

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS NÃO-ISOTÉRMICOS  
PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS COM FUNÇÃO DE PENALIDADE

POR

CARLOS FREDERICO LANGE

DISSERTAÇÃO PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

PORTO ALEGRE  
1992

SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS NÃO-ISOTÉRMICOS  
PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS COM FUNÇÃO DE PENALIDADE

por

Carlos Frederico Lange  
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Aprovada por:

Prof. Dr. Armando Miguel Awruch (Orientador)

Prof. Dr. João Luiz Filgueiras de Azevedo (IAE/CTA)

Prof. Dr. Sérgio Viçosa Möller (PROMEC/UFRGS)

Sérgio Viçosa Möller  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 31 de julho de 1992

"The newcomer to computational fluid dynamics  
is forewarned: in this field there is at least  
as much artistry as science."

Patrick J. Roache

- Ao Deus Eterno, o Deus da Bíblia,  
criador do céu e da terra.

## AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas e instituições contribuíram para a realização deste trabalho. É quase impossível citar a todos e, por isso, peço desculpas, se cometer a injustiça de esquecer o nome de alguém.

- À CAPES e à PROPEP/UFRGS, pelas bolsas e pelos auxílios.

- Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFRGS (PROMEC), especialmente ao seu eficiente e prestativo secretário Paulo Kutter, pelo inestimável apoio.

- Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS (CPGEC), por sua valiosa ajuda e aos colegas deste Programa, pelo agradável convívio e companhia no chimarrão.

- À Associação dos Pós-Graduandos da UFRGS (APG) e aos colegas que militam no movimento dos pós-graduandos, pelo exemplo e a demonstração de que ainda existe atuação política séria, madura e com compromisso ético.

- Às bibliotecárias Ana Maria Porcello, Janise da Costa e Sônia Silveira da Biblioteca de Periódicos, pela constante e contagiante disposição e alegria no trabalho e ainda à bibliotecária Juliana Bonilha, pelo auxílio na elaboração das referências bibliográficas.

- Ao ex-bolsista e hoje colega Ricardo Azevedo, pelo trabalho competente e útil nos programas de pré- e pós-processamento.

- Ao colega e amigo Eduardo Bittencourt, pela companhia nas infindáveis jornadas noturnas e de fim-de-semana.

- À colega e amiga Adriane Petry, por compartilhar o trabalho, os sonhos, as desilusões, os sucessos e as realizações.

- Aos professores Sérgio Möller e Ademar Groehs, pela amizade, auxílio e, principalmente, exemplo.

- Ao professor Armando Awruch, pela orientação, entusiasmo, incentivo e pelos acalorados debates.

- Ao professor Paulo Corsetti, em memória, pelo incentivo e valiosos conselhos.

- A meus pais, pela compreensão e pelo apoio incondicional e inestimável.

- À Sandra, minha futura esposa, pelo seu amor e por dar um novo sentido à minha vida.

- A Deus, por tudo, principalmente por me aceitar como sou, por causa de Cristo.

## RESUMO

Foi elaborado um programa para a simulação de escoamentos incompressíveis transientes laminares com ou sem transferência de calor. O programa foi baseado na formulação variacional das equações de Navier-Stokes com o emprego da função de penalidade. Para a discretização espacial das equações variacionais foi empregado o método de elementos finitos com integração reduzida seletiva do termo de penalidade. O programa é capaz de simular escoamentos em domínios bidimensionais multiplamente conexos e de geometria complexa. Para a discretização no tempo foi implementado um esquema genérico que possibilita a opção do método a ser utilizado, do implícito ao totalmente explícito. O programa, destinado à simulação de escoamentos transientes, pode também ser empregado para a obtenção de soluções de regime permanente, segundo a técnica de avanço no tempo. É feita uma análise das características e limitações do programa baseada na simulação de dois problemas-tipo: o escoamento não-isotérmico em cavidade e o escoamento aberto em torno de um cilindro.

## ABSTRACT

A simulation program has been elaborated for laminar incompressible transient flows including or not heat transfer. The program was based in the variational formulation of the Navier-Stokes equations employing the penalty function. As for the spacial discretization of the variational equations it was employed the finite element method with selective reduced integration of the penalty term. The program is capable of simulating flows in multiply connected bidimensional domains with complex geometry. For time discretization it was outlined a general scheme that makes possible to choose the method from implicit to totally explicit. Although the program was designed for transient flows simulation, it may also be used to attain the steady state solution using the time marching technic. Analysis of the characteristics and limitations of the program is based upon the simulation of two standard problems: the non-isothermal cavity flow and the open flow past a cilinder.



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Caracteres Romanos:

- B - matriz de pré-condicionamento no método de gradientes conjugados
- $C_p, C_p$  - coeficiente de calor específico do fluido - [J/kg °C]
- $C_D$  - coeficiente de arrasto do cilindro
- $C_L$  - coeficiente de sustentação do cilindro
- Co - número de Courant
- D - diâmetro do cilindro - [m]
- f - frequência de desprendimento de vórtices no cilindro  
- [1/s]
- F - vetor de forças de campo
- $F_i$  - fluxo de massa nos lados do elemento - [kg/m<sup>2</sup> s]
- $F_p, F_n$  - funções de interpolação do método MSU
- $F_{r1}, F_{r4}$  - relação entre fluxo de massa líquido e fluxo total nos lados relativos 1 e 4 do elemento
- $FJ_s, f_{j_{s_{ij}}}$  - matriz e elementos da matriz correspondente à convecção no método MSU
- $G_i$  - aproximação do gradiente da pressão na direção i
- h - comprimento característico do elemento - [m]
- $h_c$  - coeficiente de transmissão de calor por convecção  
- [W/m<sup>2</sup> °C]
- $h_r$  - coeficiente de transmissão de calor por radiação  
- [W/m<sup>2</sup> °C]
- J,  $\bar{J}, \bar{J}_\alpha$  - funcionais correspondentes ao problema de Stokes variacional
- k - coeficiente de condutibilidade térmica (na direção i)
- k - coeficiente de condutibilidade térmica do fluido  
- [W/m °C] - ou número de elementos vizinhos a um nó (somente no item 3.4)

$K$	- coeficiente genérico de difusão - [kg/m s]
$n$	- direção normal ao contorno, ou número de equações em um sistema (no item 3.5)
$n_i$	- cossenos diretores da normal ao contorno
$p$	- pressão termodinâmica - [N/m <sup>2</sup> ]
$p_\alpha$	- pressão termodinâmica aproximada, obtida através do termo de penalidade - [N/m <sup>2</sup> ]
$p_i$	- vetor direcional usado no método de gradientes conjugados, correspondente à iteração $i$
$p_j$	- valor da função-peso $\pi$ no nó local $j$
$Pe$	- número de Peclet
$Pr$	- número de Prandtl
$q$	- fluxo de calor no contorno - [W/m <sup>2</sup> ]
$q_k$	- fluxo de calor por condução - [W/m <sup>2</sup> ]
$Q$	- fonte de calor distribuída (taxa de geração) - [W/m <sup>3</sup> ]
$R_i$	- vetor de resíduos na iteração $i$ no método dos gradientes conjugados
$Re$	- número de Reynolds
$s$	- direção da linha de corrente
$\Delta s$	- comprimento aproximado de segmento da linha de corrente - [m]
$St$	- número de Strouhal
$t$	- tempo - [s]
$\Delta t$	- passo de tempo - [s]
$t_i$	- força exercida sobre o fluido no contorno - [N/m <sup>2</sup> ]
$T$	- temperatura - [°C]
$T$	- temperatura absoluta da superfície radiante - [K]
$T_\infty$	- temperatura do meio circundante - [°C]
$T_\infty$	- temperatura absoluta do meio circundante - [K]
$T_i$	- valor da temperatura no nó local $i$ - [°C]
$\dot{T}_i$	- derivada temporal de $T_i$
$tol$	- tolerância da norma do erro no método dos gradientes conjugados
$v, v_s, V$	- vetor velocidade - [m/s]
$v_j$	- vetor velocidade no nó de jusante - [m/s]
$v'$	- vetor velocidade no nó de montante - [m/s]

$v_i$	- componente da velocidade na direção $i$ - [m/s]
$u_j, v_j$	- correspondem a $v_{1j}$ e $v_{2j}$ , somente na determinação do nó de montante (item 3.3) - [m/s]
$v_{ij}$	- valor da componente $v_i$ no nó local $j$ - [m/s]
$\dot{v}_{ij}$	- derivada temporal de $v_{ij}$
$v, V$	- velocidade característica (do elemento ou escoamento) - [m/s]
$V_{\infty}$	- velocidade do escoamento principal (não perturbado) - [m/s]
$W$	- dissipação viscosa - [W/m <sup>3</sup> ]
$x$	- vetor posição, ou vetor de variável genérica
$x_i$	- direção ou coordenada cartesiana - [m]
$x, X$	- coordenada cartesiana correspondente a $x_1$ - [m]
$y, Y$	- coordenada cartesiana correspondente a $x_2$ - [m]

#### Caracteres Gregos:

$\alpha$	- parâmetro de penalidade
$\alpha_i$	- coeficiente do método de gradientes conjugados, correspondente à iteração $i$
$\beta_i$	- coeficiente do método de gradientes conjugados, correspondente à iteração $i$
$\Gamma$	- contorno do domínio
$\Gamma_e$	- contorno de um elemento finito
$\Gamma_{cil}$	- contorno do cilindro imerso
$\Gamma_{1v}$	- contorno com condições essenciais de velocidade
$\Gamma_{1T}$	- contorno com condições essenciais de temperatura
$\Gamma_{2v}$	- contorno com condições naturais de velocidade
$\Gamma_{2T}$	- contorno com condições naturais de temperatura
$\delta$	- operador variacional de primeira ordem
$\delta_{ij}$	- função delta de Kronecker

$\varepsilon$	- emissividade da superfície radiante
$\dot{\varepsilon}_{ij}$	- tensor das taxas de deformação
$\eta_i^j$	- coeficiente de interpolação por mínimos quadrados
$\theta$	- parâmetro de discretização no tempo
$x$	- função-peso da formulação variacional
$\lambda$	- multiplicador de Lagrange
$\mu$	- viscosidade dinâmica - [kg/m s]
$\pi$	- função-peso da formulação variacional
$\rho$	- massa específica - [kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma$	- constante de Stefan-Boltzmann - [W/m <sup>2</sup> K <sup>4</sup> ]
$\sigma_{ij}$	- tensor das tensões
$\sigma'_{ij}$	- tensor desviador
$\varphi$	- propriedade genérica transportada por convecção
$\phi_j$	- função interpoladora correspondente ao nó local $j$
$\omega_x$	- função-peso da formulação variacional
$\omega_{xj}$	- valor da função-peso $\omega_x$ no nó local $j$
$\Omega$	- domínio do problema
$\Omega_e$	- domínio de um elemento finito

## ÍNDICE

	pág.
ABERTURA	i
DEDICATÓRIA	ii
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	v
ABSTRACT	vi
LISTA DE SÍMBOLOS	vii
ÍNDICE	xi
ÍNDICE DE FIGURAS	xiii
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - A abordagem numérica na Mecânica dos Fluidos	1
1.2 - Comparação do Método de Elementos Finitos com outras técnicas de discretização	3
1.3 - A função de penalidade no Método de Elementos Finitos	6
1.4 - Objetivos do trabalho	9
CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL E MÉTODO DA PENALIDADE	10
2.1 - Equações governantes	10
2.2 - Método misto	15
2.3 - Problema variacional com restrição	17
2.4 - Multiplicador de Lagrange	18
2.5 - Método da penalidade	19
CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA EM ELEMENTOS FINITOS E MÉTODO DE SOLUÇÃO	22
3.1 - Integração no tempo	25
3.2 - Termo da penalidade	28
3.3 - Termo da convecção	31

3.4 - Cálculo da pressão	37
3.5 - Gradientes conjugados	40
CAPÍTULO 4 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS	45
4.1 - Pré- e pós-processamento	45
4.2 - Programa e algoritmo simplificado	48
CAPÍTULO 5 - TESTES E RESULTADOS	50
5.1 - Cavidade	50
5.2 - Cilindro	75
CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS	91
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	94
APÊNDICE I	99
APÊNDICE II	102
APÊNDICE III	108

## ÍNDICE DE FIGURAS

figura	pág.
3.1 - Identificação do nó de jusante.	36
5.1 - Cavidade: domínio e condições de contorno.	51
5.2 - Cavidade - malha 1: 1681 nós e 1600 elementos.	52
5.3 - Cavidade - malha 1: detalhe.	52
5.4 - Cavidade - malha 2: 289 nós e 256 elementos.	53
5.5 - Cavidade: perfil da velocidade $v_1$ .	58
5.6 - Cavidade: perfil da velocidade $v_2$ .	58
5.7 - Cavidade: perfil vertical de temperatura.	59
5.8 - Cavidade: perfil horizontal de temperatura.	59
5.9 - Perfis de velocidade na cavidade. (resultados obtidos por Nallasamy e Prasad [27])	60
5.10 - Perfis de temperatura na cavidade. (resultados obtidos por Nallasamy e Prasad [27])	61
5.11 - Cavidade: perfil da velocidade $v_1$ .	62
5.12 - Cavidade: perfil da velocidade $v_2$ .	63
5.13 - Cavidade: perfil vertical de temperatura.	63
5.14 - Cavidade: perfil horizontal de temperatura.	64
5.15 - Perfis da velocidade $v_2$ na cavidade - $Re = 1000$ . (resultados obtidos por Schreiber e Keller [37])	65
5.16 - Perfis da velocidade $v_1$ na cavidade - $Re = 1000$ . (resultados obtidos por Schreiber e Keller [37])	65
5.17 - Cavidade: perfil da velocidade $v_1$ .	66
5.18 - Cavidade: perfil da velocidade $v_2$ .	67
5.19 - Cavidade: perfil vertical de temperatura.	67
5.20 - Cavidade: perfil horizontal de temperatura.	68
5.21 - Cavidade: detalhe do campo de velocidades.	68
5.22 - Perfis da velocidade $v_2$ na cavidade - $Re = 10000$ . (resultados obtidos por Schreiber e Keller [37])	69
5.23 - Perfis da velocidade $v_1$ na cavidade - $Re = 10000$ . (resultados obtidos por Schreiber e Keller [37])	70

