das viagens quanto das janelas de tempo é realizada em intervalos curtos de tempo, com poucos minutos. Isso porque, busca-se

evitar uma longa espera nos terminais por parte dos passageiros e garantir a qualidade do serviço. A integração dessas metodologias ao problema de escalonamento dos veículos, somente é possível devido às características da frota heterogênea; além disso, possibilitam, simultaneamente, ajustar a tabela de horários e definir os veículos mais adequados para atender cada uma das viagens.

3.2 CONSTRUÇÃO DOS MODELOS

Para atingir o objetivo proposto nesta tese de formular e resolver de modo integrado os problemas de geração da tabela de horários e de escalonamento de veículos com frota heterogênea, foram desenvolvidos três modelos distintos, baseando-se na formulação do modelo de escalonamento de veículos para frota heterogênea (VTSP) proposto por van den Heuvel, van den Akker e Niekerk (2008). A principal diferença entre o modelo de van den Heuvel, van den Akker e Niekerk (2008) e os propostos nesta tese, é que estes permitem que somente um veículo realize uma viagem de serviço e atenda a demanda satisfatoriamente, já aquele possibilita que vários veículos, de diferentes tipos, possam realizar uma mesma viagem de serviço. A opção por limitar o número de veículos por viagem vai ao encontro das práticas de escalonamento utilizadas na maioria das empresas de transporte público brasileiras.

O modelo VTSP, aplicado nesta tese, considera o conjunto F como os diferentes tipos de veículos (frota heterogênea). Ainda, a variável binária x_{ijf} é igual a 1 se o arco (i, j) é atendido pelo veículo do tipo $f \in F$, e 0 caso contrário. Cada nó do arco (i, j) é uma combinação de (s, t) , sendo s um terminal e t um horário de viagem (ver Capítulo 4 para detalhamentos). Finalmente, c_{ijf} é o custo do veículo do tipo $f \in F$ que trafega pelo arco $(i, j) \in A$ é uma composição dos tempos de deslocamento e de espera. Com base na estrutura da rede tempo-espço, o VTSP é formulado como:

$$VTSP : \quad \min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{f \in F} c_{ijf} x_{ijf} \quad (22)$$

$$s.t. \quad \sum_{(i,j) \in A} x_{ijf} - \sum_{(j,l) \in A} x_{jlf} = 0 \quad \forall j \in N, \forall f \in F \quad (23)$$

$$\sum_{f \in F} x_{ijf} = 1 \quad \forall (i, j) \in A^{se} \quad (24)$$

$$x_{ijf} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A^{se}, \forall f \in F \quad (25)$$

A função objetivo (22) minimiza o custo total dos veículos. A restrição (23) garante as propriedades de fluxo da rede e a (24) garante que cada viagem de serviço seja atendida exatamente uma vez por um único veículo. A restrição (25) define o domínio das variáveis x_{ijf} . Se o custo fixo de cada veículo é alto, o VTSP corresponde a encontrar o menor número possível de veículos para realizar todas as viagens de serviço. Assim, a função objetivo pode ser facilmente modificada, minimizando o número total de veículos escalonados, considerando-se o custo associado a cada arco de circulação.

Interessante ressaltar que no modelo de van den Heuvel, van den Akker e Niekerk (2008), ao possibilitar a passagem de mais de um veículo por arco de serviço, é necessário adicionar a restrição (26), a qual assegura que a capacidade dos veículos seja suficiente para atender a demanda e considerar x_{ijf} inteiro.

$$\sum_{f \in F} p_f x_{ijf} \geq P_{ij} \quad \forall (i, j) \in A^{se} \quad (26)$$

Esta restrição torna-se desnecessária no modelo VTSP proposto, visto que esta condição é intrínseca à formulação da rede tempo-espço, na qual somente um veículo pode transitar em um arco de serviço; logo, todos os veículos passíveis de serem selecionados possuem capacidade adequada para atender a demanda.

A partir dessa formulação, foram elaborados os três modelos que visam a combinação da otimização do VTSP e da tabela de horários. O primeiro deles consiste na aplicação de janelas de tempo no escalonamento dos veículos e foi denominado nesta tese VTSP-TW (do inglês *Vehicle Type Scheduling Problem with Time Windows*). Este modelo será detalhadamente descrito na Seção 5.1. O segundo modelo, escalona a frota heterogênea e realiza modificações na tabela de horários de modo simultâneo. Para tanto, são realizados agrupamentos sequenciais nas viagens compatíveis, originando o modelo denominado VTSP-SCT (do inglês *Vehicle Type Scheduling Problem with Sequential Change of Timetable*), descrito na Seção 5.2.1. Já o terceiro modelo é bastante similar ao modelo VTSP-SCT, entretanto, apresenta maior flexibilidade na geração da tabela de horários, pois as viagens são agrupadas de modo combinatório e não sequencial. Esse modelo foi definido neste trabalho como VTSP-CCT (do inglês *Vehicle Type Scheduling Problem with Combinatorial Change*

of Timetable) e é apresentado na Seção 5.2.2. Dadas as características de rede com fluxo *multicommodity* desses modelos, quando há mais de um tipo de veículo a ser escalonado, eles possuem complexidade NP-difícil (EVEN; ITAI; SHAMIR, 1976; BERTOSSI; CARRARESI; GALLO, 1987; van den HEUVEL; van den AKKER; NIEKERK, 2008).

3.3 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DOS MODELOS

Os modelos VTSP-TW e VTSP-SCT são solucionados na otimalidade para a grande maioria das instâncias testadas, utilizando o software IBM® ILOG® CPLEX® Optimization Studio V12.5. A opção por este software foi em decorrência do mesmo ter o melhor desempenho em termos de tempo de execução para problemas lineares de otimização se comparado a outros solvers comerciais (MEINDL; TEMPL, 2012)¹. Já o modelo VTSP-CCT, por ser muito mais difícil dada a característica combinatória do agrupamento das viagens, necessita de suporte heurístico para a sua resolução. Assim, desenvolveu-se um procedimento de geração de colunas, detalhado no Capítulo 6.

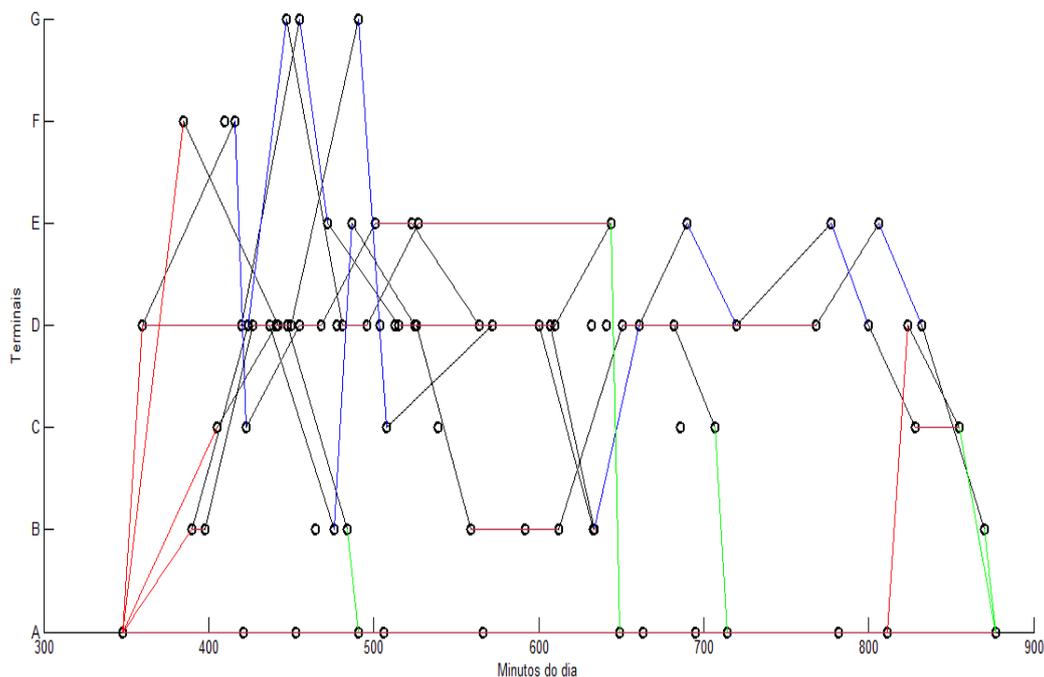
3.4 VALIDAÇÃO DOS MODELOS

O procedimento de validação dos modelos desenvolvidos nesta tese foi dividido em duas etapas: (i) validação do desenho da rede tempo-espço e (ii) validação dos modelos matemáticos. O algoritmo para gerar a rede tempo-espço (descrita no Capítulo 4), utilizada como base para a aplicação dos modelos, foi escrito em linguagem de programação C++. O detalhamento dos procedimentos para a criação de cada um dos arcos que compõem a rede é apresentado no Apêndice A. Para verificar a adequação da rede às instâncias utilizadas, desenvolveu-se um *script* para o software Matlab R2013a, com o intuito de imprimir o grafo da TSN, conforme Figura 5. A partir desse grafo, diversas análises de adequabilidade da rede foram realizadas, até que se chegou à implementação ótima da rede.

No eixo “x” da Figura 5 estão representados os minutos de um dia, que variam de

¹Foram testados os solvers CPLEX (12.4.0.0), GUROBI (4.6.1), SCIP-C (2.1.1 usando CPLEX como LP-solver), SCIP-L (2.1.1 usando CLP como LP-solver), SCIP-S (2.1.1 usando SoPlex como LP-solver), CBC (2.7.4), XPRESS (7.2.1), GLPK (4.47) e LP SOLVE (5.5.2)

Figura 5 – Grafo da TSN gerado para validação da rede



Fonte: Grafo gerado pelo Matlab R2013a.

0 até 1439¹, e no eixo “y” são descritos os terminais. Além disso, cada um dos arcos do grafo apresenta uma coloração diferente, o que facilita a verificação da exatidão da representação. A aplicação deste grafo também foi realizada para analisar as soluções dos modelos, possibilitando identificar os blocos de cada um dos veículos.

Os códigos para gerar os modelos de programação linear inteira também foram escritos em linguagem C++ e resolvidos utilizando o software IBM[®] ILOG[®] CPLEX[®] Optimization Studio V12.5. Para obter garantias de que os modelos estavam adequados aos objetivos do estudo, utilizou-se instâncias reais para a realização de testes, possibilitando comparar os resultados dos modelos com os percebidos na realidade. Além dessas instâncias, também foram desenvolvidas instâncias de grande porte aleatórias para verificar a validade e aplicabilidade dos modelos. A descrição dessas instâncias é realizada nas seções seguintes.

3.4.1 Descrição das instâncias reais

As instâncias reais utilizadas nesta tese são oriundas do sistema de transporte público da cidade de Santa Maria (RS). Santa Maria está localizada no centro do Es-

¹Para a instância exemplificada na Figura 5 o último horário de atendimento no dia ocorre no minuto 890.

tado do Rio Grande do Sul e possui, aproximadamente, 273.000 habitantes (IBGE, 2013), dos quais estima-se que 120.000 sejam usuários diários do serviço de transporte público conforme a Associação dos Transportadores Urbanos de Passageiros de Santa Maria (ATU, 2013). Esse alto índice de usuários está diretamente relacionado à economia da cidade, baseada no setor de serviços públicos, em especial no ensino universitário e nas forças armadas.

No ano de 2010 o sistema de Bilhetagem Eletrônica foi implantado na cidade e hoje conta com aproximadamente 170 mil cartões em operação (ATU, 2013). Ainda, conforme dados dessa Associação, atualmente na cidade transitam 236 veículos coletivos, que realizam 3.890 viagens diariamente.

Quanto ao processo de seleção das instâncias testadas, optou-se por analisar as linhas de ônibus que atendem a região leste da cidade e possuem final de linha no Campus da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), pois nelas circulam grande parte dos usuários do transporte coletivo e concentra-se o maior número de linhas de ônibus. Considerando-se o atendimento de segunda à sexta-feira, pelo Campus da UFSM passam 24 linhas de ônibus, divididas em linhas do Centro (196A, 196B, 196E e 196D), Circular (1965, 196G, 196H, 1969 e 1966), e Tancredo Neves (196I, 196J, 196M, 196V, 196Q, 196X, 196Y, 196K, 196N, 196O, 196P, 196Q, 196X, 196Y e 196Z). Na Tabela 1, são detalhadas as instâncias reais utilizadas nos testes computacionais.

Tabela 1 – Descrição das instâncias reais

Instância	# linhas	# viagens	# terminais	# veículos utilizados
Tancredo Neves	15	60	8	15
Centro e Circular	9	469	9	43
Total	24	530	16 ^a	58

Fonte: Dados do mês de Maio de 2013 (ATU, 2013).

^a O somatório de terminais perfaz 16 em virtude do terminal Campus estar presente nas duas instâncias quando consideradas em separado. Entretanto, quando analisadas em conjunto, o mesmo é contabilizado apenas uma vez.

O transporte público na cidade de Santa Maria é realizado por um consórcio composto por 5 empresas, sendo que a maioria atende ao Campus da UFSM e, cada uma delas, possui também um conjunto de linhas específicas por bairro da cidade. Este fator reforça a escolha das instâncias reais das linhas que atendem o Campus e

não as demais linhas da cidade, tendo em vista que para resolver o escalonamento por bairros dever-se-ia analisar o caso de cada empresa de transporte individualmente. Para complementar, ainda foram desenvolvidas instâncias aleatórias de grande porte que simulam o comportamento da demanda dessas instâncias reais (Seção 3.4.2), compreendendo-se que essas análises sejam suficientes para demonstrar a adequação dos modelos à prática do planejamento do transporte público

Ainda, desse contexto real, foram obtidas informações como: as características da frota heterogênea, considerando os diferentes tipos de ônibus utilizados na cidade, com relação à capacidade; e o histórico da demanda para essas linhas de ônibus. Assim, as instâncias utilizadas contemplam os seguintes itens:

- Horário de partida de uma viagem
- Horário de chegada de uma viagem
- Local de partida de uma viagem
- Local de chegada de uma viagem
- Demanda da viagem

Essas instâncias reais serviram de base para o desenvolvimento das instâncias aleatórias

3.4.2 Descrição das instâncias aleatórias

Utilizou-se um gerador de instâncias aleatórias para possibilitar a validação dos modelos em instâncias com diferentes características e portes em termos de número de viagens e terminais. Esse gerador foi baseado no apresentado por Guedes e Borenstein (2013), no qual dados obtidos junto às empresas de transporte público de Santa Maria (RS) foram utilizados para simular a demanda, considerando as suas diferentes características ao longo do dia (horários de pico). Como o gerador de Guedes e Borenstein (2013) foi desenvolvido para instâncias do MD-VSP, realizou-se algumas adaptações para adequar as saídas aos modelos propostos. Uma delas foi o acréscimo da demanda para cada uma das viagens da tabela de horários (que já contemplava horário e locais de partida e chegada), possibilitando definir o número mínimo e máximo de passageiros em cada viagem; outra foi a definição da menor e

maior distância entre dois terminais, aspecto de grande relevância para determinar quais tipos de arcos podem estar contidos na rede.

A partir deste gerador foram disponibilizados dois tipos de instâncias: as totalmente aleatórias e as que simulavam as demandas nos horários de pico. As totalmente aleatórias, geralmente, são instâncias de resolução mais difícil, tendo em vista que não há nenhum padrão na sua definição. Já as instâncias que simulam as demandas em horários de pico são úteis para complementar as instâncias reais, visto que essas são em um número bastante reduzido. Assim, pode-se simular mais cenários em instâncias com características próximas às reais.

3.4.3 Parametrização dos modelos

Alguns parâmetros devem ser definidos a priori para a resolução dos modelos propostos: os intervalos de tempo para as janelas de tempo, os intervalos de tempo Δt para os modelos VTSP-SCT e VTSP-CCT, os tipos de veículos que serão utilizados na frota heterogênea e a composição dos custos.

- Intervalos de tempo das janelas de tempo: Tendo em vista a manutenção da qualidade do serviço prestado, bem como um padrão já adotado na literatura (KLEWER; BUNTE; SUHL, 2006; KLEWER; AMBERG; AMBERG, 2012), as janelas de tempo adotadas serão de 1 e 2 minutos.
- Intervalos de tempo para agrupamento das viagens (Δt): A partir da realização de testes com instâncias reais, convencionou-se adotar um intervalo de tempo Δt de no máximo 3 minutos, para que as esperas nos terminais não sejam demasiadas aos passageiros e, conseqüentemente, não desqualifique o atendimento ao usuário.
- Tipos de veículos utilizados na composição da frota heterogênea: Empresas de transporte público possuem mais de um tipo de ônibus para atender à população, como o ônibus convencional, com 75 lugares; o padrão, com 83 lugares; o padrão15 M, com 98 lugares e o articulado, com 120 lugares (PREFEITURA DE SÃO PAULO, 2014). Essas capacidades, entretanto, são uma estimativa, pois os veículos podem ser customizados mediante exigências da empresa de transporte compradora. Analisando os dados disponibilizados pela

ATU (2013), observou-se que no sistema de transporte público de Santa Maria também se configuram ônibus com diferentes capacidades, variando desde ônibus convencionais com 81 lugares até ônibus articulados com 141 lugares. Realizando-se uma análise das frequências dos tipos de veículos, identificou-se uma maior quantidade de veículos com 83 e 100 lugares. Dessa forma, adotou-se neste estudo esses dois padrões de capacidade, mais o veículo articulado de 141 lugares, sendo a frota heterogênea considerada composta por três tipos de veículos.

- Custos: Geralmente, os custos dos veículo consistem em custos fixos e variáveis, em que os custos variáveis refletem o tempo de deslocamento fora da garagem e a distância percorrida. Assim, a soma do tempo de operação e os custos de distância são atribuídos aos arcos *pull-in/out*, de serviço e *deadhead*, enquanto os custos de tempo de operação são considerados para os arcos de espera fora da garagem (detalhamentos de cada um dos arcos estão no Capítulo 4). Um veículo em espera na garagem não incorre a custo algum. A fim de minimizar o número total de veículos, o arco de circulação tem um alto custo fixo para cada unidade de fluxo, com uma ordem de grandeza maior do que qualquer outro arco. Considerando a frota heterogênea, ainda há uma penalidade para o uso de cada tipo de veículo, proporcional a capacidade do mesmo. Assim, para o veículo de menor capacidade, 83 lugares, este fator é igual a 1; para o veículo de capacidade igual a 100 lugares, o fator é igual a 1,3; por fim, para o veículo de maior capacidade, 141 lugares, o fator multiplicador é igual a 1,7. A capacidade máxima dos arcos de serviço é definido como 1, enquanto todos os outros arcos têm capacidade máxima igual ao número de veículos disponíveis.

3.5 IMPLEMENTAÇÃO DA SOLUÇÃO

Os modelos foram desenvolvidos para servirem de suporte para a tomada de decisão no planejamento do transporte público. Além disso, como os modelos mostraram-se adequados a instâncias de grande porte, pode-se aplicá-los a variados contextos de escalonamento de veículos. No Capítulo 8, são detalhadas as contribuições dos modelos desenvolvidos, bem como sugeridas proposições de pesquisas futuras que poderão ser realizadas a partir deste trabalho.

4 REPRESENTAÇÃO DO MODELO VTSP ATRAVÉS DA REDE TEMPO-ESPAÇO

A estrutura da rede tempo-espaço (TSN) tem sido amplamente utilizada no escalonamento de aviões, mas foi primeiramente introduzida para o escalonamento de veículos por Kliwer, Mellouli e Suhl (2002), e tem demonstrado bons resultados. O problema de escalonamento de uma frota homogênea de veículos para um único depósito é representado através de um modelo de fluxo em rede e expresso por uma rede tempo-espaço. A principal vantagem dessa estrutura é a diminuição do número de variáveis e restrições, se comparado com a rede baseada em conexões, visto que nela evita-se o inconveniente de consideração explícita de todas as conexões possíveis entre viagens compatíveis, garantindo todos os escalonamentos viáveis de veículos.

Steinzen *et al.* (2010) apresentam um comparativo entre o número de arcos *deadhead* (dh) em uma rede tempo-espaço e uma rede baseada em conexões, conforme Tabela 2. Para se ter ideia das dimensões de cada uma das redes, esses autores expressam que se o problema contém m terminais e n viagens, o número de arcos na rede tempo-espaço é $O(mn)$ em contraste à $O(n^2)$ da abordagem baseada em conexões.

Tabela 2 – Número de arcos *deadhead* na rede tempo-espaço e na rede baseada em conexões

Tipo de rede	Número de viagens				
	100	200	400	800	2000
Rede baseada em conexões	4043	16396	65788	269462	1879262
Rede tempo-espaço	362	946	2106	4589	17086

Fonte: Steinzen *et al.* (2010)

A base da TSN é explorar a propriedade de transitividade de conjuntos ordenados, indicando que para viagens p, q, v a seguinte conclusão é aplicada (BUNTE;

KLIEWER, 2009):

$$(p R q) \wedge (q R v) \rightarrow (p R v), \text{ em que } R \text{ é uma relação binária}$$

A aplicação dessa propriedade à TSN é facilmente visualizada nos procedimentos de redução de arcos, que serão tratados na Seção 4.1. Tais procedimentos possibilitam combinações de grupos de viagens, o que gera um reduzido número de arcos na estrutura da rede.

Na TSN, cada viagem é representada por dois nós conectados por um arco, sendo definida por um grafo $G = (N, A)$, em que N o conjunto de nós e A o conjunto de arcos. Cada nó $n \in N$ representa um local específico em um tempo determinado e deve ser definido em função de l , o local de início ou fim de uma viagem, e t , o tempo de início ou fim de uma viagem. Os locais de início e fim de uma viagem podem ser um terminal $s \in S$ ou uma garagem $d \in D$. Logo, o conjunto de nós $N = \{(l, t) | l \in S \cup D \wedge t \in T\}$.

Cada arco $a \in A$ da TSN corresponde à transição no tempo e, provavelmente, no espaço. O conjunto A é composto por seis subconjuntos, $A = \{A^{se}, A^{wait}, A^{dh}, A^{pin}, A^{pout}, A^c\}$, sendo cada um desses arcos definidos como:

A^{se} é o conjunto dos arcos de serviço, utilizados para conectar dois nós compatíveis da rede, localizados em diferentes terminais, com o objetivo de atender a demanda. Cada arco de serviço é definido em função de um terminal e um horário de início de uma viagem (s_i, t_i) e um terminal e um horário de fim de uma viagem (s_j, t_j) . Logo, o conjunto $A^{se} = \{(i, j) \in A^{se} | i = (s_i, t_i) \wedge j = (s_j, t_j) \wedge s_i \neq s_j\}$. Ainda, denota-se γ_{ij} como o tempo de viagem entre os nós (i, j) . Assim, dois nós (i, j) são compatíveis se puderem ser cobertos pelo mesmo veículo, isto é, $t_i + \gamma_{ij} \leq t_j$.

A^{wait} é o conjunto dos arcos de espera, representando transições no tempo, mas não no espaço, ou seja, um arco de espera indica que o veículo está parado em um terminal ou na garagem.

A^{dh} é o conjunto dos arcos *deadhead* (dh), utilizados para conectar dois nós compatíveis e que estejam localizados em diferentes terminais. Nesta situação o veículo desloca-se vazio, sem atender a demanda durante o trajeto.

A^{pin} é o conjunto dos arcos *pull-in*, empregados quando um veículo parte da garagem em direção a um terminal. Assim, um arco *pull-in* conecta um nó da

garagem a um nó em um terminal.

A^{pout} é o conjunto dos arcos *pull-out*, inseridos quando um veículo parte de um terminal em direção à garagem. Assim, um arco *pull-out* conecta um nó de um terminal a um nó na garagem.

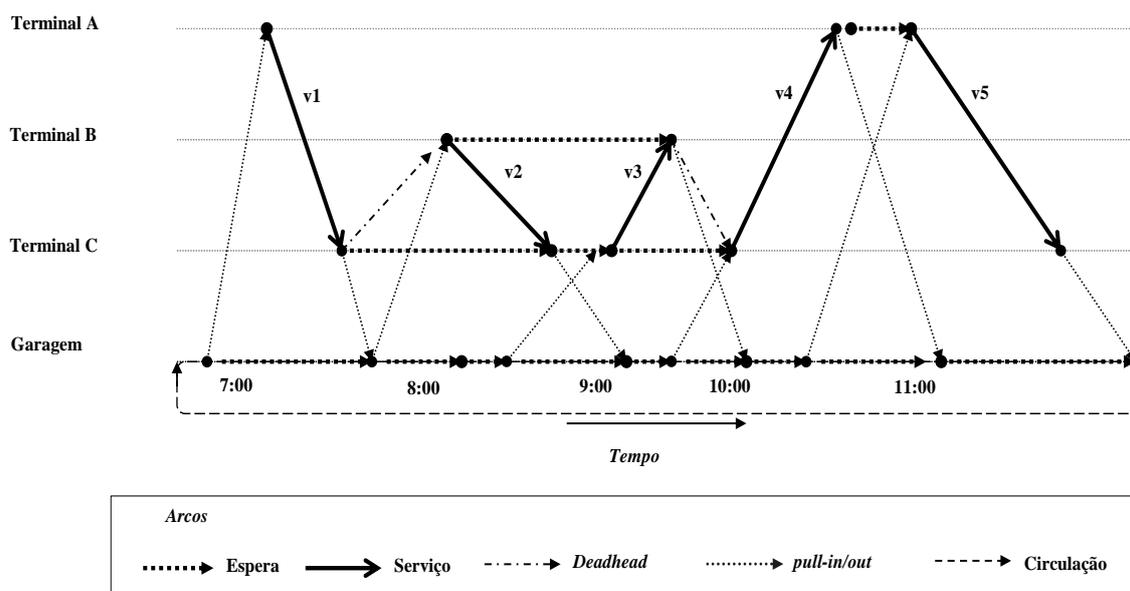
A^c é o conjunto dos arcos de circulação. Como a TSN é desenhada para o período de um dia de trabalho, cada unidade de fluxo do último para o primeiro nó da garagem define o escalonamento diário de um veículo e corresponde a um arco de circulação. A linha de tempo da garagem é apresentada em forma cíclica para forçar a circulação na rede, necessidade imposta pelas restrições de fluxo.

Na Tabela 3 exemplifica-se uma tabela de horários e na Figura 6 ilustra-se a sua respectiva TSN.

Tabela 3 – Tabela de horários para três terminais

i		j	
Terminal de partida	Hora de partida	Terminal de chegada	Hora de chegada
(s_i)	(t_i)	(s_j)	(t_j)
A	07:00	C	07:30
B	08:00	C	08:36
C	09:00	B	09:40
C	10:00	A	10:35
A	11:00	C	11:30

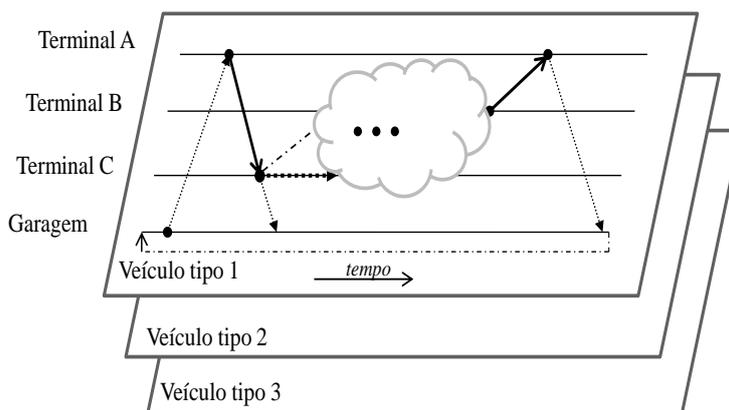
Figura 6 – TSN com cinco viagens, uma garagem e três terminais



Os arcos na TSN indicam que o veículo que realizou a viagem v1 possui três possibilidades após chegar ao terminal C: i) voltar à garagem; ii) dirigir-se sem

passageiros até o terminal B para realizar a viagem v2 e iii) esperar no terminal C até às 9h para realizar a viagem v3. Essas decisões baseiam-se na política da empresa de transportes e nos tempos e custos envolvidos. Esse exemplo corresponde ao uso de um único tipo de veículo para atender à demanda. Quando se utiliza a frota heterogênea, as redes são sobrepostas, sendo definida uma rede tempo-espaço para cada tipo de veículo, conforme a Figura 7.

Figura 7 – Sobreposição da TSN para frota heterogênea



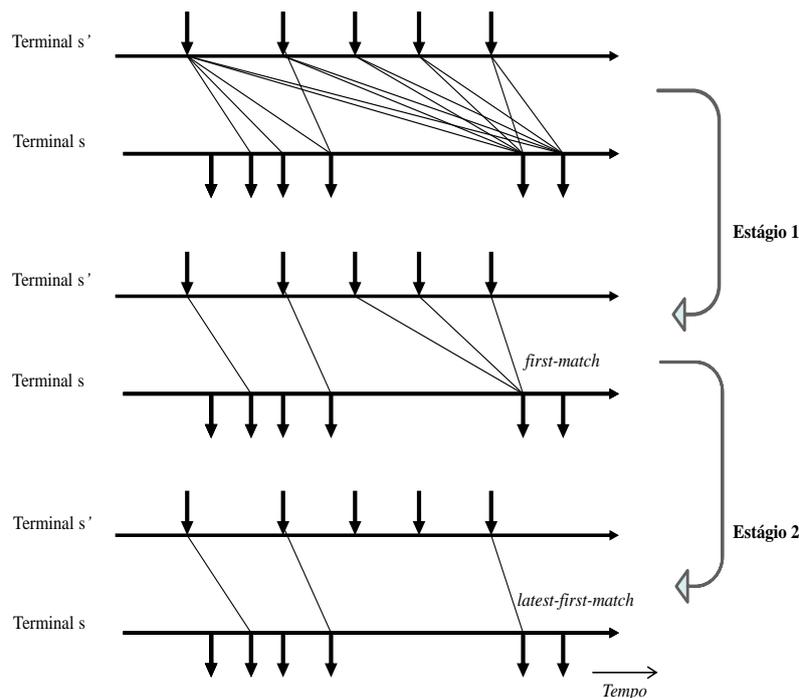
Fonte: Adaptado de Bunte e Kliewer (2009).

Essa sobreposição de redes por tipo de veículo possibilita que uma mesma viagem de serviço esteja em várias camadas, não sendo possível resolver essas camadas de forma independente, caracterizando um problema de rede com fluxo *multicommodity*. Assim, se houver dois ou mais veículos, o problema torna-se NP-difícil (EVEN; ITAI; SHAMIR, 1976; BERTOSSI; CARRARESI; GALLO, 1987; van den HEUVEL; van den AKKER; NIEKERK, 2008). Pode-se comparar a complexidade do VTSP com mais de um tipo de veículo à do MD-VSP com mais de uma garagem. Ambos caracterizam-se como problemas de fluxo *multicommodity* e tendem a multiplicar substancialmente o número de variáveis conforme aumenta o número de tipos de veículos ou garagens, respectivamente. Dada a dificuldade de resolução computacional para o VTSP, é necessário que se utilizem recursos para reduzir o tamanho da TSN, sem prejudicar a qualidade da representação dos arcos e nós que a compõe, assunto detalhado na seção seguinte.

4.1 PROCEDIMENTO DE REDUÇÃO DA TSN

A aplicação de procedimentos de redução da TSN tem impacto significativo no número de variáveis e restrições da formulação matemática, sem prejudicar a solução ótima. Tratando-se especificamente dos arcos da TSN, em virtude da alta complexidade combinatória, não é prático modelar todos os arcos *deadhead* possíveis. Assim, Kliwer, Mellouli e Suhl (2002, 2006) desenvolvem uma metodologia de pré-processamento desses arcos, chamada “*latest-first-matches*” (l-f-m), que permite reduzir a rede a uma fração do tamanho original, sem prejudicar o sequenciamento de viagens compatíveis. Esse pré-processamento ocorre em dois estágios, conforme representado na Figura 8.

Figura 8 – Pré-processamento de arcos *deadhead* sugerido por Kliwer, Mellouli e Suhl (2002, 2006)



No Estágio 1, para cada viagem de chegada escalonada no terminal s' , é determinada a primeira viagem compatível com a viagem (i, j) em cada estação s ($s' \neq s; s, s' \notin D$). Assim, são introduzidos os arcos *deadhead* que correspondem a primeira partida (*first-match*, $f-m$). Todas as possíveis conexões anteriormente apresentadas permanecem viáveis. As demais viagens compatíveis com o a viagem (i, j) , que tiveram seus arcos de espera agregados à primeira viagem, continuam compatíveis à mesma, devido aos arcos de espera traçados a partir de j . No Estágio

2, (*latest-first-match*, *l-f-m*), o número de arcos *deadhead* é ainda mais reduzido. Para tanto, os nós de partida de cada um dos arcos com mesma chegada em j são agrupados no último arco i que teve a sua partida definida no estágio anterior. Os últimos arcos podem ser obtidos da seguinte forma: seja A^i o conjunto de viagens (i, j) , com partida i no terminal s' e com mesma chegada j no terminal s (definidos no estágio *first-match*). Seja (i_l, j) a última viagem de entrada em s . Então, o último arco para cada elemento em A^i , a partir de s' é igual a (i_l, j) .

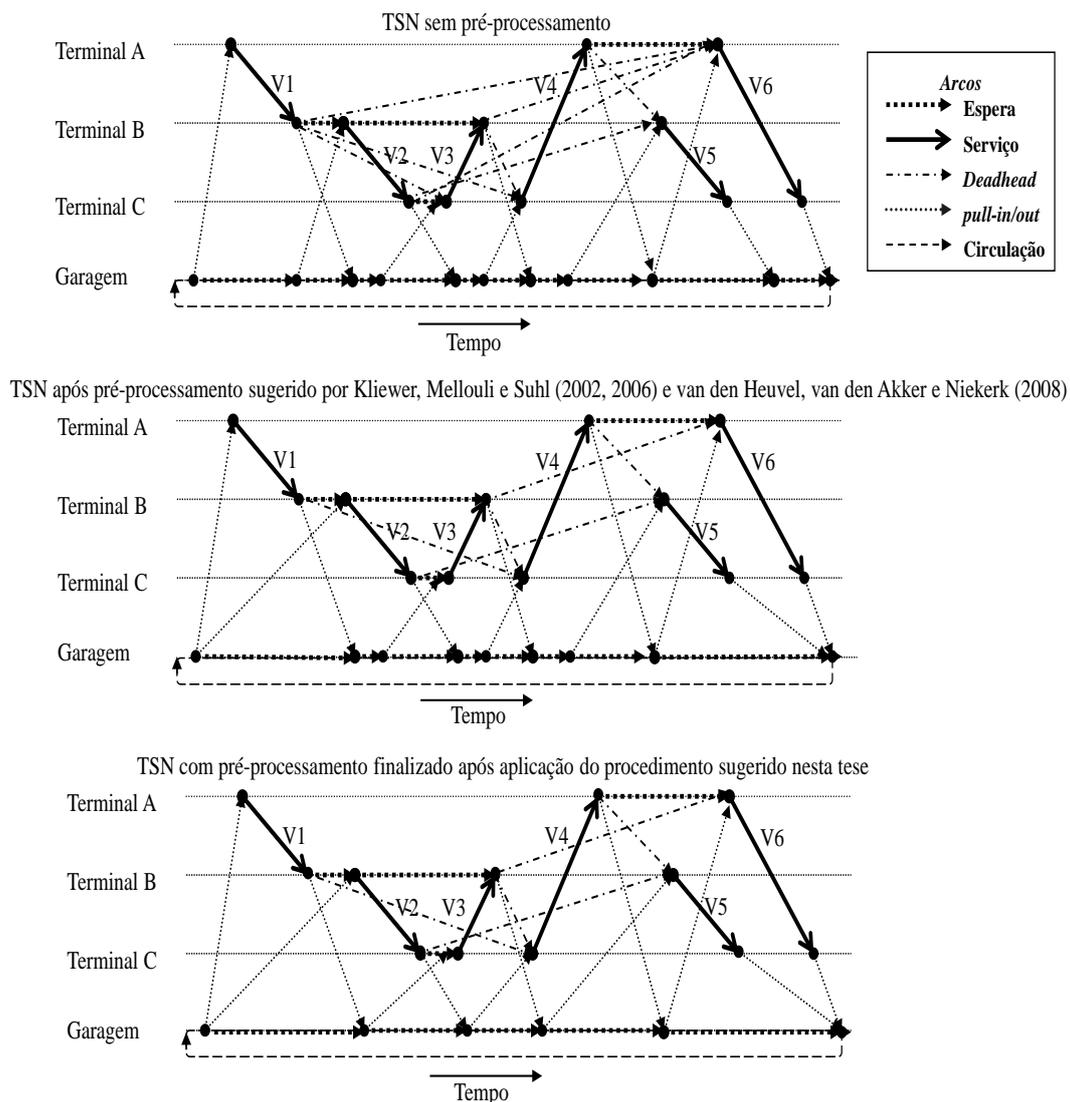
Outra sugestão para a redução do tamanho da TSN é dada por van den Heuvel, van den Akker e Niekerk (2008), que detalham um procedimento para minimizar o número de nós que originam ou recebem arcos *pull-in/out*. Se há nós subsequentes na garagem apenas com arcos *pull-in*, pode-se agrupá-los no primeiro nó de saída (do primeiro arco *pull-in*), sem modificar a estrutura da rede. Entretanto, se o segundo nó origina um arco *pull-out* isso seria impossível, pois esses arcos não podem ser movidos para um ponto anterior de tempo. Quando há nós subsequentes com arcos *pull-out*, esses podem ser agrupados no último nó (do último arco *pull-out*), sem perdas na representação da rede.

Além desses pré-processamentos, é sugerido e testado nesta tese um procedimento que permite ampliar a redução no número de nós. A ideia consiste em agrupar arcos *pull-in* e *pull-out* em um mesmo nó. Quando nós que originam arcos *pull-in* são subsequentes a nós que recebem arcos *pull-out*, eles podem ser agrupados a este último, possibilitando diminuir o número de nós na TSN (VISENTINI *et al.*, 2013a). Importante ressaltar que os procedimentos de minimização do número de arcos da garagem somente são viáveis se os arcos de espera da garagem possuírem custo igual a zero. A Figura 9 representa os vários tipos de pré-processamento aplicados à TSN. Esses procedimentos permitem redução significativa da rede, sem a perda de nenhuma conexão possível, refletindo a aplicação da propriedade de transitividade de conjuntos ordenados à TSN.

4.1.1 Aplicação das reduções da TSN

Nesta seção são utilizadas instâncias aleatórias para demonstrar a redução percentual no número de arcos *deadhead*, a partir da aplicação do procedimento sugerido por Klierer, Mellouli e Suhl (2002, 2006). Também são analisadas as reduções no

Figura 9 – Pré-processamentos aplicado à TSN



número de nós do depósito, partindo da ideia de van den Heuvel, van den Akker e Niekerk (2008) e complementando com o novo procedimento sugerido nesta tese.

A Tabela 4 indica os resultados das reduções de arcos *deadhead*.