5.24 - Linhas de corrente na cavidade: $Re = 100$ .	71
5.25 - Linhas de corrente na cavidade: $Re = 1000$ .	72
5.26 - Linhas de corrente na cavidade: $Re = 10000$ .	72
5.27 - Cavidade: perfil da velocidade $v_z$ em $Y = 0,1$ .	73
5.28 - Distribuição de temperatura na cavidade - $Re=100$ .	74
5.29 - Distribuição de temperatura na cavidade - $Re=1000$ .	74
5.30 - Distribuição de temperatura na cavidade - $Re=10000$ .	75
5.31 - Domínio e condições de contorno para o problema do cilindro imerso com $Re = 100$ .	77
5.32 - Malha de nós e elementos para o problema do cilindro imerso.	78
5.33 - Detalhe da malha em torno do cilindro.	78
5.34 - Cilindro: histórico da velocidade $v_z$ no ponto $(9,04;4,0)$ .	79
5.35 - Cilindro: histórico da velocidade $v_z$ no ponto $(24;4)$ .	80
5.36 - Cilindro: histórico da velocidade $v_z$ no ponto $(5,55;4,0)$ .	80
5.37 - Histórico de $v_z$ para nós na mesma altura do centro do cilindro. (segundo Engelman e Jamnia [13])	81
5.38 - Cilindro: perfil da velocidade $v_z$ na linha a jusante do centro.	81
5.39 - Cilindro: histórico de $C_D$ .	83
5.40 - Cilindro: histórico de $C_L$ .	84
5.41 - Perfis da velocidade tangencial ao cilindro.	85
5.42a - Campo de velocidades em torno do cilindro.	86
5.42b - Campo de velocidades em torno do cilindro.	87
5.42c - Campo de velocidades em torno do cilindro.	88
5.42d - Campo de velocidades em torno do cilindro.	89
5.43 - Linhas de corrente no problema do cilindro imerso.	90
II.1 - Lados e funções relativos ao nó de jusante.	103
II.2 - Exemplo de nó de jusante.	105



## 1 - INTRODUÇÃO

### 1.1 - A ABORDAGEM NUMÉRICA NA MECÂNICA DOS FLUIDOS

Conforme relata Schlichting [36], ao final do século passado, os estudiosos e pesquisadores da Mecânica dos Fluidos dividiam-se em dois grandes grupos. De um lado, havia aqueles que buscavam descrever o comportamento de um fluido através da solução analítica das equações que regem o movimento dos fluidos. As equações completas de Navier-Stokes, no entanto, apresentam sérios obstáculos a este caminho, devido à sua complexidade matemática, o que limitava o tratamento aos casos de escoamento mais simples, principalmente os invíscidos (equação de Euler). Esta limitação fazia com que o tratamento teórico falhasse em descrever fenômenos fundamentais da mecânica dos fluidos em engenharia, tais como a perda de carga em escoamentos confinados e a força de arrasto sobre um corpo imerso em movimento. De encontro a essa necessidade, outro grupo de pesquisadores desenvolveu uma abordagem fortemente empírica destes fenômenos, baseada na prática acumulada em inúmeros experimentos. Em 1904, Prandtl apresentou pela primeira vez sua "teoria da camada limite" e logrou, através dela, unificar o trabalho destes dois ramos da pesquisa na mecânica dos fluidos. A partir de então, foi possível tratar matematicamente as equações que realmente descreviam o fenômeno físico, pelo menos nos casos de escoamento laminar incompressível, obtendo resultados que se verificavam nos experimentos. Foi também Prandtl, com sua "teoria do comprimento de mistura" (1925), que deu o impulso inicial à abordagem teórica dos escoamentos turbulentos.

Apesar da conciliação, iniciada por Prandtl e seus colaboradores, os dois tipos de abordagem continuaram a distinguir os pesquisadores em "teóricos" e "experimentais".

Aqueles que preferiam a abordagem teórica buscavam soluções analíticas para diversos problemas de escoamento que permitissem avaliar o comportamento físico do fluido através de instrumentos matemáticos e até a predizer situações ainda não demonstradas experimentalmente. Esta abordagem, no entanto, enfrenta até hoje grandes dificuldades no tratamento de casos mais complexos de escoamento, seja devido à geometria complexa dos domínios, seja devido às características matemáticas das equações que descrevem o fenômeno. Ocorre que, na prática da engenharia, os problemas mais sérios e, às vezes, mais importantes costumam ser também os mais complexos. Por outro lado, os pesquisadores que se concentraram na abordagem experimental têm contribuído enormemente para o avanço do conhecimento científico. Com a utilização de parâmetros adimensionais para a descrição de experimentos, tornou-se possível comparar escoamentos em domínios com diferentes dimensões, envolvendo fluidos com propriedades físicas diferentes. Os resultados de uma série de experimentos podem assim ser aproveitados em um espectro mais amplo de situações práticas enfrentadas na engenharia de fluidos. O avanço tecnológico recente nos instrumentos de análise experimental de escoamentos tem possibilitado uma grande redução na margem de erro dos resultados e simultaneamente um aumento na frequência e uma diminuição no intervalo de espaço das medições. No entanto, o estudo experimental continua apresentando um custo muito elevado. A parametrização dos resultados não permite o aproveitamento dos mesmos para geometrias de forma diversa e justamente esta costuma ser um importante, senão o principal, fator de ajuste num projeto de engenharia.

No início deste século, começou a germinar um terceiro tipo de abordagem dos problemas físicos, em particular, da mecânica dos fluidos. Roache [35] elege o trabalho de Richardson<sup>a</sup> apresentado em 1910, na "Royal Society" de Londres,

---

<sup>a</sup>RICHARDSON, L.F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a Masonry dam. Transactions of the Royal Society of London, Series A, v. 210,

como a pedra fundamental da análise numérica moderna de equações diferenciais parciais. Mas, ainda segundo Roache [35], somente em 1933 surge a primeira aplicação de métodos numéricos a um problema de escoamento de um fluido viscoso (Thom<sup>b</sup>). Na década de 60, a mecânica dos fluidos computacional adquire sua maturidade e caracteriza-se como uma disciplina distinta, diferente das abordagens teórica e experimental, mas complementar e interdependente em relação a elas.

O emprego de métodos numéricos permite resolver problemas complexos de escoamento, para os quais não há solução analítica. Também permite variar com relativa facilidade a geometria, os parâmetros e as condições do problema com um mínimo de custo adicional. O desenvolvimento vertiginoso dos recursos computacionais tem estendido o campo de aplicação dos métodos numéricos a problemas que exigem enorme capacidade de armazenamento e elevada velocidade de processamento. Os próprios algoritmos numéricos têm evoluído no sentido de simularem com maior precisão e menor custo um espectro cada vez mais amplo de tipos de escoamento.

## 12 - COMPARAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM OUTRAS TÉCNICAS DE DISCRETIZAÇÃO

Com o crescimento do emprego de métodos numéricos na mecânica dos fluidos, surgiram muitas técnicas de discretização e resolução das equações governantes, as quais podem ser agrupadas sobre duas grandes bases: o método de diferenças finitas e o método dos elementos finitos.

Até a década de 70, as técnicas baseadas no método de diferenças finitas (ou volumes finitos) predominavam nas análises

---

p.307-357, 1910.

<sup>b</sup> THOM, A. The flow past circular cylinders at low speeds. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, v. 141, p.651-666, 1933.

numéricas de escoamentos. Segundo Gresho [16], as razões desta predominância eram a maior simplicidade de programação do método e o baixo custo em tempo e memória, devido à opção pelos processos iterativos de solução dos sistemas de equações discretizadas e ao desacoplamento do cálculo das componentes da velocidade e da pressão. No entanto, lembra Shaw [38], sérias limitações sempre acompanharam as aplicações de algoritmos baseados neste método, como, por exemplo, a exigência de domínios com geometrias regulares e a dificuldade de imposição de condições de contorno complexas. Com o emprego de coordenadas curvilíneas generalizadas aliadas a malhas ajustadas ao contorno têm-se amenizado o primeiro problema, ainda que subsista a exigência de certa regularidade e permaneça a impossibilidade de discretização de certos domínios de geometrias mais complexas.

O emprego do método dos elementos finitos na simulação de escoamentos começou a adquirir expressão no início dos anos 70. Os programas desenvolvidos com base neste método, no entanto, apresentavam nítida desvantagem, em termos de tempo e memória, em relação aos demais, por optarem pela resolução acoplada das componentes de velocidade e da pressão e pelo uso de métodos diretos de solução dos sistemas de equações discretizadas.

A medida que os esforços de desenvolvimento de algoritmos mais apropriados se foram intensificando, o desacoplamento das equações e o emprego de métodos iterativos de solução de sistemas de equações permitiu o aumento de eficiência dos programas e o melhor aproveitamento das vantagens oferecidas pelo método de elementos finitos. Conforme lembram Zienkiewicz et al. [40], algumas vantagens inerentes à formulação do método de elementos finitos são a possibilidade de lidar com geometrias complexas que exigem malhas irregulares e a facilidade de incorporar condições de contorno complexas, especialmente do tipo Neumann. O método de elementos finitos trata ainda, sem problemas, domínios multiplamente conexos e, mais recentemente, tem sido empregado nos casos que exigem adaptação e refinamento da malha de discretização durante o processo de simulação. Como



desvantagem inerente ao método, pode-se citar o fato de que, em fenômenos transientes, não se pode obter uma forma explícita natural, quando o mesmo é usado na sua forma consistente, pois sempre haverá uma matriz não diagonal (a matriz de massa) a ser invertida. Pode-se, entretanto, usar o expediente de concentrar a massa na diagonal principal da matriz, embora isto acarrete, por vezes, a diminuição da precisão.

Conforme Reddy [31], "na aproximação de uma equação diferencial por diferenças finitas, os termos de derivadas são substituídos por quocientes de diferenças que envolvem valores da solução nos pontos da malha discreta que representa o domínio. As equações discretizadas resultantes, após a imposição das condições de contorno, são resolvidas para os valores da solução nos pontos da malha. Apesar de ser simples em seu conceito, o método de diferenças finitas apresenta diversas desvantagens. Entre elas, as principais são: a imprecisão no valor das derivadas da solução aproximada; dificuldade na imposição de condições de contorno em contornos não retos; dificuldade de representar com precisão domínios de geometria complexa."

Ainda segundo Reddy [31], "o método dos elementos finitos baseia-se na forma variacional equivalente das equações diferenciais. O domínio, que pode ser geometricamente complexo, é dividido em um conjunto de subdomínios de geometria simples, chamados elementos finitos. A solução é aproximada por uma combinação linear de funções interpoladoras constituídas de polinômios algébricos, de fácil derivação e integração", que descrevem a mesma dentro de cada elemento.

Apesar de suas concepções serem totalmente diversas, os métodos de diferenças finitas e de elementos finitos guardam em sua forma final muitas semelhanças, chegando a apresentar a forma do sistema final discretizado, em alguns casos, totalmente idêntica, como mostra Chung [10]. Este ainda observa que os pesquisadores se dividem entre os que preferem um método e os que preferem o outro, havendo em ambos vantagens e desvantagens.

No presente trabalho optou-se pelo método dos elementos finitos, levando-se em conta as experiências anteriores no desenvolvimento de métodos numéricos em engenharia nos Cursos de Pós-Graduação da Escola de Engenharia da UFRGS.

### 1.3 - A FUNÇÃO DE PENALIDADE NO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

As primeiras aplicações do método de elementos finitos na solução de escoamentos viscosos e incompressíveis empregavam a técnica de resolver o sistema de equações acoplado das variáveis primitivas: velocidade e pressão. Tal técnica envolve a solução de um sistema de equações de grandes dimensões e com elementos nulos na diagonal principal, tendo, portanto, um custo de memória de armazenamento e de tempo de processamento muito elevado.

O grande mérito do método da função de penalidade é reduzir o problema a ser resolvido. A equação da conservação da massa é encarada como uma restrição imposta ao problema e é representada por um termo de penalidade que substitui o gradiente de pressão nas equações de conservação da quantidade de movimento. A pressão assim é retirada do sistema e o problema reduz-se ao cálculo das componentes de velocidade através das equações da conservação da quantidade de movimento. Evita-se ainda as dificuldades que envolvem a aplicação adequada das condições de contorno em sistemas que visam à obtenção da pressão[17]. Esta é calculada a posteriori diretamente a partir do campo de velocidades.

Segundo Reddy [32], a alternativa de empregar o método da função de penalidade no cálculo de escoamentos por elementos finitos foi apresentada pela primeira vez por Zienkiewicz em 1973. O método da função de penalidade já era, à época, largamente empregado em programação matemática e no cálculo de otimização. Mas o seu uso em problemas de engenharia era impedido

até então por duas razões principais: (i) a técnica era empregada em conexão com os métodos variacionais do tipo Rayleigh-Ritz, que não podem ser aplicados a equações não auto-adjuntas (como as de Navier-Stokes) e exigem uma escolha artesanal das funções interpoladoras, de acordo com o domínio e com as condições de contorno, ou seja, que não pode ser automatizada; (ii) em aplicações práticas do método da função de penalidade, os termos de penalidade exigem uma escolha apropriada das funções interpoladoras ou da técnica de integração, a fim de não corromper a solução do problema. Zienkiewicz logrou resolver o primeiro problema, trazendo o método da função de penalidade ao contexto do método de elementos finitos. O segundo problema foi superado logo a seguir pela adoção da técnica de integração numérica reduzida dos termos de penalidade.

O método da função de penalidade, descrito em detalhes nos livros de Reddy [31] e de Carey e Oden [8], tem sido investigado por uma série de pesquisadores. Em especial, os trabalhos de Reddy [32] e de Engelman et al. [14] abordam aspectos básicos do método, tanto teóricos, como numéricos. Além de resgatar a história do emprego do presente método, Reddy [32] trata da existência e unicidade de solução para o problema variacional de penalidade derivado das equações de Navier-Stokes para o regime estacionário e conclui que, para tal, é necessária a satisfação da condição de Brezzi, também conhecida como condição de Babuška-Brezzi. Esta condição impõe o tratamento diferenciado do termo de penalidade e Reddy estuda diversas formas de integração do termo e compara as formulações resultantes com a formulação mista tradicional. Engelman et al. [14] concentram-se mais no estudo do termo de penalidade e concluem que, para elementos com funções interpoladoras de ordem superior a um, a forma consistente do termo, apesar de computacionalmente mais cara, é mais precisa do que a forma reduzida comumente empregada. Allaire et al. [1] também trabalharam a nível básico, investigando o emprego de elementos triangulares isoparamétricos, tipo simplex, em conjunto com o método da penalidade. Eles alertam para o fato de que a geração

arbitrária de elementos triangulares pode conduzir a grandes erros no cálculo das velocidades. O problema se resolve, quando os triângulos são gerados a partir da intersecção das diagonais de um quadrilátero.

Outros autores focalizam aplicações do método da penalidade, seu emprego em diversos tipos de escoamentos e em conjunto com diferentes técnicas de solução de sistemas. Carey e Krishnan [7], por exemplo, empregam o referido método associado à técnica de continuação baseada no número de Reynolds e comparam o desempenho dos métodos iterativos de linearização, de aproximação sucessiva e de Newton para a solução do sistema de equações não-lineares. O método de Newton mostra-se mais robusto, mas, como os demais, limitado a escoamentos com número de Reynolds menor que  $10^3$ . Kim e Decker [23] resolvem uma série de problemas clássicos, o escoamento em uma cavidade, sobre um degrau e simétrico em um banco de tubos, a fim de comparar a formulação com função de penalidade com a formulação mista de velocidade e pressão. Para o tipo especial de elemento adotado, eles concluem que os métodos se equivalem na precisão do cálculo das velocidades, sendo o método da penalidade computacionalmente mais eficiente, mas apresentando problemas no cálculo da pressão. Em um trabalho mais recente, Pelletier et al. [29] aplicam o método da penalidade a escoamentos altamente viscosos (*creeping flows*) e descrevem a necessidade de se adotar, nestes casos, um valor mais elevado para o parâmetro de penalidade. Sugerem ainda a adimensionalização criteriosa da equação, como tentativa para evitar diferenças muito grandes na ordem de grandeza dos termos, o que conduziria a um mau condicionamento do sistema. Dhaubhadel et al. [11] avançam na direção da abordagem de problemas reais de engenharia, simulando com uma formulação de penalidade o escoamento simétrico e a transferência de calor em um banco de tubos com dez fileiras não alinhadas.

Nos trabalhos citados até aqui, a função de penalidade foi aplicada a formulações variacionais das equações de Navier-Stokes simplificadas para o regime permanente. Uma



quantidade bem menor de autores relata aplicações para simulação de escoamentos transientes. Gresho [16] faz diversas sugestões de esquemas de abordagem das equações de Navier-Stokes em regime transiente e incompressível, apontando aqueles que melhor se adaptam ao emprego do método de solução por gradientes conjugados. Young e Ni [39] testam diversos tipos de elementos e interpolações em problemas, como o escoamento em cavidade e o escoamento aberto em torno de um cilindro, e indicam o elemento quadrilátero isoparamétrico bilinear como o mais robusto entre os testados. Por fim, Argyris et al. [3] estudam uma formulação transiente com penalidade associada a diversos métodos iterativos de solução. Após aplicar aos problemas de degrau bi- e tridimensional, convecção natural de Bénard e cavidade térmica com mudança de fase, concluem que a formulação que emprega o método de gradientes conjugados com pré-condicionador diagonal é a mais eficiente em média.

#### 14 - OBJETIVOS DO TRABALHO

O presente trabalho visa à elaboração e teste de um programa computacional para a simulação de escoamentos viscosos incompressíveis transientes em regime laminar com ou sem transferência de calor. O método de discretização empregado é o de elementos finitos, baseado na formulação variacional aproximada do problema, alterada pelo uso da função de penalidade. O programa deve ser voltado ao tratamento de problemas com grande número de graus de liberdade e os testes devem fornecer subsídios para a posterior aplicação do programa a problemas reais de projeto em engenharia.

## 2 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL E MÉTODO DA PENALIDADE

### 2.1 - EQUAÇÕES GOVERNANTES

As equações que regem o escoamento de um fluido viscoso incompressível não-isotérmico podem ser escritas da seguinte forma [20]:

(a) equação de conservação da quantidade de movimento

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] - \nabla \cdot \sigma - \rho \mathbf{F} = 0 \quad (1)$$

(b) equação de conservação da massa

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2)$$

(c) equação de conservação da energia

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T \right] - \nabla \cdot (k \nabla T) - Q - W = 0 \quad (3)$$

onde  $\mathbf{V}$  = vetor velocidade - [m/s]

$T$  = temperatura - [°C]

$t$  = tempo - [s]

$\rho$  = massa específica - [kg/m<sup>3</sup>]

$\sigma$  = tensor das tensões

$\mathbf{F}$  = forças de campo ou de volume

$c_p$  = coeficiente de calor específico do fluido - [J/kg °C]

$k$  = coeficiente de condutibilidade térmica do fluido  
- [W/m °C]

$Q$  = fonte de calor distribuída - [W/m<sup>3</sup>]

$W$  = dissipação mecânica ou viscosa - [W/m<sup>3</sup>]

As equações (1) e (2) são denominadas equações de Navier-Stokes. No processo de solução, as equações (1) a (3) serão tratadas como se as variáveis equivalassem ao seu valor

médio de Reynolds, uma vez que serão estudados apenas regimes laminares de escoamento. No presente trabalho, as forças de campo serão consideradas desprezíveis frente às demais forças envolvidas e, portanto, o último termo da equação (1) pode ser excluído da mesma. O regime de escoamento estudado é o laminar.

Quando existe uma direção, na qual as variáveis do problema não apresentam variação significativa, pode-se reduzir a região de estudo a um domínio bidimensional, o que será considerado neste trabalho. Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, no qual as duas direções principais consideradas são denominadas  $x_1$  e  $x_2$ , as equações anteriores podem ser reescritas, empregando-se a notação indicial, como segue

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - Q - W = 0 \quad (6)$$

onde  $v_i$  são as componentes do vetor velocidade e  $i, j = 1, 2$ .

O tensor das tensões pode ser decomposto da seguinte forma

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma'_{ij} \quad i, j = 1, 2 \quad (7)$$

onde o primeiro termo do lado direito constitui o tensor esférico ou volumétrico, sendo  $p$ , a pressão termodinâmica ou hidrostática do fluido em  $[N/m^2]$  e  $\delta_{ij}$ , a função delta de Kronecker, enquanto o segundo termo é chamado de tensor desviador ou distorcional.

Considera-se o fluido newtoniano, para o qual se pode aplicar a hipótese de Stokes, que estabelece uma relação linear entre as tensões desviadoras  $\sigma'_{ij}$  e as taxas de deformação  $\dot{\epsilon}_{ij}$ , a qual, no caso de escoamento incompressível, vem dada por

$$\sigma'_{ij} = 2 \mu \dot{\epsilon}_{ij} \quad i, j = 1, 2 \quad (8)$$

onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido em [kg/m s] e o tensor das taxas de deformação  $\dot{\epsilon}_{ij}$  é expresso na forma

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2 \quad (9)$$

O termo de dissipação viscosa na equação (6) corresponde à energia dissipada na forma de calor pelo trabalho mecânico de deformação do fluido. Este termo pode ser descrito como o produto do tensor desviador e o tensor das taxas de deformação

$$W = \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad i, j = 1, 2 \quad (10)$$

Substituindo as expressões apresentadas nas equações (7) a (10), o sistema de equações diferenciais formado pelas equações (4), (5) e (6) pode ser escrito em função das variáveis  $V$ ,  $p$  e  $T$ , chamadas variáveis primárias do problema,

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (12)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - Q - \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \quad (13)$$

$$i, j = 1, 2$$

As equações descritas são válidas para o domínio em estudo, que será chamado de  $\Omega$ .

A simulação de um escoamento nas condições estabelecidas equivale à resolução do sistema de equações diferenciais parciais (11)-(13), com a conseqüente obtenção das funções  $V(x, t)$ ,  $p(x, t)$  e  $T(x, t)$ , variáveis dependentes que

descrevem respectivamente a velocidade, a pressão e a temperatura do fluido em um ponto  $x$  qualquer do domínio e em determinado instante de tempo  $t$ .

Para que o sistema de equações formado pelas equações de (11) a (13) possa ser resolvido, é preciso conhecer o valor das variáveis no instante inicial e algumas condições a serem satisfeitas no contorno do domínio, denominado  $\Gamma$ . As condições iniciais serão assinaladas com um sub-índice 0, como segue

$$\begin{aligned} v_i(x,0) &= v_{i0}(x) & i &= 1,2 \\ p(x,0) &= p_0(x) \\ T(x,0) &= T_0(x) \end{aligned} \tag{14}$$

em  $\Omega \cup \Gamma$

As condições de contorno podem ser de dois tipos:

- para as equações (11) e (12)

$$\begin{aligned} \text{condições essenciais} & \quad v_i(x,t) = \bar{v}_i & \text{em } \Gamma_{1v} \\ \text{condições naturais} & \quad \alpha_{ij} n_j = \bar{t}_i & \text{em } \Gamma_{2v} \\ & & i,j = 1,2 \end{aligned} \tag{15}$$

- para a equação (13)

$$\begin{aligned} \text{condições essenciais} & \quad T(x,t) = \bar{T} & \text{em } \Gamma_{1T} \\ \text{condições naturais} & \quad k \frac{\partial T}{\partial n} = \bar{q} & \text{em } \Gamma_{2T} \end{aligned} \tag{16}$$

onde  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são partes mutuamente excludentes do contorno do domínio e cuja soma equivale ao contorno total  $\Gamma$ ,  $n$  é a direção normal ao contorno e  $n_j$  corresponde aos cossenos diretores da normal ao contorno. Em  $\Gamma_{1v}$ ,  $\bar{v}_i$  são as componentes prescritas do vetor velocidade e em  $\Gamma_{1T}$ ,  $\bar{T}$  é o valor prescrito da temperatura

do fluido. No caso das condições naturais, tem-se que, em  $\Gamma_{2V}$ ,  $\bar{t}_i$  representa uma força exercida sobre o fluido no contorno e em  $\Gamma_{2T}$ ,  $\bar{q}$  equivale a um fluxo de calor prescrito no contorno. O fluxo de calor  $\bar{q}$  pode ser de três tipos [24]

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = \begin{cases} \bar{q}_k & \text{condução} \\ -h_c (T - T_\infty) & \text{convecção} \\ -h_r (T - T_\infty) & \text{radiação} \end{cases} \quad (17)$$

os quais podem ocorrer isolados ou combinados. Nestas equações,  $T$  é a temperatura no contorno do domínio,  $T_\infty$  é a temperatura do meio que circunda o contorno,  $h_c$  é o coeficiente de transmissão de calor por convecção em  $[W/m^2 \text{ } ^\circ C]$ , definido por Newton, e  $h_r$  é o coeficiente de transmissão de calor por radiação em  $[W/m^2 \text{ } ^\circ C]$ , expresso por

$$h_r = \frac{\sigma \varepsilon (T^4 - T_\infty^4)}{(T - T_\infty)} \quad (18)$$

onde  $\sigma$  = constante de Stefan-Boltzmann -  $[W/m^2 \text{ } K^4]$

$\varepsilon$  = emissividade da superfície radiante

$T$  = temperatura absoluta da superfície radiante -  $[K]$

$T_\infty$  = temperatura absoluta do meio circundante -  $[K]$

A adoção desta forma de descrição do fluxo prescrito de radiação [23] é conveniente para a estrutura do programa computacional. Nota-se que o coeficiente de transmissão por radiação depende da temperatura do contorno a ser determinada, o que introduz uma não-linearidade no problema.

Até aqui foram descritas as equações que governam o escoamento de um fluido incompressível não-isotérmico e as condições iniciais e de contorno que tornam o problema fechado. A seguir, será mostrada a obtenção da formulação variacional equivalente e o emprego da função de penalidade.



## 2.2 - MÉTODO MISTO

A formulação variacional ou forma fraca das equações (11) a (13), descrita nas referências [8,10,30], é obtida através do método dos resíduos ponderados pela multiplicação das mesmas por funções de teste e pela integração do produto sobre todo o domínio

$$\int_{\Omega} \left\{ \omega_k \left\{ \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} + \left\{ x \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\} \right\} d\Omega = 0 \quad (19)$$

$$\int_{\Omega} x \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\Omega = 0 \quad (20)$$

$$\int_{\Omega} \pi \left\{ \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] - Q - \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} d\Omega = 0 \quad (21)$$

$$i, j = 1, 2 ; k = i$$

A função de teste  $\omega_k$ , também chamada função-peso, que pondera a equação (19) corresponde à primeira variação das componentes de velocidade,  $\delta v_k$ . A função  $x$ , que pondera a equação (20) e o termo de gradiente da pressão na equação (19) corresponde à primeira variação da pressão,  $\delta p$ , enquanto  $\pi$ , que pondera a equação (21) corresponde à primeira variação da temperatura,  $\delta T$ . O último passo para a obtenção da formulação variacional é a integração por partes dos termos de derivada superior e da pressão, ou aplicação do teorema da divergência de Green. Esta operação dá origem à expressão *forma fraca*, porque enfraquece as exigências de continuidade das variáveis primárias  $V$ ,  $p$  e  $T$ . Surgem também neste ponto integrais de contorno, às quais se aplicam as condições naturais de cada equação. Procedendo-se assim, tem-se

$$\int_{\Omega} \left\{ \rho \omega_k \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \mu \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \left\{ p \frac{\partial x}{\partial x_i} \right\} \right\} d\Omega =$$

$$= \int_{\Gamma_{zV}} \omega_k \bar{t}_i d\Gamma \quad (22)$$

$$\int_{\Omega} x \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\Omega = 0 \quad (23)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \pi \left[ \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - Q - \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] + k \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right\} d\Omega =$$

$$= \int_{\Gamma_{zT}} \pi \bar{q} d\Gamma \quad (24)$$

$$i, j = 1, 2 ; k = i$$

A equação (24) se encontra na sua forma variacional final, que será empregada para a aplicação do método de elementos finitos, explicada no próximo capítulo. As equações (22) e (23), no entanto, merecem uma atenção especial e diferentes formas de abordagem das mesmas serão descritas a seguir.

No enfoque misto, forma-se um sistema único a partir das equações (22) e (23). observando-se que a equação (22) representa um conjunto de duas equações. A existência de solução e a convergência, neste caso, estão submetidas à observância da condição de consistência (Carey e Oden [8]), também chamada de condição de Babuška-Brezzi. A aplicação desta condição implica o uso de funções de ordem diferente na representação aproximada das componentes de velocidade e da pressão e, portanto, também das funções de teste  $\omega_k$  e  $x$ . Em geral, a ordem dos polinômios que constituem a base do espaço de funções da velocidade deve ser superior à dos polinômios do espaço de funções da pressão.

O agrupamento das equações (22) e (23) num sistema é uma exigência do forte acoplamento que existe entre as mesmas. Em consequência disto, faz-se necessário resolver um sistema de grandes proporções, que apresenta a desvantagem adicional de



possuir coeficientes nulos na diagonal principal da matriz, exigindo o emprego de técnicas de pivotamento para sua resolução. A existência de zeros na diagonal principal decorre da ausência de um termo de pressão na equação de conservação da massa.

Mais recentemente têm sido propostas formulações que buscam superar as limitações do método misto, empregando funções interpoladoras isotáxicas, ou de mesma ordem, na aproximação das velocidades e da pressão. Apesar de não cumprirem a condição de Babuška-Brezzi, os trabalhos de Rice e Schnipke [34], Shaw [38] e ainda Franca et al. [15] relatam a obtenção de resultados livres das oscilações espúrias que costumam afetar este tipo de formulação. Os trabalhos citados também empregam esquemas segregados de solução, que desacoplam o cálculo das componentes de velocidade e da pressão, obtendo esta a partir de uma forma derivada da equação da continuidade, o que reduz a dimensão dos sistemas resolvidos. As maioria das experiências bem sucedidas neste campo, ainda estão restritas aos casos de regime permanente, havendo ainda muitas dúvidas quanto às condições de estabilidade.