Tabela 4 – Nós *deadhead* reduzidos no pré-processamento da TSN

#viagens	# terminais	# total de dh	# dh após f-m	# dh após l-f-m	% redução l-f-m/f-m	% redução de dh
1000		412867	8351	4187	49,86%	98,99%
2000		1653257	16015	7523	53,03%	99,54%
3000		3718394	23279	23279	0,00%	99,37%
4000	10	6619037	30173	14143	53,13%	99,79%
5000		10309915	36174	16298	54,95%	99,84%
6000		14854910	42583	17274	59,43%	99,88%
7000		20308960	47659	21112	55,70%	99,90%
1000		428290	13055	6512	50,12%	98,48%
2000		1715697	25567	12655	50,50%	99,26%
3000		3848995	37378	17867	52,20%	99,54%
4000	15	6861772	48836	22678	53,56%	99,67%
5000		10700274	60133	27083	54,96%	99,75%
6000		15434833	69775	31410	54,98%	99,80%
7000		20982026	80176	35227	56,06%	99,83%
1000		436729	17719	9168	48,26%	97,90%
2000		1743822	34732	17420	49,84%	99,00%
3000		3923324	51555	25018	51,47%	99,36%
4000	20	6977085	67712	32261	52,36%	99,54%
5000		10909923	83214	38908	53,24%	99,64%
6000		15698897	98412	45405	53,86%	99,71%
7000		21392396	112760	51079	54,70%	99,76%
1000		440283	22179	11047	50,19%	97,49%
2000		1765306	44377	22342	49,65%	98,73%
3000		3964450	65701	32070	51,19%	99,19%
4000	25	7047350	86765	41425	52,26%	99,41%
5000		11021357	107588	51184	52,43%	99,54%
6000		15855004	126180	58906	53,32%	99,63%
7000		21592754	145813	67267	53,87%	99,69%
1000		431064	22776	10342	54,59%	97,60%
2000		1733179	45664	21114	53,76%	98,78%
3000		3897588	67133	30677	54,30%	99,21%
4000	30	6948934	87759	39947	54,48%	99,43%
5000		10826678	107454	48046	55,29%	99,56%
6000		15609824	128226	56830	55,68%	99,64%
7000		21232849	148071	65396	55,83%	99,69%
					# média de redução =	99,32%

Na Tabela 4, foram testadas grandes instâncias, tanto em termos de número de viagens quanto em número de terminais. O que se observa, é que as reduções no número de arcos *deadhead*, independentemente do tamanho da instância, são sempre superiores a 97%, chegando a quase 100% em alguns casos. Outro aspecto interessante é o potencial de redução do estágio *latest-first-match*, que possibilita uma rede final com menos da metade dos arcos existentes no estágio *first-match* de redução, para a grande maioria das instâncias testadas. De um modo geral, a média de redução dos arcos *deadhead* para as instâncias testadas foi de 99,32%.

Já no que tange à redução no número de nós do depósito, referentes à origem dos arcos *pull-in* e o destino dos arcos *pull-out*, exibe-se na Tabela 5 uma amostra do potencial de cada um dos procedimentos implementados.

Analisando as mesmas instâncias da Tabela 4, observa-se considerável redução no número dos nós do depósito, a partir da aplicação dos três tipos de reduções. Em média, pôde-se reduzir em mais de 85% o número de nós, sem perder qualidade na representação da TSN. Nota-se, através desses resultados, a eficiência dos procedimentos de redução, salientando que o terceiro estágio, de integração de arcos *pull-in* e *pull-out*, é uma das contribuições desta tese. Nesse estágio, nota-se uma substancial diminuição no número de arcos, quando comparado às etapas anteriores, qualificando o procedimento para a aplicação em trabalhos futuros.

Tabela 5 – Nós da garagem reduzidos no pré-processamento da TSN

#viagens	# terminais	# total de nós pull-in/out	# nós após redução pull-in	# nós após redução pull-out	# nós após redução pull-in+out	% redução de nós
1000		2000	906	669	460	77,00%
2000		4000	1204	993	814	79,65%
3000		6000	1285	1129	1002	83,30%
4000	10	8000	1344	1219	1134	85,83%
5000		10000	1363	1272	1218	87,82%
6000		12000	1379	1308	1274	89,38%
7000		14000	1391	1333	1304	90,69%
1000		2000	886	685	478	76,10%
2000		4000	1165	958	793	80,18%
3000		6000	1287	1124	790	86,83%
4000	15	8000	1330	1205	1120	86,00%
5000		10000	1365	1281	1235	87,65%
6000		12000	1373	1287	1252	89,57%
7000		14000	1389	1326	1304	90,69%
1000		2000	872	640	442	77,90%
2000		4000	1163	940	771	80,73%
3000		6000	1279	1096	979	83,68%
4000	20	8000	1341	1206	1131	85,86%
5000		10000	1366	1259	1211	87,89%
6000		12000	1370	1292	1264	89,47%
7000		14000	1381	1307	1292	90,77%
1000		2000	863	628	440	78,00%
2000		4000	1194	971	785	80,38%
3000		6000	1294	1118	991	83,48%
4000	25	8000	1329	1192	1107	86,16%
5000		10000	1361	1264	1214	87,86%
6000		12000	1373	1289	1263	89,48%
7000		14000	1384	1318	1300	90,71%
1000		2000	888	649	454	77,30%
2000		4000	1166	938	770	80,75%
3000		6000	1286	1109	969	83,85%
4000	30	8000	1330	1212	1118	86,03%
5000		10000	1369	1271	1218	87,82%
6000		12000	1370	1288	1260	89,50%
7000		14000	1379	1299	1281	90,85%
				# média de redução =		85,12%

5 NOVAS ABORDAGENS PARA A RESOLUÇÃO INTEGRADA DO PROBLEMA DE GERAÇÃO DA TABELA DE HORÁRIOS E DO VTSP

Neste capítulo são descritas as três abordagens desenvolvidas para a resolução integrada do problema de geração da tabela de horários e do VTSP, bem como apresentadas as formulações matemáticas de cada uma delas.

5.1 ABORDAGEM COM JANELAS DE TEMPO: VTSP-TW

A nova abordagem de janelas de tempo (VTSP-TW), desenvolvida neste trabalho, possibilita a geração da TSN com menor número de arcos de serviço, se comparada à abordagem de Kliewer, Bunte e Suhl (2006) e Kliewer, Amberg e Amberg (2012) (apresentada na Seção 2.2), com resultados muito similares quanto ao número de veículos utilizados (VISENTINI *et al.*, 2013a). Como a proposta desta tese é o desenvolvimento de modelos que integram os problemas de geração da tabela de horários e de escalonamento de veículos com frota heterogênea, tem-se a intenção de incluir janelas de tempo no VTSP-SCT e no VTSP-CCT, a fim de obter uma melhor distribuição das viagens na tabela de horários e a minimização do número de veículos utilizados.

Como a abordagem desenvolvida por Kliewer, Bunte e Suhl (2006) e Kliewer, Amberg e Amberg (2012) (que nesta tese será referenciada como “modelo” ou “abordagem” de Kliewer) realiza a multiplicação dos arcos de serviço para a geração dos arcos de janela de tempo, a mesma resulta em uma rede TSN de grandes dimensões quando integrada aos modelos VTSP-STC e CCT, tornando a resolução de grandes instâncias praticamente inviável em tempo computacional razoável. Para solucionar

este problema, desenvolveu-se a abordagem VTSP-TW, que apresenta uma TSN com menor dimensões em termos de arcos de serviço, garantindo a integração dos modelos VTSP-STC e CCT e das janelas de tempo.

A inclusão de janelas de tempo objetiva redefinir a tabela de horários para encontrar viagens que possam ser compatíveis, mas sem excluir as viagens previamente definidas; e garantir ganhos operacionais, diminuindo o número de veículos necessários para atender à demanda. As janelas de tempo atuam como um intervalo de tolerância no horário de partida de algumas viagens, indicando possibilidades de minimização de custos caso se adiante viagens específicas. Esses adiantamentos são realizados em janelas de tempo curtas, geralmente de 1 ou 2 minutos. Ao considerar a frota heterogênea, as janelas de tempo tornam-se ainda mais úteis, uma vez que a redefinição da tabela de horários pode ser realizada de acordo com a demanda e o tipo de ônibus mais adequado para atendê-la.

Partindo-se da estrutura da TSN, a ideia básica da implementação dos arcos de janela de tempo no VTSP-TW é adicioná-los entre duas viagens de serviço com chegada e partida em um mesmo terminal, desde que essas viagens estejam tão próximas quanto for a janela de tempo definida. Esses arcos são visualizados na rede como arcos de espera com sentido invertido, pois possuem as mesmas características, entretanto ligam a viagem mais adiantada (chegada) no tempo com a mais atrasada (partida). O procedimento para a inclusão destes arcos pode ser definido conforme o pseudo-código da Figura 10, considerando j um nó de chegada, i um nó de partida, s um terminal, t' o tempo de partida, t'' o tempo de chegada e T_{tw} o parâmetro de janela de tempo adotado.

Figura 10 – Pseudo-código para implementação dos arcos de janela de tempo

```

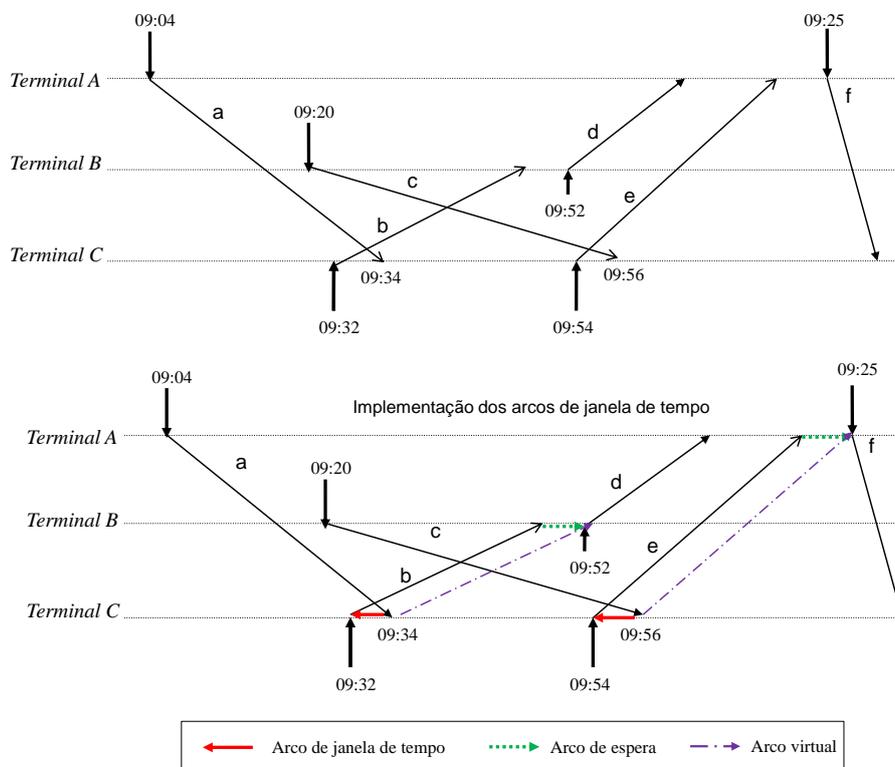
for cada terminal  $s$  do
  for  $i = (s, t')$ ,  $j = (s, t'') \in A^{se}$ ,  $t' < t''$  do
    if  $t'' - t' \leq T_{tw}$  then
      adicione à rede tempo-espaco um arco de janela de tempo que inicia em  $j$  e
      termina em  $i$  ;
    end
  end
end

```

A Figura 11 ilustra duas situações em que é possível utilizar arcos de janela de tempo e diminuir o número de veículos escalonados, considerando uma janela de

tempo de 2 minutos.

Figura 11 – Representação da rede com janelas de tempo de 2 minutos

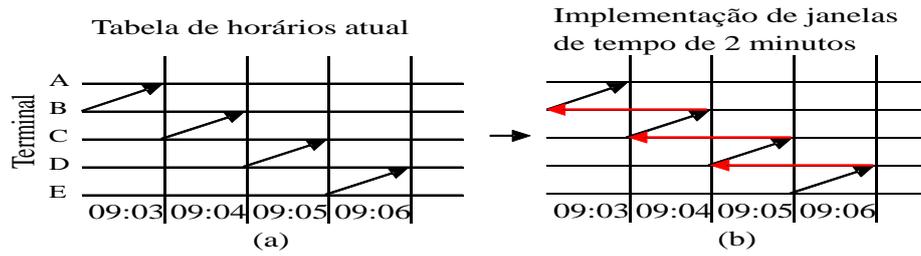


Dois arcos de janela de tempo são aplicados entre as viagens “a” e “b” e as viagens “c” e “e”, garantindo compatibilidade para essas viagens. Assim, o ônibus que realizar a viagem “a” poderá também realizar a “b”, caso tenha capacidade suficiente para atender ambas as demandas, atrasando a partida da viagem “b” em dois minutos. A mesma situação poderá ocorrer nas viagens “c” e “e”. A partir da ilustração do “arco virtual”, percebe-se como seria o deslocamento do horário de atendimento de uma viagem, indicando os novos horários de partida e chegada das viagens “b” e “e”.

Na Figura 11 nota-se a utilização de arcos de espera a partir da viagem de serviço originada de um arco de janela de tempo. O uso efetivo desses arcos é necessário para que se obtenha maior consistência e ajuste da tabela de horários, evitando-se o acúmulo de sucessivos atrasos, o que poderia prejudicar o atendimento da demanda. A Figura 12 representa a situação de acúmulo de atrasos, que poderia ocorrer caso não se incluía o arco de espera após a realização da viagem de serviço originada de um arco de janela de tempo.

A situação representada na Figura 12 dificilmente aconteceria na realidade, mas indica um evento adverso ao qual a abordagem VTSP-TW está sujeita. Em um

Figura 12 – Representação de atrasos sucessivos na tabela de horários



sistema de transporte público, as viagens dificilmente são espaçadas em intervalos de tempo tão simétricos, que permitam esse sequenciamento. Ainda, (i) o sequenciamento é dissolvido no curso das viagens, em virtude de alterações na velocidade, congestionamentos, tempo para a entrada e saída dos passageiros; e (ii) o custo dos arcos de janela de tempo são definidos de forma a serem mais caros do que os demais arcos da rede, o que também minimiza a chance de acúmulo de atrasos sucessivos.

Mesmo com essas considerações, que indicam a impossibilidade do acúmulo de atrasos em situações reais, tomou-se o cuidado de garantir que arcos de espera fossem incluídos ao final da viagem de serviço que sucede o arco de janela de tempo. Para tanto, adiciona-se a restrição (27) ao modelo VTSP que utilizará a abordagem de janelas de tempo, sendo A^{wait} o conjunto dos arcos de espera e A^{tw} o conjunto de arcos de janela de tempo. A restrição (27) é definida conforme segue:

$$x_{hif} - x_{jlf} \leq 0 \quad \forall (h, i) \in A^{tw}, \forall (j, l) \in A^{wait}, \forall (i, j) \in A^{se}, \forall f \in F \quad (27)$$

Essa restrição garante que sempre que existir fluxo em um arco janela de tempo, haverá fluxo no arco de espera que sucede imediatamente a viagem de serviço realizada. O tamanho, em função do tempo de deslocamento, do arco de espera deve ser pelo menos igual ao do arco de janela de tempo utilizado, o que pode ser facilmente tratado em um pré-processamento à resolução do problema. Na prática, sempre haverá um tempo de espera entre duas viagens, para que os passageiros possam entrar ou sair do ônibus ou os motoristas descansarem, o qual tende a ser maior do que o pequeno intervalo de tempo utilizado no parâmetro da janela de tempo.

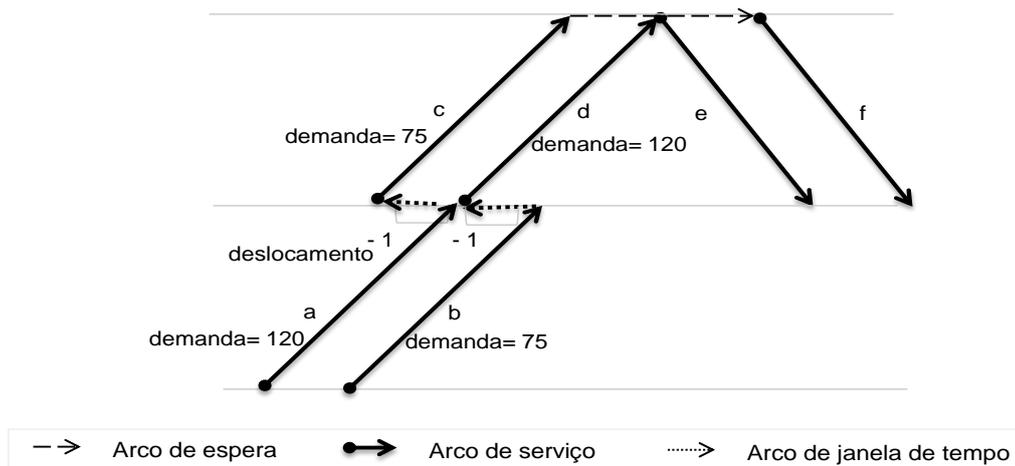
Adicionalmente, em função do uso da frota heterogênea, percebeu-se que apenas o uso da restrição (27) não assegura que o intervalo de janela de tempo definido seja obedecido. Assim, para garantir a padronização do tamanho desses arcos, elaborou-

se a restrição (28), que deve ser adicionada aos modelos aos quais será integrada a abordagem de janelas de tempo.

$$x_{hif} - x_{ijf} \leq 0 \quad \forall (h, i) \in A^{tw}, \forall (i, j) \in A^{se}, \forall f \in F \quad (28)$$

Essa restrição garante que os arcos de janela de tempo não sejam acumulados e ultrapassem o intervalo definido, assegurando que um arco de janela de tempo deve ser equivalente a uma única viagem de serviço. Tal consideração é relevante para que os diferentes tipos de veículos não utilizem arcos de janela tempo em viagens sequenciais, o que deixaria a tabela de horários bastante perturbada e poderia gerar atrasos sucessivos para os passageiros. Na Figura 13 ilustra-se uma situação em que poderia ser ultrapassado o intervalo de tempo definido para a janela.

Figura 13 – Situação ilustrativa de extrapolação da janela de tempo definida



Considerando $T_{tw} = 1$ minuto, os arcos representativos das janelas de tempo (deslocamento = -1) são criados na rede, conforme a Figura 13. Assim, nota-se que a construção da rede subsidia o acúmulo de arcos de janela de tempo e a extrapolação do intervalo permitido, como seria o caso de o veículo que realizou a viagem “b”, realizar a viagem “c” na sequencia. Neste caso, a janela de tempo utilizada seria de 2 minutos e não 1 minuto, conforme o estipulado. São situações como esta que a restrição (28) evita, garantindo que somente seja criado um arco de janela de tempo para ligar duas viagens consecutivas.

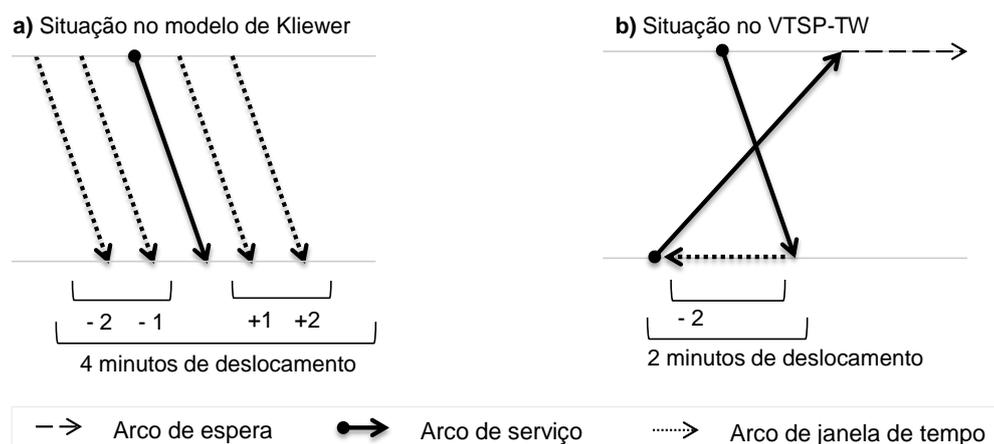
Referente aos custos dos arcos de janela de tempo, a cada um desses arcos adicionados ao modelo é acrescida uma penalidade na função objetivo, para garantir

que esses arcos somente sejam utilizados se minimizarem os custos totais.

Por fim, cabe salientar algumas situações especiais concernentes a aplicação de arcos de janela de tempo para a abordagem VTSP-TW e para a abordagem de Kliewer, Bunte e Suhl (2006) e Kliewer, Amberg e Amberg (2012). Nessas situações, podem ser encontrados resultados distintos, em termos de número de veículos, dadas as particularidades de cada modelo. Logo, como o desenvolvimento do VTSP-TW surge como uma proposta alternativa à abordagem de Kliewer, entende-se que se faz necessário ressaltar todos os aspectos que diferenciam ambos os modelos, conforme segue.

- a. No modelo de Kliewer, quando há a possibilidade de inserção de arcos de janela de tempo, os mesmos são adicionados na TSN como arcos sombra dos arcos de serviço, sendo distribuídos dentro de intervalos de $\pm T_{tw}$ minutos. Dessa forma, há a possibilidade de se adiantar ou atrasar viagens, em um horizonte de $2 \times T_{tw}$ minutos para a inserção dos arcos de janela de tempo. Já na abordagem VTSP-TW os arcos de janela de tempo só podem ser adicionados no horizonte T_{tw} , entre dois arcos, no sentido de adiantar a partida de uma viagem. Na Figura 14 ilustram-se essas duas situações.

Figura 14 – Comparação entre horizontes de tempo para a inclusão de arcos de janela de tempo

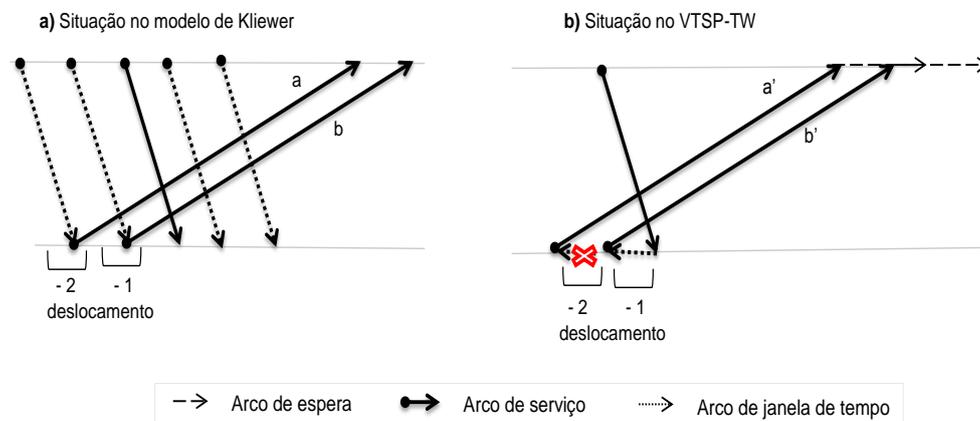


Essa comparação indica que, em alguns casos, o modelo de Kliewer (representado na Figura 14a) possibilita a compatibilidade de um maior número de viagens, caso sejam utilizados os arcos de janela de tempo adiantados (+1 ou +2), em comparação ao modelo VTSP-TW (Figura 14b), o que poderia resultar em um menor número de veículos na abordagem de Kliewer. Entretanto,

esse caso é bastante raro, tendo em vista que as viagens adiantadas, na grande maioria das vezes, podem ser realizadas através dos arcos de espera na estação.

- b. Outra situação divergente entre os modelos VTSP-TW e o modelo de Kliewer, é a inclusão de arcos de janela de tempo entre mais de duas viagens consecutivas atrasadas, o que vai ao encontro da restrição (28), a fim de evitar que sejam criadas janelas de tempo em intervalos maiores do que o permitido. Na Figura 15 representam-se essas considerações.

Figura 15 – Comparativo da aplicação de arcos de janela de tempo entre viagens consecutivas



Conforme a Figura 15a, tanto a viagem “a” quanto a viagem “b” podem ser realizadas no modelo de Kliewer, a partir de um arco de janela de tempo, considerando uma janela de tempo de dois minutos. Entretanto, na Figura 15b, observa-se que a viagem “a” (equivalente à viagem “a”) não pode ser realizada a partir de um arco de janela de tempo na abordagem VTSP-TW, em decorrência da restrição (28). Em casos como este, o modelo de Kliewer apresenta maior número de possibilidades para a compatibilidade entre viagens, podendo resultar em um número menor de veículos do que seria necessário se estivesse sendo utilizado o modelo VTSP-TW. Entretanto, ao adotar o modelo de Kliewer para intervalos de janela de tempo maiores, há uma tendência de aumento na perturbação da tabela de horários, o que pode prejudicar a qualidade do atendimento aos usuários. Já quando se analisa o VTSP-TW, esta perturbação é minimizada, em decorrência da aplicação dos arcos de espera após a realização da viagem de serviço, que dissipam o atraso realizado

durante a viagem.

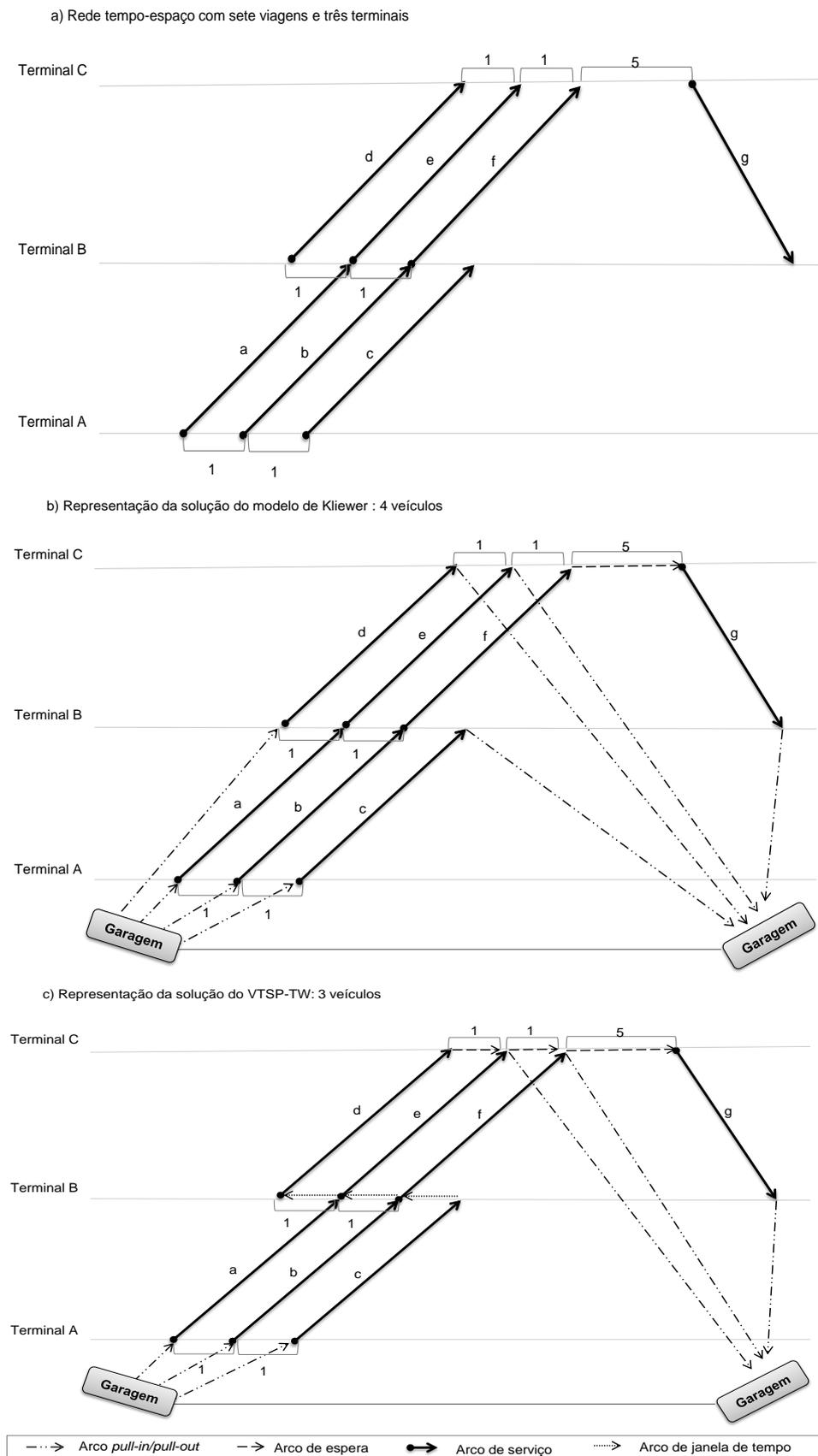
- c. Por fim, cabe sinalizar uma situação na qual o modelo VTSP-TW pode realizar a compatibilidade de alguns arcos de serviço por meio dos arcos de janela de tempo, mas o modelo de Kliewer não. Isso é vislumbrado quando há arcos de serviço com mesmo terminal de partida e chegada e que distam, entre si, os horários de partida em intervalo menor ou igual à janela de tempo, o que denominou-se “viagens sequenciais”. Para exemplificar, exhibe-se a Figura 16.

A rede representada na Figura 16a possui sete viagens e três terminais, sendo que as distâncias entre as viagens são sempre de 1 minuto, com exceção da viagem “g”, que dista 5 minutos da viagem “f”. Considerando uma janela de tempo de 1 minuto, intervalo igual a distância entre algumas viagens com mesmo terminal de partida e chegada, na Figura 16b representa-se a solução obtida no modelo de Kliewer. Ao total, são necessários 4 veículos para atender todas as viagens da rede e não foi possível utilizar nenhum arco de janela de tempo, em decorrência das viagens sequenciais “a”, “b” e “c”, no terminal “A” e das viagens sequenciais “d”, “e” e “f” no terminal “B”. Isso porque, as viagens sequenciais impossibilitam que arcos sombra (ou arcos de janela de tempo) sejam traçados. Por exemplo, ao gerar arcos sombra para viagem “b” os mesmos recairiam sobre os arcos “a” e “c”, o que não é permitido no modelo de Kliewer. Raciocínio semelhante é aplicado a todos os demais arcos sequenciais da rede.

Entretanto, ao considerar a Figura 16c, percebe-se que o modelo VTSP-TW utilizou apenas 3 veículos na solução final, visto que o procedimento para a geração dos arcos de janela de tempo apresenta características distintas do outro modelo. Assim, pode-se utilizar dois arcos de janela de tempo e minimizar o número de veículos necessários. Cabe ressaltar que situações deste tipo, mesmo sendo difíceis de acontecer, podem ser mais comumente encontradas em instâncias com um grande número de viagens, tendo em vista que viagens podem ocorrer em intervalos muito próximos dada a densidade da tabela de horários.

O desenvolvimento do modelo VTSP-TW foi motivado pela necessidade de ge-

Figura 16 – Situação na qual o modelo VTSP-TW apresenta maior compatibilidade de arcos



ração de uma abordagem de janelas de tempo, que propiciasse uma rede com menor número de arcos de serviço do que as já existentes na literatura. Este modelo assemelha-se ao apresentado por Kliewer, Bunte e Suhl (2006) e Kliewer, Amberg e Amberg (2012), em termos de resultados quanto ao número de veículos, mas possui características singulares que facilitam o seu uso nos modelos VTSP-SCT e VTSP-CCT, discutidos na próxima seção. Uma das principais características é a facilidade de implementação computacional, que é realizada através de pequenas modificações nas TSN. A integração dos diferentes modelos desenvolvidos nesta tese visa proporcionar melhores soluções aos problemas tratados, sempre buscando resultados que garantam a qualidade do serviço prestado aos usuários do transporte público.

5.2 INTEGRANDO A GERAÇÃO DA TABELA DE HORÁRIOS E O VTSP

Esta seção apresenta os dois modelos (VTSP-SCT e VTSP-CCT) desenvolvidos para a otimização da tabela de horários dado o escalonamento de veículos. O VTSP-SCT realiza alterações sequenciais nos horários das viagens, já o VTSP-CCT faz as modificações de modo combinatório. Essas alterações consistem no agrupamento de viagens com mesmo itinerário e horários de partida próximos, provendo veículos de capacidade adequada para atender a demanda das viagens agrupadas e eliminando algumas viagens da tabela de horários.

5.2.1 Modelo VTSP-SCT

Ao escalonar veículos considerando frota heterogênea, tem-se a possibilidade de aliar as capacidades de cada tipo de ônibus com as características da demanda no que tange os horários de menor e maior movimento nos terminais. Esta flexibilidade na escolha do tipo de veículo que atenderá cada linha, a partir da sua demanda, motivou o desenvolvimento de modelos que ampliam o VTSP integrando a ele aspectos referentes à elaboração da tabela de horários. Modelos como os propostos nesta e na próxima seção podem contribuir na decisão gerencial de ampliação/readequação da frota, redefinição dos horários de ônibus a fim de melhor aproveitar a frota existente e distribuição dos veículos nas linhas de modo a atender os passageiros com maior conforto e qualidade.

Assim, a partir da ampliação do modelo VTSP, o modelo VTSP-SCT visa mi-

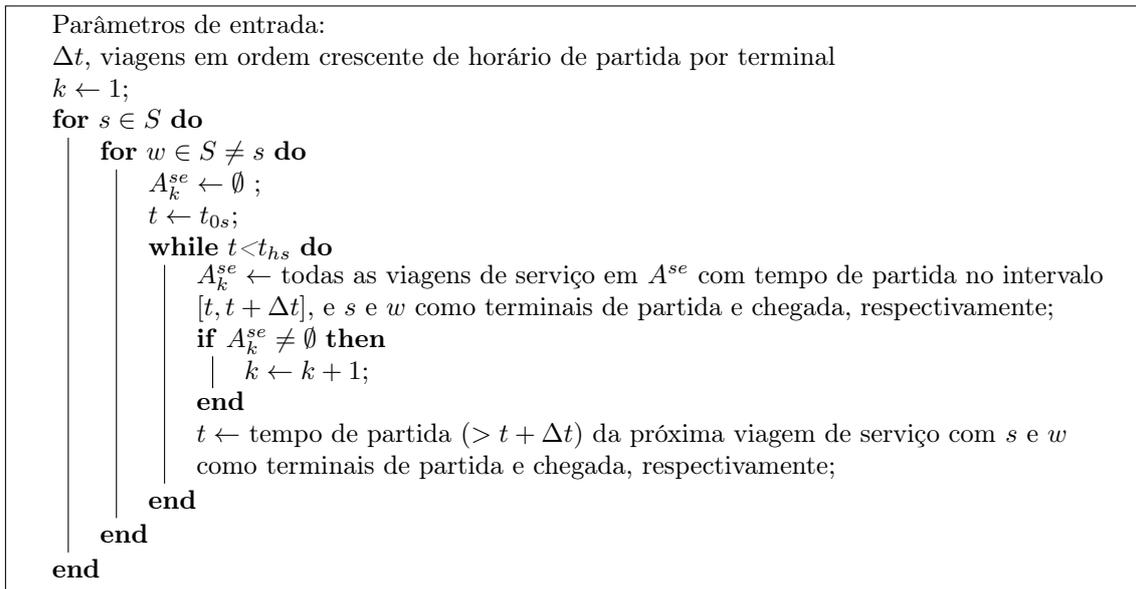
minimizar o número total de veículos, considerando a frota heterogênea e, simultaneamente, readequar a tabela de horários vigente. Dadas as diferentes capacidades dos veículos, o modelo (i) possibilita direcionar o (tipo de) veículo mais adequado para cada viagem; (ii) readequar a tabela de horários à demanda histórica e (iii) minimizar os custos operacionais. Para que seja possível ajustar a tabela de horários, define-se um intervalo de tempo Δt em minutos, e analisam-se todas as viagens de serviço que possuem horários de partida próximos, com uma diferença máxima igual ao valor de Δt . Esse intervalo de tempo é de poucos minutos, para buscar minimizar os efeitos sentidos pelos passageiros na variação dos horários de ônibus. As viagens analisadas dentro do intervalo Δt devem possuir igual terminal de partida e destino, para que se possa identificar possibilidades de readequação de horários e tipos de veículos para atender a demanda total.

Para exemplificar, considere a seguinte situação: Um ônibus (1) parte do terminal A em direção ao terminal B às 15h com horário previsto de chegada às 15h40 e esta viagem tem demanda de 45 passageiros. Outro ônibus (2) com mesmo itinerário parte às 15h03 com horário previsto de chegada às 14h45 e possui demanda de 30 passageiros. Considerando $\Delta t = 3$, as viagens dos ônibus 1 e 2 podem ser analisadas conjuntamente, pois a diferença entre os horários de suas partidas é menor ou igual ao intervalo definido. Nesta situação, o modelo determina se há a possibilidade de apenas um veículo (ao invés dos dois) realizar a viagem do terminal A para o B, atendendo a demanda total de 75 passageiros e ainda minimizar o custo total de operação. Se for viável, a uma das viagens é eliminada da tabela de horários.

Para identificar quais viagens podem ser agrupadas dentro do intervalo Δt , as viagens são consideradas em sequência, a partir do horário de partida da primeira viagem do dia em direção ao horário de partida da última viagem. Assim, as viagens pertencentes a iguais terminais de partida e destino são listadas em ordem crescente de horário de partida e, após, são agrupadas em intervalos com duração máxima de Δt . Na Figura 17 é descrito o algoritmo que determina os intervalos de viagens do modelo VTSP-SCT, sendo que para um terminal $s \in S$, t_{0s} representa o tempo de partida da primeira viagem do dia, e t_{hs} o tempo de partida da última viagem do dia. Ainda, A_k^{se} corresponde ao conjunto das viagens de serviço pertencentes ao intervalo de tempo de índice $k \in K$. Os conjuntos A_k^{se} , no VTSP-SCT, são mutualmente

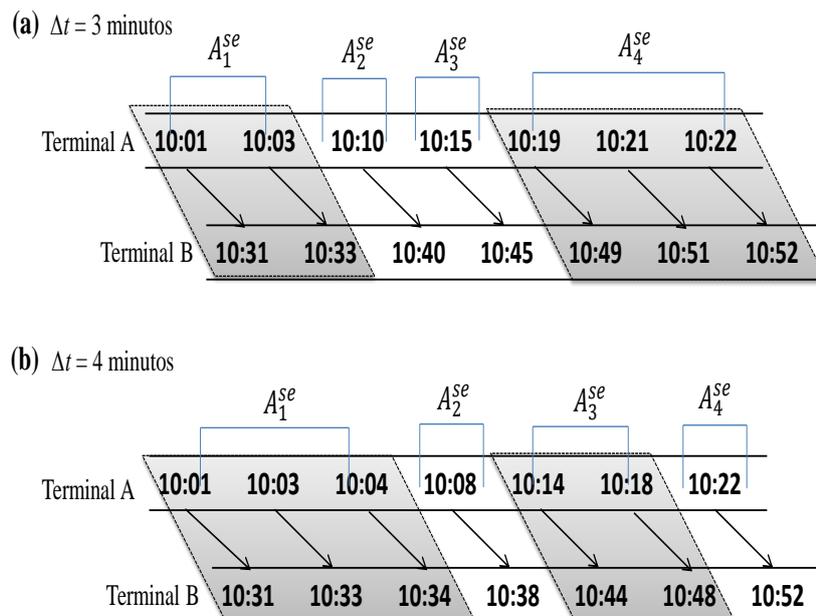
exclusivos.