## 23 - PROBLEMA VARIACIONAL COM RESTRIÇÃO

As equações de Navier-Stokes (11) e (12) podem ser abordadas como um problema variacional das equações de conservação da quantidade de movimento (11) submetidas à restrição de incompressibilidade (12). Sob este enfoque, as funções admissíveis para aproximar a velocidade devem, de antemão, satisfazer a restrição de divergência nula. Esta restrição se transmite à função de teste correspondente à primeira variação da velocidade, ou seja,  $\nabla \cdot \omega = 0$  em  $\Omega$ . Ao se obter a forma variacional, pondera-se todos os termos da equação (11) com a mesma função-peso  $\omega_x$  e, em consequência disto e da afirmação anterior, o último termo do lado esquerdo na equação (22) se anula e a pressão deixa fazer parte do sistema de equações que calcula as componentes da velocidade. A equação

variacional assim simplificada fica

$$\int_{\Omega} \left\{ \rho \omega_k \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \mu \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\} d\Omega = \int_{\Gamma_{2v}} \omega_k t_i d\bar{\Gamma} \quad (25)$$

$i, j = 1, 2 ; k = i$

A equação (23), correspondente à continuidade, torna-se desnecessária, uma vez que as funções aproximadoras da velocidade já a satisfazem como pré-condição. Obtém-se desta forma uma significativa redução no sistema a ser resolvido, evitando-se ainda a ocorrência de zeros na diagonal principal da matriz. A pressão pode ser calculada a posteriori através da equação (11), uma vez conhecido o campo de velocidades. Surge, no entanto, o novo problema de determinação de funções que satisfaçam a condição pré-estabelecida.

## 2.4 - MULTIPLICADOR DE LAGRANGE

A necessidade de se obter elementos e funções aproximadoras para a velocidade que satisfaçam a priori a restrição da incompressibilidade traz consigo a desvantagem de tornar o método pouco genérico e mais complexo do ponto de vista computacional. Sob este ponto de vista, a formulação mista leva vantagem sobre a formulação com restrição, pois permite o emprego de elementos padronizados e mais simples.

Uma outra forma de se incorporar uma restrição a um problema variacional consiste em acrescentar a mesma, através de um multiplicador de Lagrange, que geralmente tem um significado físico, ao funcional que dará origem à forma fraca da equação. Este procedimento é exemplificado no Apêndice I para as equações de Stokes. No caso das equações de Navier-Stokes, passa-se diretamente à forma fraca através do método dos resíduos ponderados. Partindo da equação (25), pode-se relaxar a exigência de divergência nula do espaço de funções aproximadoras da velocidade, desde que se incorpore esta restrição explicitamente

na forma descrita. Esta medida possibilita que se empregue elementos e funções simples, como no caso do método misto. Ponderando-se o termo de restrição da mesma forma que o restante da equação, a forma fraca do problema fica

$$\int_{\Omega} \left\{ \rho \omega_k \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \mu \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} \right\} d\Omega =$$

$$= \int_{\Gamma_{zv}} \omega_k \bar{z}_i d\Gamma \quad (26)$$

$$\int_{\Omega} \delta \lambda \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\Omega = 0 \quad (27)$$

$$i, j = 1, 2 ; k = i$$

onde  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange,  $\delta \lambda$  é a primeira variação do mesmo e, como já foi visto,  $\omega_k$  corresponde à primeira variação das componentes de velocidade.

Quando se compara as equações (26) e (27) com as equações (22) e (23), fica evidente que, neste caso,  $\lambda$  corresponde a  $-p$  e  $\delta \lambda$  é equivalente a  $\kappa$ . A formulação com multiplicador de Lagrange, apesar de se originar de uma abordagem totalmente distinta, equivale, portanto, ao método misto.

## 2.5 - MÉTODO DA PENALIDADE

O método da função de penalidade, no contexto do problema em estudo, tem por objetivo a obtenção de uma forma variacional que não contenha a pressão como variável primária do problema a exemplo da formulação com restrição e que, ao mesmo tempo, não exija que as funções interpoladoras cumpram a priori a condição de divergência nula. Com isso, fica permitido o emprego de elementos e funções simples na implementação computacional do método, como no caso do enfoque misto. Desta vez, a restrição que impõe a continuidade é incorporada ao funcional através de um termo de penalidade, que, como o próprio nome diz, penaliza o

descumprimento da condição.

É importante observar que, no método da penalidade, a restrição é cumprida apenas aproximadamente, mas com precisão suficiente para garantir a qualidade dos resultados.

A forma do termo de penalidade aplicada a um funcional é mostrada também no Apêndice I para o caso das equações de Stokes. Voltando às equações ora em estudo, aplica-se o método dos resíduos ponderados como na equação (25), incluindo-se aí o termo de penalidade, e obtém-se

$$\int_{\Omega} \left\{ \rho \omega_k \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \mu \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \alpha \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right\} d\Omega =$$

$$= \int_{\Gamma_{zv}} \omega_k \bar{t}_i d\Gamma \quad (28)$$

$i, j = 1, 2 ; k = i$

O coeficiente  $\alpha$  é chamado de parâmetro de penalidade e estabelece a ordem de aproximação da solução do problema penalizado com a solução do problema original.

Comparando-se as equações (28) e (26), nota-se que todos os termos são comuns, exceto:

$$\int_{\Omega} \lambda \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} d\Omega \quad \text{em (26)}$$

$$\text{e} \quad \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} d\Omega \quad \text{em (28)}$$

Uma vez que a solução obtida pelo método da penalidade se aproxima da solução do problema original, pode-se considerar o produto

$$\lambda_{\alpha} = \alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad i = 1, 2 \quad (27)$$

como um multiplicador de Lagrange que se aproxima de  $\lambda$ . E como já

foi mostrado que o multiplicador  $\lambda$  corresponde fisicamente a  $-p$ , o cálculo aproximado da pressão pelo método da penalidade fica

$$p_{\alpha} = -\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad i = 1,2 \quad (30)$$

Ressalta-se aqui o fato de que, neste método, a divergência do campo de velocidades não é exatamente nula, sendo o erro no cumprimento da continuidade uma função do inverso do parâmetro de penalidade.

Brooks e Hughes [6] sugerem que o parâmetro de penalidade  $\alpha$  pode ser interpretado fisicamente como uma espécie de "viscosidade de dilatação". Reddy [32] observa que a equação (30) é deduzida a partir da comparação entre as formulações variacionais (26) e (28), ao invés de constituir a base ou fundamento do método da penalidade, como teria sido descrito por alguns autores.

Obtém-se desta forma, através da função de penalidade, a desejada redução do sistema de equações, pela eliminação da pressão, e simultaneamente retém-se a possibilidade de emprego de elementos e funções simples e genéricas na implementação do método de elementos finitos, que será descrita a seguir. Ao se retirar a pressão do sistema principal de equações, evita-se ainda a dificuldade que geralmente está associada à aplicação adequada das condições de contorno desta variável [17].

### 3 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA EM ELEMENTOS FINITOS E MÉTODO DE SOLUÇÃO

Para resolver o problema variacional de penalidade mostrado no capítulo anterior, emprega-se o método dos elementos finitos.

Primeiramente o domínio é dividido em sub-domínios (elementos finitos) de geometria simples. Neste trabalho foram empregados exclusivamente elementos isoparamétricos quadriláteros de lados retos (bilineares).

Em cada elemento finito, as variáveis (componentes da velocidade e/ou temperatura) são aproximadas por funções constituídas de polinômios que interpolam, nos lados e no interior do elemento, o valor das variáveis em cada nó. Os polinômios interpoladores são lineares nas duas direções principais, pelo que as funções são ditas bilineares.

Em virtude de serem do mesmo tipo as funções interpoladoras das variáveis e as funções que descrevem geometricamente o elemento, este recebe o nome de isoparamétrico [10]. Os elementos isoparamétricos fazem uso de um sistema de coordenadas local adimensional (coordenadas naturais) que permite aos mesmos assumir qualquer geometria quadrilátera irregular. No entanto, os quadriláteros precisam ter lados retos devido ao uso de funções bilineares.

As equações variacionais que compõe a equação (28) mais a equação (24) são aplicadas a estes elementos de domínio, aproximando-se as variáveis em função do valor das mesmas em cada nó. Para isso, substitui-se a função que descreve a variável e a função-peso no interior do elemento pelo produto entre as funções



interpoladoras e os valores nodais das variáveis, como segue

$$\begin{aligned}
 v_1(X) &= \phi_j(X) v_{1j} \\
 v_2(X) &= \phi_j(X) v_{2j} \\
 T(X) &= \phi_j(X) T_j \\
 \omega_i(X) &= \phi_j(X) \omega_{ij} \\
 \pi(X) &= \phi_j(X) p_j
 \end{aligned} \tag{31}$$

$j=1,4 ; i = 1,2$

onde  $X$  é o vetor posição,  $\phi_j$  são as funções interpoladoras correspondentes a cada nó,  $v_{1j}$ ,  $v_{2j}$  e  $T_j$  são os valores nodais das componentes da velocidade e da temperatura, enquanto  $\omega_{ij}$  e  $p_j$  são os valores nodais das funções de teste que, por serem arbitrários e estarem presentes em todos os termos das equações, podem ser eliminados.

Desta forma, constrói-se um sistema de equações, uma para cada variável em cada nó. Ao número de variáveis calculadas em cada nó dá-se o nome de número de graus de liberdade por nó. As duas equações da conservação da quantidade de movimento são fortemente acopladas pelos termos de convecção, de penalidade e de difusão, quando se usa a forma conservativa, e constituem, por isso, um sistema de equações único. Já a equação da conservação da energia, apesar de acoplada às outras através da variação da viscosidade com a temperatura e através do trabalho mecânico, é resolvida separadamente. Ao final de cada passo de tempo, os resultados são utilizados para a atualização dos valores da viscosidade e do trabalho mecânico. As equações a nível de elemento ficam

$$\{L^1\} + \{[A] + 2[D^{11}] + [D^{22}] + [P^{11}]\}\{v_1\} + \{[D^{21}] + [P^{12}]\}\{v_2\} = \{F^1\} \tag{32}$$

$$\{L^2\} + \{[A] + [D^{11}] + 2[D^{22}] + [P^{22}]\}\{v_2\} + \{[D^{12}] + [P^{21}]\}\{v_1\} = \{F^2\} \tag{33}$$

$$\{L^T\} + \{[A] + [D]\}\{T\} + \{Q\} + \{W\} = \{F^T\} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
\text{onde } L_i^1 &= \int_{\Omega_e} \rho \phi_i \frac{\partial v_1}{\partial t} d\Omega_e; \quad L_i^2 = \int_{\Omega_e} \rho \phi_i \frac{\partial v_2}{\partial t} d\Omega_e; \quad L_i^T = \int_{\Omega_e} \rho c_p \phi_i \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega_e \\
A_{ij} &= \int_{\Omega_e} (\phi_i v_{kl}) \phi_j \frac{\partial \phi_j}{\partial \phi_k} d\Omega_e \\
D_{ij}^{kl} &= \int_{\Omega_e} \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_l} d\Omega_e \\
P_{ij}^{kl} &= \int_{\Omega_e} \alpha \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_l} d\Omega_e \\
D_{ij} &= \int_{\Omega_e} k \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_k} d\Omega_e \\
F_i^1 &= \int_{\Gamma_e} \phi_i t_1 d\Gamma_e; \quad F_i^2 = \int_{\Gamma_e} \phi_i t_2 d\Gamma_e; \quad F_i^T = \int_{\Gamma_e} \phi_i q d\Gamma_e \\
& \quad i, j = 1, 4; \quad k, l = 1, 2
\end{aligned}$$

e  $v_{1j}$ ,  $v_{2j}$  e  $T_j$  são os valores nodais das componentes de velocidade e da temperatura respectivamente. Os coeficientes foram definidos no capítulo 2, bem como os termos de fonte distribuída de calor  $Q$  e de dissipação viscosa  $W$ . Estes últimos têm valor constante no elemento.

A seguir, soma-se a contribuição de cada elemento para montar o sistema final a ser resolvido para a determinação dos valores nodais das variáveis. Também aqui as equações das duas componentes de velocidade formam um mesmo sistema global, enquanto a equação de conservação de energia gera um sistema próprio a ser resolvido separadamente.

O sistema assim montado ainda não está em sua forma final. Note-se, por exemplo, que os termos de derivada temporal ainda não foram discretizados. Da mesma forma, outros termos merecem atenção especial, pois tendem a comprometer a solução do problema se tratados da forma convencional de Galerkin. Este é o caso dos termos de convecção e de penalidade. Além desses tópicos, a obtenção dos valores nodais da pressão e o processo iterativo escolhido para a resolução dos sistemas de equações (método dos gradientes conjugados) também serão objeto de análise em itens deste capítulo.



### 3.1 - INTEGRAÇÃO NO TEMPO

Nas equações (32) a (34), os termos das derivadas temporais das componentes de velocidade foram conservados em sua forma diferencial, enquanto na discretização do domínio espacial através do método dos elementos finitos foram substituídas todas as derivadas espaciais por operadores discretos. As equações assim ainda não constituem um sistema de equações algébricas, mas permanecem um conjunto de equações diferenciais ordinárias no tempo. A forma usual de discretização destas equações no tempo recebe o nome de método *semidiscreto* [10] e consiste em substituir a derivada temporal por um operador temporal de diferenças finitas. Antes desta substituição, faz-se uso das funções interpoladoras para que se possa trabalhar com valores nodais da derivada, no lugar de uma função contínua, da mesma forma usada nas equações (31), e tem-se

$$\frac{\partial v_i(X,t)}{\partial t} = \phi_j(X) \dot{v}_{ij}(t) \quad (35)$$

$$\frac{\partial T(X,t)}{\partial t} = \phi_j(X) \dot{T}_j(t) \quad (36)$$

$$i = 1,2 ; j = 1,4$$

onde  $\dot{v}_{ij}(t)$  e  $\dot{T}_j(t)$  são as derivadas temporais de  $v_i$  e  $T$  calculadas no nó  $j$  por uma diferença finita. Para implementar este processo de discretização de forma genérica, emprega-se um esquema que aproxima a derivada através de uma média ponderada entre dois passos de tempo consecutivos, na forma

$$\theta \{\dot{V}\}_{n+1} + (1-\theta) \{\dot{V}\}_n = \frac{\{V\}_{n+1} - \{V\}_n}{\Delta t} \quad (37)$$

$$\theta \{\dot{T}\}_{n+1} + (1-\theta) \{\dot{T}\}_n = \frac{\{T\}_{n+1} - \{T\}_n}{\Delta t} \quad (38)$$

onde  $\{ \}_n$  = valor do vetor de variáveis nodais ou de suas derivadas temporais no instante  $t=t_n$

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n$$

$$0 \leq \theta \leq 1$$

O parâmetro  $\theta$  determina o tipo de aproximação temporal que será utilizada. Alguns determinados valores caracterizam esquemas clássicos de discretização no tempo, quais sejam

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{- Euler, diferença ascendente (Euler explícito)} \\ 1/2 & \text{- Crank-Nicolson} \\ 2/3 & \text{- Galerkin} \\ 1 & \text{- totalmente implícito, diferença descendente (Euler implícito)} \end{cases}$$

Os esquemas de Crank-Nicolson, de Galerkin e totalmente implícito são conhecidos por garantirem a estabilidade da solução para qualquer valor de  $\Delta t$  adotado, em sistemas lineares. O esquema de Crank-Nicolson é o que estabelece a relação ótima entre a estabilidade da formulação variacional e a do método numérico. Já o esquema de Euler é estável, desde que se respeite determinada condição limite de proporcionalidade entre o passo de tempo  $\Delta t$ , a velocidade  $V$  e um comprimento característico de cada elemento finito  $h$ . O parâmetro adimensional que rege esta proporcionalidade é conhecido como número de Courant

$$Co = \frac{V \Delta t}{h} \quad (39)$$

e deve ser menor que 1 em todos os elementos para que a esquema de Euler seja estável.

Para se obter afinal o sistema de equações algébricas almejado, substitui-se primeiramente as relações das equações (35) e (36) nos vetores dos termos de derivadas temporais,  $\{L^1\}$ ,  $\{L^2\}$  e  $\{L^T\}$ , das equações (32) a (34). A seguir isola-se nestas equações os vetores de valores nodais das derivadas, avaliados no instante correspondente, e substitui-se esta relação obtida nos termos do lado esquerdo das equações (37) e (38). Os termos são então reagrupados em função das variáveis avaliadas no mesmo instante e pode-se escrever

$$\begin{aligned}
& \left( [M] + \theta \Delta t ( [A] + [DP^{11}] ) \right) \{v_1\}_{n+1} + \theta \Delta t [DP^{12}] \{v_2\}_{n+1} = \\
& = \left( [M] - \Delta t(1-\theta) ( [A] + [DP^{11}] ) \right) \{v_1\}_n - \Delta t(1-\theta) [DP^{12}] \{v_2\}_n + \\
& + \Delta t \{F^1\}_n \quad (40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( [M] + \theta \Delta t ( [A] + [DP^{21}] ) \right) \{v_2\}_{n+1} + \theta \Delta t [DP^{22}] \{v_1\}_{n+1} = \\
& = \left( [M] - \Delta t(1-\theta) ( [A] + [DP^{21}] ) \right) \{v_2\}_n - \Delta t(1-\theta) [DP^{22}] \{v_1\}_n + \\
& + \Delta t \{F^2\}_n \quad (41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( c_p [M] + \theta \Delta t ( [A] + [D] ) \right) \{T\}_{n+1} = \\
& = \left( c_p [M] - \Delta t(1-\theta) ( [A] + [D] ) \right) \{T\}_n + \Delta t \left( \{Q\}_n + \{W\}_n + \{F^T\}_n \right) \quad (42)
\end{aligned}$$

onde  $M_{ij} = \int_{\Omega_e} \rho \phi_i \phi_j \, d\Omega_e$

$$[DP^{11}] = 2[D^{11}] + [D^{22}] + [P^{11}]$$

$$[DP^{12}] = [D^{21}] + [P^{12}]$$

$$[DP^{21}] = [D^{11}] + 2[D^{22}] + [P^{22}]$$

$$[DP^{22}] = [D^{12}] + [P^{21}]$$

e demais matrizes e vetores definidos no item anterior.

A solução do sistema algébrico assim gerado implica a necessidade de inversão das matrizes de coeficientes dos vetores de velocidades e da temperatura no instante  $n+1$ . Os vetores das variáveis no instante  $n$  são conhecidos do passo de tempo anterior, ou, no caso do primeiro passo de tempo, das condições iniciais.

Se o parâmetro de discretização temporal  $\theta$  for nulo, caracterizando o esquema de Euler, então a matriz de coeficientes será simétrica, positiva-definida e de coeficientes constantes. Mas, para qualquer valor de  $\theta$  diferente de zero, a matriz a ser invertida passa a ser não-simétrica e seus coeficientes dependem da velocidade, tornando o sistema não-linear. A perda da simetria e da linearidade, tão importantes para uma resolução relativamente rápida e eficiente, deve-se exclusivamente à contribuição do termo convectivo. As vantagens

representadas por uma maior eficiência computacional (em termos de tempo e memória ocupada) na resolução do sistema de equações são tão importantes, que neste trabalho se decidiu tratar o termo convectivo de uma forma especial em relação ao tempo, de modo que sua contribuição se concentre exclusivamente no vetor do lado direito do sistema a ser invertido [16]. Com esta alteração, o sistema perde a propriedade de estabilidade incondicional, qualquer que seja o esquema de discretização no tempo adotado, pois, na verdade, trata-se de um sistema não-linear, em que o vetor do lado direito depende do valor da velocidade. Mas a experiência numérica (ver Gresho [16]) demonstra que os limites de estabilidade para  $\Delta t$  são suficientemente elevados para que predominem as vantagens acarretadas pela alteração. Maiores detalhes sobre a forma de eliminação do termo convectivo da matriz de coeficientes serão fornecidos quando do detalhamento do método iterativo de solução do sistema, o método de gradientes conjugados, no item 3.5.

A escolha do parâmetro de discretização temporal  $\theta$ , além de exercer influência direta sobre os limites de estabilidade impostos ao método, também tem outra importante influência sobre os resultados. Conforme foi observado por Awruch [4] e por Young e Ni [39] entre outros, um valor de  $\theta$  superior a 0,5 introduz um efeito de amortecimento nos resultados e um retardamento na fase de ondas transportadas pelo escoamento. Este comportamento equivale a um incremento no valor da viscosidade do fluido em relação ao seu valor físico. Este é o caso, por exemplo, do esquema de Galerkin e, com maior evidência, do esquema totalmente implícito. Por outro lado, o esquema de Crank-Nicolson, no qual  $\theta=0,5$ , apresenta o menor nível de amortecimento numérico dentre os métodos mais estáveis, isto é, que admitem o uso de um passo de tempo  $\Delta t$  relativamente elevado. Esta influência do valor de  $\theta$  foi verificada neste trabalho e conduziu à preferência pelo esquema de Crank-Nicolson.

### 3.2 - TERMO DE PENALIDADE

Carey e Oden [8] mostram que o sistema constituído pelas equações (40) e (41) é sobre-determinado, ou, nas palavras de Engelman et al. [14], "há mais restrições impondo a continuidade do que velocidades para satisfazê-la". Com isso a formulação deixa de ser consistente, pois a solução aproximada obtida não tende à solução exata. Ao invés disso, as variáveis são compelidas à solução trivial. Isto ocorre porque o termo de penalidade nas equações estabelece uma alteração na escala do problema [31]. Para possibilitar a visualização disso, pode-se imaginar o sistema gerado pelas equações de conservação da quantidade de movimento como constituído pela soma de duas matrizes

$$[ K_1 + \alpha K_2 ] (V)_{n+1} = \{ F \} \quad (43)$$

A primeira matriz  $K_1$  resulta do agrupamento de todos os termos das equações, exceto os termos de penalidade, os quais são agrupados exclusivamente na matriz  $K_2$ . Conseqüentemente, tem-se

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\alpha} K_1 + K_2 \right] (V)_{n+1} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\alpha} F \right\} = 0 \quad (44)$$

Se o valor de  $\alpha$  for muito grande, obtém-se  $(V) = \{0\}$ . Se o valor de  $\alpha$  for muito baixo, a restrição da continuidade não é satisfeita a contento. Mesmo com os valores moderados usados na efetiva aplicação do método, os termos de penalidade predominam sobre os demais, conduzindo o sistema à solução trivial.

Para contornar o problema, a matriz  $K_2$  deve ser singular, pois, sendo não-inversível, torna o sistema indeterminado no limite  $\alpha \rightarrow \infty$ . Desta forma, a matriz  $K_2$  permite às variáveis assumirem solução diferente da trivial. O sistema completo, no entanto, continua tendo solução única, porque a matriz  $K_1$  é não-singular e garante a inversibilidade da matriz resultante.



Uma forma de tornar a matriz  $K_2$  singular e recuperar a consistência da formulação consiste no emprego do método da integração reduzida seletiva do termo de penalidade, sugerida por diversos autores [1,8,31]

A integração reduzida recebe este nome por se integrar os termos da equação variacional a nível de elemento, usando a integração numérica com um grau inferior ao necessário para se obter o valor exato da integral. Lembrando-se que as variáveis, no método descrito, são aproximadas por funções compostas por polinômios lineares, a integração reduzida traduz-se no emprego de um método de quadratura que seja exato apenas para funções constantes. Como a integração reduzida, neste caso, se aplica apenas a um dos termos da equação, o termo da penalidade, diz-se que ela é seletiva.

Reddy [32] mostrou que o tipo de método de quadratura empregado na integração reduzida tem influência decisiva na obtenção de consistência para a formulação. Por exemplo, o emprego da quadratura de Gauss mostrou resultados satisfatórios, enquanto a integração pela regra do trapézio conduziu a soluções errôneas. No mesmo trabalho, Reddy conclui que a formulação de penalidade que emprega interpolação bilinear das variáveis e integração reduzida do termo de penalidade se equivale à formulação mista (descrita no item 2 do capítulo 2), quando nesta se adota funções interpoladoras bilineares para as velocidades e constantes para a pressão. A mesma conclusão é demonstrada por Engelman et al.[14] em trabalho publicado simultaneamente.

No presente trabalho, empregou-se a quadratura de um ponto de Gauss para a integração reduzida do termo de penalidade.

Engelman et al.[14] alertam para o fato de que uma discretização mais consistente e rigorosa do termo de penalidade exige que se projete separadamente no espaço discreto as duas derivadas envolvidas na forma fraca do termo. Chega-se assim, na

forma final, a um produto de três matrizes que descrevem o termo de penalidade a nível de elemento, sendo que uma dessas exige uma operação de inversão. As conclusões de Engelman et al.[14] mostram que a formulação consistente é mais precisa e até mais econômica, quando se emprega elementos e funções interpoladoras de ordem superior a um, que não é o caso presente. Por outro lado, no trabalho citado demonstra-se que a aplicação da integração reduzida, que exige o cálculo de uma única matriz para representar o termo a nível local, é idêntica à formulação consistente no caso de elementos bilineares, fornecendo a mesma precisão com custo computacional mais baixo. Esta conclusão subsidia a opção feita no presente trabalho, em favor da integração reduzida.

### 3.3 - TERMO DA CONVECÇÃO

A aplicação do método de elementos finitos à formulação variacional de Galerkin, que utiliza as mesmas funções para ponderar os resíduos e para aproximar as variáveis, equivale ao emprego de diferenças finitas centrais na aproximação dos operadores diferenciais [6]. Um problema que afeta este tipo de aproximação é o surgimento de oscilações não físicas, quando se simula escoamentos com convecção dominante, as quais podem comprometer a solução em todo o domínio. A causa destas oscilações está na representação inadequada do termo convectivo. Diversos aspectos podem ser enfocados para se compreender este fato.

Do ponto de vista matemático, nota-se que a aproximação de um operador diferencial de primeira ordem (caso do termo convectivo) através de diferença central enfraquece, ou até retira do sistema de equações, a desejável propriedade de diagonal principal dominante. Já na aproximação por elementos finitos do tipo Galerkin, ocorre a perda da simetria na matriz de rigidez resultante, sendo a assimetria proporcional à importância



do termo convectivo. Ambos os fatos podem ser citados com causa da perda da estabilidade dos resultados.

Do ponto de vista físico, a convecção se caracteriza por ser um transporte unidirecional de determinada propriedade ou fator. Como tal, o valor da propriedade transportada em um ponto só pode receber influência convectiva de um outro ponto a montante no escoamento. E o ponto citado, por sua vez, só poderá exercer influência sobre um ponto a jusante em relação a ele, jamais a montante. Essa é a essência da definição de "coordenada de mão única", expressão introduzida por Spalding (segundo Patankar [27]). Ocorre que a representação do termo convectivo, que é um "termo parabólico" (outra definição de Spalding), através de diferenças centrais ou da formulação de Galerkin transmite influência convectiva de jusante para montante, o que é fisicamente falso. Também é correto dizer que, em muitas situações, quando ocorre tanto difusão como convecção, este tipo de discretização diminui artificialmente a difusão na direção do escoamento ou da linha de corrente [6].

A única forma de resolver o problema citado sem alterar a formulação adotada é refinar drasticamente a malha de pontos, de forma a fazer com que, a nível de elemento, o transporte difusivo predomine sobre o transporte convectivo. O parâmetro adimensional que estabelece a relação entre esses dois tipos de transporte é o número de Peclet local:

$$Pe = \frac{\rho v h}{2 K} \quad (45)$$

onde  $v$  = velocidade característica do elemento - [m/s]

$h$  = dimensão característica do elemento - [m]

$K$  = coeficiente de difusão (viscosidade dinâmica ou relação condutividade/calor específico) - [kg/m s]

sendo que  $|Pe| > 1$  caracteriza predominância do transporte convectivo sobre o difusivo. No caso de  $K = \mu$ , o número de Peclet equivale a um número de Reynolds local da malha. O refinamento da

malha exigido para se obter estabilidade tende a ser muito maior do que o exigido para representar corretamente os gradientes e demais características do escoamento, implicando grande aumento do custo computacional da solução.

Na simulação com diferenças finitas, há muito<sup>c</sup> se descobriu que representando o termo convectivo através de diferença ascendente ou descendente, conforme o sentido do escoamento, obtinha-se uma solução estável e sem oscilações espúrias na velocidade. A diferença em questão é sempre efetuada entre o nó central e o nó a montante deste, sendo assim dependente do sentido do escoamento, e recebe por isso o nome de diferença *upwind*, que pode ser traduzida por diferença "a montante" ou "a barlavento".

A desvantagem que acompanha esta técnica é a perda de precisão, uma vez que a diferença "a montante" é uma aproximação de primeira ordem, enquanto a diferença central é de segunda ordem. Esta perda de precisão se manifesta na forma de um excesso de difusão. Na verdade, o uso de diferença "a montante" no termo convectivo equivale à formulação com diferenças centrais, na qual se tenha acrescentado um termo artificial ao coeficiente de difusão ou à viscosidade, termo este que depende da velocidade e do espaçamento entre os nós. O acréscimo na viscosidade tenta compensar a perda da mesma acarretada pela formulação com diferenças centrais, mas na verdade, a diferença "a montante" mais do que compensa e peca por excesso. Mesmo quando se compensa este excesso, ficando-se mais próximo do valor físico exato da viscosidade na direção do escoamento, ocorre o sério inconveniente de se acrescentar difusão ou viscosidade também na direção perpendicular ao escoamento, nos casos de simulação bi- ou tridimensional.

No emprego do método dos elementos finitos, têm sido

---

<sup>c</sup>Roache [35] cita casos de aplicação da diferença "a montante" já na década de 50.

propostas diversas formas de se obter o efeito "a montante" (a expressão originada das diferenças finitas foi conservada) no termo da convecção. Desde as primeiras tentativas, o caminho mais explorado tem sido o de alterar a forma das funções de peso ou de teste na formulação variacional do problema. Busca-se ponderar o nó a montante com um peso maior do que o nó a jusante. Se as funções de peso modificadas são aplicadas a todos os termos da equação, então se obtém uma formulação consistente de Petrov-Galerkin. Entre os trabalhos desenvolvidos neste sentido, pode-se citar os de Christie et al., Heinrich et al. (referidos em [6]) e Hughes e Brooks [19]. Outras técnicas ainda têm sido exploradas, como, por exemplo, a modificação na regra de quadratura usada na integração do termo de convecção (em Hughes, referido em [6]).