Figura 17 – Algoritmo para a geração dos intervalos de viagens do modelo VTSP-SCT



A Figura 18 representa o agrupamento de viagens no modelo VTSP-SCT, considerando os horários de partida e chegada de viagens com mesmo terminal de origem (Terminal A) e destino (Terminal B).

Figura 18 – Agrupamento sequencial de viagens no modelo VTSP-SCT



Na Figura 18a, com $\Delta t = 3$ minutos, tem-se para o intervalo de índice $k = 1$ o conjunto A_1^{se} formado pelas viagens que partem nos instantes 10:01 e 10:03 do

terminal A, os intervalos de índice $k = 2$ e $k = 3$ compostos por apenas uma viagem cada e, para o intervalo de índice $k = 4$ o conjunto A_4^{se} composto pelas viagens com partida às 10:19, 10:21 e 10:22. A análise do modelo VTSP-SCT recai especificamente sobre os intervalos de índice $k = 1$ e $k = 4$, identificando se há a possibilidade de realocação da demanda total desses intervalos entre as viagens que o compõe. Se, por exemplo, for possível eliminar uma ou duas viagens do intervalo de índice $k = 4$, o(s) veículo(s) que realizará(ão) as outras viagens deverão comportar a demanda de todas as viagens deste intervalo. A distribuição da demanda de um intervalo será realizada de acordo com a capacidade dos veículos que atenderão ao intervalo. Assim, pode-se ter um único veículo que comporte a demanda total das três viagens (10:19, 10:21 e 10:22) do intervalo de índice $k = 4$, ou talvez sejam necessários dois veículos, sendo que a demanda total das viagens será dividida entre eles.

Na Figura 18b, o intervalo de índice $k = 1$ do conjunto A_1^{se} é formado por três viagens. Neste caso, qualquer uma delas pode ser eliminada e a sua demanda deverá ser atendida pelos veículos que realizarem as outras viagens. Opcionalmente, pode-se implementar facilmente um procedimento que restringe o agrupamento de algumas viagens, e contribua para um melhor ajuste da tabela de horários. Para intervalos compostos por mais de duas viagens, garante-se que as viagens com menor e maior horário de partida sejam sempre realizadas, optando-se por agrupar as viagens intermediárias. Caso este procedimento seja adotado, tem-se uma garantia maior de que a espera nos terminais, por parte dos passageiros, se estenderá por um intervalo máximo de Δt minutos.

Outra variante do modelo seria a possibilidade de escolha das viagens que se quer agrupar em um determinado intervalo. Entretanto, considerando instâncias reais, percebeu-se que a maior densidade de viagens com partidas próximas ocorre nos horários de pico, logo não se tem um horizonte amplo de viagens que possibilitam o agrupamento e, em consequência, não se observa a necessidade de realizar tal procedimento no planejamento do transporte público.

O modelo VTSP-SCT pode ser formulado conforme segue. Seja K o conjunto dos intervalos de índice k , A_k^{se} o conjunto das viagens de serviço pertencentes ao intervalo de índice $k \in K$, p_f a capacidade do veículo do tipo $f \in F$, e P_k a demanda

total esperada para o intervalo de índice $k \in K$, o modelo pode ser representado por:

$$VTSP - SCT : \quad \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ijf} x_{ijf} \quad (29)$$

s.t.

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ijf} - \sum_{(j,l) \in A} x_{jlf} = 0 \quad \forall j \in N, \forall f \in F \quad (30)$$

$$\sum_{(i,j) \in A_k^{se}} \sum_{f \in F} p_f x_{ijf} \geq P_k \quad \forall k \in K \quad (31)$$

$$\sum_{f \in F} x_{ijf} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in A^{se} \quad (32)$$

$$x_{ijf} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in A^{se}, \forall f \in F \quad (33)$$

$$x_{ijf} \in \mathbb{N} \quad \forall (i,j) \in A \setminus A^{se}, \forall f \in F \quad (34)$$

A função objetivo (29) minimiza o custo total dos veículos. A restrição (30) refere-se as propriedades de fluxo da rede, a (31) garante que a capacidade dos veículos que realizarão as viagens inseridas no intervalo de índice k atenda a demanda total do intervalo. A restrição (32) assegura que todas as viagens serão operadas, no máximo, uma vez por um único veículo de determinado tipo. As restrições (33) e (34) referem-se ao domínio da variável de decisão x_{ijf} .

O modelo VTSP-SCT é definido a partir de intervalos sequenciais, concedendo pouca flexibilidade ao agrupamento de viagens e à modificação da tabela de horários. Para um melhor ajuste de horários e maior flexibilidade no uso da frota de veículos, elaborou-se o modelo VTSP-CCT, discutido na Seção 5.2.2.

5.2.2 Modelo VTSP-CCT

A fim de ampliar o escopo do modelo VTSP-SCT, elaborou-se o modelo VTSP-CCT, que permite realização de análises combinatórias entre todas as viagens em um intervalo k , melhor distribuindo-as na tabela de horários. Na Figura 19 é representado o algoritmo que define a formação dos intervalos de índice k utilizados no VTSP-CCT. Neste caso, os conjuntos A_k^{se} não são mutuamente exclusivos.

A Figura 20 ilustra as possíveis combinações no agrupamento das viagens no modelo VTSP-CCT, considerando-se os horários de partida das viagens com mesmo

Figura 19 – Algoritmo para a geração dos intervalos de viagens do modelo VTSP-CCT

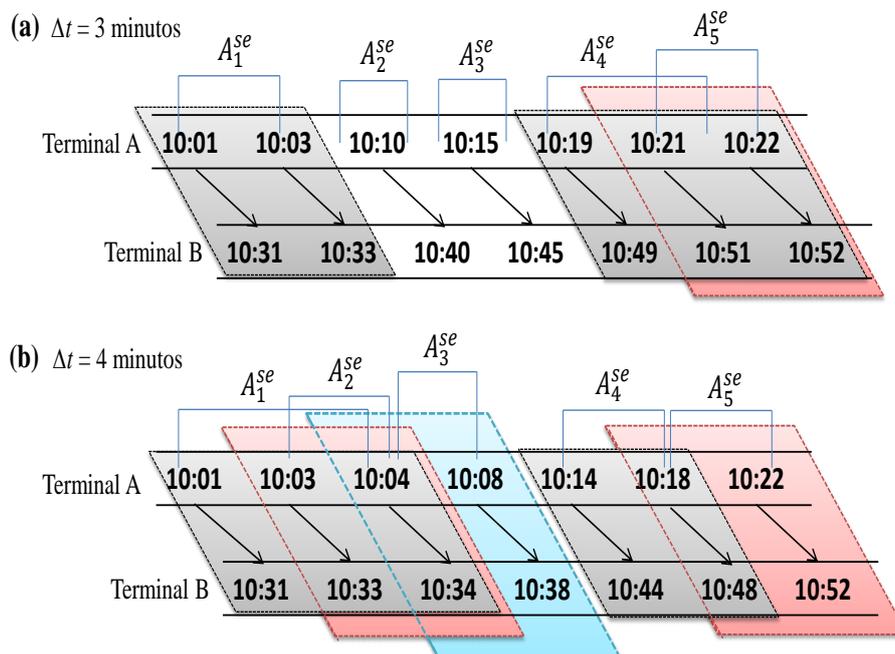
```

Parâmetros de entrada:
 $\Delta t$ , viagens em ordem crescente de horário de partida por terminal
 $k \leftarrow 1$ ;
for  $s \in S$  do
  for  $w \in S \neq s$  do
     $A_k^{se} \leftarrow \emptyset$ ;
     $t \leftarrow t_{0s}$ ;
    while  $t < t_{hs}$  do
       $A_k^{se} \leftarrow$  todas as viagens de serviço em  $A^{se}$  com tempo de partida no intervalo
       $[t, t + \Delta t]$ , e  $s$  e  $w$  como terminais de partida e chegada, respectivamente;
      if  $A_k^{se} \neq \emptyset$  then
         $k \leftarrow k + 1$ ;
      end
       $t \leftarrow$  tempo de partida da próxima viagem de serviço com  $s$  e  $w$  como terminais
      de partida e chegada, respectivamente;
    end
  end
end
end

```

terminal de origem e destino. Na Figura 20a percebe-se que as viagens do intervalo de índice $k = 5$ do conjunto A_5^{se} estão completamente contidas no intervalo de índice $k = 4$, indicando que poderiam estar agrupadas em qualquer desses intervalos, desde que o veículo tenha capacidade suficiente para atender a demanda total do intervalo selecionado. Dada a dispersão das viagens, com exceção do intervalo de índice $k = 5$, os demais são exatamente iguais aos do modelo VTSP-SCT representado na Figura 18a.

Figura 20 – Combinação no agrupamento de viagens no modelo VTSP-CCT



Já para a Figura 20b, identificam-se claramente todas as combinações de viagens possibilitadas pelo modelo VTSP-CCT. A viagem com partida às 10:04, por exemplo, pode pertencer a qualquer um dos conjuntos A_1^{se} , A_2^{se} , ou A_3^{se} . Quando um ônibus comporta a demanda do intervalo maior, neste caso, $k = 1$, o intervalo menor nele contido ($k = 2$) é eliminado do modelo em um pré-processamento, pois torna-se redundante.

Comparando-se a Figura 18b e a Figuras 20b, nota-se que a viagem com início às 10:08 é a única viagem de A_2^{se} na primeira Figura, mas pode estar agrupada à viagem das 10:04 em A_3^{se} da segunda figura. Isso demonstra a flexibilidade do modelo VTSP-CCT, que possibilita que a viagem das 10:08 seja cancelada e sua demanda suportada pelo veículo da viagem que acontece às 10:04, o que não é permitido no VTSP-SCT. A viagem das 10:04, pertencente aos conjuntos A_1^{se} e A_3^{se} da Figura 20b, é outro exemplo de maior flexibilização. Dada a sua alocação, A_1^{se} poderá ser composto por três viagens (com início às 10:01, 10:03 e 10:04) e A_3^{se} por apenas uma (às 10:08), ou A_1^{se} poderá agrupar as viagens das 10:01 e das 10:03 e A_3^{se} ser composto pelas viagens com partidas às 10:04 e 10:08. Já o conjunto A_1^{se} da Figura 18b é totalmente fixo, composto pelas três primeiras viagens do dia.

Em virtude das diferentes possibilidades de alocação de uma viagem em um intervalo, à formulação matemática do modelo VTSP-CCT são acrescentadas duas variáveis binárias: y_{ijfk} igual a 1 se o veículo do tipo f atender ao arco de serviço (i, j) no intervalo de índice k , e 0 caso contrário; e w_{ijk} , igual a 1 se a demanda do arco (i, j) for satisfeita no intervalo de índice k , e 0 caso contrário. A variável w_{ijk} é necessária somente quando $|A_k^{se}| > 1$, sendo realizado um pré-processamento para eliminar as variáveis correspondentes a conjuntos com apenas uma viagem. Ainda, K_{ij} é o conjunto dos intervalos de índice k que contém a viagem de serviço (i, j) , sendo $K_{ij} = \{k \mid (i, j) \in A_k^{se}\}$. A formulação do modelo VTSP-CCT é representada como:

$$VTSP - CCT : \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_k^{se}} \sum_{f \in F} c_{ijf} y_{ijfk} + \sum_{(i,j) \in A \setminus A_k^{se}} \sum_{f \in F} c_{ijf} x_{ijf} \quad (35)$$

s.t.

$$\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_k^{se}} y_{ijfk} - \sum_{k \in K} \sum_{(j,l) \in A_k^{se}} y_{jlfk} +$$

$$\sum_{(i,j) \in A \setminus A^{se}} x_{ijf} - \sum_{(j,l) \in A \setminus A^{se}} x_{jlf} = 0 \quad \forall j \in N, \forall f \in F \quad (36)$$

$$\sum_{(i,j) \in A_k^{se}} \sum_{f \in F} p_f y_{ijfk} \geq \sum_{(i,j) \in A_k^{se}} P_{ij} w_{ijk} \quad \forall k \in K \quad (37)$$

$$\sum_{k \in K_{ij}} w_{ijk} = 1 \quad \forall (i,j) \in A^{se} \quad (38)$$

$$\sum_{f \in F} y_{ijfk} \leq w_{ijk} \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in A_k^{se} \quad (39)$$

$$y_{ijfk} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in A_k^{se}, \forall f \in F \quad (40)$$

$$w_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in A_k^{se} \quad (41)$$

$$x_{ijf} \in \mathbb{N} \quad \forall (i,j) \in A \setminus A^{se}, \forall f \in F \quad (42)$$

A função objetivo (35) minimiza o custo total dos veículos. A restrição (36) garante a propriedade de fluxo da rede, considerando os arcos de serviço dos intervalos de índice k e os demais arcos da rede; a restrição (37) garante que a demanda de cada intervalo seja atendida. Na restrição (38) a demanda de um arco de serviço deve compor a demanda de um, e somente um, intervalo de índice k e a restrição (39) garante que a demanda de um arco de serviço será contabilizada no mesmo intervalo de índice k ao qual este arco pertence. As restrições (38) e (39) são complementares e formuladas baseadas na flexibilidade do modelo VTSP-CCT, para assegurar que mesmo que uma viagem seja eliminada da tabela de horários, a sua demanda será contabilizada no intervalo de índice k ao qual ela pertence. Por fim, as restrições (40), (41) e (42) referem-se ao domínio das variáveis de decisão y_{ijfk} , w_{ijk} e x_{ijf} respectivamente.

A aplicação direta do modelo VTSP-CCT para determinar a configuração do escalonamento dos diferentes tipos de veículos em instâncias de grande escala é impraticável, devido ao número excessivo de variáveis a ser tratado por um resolvidor de problemas de PLI, em decorrência de todas as combinações possíveis de arcos de serviço que podem ser realizadas em cada intervalo de índice k . Em experimentos preliminares, esta formulação se mostrou ineficiente em termos de quantidade de memória necessária e tempo computacional para instâncias de grande porte. A título de exemplificação, salvo as condições em que se encontram baixas demandas para viagens dentro de um mesmo intervalo k , a resolução do modelo consome a

totalidade de memória da máquina de testes (8GB), evidenciando a característica combinatória do problema. Em testes com instâncias aleatórias com 800 viagens, 14 terminais e demanda variando entre 60 e 110, a resolução do modelo tornou-se inviável para a formulação compacta do VTSP-CCT. Para superar esta limitação, no capítulo seguinte é proposta uma abordagem eficiente baseada na técnica de Geração de Colunas para a resolução do VTSP-CCT.

6 TÉCNICA DE GERAÇÃO DE COLUNAS PARA A RESOLUÇÃO DO VTSP-CCT

A técnica de Geração de Colunas (GC) é aplicada a problemas de Programação Linear (PL) que possuem um número muito grande de variáveis, como os problemas de escalonamento (FORES, 1996). Como o VTSP-CCT possui complexidade NP-difícil e não pode ser resolvido na sua forma compacta, optou-se por reescrevê-lo, explicitando todas as possíveis combinações de arcos em cada intervalo k , o que gera um número excessivo de variáveis e proporciona condições para a aplicação da técnica de GC na sua resolução.

Na literatura de escalonamento de veículos encontra-se uma ampla gama de estudos que utilizam a GC como técnica de resolução, principalmente, do MD-VSP (RIBEIRO; SOUMIS, 1994; DESROSIERS *et al.*, 1995; DESAULNIERS; LAVIGNE; SOUMIS, 1998; OUKIL *et al.*, 2007; PEPIN *et al.*, 2009; HADJAR; SOUMIS, 2009), problema que se caracteriza como de fluxo *multicommodity* e tende a multiplicar substancialmente o número de variáveis conforme aumenta o número de garagens. Raciocínio semelhante é utilizado para o VTSP-CCT, substituindo-se o número de garagens pelo número de veículos dos variados tipos.

Neste Capítulo, inicialmente, será descrito de modo genérico o funcionamento da GC e, na sequência, serão detalhadas as particularidades da aplicação desta técnica para o VTSP-CCT.

6.1 PANORAMA SOBRE A TÉCNICA DE GERAÇÃO DE COLUNAS

Dantzig e Wolfe (1961) propuseram um algoritmo de decomposição para PL de grande porte, possibilitando a decomposição desse problema em uma sequência de

pequenos programas lineares cujas soluções iteradas possibilitam a sua resolução através de uma generalização do método Simplex. A Decomposição de Dantzig-Wolfe serviu de base para o desenvolvimento da técnica de GC, tendo como ideia principal trabalhar com apenas um subconjunto das variáveis do PL que está sendo resolvido, sendo que novas variáveis vão sendo adicionadas ao problema somente quando necessário: como no método simplex, em cada iteração deve-se encontrar uma variável promissora para entrar na base (DESROSIERS; LÜBBECKE, 2005).

Na GC o problema de PL é dividido em dois: o Problema Mestre e o Problema *pricing* ou Subproblema. O Problema Mestre compreende o PL completo, com todas as suas colunas; sendo que deste problema deriva um Problema Mestre Restrito (PMR), ou seja, um PL com um subconjunto explícito das colunas do Problema Mestre.

O Problema Mestre pode ser representado da seguinte forma (WEIDER, 2007):

$$\min \quad c^T x \quad (42)$$

$$s.t. \quad Ax = b, \quad (43)$$

$$x \geq 0. \quad (44)$$

em que a matriz de restrições A está em $\mathbb{R}^{m \times n}$, $c, x \in \mathbb{R}^n$, e $b \in \mathbb{R}^m$. Em geral, a GC é utilizada se n é muito maior do que m . Para representar o PMR deve-se considerar o subconjunto $I \subset \{1, \dots, n\}$ de colunas de A , que são dadas explicitamente, sendo o mesmo igual a:

$$\min \quad c_I^T x_I \quad (45)$$

$$s.t. \quad A_I x_I = b, \quad (46)$$

$$x_I \geq 0. \quad (47)$$

O problema *pricing* recebe as variáveis duais, geradas a partir da resolução do PMR, para determinar novas colunas (variáveis) a serem inseridas no PMR, sendo este o processo iterativo da GC: o PMR gera as variáveis duais para o subproblema e este gera novas variáveis para a resolução do PMR.

O problema *pricing*, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}^m$, considerando $A_{.i}$ como uma coluna da matriz A , é igual a:

$$\min_{i=1,\dots,n} c_i - \lambda^\top A_{.i} \quad (48)$$

Se λ é uma solução dual ótima do PMR para um dado $I \subset \{1, \dots, n\}$ e o valor ótimo do problema *pricing* é não-negativo, então λ é também uma solução dual ótima do Problema Mestre (WEIDER, 2007). Caso contrário, encontrou-se uma coluna i que melhora a função objetivo, que deve ser adicionada em I e resolvido o PMR novamente. Essas iterações devem ocorrer até que se prove a otimalidade.

O algoritmo de geração de colunas é apresentado na Figura 21, conforme sugerido por Weider (2007).

Figura 21 – Pseudocódigo para a geração de colunas adaptado de Weider (2007)

input : Conjunto inicial de colunas I , metodologia de resolução do problema *pricing*, um guia para nortear os custos c_i das colunas i e a coluna $A_{.i}$ da matriz de coeficientes.

output : Solução ótima x para o Problema Mestre.

repeat

- Resolva o PMR com colunas I . Este resultado é uma solução dual ótima $\lambda \in \mathbb{R}^m$ e uma solução primal ótima $x_I \in \mathbb{R}^I$;
- Resolva o problema *pricing* em relação a λ . Seja $i^* \in \{1, \dots, n\}$ a solução do subproblema;
- Adicione i^* em I ;

until $c_{i^*} - \lambda^\top A_{.i^*} \geq 0$;

Estabeleça $x_{\{1,\dots,n\} \setminus I} \leftarrow 0$.

Durante o processo de geração de colunas, o PMR continua crescendo pela adição de novas variáveis (colunas), sendo possível adicionar mais do que uma coluna por iteração. Como consequência do aumento de tamanho do PMR, o número de variáveis de decisões aumenta, crescendo também o tempo para a solução do PMR conforme o número de iterações. Por outro lado, o número de iterações é limitado pelas restrições que, a cada iteração, reduzem o número de possibilidades de solução pela convergência à solução ótima (BARNHART *et al.*, 1998).

Baseando-se nessas premissas de aplicação da técnica de GC, na próxima seção é descrita a adaptação da mesma para a resolução do Programa Linear Inteiro VTSP-CCT.

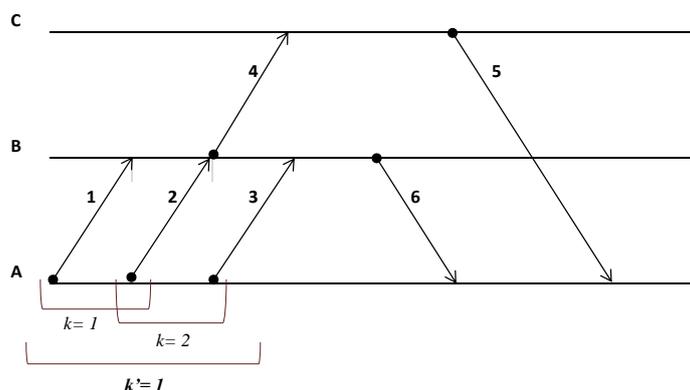
6.2 A GERAÇÃO DE COLUNAS PROPOSTA PARA RESOLVER O VTSP-CCT

A partir de testes realizados, constatou-se que a resolução da forma compacta do modelo VTSP-CCT (Seção 5.2.2) não é possível para instâncias de grande porte. Dessa forma, foi desenvolvido um algoritmo baseado na técnica de geração de colunas a fim de decompor o problema em um problema mestre e um subproblema e obter um conjunto de soluções de boa qualidade.

6.2.1 Problema Mestre

A principal dificuldade de resolução do VTSP-CCT encontra-se na propriedade combinatória dos arcos de serviço inseridos no intervalo $k \in K$ para cada uma das múltiplas camadas da rede correspondentes a cada um dos tipos de veículos disponíveis. Assim, tendo em vista que para a resolução do problema é necessário considerar todas as combinações possíveis de arcos em cada intervalo $k \in K$ e, no VTSP-CCT, um arco de serviço pode estar em mais de um intervalo, surge a necessidade de se considerar explicitamente, na formulação do Problema Mestre, os intervalos que possuem arcos de serviço em comum, denominados nesta tese como intervalos interseccionados. A fim de facilitar a compreensão da estrutura desses intervalos, representa-se na Figura 22 uma rede com três terminais, seis viagens de serviço e um único tipo de veículo, a título de simplificação.

Figura 22 – Definição dos intervalos k e k' , considerando $\Delta t=1$ minuto



Com $\Delta t=1$ minuto, as viagens 1, 2 e 3, que distam entre si 1 minuto, são passíveis de agrupamento, sendo as viagens 1 e 2 agrupadas no intervalo de índice $k = 1$ e as viagens 2 e 3 no intervalo de índice $k = 2$. Analisando $k = 1$ e $k = 2$, percebe-se que a viagem 2 pode estar presente em ambos os intervalos; sendo assim, não é possível

explicitar todas as combinações de arcos desses intervalos sem determinar em qual intervalo será alocado o arco 2, sendo necessário considerar os intervalos interseccionados. Tais intervalos interseccionados passam a fazer parte de um intervalo maior, $k' \in K'$. Assim, $k' = 1$ representa o índice de um intervalo interseccionado que contém os intervalos $k = 1$ e $k = 2$.

Caso fossem utilizados apenas os intervalos k nessa formulação, poderia ocorrer a sobrecarga de demanda no arco pertencente a dois intervalos diferentes, no exemplo da Figura 22, o arco que representa a viagem 2. Isso porque, dadas as características do VTSP-CCT, poder-se-ia tanto agrupar a viagem 1 quanto a 3 à viagem 2, contida em ambos os intervalos $k = 1$ e $k = 2$. Assim, haveria a possibilidade de superestimação de demanda do arco da viagem 2, sem que nenhum veículo pudesse atendê-la. Além do mais, ao selecionar o mesmo arco em dois intervalos diferentes, extrapola-se o intervalo de tempo Δt definido.

Para ampliar a compreensão da formulação do Problema Mestre, dados os arcos de serviço pertencentes ao intervalo k' é necessário indicar como cada arco será utilizado na rede, para que seja possível identificar quais viagens podem ser agrupadas. Assim, define-se o conjunto $Q_{k'}$, que compreende todas as possíveis combinações factíveis¹ dos arcos de serviço contidos no intervalo $k' \in K'$, sendo que $q \in Q_{k'}$ representa o índice de uma combinação dos arcos do intervalo k' . Na Tabela 6 são sumarizadas as combinações factíveis de arcos do intervalo de índice $k' = 1$ da Figura 22.

Tabela 6 – Possíveis combinações dos arcos de serviço no intervalo de índice $k' = 1$

arcos em $k = 1$	arcos em $k = 2$	Arcos utilizados	k'	q	$\lambda_{k'q}$
1, 2	3	1,2,3	1	1	λ_{11}
1	2, 3	1,2,3	1	2	λ_{12}
1, x ^b	3	1,3	1	3	λ_{13}
x, 2	3	2,3	1	4	λ_{14}
1	x, 3	1,3	1	5	λ_{15}
1	2, x	1,2	1	6	λ_{16}

^b Em que “x” representa uma viagem de serviço não realizada com demanda distribuída nas demais viagens do intervalo k .

Analisando os intervalos $k = 1$ e $k = 2$ para $\Delta t=1$ minuto, seis diferentes com-

¹Para que uma combinação de arcos seja factível, a demanda total do intervalo k deve ser atendida pelo somatório das capacidades dos veículos que podem atender a este intervalo.

binações de arcos no intervalo $k' = 1$ são factíveis. Exemplificando, para $q = 1$, os arcos 1 e 2 são alocados no intervalo de índice $k = 1$ e o arco 3 em $k = 2$. Já para $q = 2$, os arcos 2 e 3 são alocados no intervalo de índice $k = 2$; e para $q = 3$, os arcos 1 e 2 são agrupados no intervalo de índice $k = 1$, sendo que apenas o arco 1 permanece na rede, tendo que atender a demanda total do intervalo. As combinações de $q = 3$ até $q = 6$ indicam a possibilidade de agrupamento das viagens. Na última coluna da Tabela 6, são elencadas as variáveis $\lambda_{k'q}$, indicando a distribuição dos arcos de serviço em cada intervalo.

Isso posto, pode-se definir o Problema Mestre sendo K' o conjunto dos intervalos interseccionados; $Q_{k'}$ o conjunto de possíveis combinações factíveis dos arcos de serviço alocados em intervalos interseccionados $k' \in K'$; A_u^{se} o conjunto dos arcos de serviço alocados em intervalos unitários (intervalos compostos por apenas um arco de serviço) e F o conjunto de tipos de veículos da frota heterogênea. Definem-se ainda os parâmetro p_f como a capacidade do ônibus tipo f e P_{ij} como o número esperado de passageiros no arco (i, j) , sendo que ambos são aplicados de forma implícita nesta formulação, uma vez que todas as combinações elencadas são factíveis no que se refere à satisfação da restrição de demanda. Também é necessário o coeficiente $a_{ijfk'q}$, definido como:

$$a_{ijfk'q} = \begin{cases} 1 & \text{se o arco } (i, j) \text{ pertencente ao intervalo } k' \text{ for atendido pelo veículo } f \text{ na} \\ & \text{combinação } q; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As variáveis de decisão são definidas por $\lambda_{k'q}$ e x_{ijf} , conforme segue:

$$\lambda_{k'q} = \begin{cases} 1 & \text{se for escolhida a combinação } q \text{ no intervalo } k'; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$x_{ijf} = \begin{cases} 1 & \text{se o arco } (i, j) \text{ é atendido pelo veículo } f; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De acordo com o exposto, a formulação do Problema Mestre é definida como segue:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{f \in F} c_{ijf} x_{ijf} \quad (49)$$

s.t.

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{f \in F} x_{ijf} - \sum_{(j,l) \in A} \sum_{f \in F} x_{jlf} = 0 \quad \forall j \in N \quad (50)$$

$$\sum_{f \in F: p_f \geq P_{ij}} x_{ijf} = 1 \quad \forall (i, j) \in A_u^{se} \quad (51)$$

$$\sum_{q \in Q_{k'}: (i,j) \in A_{k'}^{se}} a_{ijfk'q} \lambda_{k'q} - x_{ijf} = 0 \quad \forall (i, j) \in A^{se} \setminus A_u^{se}, \forall f \in F \quad (52)$$

$$\sum_{q \in Q_{k'}} \lambda_{k'q} = 1 \quad \forall k' \in K' \quad (53)$$

$$x_{ijf} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A^{se}, \forall f \in F \quad (54)$$

$$\lambda_{k'q} \in \{0, 1\} \quad \forall k' \in K', \forall q \in Q_{k'} \quad (55)$$

A função objetivo (49) minimiza o custo total dos veículos. A restrição (50) refere-se às propriedades de fluxo da rede e a restrição (51) assegura que todos os arcos de serviço, que estiverem em intervalos unitários, deverão ser atendidos por um único veículo de determinado tipo. As restrições (52) e (53) são aplicadas, especificamente, nos arcos que estão em intervalos interseccionados. A restrição (52) indica se o arco de serviço (i, j) é atendido. A restrição (53) assegura que somente uma combinação de arcos seja escolhida, dentre as inúmeras possibilidades apresentadas pelo conjunto $Q_{k'}$. Por fim, as expressões (54) e (55) definem o domínio das variáveis x_{ijf} e $\lambda_{k'q}$, respectivamente.

Assim, a ideia subjacente à CG desenvolvida, de modo sucinto, consiste em escolher somente um padrão de uso para os arcos inseridos nos intervalos interseccionados; sendo que a escolha de um só padrão de uso é dado pela Restrição (53).

Dada a imensa cardinalidade do conjunto $Q_{k'}$, torna-se impraticável enumerar todas as possíveis combinações factíveis dos arcos de serviço alocados em intervalos interseccionados, sendo necessária a criação de um subconjunto restrito de todas as combinações do conjunto $Q_{k'}$. Assim, tem-se um Problema Mestre Restrito (PMR), no qual será considerado apenas um sub-conjunto de variáveis $\lambda_{k'q}$, sendo que para estas variáveis $q \in Q'_{k'} \subsetneq Q_{k'}$. Para o PMR o conjunto $Q'_{k'}$ representa as combinações de arcos no intervalo k' que poderão ser incluídas na solução para resolver o problema. Considerando que o PMR é um Programa Linear Inteiro (PLI), seguindo os procedimentos da técnica de GC para problemas inteiros, o seu relaxamento linear

é usado para criar as variáveis duais que serão inseridas no subproblema, originando um Problema Mestre Restrito Relaxado (PMRR). Neste caso, as restrições binárias (54) e (55) das variáveis x_{ijf} e $\lambda_{k'q}$, respectivamente, são relaxadas e, desta forma, a solução do PMRR por GC resulta em um limite inferior para o valor da solução do problema.

6.2.2 Subproblema

Na GC desenvolvida para resolver o VTSP-CCT, cada coluna gerada no subproblema explicita como combinar os arcos de serviço em cada intervalo $k' \in K'$ — o que corresponde a uma variável $\lambda_{k'q}$ —, e cabe ao PMRR escolher as distribuições ótimas dos arcos, a partir das possibilidades originadas no subproblema.

Observe que cada intervalo k' corresponde a uma coluna, sendo assim, existirão tantos subproblemas quanto a cardinalidade do conjunto K' . Cada subproblema é definido por todos os intervalos $k \in K_{k'}$, sendo $K_{k'}$ o conjunto dos índices dos intervalos que definem o intervalo interseccionado $k' \in K'$. Dessa forma, o modelo para encontrar o menor custo reduzido das variáveis não-básicas $\lambda_{k'q}$, pode ser formulado considerando as variáveis duais π_{ijf} e θ_{ij} , associadas às restrições (52) e (53), respectivamente; bem como as variáveis de decisão y_{ijfk} e w_{ijk} , definidas por:

$$y_{ijfk} = \begin{cases} 1 & \text{se o veículo do tipo } f \text{ atender ao arco de serviço } (i, j) \text{ no intervalo de índice } k; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$w_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se a demanda do arco } (i, j) \text{ for satisfeita no intervalo de índice } k; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Conhecidas as variáveis de decisão e os valores das variáveis duais, para cada arco $(i, j) \in A_k^{se}$ do intervalo interseccionado $k' \in K'$, pode-se formular o subproblema conforme segue:

$$\min c_{k'q} - \theta_{k'} - \sum_{k \in K_{k'}} \sum_{(i,j) \in A_k^{se}} \sum_{f \in F} \pi_{ijf} y_{ijfk} \quad (56)$$

s.t.

$$\sum_{(i,j) \in A_k^{se}} \sum_{f \in F} p_f y_{ijfk} \geq \sum_{(i,j) \in A_k^{se}} P_{ij} w_{ijk} \quad \forall k \in K_{k'} \quad (57)$$

$$\sum_{k \in K_{ij}} w_{ijk} = 1 \quad \forall (i, j) \in A_k^{se} \quad (58)$$

$$\sum_{f \in F} y_{ijfk} \leq w_{ijk} \quad \forall k \in K_{k'}, \forall (i, j) \in A_k^{se} \quad (59)$$

$$y_{ijfk} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K_{k'}, \forall (i, j) \in A_k^{se}, \forall f \in F \quad (60)$$

$$w_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K_{k'}, \forall (i, j) \in A_k^{se} \quad (61)$$

No subproblema, a restrição (57) garante o atendimento da demanda em cada intervalo, a restrição (58) assegura que a demanda de um arco de serviço deve estar alocada em apenas um intervalo e a restrição (59) garante que a demanda de um arco de serviço estará contida no mesmo intervalo ao qual este arco pertence. Por fim, as restrições (60) e (61) referem-se ao domínio das variáveis de decisão y_{ijfk} e w_{ijk} , respectivamente.

As restrições do subproblema (57)-(61) subsidiam a escolha das combinações de arcos, nos intervalos interseccionados, que devem ser usadas. Essas restrições são similares àquelas aplicadas no modelo VTSP-CCT, considerando-se os intervalos $k \in K_{k'}$, sem a necessidade de inclusão da restrição de fluxo. Isso porque, a restrição de fluxo (50) é resolvida no PMRR, garantindo a sinergia entre o PMRR e o subproblema, o que proporciona a obtenção de soluções que correspondam as do VTSP-CCT. Ainda, nesta formulação, as capacidades dos veículos são consideradas explicitamente, assegurando que as colunas inseridas no PMRR possibilitem a adequada alocação de veículos para cada um dos intervalos unitários e não-unitários. No algoritmo de GC, as colunas são geradas pelo subproblema e adicionadas ao PMRR se o valor do problema *pricing* (56), que representa o custo reduzido de uma coluna, for negativo.

Perceba que, como as variáveis $\lambda_{k'q}$ apresentam coeficiente nulo na função objetivo (49) do Problema Mestre, $c_{k'q} = 0$, a formulação do custo reduzido (56) pode ser reescrita conforme dedução a seguir:

$$\begin{aligned} \min c_{k'q} - \theta_{k'} - \sum_{k \in K_{k'}} \sum_{(i,j) \in A_k^{se}} \sum_{f \in F} \pi_{ijf} y_{ijfk} = \\ \min - \theta_{k'} - \sum_{k \in K_{k'}} \sum_{(i,j) \in A_k^{se}} \sum_{f \in F} \pi_{ijf} y_{ijfk} = \\ \max \theta_{k'} + \sum_{k \in K_{k'}} \sum_{(i,j) \in A_k^{se}} \sum_{f \in F} \pi_{ijf} y_{ijfk} \end{aligned}$$

Assim, o subproblema assume a forma:

$$\max \theta_{k'} + \sum_{k \in K_{k'}} \sum_{(i,j) \in A_k^{se}} \sum_{f \in F} \pi_{ijf} y_{ijfk} \quad (62)$$

s.t.

$$(57) - (61)$$

6.2.3 Geração de Colunas

Apresentadas as formulações do Problema Mestre e do Subproblema, deve-se definir como será gerada a solução inicial e como os resultados da CG serão factibilizados como solução do Problema Mestre (binário), visto que a solução ótima do PMRR não é necessariamente inteira. Ainda, como não se tem informações suficientes para escolher a qual intervalo cada arco de serviço pertence, a solução inicial para o algoritmo de CG é obtida atendendo cada arco, inserido em intervalos não unitários, considerando o veículo que tiver a menor capacidade capaz de atender a demanda. Por fim, para obter uma solução binária viável ao Problema Mestre, optou-se por utilizar um dos procedimentos sugeridos por Furini *et al.* (2012), detalhado na Figura 23. A partir dessas considerações, adaptando-se a estrutura sugerida por Barnhart *et al.* (1998), o algoritmo de geração de colunas proposto pode ser descrito como segue:

Passo 1. *Determine os parâmetros para o PMR inicial:* São definidos os parâmetros de intervalos de tempo Δt e de tipos de veículos utilizados na composição da frota heterogênea e relaxadas as restrições binárias (54) e (55) das variáveis x_{ijf} e $\lambda_{k'q}$, respectivamente, a fim de originar o PMRR.

Passo 2. *Construa uma solução inicial:* A solução inicial é obtida atendendo cada arco, inserido em intervalos interseccionados, considerando o tipo de veículo com menor capacidade capaz de atender a demanda.

Passo 3. *Resolva o PMRR inicial:* O PMRR inicial é resolvido considerado o subconjunto de variáveis $\lambda_{k'q}$, $k' \in K'$, $q \in Q'_{k'} \subsetneq Q_{k'}$, de forma a obter as variáveis primais x_{ijf} e $\lambda_{k'q}$ e as variáveis duais π_{ijf} e θ_{ij} associadas às restrições (52) e (53), respectivamente.

Passo 4. *Resolva o subproblema:* Para cada intervalo interseccionado $k' \in K'$ é resolvido um subproblema através de um algoritmo de programação linear inteira em função das variáveis duais atualizadas π_{ijf} e θ_{ij} , a fim de encontrar a solução para o problema de *pricing*.

Passo 5. *Teste da otimalidade da GC:* Se o valor do problema de *pricing*, encontrado no Passo 4, possuir custo reduzido negativo, vá para o Passo 6. Caso contrário, vá para o Passo 7.

Passo 6. *Atualização do PMRR:* Atualize o conjunto $Q'_{k'}$ e insira as colunas que indicam como combinar os arcos de serviço em cada intervalo $k' \in K'$, as quais contribuíram para a obtenção dos custos negativos reduzidos no problema de *pricing*. Gere as novas variáveis duais π_{ijf} e θ_{ij} e retorne ao Passo 4.

Passo 7. *Arredondamento:* Se todas as variáveis forem inteiras PARE, caso contrário, utilize uma heurística para encontrar a solução inteira.

A heurística para obter a solução inteira utilizada é uma das sugeridas por Furini *et al.* (2012), que consiste em resolver no solver de PLI a formulação do Problema Mestre (49)-(55), considerando todas as variáveis encontradas para resolver na otimalidade o PMRR. O algoritmo de resolução da GC sugerido por Furini *et al.* (2012) e implementado neste trabalho encontra-se na Figura 23.

Figura 23 – Algoritmo de geração de colunas para a obtenção da solução inteira na GC (FURINI *et al.*, 2012)

```

begin
  Inicialize o conjunto  $Q'_{k'}$  com a solução inicial
  1. Resolva o PMRR por geração de colunas e atualize o conjunto  $Q'_{k'}$  adicionando as
  colunas geradas;
  2. Resolva o Problema Mestre (49)-(55) com o solver de PLI considerando o
  subconjunto das variáveis  $\lambda_{k'q}$ ,  $k' \in K'$ ,  $q \in Q'_{k'} \subsetneq Q_{k'}$ .
end

```

No Apêndice C é detalhado um exemplo de aplicação da GC proposta nesta tese, considerando as viagens apresentadas na Figura 22.

7 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Neste Capítulo são apresentados os resultados computacionais obtidos para avaliar as abordagens de otimização propostas. Essas abordagens foram implementadas em linguagem de programação C++ e os testes computacionais executados em uma máquina com processador Intel[®] Xeon[®] CPU E5-1603 com 2.8 GHz e 16 GB RAM. O resolvidor de PLI utilizado foi o IBM[®] ILOG[®] CPLEX[®] Optimization Studio V12.5.

Para validar os modelos desenvolvidos foram utilizadas instâncias reais (detalhes na Seção 3.4.1) e aleatórias (Seção 3.4.2). Os testes com instâncias reais, advindas do sistema de transporte público da cidade de Santa Maria -RS, possibilitaram validar os modelos sob o ponto de vista prático. Além disso, pôde-se comparar as soluções geradas pelos modelos com aquelas utilizadas pelas empresas de transporte público. Já as instâncias aleatórias foram desenvolvidas para apresentarem um número muito alto de viagens, para validar a robustez dos modelos na resolução de instâncias de grande porte (5000 viagens).

Na Tabela 7 são apresentadas as características das instâncias reais e aleatórias, com as respectivas origens (Origem), número de viagens (# Viagens), número de terminais (# Terminais) e número de veículos utilizados na prática para as instâncias reais (# Veículos). Para cada uma das dez configurações das instâncias totalmente aleatórias (aleatórias) e aleatórias que simulam a demanda dos horários de pico (aleatórias com horários de pico), foram geradas cinco instâncias e a média dos resultados das mesmas indicam os resultados de cada configuração. Ao total, considerando todos os modelos apresentados, 2300 instâncias foram utilizadas nos experimentos computacionais. A partir de uma análise do comportamento da demanda no sistema de transporte público de Santa Maria, geraram-se as instâncias

totalmente aleatórias com número mínimo de passageiros igual a 20 e número máximo igual a 110. Já as instâncias com horários de pico, dada esta característica, foram geradas considerando um mínimo de 20 passageiros e máximo de 140, tendo em vista que o veículo de maior capacidade disponível comporta 141 passageiros.

Tabela 7 – Características das instâncias testadas

Configuração	Origem	# Viagens	# Terminais	# Veículos
60_8	Real	60	8	15
469_9	Real	469	9	43
530_16	Real	530	16	58
1000_10A	Aleatória	1000	10	-
1000_23A	Aleatória	1000	23	-
2000_10A	Aleatória	2000	10	-
2000_23A	Aleatória	2000	10	-
3000_10A	Aleatória	3000	10	-
3000_23A	Aleatória	3000	23	-
4000_10A	Aleatória	4000	10	-
4000_23A	Aleatória	4000	23	-
5000_10A	Aleatória	5000	10	-
5000_23A	Aleatória	5000	23	-
1000_10AP	Aleatória com horários de pico	1000	10	-
1000_23AP	Aleatória com horários de pico	1000	23	-
2000_10AP	Aleatória com horários de pico	2000	10	-
2000_23AP	Aleatória com horários de pico	2000	10	-
3000_10AP	Aleatória com horários de pico	3000	10	-
3000_23AP	Aleatória com horários de pico	3000	23	-
4000_10AP	Aleatória com horários de pico	4000	10	-
4000_23AP	Aleatória com horários de pico	4000	23	-
5000_10AP	Aleatória com horários de pico	5000	10	-
5000_23AP	Aleatória com horários de pico	5000	23	-

A frota heterogênea considerada é referente a três tipos de veículos: o do tipo A com capacidade de 141 lugares, o do tipo B com 100 lugares e o do tipo C com 83 lugares. Para cada tipo de veículo, é definida uma penalidade adicionada ao custo, proporcional à capacidade do ônibus. Ainda, definiu-se um alto custo fixo ao arco de circulação (10^6), a fim de minimizar prioritariamente o número total de veículos. Dessa forma, os valores exibidos para a função objetivo (F.O) dos modelos serão elevados, pois serão balizados por esta cardinalidade.

Para cada um dos modelos testados será destinada uma Seção deste Capítulo. Na Seção 7.1 são discutidos os resultados do modelo VTSP-TW, na Seção 7.2 os resultados do modelo VTSP-SCT e, finalmente, na Seção 7.3 os resultados do modelo VTSP-CCT, abrangendo a análise dos resultados advindos da implementação da técnica de geração de colunas.

7.1 RESULTADOS COMPUTACIONAIS PARA O VTSP-TW

O modelo VTSP-TW visa à inclusão de janelas de tempo ao problema de escalonamento de veículos com frota heterogênea (VTSP). A partir da aplicação dessas janelas, algumas viagens tornam-se compatíveis, e a tabela de horários pode ser redefinida para uma melhor adequação. O objetivo maior do VTSP-TW é garantir ganhos operacionais, minimizando o número de veículos necessários para atender à demanda, apenas ajustando alguns horários de partida em poucos minutos.

Os testes realizados para o modelo VTSP-TW visam dois objetivos: 1) identificar o número de veículos utilizados nesta abordagem e comparar com o escalonamento real das empresas de transportes públicos ou com o escalonamento do modelo VTSP, que não apresenta janelas de tempo; 2) comprovar a sua equivalência ao modelo de janelas de tempo desenvolvido por Kliewer, Bunte e Suhl (2006) e Kliewer, Amberg e Amberg (2012). São utilizadas as instâncias apresentadas na Tabela 7 com janelas de tempo (T_{tw}) de 1 e 2 minutos, com tempo de solução computacional para os testes limitado em 7200 segundos (2 horas). Inicialmente, analisam-se as instâncias reais e, na sequência, as instâncias de caráter aleatório.

7.1.1 Testes com instâncias reais

A análise dos testes com instâncias reais recai sobre a comparação dos resultados do modelo VTSP-TW com os resultados do modelo VTSP, com o modelo de Kliewer e com o número de veículos utilizados na prática no escalonamento do transporte público. Os resultados do modelo VTSP serão utilizados em todas as análises deste Capítulo, tendo em vista que eles servirão de parâmetro de comparação para os resultados obtidos nas abordagens desenvolvidas.

Na Tabela 8 são exibidas algumas características dos modelos VTSP, VTSP-TW e de Kliewer, para cada janelas de tempo (T_{tw}), em termos de número de variáveis (# Var.), restrições (# Rest.), variáveis Não-zero (# Não-zero) e arcos de serviço (# A^{se}). Essa análise faz-se necessária para a comparação do tamanho das redes criadas em cada modelo.

Os arcos de serviço para os modelos VTSP e VTSP-TW são gerados em mesma quantidade, pois são iguais ao número de viagens da instância. Já para a abordagem de Kliewer, tendo em vista a geração dos arcos de janela de tempo como sombra

Tabela 8 – Características dos modelos VTSP, VTSP-TW e de Kliewer para as instâncias reais

Modelo	Inst.	T_{tw}	#Var.	#Rest.	#Não-Zero	#A ^{se}
VTSP	60_8	0	1116	558	2592	60
	469_9	0	9432	4043	21678	469
	530_16	0	10434	4435	24048	530
VTSP-TW	60_8	1	1119	560	2610	60
	60_8	2	1119	560	2610	60
	469_9	1	9636	4179	22920	469
	469_9	2	9825	4305	24066	469
	530_16	1	10725	4642	25656	530
	530_16	2	10965	4802	27126	530
Kliewer	60_8	1	1929	666	4236	63
	60_8	2	2763	777	5916	65
	469_9	1	18045	5549	40170	680
	469_9	2	27552	6944	59916	802
	530_16	1	20091	6118	44796	769
	530_16	2	30837	7657	67194	920

dos arcos de serviço, esse número tende a ser bem superior ao número de viagens, sendo que para a instância 530_16, o modelo de Kliewer gera 73,58% mais arcos de serviço do que o VTSP-TW. Referente às variáveis, restrições e variáveis não-zero, também se nota uma quantidade superior no modelo de Kliewer do que nos outros dois modelos. Tal resultado indica que o objetivo para o qual o VTSP-TW foi desenvolvido foi atingido, tendo em vista que o mesmo gera uma rede de menor tamanho, possibilitando uma melhor integração a outros modelos de otimização. A análise comparativa detalhada desses resultados está na Tabela 10.

Além de comparar as características dos modelos, na Tabela 9 analisam-se os resultados em termos de função objetivo (F.O), tempo de solução em segundos (Tempo (s)), número total de veículos por tipo e quantidade de arcos de janela de tempo utilizados (# TW ativos).

Comparando-se o número de veículos utilizados na prática com os otimizados, percebe-se economia considerável a partir da aplicação dos modelos. Já no VTSP nota-se redução no número de veículos necessários para atender a demanda, sem a necessidade de utilização das janelas de tempo. Para a instância de maior porte (530_16), obtém-se redução de 7 veículos (14%) com a aplicação desse modelo. A economia para esta instância é ainda maior quando se aplicam janelas de tempo de 1 ou 2 minutos, chegando a 8 veículos (16%). Importante destacar que para a obtenção deste resultado, foi utilizado apenas um arco de janela de tempo, ou seja,

Tabela 9 – Resultados em termos de solução dos modelos VTSP, VTSP-TW e de Kliewer para as instâncias reais

Modelo	Inst.	T_{tw}	F.O.	Tempo (seg.)	# Veículos				#TW ativos
					A	B	C	Total	
VTSP	60_8	0	1,412E+11	0,04	1	2	10	13	0
	469_9	0	4,166E+11	1,08	0	3	38	41	0
	530_16	0	5,278E+11	1,67	1	5	45	51	0
VTSP-TW	60_8	1	1,412E+11	0,06	1	2	10	13	0
	60_8	2	1,412E+11	0,06	1	2	10	13	0
	469_9	1	4,166E+11	2,38	0	3	38	41	0
	469_9	2	4,166E+11	1,99	0	3	38	41	0
	530_16	1	5,178E+11	3,74	1	5	44	50	1
	530_16	2	5,178E+11	4,91	1	5	44	50	1
Kliewer	60_8	1	1,412E+11	0,08	1	2	10	13	0
	60_8	2	1,412E+11	0,09	1	2	10	13	0
	469_9	1	4,166E+11	3,79	0	3	38	41	0
	469_9	2	4,166E+11	10,49	0	3	38	41	0
	530_16	1	5,178E+11	5,39	1	5	44	50	1
	530_16	2	5,178E+11	10,23	1	5	44	50	1

só foi necessário o uso da janela de tempo de uma viagem dentre as 530 escalonadas. A distribuição dos veículos também se faz adequada ao que tem sido aplicado na prática das empresas de transporte, utilizando um número bastante reduzido de veículos articulados, de custos mais elevados. Comparando-se os modelos VTSP-TW e de Kliewer, percebe-se que a utilização dos veículos por tipo é a mesma, independentemente da janela de tempo.

Quanto ao tempo de solução, percebe-se que a resolução dos modelos VTSP e VTSP-TW demanda menos tempo do que a resolução do modelo de Kliewer. Para ambos os modelos, todas as instâncias foram resolvidas na otimalidade em menos de 5 segundos, outro aspecto que indica a possibilidade de aplicação dos mesmos ao contexto real. Cabe ainda considerar que, conforme aumenta o número de viagens, o escalonamento dos veículos tende a se tornar proibitivo para ser elaborado manualmente, corroborando a importância de se adotar métodos de otimização computorizados no apoio a essas atividades, a fim de garantir economias no planejamento.

Para conhecer o resultado da tabela de horários a partir da aplicação das janelas de tempo, faz-se uma decodificação da rede pós-otimização, obtendo-se sugestões de horários de partida para algumas viagens. Na Figura 24, apresenta-se a sugestão de modificação de horário de partida para uma viagem da instância 530_16. Ressalta-se que esta instância teve a incidência de apenas um arco de janela de tempo, para

ambos os T_{tw} adotados, tanto para o modelo VTSP-TW quanto para o modelo de Kliewer. Assim, somente um horário foi alterado e os demais permaneceram iguais aos anteriormente definidos, tendo em vista que esta instância não apresenta um número muito grande de viagens.

Figura 24 – Tabela de horários parcial atual e sugerida para a instância real 530_16 com a aplicação do modelo VTSP-TW para T_{tw} de 1 e 2 minutos

Tabela de horários atual				Tabela de horários sugerida			
Horário		Terminal		Horário		Terminal	
Partida	Chegada	Origem	Destino	Partida	Chegada	Origem	Destino
...
6:20	7:25	C	E	6:20	7:25	C	E
6:20	6:59	A	C	6:20	6:59	A	C
6:25	7:30	H	C	6:25	7:30	H	C
6:25	6:55	D	C	6:25	6:55	D	C
6:27	6:55	C	A	6:27	6:55	C	A
6:30	7:29	E	C	6:30	7:29	E	C
6:30	7:05	B	C	6:30	7:05	B	C
6:30	7:02	A	C	6:30	7:02	A	C
6:35	7:05	H	C	6:35	7:05	H	C
6:35	7:09	E	C	6:35	7:09	E	C
6:38	7:08	A	C	6:38	7:08	A	C
6:40	7:25	B	C	6:40	7:25	B	C
6:41	7:16	E	C	6:41	7:16	E	C
6:42	7:07	C	A	6:42	7:07	C	A
6:45	7:14	C	D	6:45	7:14	C	D
6:45	7:24	B	C	6:44	7:23	B	C
6:46	7:50	A	C	6:46	7:50	A	C
6:46	7:39	G	C	6:46	7:39	G	C
6:47	7:22	E	C	6:47	7:22	E	C
6:47	7:10	B	C	6:47	7:10	B	C
6:48	7:18	A	C	6:48	7:18	A	C
...

Para readequar a tabela de horários e economizar oito veículos, em comparação ao escalonamento realizado na prática, sugere-se adiantar em um minuto o horário de partida da viagem que ocorre às 6h45min partindo do terminal B em direção ao terminal C. Esta modificação ocorre de maneira tão sutil na tabela de horários que, na prática, está inserida no limite de atraso ou adiantamento dos horários de partida já vivenciados pelos passageiros, considerando as condições de tráfego, cabendo aos gestores decidir a necessidade de se alterar o horário divulgado à população. Este resultado demonstra a aplicação do VTSP-TW ao contexto real, tendo em vista que possibilitou, com a inclusão de um único arco de janela de tempo, economias consideráveis no escalonamento da frota heterogênea de ônibus.

Para melhor dimensionar os resultados, na Tabela 10 são analisadas as proporções entre as características e resultados dos modelos VTSP, VTSP-TW e de Kliewer.

Nesta análise foi aplicada uma proporção, calculada como $R(x, y) = [1 - (x/y)] * 100$, em que x e y são os parâmetros de comparação. Assim, obteve-se as proporções para o modelo VTSP com os modelos VTSP-TW e de Kliwer, bem como a proporção do modelo de Kliwer e do VTSP-TW, a fim de verificar as suas equivalências.

Tabela 10 – Relação proporcional entre os modelos VTSP, VTSP-TW e de Kliwer para as instâncias reais

Relação	Inst.	T_{tw}	Var.	Rest.	Não-Zero	A^{se}	Tempo (s)	Veículos
R(VTSP,VTSP-TW)	60_8	1	0,27%	0,36%	0,69%	0,00%	33,33%	0,00%
	469_9	1	2,12%	3,25%	5,42%	0,00%	54,62%	0,00%
	530_16	1	2,71%	4,46%	6,27%	0,00%	55,35%	-2,00%
	60_8	2	0,27%	0,36%	0,69%	0,00%	33,33%	0,00%
	469_9	2	4,00%	6,09%	9,92%	0,00%	45,73%	0,00%
	530_16	2	4,84%	7,64%	11,35%	0,00%	65,99%	-2,00%
R(VTSP,Kliwer)	60_8	1	42,15%	16,22%	38,81%	4,76%	50,00%	0,00%
	469_9	1	47,73%	27,14%	46,03%	31,03%	71,50%	0,00%
	530_16	1	48,07%	27,51%	46,32%	31,08%	8,91%	-2,00%
	60_8	2	59,61%	28,19%	56,19%	7,69%	55,56%	0,00%
	469_9	2	65,77%	41,78%	63,82%	41,52%	89,70%	0,00%
	530_16	2	66,16%	42,08%	64,21%	42,39%	83,68%	-2,00%
R(Kliwer,VTSP-TW)	60_8	1	-72,39%	-18,93%	-62,30%	-5,00%	-33,33%	0,00%
	469_9	1	-87,27%	-32,78%	-75,26%	-44,99%	-59,24%	0,00%
	530_16	1	-87,33%	-31,80%	-74,60%	-45,09%	-44,12%	0,00%
	60_8	2	-146,92%	-38,75%	-126,67%	-8,33%	-50,00%	0,00%
	469_9	2	-180,43%	-61,30%	-148,97%	-71,00%	-427,14%	0,00%
	530_16	2	-181,23%	-59,45%	-147,71%	-73,58%	-108,35%	0,00%

A proporção de variáveis, restrições, variáveis não-zero e arcos de serviço é sempre maior na abordagem de Kliwer, independentemente do tamanho da janela de tempo. Tendo em vista a criação dos arcos de janela de tempo como duplicação (sombra) dos arcos de serviço, a abordagem de Kliwer tem um acréscimo considerável desses arcos, o que não ocorre nos outros dois modelos. Esta foi a principal razão para o desenvolvimento da abordagem VTSP-TW, permitir uma rede com um tamanho menor em termos de arcos de serviço, o que é de grande valia para a integração das janelas de tempo aos modelos VTSP-SCT e VTSP-CCT. Para a instância 538_16, o modelo de Kliwer aumenta em 73,58% o número de arcos de serviço gerados se comparado com o modelo VTSP-TW. Essa proporção é ainda maior em algumas instâncias aleatórias (Tabelas 21 e 22 no Apêndice B).

Em relação ao tempo de solução, observa-se que o modelo VTSP-TW é resolvido mais rápido do que o modelo de Kliwer. Além disso, há certa predominância no

aumento no tempo de resolução dos modelos quando se utiliza janelas de tempo de 2 minutos. Ainda, para as duas instâncias de menor porte, não se observa variação no número de veículos escalonados entre o modelo VTSP e os modelos com aplicação de janelas de tempo. Isso é explicado pelo tamanho da instância, acarretando que independentemente da aplicação ou não das janelas de tempo, as economias em número de veículos são praticamente as mesmas. Economias de veículos pela utilização de janelas de tempo tendem a surgir em instâncias maiores, pois nelas há uma capacidade reduzida de o gestor encontrar uma melhor configuração de veículos para adequar à demanda. Os testes para casos reais tendem a indicar que ambas as abordagens de janela de tempo são equivalentes, conservando até mesmo a distribuição de veículos por tipo. No entanto, para que se possa garantir essa equivalência, serão analisadas instâncias aleatórias de grande porte.

7.1.2 Testes com instâncias aleatórias

Tendo em vista a grande quantidade de instâncias aleatórias testadas, nesta seção serão elencados e analisados apenas os resultados mais relevantes. Cabe salientar, que os resultados computacionais para a média de cada configuração das instâncias aleatórias e aleatórias em horário de pico para os modelos VTSP, VTSP-TW e de Kliwer são apresentadas no Apêndice B (Tabela 18 até Tabela 22). De modo geral, obteve-se economia no número de veículos escalonados para todas as instâncias quando da aplicação de janelas de tempo (modelos VTSP-TW e de Kliwer), em comparação do modelo VTSP. Quando janelas T_{tw} de dois minutos são utilizadas, as economias são ainda maiores. Este resultado corrobora os já discutidos para as instâncias reais, indicando que a compatibilização de viagens, proporcionada pelos pequenos intervalos de janelas de tempo, tende a gerar uma redução significativa no número total de ônibus necessários para atender a demanda. Ainda, salienta-se que nenhuma instância ultrapassou o tempo limite de execução (7200 segundos) para gerar a solução ótima, sendo que, em média, 1 hora foi o tempo máximo necessário para rodar as instâncias de maior porte.

Comparando-se especificamente os modelos VTSP-TW e de Kliwer, conclui-se que o número de variáveis, variáveis não-zero e arcos de serviço é sempre menor para o primeiro. Tal resultado também é encontrado para a quantidade de restrições

geradas na maioria das instâncias, sendo que em apenas 3 situações o número de restrições foi maior no VTSP-TW. Em consequência desta rede de menor tamanho, o tempo de solução computacional é, geralmente, mais baixo para o VTSP-TW, havendo aumento considerável de tempo quando são aplicadas janelas de tempo de 2 minutos em comparação às de 1 minuto (para ambos os modelos). Por fim, o número de veículos escalonados em ambas as abordagens é o mesmo para a grande maioria das instâncias, sendo que boa parte dos resultados divergentes são apresentados na Tabela 11 - e analisadas as suas relações proporcionais na Tabela12 - por se tratarem de situações bem específicas, que merecem discussão mais apurada.

Tabela 11 – Resultados em termos de solução dos modelos VTSP, VTSP-TW e de Kliewer para algumas instâncias de característica aleatória

Modelo	Inst.	T_{tw}	F.O.	Tempo (seg.)	# Veículos				#TW ativos
					A	B	C	Total	
VTSP	3000_10A	0	1,55449E+12	166,53	24,4	28,6	79,6	132,6	0
	3000_23A	0	1,69308E+12	553,28	27,8	31,8	83,4	143	0
	5000_23A	0	2,53768E+12	2060,19	34,8	50,6	133,8	219,2	0
	2000_23AP	0	1,25465E+12	171,94	21	38,6	43,4	103	0
	5000_10AP	0	2,4383E+12	391,54	39,2	75,6	86,4	201,2	0
VTSP-TW	3000_10A	1	1,53749E+12	168,36	23,6	28,6	78,8	131,0	8,0
	3000_10A	2	1,50647E+12	196,32	23,0	28,0	77,4	128,4	23,4
	3000_23A	1	1,6538E+12	662,63	26,2	30,0	83,8	140,0	7,0
	3000_23A	2	1,6229E+12	788,92	25,8	29,8	82,0	137,6	21,6
	5000_23A	1	2,49777E+12	2396,36	35,0	49,6	129,4	214,0	17,0
	5000_23A	2	2,45158E+12	2647,14	34,6	49,0	125,8	209,4	51,6
	2000_23AP	1	1,24364E+12	172,04	21,0	38,0	42,6	101,6	3,6
	2000_23AP	2	1,21818E+12	190,89	21,0	37,2	41,0	99,2	9,0
	5000_10AP	1	2,38861E+12	534,94	38,2	74,0	84,4	196,6	10,0
	5000_10AP	2	2,33504E+12	654,82	37,2	72,4	82,4	192,0	40,4
Kliewer	3000_10A	1	1,53851E+12	180,29	23,8	28,2	78,8	130,8	9,4
	3000_10A	2	1,50669E+12	364,19	23,2	28,4	76,6	128,2	25,8
	3000_23A	1	1,67302E+12	834,16	27,2	31,4	82,4	141,0	7,6
	3000_23A	2	1,64762E+12	1183,19	27,0	32,0	79,8	138,8	17,0
	5000_23A	1	2,49754E+12	1767,17	35,2	50,0	129,0	214,2	15,6
	5000_23A	2	2,44986E+12	2493,19	34,8	49,2	125,8	209,8	47,6
	2000_23AP	1	1,24164E+12	139,10	21,0	38,0	42,4	101,4	3,8
	2000_23AP	2	1,2142E+12	213,81	21,0	37,2	40,6	98,8	10,4
	5000_10AP	1	2,38724E+12	529,59	38,0	74,0	84,6	196,6	11,8
	5000_10AP	2	2,33073E+12	1204,84	37,6	71,8	82,2	191,6	48,0

Os resultados dos testes computacionais das instâncias apresentadas nas Tabelas 11 e 12 indicam pequenas diferenças no número de veículos escalonados nos modelos VTSP-TW e de Kliewer. Tais divergências são inferiores a 1% e representam, no máximo, um veículo escalonado para mais ou para menos em cada um dos mode-

Tabela 12 – Relação proporcional entre os modelos VTSP, VTSP-TW e de Kliewer para algumas instâncias de característica aleatória

Relação	Inst.	T_{tw}	Var.	Rest.	Não-Zero	A^{se}	Tempo (s)	Veículos
R(VTSP,VTSP-TW)	3000_10A	1	2,98%	6,96%	7,96%	0,00%	1,09%	-1,22%
	3000_10A	2	5,78%	12,98%	14,73%	0,00%	15,17%	-3,27%
	3000_23A	1	0,81%	2,98%	2,27%	0,00%	-36,29%	-1,43%
	3000_23A	2	1,57%	5,66%	4,36%	0,00%	-14,48%	-3,20%
	5000_23A	1	1,31%	5,07%	3,70%	0,00%	14,03%	-2,43%
	5000_23A	2	2,58%	9,66%	7,14%	0,00%	22,17%	-4,68%
	2000_23AP	1	0,52%	1,86%	1,48%	0,00%	0,06%	-1,38%
	2000_23AP	2	1,01%	3,54%	2,83%	0,00%	9,93%	-3,83%
	5000_10AP	1	4,95%	12,28%	13,01%	0,00%	26,81%	-2,34%
	5000_10AP	2	9,45%	21,92%	23,09%	0,00%	40,21%	-4,79%
R(VTSP,Kliewer)	3000_10A	1	15,61%	10,15%	17,56%	31,97%	7,63%	-1,38%
	3000_10A	2	47,87%	24,70%	47,94%	48,61%	54,27%	-3,43%
	3000_23A	1	5,50%	6,75%	6,45%	19,02%	33,67%	-1,28%
	3000_23A	2	29,49%	19,93%	29,61%	31,44%	53,24%	-3,35%
	5000_23A	1	8,02%	8,60%	9,44%	26,67%	-16,58%	-2,33%
	5000_23A	2	32,81%	20,38%	33,47%	42,12%	17,37%	-4,48%
	2000_23AP	1	3,82%	5,11%	4,45%	13,34%	-23,61%	-1,58%
	2000_23AP	2	27,42%	19,21%	27,18%	23,18%	19,58%	-4,25%
	5000_10AP	1	21,27%	9,99%	23,97%	41,53%	26,07%	-2,34%
	5000_10AP	2	52,79%	21,53%	53,46%	58,61%	67,50%	-5,01%
R(Kliewer, VTSP-TW)	3000_10A	1	-14,96%	-3,55%	-11,65%	-46,99%	-7,08%	0,15%
	3000_10A	2	-80,73%	-15,56%	-63,81%	-94,59%	-85,51%	0,16%
	3000_23A	1	-4,97%	-4,05%	-4,47%	-23,48%	-25,89%	-0,14%
	3000_23A	2	-39,61%	-17,82%	-35,87%	-45,86%	-49,98%	0,15%
	5000_23A	1	-7,30%	-3,86%	-6,33%	-36,38%	26,26%	-0,09%
	5000_23A	2	-44,99%	-13,46%	-39,56%	-72,77%	5,82%	-0,19%
	2000_23AP	1	-3,43%	-3,43%	-3,11%	-15,39%	19,15%	0,20%
	2000_23AP	2	-36,39%	-19,39%	-33,44%	-30,18%	-12,00%	0,40%
	5000_10AP	1	-20,74%	2,54%	-14,41%	-71,04%	1,00%	0,00%
	5000_10AP	2	-91,79%	0,50%	-65,24%	-141,58%	-83,99%	0,21%

los. Nota-se, claramente, que conforme aumenta o número de arcos de janela de tempo ativos, tende-se a diminuir o número de veículos escalonados. Como existem algumas situações para as quais os modelos VTSP-TW e de Kliewer não podem ativar arcos de janela de tempo, é razoável que existam essas pequenas divergências de resultados. Os casos que incorrem a não ativação dos arcos de janela de tempo em cada um dos modelos foram detalhadamente relatadas na Seção 5.1, e tendem a possibilitar uma maior ou menor compatibilização de viagens de serviço, impactando na composição da frota. Quanto à distribuição dos veículos por tipo, também observam-se similaridades entre os modelos, havendo uma tendência de o VTSP-TW utilizar uma quantidade menor, em média, de veículos do tipo A, com custo mais elevado, o que reforça a aplicação deste modelo a contextos reais.

Ainda, nota-se para a instância 5000_10AP uma das poucas situações em que há um maior número de restrições no modelo VTSP-TW do que no de Kliewer. Isso pode ser reflexo das duas restrições adicionais (Restrições (27) e (28), Seção 5.1) aplicadas ao VTSP-TW para evitar o acúmulo de atrasos e, dependendo das características da instância, podem ser ativadas. Essas restrições são definidas como *lazy* no CPLEX[®], ou seja, são utilizadas apenas quando violadas por uma solução durante o processo de otimização, sendo ativadas com baixa frequência (TÓTH *et al.*, 2013), o que justifica a rede de menor tamanho para o VTSP-TW.

Complementarmente, como uma forma de verificar se havia dominância na força das formulações (KLOTZ; NEWMAN, 2013) do VTSP-TW e de Kliewer, resolveu-se ambos os modelos relaxados, para todas as configurações de instâncias, considerando janelas de tempo de 1 e 2 minutos. As funções objetivo dos modelos relaxados apresentaram soluções bem próximas em termos de minimização dos custos dos veículos, indicando equivalência também neste quesito.

Os resultados discutidos nesta Seção comprovam que a aplicação de janelas de tempo contribui na redução do número de veículos necessários para atender a demanda, indicando vantagens na sua aplicação à prática das empresas de transporte público. Além disso, o modelo VTSP-TW apresenta as seguintes vantagens:

- resultados equivalentes aos do modelo apresentado por Kliewer, Bunte e Suhl (2006) e Kliewer, Amberg e Amberg (2012), despontando como uma proposta alternativa na resolução de instâncias de grande porte e à integração a outros modelos de otimização, dado o menor número de variáveis, restrições, coeficientes não-zero e arcos de serviço gerados.
- fácil implementação computacional, tendo em vista que não são necessárias alterações na estrutura da TSN.
- resolução computacional mais rápida, se comparado ao modelo de Kliewer.
- resultados que tendem a melhor conservar a tabela de horários vigente, não permitindo atrasos sucessivos, pois a aplicação de esperas são obrigatórias após a realização de uma viagem oriunda de um arco de janela de tempo.
- aplicação de intervalos muito curtos de janelas de tempo, minimizando as

alterações da tabela de horários, tornando quase imperceptíveis as alterações de horários na rotina dos passageiros.

O modelo VTSP-TW pode ser utilizado de modo individual, a fim de modificar sutilmente a tabela de horários, ou pode ser integrado à outros modelos de otimização, como o VTSP-SCT e VTSP-CCT propostos nesta tese. Assim, nas seções seguintes, são apresentados os resultados para esses modelos, considerando também a aplicação das janelas de tempo.

7.2 RESULTADOS COMPUTACIONAIS PARA O VTSP-SCT

O modelo VTSP-SCT possibilita o agrupamento da demanda de viagens com mesmo itinerário, que ocorrem em intervalos de tempo muito próximos, e a consequente redefinição da tabela de horários. Conforme a demanda total do intervalo, define-se o tipo de ônibus mais adequado para atendê-la com qualidade, dada a possibilidade de utilização da frota heterogênea. Assim, pode-se diminuir o número de veículos utilizados, tendo em vista que algumas viagens são realizadas com os veículos praticamente vazios, dada a proximidade dos horários de partida dos ônibus, conforme relato dos gestores de transporte público. Por serem considerados intervalos de tempo curtos para o agrupamento, mantém-se a qualidade do atendimento aos usuários.

A fim de comprovar a economia de veículos que pode ser obtida a partir da aplicação do modelo VTSP-SCT no escalonamento dos ônibus, na Seção 7.2.1 discute-se esse modelo tendo como base as instâncias reais. Já na Seção 7.2.2 são apresentados os resultados considerando instâncias aleatórias de grande porte.

7.2.1 Testes com instâncias reais

Os resultados aqui analisados objetivam comparar o número de veículos escalonados a partir da aplicação do modelo VTSP-SCT com os utilizados na prática e os escalonados pelos modelos VTSP e VTSP-TW. Quando se aplica o modelo VTSP-SCT às instâncias reais, busca-se definir algumas viagens que poderiam ser eliminadas da tabela de horários vigente, visto que estão disponíveis veículos com diferentes capacidades, minimizando a frota necessária para atender aos usuários. As viagens que são eliminadas possuem sua demanda acrescentada às outras viagens

pertencentes ao mesmo intervalo de índice k , por isso foram denominadas viagens agrupadas (# Viagens agrupadas). Complementarmente, pode-se adicionar janelas de tempo ao VTSP-SCT, o que tende a melhorar o aproveitamento dos veículos. Utilizam-se intervalos curtos de tempo, tanto para o Δt quanto para o T_{tw} , a fim de minimizar as alterações na tabela de horários vigente. Na Tabela 13 são apresentados os resultados computacionais para essas comparações, considerando-se intervalos de tempo (Δt) de 1, 2 e 3 minutos e janelas de tempo (T_{tw}) de 1 e 2 minutos.

Considerando-se a instância de menor porte (60_8), pôde-se diminuir de 13 para 12 o número de veículos necessários para atender a demanda, se comparados os modelos VTSP e VTSP-SCT com intervalo Δt de 3 minutos, respectivamente. Para este mesmo Δt , quando analisada a redução do número de veículos frente aos utilizados na prática, tem-se 3 veículos a menos, quantidade ainda menor do que aquela encontrada a partir da aplicação do modelo VTSP-TW, o que indica a versatilidade dos modelos desenvolvidos nesta tese para apoiar a gestão do transporte público. Cabe destacar que somente uma viagem foi agrupada para a obtenção deste resultado e que a aplicação das janelas de tempo não contribuíram para a minimização do número de veículos, neste caso, dado o número reduzido de viagens da instância.

Para a instância 469_9 obtém-se redução ainda maior no número de veículos quando aplicado Δt de 3 minutos, passando de 41 veículos do VTSP para 34 no VTSP-SCT, sendo necessário o agrupamento de 24 viagens. Conseqüentemente, na obtenção deste resultado, foi necessário aumentar a quantidade de veículos do tipo A (articulados), para comportar a demanda das viagens agrupadas. Cabe considerar que a inclusão de janelas de tempo também não proporcionou melhorias para esta instância. Comparando-se com os veículos escalonados na prática, pôde-se diminuir 9 ônibus ao utilizar a frota heterogênea, garantindo o atendimento da demanda historicamente registrada.

Por fim, para a instância 530_16 nota-se a maior economia de veículos, sendo esses reduzidos de 51, com o VTSP, para 40 com o VTSP-SCT, considerando Δt de 3 minutos. Para tanto, agruparam-se 45 viagens, sendo necessários 9 ônibus do tipo A, 5 do tipo B e 26 do tipo C para atender a demanda. Ao adicionar janela de tempo de 1 minuto para este agrupamento, pode-se diminuir em uma

Tabela 13 – Resultados computacionais do modelo VTSP-SCT para as instâncias reais

Inst.	Modelo	Δt	T_{tw}	F.O.	Tempo (seg.)	# Veículos				#Viagens agrupadas	#TW ativos	
						A	B	C	Total			
60_8	VTSP	0	0	1,412E+11	0,04	1	2	10	13	0	0	
	VTSP-TW	0	1	1,412E+11	0,06	1	2	10	13	0	0	
		0	2	1,412E+11	0,06	1	2	10	13	0	0	
	VTPS-SCT	1	0	1,412E+11	0,03	1	2	10	13	0	0	
		2	0	1,412E+11	0,02	1	2	10	13	0	0	
		3	0	1,362E+11	0,03	2	1	9	12	1	0	
		1	1	1,412E+11	0,03	1	2	10	13	0	0	
		2	1	1,412E+11	0,03	1	2	10	13	0	0	
		3	1	1,362E+11	0,03	2	1	9	12	1	0	
		1	2	1,412E+11	0,03	1	2	10	13	0	0	
		2	2	1,412E+11	0,03	1	2	10	13	0	0	
		3	2	1,362E+11	0,04	2	1	9	12	1	0	
		469_9	VTSP	0	0	4,166E+11	1,08	0	3	38	41	0
	VTSP-TW		0	1	4,166E+11	2,38	0	3	38	41	0	0
0			2	4,166E+11	1,99	0	3	38	41	0	0	
VTPS-SCT	1		0	4,136E+11	1,10	1	3	36	40	5	0	
	2		0	3,876E+11	1,91	1	5	31	37	16	0	
	3		0	3,766E+11	2,72	4	4	26	34	24	0	
	1		1	4,136E+11	1,06	1	3	36	40	5	0	
	2		1	3,876E+11	2,17	1	5	31	37	16	0	
	3		1	3,766E+11	2,63	4	4	26	34	24	0	
	1		2	4,136E+11	1,09	1	3	36	40	5	0	
	2		2	3,876E+11	1,99	1	5	31	37	16	0	
	3		2	3,766E+11	2,87	4	4	26	34	24	0	
	530_16		VTSP	0	0	5,278E+11	1,67	1	5	45	51	0
VTSP-TW			0	1	5,178E+11	3,74	1	5	44	50	0	1
		0	2	5,178E+11	4,91	1	5	44	50	0	1	
VTPS-SCT		1	0	5,217E+11	2,33	3	5	41	49	13	0	
		2	0	4,907E+11	3,19	4	6	35	45	25	0	
		3	0	4,737E+11	4,50	9	5	26	40	45	0	
		1	1	5,117E+11	2,40	3	5	40	48	13	1	
		2	1	4,837E+11	2,07	3	6	36	45	23	1	
		3	1	4,667E+11	3,92	8	5	27	40	41	1	
		1	2	5,117E+11	2,16	3	5	40	48	14	1	
		2	2	4,807E+11	3,18	4	6	34	44	27	2	
		3	2	4,667E+11	2,55	8	5	27	40	41	1	

unidade os veículos articulados e aumentar em uma unidade os veículos do tipo C, de menor capacidade, resultando também em 40 veículos, mas obtendo uma F.O de menor valor. Neste caso, foram agrupadas 41 viagens e utilizado 1 arco de janela de tempo. Como a alteração na tabela de horários é pequena dada a inclusão deste arco de janela de tempo, este resultado apresenta-se como o de melhor custo-benefício para a aplicação prática. Ainda, comparando-se com a necessidade de veículos no

contexto real, pode-se reduzir em até 18 veículos a frota vigente ao considerar Δt de 3 minutos.

Conforme os resultados apresentados na Tabela 13, tem-se para cada instância, pelo menos, nove possibilidades de escalonamento diferentes ao utilizar o modelo VTSP-SCT combinado com a abordagem de janelas de tempo, proporcionando, além da redução dos custos, flexibilidade ao gestor na escolha de qual a melhor configuração de escalonamento a utilizar, dados os recursos disponíveis. A análise de cenários possibilitada pela aplicação desses modelos de otimização tende a contribuir na melhora da tomada de decisão das empresas de transporte público, tanto no sentido de renovação da frota quanto na melhor distribuição dos veículos por linhas de ônibus de acordo com a demanda.