Infelizmente as formulações existentes padecem dos mesmos problemas enfrentados por pesquisadores que empregam as diferenças finitas. O balanceamento correto do acréscimo de viscosidade, seja de forma explícita, seja pela escolha da melhor alteração na função de peso, e a eliminação da difusão artificial transversal ao escoamento são desafios que levaram ao desenvolvimento das técnicas mais recentes.

Na tentativa de evitar o surgimento de difusão artificial transversal ao escoamento, surgiram métodos que atuam na direção da linha de corrente, sendo o SUPG de Brooks e Hughes [6], o mais popular entre os que empregam a formulação de Petrov-Galerkin. Mesmo recebendo intenso e continuado esforço de desenvolvimento, estes métodos ainda não resolveram completamente o problema, apresentando pequena quantidade de difusão transversal artificial, oscilações diante de gradientes muito severos e, principalmente, um acréscimo geral na viscosidade em problemas transientes e/ou com termos de fonte.

Em 1985, Rice e Schnipke [33] apresentaram uma nova proposta que deriva da interpretação física do termo de convecção e tem as vantagens de não apresentar oscilações mesmo diante de gradientes severos, podendo captar descontinuidades, e ser de

fácil implementação em programas de elementos finitos que empregam a formulação tradicional de Galerkin, pois altera somente o cálculo do termo de convecção e não toda a equação, como nas formulações de Petrov-Galerkin. Devido a estas vantagens, optou-se por implementar no presente trabalho esta técnica, que doravante será chamada de MSU (mnemônico para *Monotone Streamline Upwind*). A seguir será feita breve descrição da fundamentação e do método.

Na ausência de efeitos de difusão e fontes no regime permanente, o transporte convectivo de determinada propriedade  $\phi$  pode ser descrito na forma unidimensional como

$$\rho \mathbf{v}_s \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0 \quad (45)$$

onde  $s$  é a direção da linha de corrente,  $\mathbf{v}_s$  o vetor velocidade que é tangencial à mesma e  $\rho$  é a massa específica. Note-se que, nestas condições, o valor de  $\phi$  é constante ao longo de uma linha de corrente. Assume-se que, no caso geral, em um elemento vale

$$\rho \mathbf{v}_s \frac{\partial \phi}{\partial s} = \text{constante} \quad (46)$$

de forma que o termo de convecção, no contexto do método dos elementos finitos, pode ser facilmente avaliado fazendo-se

$$\left[ \rho \mathbf{v}_s \frac{\partial \phi}{\partial s} \right] \int_{\Omega_e} \phi \, d\Omega_e \quad (47)$$

Para implementar este método deve-se identificar quais são os nós a jusante em cada elemento. Usando como referência a figura 3.1, um nó é considerado de jusante, se satisfaz as seguintes condições

$$\begin{aligned} & -v_j \Delta x^- + u_j \Delta y^- \geq 0 \\ \text{e} & \\ & v_j \Delta x^+ - u_j \Delta y^+ \geq 0 \end{aligned} \quad (48)$$

as quais também podem ser expressas na forma

$$\frac{\Delta y^+}{\Delta x^+} \leq \frac{v_j}{u_j} \leq \frac{\Delta y^-}{\Delta x^-} \quad (49)$$

Isto equivale a dizer que um nó é considerado de jusante, quando o vetor oposto ao vetor velocidade no nó apontar para dentro do elemento ou estiver sobre um dos lados adjacentes ao nó. Baseado nesta definição, no caso de escoamento incompressível, um elemento quadrilátero bilinear pode ter, no máximo, dois de seus nós como nós de jusante.

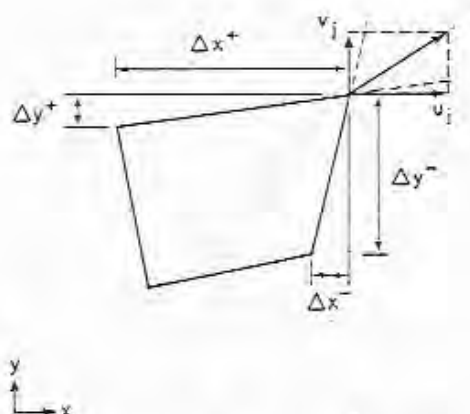


Figura 3.1 - Identificação do nó de jusante.

Uma vez que se tenha determinado um nó de jusante, que será chamado de nó  $j$ , é preciso calcular aproximadamente a posição do ponto de montante, em que a linha de corrente do nó  $j$  atravessa um dos lados do elemento. Para isso, faz-se uso de fatores de interpolação proporcionais ao fluxo de massa em cada lado do elemento e relativos ao nó de jusante em consideração, como se pode ver no Apêndice II. Rice e Schnipke [33] propõe formas de cálculo destes fatores de interpolação. No presente trabalho, foi feita uma análise e concluiu-se pela inconveniência da forma proposta, adotando-se um cálculo diferente e ampliando-se a formulação para considerar o caso em que o ponto de montante está no lado adjacente ao nó de jusante. Detalhes a respeito dos fatores de interpolação e da determinação do ponto de montante podem ser encontrados no Apêndice II deste trabalho.



Dispondo-se de uma aproximação do ponto de montante, suas coordenadas são designadas  $x'$  e  $y'$  e o vetor velocidade, neste ponto,  $v'$ . O termo da convecção, representado pela matriz [A] nas equações (32) a (34), é aproximado da seguinte forma

$$\frac{\rho \bar{v}_s}{\Delta s} (\varphi_j - \varphi') \int_{\Omega_0} \phi_j d\Omega_0 \quad (49)$$

onde  $\varphi$  = valor de  $\varphi$  (veloc. ou temp.) no nó de jusante

$\varphi_j$  = valor de  $\varphi$  (veloc. ou temp.) no ponto de montante

$\phi_j$  = função de peso correspondente ao nó  $j$

$$\bar{v}_s = \frac{(v_j + v')}{2}$$

$$\Delta s = \sqrt{(x_j - x')^2 + (y_j - y')^2}$$

O valor de  $\varphi'$  pode ser escrito em função do valor de  $\varphi$  nos nós e a equação (49) dá origem a uma nova matriz [A] correspondente ao termo convectivo a nível de elemento. A forma final da matriz de convecção pode ser encontrada no Apêndice II.

O emprego do método MSU no presente trabalho, mostrou que o mesmo é muito sensível a alguns casos de não cumprimento da condição de divergência nula no elemento, mesmo que o erro esteja dentro dos limites toleráveis. Em tais casos, mais comuns nos passos de tempo iniciais, recorreu-se de forma alternativa ao cálculo pelo método tradicional de Galerkin, como descrito nas equações (32) a (34).

### 3.4 - CÁLCULO DA PRESSÃO

O método da função de penalidade aplicado à resolução das equações de Navier-Stokes no caso incompressível caracteriza-se por eliminar a pressão dentre as variáveis primárias do problema, reduzindo assim a dimensão do sistema de equações a resolver.



Como já foi visto na apresentação da formulação variacional no item 5 do Capítulo 2, a pressão pode ser calculada após a obtenção do campo de velocidades pela multiplicação, expressa na equação (30), entre o parâmetro de penalidade  $\alpha$  e a divergência do vetor velocidade, que não é exatamente nula neste método. Esta equação foi obtida a partir de uma relação entre o multiplicador de Lagrange e o termo de penalidade, tendo assim estreita ligação com este. O problema da presente formulação é que ela exige a integração reduzida do termo de penalidade, como foi visto no item 2 deste capítulo, e a pressão, calculada a partir deste, recebe apenas um valor computado no ponto central do elemento. Desta forma, obtém-se um valor constante da pressão em todo o elemento e fica mais evidente a equivalência citada no item 2 entre o método da penalidade com integração reduzida e a formulação mista com pressão constante. Para aplicações práticas em engenharia, deseja-se normalmente uma representação mais detalhada da pressão, o que conduz à necessidade de se interpolar ou extrapolar os valores dos elementos para a malha de nós, lembrando sempre que, de princípio, a pressão não está definida nos nós, por não haver continuidade no seu valor entre elementos.

Além da necessidade de transferência dos valores da pressão dos elementos para os nós, existe outra dificuldade decorrente da escolha feita para o tipo de elemento. Os elementos quadriláteros isoparamétricos bilineares são conhecidos por apresentarem maus resultados para a pressão em muitos problemas, seja na formulação mista com pressão constante, seja na formulação de penalidade com integração reduzida. No estudo básico feito por Reddy [32], em que foram comparadas diversas variantes da formulação de penalidade e diversas regras de integração reduzida, empregando sempre o elemento em questão, o campo de pressões apresentou um padrão oscilatório, conhecido como "tabuleiro de xadrez", em todos os modelos testados. Carey e Oden [8] classificam o elemento quadrilátero com interpolação bilinear da velocidade e constante da pressão como apresentando tipicamente resultados instáveis para esta variável. Baseado na

equivalência demonstrada por Engelman et al.[14], o elemento empregado no presente trabalho também deve merecer tal classificação. Afortunadamente este comportamento da pressão não implica diminuição da qualidade dos resultados da velocidade.

Tendo em vista estas questões, foi implementado no programa um método que simultaneamente interpolasse o campo de pressões para os nós e suavizasse suas oscilações. Langtangen [25] sugere um método de suavização nodal local, baseado no método de mínimos quadrados, desenvolvido especialmente para elementos multilíneares. Aplicando-se o método ao presente caso, define-se uma função de interpolação bilinear (vale a notação indicial)

$$p = \bar{p} + G_i (x_i - \bar{x}_i) \quad i = 1,2 \quad (50)$$

onde  $p$  é a função que se deseja interpolar, no caso é a pressão,  $G_i$  é o gradiente de  $p$  na direção  $i$ ,  $x_i$  são as coordenadas do ponto de cálculo de  $p$  e  $\bar{p}$  é um valor de pressão conhecido no ponto de coordenadas  $\bar{x}_i$ . Os pontos com valor conhecido de  $p$  serão os centróides dos elementos vizinhos ao nó que se deseja interpolar, sendo a quantidade deles igual a  $k$ . Constrói-se então um problema de mínimos quadrados, empregando os seguintes coeficientes

$$\eta_0^j = 1 ; \quad \eta_i^j = \bar{x}_i^j \quad j = 1, \dots, k \quad \text{e} \quad i = 1,2 \quad (51)$$

Os valores de  $G_i$  são determinados pela solução do seguinte sistema

$$A_{ri} G_i = a_r \quad (52)$$

onde  $r = 0,1,2$

$$A_{ri} = \eta_r^j \eta_i^j \quad j = 1, \dots, k$$

$$a_r = \bar{p}_j \eta_i^j \quad j = 1, \dots, k$$

Calcula-se desta forma a pressão para todos os nós

interiores do domínio. Para os nós no contorno, extrapola-se o valor do centróide mais próximo, usando a equação (50).

Foi também experimentado um suavizador baseado num sistema de mínimos quadrados global, empregando a matriz de massa (matriz [M] das equações (40) a (42)). Este método é sugerido por Zienkiewicz e Taylor [41], mas apresentou resultados piores que os do método de suavização nodal local descrito acima.

### 3.5 - GRADIENTES CONJUGADOS

Foram expostos até este ponto todos os detalhes da transformação do problema variacional aproximado em sistemas de equações algébricas da forma

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (53)$$

onde A e b são, respectivamente, a matriz de coeficientes e o vetor do "lado direito" e x é o vetor de valores nodais a determinar. No caso do sistema de cálculo das velocidades, como se verá mais adiante, o vetor b é tratado como dependente do vetor de variáveis x, a fim de se levar em conta a não-linearidade do problema, devido a que os termos convectivos estão contidos em b.

Para resolver sistemas de equações, deve-se optar primeiramente entre dois grandes caminhos: uso de métodos de solução direta ou de métodos iterativos. Apesar do amplo emprego que as técnicas de solução direta têm encontrado na aplicação do método dos elementos finitos a problemas lineares da mecânica dos sólidos e da transferência de calor, serão enumeradas diversas vantagens dos métodos iterativos, que os recomendam à aplicação na solução de problemas da mecânica dos fluidos:

a - métodos iterativos exigem menor capacidade de memória

central para o cálculo da solução. Isto possibilita resolver sistemas com grande número de equações, sem precisar recorrer ao armazenamento de matrizes e vetores em memória auxiliar, que tem um custo muito elevado em tempo de leitura e gravação de dados. Além disso, a quantidade de memória necessária é conhecida e bem determinada, ao passo que, em métodos de solução direta, normalmente se emprega formas compactas de armazenamento das matrizes de coeficientes e é quase impossível prever-se o quanto será esparsa sua inversa ou a matriz de retrossubstituição resultante, podendo até ser completamente cheia.

*b* - métodos iterativos têm-se mostrado mais eficientes na solução de sistemas muito grandes, sendo, além disso, mais fáceis de programar.

*c* - pode-se fazer uso de aproximações conhecidas da solução para acelerar a convergência e diminuir o número de iterações.

*d* - os algoritmos iterativos prestam-se melhor ao aproveitamento dos novos recursos computacionais, em particular, a vetorização e a paralelização.

*e* - conforme a técnica iterativa empregada, pode-se incorporar a não-linearidade ao processo de maneira relativamente fácil.

Dentre os métodos iterativos, o método dos gradientes conjugados (MGC) vem-se destacando por estar sendo cada vez mais empregado em conjunto com algoritmos de simulação de escoamentos baseados no método dos elementos finitos [30].

Argyris et al.[3] mostram uma comparação entre o MGC com preconditionamento e o método de atualização de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno com busca por linhas. Após a aplicação em problemas de condução de calor, convecção natural e forçada, eles concluem pela superioridade do MGC em termos de ocupação de memória e tempo de processamento até a convergência. Jennings e Malik [22], por sua vez, comparam o MGC com outros métodos iterativos, quais sejam, o famoso método da sobre-relaxação sucessiva (SOR), baseado no algoritmo de Gauss-Seidel, o método da relaxação dinâmica e o método de Jacobi com aceleração de Chebyshev. Da comparação, baseada na solução de

seis exemplos, conclui-se à primeira vista que o MGC apresenta eficiência no máximo semelhante aos demais métodos, por vezes até bem inferior à do método SOR, quando neste se utiliza o parâmetro de relaxação ótimo. Destaca-se aqui, no entanto, o fato de a performance do MGC não depender de qualquer parâmetro estabelecido externamente ao algoritmo, enquanto os demais não apenas dependem da escolha de um ou dois parâmetros para atingirem a solução, como também têm sua taxa de convergência fortemente influenciada por estes. Esta característica confere ao MGC maior confiabilidade e o classifica como um método robusto para a solução de sistemas que podem apresentar grandes variações de um passo de tempo para outro. Além disso, pode-se levar em conta não-linearidades do problema, como no caso do termo convectivo nas equações de conservação da quantidade de movimento, sem qualquer alteração no algoritmo.