Além da distribuição dos veículos por tipo, outro subsídio à tomada de decisão no escalonamento dos veículos é a avaliação da tabela de horários sugerida a partir da aplicação do modelo de otimização. Para exemplificar um resultado do VTSP-SCT, na Figura 25 apresenta-se um extrato da tabela de horários com maior alteração dentre todas as instâncias analisadas na Tabela 13. Dado que a instância ilustrada é a de 530 viagens, torna-se inviável representar toda a tabela de horários, dessa forma selecionou-se o período do dia em que há a maior aglomeração de viagens fechadas pela aplicação do modelo. O intervalo Δt utilizado foi de 3 minutos, o que gerou o fechamento de 45 viagens e a economia de 18 veículos se comparado ao escalonamento realizado na prática. Na Figura 25 é apresentado um recorte da tabela de horários vigente e a sua correspondente a partir da aplicação do VTSP-SCT, bem como um código para facilitar a visualização de como as viagens foram agrupadas.

Este foi considerado o pior cenário pois indicou o fechamento de 8 viagens em um período de tempo inferior a 1 hora. Fazendo a análise de cada agrupamento, obtém-se:

Agrupamento 1: Fechou-se a viagem 7:15 E-C, adicionando sua demanda à da viagem 7:12 E-C. Com esta alteração, os passageiros passam a esperar 5 minutos no terminal pelo próximo ônibus que fará esta viagem (7:17 E-C), ao invés de 2 minutos.

Agrupamento 2: Fechou-se a viagem 7:18 A-C, adicionado sua demanda à da

Figura 25 – Tabela de horários parcial atual e sugerida para a instância real 530_16 com a aplicação do modelo VTSP-SCT para Δt de 3 minutos

Código do agrupamento	Tabela de horários atual				Tabela de horários sugerida			
	Horário		Terminal		Horário		Terminal	
	Partida	Chegada	Origem	Destino	Partida	Chegada	Origem	Destino

	7:10	7:46	C	E	7:10	7:46	C	E
	7:11	8:04	A	C	7:11	8:04	A	C
1	7:12	7:54	E	C	7:12	7:54	E	C
2	7:15	8:19	A	C	7:15	8:19	A	C
1	7:15	8:11	E	C	-----	-----	-----	-----
	7:15	8:02	B	C	7:15	8:02	B	C
	7:17	7:56	C	A	7:17	7:56	C	A
	7:17	7:52	E	C	7:17	7:52	E	C
2	7:18	8:19	A	C	-----	-----	-----	-----
	7:20	8:09	D	C	7:20	8:09	D	C
3	7:22	8:29	G	C	-----	-----	-----	-----
	7:22	8:12	A	C	7:22	8:12	A	C
	7:23	8:06	C	E	7:23	8:06	C	E
3	7:25	8:30	G	C	7:25	8:30	G	C
4	7:25	8:34	A	C	-----	-----	-----	-----
	7:26	8:20	E	C	7:26	8:20	E	C
4	7:27	8:22	A	C	7:27	8:22	A	C
	7:28	7:59	C	A	7:28	7:59	C	A
5	7:30	8:24	A	C	-----	-----	-----	-----
6	7:30	8:26	E	C	7:30	8:26	E	C
6	7:32	8:23	E	C	-----	-----	-----	-----
5	7:33	8:30	A	C	7:33	8:30	A	C
	7:35	8:09	C	E	7:35	8:09	C	E
	7:36	8:23	B	C	7:36	8:23	B	C
	7:40	8:25	E	C	7:40	8:25	E	C
	7:42	8:38	E	C	7:42	8:38	E	C
	7:42	8:24	E	C	7:42	8:24	E	C
7	7:46	8:34	A	C	-----	-----	-----	-----
8	7:47	8:39	E	C	-----	-----	-----	-----
	7:47	8:37	B	C	7:47	8:37	B	C
	7:48	7:51	C	D	7:48	7:51	C	D
	7:48	8:22	C	A	7:48	8:22	C	A
7	7:49	8:39	A	C	7:49	8:39	A	C
8	7:50	9:00	E	C	7:50	9:00	E	C
	7:52	8:31	D	C	7:52	8:31	D	C
	7:52	8:30	A	C	7:52	8:30	A	C

viagem 7:15 A-C. Assim, a espera no terminal será de 7 minutos ao invés de 4 minutos, tendo em vista que a próxima viagem ocorre às 7:22 A-C.

Agrupamento 3: Fechou-se a viagem 7:22 G-C, adicionando sua demanda à viagem 7:25 G-C. Este itinerário não ocorre novamente dentro do período de tempo analisado, indicando ser adequado a substituição de dois veículos por um de maior capacidade para suporta a demanda total dessas viagens.

Agrupamento 4: Fechou-se a viagem das 7:25 A-C e adicionou-se a sua demanda à da viagem 7:27 A-C. Com o atraso do horário de partida, os passageiros passam a esperar 5 minutos no terminal, ao invés de 3 minutos.

Agrupamento 5: Situação semelhante a do agrupamento 4, atrasando o horário de partida da viagem das 7:30 A-C para às 7:33 A-C, o que aumenta em três minutos a espera dos passageiros no terminal.

Agrupamento 6: Fechou-se a viagem 7:32 E-C, adicionando sua demanda à da viagem 7:30 E-C. Com esta alteração, os passageiros passam a esperar 10 minutos

no terminal pelo próximo ônibus que fará esta viagem (7:40 E-C), ao invés de 8 minutos.

Agrupamento 7: Fechou-se a viagem das 7:46 A-C e adicionou-se a sua demanda à da viagem 7:49 A-C. Com o atraso do horário de partida, os passageiros passam a esperar 16 minutos no terminal, ao invés de 13 minutos.

Agrupamento 8: Situação semelhante a do agrupamento 7, atrasando o horário de partida da viagem das 7:47 E-C para às 7:50 E-C, o que aumenta de 5 minutos para 8 minutos a espera dos passageiros no terminal.

Nota-se que com a otimização, os agrupamentos ocorreriam apenas entre duas viagens, reflexo do baixo intervalo Δt aplicado, não alterando tanto a rotina dos passageiros. Além disso, o máximo distúrbio da tabela de horários registrado no período analisado corresponde a atrasos ou adiantamento nas viagens na mesma proporção do Δt , ou seja, 3 minutos. Tais alterações não chegam a prejudicar a qualidade do atendimento, dado que 3 minutos é um intervalo de atrasos tolerável no contexto real. A situação pode-se agravar em casos de adiantamento do horário em 3 minutos, pois alguns passageiros podem “perder” o ônibus por causa da saída antecipada. Entretanto, em situações de adiantamento, é altamente recomendável que os gestores publiquem os novos horários para os passageiros, o que não se faz tão necessário no caso de eventuais atrasos de poucos minutos. Levando-se em consideração que esses resultados representam o pior cenário de distribuição de viagens observado para a instância 530_16, percebe-se que aplicação do VTSP-STC, além de proporcionar economias significativas de veículos, é condizente com a prática no sentido de não acarretar em modificações tão drásticas na tabela de horários, que poderiam refletir na perda da qualidade do serviço prestado ao passageiro.

7.2.2 Testes com instâncias aleatórias

Os testes computacionais do modelo VTSP-SCT para as instâncias aleatórias visam validar o modelo e identificar o seu comportamento para instâncias de grande porte. Considerando-se a quantidade substancial de testes, optou-se por incluir as Tabelas de cada uma das instâncias analisadas no Apêndice B (Tabela 23 até Tabela 27) e discutir nesta Seção os resultados mais significativos. De modo sucinto, observa-se que todas as instâncias foram resolvidas na otimalidade em tempo

bastante inferior ao limite estabelecido (7200 segundos) e possibilitaram resultados, em termos de número de veículos, inferiores aos encontrados no modelo VTSP (excetuando-se a instância 1000_23A, na qual o resultado para $\Delta t = 1$ minuto foi igual ao resultado do modelo VTSP). As instâncias de 1000 viagens, aliás, são as que apresentaram menor redução no número de veículos - comparando-se todas as instâncias aleatórias testadas - agrupando quantidade não tão elevada de viagens e ativando poucas janelas de tempo. Esse resultado é esperado, tendo em vista que, comparada com as instâncias com maior densidade, nesta a distribuição das viagens é mais afastada, dificultando o agrupamento em intervalos curtos de Δt .

Já as para as demais configurações de instâncias, na Tabela 14 apresentam-se os resultados computacionais mais representativas, considerando a aplicação de Δt de 1, 2 e 3 minutos e T_{tw} de 1 e 2 minutos.

Para a instância 2000_23AP não são observadas economias no número de veículos escalonados para os diferentes intervalos Δt . Situações como essa tendem a acontecer quando as demandas das viagens são elevadas, o que inviabiliza o agrupamento, visto que não haverá veículos com capacidade suficiente para comportar a demanda total. Neste caso, quando se incluem janelas de tempo ao VTSP-SCT a solução tende a melhorar, pois ao invés de agrupar viagens, busca-se compatibilizá-las em termos de horário de partida. Isso é comprovado nos testes que combinam o VTSP-SCT às janelas de tempo de 2 minutos, necessitando ativar mais arcos de janela de tempo e possibilitando a redução de, pelo menos, 2 veículos se comparado aos testes sem janelas de tempo.

Na instância 3000_10AP também é percebida a vantagem de se utilizar a abordagem integrada do VTSP-SCT com janelas de tempo. Neste exemplo, o número total de veículos é reduzido modificando minimamente a quantidade de arcos agrupados, mas possibilitando a compatibilidade das viagens através das janelas de tempo. Tendo em vista que o número de viagens agrupadas nesta instância é bastante alto, obter um melhor aproveitamento dos veículos sem ter que modificar em demasia a tabela de horários — característica das janelas de tempo — tende a contribuir para manter a qualidade do serviço prestado aos passageiros.

Já a solução da instância 4000_10A indica um comportamento típico de baixa demanda para as viagens. Isso pode ser visualizado a partir do aumento na quan-

Tabela 14 – Resultados em termos de solução do modelo VTSP-SCT para as médias de algumas instâncias de característica aleatória

Inst.	Δt	T_{tw}	F.O.	Tempo (seg.)	# Veículos				#Viagens agrupadas	#TW ativos
					A	B	C	Total		
2000_23AP	1	0	1,253E+12	167,67	21,0	38,6	43,2	102,8	4,6	0,0
	2	0	1,253E+12	173,24	21,0	38,6	43,2	102,8	8,8	0,0
	3	0	1,253E+12	186,14	21,0	38,6	43,2	102,8	12,6	0,0
	1	1	1,244E+12	176,60	21,0	38,0	42,6	101,6	4,8	3,2
	2	1	1,244E+12	176,80	20,8	38,0	42,6	101,4	8,6	3,0
	3	1	1,242E+12	212,96	20,8	38,0	42,4	101,2	13,0	2,6
	1	2	1,218E+12	211,18	21,0	37,2	41,0	99,2	4,6	8,6
	2	2	1,218E+12	204,11	21,0	37,2	41,0	99,2	8,6	8,4
	3	2	1,218E+12	225,97	21,0	37,2	41,0	99,2	13,2	7,4
3000_10AP	1	0	1,57E+12	162,62	25,4	51,2	52,2	128,8	48,4	0,0
	2	0	1,55E+12	155,85	26,0	51,0	50,0	127,0	96,4	0,0
	3	0	1,54E+12	204,67	26,2	51,0	48,6	125,8	139,8	0,0
	1	1	1,53E+12	168,22	25,6	48,8	50,8	125,2	48,6	9,0
	2	1	1,52E+12	183,96	25,8	49,0	49,0	123,8	94,6	7,6
	3	1	1,51E+12	213,94	26,0	49,0	48,0	123,0	138,6	7,8
	1	2	1,51E+12	188,82	25,4	48,2	49,0	122,6	49,2	20,8
	2	2	1,50E+12	219,34	25,8	48,0	47,6	121,4	96,8	17,4
	3	2	1,49E+12	256,52	26,2	47,8	46,6	120,6	140,6	15,0
4000_10A	1	0	1,885E+12	409,54	29,4	34,2	97,4	161,0	59,4	0,0
	2	0	1,853E+12	654,58	30,0	33,8	93,2	157,0	112,6	0,0
	3	0	1,816E+12	957,22	31,0	35,0	86,8	152,8	173,4	0,0
	1	1	1,850E+12	448,31	29,0	32,2	96,4	157,6	59,4	18,8
	2	1	1,817E+12	699,64	29,8	32,0	91,8	153,6	115,2	19,4
	3	1	1,780E+12	1340,49	32,0	31,8	84,4	148,2	182,6	23,6
	1	2	1,810E+12	573,55	28,4	32,2	93,4	154,0	63,4	50,8
	2	2	1,778E+12	1472,68	28,8	32,6	89,0	150,4	117,6	61,6
	3	2	1,743E+12	1519,26	30,0	32,2	83,2	145,4	181,2	70,8
5000_23A	1	0	2,540E+12	2060,12	35,4	50,2	132,6	218,2	13,2	0,0
	2	0	2,520E+12	1964,39	35,6	50,0	131,2	216,8	30,5	0,0
	3	0	2,498E+12	2708,91	35,9	50,8	121,8	208,4	89,6	0,0
	1	1	2,492E+12	2491,97	35,2	51,4	126,8	213,4	14,8	16,0
	2	1	2,480E+12	2808,09	35,4	51,8	124,6	211,8	30,2	16,8
	3	1	2,456E+12	3717,94	36,2	50,8	122,2	209,2	48,6	20,6
	1	2	2,445E+12	3091,28	35,4	48,6	124,6	208,6	16,2	48,4
	2	2	2,435E+12	4045,54	35,0	49,4	123,4	207,8	30,8	50,6
	3	2	2,413E+12	4400,61	35,0	50,0	120,6	205,6	48,4	51,0

tidade de viagens agrupadas quando se acrescenta uma unidade de tempo ao Δt , aliado ao acréscimo de veículos do tipo A (maior capacidade) escalonados e a redução dos veículos do tipo C (menor capacidade) necessários para atender à demanda. Baixas demandas, ainda, costumam refletir em um melhor aproveitamento dos veículos quando utilizada a frota heterogênea aliada aos ajustes da tabela de horários, tanto que, nesta instância, reduziu-se a frota significativamente ao realizar modificações de poucos minutos na tabela de horários.

Por fim, na instância 5000_23A observam-se os resultados computacionais com maior tempo total de resolução, em média. Este resultado é esperado, tendo em vista o alto número de viagens e terminais desta instância. Além disso, pôde-se visualizar um comportamento bastante comum do modelo VTSP-SCT: aumentar o tempo de resolução para Δt maiores, pois há mais possibilidades de agrupamento nesses intervalos. Mesmo os tempos computacionais acima de 3600 segundos não inviabilizam a aplicação prática deste modelo, tendo em vista o custo-benefício que se obtém ao utilizá-lo, possibilitando a redução de um grande número de veículos. Além disso, considerando-se que muitos gestores ainda realizam o escalonamento dos veículos manualmente, tarefa bastante demorada, o período de 1 ou 2 horas para a resolução computacional de uma instância parece ser bem razoável.

De modo geral, o modelo VTSP-SCT possibilitou a redução no número de veículos sem necessitar de muito tempo de resolução computacional. Ainda, as análises realizadas nesta seção comprovaram a adequabilidade da integração de janelas de tempo a este modelo, característica que aumenta o espectro de cenários a serem avaliados pelo gestor no escalonamento da frota heterogênea. Entretanto, este modelo agrupa as viagens de modo sequencial, o que, em grandes instâncias, pode aumentar a distância entre as partidas de algumas viagens. Assim, a fim de flexibilizar a distribuição das viagens nos intervalos Δt , elaborou-se o modelo VTSP-CCT, que será analisado na próxima seção.

7.3 RESULTADOS COMPUTACIONAIS PARA O VTSP-CCT

Do mesmo modo que o modelo VSTP-SCT, o modelo VTSP-CCT agrupa viagens dentro de um intervalo de tempo Δt , a fim de melhor adequar a utilização dos veículos da frota heterogênea, garantindo o atendimento da demanda. A principal diferença deste modelo, é que ele possibilita agrupar as viagens de modo combinatório — e não sequencial — gerando agrupamentos mais flexíveis, o que tende a proporcionar uma melhor distribuição das viagens na tabela de horários. Entretanto, dado o caráter combinatório, o VTSP-CCT possui um número superior de variáveis de decisão, não sendo possível encontrar a solução ótima para as instâncias aleatórias de grande porte sem suporte heurístico, fator que motivou o desenvolvimento e aplicação da técnica de GC.

Os resultados do modelo VTSP-CCT para as instâncias reais, sem necessidade de utilização da CG, são discutidos na Seção 7.3.1 e os resultados para as instâncias de caráter aleatório, com aplicação da CG, são apresentados na Seção 7.3.2.

7.3.1 Testes com instâncias reais

Seguindo estrutura semelhante a da Tabela 13, na Tabela 15 são apresentados os resultados encontrados para as instâncias reais a partir da aplicação do modelo VTSP-CCT. O número de veículos escalonados nesta abordagem é comparado com aqueles obtidos pelos modelos VTSP e VTSP-TW, bem como a quantidade de veículos atualmente utilizados no contexto real.

Os resultados do modelo VTSP-CCT possibilitam a mesma economia, em termos de número total de veículos, do que o modelo VTSP-SCT. Entretanto, no VTSP-CCT nota-se uma melhor distribuição dos veículos, sendo utilizados menos os do tipo A, que possuem custo mais elevado, contribuindo para um aumento nos custos operacionais e fixos da empresa. Este resultado pode ser consequência da maior flexibilidade deste modelo na combinação dos veículos em cada intervalo. Como é permitido que o modelo escolha a qual intervalo uma viagem deve pertencer, o mesmo buscará alocá-las de modo a não necessitar de muitos veículos de grande capacidade. Além disso, comparando-se os dois modelos, predomina no VTSP-CCT uma menor quantidade de viagens agrupadas e a ativação de mais janelas de tempo, o que tende a minimizar a perturbação da tabela de horários. Como resultado, obtém-se um escalonamento mais condizente com o contexto real, no qual não estão disponíveis muitos veículos articulados. A maior flexibilidade, aliada à economia no número de veículos — que chega a 18 veículos na instância 530_16 com aplicação de Δt de 3 minutos — indicam a melhor aplicabilidade deste modelo à prática gerencial, mesmo com tempo de resolução um pouco mais elevado. A fim de ilustrar a distribuição das viagens gerada pelo VTSP-CCT, exibe-se na Figura 26 um recorte da tabela de horários para a instância 530_16 e aplicação de Δt de 3 minutos, em período do dia similar ao analisado na Figura 25.

A tabela de horários representada na Figura 26 é bastante similar à do modelo VTSP-SCT, com exceção do agrupamento 5. Nele, fechou-se a viagem 7:33 A-C, sendo sua demanda atendida pela viagem das 7:30 A-C. Se comparado com o

Tabela 15 – Resultados computacionais do modelo VTSP-CCT para as instâncias reais

Inst.	Modelo	Δt	T_{tw}	F.O.	Tempo (seg.)	# Veículos				#Viagens agrupadas	#TW ativos
						A	B	C	Total		
60_8	VTSP	0	0	1,412E+11	0,04	1	2	10	13	0	0
	VTSP-TW	0	1	1,412E+11	0,06	1	2	10	13	0	0
		0	2	1,412E+11	0,06	1	2	10	13	0	0
	VTPS-SCT	1	0	1,412E+11	0,05	1	2	10	13	0	0
		2	0	1,412E+11	0,05	1	2	10	13	0	0
		3	0	1,362E+11	0,04	2	1	9	12	1	0
		1	1	1,412E+11	0,04	1	2	10	13	0	0
		2	1	1,412E+11	0,05	1	2	10	13	0	0
		3	1	1,362E+11	0,04	2	1	9	12	1	0
		1	2	1,412E+11	0,05	1	2	10	13	0	0
		2	2	1,412E+11	0,04	1	2	10	13	0	0
	3	2	1,362E+11	0,04	2	1	9	12	1	0	
469_9	VTSP	0	0	4,166E+11	1,08	0	3	38	41	0	0
	VTSP-TW	0	1	4,166E+11	2,38	0	3	38	41	0	0
		0	2	4,166E+11	1,99	0	3	38	41	0	0
	VTPS-SCT	1	0	4,136E+11	1,84	1	3	36	40	5	0
		2	0	3,806E+11	6,34	0	5	32	37	13	0
		3	0	3,576E+11	7,45	1	5	28	34	24	0
		1	1	4,136E+11	1,75	1	3	36	40	5	0
		2	1	3,806E+11	5,54	0	5	32	37	12	0
		3	1	3,576E+11	6,23	1	5	28	34	24	0
		1	2	4,136E+11	1,96	1	3	36	40	5	0
		2	2	3,806E+11	5,29	0	5	32	37	12	0
	3	2	3,576E+11	5,91	1	5	28	34	24	0	
530_16	VTSP	0	0	5,278E+11	1,67	1	5	45	51	0	0
	VTSP-TW	0	1	5,178E+11	3,74	1	5	44	50	0	1
		0	2	5,178E+11	4,91	1	5	44	50	0	1
	VTPS-SCT	1	0	5,197E+11	2,56	3	4	42	49	12	0
		2	0	4,807E+11	12,49	2	8	35	45	26	0
		3	0	4,547E+11	5,89	6	6	28	40	39	0
		1	1	5,097E+11	3,35	3	4	41	48	12	1
		2	1	4,737E+11	4,71	1	8	36	45	19	1
		3	1	4,547E+11	11,28	6	6	28	40	40	0
		1	2	5,097E+11	3,63	3	4	41	48	12	1
		2	2	4,707E+11	5,74	2	8	34	44	25	2
	3	2	4,547E+11	18,66	6	6	28	40	42	0	

agrupamento 5 gerado no VTSP-SCT (Figura 25), no VTSP-CCT este agrupamento tende a acarretar maior espera dos passageiros no terminal, tendo em vista que a viagem fechada será realiza em horário antecipado. Este tipo de análise deve ser realizada pelo gestor na definição de eliminar, ou não, a viagem das 7:33 A-C da tabela de horários, tendo em vista que o objetivo de aplicação dos modelos de otimização é assegurar a qualidade do serviço prestado aos usuários. Entretanto,

Figura 26 – Tabela de horários parcial atual e sugerida para a instância real 530_16 com a aplicação do modelo VTSP-CCT para Δt de 3 minutos

Código do agrupamento	Tabela de horários atual				Tabela de horários sugerida			
	Horário		Terminal		Horário		Terminal	
	Partida	Chegada	Origem	Destino	Partida	Chegada	Origem	Destino

	7:10	7:46	C	E	7:10	7:46	C	E
	7:11	8:04	A	C	7:11	8:04	A	C
1	7:12	7:54	E	C	7:12	7:54	E	C
2	7:15	8:19	A	C	7:15	8:19	A	C
1	7:15	8:11	E	C	7:15	8:02	B	C
	7:15	8:02	B	C	7:17	7:56	C	A
	7:17	7:56	C	A	7:17	7:52	E	C
2	7:17	7:52	E	C	7:17	7:52	E	C
	7:18	8:19	A	C	7:20	8:09	D	C
	7:20	8:09	D	C	7:22	8:29	G	C
3	7:22	8:29	G	C	7:22	8:12	A	C
	7:22	8:12	A	C	7:23	8:06	C	E
	7:23	8:06	C	E	7:25	8:30	G	C
3	7:25	8:30	G	C	7:25	8:34	A	C
4	7:25	8:34	A	C	7:26	8:20	E	C
	7:26	8:20	E	C	7:27	8:22	A	C
4	7:27	8:22	A	C	7:28	7:59	C	A
	7:28	7:59	C	A	7:30	8:24	A	C
5	7:30	8:24	A	C	7:30	8:26	E	C
6	7:30	8:26	E	C	7:30	8:23	E	C
6	7:32	8:23	E	C	7:33	8:30	A	C
5	7:33	8:30	A	C	7:35	8:09	C	E
	7:35	8:09	C	E	7:36	8:23	B	C
	7:36	8:23	B	C	7:40	8:25	E	C
	7:40	8:25	E	C	7:42	8:38	E	C
	7:42	8:38	E	C	7:42	8:24	E	C
	7:42	8:24	E	C	7:42	8:34	A	C
7	7:46	8:34	A	C	7:47	8:39	E	C
8	7:47	8:39	E	C	7:47	8:37	B	C
	7:47	8:37	B	C	7:48	7:51	C	D
	7:48	7:51	C	D	7:48	8:22	C	A
	7:48	8:22	C	A	7:49	8:39	A	C
7	7:49	8:39	A	C	7:50	9:00	E	C
8	7:50	9:00	E	C	7:52	8:31	D	C
	7:52	8:31	D	C	7:52	8:30	A	C
	7:52	8:30	A	C

cabe considerar que na Figura 26 representa-se a pior situação de uma tabela de horários de um dia inteiro; logo, como suporte à tomada de decisão, o ideal é que se faça um estudo de todas as possíveis alterações sugeridas, tendo em vista que os atrasos e adiantamentos podem se dissolver nas inúmeras viagens realizadas em cada linha de ônibus.

7.3.2 Testes com instâncias aleatórias

A aplicação direta do modelo VTSP-CCT para a resolução das instâncias de característica aleatória não foi possível devido ao alto custo computacional. A partir de testes realizados, identificou-se que instâncias superiores a 800 viagens já não são resolvidas diretamente no VTSP-CCT. Para contornar esta situação, aplicou-se a este problema a técnica de GC, possibilitando a resolução de instâncias de até 4000 viagens, o que aumenta consideravelmente a aplicabilidade do modelo (tendo em vista a quantidade limitada de viagens que o mesmo resolve pela formulação

compacta). No Apêndice B (Tabela 28 até Tabela 30) são reportados os resultados da aplicação da GC para as instâncias de característica aleatória e na Tabela 16 são especificados alguns desses resultados. Referente a esta Tabela, na coluna “F.O.” indica-se o valor da função objetivo do Problema Mestre (inteiro) e na coluna “Tempo CG (seg.)” o tempo total necessário para a resolução do Problema Mestre Restrito Relaxado e do subproblema, sendo estes tempos apresentados de modo separado nas Tabelas 31 e 32 do Apêndice B, juntamente com o tempo para computar a solução inteira.

Todas as instâncias resolvidas com a GC apresentaram valor de função objetivo inferior ao encontrado no modelo VTSP-SCT, o que indica, além da economia de veículos, que há um melhor aproveitamento da rede, no sentido de serem realizadas, pelos ônibus, menos esperas nos terminais, menos viagens expressas (ônibus vazio) e menos retornos para a garagem ao longo do dia. Como arcos de espera e *deadhead* possuem custo elevado, o modelo tende a buscar a sua minimização ao definir quais as viagens serão, ou não, eliminadas da tabela de horários. Entretanto, conforme aumenta o tamanho das instâncias, ocorre um crescimento acentuado no número de arcos da rede, situação que acarreta em uma menor diferença relativa entre os custos de fluxo e escalonamento de veículos. Neste contexto, a GC pode convergir para uma solução na qual não constam as colunas que levam ao menor número de ônibus possível quando o modelo master é resolvido com restrições de binaridade.

Na instância 3000_23AP, destacada na Tabela 16, pode-se observar um exemplo desta situação, tendo em vista que o número de veículos encontrado na GC foi ligeiramente superior àquele encontrado no VTSP-SCT, especificamente, para as quatro combinações: $\Delta t = 1$ e $T_{tw}=0$, $\Delta t = 1$ e $T_{tw}=2$, $\Delta t = 2$ e $T_{tw}=2$ e $\Delta t = 2$ e $T_{tw}=2$. Neste caso, as colunas ótimas podem não ter sido incluídas no Problema Mestre em decorrência do alto custo da rede que se sobrepôs ao custo dos veículos. Este exemplo, entretanto, é isolado dos demais. Em todas as outras instâncias testadas o escalonamento de veículos resultante da GC foi em número igual ou inferior ao obtido no modelo VTSP-SCT, sendo este o resultado esperado da aplicação, visto a flexibilidade proporcionada pela combinação das viagens em cada um dos intervalos. Além disso, a GC tende a fornecer uma tabela de horários com menos modificações do que a gerada no VTSP-SCT, o que pode ser confirmado pela menor quantidade

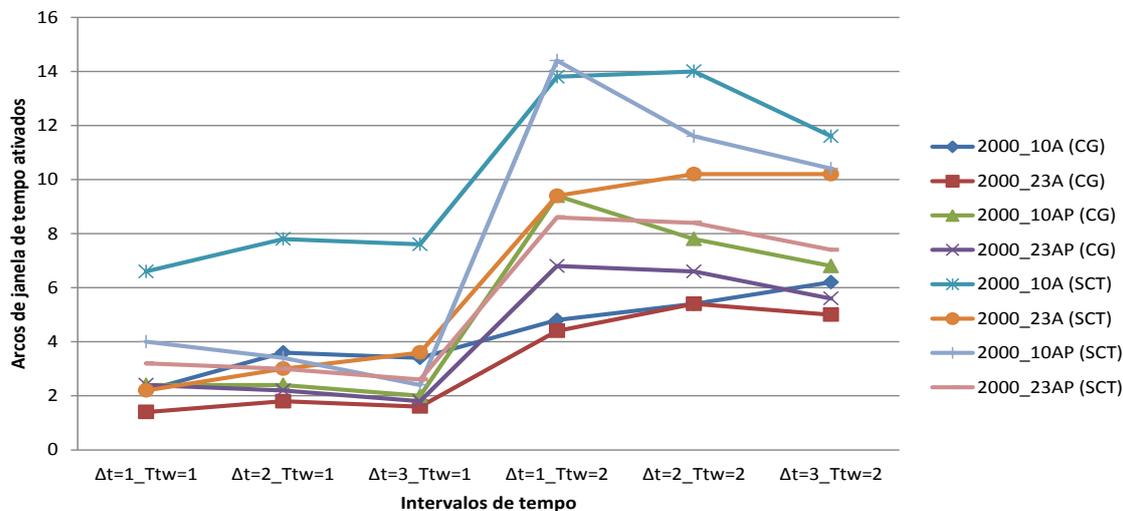
Tabela 16 – Resultados em termos de solução do modelo VTSP-CCT, com aplicação de Geração de Colunas, para as médias de algumas instâncias de característica aleatória

Inst.	Δt	T_{tw}	F.O.	Tempo GC (seg.)	# Veículos				#Viagens agrupadas	#TW ativos
					A	B	C	Total		
1000_10A	1	0	5,30E+11	66,15	11,2	15,0	26,8	53,0	4,8	0,0
	2	0	5,20E+11	125,17	11,4	15,0	25,6	52,0	7,2	0,0
	3	0	5,14E+11	165,94	10,8	15,4	25,2	51,4	11,8	0,0
	1	1	5,26E+11	108,55	11,2	15,2	26,2	52,6	4,4	0,8
	2	1	5,20E+11	193,20	11,4	15,4	25,2	52,0	7,6	0,0
	3	1	5,12E+11	292,11	11,0	15,4	24,8	51,2	12,8	0,2
	1	2	5,24E+11	159,64	11,2	15,2	26,0	52,4	5,0	1,6
	2	2	5,18E+11	257,90	11,2	15,4	25,2	51,8	7,6	0,4
	3	2	5,10E+11	352,45	11,4	14,8	24,4	50,6	12,6	0,6
2000_23AP	1	0	1,026E+12	298,68	20,8	38,4	43,4	102,6	4,6	0,0
	2	0	1,022E+12	517,63	20,4	38,0	43,8	102,2	8,4	0,0
	3	0	1,020E+12	667,10	20,4	38,0	43,4	101,8	12,6	0,0
	1	1	1,014E+12	637,21	20,8	38,4	42,2	101,4	4,8	2,4
	2	1	1,010E+12	1111,31	20,6	38,0	42,4	101,0	8,6	2,2
	3	1	1,006E+12	1379,14	20,4	38,0	42,2	100,6	13,2	1,8
	1	2	9,925E+11	772,57	20,8	38,0	40,2	99,0	4,4	6,8
	2	2	9,885E+11	1225,46	20,6	37,2	40,8	98,6	8,6	6,6
	3	2	9,865E+11	1559,68	20,8	37,4	40,4	98,6	13,0	5,6
3000_23AP	1	0	1,445E+12	1233,25	27,8	55,0	61,6	144,4	9,6	0,0
	2	0	1,439E+12	2335,52	27,8	54,6	61,4	143,8	21,2	0,0
	3	0	1,433E+12	3507,66	26,6	55,0	61,4	143,0	32,0	0,0
	1	1	1,417E+12	3471,798	27,4	55,6	58,6	141,6	10,4	3,8
	2	1	1,413E+12	9307,764	26,8	55,6	58,6	141,0	21,4	3,2
	3	1	1,407E+12	17654,558	27,2	55,6	57,8	140,6	32,2	3,2
	1	2	1,401E+12	21956,198	27,6	55,6	56,8	140,0	10,2	7,0
	2	2	1,395E+12	28629,376	27,4	55,8	56,2	139,4	21,6	6,8
	3	2	1,391E+12	38417,026	27,0	56,0	56,0	139,0	32,8	6,4
4000_23A	1	0	1,78E+12	3023,83	36,6	46,2	94,8	177,6	10,4	0,0
	2	0	1,75E+12	5607,27	36,4	45,8	92,4	174,6	20,0	0,0
	3	0	1,77E+12	7256,42	36,0	45,6	94,6	176,2	11,8	0,0
	1	1	1,74E+12	17243,28	36,6	45,6	92,2	174,4	10,2	4,6
	2	1	1,72E+12	30625,06	37,0	45,6	89,0	171,6	21,4	5,6
	3	1	1,71E+12	42035,30	36,4	45,2	88,8	170,4	30,6	5,6
	1	2	1,72E+12	17605,74	36,6	46,0	89,4	172,0	10,2	12,4
	2	2	1,70E+12	33485,28	36,8	45,2	87,6	169,6	21,0	10,8
	3	2	1,68E+12	47482,36	36,6	45,0	86,6	168,2	31,4	12,2
4000_23AP	1	0	1,80E+12	4068,06	32,8	66,2	81,0	180,0	18,2	0,0
	2	1	1,75E+12	40127,47	33,1	67,7	74,6	175,3	43,7	3,6
	3	1	1,75E+12	49514,48	32,0	65,4	77,6	175,0	52,8	3,8
	3	2	1,72E+12	29201,06	32,0	65,4	73,8	171,2	53,0	13,4

média de arcos de janela de tempo e viagens agrupadas obtidas neste procedimento.

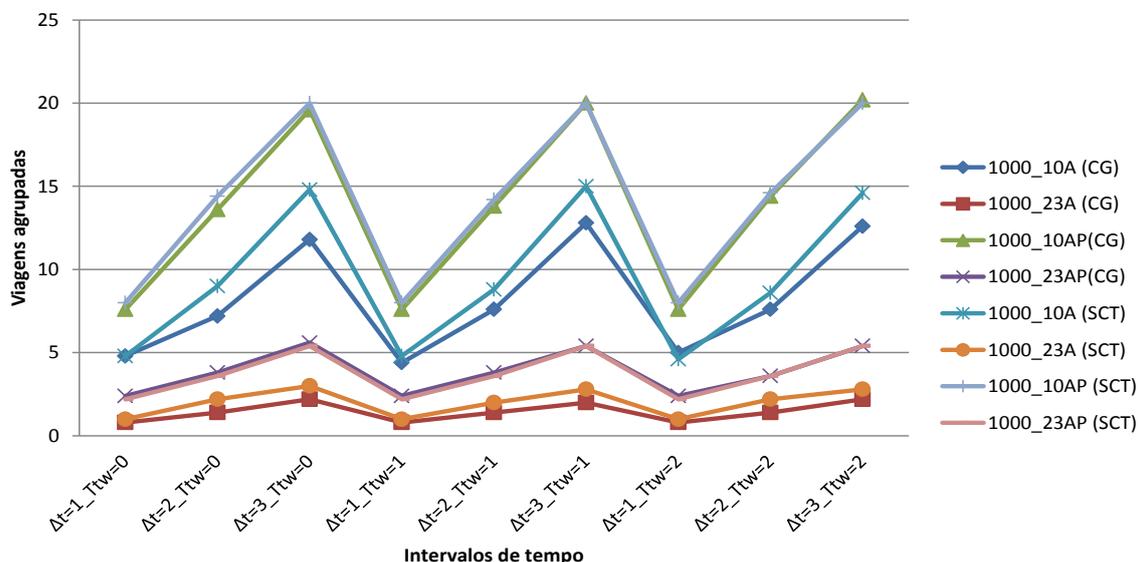
Na instância 2000_23AP, por exemplo, a CG agrupou relativamente menos viagens do que o VTSP-SCT e ativou janelas de tempo em quantidade bastante inferior, conforme ilustra a Figura 27.

Figura 27 – Comparação entre o número de arcos de janela de tempo ativados na CG e no modelo VTSP-SCT para as instâncias de 2000 viagens



A análise da Figura 27 indica que o número de janelas de tempo ativadas é consideravelmente maior nas instâncias do VTSP-SCT, o que pode sugerir uma configuração mais ajustada da tabela de horários resultante da CG, com menor alteração dos horários de partida tendo como referência a tabela de horários original. No que se refere às viagens agrupadas, as diferenças já não são tão significativas, sendo que conforme aumenta o tamanho da instância há uma tendência de ambas as abordagens gruparem viagens na mesma proporção. Como exemplo, na Figura 28 representa-se a quantidade de arcos agrupados nas instâncias de 1000 viagens.

Figura 28 – Comparação entre o número de viagens agrupadas na CG e no modelo VTSP-SCT para as instâncias de 1000 viagens



O comparativo apresentado nesta Figura torna os resultados da GC ainda mais interessantes, pois realizando menos alterações na tabela de horários pôde-se obter resultados tão bons (ou melhores) do que aqueles proporcionados pelo modelo VTSP-SCT, como é o caso da instância 1000_10A, também reportada na Tabela 16.

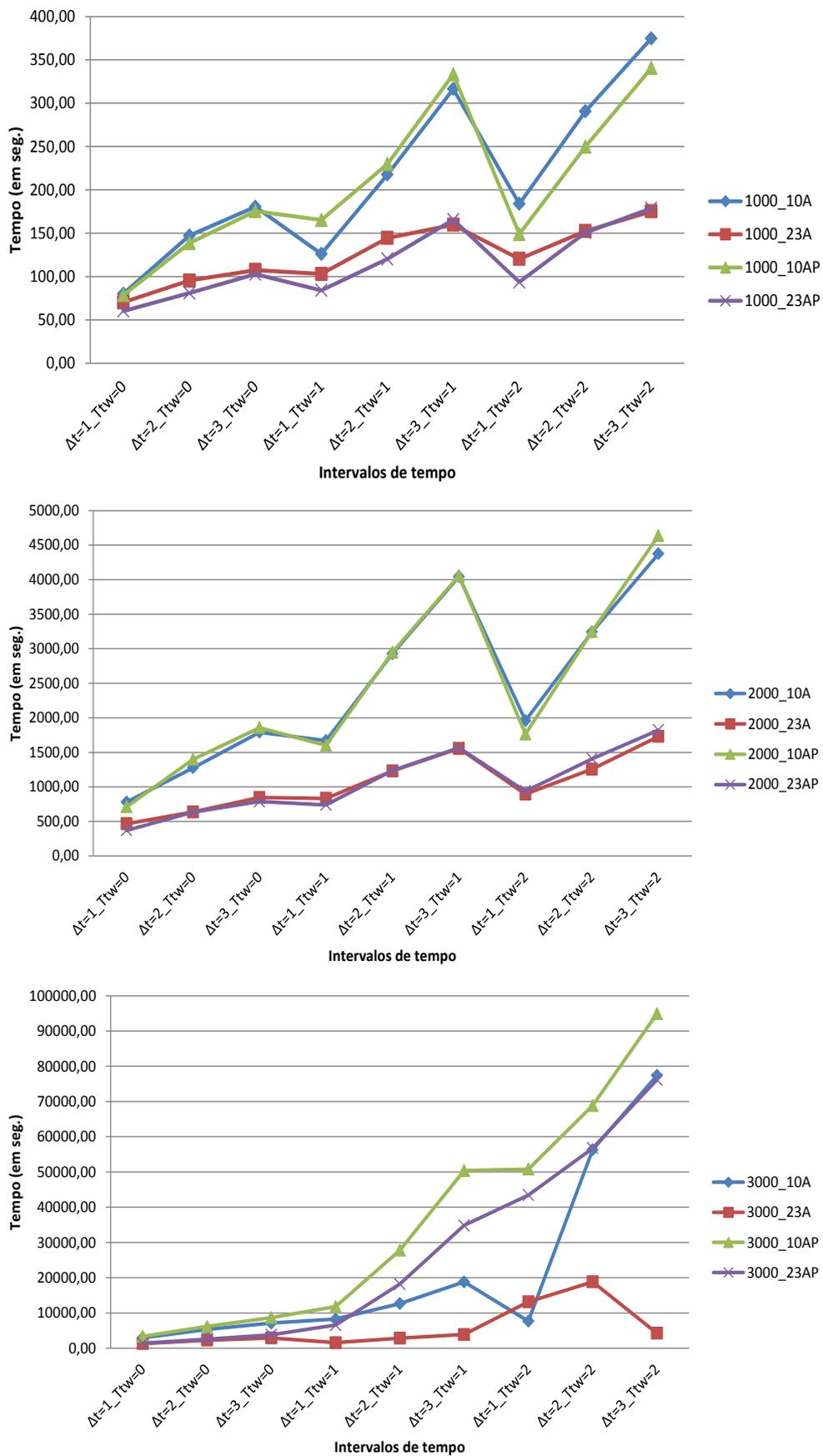
Quanto as instâncias de 4000 viagens, a CG conseguiu resolver apenas algumas configurações de intervalos das instâncias 4000_23A e a 4000_23AP; pois, por possuírem maior número de terminais, nelas há uma menor quantidade de viagens com itinerário semelhante (comparando-se com a versão de 10 terminais), gerando um menor número de intervalos de índice k para serem resolvidos. Os resultados encontrados nestas instâncias foram de tão boa qualidade quanto aqueles gerados pelo modelo VTSP-SCT. Cabe ressaltar que, mesmo sem resolver as instâncias aleatórias de 5000 viagens, a aplicação da CG aumentou drasticamente a gama de instâncias que podem ser resolvidas pela abordagem VTSP-CCT, passando de 800 para 4000 viagens e proporcionando resultados satisfatórios.

Como esperado, em virtude da dimensão do modelo, o tempo para resolver as instâncias na CG foi superior às demais abordagens testadas, sendo grande parte dele utilizado na solução do Problema Mestre Restrito Relaxado, conforme exibido nas Tabelas 31 e 32 do Apêndice B. Ainda sobre o tempo de resolução da CG, cabem algumas considerações interessantes, suportadas pelos gráficos da Figura 29.

Corroborando com as constatações realizadas para as instâncias de 4000 viagens, percebe-se, na Figura 29, que para as instâncias de 10 terminais o modelo tende a consumir maior tempo computacional, tendo em vista as inúmeras possibilidades de combinações de arcos que serão geradas. Quando os terminais são em maior número, nas instâncias aleatórias, há um espaçamento maior entre as viagens com o mesmo itinerário, acarretando na formação de menos intervalos e tornando a resolução do problema mais rápida.

Outro aspecto interessante recai sobre o aumento do tempo computacional quando se amplia o tamanho do Δt , tendo em vista que a maior amplitude deste intervalo adiciona possibilidades de combinações entre as viagens, aumentando a dificuldade de resolução do problema. Com menor intensidade, mas também refletindo no acréscimo de tempo computacional, as combinações com janelas de tempo de 2 minutos são mais demoradas, em média, de se resolver do que as de 1 minuto. Mesmo a CG

Figura 29 – Tempo total para a resolução da Geração de Colunas nas instâncias testadas



utilizando poucos arcos de janela de tempo, eles influenciam no tempo computacional tendo em vista as possibilidades de compatibilização de viagens geradas pela abordagem.

Por fim, para verificar a qualidade do algoritmo de GC implementado, apresenta-se na Tabela 17 o resultado da função objetivo do Problema Mestre inteiro (F.O. PM) e do Problema Mestre Restrito Relaxado (F.O. PMRR), bem como o Gap (GAP) que representa a diferença desses resultados. Utilizou-se instâncias aleatórias com 1000 e 2000 viagens, considerando $\Delta t = 3$ minutos e $T_{tw} = 2$ minutos, indicando situação com resolução mais difícil. Nesta Tabela também são apresentados os tempos de resolução computacional para o PM (CPU Master), para o Subproblema (CPU Pricing), para a heurística converter a solução em inteiro (CPU IP) e o tempo total, que consiste no somatório destes tempos (CPU Total).

Tabela 17 – Qualidade da CG desenvolvida

Inst.	F.O PM	F.O PMRR	GAP.	CPU Master	CPU Pricing	CPU IP	CPU Total
1000_10A_a	5,100E+11	5,100E+11	0%	353,43	0,31	22,06	375,80
1000_10A_b	5,100E+11	5,100E+11	0%	355,51	0,44	35,32	391,27
1000_10A_c	5,100E+11	5,100E+11	0%	105,28	0,61	31,91	137,80
1000_10A_d	5,100E+11	5,100E+11	0%	324,84	0,34	6,79	331,97
1000_10A_e	5,100E+11	5,100E+11	0%	324,99	0,32	6,76	332,07
1000_23A_a	5,600E+11	5,600E+11	0%	73,99	0,03	49,58	123,60
1000_23A_b	5,500E+11	5,500E+11	0%	93,39	0,06	49,18	142,63
1000_23A_c	6,200E+11	6,200E+11	0%	62,81	0,03	13,92	76,76
1000_23A_d	5,900E+11	5,900E+11	0%	96,53	0,03	13,40	109,96
1000_23A_e	5,600E+11	5,600E+11	0%	74,49	0,02	53,55	128,06
2000_10A_a	8,900E+11	8,900E+11	0%	1946,84	6,57	200,97	2154,38
2000_10A_b	8,600E+11	8,600E+11	0%	5581,52	10,56	156,65	5748,73
2000_10A_c	8,500E+11	8,500E+11	0%	1627,25	5,46	201,32	1834,03
2000_10A_d	8,700E+11	8,700E+11	0%	4250,57	5,67	228,28	4484,52
2000_10A_e	9,100E+11	9,100E+11	0%	2670,19	3,92	61,68	2735,79
2000_23A_a	1,030E+12	1,030E+12	0%	509,83	0,11	295,94	805,88
2000_23A_b	9,700E+11	9,700E+11	0%	1162,65	0,04	251,02	1413,71
2000_23A_c	9,700E+11	9,700E+11	0%	1163,25	0,14	434,92	1598,31
2000_23A_d	1,010E+12	1,010E+12	0%	380,17	0,32	456,28	836,77
2000_23A_e	9,700E+11	9,700E+11	0%	559,34	0,34	299,25	858,93

A partir desses testes pode-se observar que a F.O obtida pela resolução do PMRR apresenta igual valor da F.O do PM, o que acarreta em $GAP = 0\%$ para todas as instâncias testadas, demonstrando que a heurística de GC desenvolvida nesta tese possibilita resultados de excelente qualidade, resultando na solução ótima.

Realizando uma análise abrangente, os resultados das três novas abordagens

propostas deixam claro que as mesmas podem contribuir para a otimização do planejamento do transporte público, tendo em vista que levam a economias significativas no número de veículos escalonados. Além disso, como os intervalos Δt e T_{tw} são bastante curtos, as alterações na tabela de horários serão sutis, modificando minimamente a rotina dos passageiros. Assim, a título de sintetizar as principais contribuições geradas pela aplicação desses modelos, a Figura 30 apresenta um breve relato dos aspectos mais interessantes de cada um.

Figura 30 – Sumário das principais características das três abordagens propostas

Análise	VTSP-TW	VTSP-SCT	VTSP-CCT
Alterações na tabela de horários	Atrasa algumas viagens em poucos minutos para compatibilizar duas viagens que antes não poderiam ser realizadas na sequência.	O somatório da demanda de algumas viagens é atendido por um número menor de veículos, possibilitando a eliminação de determinadas viagens da tabela de horários.	O somatório da demanda de algumas viagens é atendido por um número menor de veículos, possibilitando a eliminação de determinadas viagens da tabela de horários.
Parâmetro de tempo para as modificações	T_{tw} : intervalo de tempo (1 ou 2 minutos) no qual é permitido alterar o horário de partida de uma viagem	Δt : intervalo de tempo (1 a 3 minutos) no qual são analisadas as viagens que poderão ser modificadas.	Δt : intervalo de tempo (1 a 3 minutos) no qual são analisadas as viagens que poderão ser modificadas.
Metodologia de modificação da tabela de horários	Inserir-se um novo arco na TSN, chamado arco de janela de tempo, que é correspondente a um arco de espera, porém com sentido contrário.	Definem-se as viagens que serão eliminadas de modo sequencial, a partir da primeira viagem do dia e da primeira viagem de cada intervalo Δt .	Definem-se as viagens que serão eliminadas de modo combinatório, não necessitando iniciar a análise na primeira viagem do dia, nem na primeira viagem do intervalo Δt .
Vantagens	<ul style="list-style-type: none"> • Gera uma rede (TSN) menor em termos de arcos de serviço do que outras abordagens apresentadas na literatura. • Pode ser utilizado em instâncias de grande porte. • Rápida implementação computacional. 	<ul style="list-style-type: none"> • Não há a necessidade inclusão de variáveis de decisão ao modelo VTSP. • O problema pode ser resolvido na otimalidade para instâncias de grande porte. 	<ul style="list-style-type: none"> • Tende a haver uma melhor distribuição (mais economia) dos diferentes tipos de veículos na rede, dada a característica flexível do modelo. • Gera uma rede mais econômica, utilizando menos arcos de espera e <i>deadhead</i>.
Desvantagens	<ul style="list-style-type: none"> • Necessidade de acréscimo de duas restrições para evitar atrasos sucessivos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Pouca flexibilidade na definição das viagens que serão eliminadas da tabela de horários. 	<ul style="list-style-type: none"> • Ampliação do número de variáveis de decisão. • Dada a complexidade do modelo, deve-se utilizar suporte heurístico para a sua resolução.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento de técnicas de pesquisa operacional que contribuam para o melhor planejamento dos sistemas de transporte público tende a minimizar problemas oriundos do tráfego urbano, bem como auxiliar no melhor atendimento à população. Baseando-se nessa perspectiva, bem como a partir de necessidades gerenciais observadas na prática de empresas de transporte público, nesta tese foram propostas três novas abordagens para a resolução do problema integrado de geração de tabela de horários e escalonamento de veículos com frota heterogênea. A integração destas duas etapas tem sido reportada na literatura como de grande valia para um melhor planejamento. Ademais, ao considerar a frota heterogênea, imprime-se maior realidade à formulação dos problemas, tendo em vista que a utilização de ônibus urbanos de variados tipos é a prática na maioria das cidades ao redor do mundo.

Para modelar o problema tratado, utilizou-se a TSN, tradicionalmente aplicada no contexto de escalonamento de aeronaves. A adaptação desta rede ao escalonamento de veículos é recente, mas já demonstra vantagens, em termos de menor dimensão, do que a rede baseada em conexões, amplamente utilizada. Por possuir rede de menor tamanho, a TSN pode auxiliar no desenvolvimento de modelos inovadores e menos complexos, com métodos de solução mais rápidos (VISENTINI *et al.*, 2013). Como contribuição à modelagem da TSN, nesta tese foi sugerido um procedimento para auxiliar na redução do tamanho da rede. Este procedimento trata-se de mais uma etapa de pré-processamento, complementando as já existentes na literatura, que possibilita a diminuição do número de nós da rede.

Em se tratando das abordagens propostas, desenvolveu-se uma nova metodologia de inserção de janelas de tempo para problemas de escalonamento de veículos

com frota heterogênea, que possibilita alterações sutis na tabela de horários; também foram apresentados dois modelos de Programação Linear Inteira, que otimizam simultaneamente a tabela de horários e o escalonamento de veículos.

A motivação para o desenvolvimento do modelo de inserção de janelas de tempo partiu da necessidade de se obter uma aplicação com menor tamanho de rede. Realizada ampla revisão de literatura, a única metodologia encontrada para inclusão de janelas de tempo em modelos de escalonamento de veículos baseados na TSN foi a proposta por Kliewer, Bunte e Suhl (2006) e Kliewer, Amberg e Amberg (2012), na qual esses arcos são gerados a partir da multiplicação dos arcos de serviço. Como consequência, obtém-se uma rede com elevado número de arcos quando comparada à rede sem janelas de tempo, inviabilizando a integração desta abordagem aos demais modelos propostos. Partindo dessas constatações, foi desenvolvido o modelo VTSP-TW, que possui fácil implementação computacional e gera uma rede compatível com a integração à outros modelos. Além disso, buscou-se verificar se o modelo VTSP-TW apresentava resultados compatíveis com aqueles proporcionados pela abordagem anteriormente publicada. Desse modo, testou-se as instâncias reais e as aleatórias de grande porte em ambas as abordagens, obtendo-se resultados, em termos de número de veículos e a utilização dos mesmos por tipo, muito semelhantes. Essa bateria de testes possibilitou concluir que a abordagem VTSP-TW e a proposta em Kliewer, Bunte e Suhl (2006) e Kliewer, Amberg e Amberg (2012) podem ser consideradas equivalentes. Assim, o VTSP-TW surge como uma nova metodologia de inclusão de janelas de tempo, permitindo a resolução de instâncias de grande porte e a integração a outros modelos de otimização.

Tratando-se especificamente dos resultados obtidos pela aplicação do modelo VTSP-TW às instâncias reais, observou-se redução de até 8 veículos na instância de maior porte ao aplicar janela de tempo de 1 minuto. Este resultado é de grande valia para a operação do sistema de transporte público, tendo em vista que a sutil alteração no horário de partida de uma viagem tende a economizar uma grande quantidade de veículos. Como a modificação na tabela de horários é de apenas um minuto, algumas empresas de transporte público podem optar por não modificar os horários de ônibus disponibilizados à população, visto que a dimensão deste atraso/adiantamento é compatível com a espera habitual dos passageiros nos terminais

de ônibus. Economias no número de veículos também foram encontradas quando da aplicação do VTSP-TW para as instâncias aleatórias de grande porte, se comparado ao modelo VTSP, sem janelas de tempo. De modo geral, o modelo mostrou-se hábil na resolução dessas instâncias, obtendo a solução ótima em adequado tempo computacional.

Economias também foram encontradas a partir da aplicação dos modelos VTSP-SCT e VTSP-CCT. O objetivo desses modelos é minimizar o número de veículos e redefinir a tabela de horários a partir do agrupamento de algumas viagens, conforme a demanda de passageiros e as capacidades dos diferentes tipos de veículos disponíveis. Os agrupamentos são realizados entre viagens que possuem mesmo itinerário e horário de partida bastante próximo. No modelo VTSP-SCT as viagens são agrupadas de modo sequencial, a partir da primeira viagem do dia; já no VTSP-CCT são agrupadas de modo combinatório, o que possibilita maior flexibilidade na distribuição das viagens na tabela de horários. Um diferencial destes modelos é a utilização da demanda historicamente conhecida como parâmetro para o escalonamento dos ônibus que compõem a frota heterogênea, fator raramente considerado na literatura.

Os resultados dos modelos VTSP-SCT e VTSP-CCT também possibilitaram economias no número de veículos e configuraram-se como versáteis no suporte à tomada de decisão no planejamento do transporte público. Isso porque, dadas as características das tabelas de horário geradas em cada abordagem, pode-se definir qual adotar a fim de garantir um menor número de ônibus trafegando sem prejudicar a qualidade do atendimento prestado. Os resultados tornam-se ainda mais interessantes quando se integram janelas de tempo a esses modelos, possibilitando reduzir veículos sem necessitar o fechamento de muitas viagens, ao garantir a sincronização de horários de chegada e partida. Comparando-se os resultados obtidos pela resolução das instâncias reais, observou-se no VTSP-CCT melhor aproveitamento dos ônibus articulados, que possuem custo mais elevado. Este resultado é condizente com a prática, dadas as limitações de recursos das empresas de transporte público, bem como a dificuldade deste tipo de ônibus trafegar por algumas ruas, em virtude do seu porte. Por fim, a partir de uma breve análise da tabela de horários gerada em cada modelo na instância real 530_16, constataram-se alterações nos horários muito próximas ao intervalo Δt adotado, ou seja, não são modificações drásticas nas

partidas das viagens, visto que até 3 minutos é um intervalo de atrasos tolerável no contexto real.

Tendo em vista o grande número de variáveis geradas no modelo VTSP-CCT, das as combinações de viagens nos intervalos, a resolução das instâncias aleatórias só foi possível a partir da aplicação da técnica de Geração de Colunas. Instâncias maiores do que 800 viagens não foram passíveis de resolução pela formulação compacta do modelo, em virtude da falta de memória computacional. Quando da aplicação da GC, passa-se a resolver instâncias de 4000 viagens, aumentando drasticamente as possibilidades de aplicação da abordagem. Os resultados obtidos foram iguais, ou ainda mais econômicos, do que aqueles proporcionados pelo VTSP-SCT, sendo o valor da função objetivo da CG muito inferior a das demais abordagens.

Além disso, as soluções da GC ativam quantidade inferior de janelas de tempo do que as obtidas pelo VTSP-SCT, fornecendo uma tabela de horários mais ajustada à tabela original. Uma limitação da técnica, entretanto, foi a impossibilidade de resolução de algumas instâncias de 4000 e 5000 viagens, também pelo alto consumo de tempo e memória computacional. Tal limitação apontou para a necessidade de alguns ajustes na CG, como: a) o desenvolvimento de técnicas para a obtenção de uma melhor solução inicial, o que tende a gerar menos iterações e, conseqüentemente, consumir menos tempo e memória e; b) o desenvolvimento de procedimentos heurísticos para selecionar os melhores intervalos para agrupar viagens, a exemplo do que Kliewer, Bunte e Suhl (2006) e Kliewer, Amberg e Amberg (2012) utilizam para minimizar o número de arcos de janela de tempo, o que tende a reduzir também o tamanho da rede gerada nas instâncias de grande porte. Essas limitações são norteadoras de pesquisas futuras realizadas a partir desta tese, traduzindo-se como as principais direcionadoras da continuidade do trabalho.

Além dessas, outras oportunidades de pesquisas surgem a partir da realização deste estudo, podendo contribuir ainda mais com a otimização do planejamento do transporte público. A primeira delas reside na inclusão de múltiplas garagens (MD-VSP) aos problemas propostos, visto que na maioria das cidades de médio e grande porte os ônibus são armazenados em mais de um local, facilitando o deslocamento dos veículos para o atendimento da população. Outra perspectiva recai sobre a integração dos problemas propostos com o problema de escalonamento da tripu-

lação (*crew scheduling*), pois os custos incorridos da tripulação são ainda maiores do que aqueles oriundos do uso de veículos. Pesquisas que integram os problemas de escalonamento de veículos e tripulação têm sido desenvolvidas nos últimos anos dada a importância dessas duas etapas para o planejamento operacional do transporte público. Entretanto, não se encontram publicados, até o momento, estudos que integrem esses dois problemas com a geração da tabela de horários e a frota heterogênea.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, E. L. **Introdução à Pesquisa Operacional: Métodos e modelos para a análise de decisão**. Rio de Janeiro: LTC, 1998.
- ANTP. Associação Nacional dos Transportes Públicos. **Sistema de Informações da Mobilidade Urbana: Relatório Geral 2011**, 2012. Acesso em: 13 dez. 2013. Disponível em: <http://www.antp.org.br/_5dotSystem/download/dcmDocument/2013/04/11/050FC84C-74EA-4A33-A919-6D2E380FA2C1.pdf>.
- ARENALES, E. L. *et al.* **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- ATU. **ATU - Associação dos Transportadores Urbanos de Passageiros de Santa Maria**. 2013. Acesso em: 01 nov. 2013. Disponível em: <<http://www.escriitoriodacidade.net.br/noticias/190713.php>>.
- BAITA, F. *et al.* A comparison of different solution approaches to the vehicle scheduling problem in a practical case. **Computers & Operations Research** **27**, v. 27, p. 1249–1269, 2000.
- BARNHART, C. *et al.* Branch-and-price: Column generation for solving huge integer programs. **Operations Research**, v. 46, n. 3, p. 316–329, 1998.
- BERTOSSI, A. A.; CARRARESI, P.; GALLO, G. On some matching problems arising in vehicle scheduling models. **Networks**, v. 17, n. 3, p. 271–281, 1987.
- BUNTE, S.; KLIEWER, N. An Overview on Vehicle Scheduling Models. **Journal of Public Transport**, v. 1, n. 4, p. 299–317, 2009.
- CEDER, A. Urban Transit Scheduling: Framework, Review and Examples. **Journal of Urban Planning and Development**, v. 35, n. 10, p. 225–244, 2002.
- CEDER, A. Public-transport vehicle scheduling with multi vehicle type. **Transportation Research Part C: Emerging Technologies**, v. 19, n. 3, p. 485–497, 2011a.
- CEDER, A. Optimal Multi-Vehicle Type Transit Timetabling and Vehicle Scheduling. **Procedia - Social and Behavioral Sciences**, v. 20, p. 19–30, 2011b.
- CEDER, A.; HASSOLD, S.; DANO, B. Approaching even-load and even-headway transit timetables using different bus sizes. **Public Transport**, v. 5, n. 3, p. 193–217, 2013. ISSN 1866-749X.

CEDER, A.; WILSON, N. H. M. Bus network design. **Transportation Research Part B: Methodological**, v. 20b, n. 4, p. 331–344, 1986.

DADUNA, J. R.; PAIXÃO, J. M. P. Vehicle scheduling for public mass transit: An overview. In: **6th International Workshop Computer-Aided Scheduling of Public Transport**. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems: Springer, Heidelberg, 1995. p. 76–90.

DANTZIG, G. B.; WOLFE, P. The Decomposition Algorithm for Linear Programs. **Econometrica**, v. 24, n. 4, p. 767–778, 1961.

de LEONE, R.; FESTA, P.; MARCHITTO, E. Solving a bus driver scheduling problem with randomized multistart heuristics. **International Transactions in Operational Research**, v. 18, n. 6, p. 707–727, 2011.

DESAULNIERS, G.; LAVIGNE, J.; SOUMIS, F. Multi-depot vehicle scheduling problems with time windows and waiting costs. **European Journal of Operational Research**, v. 111, n. 3, p. 479–494, 1998.

DESROSIERS, J. *et al.* Chapter 2: Time constrained routing and scheduling. In: _____. **Handbooks in Operations Research and Management Science**. [S.l.]: Elsevier, 1995. v. 8, p. 35–139. ISBN 9780444821416.

DESROSIERS, J.; LÜBBECKE, M. E. A primer in column generation. In: G.DESSAULNIERS; J.DESROSIERS; SOLOMON, M. (Ed.). **Column Generation**. Berlin: Springer, 2005. p. 1–32.

EVEN, S.; ITAI, A.; SHAMIR, A. On the complexity of time table and multi-commodity flow problems. **SIAM Journal on Computing**, v. 5, n. 4, p. 691–703, 1976. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs/_all.jsp?arnumber=4567876>.

FARAHANI, R. Z. *et al.* A review of urban transportation network design problems. **European Journal of Operational Research**, v. 229, n. 2, p. 281–302, 2013.

FEDORKO, G.; WEISZER, M. Configuring the parameters of multi-objective evolutionary algorithm for integrated timetabling and vehicle scheduling in public transport. In: **Carpathian Logistics Congress**. Jeseník, Czech Republic, EU: [s.n.], 2012. p. 7–12.

FERLAND, J. A.; FORTIN, L. Vehicle scheduling with sliding time windows. **European Journal of Operational Research**, v. 38, p. 213–226, 1989.

FORES, S. **A Column Generation Approach to Bus Driver Scheduling**. 179 p. Tese (Doutorado) — School of Computer Studies, University of Leeds, 1996.

FOURNIER, S. Dedicated Heuristic for a Back-and-Forth Single-Line Bus Trip Timetabling Problem. In: **Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. Bento Gonçalves, RS: XLII SBPO, 2010. p. 1–12.

FRELING, R.; WAGELMANS, A. P. M.; PAIXÃO, J. M. P. An overview of models and techniques for integrating vehicle and crew scheduling. In: WILSON, N. H. M. (Ed.). **Computer-aided Transit Scheduling, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems**. [S.l.]: Springer, 1999. p. 441–460.

FRELING, R.; WAGELMANS, A. P. M.; PAIXÃO, J. M. P. Models and Algorithms for Single-Depot Vehicle Scheduling. **Transportation Science**, v. 35, n. 2, p. 165–180, 2001.

FURINI, F. *et al.* A column generation heuristic for the two-dimensional two-staged guillotine cutting stock problem with multiple stock size. **European Journal of Operational Research**, v. 218, n. 1, p. 251–260, 2012.

GINTNER, V.; KLIEWER, N.; SUHL, L. Solving large multiple-depot multiple-vehicle-type bus scheduling problems in practice. **OR Spectrum**, v. 27, n. 4, p. 507–523, 2005.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização Combinatória e Programação Linear: Modelos e Algoritmos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Campus, 2005.

GUEDES, P. C.; BORENSTEIN, D. Otimização de grandes instâncias do problema de escalonamento de veículos no transporte urbano de passageiros com múltiplas garagens. In: **Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. Natal, RN: XLV SBPO, 2013.

GUIHAIRE, V.; HAO, J.-K. Transit network design and scheduling: A global review. **Transportation Research Part A: Policy and Practice**, v. 42, n. 10, p. 1251–1273, 2008a.

GUIHAIRE, V.; HAO, J.-k. Transit Network Re-Timetabling and Vehicle Scheduling. In: **Proceedings of the 2nd International Conference on Modeling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Science**. Heidelberg: Springer, 2008b. p. 135–144.

GUIHAIRE, V.; HAO, J.-K. Transit network timetabling and vehicle assignment for regulating authorities. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier Ltd, v. 59, n. 1, p. 16–23, 2010.

HADJAR, A.; SOUMIS, F. Dynamic window reduction for the multiple depot vehicle scheduling problem with time windows. **Computers & Operations Research**, v. 36, n. 7, p. 2160–2172, 2009.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução a Pesquisa Operacional**. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2010.

HUISMAN, D.; FRELING, R.; WAGELMANS, A. P. M. Multiple-Depot Integrated Vehicle and Crew Scheduling. **Transportation Science**, v. 39, n. 4, p. 491–502, 2005.

IBARRA-ROJAS, O. J.; RIOS-SOLIS, Y. A. Integrating synchronization bus timetabling and single-depot single-type vehicle scheduling. In: **ORP3. ORP3 meeting, Cádiz España**. [S.l.], 2011. p. 1–4.

IBARRA-ROJAS, O. J.; RIOS-SOLIS, Y. a. Synchronization of bus timetabling. **Transportation Research Part B: Methodological**, Elsevier Ltd, v. 46, n. 5, p. 599–614, 2012.

IBGE. **Santa Maria: infográficos: evolução populacional e pirâmide etária**. 2013. Acesso em: 01 nov. 2013. Disponível em: <<http://cidades.ibge.gov.br/painel/populacao.php?lang=&&codmun=431690&search=rio-grande-do-sul|santa-maria|infograficos:-evolucao-populacional-e-piramide-etaria>>.

INTERNATIONAL ASSOCIATION OF PUBLIC TRANSPORT. **Data & Statistics. European Union (EU): Latest Data on Urban Bus Fleets**. New Delhi, India, 2010. 1 p. Disponível em: <www.globalmasstransit.net/templates/print/_preview.html>.

KLIEWER, N.; AMBERG, B.; AMBERG, B. Multiple depot vehicle and crew scheduling with time windows for scheduled trips. **Public Transport**, v. 3, n. 3, p. 213–244, 2012.

KLIEWER, N.; BUNTE, S.; SUHL, L. Time windows for scheduled trips in multiple depot vehicle scheduling. In: **11 th Meeting of the Proceedings of the EURO Working Group on Transportation**. Bari, Italy: Technical University of Bari, 2006. p. 340–346.

KLIEWER, N.; MELLOULI, T.; SUHL, L. A new-solution model for multi-depot multi-vehicle-typ vehicle scheduling in (sub)urban public transport. In: **13th Mini-EURO Conference and the 9th meeting of the EURO working group on transportation**. Bari, Italy: Technical University of Bari, 2002. p. 604–609.

KLIEWER, N.; MELLOULI, T.; SUHL, L. A time space network based exact optimization model for multi-depot bus scheduling. **European Journal of Operational Research**, v. 175, p. 1616–1627, dez. 2006.

KLOTZ, E.; NEWMAN, A. M. Practical guidelines for solving difficult mixed integer linear programs. **Surveys in Operations Research and Management Science**, v. 18, n. 1-2, p. 18 – 32, 2013.

LAURENT, B.; HAO, J.-K. Simultaneous Vehicle and Crew Scheduling for Extra Urban Transports. In: NGUYEN, N. T. *et al.* (Ed.). **IEA/AIE**. [S.l.]: Springer, 2008. (Lecture Notes in Computer Science, v. 5027), p. 466–475.

LAURENT, B.; HAO, J.-K. List Graph Colouring for Multiple Depot Vehicle Scheduling. **International Journal of Mathematics in Operational Research**, v. 1, n. 1-2, p. 228–245, 2009.

MANHEIM, M. L. **Fundamentals of Transport System Analysis**. 1. ed. Boston: MIT Press, 1980.

MEINDL, B.; TEMPL, M. **Analysis of commercial and free and open source solvers for linear optimization problems**. Department of Statistics and Probability Theory, Vienna University of Technology, Vienna, Austria, 2012. 14 p.

MICHAELIS, M.; SCHÖBEL, A. Integrating line planning, timetabling, and vehicle scheduling: a customer-oriented heuristic. **Public Transport**, v. 1, n. 3, p. 211–232, 2009.

OUGHALIME, A. *et al.* Vehicle and Driver Scheduling Modelling : A Case Study in UKM. In: **2nd Conference on Data Mining and Optimization**. Selangor, Malaysia: Conference on Data Mining and Optimization, 2009. p. 53–59. ISBN 9781424449446.

OUKIL, A. *et al.* Stabilized column generation for highly degenerate multiple-depot vehicle scheduling problems. **Computers & Operations Research**, v. 34, n. 3, p. 817–834, 2007.

PALÚCH, S. A Note to Vehicle Scheduling with Several Bus Types. In: Martin Dlouhý, V. S. (Ed.). **29th International Conference Mathematical Methods in Economics: Part II**. Janská Dolina, Slovakia: Professional Publishing, 2011. p. 791.

PEPIN, A.-s. *et al.* Comparison of heuristic approaches for the multiple depot vehicle scheduling problem. **Journal of Scheduling**, v. 12, n. 1, p. 17–30, 2009.

PRATA, B. D. A. Programação integrada de veículos e motoristas : uma visão geral. **Sistemas & Gestão**, v. 4, n. 3, p. 182–204, 2009.

PREFEITURA DE SÃO PAULO. **Comitê Municipal de Mudanças do Clima e Ecoeconomia da Secretaria de Desenvolvimento e Turismo**. São Paulo, Brasil, 2010. 1–5 p. Acesso em: 13 out. 2013. Disponível em: <http://www.prefeitura.sp.gov.br/cidade/secretarias/upload/chamadas/ok_ata_4_transportes_1292265718.pdf>.

PREFEITURA DE SÃO PAULO. **Os principais números do trânsito e transporte em São Paulo**. São Paulo, Brasil, 2014. 1–5 p. Acesso em: 01 jan. 2014. Disponível em: <<http://www9.prefeitura.sp.gov.br/spMovimento/dadosoperacionais/caponibus.php>>.

RIBEIRO, C. C.; SOUMIS, F. A column generation approach to the Multiple-Depot Vehicle Scheduling Problem. **Operations Research**, v. 42, n. 1, p. 41–52, 1994.

ROMAN, A. Top 100 Bus Fleets. **Metro Magazine**, n. 40, p. 25–30, 2012.

STEINZEN, I. *et al.* A Time-Space Network Approach for the Integrated Vehicle and Crew Scheduling Problem with Multiple Depots. **Transportation Science**, v. 44, n. 3, p. 367–382, 2010.

TORRANCE, K.; HAIRE, A. R.; MACHEMEHL, R. B. **Vehicle and Driver Scheduling for Public Transit**. University of Texas at Austin, Texas, 2009. v. 7, n. 2, 44 p.

TÓTH, S. F. *et al.* Testing the use of lazy constraints in solving area-based adjacency formulations of harvest scheduling models. **Forest Science**, v. 59, n. 2, p. 157–176, 2013.

van den HEUVEL, A. P. R. .; van den AKKER, J. M.; NIEKERK, M. E. van K. **Integrating timetabling and vehicle scheduling in public bus transportation**. Department of Information and Computing Sciences, Utrecht University, The Netherlands, 2008. 17 p.

VISENTINI, M. S. *et al.* A new implementation to the vehicle type scheduling problem with time windows for scheduled trips. In: **Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. Natal, RN: XLV SBPO, 2013a.

VISENTINI, M. S. *et al.* Review of real-time vehicle schedule recovery methods in transportation services. **Journal of Scheduling**, Springer US, p. 1–27, 2013. ISSN 1094-6136. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10951-013-0339-8>>.

WAGNER, H. M. **Pesquisa Operacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1986.

WEIDER, S. **Integration of Vehicle and Duty Scheduling in Public Transport**. Tese (Doutorado) — Technische Universität Berlin, 2007.

WEISZER, M. Integrated timetable and scheduling optimization with multiobjective evolutionary algorithm. **The International Journal of Transport & Logistics**, v. 10, n. 11, p. 47–53, 2011.

WEISZER, M.; FEDORKO, G.; CUJAN, Z. Multiobjective evolutionary algorithm for integrated timetable optimization with vehicle scheduling aspects. **Perner's Contacts**, v. 5, n. 4, p. 286–294, 2010.

WU, Y.; TANG, J.; ZHANG, Y. Optimizing reliable timetable for bus transit network: Model formulation and solution. In: **Control and Decision Conference (CCDC), 2013 25th Chinese**. [S.l.: s.n.], 2013. p. 1835–1840.