Jennings [21] apresenta uma exposição detalhada do MGC, enquanto Jennings e Malik [22] demonstram a eficácia da aplicação de pré-condicionadores ao sistema de solução. Proposto por Hestenes e Stiefel (como citado em [16] e [3]), o método se presta à solução de sistemas em que a matriz de coeficientes  $A$  é simétrica e positiva-definida.

A resolução de um sistema de  $n$  equações por um método iterativo equivale à minimização de uma função de erro definida num espaço  $n$ -dimensional. O MGC busca este ponto de mínimo global através do cálculo de uma série de mínimos locais, definidos ao longo de retas, cujas direções são dadas pelos vetores  $p_0$ ,  $p_1$ , etc no espaço  $n$ -dimensional. O termo "conjugados" significa que os vetores direcionais  $p_i$  são ortogonais entre si com relação a  $A$  e, portanto, vale

$$(p_i)^T [A] (p_j) = 0 \quad \text{para } i \neq j \text{ e } i, j = 1, \dots, n \quad (54)$$

Como consequência desta propriedade, a solução exata é obtida teoricamente após  $n$  passos do algoritmo. Na prática, porém, aproximações com precisão razoável são obtidas em um



número de passos muito menor do que o teórico, o que faz o método ser tratado como iterativo, interrompendo-se o processo quando o erro em uma norma apropriada for menor que uma dada tolerância.

Pode-se demonstrar que a taxa de convergência do MGC depende da relação entre o maior e o menor autovalor da matriz de coeficientes  $A$  do sistema. Quanto mais próximos estes autovalores, ou seja, quanto mais agrupado estiver todo o conjunto de autovalores, menor será o número de iterações necessárias para atingir a convergência.

Buscando aumentar a eficiência do MGC, Jennings e Mallik [22] sugerem e comparam a aplicação de diversos pré-condicionadores que levam o método a resolver um sistema transformado, em que os autovalores estão mais agrupados e cujas taxas de convergência são, portanto, mais elevadas. Argyris et al.[3] observaram ganhos semelhantes na taxa de convergência, quando da aplicação de diferentes tipos de pré-condicionadores a problemas da mecânica dos fluidos e, em consequência, sugerem a adoção do tipo mais simples, que consiste numa alteração de escala pelo uso da diagonal principal da matriz. Alquatti [2] também realizou comparação semelhante em problemas da mecânica dos sólidos, concluindo que, apesar de apresentarem melhores taxas de convergência, outros pré-condicionadores têm um custo computacional bem mais alto, deixando o da diagonal principal com a melhor eficiência geral (melhor relação custo/benefício). Além disso, a programação do MGC com pré-condicionador diagonal requer o armazenamento de apenas quatro vetores adicionais.

Como já foi mencionado no item 3.1, os sistemas inicialmente formados, tanto para as velocidades, como para a temperatura, possuem matrizes de coeficientes não-simétricas, devido à presença dos termos convectivos. Para possibilitar o emprego do MGC, as matrizes devem ser tornadas simétricas e isso é feito, tratando-se os termos convectivos de forma explícita, ou seja, levando-os ao lado direito da equação.



Na implementação computacional do MGC, tirou-se proveito da natureza iterativa do método para levar em conta a não-linearidade dos sistemas. No sistema que calcula as velocidades, o caráter não-linear decorre da contribuição do termo convectivo e do acoplamento com a equação da energia, expresso pela variação da viscosidade com a temperatura. Já no sistema que calcula a temperatura, a não-linearidade surge da eventual variação dos coeficientes de calor específico e de condutibilidade térmica com a temperatura. Nos casos da viscosidade e dos coeficientes de calor específico e de condutibilidade, efetua-se uma linearização dentro de cada intervalo de tempo  $\Delta t$ , utilizando-se durante o processo iterativo o valor correspondente ao instante de tempo conhecido  $t_n$  e atualizando-se o valor ao final das iterações.

A não-linearidade do termo convectivo no sistema das velocidades recebe um tratamento diferenciado devido à sua grande importância relativa, especialmente em escoamentos de convecção dominante. Inicialmente a contribuição do termo é aproximada por seu valor no instante conhecido  $t_n$ . A seguir, a cada nova iteração do MGC, o termo é recalculado com os valores das velocidades obtidos na iteração anterior. Como os termos convectivos foram transferidos para o lado direito, faz-se necessário atualizar o vetor do lado direito a cada iteração. Com esta operação, perde-se a propriedade de redução monotônica da norma de erro do método e sua convergência fica bem mais lenta do que na solução de um problema linear. Mas é uma forma computacionalmente barata de lidar com a não-linearidade.

Foram expostos neste capítulo todos os detalhes referentes à implementação computacional do método utilizado. Cabe ressaltar aqui que o programa desenvolvido destina-se à solução do problema transiente acoplado de fluido e calor, mas também é capaz de resolver problemas de escoamento isotérmico ou de condução pura de calor, cada um de forma isolada. No próximo capítulo será apresentado o estudo das características do programa, através da análise de uma série de resultados.

## 4 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS

### 4.1 - PRÉ- E PÓS-PROCESSAMENTO

A simulação de escoamentos com transferência de calor pelo método de elementos finitos, implica a manipulação de um conjunto complexo de dados. O referido método possui características, já parcialmente descritas no Capítulo 1, que o distinguem como uma ferramenta poderosa neste tipo de aplicação, tais como:

- a - possibilidade de trabalhar com domínios irregulares e multiplamente conexos, o que equivale ao estudo de um escoamento com um ou mais objetos imersos;
- b - fácil incorporação de diversos tipos de condições de contorno aplicadas à própria variável ou à sua derivada, de forma concentrada em cada nó ou distribuída nos lados do contorno;
- c - possibilidade de redução do nível de erro da solução através do refinamento automático da malha de discretização.

Ainda que estas características não tenham sido exploradas plenamente no presente trabalho, a perspectiva de continuidade da linha de pesquisa impõe que se tenha em mente estas possibilidades em cada etapa do desenvolvimento. Desta forma pretende-se evitar a duplicação de esforços, permitindo que todo o trabalho realizado possa ser aproveitado nos projetos que se seguirem. Além disso, outros projetos vêm sendo desenvolvidos em paralelo a este, com necessidades semelhantes quanto à preparação dos dados de entrada e quanto à análise dos resultados. Por estas razões, antes de se iniciar o trabalho de programação proposto, foi realizado um estudo cuidadoso da estrutura de dados e estabelecido um padrão suficientemente genérico para ser adotado por todo o grupo interessado.

O pré-processamento de dados em elementos finitos envolve a discretização do domínio pela geração de uma malha de nós e elementos, com respectivas coordenadas e conectividades, e o armazenamento destas e de mais uma série de informações a respeito do domínio discretizado e suas condições iniciais e de contorno. A exigência de malhas com elevado número de nós e elementos, particularmente nos problemas com domínio irregular, obriga a que o processo de geração e armazenamento destas informações seja automatizado. Com este fim, foi adaptado às necessidades e ao padrão da estrutura de dados adotada o programa de geração de malhas publicado primeiramente por Durocher e Gasper [12] e corrigido posteriormente por Liu e Chen [26] e outros citados por estes. Após a adaptação, o gerador de malhas é capaz de produzir malhas regulares de elementos quadriláteros ou triangulares, de interpolar automaticamente condições de contorno e de armazenar em arquivos padronizados as seguintes informações:

- a - coordenadas dos nós;
- b - conectividades dos elementos;
- c - nós de contorno, tipo de contorno do nó (externo ou de objeto imerso), existência de condição de contorno tipo essencial aplicada ao nó e ângulo da normal ao nó;
- d - elementos e lados de elementos de contorno, ordenados em sentido anti-horário e por contorno, e direção das normais aos lados;
- e - elementos "vizinhos" ou associados a cada nó da malha;
- f - nós com condições de contorno de velocidade, pressão e/ou temperatura prescritas (condição essencial) e o valor da respectiva condição;
- g - lados de elementos de contorno com forças prescritas ou com fluxo prescrito de calor (condução, convecção ou radiação).

Obtém-se desta forma os principais dados necessários ao programa de simulação desenvolvido no presente trabalho. Os arquivos que faltam, com condições iniciais e com coeficientes e constantes, são gerados em separado.

A entrada de dados no programa gerador de malhas, no

entanto, é feita através de arquivo seqüencial, uma forma de difícil controle e muito sujeita a erros, quando o arquivo é grande. Para facilitar ainda mais a preparação de novos problemas, foi desenvolvido um programa em linguagem interativa, que guia o usuário no fornecimento dos dados, verifica os mesmos com relação a alguns tipos de erros e facilita o controle e a correção dos dados. Este programa grava ao final o arquivo de entrada para o gerador de malhas.

Muito mais complexa do que a preparação de dados do problema é a análise dos resultados do programa de simulação, chamada de pós-processamento. A simulação de um fenômeno transiente exige o armazenamento de resultados a cada intervalo determinado de tempo, o que pode produzir uma série longa de arquivos de dados. Quando se trata de problemas com grande número de graus de liberdade, o volume de dados a analisar pode assumir proporções apreciáveis (da ordem de megabytes para cada problema). Nas etapas iniciais de teste do programa de simulação, a dimensão reduzida dos problemas permitiu que se empregasse programas simples, capazes de representar perfis e isorregiões de quantidades escalares (pressão e temperatura) e vetores de velocidade, ainda que com limitações, além do histórico de determinada variável no tempo. Todos os programas auxiliares descritos até aqui foram desenvolvidos em colaboração com bolsistas de iniciação científica e com outros mestrandos envolvidos em projetos semelhantes.

A medida que a escala dos problemas crescia, no entanto, crescia também a exigência de uma representação mais precisa dos resultados e com alguns recursos adicionais, como a ampliação, por exemplo. Em associação com o grupo de pesquisas em estruturas do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, obteve-se uma versão adaptada da parte de pós-processamento do programa de análise de estruturas GAELI [17]. Desta forma, pode-se contar com a representação com boa qualidade de valores escalares por isorregiões e de vetores velocidade por setas. Os programas de perfil de valores escalares



o histórico de valor de variáveis no tempo foram aperfeiçoados ao longo do trabalho, incorporando a interpolação de pontos pelo método de Akima e uma estrutura mais flexível e prática de uso.

Por fim, a já tradicional representação de escoamentos por linhas de corrente exige o cálculo a posteriori da função de corrente correspondente ao campo de velocidades em determinado instante de tempo. Para isso foi elaborado um pequeno programa independente que utiliza os arquivos com as componentes de velocidade calculadas para resolver o problema de Poisson correspondente. As condições de contorno dependem do problema em consideração. Os valores nodais da função de corrente calculados são representados por isorregiões, dando o efeito de linhas de corrente.

#### 4.2 - PROGRAMA E ALGORITMO SIMPLIFICADO

O programa computacional, que constitui o núcleo deste trabalho, foi elaborado com base em todas as considerações feitas no Capítulo 3 e foi denominado FESTP (mnemônico para *Finite Element Simulation of Transport Phenomena*). O programa foi escrito inteiramente em FORTRAN 77 e trabalha sem qualquer interação com o usuário, como convém a programas destinados ao processamento em grandes computadores. A entrada e a saída de dados se dá através de arquivos seqüenciais, seguindo o padrão de estrutura de dados mencionado no item anterior. O programa não foi otimizado com relação à eficiência, mas buscou-se a modularidade com o objetivo de facilitar a depuração nas etapas iniciais e a alternância de métodos nas etapas de teste.

A depuração e os testes do programa foram executados em duas estações de trabalho Sun SparkStation 1+ conectadas em rede entre si e com um microcomputador do tipo IBM-PC. Através deste último, dava-se a interação com o usuário. Para tal fim, eram empregados os programas de pré- e pós-processamento citados no item anterior, tanto na preparação de um novo teste, quanto na

análise de resultados.

A estrutura do programa resultou complexa, devido à sua forma genérica, que permite a simulação de escoamentos isotérmicos ou de problemas de condução pura, além dos problemas acoplados (escoamentos com transferência de calor). Mas, a fim de proporcionar uma noção do funcionamento do programa, descreve-se abaixo os passos do algoritmo de forma simplificada.

- a) leitura dos arquivos de dados;
- b) inicialização dos conjuntos e variáveis gerais;
- c) início do laço de passos de tempo:
  - d) inicialização das variáveis internas;
  - e) início do laço do método de gradientes conjugados:
    - f) cálculo inicial ou leitura da matriz de rigidez (sem convecção);
    - g) armazenamento da matriz de rigidez (somente na primeira iteração);
    - h) cálculo do termo de convecção (de acordo com o método empregado);
    - i) atualização do vetor do lado direito com o termo de convecção;
    - j) aplicação das condições de contorno;
    - k) pré-condicionamento da solução;
    - l) iteração do método de gradientes conjugados;
    - m) retirada do pré-condicionamento;
    - n) teste de convergência da solução;
  - o) fim do laço do método de gradientes conjugados - se a solução não convergiu, volta-se ao passo e);
  - p) cálculo e suavização do campo de pressões (em caso de gravação de resultados);
  - q) gravação de resultados (em passos de tempo pré-estabelecidos);
- r) fim do laço de passo de tempo - se o passo de tempo final estabelecido não foi atingido, incrementa-se o passo de tempo e volta-se ao passo c).



## 5 - TESTES E RESULTADOS

### 5.1 - CAVIDADE

Para testar o programa e estudar as características do método, foi escolhido o problema do escoamento bidimensional em cavidade. Este problema tem sido adotado como padrão para teste de muitos novos algoritmos e programas de simulação de escoamentos viscosos e incompressíveis, como se pode ver nas referências [7,22,37,38]. Ele se destaca pela simplicidade do seu domínio e simultaneamente pela complexidade do problema físico. Sendo caracterizado pela recirculação, o escoamento em cavidade assemelha-se ao descolamento de uma camada limite, possuindo ainda aspectos em comum com o escoamento de entrada em dutos. No caso do emprego do método de elementos finitos, a dificuldade é aumentada pela necessidade de se contornar a singularidade que existe nos pontos que unem os lados em que a velocidade é nula com o lado no qual a velocidade prescrita causa todo o movimento na cavidade. Os trabalhos de Nallasamy e Prasad [27] e de Schreiber e Keller [37] são geralmente citados como referência de resultados e serão usados também no presente trabalho. Apesar da importância do problema na pesquisa em mecânica dos fluidos computacional, não foi possível obter algum trabalho experimental sobre o mesmo.