APÊNDICES

APÊNDICE A: Pseudocódigo para a criação dos arcos da TSN

Figura 31 – Pseudocódigo para a criação dos arcos *deadhead*

```

for  $i \leftarrow 0$  até #arcos de serviço -1 do
  for  $j \leftarrow i + 1$  até #arcos de serviço do
    if destino  $[i] \neq$  origem $[j]$  then
      intervalo  $\leftarrow$  horário de início  $[j] -$  horário de término  $[i]$ ;
      if intervalo  $<$  latência  $[destino[i], origem[j]]$  then
        cria arco deadhead com
        origem = destino  $[i]$ ;
        destino = origem  $[j]$ ;
        horário de início = horário de término  $[i]$ ;
        horário de término = horário de início  $[j]$ ;
      end
    end
  end
end

```

Figura 32 – Pseudocódigo para a criação dos arcos de espera entre os terminais

```

for  $i \leftarrow 1$  até arcos de serviço -1 do
  for  $j \leftarrow i + 1$  até arcos de serviço -1 do
    if origem  $[i] =$  origem  $[j]$  e horário de início  $[j] >$  horário de início  $[i]$  then
      cria arco de espera com
      origem = origem  $[i]$ ;
      destino = origem  $[j]$ ;
      horário de início = horário de início  $[i]$ ;
      horário de término = horário de início  $[j]$ ;
    else if destino  $[i] =$  destino  $[j]$  e horário de término  $[j] >$  horário de término  $[i]$ 
    then
      cria arco de espera com
      origem = destino  $[i]$ ;
      destino = destino  $[j]$ ;
      horário de início = horário de término  $[i]$ ;
      horário de término = horário de término  $[j]$ ;
    end
    else if origem  $[i] =$  destino  $[j]$  e horário de início  $[j] >$  horário de término  $[i]$  then
      cria arco de espera com
      origem = origem  $[i]$ ;
      destino = destino  $[j]$ ;
      horário de início = horário de início  $[i]$ ;
      horário de término = horário de término  $[j]$ ;
    end
    else if destino  $[i] =$  origem  $[j]$  e horário de término  $[j] >$  horário de início  $[i]$  then
      cria arco de espera com
      origem = destino  $[i]$ ;
      destino = origem  $[j]$ ;
      horário de início = horário de término  $[i]$ ;
      horário de término = horário de início  $[j]$ ;
    end
  end
end

```

Figura 33 – Pseudocódigo para a criação dos arcos de espera na garagem

```

i ← 1
j ← 1
while i < arcos pull-in e j < arcos pull-out do
  if horário de início [i] < horário de término [j] then
    cria arco de espera com
    origem = garagem;
    destino = garagem;
    horário de início = horário de início [i];
    horário de término = horário de término [j];
    i++;

  else if horário de início [i] = horário de término [j] then
    i++;
  end
  if horário de início [i] > horário de término [j] then
    cria arco de espera com
    origem = garagem;
    destino = garagem;
    horário de início = horário de início [j];
    horário de término = horário de término [i];
    i++;
  end
  else if horário de início [i] = horário de término [j] then
    i++;
  end
end
end

```

Figura 34 – Pseudocódigo para a criação dos arcos *pull-in* e *pull-out*

```

for i ← 1 até #arcos de serviço do
  cria arco de pull-in com
  horário de início = horário de início [i] - latência [depot, origem[i]];
  horário de término = horário de início [i];
  origem = garagem;
  destino = origem[i];
  cria arco de pull-out com
  horário de início = horário de início [i];
  horário de término = horário de término [i] + latência [destino [i], garagem];
  origem = destino [i];
  destino = garagem;
end
end

```

Figura 35 – Pseudocódigo para a criação dos arcos de circulação

```

begin
  i ← arco de pull-out que ocorre mais tarde;
  j ← arco de pull-in que ocorre mais cedo;
  cria arco de circulação com
  origem = garagem;
  destino = garagem;
  horário de início = horário de término [i];
  horário de término = horário de início [j];
end
end

```

APÊNDICE B: Tabelas detalhadas dos resultados computacionais

Tabela 18 – Resultados em termos de solução do modelo VTSP para as médias das instâncias de característica aleatória

Modelo	Inst.	F.O.	Tempo (seg.)	# Veículos			
				<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>Total</i>
VTSP	1000_10A	6,416E+11	19,92	10,6	13,6	29,8	54,0
	1000_23A	7,021E+11	40,39	11,8	12,6	35,0	59,4
	2000_10A	1,135E+12	66,80	18,4	18,8	59,4	96,6
	2000_23A	1,217E+12	211,80	20,4	21,6	61,0	103,0
	3000_10A	1,554E+12	166,53	24,4	28,6	79,6	132,6
	3000_23A	1,693E+12	553,28	27,8	31,8	83,4	143,0
	4000_10A	1,937E+12	276,70	28,4	34,8	103,6	166,8
	4000_23A	2,088E+12	1380,93	31,6	40,0	106,8	178,4
	5000_10A	2,298E+12	402,48	32,0	41,6	125,4	199,0
	5000_23A	2,538E+12	2060,19	34,8	50,6	133,8	219,2
	1000_10AP	6,820E+11	14,25	11,0	17,2	28,8	57,0
	1000_23AP	7,173E+11	41,48	9,8	20,2	30,8	60,8
	2000_10AP	1,122E+12	62,79	17,6	33,2	42,4	93,2
	2000_23AP	1,255E+12	171,94	21,0	38,6	43,4	103,0
	3000_10AP	1,601E+12	139,70	25,2	51,0	56,0	132,2
	3000_23AP	1,754E+12	393,86	27,4	55,8	61,8	145,0
	4000_10AP	2,022E+12	288,80	31,4	57,6	79,6	168,6
	4000_23AP	2,175E+12	851,65	33,0	65,8	82,4	181,2
	5000_10AP	2,438E+12	391,54	39,2	75,6	86,4	201,2
	5000_23AP	2,689E+12	1277,44	43,8	80,6	97,6	222,0

Tabela 19 – Resultados em termos de solução dos modelos VTSP-TW e de Kliewer para as médias das instâncias aleatórias

Modelo	Inst.	T_{tw}	F.O.	Tempo (seg.)	# Veículos				#TW ativos
					A	B	C	Total	
VTSP-TW	1000_10A	1	6,326E+11	18,98	10,6	13,0	29,4	53,0	2,0
	1000_10A	2	6,306E+11	20,61	10,6	12,0	30,4	53,0	3,6
	1000_23A	1	7,004E+11	40,85	11,4	12,8	35,0	59,2	1,0
	1000_23A	2	6,897E+11	41,90	11,4	12,4	34,4	58,2	3,0
	2000_10A	1	1,116E+12	69,03	18,0	18,8	58,0	94,8	4,6
	2000_10A	2	1,099E+12	77,01	18,0	18,2	57,0	93,2	12,6
	2000_23A	1	1,214E+12	223,63	21,2	21,6	57,8	100,6	2,8
	2000_23A	2	1,193E+12	242,78	21,0	22,4	54,6	98,0	10,2
	3000_10A	1	1,537E+12	168,36	23,6	28,6	78,8	131,0	8,0
	3000_10A	2	1,506E+12	196,32	23,0	28,0	77,4	128,4	23,4
	3000_23A	1	1,672E+12	541,20	27,6	31,2	82,0	140,8	8,2
	3000_23A	2	1,645E+12	547,35	26,8	31,2	80,6	138,6	18,4
	4000_10A	1	1,899E+12	318,06	28,4	32,8	101,6	162,8	15,0
	4000_10A	2	1,858E+12	365,01	28,0	31,6	99,6	159,2	45,4
	4000_23A	1	2,057E+12	1320,54	31,6	38,2	105,4	175,2	12,0
	4000_23A	2	2,026E+12	1285,36	31,0	36,4	104,8	172,2	31,8
	5000_10A	1	2,268E+12	617,22	31,6	39,8	124,6	196,0	16,4
	5000_10A	2	2,201E+12	772,60	30,4	38,6	121,0	190,0	92,0
	5000_23A	1	2,498E+12	2396,36	35,0	49,6	129,4	214,0	17,0
	5000_23A	2	2,452E+12	2647,14	34,6	49,0	125,8	209,4	51,6
Kliewer	1000_10A	1	6,326E+11	21,33	10,6	13,0	29,4	53,0	2,0
	1000_10A	2	6,314E+11	38,46	10,6	12,4	30,0	53,0	2,8
	1000_23A	1	7,004E+11	37,08	11,4	12,8	35,0	59,2	1,0
	1000_23A	2	6,897E+11	50,12	11,4	12,4	34,4	58,2	3,0
	2000_10A	1	1,116E+12	81,64	18,0	18,8	58,0	94,8	4,6
	2000_10A	2	1,099E+12	142,87	18,0	18,2	57,0	93,2	12,0
	2000_23A	1	1,207E+12	206,82	19,6	34,6	45,4	99,6	3,4
	2000_23A	2	1,182E+12	323,84	19,6	33,8	43,8	97,2	11,2
	3000_10A	1	1,539E+12	180,29	23,8	28,2	78,8	130,8	9,4
	3000_10A	2	1,507E+12	364,19	23,2	28,4	76,6	128,2	25,8
	3000_23A	1	1,673E+12	834,16	27,2	31,4	82,4	141,0	7,6
	3000_23A	2	1,648E+12	1183,19	27,0	32,0	79,8	138,8	17,0
	4000_10A	1	1,899E+12	332,76	28,4	33,0	101,4	162,8	13,2
	4000_10A	2	1,858E+12	826,24	28,0	31,8	99,4	159,2	43,8
	4000_23A	1	2,058E+12	1088,89	31,8	37,6	105,8	175,2	13,2
	4000_23A	2	2,026E+12	1414,62	31,4	36,8	104,2	172,4	34,0
	5000_10A	1	2,267E+12	582,42	31,8	39,6	124,4	195,8	19,4
	5000_10A	2	2,199E+12	1266,91	30,6	39,8	119,0	189,4	96,6
	5000_23A	1	2,498E+12	1767,17	35,2	50,0	129,0	214,2	15,6
	5000_23A	2	2,450E+12	2493,19	34,8	49,2	125,8	209,8	47,6

Tabela 20 – Resultados em termos de solução dos modelos VTSP-TW e de Kliewer para as médias das instâncias aleatórias em horário de pico

Modelo	Inst.	T_{tw}	F.O.	Tempo (seg.)	# Veículos				#TW ativos
					A	B	C	Total	
VTSP-TW	1000_10AP	2	6,612E+11	17,01	10,8	16,6	27,6	55,0	4,8
	1000_23AP	1	7,178E+11	39,81	9,8	20,2	30,6	60,6	0,2
	1000_23AP	2	7,106E+11	40,98	9,8	19,6	30,6	60,0	1,6
	2000_10AP	1	1,105E+12	69,71	17,4	32,6	41,4	91,4	4,6
	2000_10AP	2	1,083E+12	73,80	17,2	31,4	41,0	89,6	11,8
	2000_23AP	1	1,244E+12	172,04	21,0	38,0	42,6	101,6	3,6
	2000_23AP	2	1,218E+12	190,89	21,0	37,2	41,0	99,2	9,0
	3000_10AP	1	1,569E+12	163,80	25,2	48,8	55,0	129,0	9,2
	3000_10AP	2	1,534E+12	170,15	25,0	48,0	52,8	125,8	22,6
	3000_23AP	1	1,726E+12	474,28	27,2	54,8	60,0	142,0	6,2
	3000_23AP	2	1,703E+12	568,29	27,2	54,0	58,6	139,8	13,6
	4000_10AP	1	1,270E+12	304,13	31,0	55,8	77,6	164,4	9,4
	4000_10AP	2	1,944E+12	361,05	30,4	54,6	76,6	161,6	24,2
	4000_23AP	1	2,147E+12	928,22	32,8	65,0	80,2	178,0	6,6
	4000_23AP	2	2,107E+12	1015,33	32,2	64,0	78,4	174,6	19,8
	5000_10AP	1	2,389E+12	534,94	38,2	74,0	84,4	196,6	10,0
	5000_10AP	2	2,335E+12	654,82	37,2	72,4	82,4	192,0	40,4
	5000_23AP	1	2,654E+12	1482,69	43,6	80,0	94,4	218,0	7,8
5000_23AP	2	2,599E+12	1517,11	42,2	77,8	93,6	213,6	26,4	
Kliewer	1000_10AP	1	6,676E+11	22,62	10,8	16,8	28,0	55,6	3,4
	1000_10AP	2	6,632E+11	45,33	10,8	16,6	27,8	55,2	4,6
	1000_23AP	1	7,178E+11	34,49	9,8	20,2	30,6	60,6	0,2
	1000_23AP	2	7,102E+11	48,99	9,8	19,4	30,8	60,0	2,0
	2000_10AP	1	1,104E+12	65,22	17,4	32,4	41,6	91,4	5,0
	2000_10AP	2	1,083E+12	129,83	17,2	31,4	41,0	89,6	11,8
	2000_23AP	1	1,242E+12	139,10	21,0	38,0	42,4	101,4	3,8
	2000_23AP	2	1,214E+12	213,81	21,0	37,2	40,6	98,8	10,4
	3000_10AP	1	1,569E+12	161,79	25,2	48,8	55,0	129,0	9,2
	3000_10AP	2	1,533E+12	339,92	24,8	48,2	52,8	125,8	22,6
	3000_23AP	1	1,726E+12	345,34	27,2	54,8	60,0	142,0	6,2
	3000_23AP	2	1,703E+12	618,83	27,2	54,0	58,6	139,8	13,8
	4000_10AP	1	1,976E+12	316,32	30,8	56,0	77,4	164,2	11,2
	4000_10AP	2	1,944E+12	709,12	30,4	54,6	76,6	161,6	25,2
	4000_23AP	1	2,145E+12	743,62	32,8	64,8	80,0	177,6	7,2
	4000_23AP	2	2,107E+12	1265,49	32,2	64,0	78,4	174,6	19,4
	5000_10AP	1	2,387E+12	529,59	38,0	74,0	84,6	196,6	11,8
	5000_10AP	2	2,331E+12	1204,84	37,6	71,8	82,2	191,6	48,0
5000_23AP	1	2,654E+12	1212,90	43,6	80,2	94,2	218,0	7,8	
5000_23AP	2	2,597E+12	1794,79	42,0	78,0	93,4	213,4	27,2	

Tabela 21 – Relação proporcional entre os modelos VTSP, VTSP-TW e de Kliewer para as médias das instâncias aleatórias

Relação	Inst.	T_{tw}	Var.	Rest.	Não-Zero	A^{se}	Tempo (s)	Veículos
R(VTSP,VTSP-TW)	1000_10A	1	1,84%	2,43%	3,41%	0,00%	-4,93%	-1,89%
	1000_10A	2	2,81%	4,48%	5,95%	0,00%	3,33%	-1,89%
	1000_23A	1	0,24%	0,84%	0,68%	0,00%	1,12%	-0,34%
	1000_23A	2	0,53%	1,80%	1,48%	0,00%	3,59%	-2,06%
	2000_10A	1	1,93%	4,31%	5,21%	0,00%	3,23%	-1,90%
	2000_10A	2	3,79%	8,27%	9,88%	0,00%	13,25%	-3,65%
	2000_23A	1	0,53%	1,80%	1,50%	0,00%	5,29%	-2,39%
	2000_23A	2	1,04%	3,56%	2,91%	0,00%	12,76%	-5,10%
	3000_10A	1	2,98%	6,96%	7,96%	0,00%	1,09%	-1,22%
	3000_10A	2	5,78%	12,98%	14,73%	0,00%	15,17%	-3,27%
	3000_23A	1	0,82%	3,02%	2,32%	0,00%	-2,23%	-1,56%
	3000_23A	2	1,59%	5,74%	4,43%	0,00%	-1,08%	-3,17%
	4000_10A	1	3,99%	9,60%	10,60%	0,00%	13,00%	-2,46%
	4000_10A	2	7,65%	17,48%	19,12%	0,00%	24,19%	-4,77%
	4000_23A	1	1,01%	3,84%	2,86%	0,00%	-4,57%	-1,83%
	4000_23A	2	2,02%	7,46%	5,62%	0,00%	-7,44%	-3,60%
	5000_10A	1	4,98%	12,37%	13,12%	0,00%	34,79%	-1,53%
	5000_10A	2	9,51%	22,03%	23,21%	0,00%	47,91%	-4,74%
	5000_23A	1	1,31%	5,07%	3,70%	0,00%	14,03%	-2,43%
	5000_23A	2	2,58%	9,66%	7,14%	0,00%	22,17%	-4,68%
R(VTSP,Kliewer)	1000_10A	1	7,91%	6,67%	8,64%	15,04%	6,63%	-1,89%
	1000_10A	2	40,21%	23,60%	39,11%	26,24%	48,21%	-1,89%
	1000_23A	1	1,84%	2,71%	2,13%	6,54%	-8,92%	-0,34%
	1000_23A	2	24,89%	17,64%	24,30%	13,46%	19,41%	-2,06%
	2000_10A	1	11,91%	9,06%	13,35%	24,76%	18,18%	-1,90%
	2000_10A	2	44,48%	25,18%	44,06%	39,81%	53,24%	-3,65%
	2000_23A	1	8,52%	7,51%	8,83%	13,31%	-2,41%	-3,41%
	2000_23A	2	30,17%	21,01%	29,80%	23,38%	34,60%	-5,97%
	3000_10A	1	15,61%	10,15%	17,56%	31,97%	7,63%	-1,38%
	3000_10A	2	47,87%	24,70%	47,94%	48,61%	54,27%	-3,43%
	3000_23A	1	14,07%	10,29%	14,39%	19,05%	33,67%	-1,42%
	3000_23A	2	34,46%	22,65%	34,29%	31,58%	53,24%	-3,03%
	4000_10A	1	18,63%	10,10%	21,00%	37,30%	16,85%	-2,46%
	4000_10A	2	50,59%	23,04%	51,01%	54,45%	66,51%	-4,77%
	4000_23A	1	6,69%	7,71%	7,86%	22,72%	-26,82%	-1,83%
	4000_23A	2	31,12%	20,12%	31,51%	37,01%	2,38%	-3,48%
	5000_10A	1	21,21%	9,97%	23,90%	41,48%	30,90%	-1,63%
	5000_10A	2	52,83%	21,55%	53,51%	58,79%	68,23%	-5,07%
	5000_23A	1	8,02%	8,60%	9,44%	26,67%	-16,58%	-2,33%
	5000_23A	2	32,81%	20,38%	33,47%	42,12%	17,37%	-4,48%
R(Kliewer,VTSP-TW)	1000_10A	1	-6,59%	-4,54%	-5,73%	-17,70%	-12,38%	0,00%
	1000_10A	2	-62,54%	-25,03%	-54,45%	-35,58%	-86,67%	0,00%
	1000_23A	1	-1,62%	-1,93%	-1,48%	-7,00%	9,22%	0,00%
	1000_23A	2	-32,44%	-19,23%	-30,14%	-15,56%	-19,62%	0,00%
	2000_10A	1	-11,33%	-5,22%	-9,40%	-32,90%	-18,27%	0,00%
	2000_10A	2	-73,30%	-22,60%	-61,10%	-66,13%	-85,53%	0,00%
	2000_23A	1	-8,73%	-6,17%	-8,03%	-15,36%	7,52%	0,99%
	2000_23A	2	-41,72%	-22,09%	-38,30%	-30,51%	-33,39%	0,82%
	3000_10A	1	-14,96%	-3,55%	-11,65%	-46,99%	-7,08%	0,15%
	3000_10A	2	-80,73%	-15,56%	-63,81%	-94,59%	-85,51%	0,16%
	3000_23A	1	-15,42%	-8,10%	-14,10%	-23,53%	-54,13%	-0,14%
	3000_23A	2	-50,15%	-21,87%	-45,44%	-46,17%	-116,17%	-0,14%
	4000_10A	1	-17,99%	-0,55%	-13,16%	-59,50%	-4,62%	0,00%
	4000_10A	2	-86,90%	-7,24%	-65,09%	-119,54%	-126,36%	0,00%
	4000_23A	1	-6,09%	-4,19%	-5,43%	-29,40%	17,54%	0,00%
	4000_23A	2	-42,24%	-15,85%	-37,81%	-58,75%	-10,06%	-0,12%
	5000_10A	1	-20,60%	2,66%	-14,17%	-70,90%	5,64%	0,10%
	5000_10A	2	-91,84%	0,62%	-65,19%	-142,65%	-63,98%	0,32%
	5000_23A	1	-7,30%	-3,86%	-6,33%	-36,38%	26,26%	-0,09%
	5000_23A	2	-44,99%	-13,46%	-39,56%	-72,77%	5,82%	-0,19%

Tabela 22 – Relação proporcional entre os modelos VTSP, VTSP-TW e de Kliewer para as médias das instâncias aleatórias em horário de pico

Relação	Inst.	T_{tw}	Var.	Rest.	Não-Zero	A^{se}	Tempo (s)	Veículos
R(VTSP,VTSP-TW)	1000_10AP	1	1,03%	1,99%	2,79%	0,00%	3,32%	-2,52%
	1000_10AP	2	1,96%	3,94%	5,23%	0,00%	16,20%	-3,64%
	1000_23AP	1	0,31%	1,04%	0,86%	0,00%	-4,20%	-0,33%
	1000_23AP	2	0,55%	1,86%	1,54%	0,00%	-1,22%	-1,33%
	2000_10AP	1	1,95%	4,34%	5,23%	0,00%	9,93%	-1,97%
	2000_10AP	2	3,85%	8,39%	10,01%	0,00%	14,92%	-4,02%
	2000_23AP	1	0,52%	1,86%	1,48%	0,00%	0,06%	-1,38%
	2000_23AP	2	1,01%	3,54%	2,83%	0,00%	9,93%	-3,83%
	3000_10AP	1	3,03%	7,07%	8,12%	0,00%	14,71%	-2,48%
	3000_10AP	2	5,82%	13,06%	14,85%	0,00%	17,90%	-5,09%
	3000_23AP	1	0,79%	2,90%	2,24%	0,00%	16,96%	-2,11%
	3000_23AP	2	1,55%	5,56%	4,31%	0,00%	30,69%	-3,72%
	4000_10AP	1	3,89%	9,41%	10,35%	0,00%	5,04%	-2,55%
	4000_10AP	2	7,56%	17,33%	18,89%	0,00%	20,01%	-4,33%
	4000_23AP	1	1,02%	3,89%	2,91%	0,00%	8,25%	-1,80%
	4000_23AP	2	2,07%	7,64%	5,77%	0,00%	16,12%	-3,78%
	5000_10AP	1	4,95%	12,28%	13,01%	0,00%	26,81%	-2,34%
	5000_10AP	2	9,45%	21,92%	23,09%	0,00%	40,21%	-4,79%
	5000_23AP	1	1,29%	5,01%	3,65%	0,00%	13,84%	-1,83%
	5000_23AP	2	2,58%	9,65%	7,13%	0,00%	15,80%	-3,93%
R(VTSP,Kliewer)	1000_10AP	1	14,48%	8,82%	14,58%	15,54%	36,99%	-2,52%
	1000_10AP	2	42,96%	24,73%	41,70%	26,25%	68,56%	-3,26%
	1000_23AP	1	2,32%	3,46%	2,68%	7,99%	-20,27%	-0,33%
	1000_23AP	2	25,52%	18,25%	24,92%	14,18%	15,31%	-1,33%
	2000_10AP	1	12,01%	9,07%	13,46%	25,00%	3,73%	-1,97%
	2000_10AP	2	44,57%	25,32%	44,15%	40,00%	51,64%	-4,02%
	2000_23AP	1	3,82%	5,11%	4,45%	13,34%	-23,61%	-1,58%
	2000_23AP	2	27,42%	19,21%	27,18%	23,18%	19,58%	-4,25%
	3000_10AP	1	15,87%	10,13%	17,86%	32,42%	13,65%	-2,48%
	3000_10AP	2	48,03%	24,56%	48,11%	48,78%	58,90%	-5,09%
	3000_23AP	1	5,38%	6,52%	6,30%	18,50%	-14,05%	-2,11%
	3000_23AP	2	29,56%	19,76%	29,67%	31,29%	36,35%	-3,72%
	4000_10AP	1	18,61%	10,16%	20,98%	37,29%	8,70%	-2,68%
	4000_10AP	2	50,54%	23,07%	50,96%	54,42%	59,27%	-4,33%
	4000_23AP	1	6,62%	7,50%	7,78%	22,54%	-14,53%	-2,03%
	4000_23AP	2	31,12%	20,04%	31,53%	37,16%	32,70%	-3,78%
5000_10AP	1	21,27%	9,99%	23,97%	41,53%	26,07%	-2,34%	
5000_10AP	2	52,79%	21,53%	53,46%	58,61%	67,50%	-5,01%	
5000_23AP	1	7,97%	8,46%	9,38%	26,52%	-5,32%	-1,83%	
5000_23AP	2	32,78%	20,36%	33,43%	41,98%	28,83%	-4,03%	
R(Kliewer,VTSP-TW)	1000_10AP	1	-15,73%	-7,49%	-13,80%	-18,40%	-53,44%	0,00%
	1000_10AP	2	-71,88%	-27,63%	-62,54%	-35,60%	-166,52%	-0,36%
	1000_23AP	1	-2,06%	-2,51%	-1,87%	-8,68%	13,36%	0,00%
	1000_23AP	2	-33,53%	-20,05%	-31,15%	-16,52%	-19,52%	0,00%
	2000_10AP	1	-11,44%	-5,20%	-9,52%	-33,33%	6,43%	0,00%
	2000_10AP	2	-73,44%	-22,68%	-61,14%	-66,68%	-75,92%	0,00%
	2000_23AP	1	-3,43%	-3,43%	-3,11%	-15,39%	19,15%	0,20%
	2000_23AP	2	-36,39%	-19,39%	-33,44%	-30,18%	-12,00%	0,40%
	3000_10AP	1	-15,26%	-3,41%	-11,86%	-47,97%	1,23%	0,00%
	3000_10AP	2	-81,22%	-15,24%	-64,09%	-95,23%	-99,78%	0,00%
	3000_23AP	1	-4,85%	-3,87%	-4,33%	-22,71%	27,19%	0,00%
	3000_23AP	2	-39,77%	-17,69%	-36,05%	-45,54%	-8,89%	0,00%
	4000_10AP	1	-18,09%	-0,84%	-13,45%	-59,48%	-4,01%	0,12%
	4000_10AP	2	-86,89%	-7,46%	-65,38%	-119,41%	-96,41%	0,00%
	4000_23AP	1	-5,99%	-3,91%	-5,28%	-29,11%	19,89%	0,22%
	4000_23AP	2	-42,18%	-15,51%	-37,62%	-59,15%	-24,64%	0,00%
5000_10AP	1	-20,74%	2,54%	-14,41%	-71,04%	1,00%	0,00%	
5000_10AP	2	-91,79%	0,50%	-65,24%	-141,58%	-83,99%	0,21%	
5000_23AP	1	-7,26%	-3,77%	-6,33%	-36,09%	18,20%	0,00%	
5000_23AP	2	-44,93%	-13,45%	-39,51%	-72,35%	-18,30%	0,09%	

Tabela 23 – Resultados em termos de solução do modelo VTSP-SCT para as médias das instâncias de característica aleatória (1000 viagens)

Inst.	Δt	T_{tw}	F.O.	Tempo (seg.)	# Veículos				#Viagens agrupadas	#TW ativos
					A	B	C	Total		
1000_10A	1	0	6,360E+11	19,42	10,6	13,8	29,0	53,4	4,8	0,0
	2	0	6,298E+11	20,20	10,8	14,0	27,4	52,2	9,0	0,0
	3	0	6,254E+11	29,82	10,8	14,8	26,4	52,0	14,8	0,0
	1	1	6,292E+11	22,75	10,4	13,0	29,4	52,8	4,8	2,2
	2	1	6,240E+11	26,23	10,4	13,4	28,4	52,2	8,8	2,4
	3	1	6,168E+11	28,83	10,4	13,8	27,2	51,4	15,0	2,4
	1	2	6,266E+11	23,38	10,6	12,0	30,0	52,6	4,6	4,0
	2	2	6,196E+11	22,44	10,4	12,2	29,4	52,0	8,6	4,6
	3	2	6,117E+11	20,16	10,4	12,2	28,6	51,2	14,6	6,4
1000_23A	1	0	7,021E+11	38,69	11,8	12,6	35,0	59,4	1,0	0,0
	2	0	7,001E+11	39,38	11,8	12,6	34,8	59,2	2,2	0,0
	3	0	6,981E+11	43,35	11,8	12,6	34,6	59,0	3,0	0,0
	1	1	7,004E+11	43,84	11,4	12,8	35,0	59,2	1,0	1,0
	2	1	6,984E+11	37,03	11,4	12,8	34,8	59,0	2,0	1,0
	3	1	6,958E+11	39,36	11,6	12,8	34,2	58,6	2,8	1,2
	1	2	6,897E+11	41,23	11,4	12,4	34,4	58,2	1,0	3,0
	2	2	6,877E+11	43,34	11,4	12,4	34,2	58,0	2,2	3,8
	3	2	6,871E+11	45,64	11,6	12,4	33,8	57,8	2,8	3,4
1000_10AP	1	0	6,760E+11	14,40	11,0	17,2	28,2	56,4	8,0	0,0
	2	0	6,716E+11	16,14	11,0	17,0	28,0	56,2	14,4	0,0
	3	0	6,636E+11	14,87	11,0	17,0	27,2	54,6	20,0	0,0
	1	1	6,635E+11	12,21	10,8	16,8	27,6	55,2	8,0	3,4
	2	1	6,591E+11	17,53	10,8	16,6	27,4	54,8	14,2	3,2
	3	1	6,531E+11	17,47	10,8	16,6	26,8	54,2	20,0	2,8
	1	2	6,591E+11	14,81	10,8	16,6	27,4	54,8	8,0	4,2
	2	2	6,527E+11	19,13	10,8	16,4	27,0	54,2	14,6	4,2
	3	2	6,467E+11	18,13	10,8	16,4	26,4	53,6	20,0	4,0
1000_23AP	1	0	7,153E+11	35,66	9,8	20,2	30,6	60,6	2,2	0,0
	2	0	7,153E+11	34,47	9,8	20,2	30,6	60,6	3,6	0,0
	3	0	7,133E+11	36,36	9,8	20,2	30,4	60,4	5,4	0,0
	1	1	7,158E+11	35,22	9,8	20,2	30,4	60,4	2,2	0,2
	2	1	7,158E+11	35,46	9,8	20,2	30,4	60,4	3,6	0,2
	3	1	7,138E+11	35,35	9,8	20,2	30,2	60,2	5,4	0,2
	1	2	7,086E+11	36,72	9,8	19,6	30,4	59,8	2,2	1,6
	2	2	7,086E+11	37,31	9,8	19,6	30,4	59,8	3,6	1,6
	3	2	7,066E+11	37,58	9,8	19,6	30,2	59,6	5,4	1,6

Tabela 24 – Resultados em termos de solução do modelo VTSP-SCT para as médias das instâncias de característica aleatória (2000 viagens)

Inst.	Δt	T_{tw}	F.O.	Tempo (seg.)	# Veículos				#Viagens agrupadas	#TW ativos
					A	B	C	Total		
2000_10A	1	0	1,120E+12	81,18	19,2	18,4	57,2	94,8	17,6	0,0
	2	0	1,109E+12	87,50	19,8	19,2	54,2	93,2	34,6	0,0
	3	0	1,103E+12	84,25	19,8	19,0	53,8	92,6	49,6	0,0
	1	1	1,098E+12	88,61	19,0	17,6	56,0	92,6	17,4	6,6
	2	1	1,087E+12	104,32	19,4	17,6	53,4	90,4	34,2	7,8
	3	1	1,082E+12	102,36	19,8	17,6	53,0	90,4	48,4	7,6
	1	2	1,084E+12	83,21	18,2	18,0	55,4	91,6	15,8	13,8
	2	2	1,071E+12	102,23	18,6	18,4	52,8	89,8	31,0	14,0
	3	2	1,066E+12	98,42	18,6	18,8	52,0	89,4	46,6	11,6
2000_23A	1	0	1,215E+12	215,92	20,4	21,6	60,8	102,8	2,8	0,0
	2	0	1,212E+12	188,92	20,6	21,4	60,4	102,4	6,0	0,0
	3	0	1,208E+12	201,59	21,0	21,0	59,8	101,8	8,2	0,0
	1	1	1,206E+12	225,54	20,4	21,2	60,0	101,6	2,2	2,2
	2	1	1,203E+12	234,09	20,6	21,0	59,6	101,2	5,6	3,0
	3	1	1,199E+12	307,70	21,0	20,2	59,0	100,2	8,0	3,6
	1	2	1,184E+12	200,15	20,0	22,4	56,8	99,2	2,8	9,4
	2	2	1,182E+12	247,85	20,2	22,2	56,2	98,6	5,8	10,2
	3	2	1,179E+12	289,78	20,4	22,4	55,8	98,6	8,4	10,2
2000_10AP	1	0	1,096E+12	68,74	17,6	34,0	38,8	90,4	23,0	0,0
	2	0	1,086E+12	73,78	17,6	34,2	37,6	89,4	47,6	0,0
	3	0	1,074E+12	79,97	17,6	34,2	36,4	88,2	67,6	0,0
	1	1	1,081E+12	70,24	17,4	33,0	38,6	89,0	22,8	4,0
	2	1	1,074E+12	81,58	17,4	33,0	37,4	87,8	47,8	3,4
	3	1	1,064E+12	80,10	17,4	33,2	36,6	87,2	67,4	2,4
	1	2	1,056E+12	82,84	17,2	32,0	37,6	86,8	23,4	14,4
	2	2	1,048E+12	83,56	17,2	32,0	36,8	86,0	47,8	11,6
	3	2	1,040E+12	87,28	17,2	32,0	36,0	85,2	68,6	10,4
2000_23AP	1	0	1,253E+12	167,67	21,0	38,6	43,2	102,8	4,6	0,0
	2	0	1,253E+12	173,24	21,0	38,6	43,2	102,8	8,8	0,0
	3	0	1,253E+12	186,14	21,0	38,6	43,2	102,8	12,6	0,0
	1	1	1,244E+12	176,60	21,0	38,0	42,6	101,6	4,8	3,2
	2	1	1,244E+12	176,80	20,8	38,0	42,6	101,4	8,6	3,0
	3	1	1,242E+12	212,96	20,8	38,0	42,4	101,2	13,0	2,6
	1	2	1,218E+12	211,18	21,0	37,2	41,0	99,2	4,6	8,6
	2	2	1,218E+12	204,11	21,0	37,2	41,0	99,2	8,6	8,4
	3	2	1,218E+12	225,97	21,0	37,2	41,0	99,2	13,2	7,4

Tabela 25 – Resultados em termos de solução do modelo VTSP-SCT para as médias das instâncias de característica aleatória (3000 viagens)

Inst.	Δt	T_{tw}	F.O.	Tempo (seg.)	# Veículos				#Viagens agrupadas	#TW ativos
					A	B	C	Total		
3000_10A	1	0	1,53E+12	188,35	24,8	29,4	76,0	130,2	33,6	0,0
	2	0	1,52E+12	227,60	25,4	29,2	74,0	128,6	66,2	0,0
	3	0	1,50E+12	268,31	25,2	30,2	70,4	125,8	97,4	0,0
	1	1	1,51E+12	184,60	24,0	29,8	74,4	128,2	34,4	10,4
	2	1	1,50E+12	262,04	24,2	30,6	71,4	126,2	66,2	10,2
	3	1	1,48E+12	285,68	24,8	29,2	70,2	124,2	96,6	9,6
	1	2	1,48E+12	267,47	23,6	28,8	72,4	124,8	33,8	29,6
	2	2	1,47E+12	273,81	23,8	29,0	71,0	123,8	64,2	26,8
	3	2	1,45E+12	262,03	24,6	28,8	68,2	121,6	95,6	27,0
3000_23A	1	0	1,69E+12	609,42	27,8	31,8	83,4	143,0	5,0	0,0
	2	0	1,69E+12	753,71	28,0	31,8	82,6	142,4	10,6	0,0
	3	0	1,69E+12	779,52	28,0	31,8	82,4	142,2	15,4	0,0
	1	1	1,67E+12	509,66	27,6	31,4	81,6	140,6	5,4	4,0
	2	1	1,67E+12	670,07	27,8	31,6	80,6	140,0	10,6	3,0
	3	1	1,67E+12	841,47	27,8	31,4	81,6	140,8	16,2	3,0
	1	2	1,64E+12	549,23	26,8	31,4	80,4	138,6	5,6	15,0
	2	2	1,64E+12	602,87	27,0	31,4	79,6	138,0	10,8	19,0
	3	2	1,64E+12	881,10	27,0	31,4	79,8	138,2	15,8	18,0
3000_10AP	1	0	1,57E+12	162,62	25,4	51,2	52,2	128,8	48,4	0,0
	2	0	1,55E+12	155,85	26,0	51,0	50,0	127,0	96,4	0,0
	3	0	1,54E+12	204,67	26,2	51,0	48,6	125,8	139,8	0,0
	1	1	1,53E+12	168,22	25,6	48,8	50,8	125,2	48,6	9,0
	2	1	1,52E+12	183,96	25,8	49,0	49,0	123,8	94,6	7,6
	3	1	1,51E+12	213,94	26,0	49,0	48,0	123,0	138,6	7,8
	1	2	1,51E+12	188,82	25,4	48,2	49,0	122,6	49,2	20,8
	2	2	1,50E+12	219,34	25,8	48,0	47,6	121,4	96,8	17,4
	3	2	1,49E+12	256,52	26,2	47,8	46,6	120,6	140,6	15,0
3000_23AP	1	0	1,75E+12	440,95	27,4	55,8	61,4	144,6	10,0	0,0
	2	0	1,74E+12	451,95	27,6	55,6	60,8	144,0	21,0	0,0
	3	0	1,74E+13	449,14	27,6	55,4	60,8	143,8	32,6	0,0
	1	1	1,72E+12	501,62	27,2	54,8	59,6	141,6	10,2	6,2
	2	1	1,72E+12	515,86	27,2	54,8	59,0	141,0	21,8	5,8
	3	1	1,72E+12	496,88	27,4	54,6	58,8	140,8	33,2	5,8
	1	2	1,70E+12	518,09	27,2	54,0	58,2	139,4	10,4	13,6
	2	2	1,69E+12	497,52	27,4	53,6	57,8	138,8	21,8	14,4
	3	2	1,69E+12	503,67	27,6	53,4	57,6	138,6	33,8	13,2

Tabela 26 – Resultados em termos de solução do modelo VTSP-SCT para as médias das instâncias de característica aleatória (4000 viagens)

Inst.	Δt	T_{tw}	F.O.	Tempo (seg.)	# Veículos				#Viagens agrupadas	#TW ativos
					A	B	C	Total		
4000_10A	1	0	1,885E+12	409,54	29,4	34,2	97,4	161,0	59,4	0,0
	2	0	1,853E+12	654,58	30,0	33,8	93,2	157,0	112,6	0,0
	3	0	1,816E+12	957,22	31,0	35,0	86,8	152,8	173,4	0,0
	1	1	1,850E+12	448,31	29,0	32,2	96,4	157,6	59,4	18,8
	2	1	1,817E+12	699,64	29,8	32,0	91,8	153,6	115,2	19,4
	3	1	1,780E+12	1340,49	32,0	31,8	84,4	148,2	182,6	23,6
	1	2	1,810E+12	573,55	28,4	32,2	93,4	154,0	63,4	50,8
	2	2	1,778E+12	1472,68	28,8	32,6	89,0	150,4	117,6	61,6
	3	2	1,743E+12	1519,26	30,0	32,2	83,2	145,4	181,2	70,8
4000_23A	1	0	2,084E+12	1501,99	31,6	39,8	106,6	178,0	9,0	0,0
	2	0	2,077E+12	1261,61	32,2	38,6	106,0	176,8	21,4	0,0
	3	0	2,074E+12	1413,91	32,2	38,6	105,8	176,6	30,0	0,0
	1	1	2,054E+12	1615,63	31,4	38,2	104,8	174,4	9,4	11,6
	2	1	2,043E+12	1230,66	31,8	38,4	103,0	173,2	21,8	12,6
	3	1	2,035E+12	1681,52	31,8	38,6	102,0	172,4	32,0	17,0
	1	2	2,022E+12	1898,25	31,2	36,8	104,0	172,0	9,2	31,8
	2	2	2,014E+12	1574,74	31,0	37,6	102,2	170,8	20,8	33,4
	3	2	2,006E+12	2118,65	31,4	37,2	101,8	170,4	30,2	35,2
4000_10AP	1	0	1,975E+12	319,66	30,4	56,8	77,6	164,8	86,4	0,0
	2	0	1,913E+12	336,31	31,6	58,6	67,2	157,4	168,4	0,0
	3	0	1,885E+12	405,62	32,0	58,8	63,2	154,0	250,6	0,0
	1	1	1,920E+12	323,51	31,0	56,4	71,0	158,4	86,0	10,8
	2	1	1,874E+12	385,58	31,0	57,6	65,0	153,6	169,4	11,0
	3	1	1,845E+12	428,45	31,6	57,4	61,4	150,4	252,0	10,8
	1	2	1,884E+12	380,35	30,4	54,6	70,6	155,6	87,8	27,0
	2	2	1,838E+12	475,23	30,4	55,4	65,0	150,8	172,2	30,4
	3	2	1,807E+12	669,92	30,8	55,8	60,0	146,6	251,6	27,2
4000_23AP	1	0	2,165E+12	852,81	33,0	65,8	81,4	180,2	18,4	0,0
	2	0	2,156E+12	827,01	33,0	65,8	80,0	178,8	35,2	0,0
	3	0	2,148E+12	829,84	33,0	66,0	79,4	178,4	52,6	0,0
	1	1	2,137E+12	1071,47	32,8	65,2	79,0	177,0	18,4	6,6
	2	1	2,127E+12	894,92	32,8	65,2	78,0	176,0	36,0	6,6
	3	1	2,120E+12	969,05	32,8	65,4	77,0	175,2	53,2	5,8
	1	2	2,101E+12	1009,00	32,2	64,0	77,6	173,8	18,4	18,6
	2	2	2,091E+12	1041,28	32,0	64,0	76,6	172,6	36,8	18,0
	3	2	2,081E+12	1078,92	32,2	64,0	75,8	172,0	53,6	18,4

Tabela 27 – Resultados em termos de solução do modelo VTSP-SCT para as médias das instâncias de característica aleatória (5000 viagens)

Inst.	Δt	T_{tw}	F.O.	Tempo (seg.)	# Veículos				#Viagens agrupadas	#TW ativos
					A	B	C	Total		
5000_10A	1	0	2,243E+12	621,76	33,6	41,6	117,2	192,4	80,4	0,0
	2	0	2,194E+12	1248,53	34,6	45,0	105,6	185,2	162,2	0,0
	3	0	2,154E+12	4545,50	37,4	44,6	97,6	179,6	248,0	0,0
	1	1	2,203E+12	761,78	31,6	43,2	114,0	188,8	80,6	22,0
	2	1	2,153E+12	2118,56	34,2	41,6	106,0	181,8	162,8	32,0
	3	1	2,111E+12	2494,20	37,0	42,2	96,6	175,8	251,2	26,8
	1	2	2,138E+12	1174,15	31,6	40,6	110,2	182,4	92,0	114,8
	2	2	2,099E+12	1929,49	32,6	41,0	104,4	178,0	170,2	103,0
	3	2	2,055E+12	4620,20	35,0	34,6	41,8	95,6	243,2	125,25
5000_23A	1	0	2,540E+12	2060,12	35,4	50,2	132,6	218,2	13,2	0,0
	2	0	2,520E+12	1964,39	35,6	50,0	131,2	216,8	30,5	0,0
	3	0	2,498E+12	2708,91	35,9	50,8	121,8	208,4	89,6	0,0
	1	1	2,492E+12	2491,97	35,2	51,4	126,8	213,4	14,8	16,0
	2	1	2,480E+12	2808,09	35,4	51,8	124,6	211,8	30,2	16,8
	3	1	2,456E+12	3717,94	36,2	50,8	122,2	209,2	48,6	20,6
	1	2	2,445E+12	3091,28	35,4	48,6	124,6	208,6	16,2	48,4
	2	2	2,435E+12	4045,54	35,0	49,4	123,4	207,8	30,8	50,6
	3	2	2,413E+12	4400,61	35,0	50,0	120,6	205,6	48,4	51,0
5000_10AP	1	0	2,379E+12	480,30	39,6	75,8	79,6	195,0	132,6	0,0
	2	0	2,318E+12	551,44	40,2	75,8	72,0	188,0	257,6	0,0
	3	0	2,306E+12	961,87	40,6	76,4	69,8	186,8	379,8	0,0
	1	1	2,319E+12	608,45	38,4	73,8	77,4	189,6	133,6	13,8
	2	1	2,270E+12	648,08	38,8	73,8	71,8	184,4	259,0	15,8
	3	1	2,258E+12	1524,01	39,2	73,8	69,6	182,6	380,6	17,0
	1	2	2,269E+12	706,19	37,6	72,0	75,6	185,2	135,8	44,0
	2	2	2,227E+12	871,11	38,2	72,2	70,4	180,8	262,0	42,2
	3	2	2,220E+12	1925,74	38,6	71,8	68,8	179,2	383,8	34,2
5000_23AP	1	0	2,672E+12	1398,42	44,0	80,4	95,8	220,2	24,8	0,0
	2	0	2,654E+12	1501,14	44,0	80,4	94,0	218,4	53,4	0,0
	3	0	2,635E+12	1483,89	43,8	80,6	92,0	216,4	76,4	0,0
	1	1	2,638E+12	1388,45	43,6	80,0	92,8	216,4	25,0	7,0
	2	1	2,620E+12	1534,04	43,6	80,2	90,6	214,4	53,6	7,4
	3	1	2,602E+12	1509,78	43,6	80,2	89,0	212,8	77,0	7,6
	1	2	2,576E+12	1649,66	42,8	77,8	90,6	211,2	25,2	30,8
	2	2	2,559E+12	1631,10	42,8	78,0	88,6	209,4	54,0	28,2
	3	2	2,541E+12	1640,60	42,8	78,0	86,8	207,6	78,0	32,0

Tabela 28 – Resultados em termos de solução do modelo VTSP-CCT, com aplicação de Geração de Colunas, para as médias das instâncias de característica aleatória (1000 viagens)

Inst.	Δt	T_{tw}	F.O.	Tempo GC (seg.)	# Veículos				#Viagens agrupadas	#TW ativos
					<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>Total</i>		
1000_10A	1	0	5,30E+11	66,15	11,2	15,0	26,8	53,0	4,8	0,0
	2	0	5,20E+11	125,17	11,4	15,0	25,6	52,0	7,2	0,0
	3	0	5,14E+11	165,94	10,8	15,4	25,2	51,4	11,8	0,0
	1	1	5,26E+11	108,55	11,2	15,2	26,2	52,6	4,4	0,8
	2	1	5,20E+11	193,20	11,4	15,4	25,2	52,0	7,6	0,0
	3	1	5,12E+11	292,11	11,0	15,4	24,8	51,2	12,8	0,2
	1	2	5,24E+11	159,64	11,2	15,2	26,0	52,4	5,0	1,6
	2	2	5,18E+11	257,90	11,2	15,4	25,2	51,8	7,6	0,4
	3	2	5,10E+11	352,45	11,4	14,8	24,4	50,6	12,6	0,6
1000_23A	1	0	5,92E+11	45,68	12,4	16,6	30,2	59,2	0,8	0,0
	2	0	5,90E+11	67,43	12,4	16,4	30,2	59,0	1,4	0,0
	3	0	5,88E+11	75,35	12,8	16,6	29,4	58,8	2,2	0,0
	1	1	5,90E+11	77,97	12,4	16,4	30,2	59,0	0,8	0,2
	2	1	5,88E+11	96,78	12,4	16,8	29,6	58,8	1,4	0,2
	3	1	5,80E+11	121,37	12,8	16,2	29,4	58,4	2,0	0,6
	1	2	5,80E+11	80,15	12,2	16,8	29,0	58,0	0,8	1,4
	2	2	5,78E+11	115,85	12,2	16,4	29,2	57,8	1,4	1,6
	3	2	5,76E+11	135,92	12,8	16,4	28,4	57,6	2,2	1,6
1000_10AP	1	0	5,58E+11	72,17	10,8	18,8	26,2	55,8	7,6	0,0
	2	0	5,56E+11	125,24	10,8	18,8	26,0	55,6	13,6	0,0
	3	0	5,46E+11	161,28	10,8	18,6	25,2	54,6	19,6	0,0
	1	1	5,48E+11	153,50	11,0	18,6	25,2	54,8	7,6	1,8
	2	1	5,44E+11	218,56	11,0	18,6	24,8	54,4	13,8	1,6
	3	1	5,38E+11	317,19	10,8	18,6	24,4	53,8	20,0	1,4
	1	2	5,40E+11	130,68	11,0	18,4	24,6	54,0	7,6	3,6
	2	2	5,34E+11	234,86	11,0	18,4	24,0	53,4	14,4	3,6
	3	2	5,26E+11	313,83	10,8	18,4	23,4	52,6	20,2	3,8
1000_23AP	1	0	6,06E+11	44,43	9,8	20,6	30,2	60,6	2,4	0,0
	2	0	6,06E+11	69,44	9,8	20,6	30,2	60,6	3,8	0,0
	3	0	6,04E+11	94,45	9,8	20,6	30,0	60,4	5,6	0,0
	1	1	6,04E+11	73,53	9,8	20,6	30,0	60,4	2,4	0,2
	2	1	6,02E+11	109,83	9,8	20,6	29,8	60,2	3,8	0,4
	3	1	6,00E+11	145,95	9,8	20,6	29,6	60,0	5,4	0,4
	1	2	6,00E+11	79,65	9,8	20,6	29,4	59,8	2,4	0,6
	2	2	5,98E+11	131,61	9,8	20,6	29,4	59,8	3,6	0,8
	3	2	5,96E+11	161,32	9,8	20,6	29,2	59,6	5,4	0,8

Tabela 29 – Resultados em termos de solução do modelo VTSP-CCT, com aplicação de Geração de Colunas, para as médias das instâncias de característica aleatória (2000 viagens)

Inst.	Δt	T_{tw}	F.O.	Tempo GC (seg.)	# Veículos				#Viagens agrupadas	#TW ativos
					<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>Total</i>		
2000_10A	1	0	9,404E+11	698,49	19,6	22,6	51,8	94,0	17,0	0,0
	2	0	9,204E+11	1159,96	19,0	22,2	50,8	92,0	30,8	0,0
	3	0	9,084E+11	1663,14	19,0	22,4	49,4	90,8	42,0	0,0
	1	1	9,224E+11	1554,28	19,8	22,0	50,4	92,2	17,4	2,2
	2	1	8,964E+11	2748,79	19,4	21,8	48,2	89,4	31,0	3,6
	3	1	8,844E+11	3836,51	19,4	22,0	47,0	88,4	43,4	3,4
	1	2	9,144E+11	1751,83	19,6	21,8	50,0	91,4	17,2	4,8
	2	2	8,904E+11	3009,84	19,6	22,4	47,0	89,0	34,0	5,4
	3	2	8,764E+11	4167,24	19,8	21,2	46,4	87,4	43,6	6,2
2000_23A	1	0	1,028E+12	249,46	21,6	30,2	51,0	102,8	2,2	0,0
	2	0	1,020E+12	433,98	21,4	29,8	50,8	102,0	4,6	0,0
	3	0	1,014E+12	611,81	21,4	29,8	50,2	101,4	6,6	0,0
	1	1	1,018E+12	512,87	21,4	29,6	50,6	101,6	2,4	1,4
	2	1	1,008E+12	866,91	21,8	29,4	49,6	100,8	4,8	1,8
	3	1	1,002E+12	1188,82	21,6	29,4	49,0	100,0	7,2	1,6
	1	2	1,000E+12	528,23	22,0	29,2	48,0	99,2	2,2	4,4
	2	2	9,905E+11	928,97	21,8	29,4	47,4	98,6	4,6	5,4
	3	2	9,865E+11	1319,40	22,0	28,2	48,2	98,4	6,6	5,0
2000_10AP	1	0	9,044E+11	678,78	17,2	33,4	39,8	90,4	22,8	0,0
	2	0	8,903E+11	1310,19	17,4	32,6	39,0	89,0	47,4	0,0
	3	0	8,703E+11	1764,97	16,0	32,8	38,0	86,8	68,2	0,0
	1	1	8,904E+11	1539,44	17,2	33,6	38,2	89,0	23,0	2,4
	2	1	8,784E+11	2823,38	17,4	32,4	38,0	87,8	48,4	2,4
	3	1	8,583E+11	3917,00	16,2	33,0	36,6	85,8	67,8	2,0
	1	2	8,704E+11	1656,59	17,4	33,8	35,6	86,8	23,4	9,4
	2	2	8,584E+11	3089,36	17,4	32,4	36,0	85,8	48,2	7,8
	3	2	8,404E+11	4448,86	16,2	33,2	34,6	84,0	69,2	6,8
2000_23AP	1	0	1,026E+12	298,68	20,8	38,4	43,4	102,6	4,6	0,0
	2	0	1,022E+12	517,63	20,4	38,0	43,8	102,2	8,4	0,0
	3	0	1,020E+12	667,10	20,4	38,0	43,4	101,8	12,6	0,0
	1	1	1,014E+12	637,21	20,8	38,4	42,2	101,4	4,8	2,4
	2	1	1,010E+12	1111,31	20,6	38,0	42,4	101,0	8,6	2,2
	3	1	1,006E+12	1379,14	20,4	38,0	42,2	100,6	13,2	1,8
	1	2	9,925E+11	772,57	20,8	38,0	40,2	99,0	4,4	6,8
	2	2	9,885E+11	1225,46	20,6	37,2	40,8	98,6	8,6	6,6
	3	2	9,865E+11	1559,68	20,8	37,4	40,4	98,6	13,0	5,6

Tabela 30 – Resultados em termos de solução do modelo VTSP-CCT, com aplicação de Geração de Colunas, para as médias das instâncias de característica aleatória (3000 viagens)

Inst.	Δt	T_{tw}	F.O.	Tempo GC (seg.)	# Veículos				#Viagens agrupadas	#TW ativos
					<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>Total</i>		
3000_10A	1	0	1,286E+12	2751,10	25,8	31,4	71,4	128,6	31,2	0,0
	2	0	1,258E+12	5096,06	25,0	31,2	69,6	125,8	60,2	0,0
	3	0	1,210E+12	6701,81	25,2	31,2	64,6	121,0	92,4	0,0
	1	1	1,264E+12	6340,09	26,0	31,6	68,8	126,4	31,4	4,2
	2	1	1,234E+12	13636,16	25,4	31,6	66,4	123,4	62,0	4,4
	3	1	1,188E+12	18317,44	25,0	30,2	63,6	118,8	92,6	3,8
	1	2	1,244E+12	7214,20	26,2	31,2	67,0	124,4	32,4	11,8
	2	2	1,216E+12	12695,43	26,0	30,6	65,0	121,6	63,6	9,8
	3	2	1,172E+12	35710,17	25,2	29,8	62,0	117,0	95,4	10,0
3000_23A	1	0	1,429E+12	844,60	30,6	40,6	71,6	142,8	4,4	0,0
	2	0	1,421E+12	1631,59	30,6	40,4	70,6	141,6	9,8	0,0
	3	0	1,415E+12	2354,31	31,0	40,2	70,2	141,4	14,6	0,0
	1	1	1,409E+12	1176,66	30,6	40,4	69,6	140,6	4,8	2,8
	2	1	1,401E+12	2329,32	31,4	39,2	69,2	139,8	10,0	3,2
	3	1	1,395E+12	3333,16	31,0	39,8	68,4	139,2	15,0	2,8
	1	2	1,389E+12	1330,47	30,8	40,2	67,6	138,6	5,2	6,6
	2	2	1,381E+12	2561,09	31,4	39,2	67,4	138,0	10,4	6,8
	3	2	1,123E+12	3702,12	31,0	39,8	66,4	137,2	14,8	6,0
3000_10AP	1	0	1,266E+12	3262,16	24,0	49,8	52,8	126,6	48,2	0,0
	2	0	1,220E+12	6034,06	22,8	48,8	50,4	122,0	96,2	0,0
	3	0	1,190E+12	8456,56	22,0	47,6	49,4	119,0	141,8	0,0
	1	1	1,244E+12	7841,942	23,8	50,2	50,4	124,4	48,4	4,2
	2	1	1,202E+12	17679,136	23,0	48,8	48,4	120,2	95,8	2,8
	3	1	1,176E+12	30546,49	22,0	47,8	47,6	117,4	140,6	2,0
	1	2	1,216E+12	27533,778	24,2	50,6	46,8	121,6	49,0	14,4
	2	2	1,176E+12	38803,56	23,0	48,8	45,8	117,6	97,4	12,2
	3	2	1,148E+12	53819,604	22,8	46,4	44,8	114,0	144,0	11,0
3000_23AP	1	0	1,445E+12	1233,25	27,8	55,0	61,6	144,4	9,6	0,0
	2	0	1,439E+12	2335,52	27,8	54,6	61,4	143,8	21,2	0,0
	3	0	1,433E+12	3507,66	26,6	55,0	61,4	143,0	32,0	0,0
	1	1	1,417E+12	3471,798	27,4	55,6	58,6	141,6	10,4	3,8
	2	1	1,413E+12	9307,764	26,8	55,6	58,6	141,0	21,4	3,2
	3	1	1,407E+12	17654,558	27,2	55,6	57,8	140,6	32,2	3,2
	1	2	1,401E+12	21956,198	27,6	55,6	56,8	140,0	10,2	7,0
	2	2	1,395E+12	28629,376	27,4	55,8	56,2	139,4	21,6	6,8
	3	2	1,391E+12	38417,026	27,0	56,0	56,0	139,0	32,8	6,4

Tabela 31 – Tempos computacionais para resolver a Geração de Colunas do modelo VTSP-CCT para as instâncias de 1000 e 2000 viagens

Δ_t	T_{tw}	Inst.	CPU Master	CPU Pricing	CPU IP	Inst.	CPU Master	CPU Pricing	CPU IP
1	0	1000_10A	66,11	0,04	14,05	2000_10A	698,15	0,34	81,21
2	0		125,02	0,15	22,02		1158,72	1,24	115,30
3	0		165,69	0,25	14,54		1660,64	2,50	127,67
1	1		108,51	0,04	17,60		1553,61	0,67	116,44
2	1		192,95	0,26	24,45		2746,20	2,59	178,76
3	1		291,46	0,65	24,29		3831,22	5,28	206,18
1	2		159,61	0,04	24,28		1751,07	0,76	205,85
2	2		257,51	0,39	32,68		3007,46	2,39	231,82
3	2		351,55	0,90	22,19		4162,41	4,82	205,45
1	0	1000_23A	45,67	0,02	24,61	2000_23A	249,42	0,04	214,80
2	0		67,42	0,01	27,98		433,90	0,09	203,15
3	0		75,32	0,03	32,15		611,66	0,15	233,83
1	1		77,97	0,01	25,09		512,83	0,04	319,55
2	1		96,77	0,02	47,74		866,77	0,14	363,31
3	1		121,35	0,02	38,43		1188,60	0,22	368,33
1	2		80,14	0,01	40,27		528,18	0,05	367,92
2	2		115,83	0,02	36,60		928,84	0,13	328,03
3	2		135,90	0,03	39,39		1319,20	0,19	410,71
1	0	1000_10AP	72,14	0,04	6,43	2000_10AP	678,64	0,14	31,73
2	0		125,14	0,10	13,37		1309,54	0,65	87,93
3	0		161,12	0,16	14,10		1763,71	1,26	92,50
1	1		153,46	0,05	11,76		1539,19	0,25	61,10
2	1		218,47	0,09	11,22		2822,20	1,17	125,25
3	1		316,91	0,28	16,06		3914,94	2,06	140,35
1	2		130,65	0,04	18,33		1656,31	0,27	106,07
2	2		234,76	0,09	14,78		3088,12	1,24	158,30
3	2		313,56	0,28	26,68		4446,68	2,18	186,97
1	0	1000_23AP	44,41	0,02	15,88	2000_23AP	298,65	0,03	70,92
2	0		69,42	0,02	11,49		517,54	0,09	117,78
3	0		94,42	0,03	8,32		667,00	0,10	120,23
1	1		73,52	0,01	10,61		637,17	0,04	103,35
2	1		109,81	0,02	10,44		1111,16	0,15	124,86
3	1		145,92	0,03	19,55		1378,93	0,21	186,71
1	2		79,64	0,01	14,01		772,54	0,04	165,99
2	2		131,59	0,02	19,00		1225,31	0,15	180,48
3	2		161,29	0,03	17,34		1559,46	0,22	261,96

Legenda:

CPU Master: tempo computacional para resolver o Mestre Restrito Relaxado;

CPU *pricing*: tempo computacional para resolver o problema *pricing*;

CPU IP: tempo computacional para a heurística converter a solução em inteiro.

Tabela 32 – Tempos computacionais para resolver a Geração de Colunas do modelo VTSP-CCT para as instâncias de 3000 e 4000 viagens

Δ_t	T_{tw}	Inst.	CPU Master	CPU Pricing	CPU IP	Inst.	CPU Master	CPU Pricing	CPU IP
1	0	3000_10A	2750,14	0,97	176,95				
2	0		5092,33	3,73	215,00				
3	0		6692,12	9,70	442,97				
1	1		6338,88	1,21	455,42				
2	1		13630,55	5,61	5104,55				
3	1		18299,57	17,88	9854,81				
1	2		7212,87	1,33	460,31				
2	2		12690,23	5,20	15133,91				
3	2		35692,10	18,07	881,81				
1	0	3000_23A	844,51	0,09	469,92	4000_23A	3023,63	0,20	1283,04
2	0		1631,35	0,24	659,16		5606,64	0,62	1243,37
3	0		2353,74	0,57	558,17		7255,41	1,01	1232,33
1	1		1176,60	0,06	417,30		15038,22	0,56	1879,59
2	1		2329,08	0,24	529,35		28221,16	1,93	2058,45
3	1		3332,70	0,46	576,38		39150,94	2,94	2528,36
1	2		1330,38	0,09	439,93		14958,60	0,43	2302,43
2	2		2560,88	0,22	687,10		30823,72	1,71	2296,21
3	2		3701,55	0,58	570,30		44325,96	3,22	2774,64
1	0	3000_10AP	3261,36	0,80	103,17				
2	0		6031,25	2,81	148,67				
3	0		8449,97	6,59	237,19				
1	1		7840,16	1,79	3952,74				
2	1		17674,92	4,22	10097,64				
3	1		30534,32	12,17	19820,65				
1	2		27532,08	1,70	23252,20				
2	2		38798,52	5,04	30052,39				
3	2		53807,36	12,24	41061,88				
1	0	3000_23AP	1233,20	0,06	181,63	4000_23AP	4067,94	0,12	410,66
2	0		2335,37	0,15	235,72		-	-	-
3	0		3507,36	0,30	298,51		-	-	-
1	1		3471,62	0,17	3102,90		-	-	-
2	1		9307,28	0,49	8886,18		4067,94	1,09	712,52
3	1		17653,60	0,96	17190,60		48102,90	1,33	1067,13
1	2		21955,88	0,32	21461,12		-	-	-
2	2		28628,60	0,78	28126,88		-	-	-
3	2		38415,68	1,35	37740,72		59263,10	2,18	60566,90

Legenda:

CPU Master: tempo computacional para resolver o Problema Mestre Restrito Relaxado;

CPU *pricing*: tempo computacional para resolver o problema *pricing*;

CPU IP: tempo computacional para a heurística converter a solução em inteiro.

APÊNDICE C: Exemplo de Resolução de Problema com Geração de Colunas

A fim de exemplificar o procedimento de geração de colunas, aqui serão apresentadas algumas iterações da geração de colunas proposta. Assim, considere as viagens apresentadas na Figura 22, $\Delta t=1$ minuto e as especificações da Tabela 33 para cada uma dessas viagens. Como observado nesta Tabela, as notações das variáveis são elaboradas em função dos arcos da TSN.

Tabela 33 – Especificações das viagens da Figura 22

Viagem	Demanda	Variável (x_{ijf})
1	50	$x0_f$
2	50	$x1_f$
3	50	$x2_f$
4	120	$x3_f$
5	50	$x4_f$
6	50	$x5_f$

Na resolução da geração de colunas, como solução inicial para o PMRR, cada arco de serviço, dentro de um intervalo interseccionado, é atendido pelo veículo que tiver a menor capacidade capaz satisfazer a demanda. Assim, a primeira iteração do PMRR, corresponde à:

PMRR1 :

$$\begin{aligned}
 \text{Min} : & 34x0_0 + 35,7x1_0 + 37,4x2_0 + 34x3_0 + 34x4_0 + 34x5_0 + 8,5x6_0 + \\
 & 8,5x7_0 + 408x8_0 + 170x9_0 + 17x10_0 + 17x11_0 + 51x12_0 + 68x13_0 + \\
 & 442x16_0 + 255x17_0 + 272x18_0 + 289x19_0 + 629x20_0 + 765x21_0 + 255x22_0 + \\
 & 255x23_0 + 1071x24_0 + 1037x25_0 + 731x26_0 + 595x27_0 + 255x28_0 + 1000000x29_0 + \\
 & 24x0_1 + 25,2x1_1 + 26,4x2_1 + 24x3_1 + 24x4_1 + 24x5_1 + 6x6_1 + 6x7_1 + \\
 & 288x8_1 + 120x9_1 + 12x10_1 + 12x11_1 + 36x12_1 + 48x13_1 + 312x16_1 + \\
 & 180x17_1 + 192x18_1 + 204x19_1 + 444x20_1 + 540x21_1 + 180x22_1 + 180x23_1 + \\
 & 756x24_1 + 732x25_1 + 516x26_1 + 420x27_1 + 180x28_1 + 1000000x29_1 + \\
 & 20x0_2 + 21x1_2 + 22x2_2 + 20x3_2 + 20x4_2 + 20x5_2 + 5x6_2 + 5x7_2 + \\
 & 240x8_2 + 100x9_2 + 10x10_2 + 10x11_2 + 30x12_2 + 40x13_2 + 260x16_2 + \\
 & 150x17_2 + 160x18_2 + 170x19_2 + 370x20_2 + 450x21_2 + 150x22_2 + 150x23_2 + \\
 & 630x24_2 + 610x25_2 + 430x26_2 + 350x27_2 + 150x28_2 + 1000000x29_2
 \end{aligned}$$

Sujeito à:

$$R50.1^1 - x0_0 - x6_0 + x17_0 = 0$$

$$R50.2 : -x1_0 + x6_0 - x7_0 + x18_0 = 0$$

$$R50.3 : -x2_0 + x7_0 - x8_0 + x19_0 = 0$$

$$R50.4 : x4_0 + x8_0 - x9_0 - x27_0 = 0$$

$$R50.5 : x5_0 + x9_0 - x28_0 = 0$$

$$R50.6 : x0_0 - x10_0 - x23_0 = 0$$

$$R50.7 : x1_0 - x3_0 + x10_0 - x11_0 + x20_0 - x24_0 = 0$$

$$R50.8 : x2_0 + x11_0 - x12_0 - x16_0 - x25_0 = 0$$

$$R50.9 : -x4_0 + x12_0 + x21_0 = 0$$

$$R50.10 : x3_0 - x13_0 - x26_0 = 0$$

$$R50.11 : -x5_0 + x13_0 + x16_0 + x22_0 = 0$$

$$R50.12 : -x14_0 - x17_0 - x18_0 - x19_0 - x20_0 - x21_0 + x29_0 = 0$$

$$R50.13 : x14_0 - x15_0 - x22_0 + x23_0 = 0$$

$$R50.14 : x15_0 + x24_0 + x25_0 + x26_0 + x27_0 + x28_0 - x29_0 = 0$$

$$R50.15 : -x0_1 - x6_1 + x17_1 = 0$$

$$R50.16 : -x1_1 + x6_1 - x7_1 + x18_1 = 0$$

$$R50.17 : -x2_1 + x7_1 - x8_1 + x19_1 = 0$$

$$R50.18 : x4_1 + x8_1 - x9_1 - x27_1 = 0$$

$$R50.19 : x5_1 + x9_1 - x28_1 = 0$$

$$R50.20 : x0_1 - x10_1 - x23_1 = 0$$

$$R50.21 : x1_1 + x10_1 - x11_1 + x20_1 - x24_1 = 0$$

$$R50.22 : x2_1 + x11_1 - x12_1 - x16_1 - x25_1 = 0$$

$$R50.23 : -x4_1 + x12_1 + x21_1 = 0$$

$$R50.24 : -x13_1 - x26_1 = 0$$

$$R50.25 : -x5_1 + x13_1 + x16_1 + x22_1 = 0$$

$$R50.26 : -x14_1 - x17_1 - x18_1 - x19_1 - x20_1 - x21_1 + x29_1 = 0$$

$$R50.27 : x14_1 - x15_1 - x22_1 + x23_1 = 0$$

$$R50.28 : x15_1 + x24_1 + x25_1 + x26_1 + x27_1 + x28_1 - x29_1 = 0$$

$$R50.29 : -x0_2 - x6_2 + x17_2 = 0$$

$$R50.30 : -x1_2 + x6_2 - x7_2 + x18_2 = 0$$

¹Utilizou-se o número da restrição apresentada nas seções (6.2.1) e (6.2.2)

$$R50.31 : -x_{2_2} + x_{7_2} - x_{8_2} + x_{19_2} = 0$$

$$R50.32 : x_{4_2} + x_{8_2} - x_{9_2} - x_{27_2} = 0$$

$$R50.33 : x_{5_2} + x_{9_2} - x_{28_2} = 0$$

$$R50.34 : x_{0_2} - x_{10_2} - x_{23_2} = 0$$

$$R50.35 : x_{1_2} + x_{10_2} - x_{11_2} + x_{20_2} - x_{24_2} = 0$$

$$R50.36 : x_{2_2} + x_{11_2} - x_{12_2} - x_{16_2} - x_{25_2} = 0$$

$$R50.37 : -x_{4_2} + x_{12_2} + x_{21_2} = 0$$

$$R50.38 : -x_{13_2} - x_{26_2} = 0$$

$$R50.39 : -x_{5_2} + x_{13_2} + x_{16_2} + x_{22_2} = 0$$

$$R50.40 : -x_{14_2} - x_{17_2} - x_{18_2} - x_{19_2} - x_{20_2} - x_{21_2} + x_{29_2} = 0$$

$$R50.41 : x_{14_2} - x_{15_2} - x_{22_2} + x_{23_2} = 0$$

$$R50.42 : x_{15_2} + x_{24_2} + x_{25_2} + x_{26_2} + x_{27_2} + x_{28_2} - x_{29_2} = 0$$

$$R51.43 : x_{3_0} = 1$$

$$R51.44 : x_{4_0} + x_{4_1} + x_{4_2} = 1$$

$$R51.45 : x_{5_0} + x_{5_1} + x_{5_2} = 1$$

$$R52.46 : \lambda_1 - x_{0_0} = 0$$

$$R52.47 : -x_{0_1} = 0$$

$$R52.48 : -x_{0_2} = 0$$

$$R52.49 : \lambda_1 - x_{1_0} = 0$$

$$R52.50 : -x_{1_1} = 0$$

$$R52.51 : -x_{1_2} = 0$$

$$R52.52 : \lambda_1 - x_{2_0} = 0$$

$$R52.53 : -x_{2_1} = 0$$

$$R52.54 : -x_{2_2} = 0$$

$$R53.55 : \lambda_1 = 1$$

Os resultados desta iteração do PMRR são apresentados na Tabela 34.

O valor das variáveis duais (R52.47 - R53.55) encontrados na primeira iteração do PMRR serão enviados para a resolução do subproblema conforme formulação exemplificada na sequência. Para deixar mais didática a representação, utilizou-se a formulação do subproblema (56 - 61).

Tabela 34 – Resultados do Iteração 1 do PMRR

PMRR	F.O	Valor das variáveis duais
Iteração 1	3,002053E+05	R52,46= - 1000544,0 R52,47 = 1001008,0 R52,48= 190,0 R52,49= - 1000588,2 R52,50 = 1001012,8 R52,51= - 1000796,0 R52,52= - 1000819,4 R52,53 = 101017,0 R52,54= 198,0 R53,55= 3001951,6

Subproblema1 :

Min :

$$\begin{aligned}
& - 3001951,6 + 1000544y_{0_0_0} - 1001008y_{0_1_0} - 190y_{0_2_0} \\
& + 1000588y_{1_0_0} - 1001012,8y_{1_1_0} + 1000796y_{1_2_0} \\
& + 1000588y_{1_0_1} - 1001012,8y_{1_1_1} + 1000796y_{1_2_1} \\
& + 1000819y_{2_0_1} - 1001017y_{2_1_1} - 198y_{2_2_1}
\end{aligned}$$

Sujeito à:

$$R57.1 : 141y_{0_0_0} + 100y_{0_1_0} + 83y_{0_2_0} + 141y_{1_0_0} + 100y_{1_1_0} + 83y_{1_2_0} - 50w_{0_0} - 50w_{1_0} \geq 0$$

$$R57.2 : 141y_{1_0_1} + 100y_{1_1_1} + 83y_{1_2_1} + 141y_{2_0_1} + 100y_{2_1_1} + 83y_{2_2_1} - 50w_{1_1} - 50w_{2_1} \geq 0$$

$$R58.3 : w_{0_0} = 1$$

$$R58.4 : w_{1_0} + w_{1_1} = 1$$

$$R58.5 : w_{2_1} = 1$$

$$R59.6 : y_{0_0_0} + y_{0_1_0} + y_{0_2_0} - w_{0_0} \leq 0$$

$$R59.7 : y_{1_0_0} + y_{1_1_0} + y_{1_2_0} - w_{1_0} \leq 0$$

$$R59.8 : y_{1_0_1} + y_{1_1_1} + y_{1_2_1} - w_{1_1} \leq 0$$

$$R59.9 : y_{2_0_1} + y_{2_1_1} + y_{2_2_1} - w_{2_1} \leq 0$$

$$R60.10 : 0 \leq y_{0_0_0} \leq 1$$

$$R60.11 : 0 \leq y_{0_1_0} \leq 1$$

$$R60.12 : 0 \leq y_{0_2_0} \leq 1$$

$$R60.13 : 0 \leq y_{1_0_0} \leq 1$$

$$R60.14 : 0 \leq y_{1_1_0} \leq 1$$

$$R60.15 : 0 \leq y_{1_2_0} \leq 1$$

$$R60.16 : 0 \leq y_{1_0_1} \leq 1$$

$$R60.17 : 0 \leq y1_1_1 \leq 1$$

$$R60.18 : 0 \leq y1_2_1 \leq 1$$

$$R60.19 : 0 \leq y2_0_1 \leq 1$$

$$R60.20 : 0 \leq y2_1_1 \leq 1$$

$$R60.21 : 0 \leq y2_2_1 \leq 1$$

$$R61.22 : 0 \leq w0_0 \leq 1$$

$$R61.23 : 0 \leq w1_0 \leq 1$$

$$R61.24 : 0 \leq w1_1 \leq 1$$

$$R61.25 : 0 \leq w2_1 \leq 1$$

A resolução do subproblema resulta em um *pricing* com valor igual a -6004989,4. Como este valor é negativo, há a necessidade de inserção das colunas geradas nesta iteração do subproblema no PMRR, tendo em vista que o processo iterativo entre o subproblema e o PMRR é finalizado, apenas, quando o valor do *pricing* for maior ou igual à zero (≥ 0).

Assim, conforme resultado da primeira iteração do subproblema, as colunas que serão inseridas, indicarão a seguinte distribuição dos arcos de serviço nos intervalos:

$$y0_1_0 = 1$$

$$y1_1_0 = 1$$

$$y2_1_1 = 1$$

$$w0_0 = 1$$

$$w1_0 = 1$$

$$w2_1 = 1$$

A partir da inserção das novas colunas no PMRR, resolve-se a sua segunda iteração:

PMRR2 :

Min : *F.O* (49)

Sujeito à:

Restrições de fluxo (R.50)²

Restrições para os arcos em intervalos unitários (R.51)

$$R52.46 : \lambda_1 - x0_0 = 0$$

$$R52.47 : \lambda_2 - x0_1 = 0$$

²De modo a deixar a apresentação dos resultados mais didática, somente serão reescritas as restrições que forem modificadas nas iterações da CG.

$$R52.48 : -x0_2 = 0$$

$$R52.49 : \lambda_1 - x1_0 = 0$$

$$R52.50 : \lambda_2 - x1_1 = 0$$

$$R52.51 : -x1_2 = 0$$

$$R52.52 : \lambda_1 - x2_0 = 0$$

$$R52.53 : \lambda_2 - x2_1 = 0$$

$$R52.54 : -x2_2 = 0$$

$$R53.55 : \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

Os resultados desta iteração do PMRR são apresentados na Tabela 35.

Tabela 35 – Resultados do Iteração 2 do PMRR

PMRR	F.O	Valor das variáveis duais
Iteração 2	3,002053E+05	R52.46= -1000544,0 R52.47 = -1000384,0 R52.48= 190,0 R52.49= -1000537,2 R52.50 = -1000938,2 R52.51= 194,0 R52.52= -1001174,4 R52.53 = -1000933,4 R52.54= 198,0 R53.55= 3002255,0

Novamente, utilizam-se os valores das variáveis duais para resolver o subproblema. Na sequência descreve-se a formulação atualizada do *pricing* e as variáveis que irão originar as novas colunas que serão inseridas no PMRR, as restrições suprimidas da formulação equivalem as mesmas apresentadas no Subproblema1.

Subproblema2 :

Min :

$$- 3002255,0 + 1000544,0y0_0_0 + 1000384,0y0_1_0 - 190,0y0_2_0$$

$$+ 1000537,2y1_0_0 + 1000938,2y1_1_0 - 194,0y1_2_0$$

$$+ 1000537,2y1_0_1 + 1000938,2y1_1_1 - 194,0y1_2_1$$

$$+ 1001174,4y2_0_1 + 1000933,4y2_1_1 - 198,0y2_2_1$$

A resolução da segunda iteração do subproblema resulta em *pricing* = -8821908,0; indicando a necessidade de inserção de novas colunas no PMRR. As variáveis de decisão, que mostram a distribuição dos arcos no PMRR, obtidas nesta iteração são:

$$y0_2_0 = 1$$

$$y1_2_0 = 1$$

$$y2_2_1 = 1$$

$$w0_0 = 1$$

$$w1_0 = 1$$

$$w2_1 = 1$$

Com a inserção dessas novas colunas, a formulação do PMRR3 é igual a:

PMRR3 :

Min : *F.O* (49)

Sujeito à:

Restrições de fluxo (R.50)

Restrições para os arcos em intervalos unitários (R.51)

$$R52.46 : \lambda_1 - x0_0 = 0$$

$$R52.47 : \lambda_2 - x0_1 = 0$$

$$R52.48 : \lambda_3 - x0_2 = 0$$

$$R52.49 : \lambda_1 - x1_0 = 0$$

$$R52.50 : \lambda_2 - x1_1 = 0$$

$$R52.51 : \lambda_3 - x1_2 = 0$$

$$R52.52 : \lambda_1 - x2_0 = 0$$

$$R52.53 : \lambda_2 - x2_1 = 0$$

$$R52.54 : \lambda_3 - x2_2 = 0$$

$$R53.55 : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

Os resultados da iteração do PMRR3 são apresentados na Tabela 36.

Tabela 36 – Resultados do Iteração 3 do PMRR

PMRR	F.O	Valor das variáveis duais
Iteração 3	3,001902E+05	R52.46= -1000392,7 R52.47 = -1000384,0 R52.48= -1000320,0 R52.49= -1000385,9 R52.50 = -1000764,4 R52.51= -1000796,0 R52.52= -1001129,4 R52.53 = -1000759,6 R52.54= -1000792,0 R53.55= 3001908,0

Os valores das variáveis duais apresentadas na Tabela 36 são adicionada ao Sub-problema3, originando a seguinte formulação:

Subproblema3 :

Min :

$$\begin{aligned}
 & - 3001908,0 + 1000392,7y_{0_0_0} + 1000384,0y_{0_1_0} + 1000320,0y_{0_2_0} \\
 & + 1000385,9y_{1_0_0} + 1000764,4y_{1_1_0} + 1000796,0y_{1_2_0} \\
 & + 1000385,9y_{1_0_1} + 1000764,4y_{1_1_1} + 1000796,0y_{1_2_1} \\
 & + 1001129,4y_{2_0_1} + 1000759,6y_{2_1_1} + 1000792,0y_{2_2_1}
 \end{aligned}$$

A resolução da terceira iteração do subproblema resulta em um *pricing* igual a -1001201,1; indicando que as novas colunas geradas devem ser incluídas no PMRR. As variáveis de decisão, que mostram a distribuição dos arcos no PMRR, obtidas nesta iteração são:

$$y_{0_2_0} = 1$$

$$y_{1_0_1} = 1$$

$$w_{0_0} = 1$$

$$w_{1_1} = 1$$

$$w_{2_1} = 1$$

Inserindo essas colunas no PMRR4, sua formulação corresponde à:

PMRR4 :

Min : F.O (49)

Sujeito à:

Restrições de fluxo (R.50)

Restrições para os arcos em intervalos unitários (R.51)

$$R52.46 : \lambda_1 - x_{0_0} = 0$$

$$R52.47 : \lambda_2 - x_{0_1} = 0$$

$$R52.48 : \lambda_3 + \lambda_4 - x_{0_2} = 0$$

$$R52.49 : \lambda_1 + \lambda_4 - x_{1_0} = 0$$

$$R52.50 : \lambda_2 - x_{1_1} = 0$$

$$R52.51 : \lambda_3 - x_{1_2} = 0$$

$$R52.52 : \lambda_1 - x_{2_0} = 0$$

$$R52.53 : \lambda_2 - x_{2_1} = 0$$

$$R52.54 : \lambda_3 - x_{2_2} = 0$$

$$R53.55 : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$$

O valor da Função Objetivo do PMRR3 é igual a 2,001180E+05. As variáveis

duais geradas pela sua resolução serão inseridas no Subproblema4, e a heurística irá iterar até que o problema *pricing* seja não-negativo. Ao total, são necessárias mais duas iterações da geração de colunas para que esta convirja. Neste caso, em específico, como as variáveis do PMRR são inteiras, tem-se o correspondente à solução ótima. Assim, não se faz necessário o uso da heurística de arredondamento sugerida por Furini *et al.* (2012).