O domínio empregado no problema da cavidade consiste de um quadrado de dimensões unitárias, cujos lados inferior, à esquerda e à direita correspondem a paredes da cavidade e o lado superior constitui-se de uma linha de corrente ou de uma tampa com velocidade constante prescrita igual a 1,0 (da esquerda para a direita). A aplicação das condições de contorno exigem a consideração do problema da singularidade que existe nos nós extremos do lado superior. Existem duas formas de contornar o

problema. A primeira, denominada de caso confinado, consiste em atribuir velocidade nula aos nós extremos, da mesma forma que nos lados correspondentes a paredes, e elevar gradual ou subitamente o valor da componente horizontal da velocidade nos nós vizinhos aos extremos até o valor da velocidade prescrita na tampa. A segunda, também chamada caso não confinado, atribui a todos os nós do lado superior, inclusive os extremos, a velocidade prescrita da tampa, enquanto reduz gradual ou subitamente a velocidade horizontal dos nós laterais vizinhos aos nós de canto até zero. Neste caso, pode-se identificar uma faixa de escoamento com a largura de pelo menos um elemento que não está confinada à cavidade, mas troca fluido com o exterior do domínio. Uma representação esquemática deste caso pode ser observada na figura 5.1.

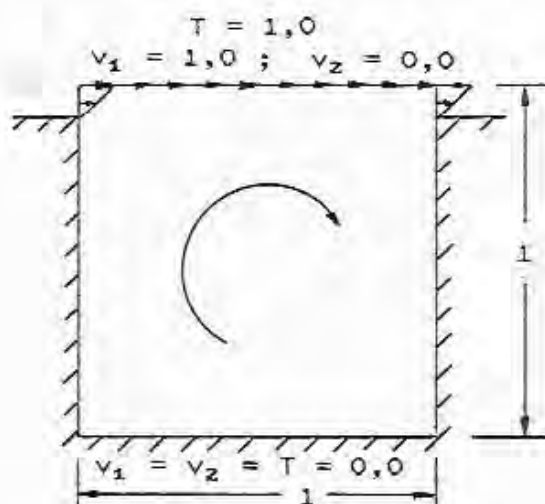


Figura 5.1 - Cavidade: domínio e condições de contorno.

A primeira constatação do presente trabalho foi a grande sensibilidade apresentada pelo método com relação a condições iniciais e de contorno que não cumprem a condição de continuidade. Por essa razão não foi possível obter nenhum resultado com as condições de contorno do tipo confinado. Impôs-se assim o uso das condições do tipo não confinado.

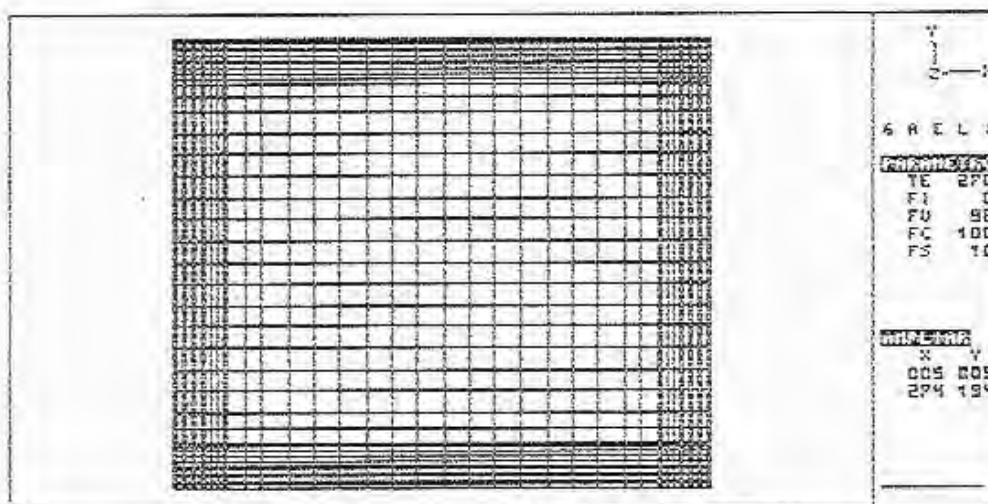


Figura 5.2 - Cavity - malha 1: 1681 nós e 1600 elementos.

Para o estudo do método através do problema da cavidade foram empregadas duas malhas de discretização da mesma. A primeira malha, mais refinada e que será chamada de malha 1, é formada por uma matriz de 40 x 40 elementos desiguais, mais concentrados junto aos lados, como se pode ver na figura 5.2 e em detalhe na figura 5.3.

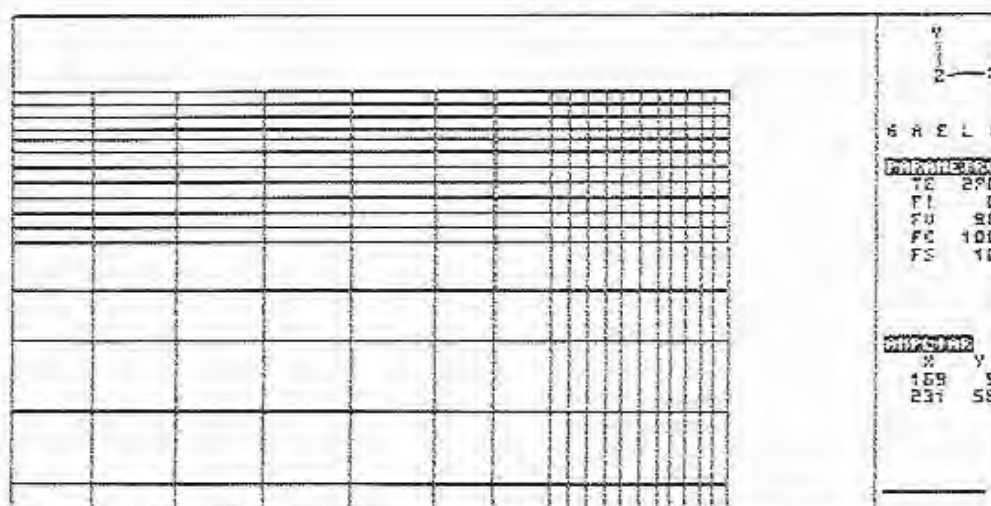


Figura 5.3 - Cavity - malha 1 : detalhe.

A condição de contorno escolhida para a velocidade  $v_1$  neste caso foi de variação linear de 1,0 nos nós de canto até zero no sexto nó de cima para baixo, correspondente a uma altura  $y = 0,960$ . Esta opção foi feita para se ter maior semelhança entre os problemas resolvidos com a malha refinada e com a malha grosseira.

A segunda malha ou malha 2 do problema da cavidade é constituída por 256 elementos ( $16 \times 16$ ), também mais concentrados junto aos lados, onde ocorrem os maiores gradientes de velocidade. A condição de contorno em  $v_1$  para a malha 2, do tipo não confinado, consiste na variação abrupta do valor 1,0 nos nós de canto para o valor zero nos nós laterais seguintes ( $y=0,9667$ ). Com esta segunda malha foi testado também o acoplamento entre o problema fluido-dinâmico e o problema térmico. As condições de contorno para a equação da conservação de energia são do tipo temperatura prescrita, adotando-se os mesmos valores atribuídos à velocidade  $v_1$ . Esta malha mais grosseira pode ser vista na figura 5.4.

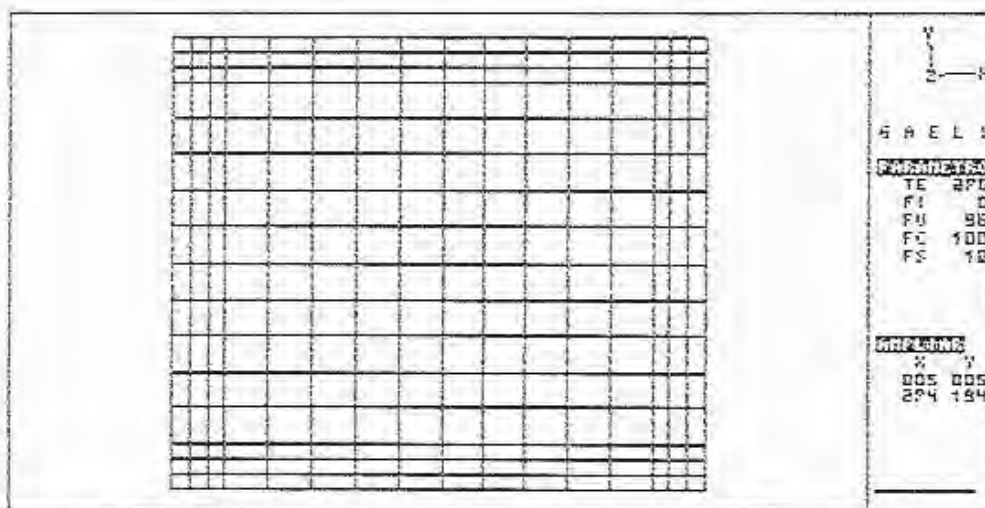


Figura 5.4 - Cavidade - malha 2 :289 nós e 256 elementos.

Com a malha 1 foram estudados escoamentos

caracterizados por números de Reynolds iguais a 10, 100, e 1000. O número de Reynolds é calculado pela expressão

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} \quad (55)$$

onde  $\rho$  é a massa específica (em kg/m<sup>3</sup>), considerada unitária,  $V$  é uma velocidade característica (em m/s), no caso a velocidade unitária da tampa,  $L$  é um comprimento característico (em m), no caso o comprimento unitário dos lados, e  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido (em kg/m s), cujo valor determina o  $Re$  de cada problema. Com a malha 2 foram investigados escoamentos com valores de  $Re$  iguais a 100, 1000 e 10000. A condutividade térmica em cada caso era ajustada de forma que o número de Prandtl permanecesse igual a um. O número de Prandtl, usado para caracterizar escoamentos com transferência de calor, é expresso de forma

$$Pr = \frac{H c_p}{k} \quad (56)$$

onde  $c_p$  é o calor específico do fluido (em J/kg °C), considerado unitário, e  $k$  é a condutividade térmica do fluido (em W/m °C), à qual era atribuído o mesmo valor da viscosidade para resultar em  $Pr=1$ .

Durante o estudo da influência do parâmetro de penalidade, notou-se que havia uma relação entre o valor deste e o valor da tolerância que estabelece o fim das iterações no método dos gradientes conjugados. Esta tolerância representa o limite superior admissível para o erro das componentes de velocidade na norma euclidiana. Nenhum resultado foi possível obter, por exemplo, nos testes em que o inverso do parâmetro de penalidade era menor do que a tolerância. Somente no caso de  $Re=10$  foi possível obter algum resultado com o parâmetro de penalidade ( $\alpha = 10^6$ ) igual ao inverso da tolerância ( $tol = 10^{-6}$ ). É mesmo assim, apesar do valor elevado do parâmetro de penalidade, a solução ficou pior do que a obtida para um valor de  $\alpha = 10^3$  com o mesmo valor para a tolerância. Escoamentos com



números de Reynolds maiores mostraram-se até mais sensíveis a esta relação, não admitindo  $\alpha$  igual ao inverso da tolerância. Quando se diz que nestes casos não foi possível obter solução, significa que após um número bem reduzido de passos de tempo, às vezes apenas um, a solução se fixa a um valor errôneo e daí em diante apenas oscila levemente em torno deste valor ou progride numa taxa infinitesimal.

Os testes com  $Re=100$  parecem apontar para uma relação ideal entre  $\alpha$  e a tolerância. Por exemplo, a relação  $[\alpha=10^5/tol=10^{-8}]$  apresentou resultado bem melhor do que a relação  $[\alpha=10^6/tol=10^{-8}]$ , apesar do maior valor do parâmetro de penalidade deste. Já o resultado obtido com a relação  $[\alpha=10^3/tol=10^{-6}]$  mostrou-se ligeiramente inferior ao obtido com  $[\alpha=10^5/tol=10^{-8}]$ , mas bem superior ao obtido com  $[\alpha=10^6/tol=10^{-8}]$ . Sob esse aspecto, pode-se citar ainda os testes feitos de escoamentos com  $Re=1000$  na malha 2 que apresentaram resultados semelhantes, quando foram empregadas as relações  $[\alpha=10^3/tol=10^{-6}]$  e  $[\alpha=10^4/tol=10^{-7}]$ , enquanto não foi possível obter solução com a relação  $[\alpha=10^4/tol=10^{-6}]$ .

Não se encontra nos trabalhos consultados nenhuma referência explícita a esta sensibilidade do método à relação  $\alpha/tol$ . Mas, considerando a alteração de escala que o parâmetro de penalidade faz no sistema de equações, como foi citado no item 2 do Capítulo 3, é razoável esperar que o nível de erro máximo que se admite que seja propagado de um passo de tempo a outro seja dependente desta alteração de escala, de forma a não se sobrepor às menores escalas de valores do problema. Eventualmente a forma semi-implícita de tratamento do termo não linear da convecção adotada pelo presente método o torna mais sensível neste aspecto, principalmente porque a sensibilidade aumenta no caso de valores de  $Re$  mais elevados. De qualquer forma, adotou-se nos principais testes do programa a seguinte proporção: tolerância= $10^{-3}/\alpha$ .

Logo nos primeiros testes com a malha 1 ficou evidenciada outra condição exigida pelo presente método. Como já



foi citado no início do capítulo, por ocasião da escolha das condições de contorno, o campo de velocidades deve satisfazer a condição de divergência nula em cada tempo, inclusive nas condições iniciais. Dito de forma mais rigorosa, esta condição deve ser satisfeita de forma aproximada, na proporção do inverso do parâmetro de penalidade. Por este motivo não se obteve resultados partindo-se com a condição inicial trivial no caso da malha 1, uma vez que esta possui quatro nós de cada lado que não pertencem ao lado superior, mas cujo valor prescrito de  $v_1$  é diferente de zero. Foi necessário atribuir estas mesmas velocidades não nulas a todos os nós internos com a mesma altura  $y$  antes de se iniciar a simulação. Nas simulações de escoamentos com  $Re=1000$  foram empregados como condições iniciais soluções convergidas de testes com  $Re=100$  para encurtar o tempo de simulação até a obtenção da solução de regime permanente. Procedeu-se da mesma forma nos testes com a malha 2, também no caso de  $Re=10000$ .

O esquema de discretização no tempo adotado em todos os testes aqui descritos é o de Crank-Nicolson ( $\theta=0,5$ ). Foram feitos, no entanto, uns poucos testes usando o esquema de Galerkin ( $\theta=0,667$ ). No caso em que foi simulado um escoamento com  $Re=10$ , o esquema de Galerkin apresentou resultados inferiores ao teste equivalente que empregou o esquema Crank-Nicolson. Já nos casos de escoamentos com  $Re=100$ , além da qualidade ruim dos resultados obtidos com o esquema de Galerkin, a curva de convergência que se observa no histórico do valor da velocidade em um nó parece ser interrompida abruptamente, quando então a solução se fixa naquele valor, ao invés de tender ao mesmo assintoticamente. Por causa disto, o esquema de Galerkin foi desconsiderado.

A influência do valor do parâmetro de penalidade  $\alpha$  foi investigada com a malha 1 nos casos de escoamentos com  $Re=100$  e  $Re=1000$ , ressaltando-se que o valor da tolerância do processo iterativo era ajustada para que se mantivesse a proporção estabelecida anteriormente. Tomou-se como ponto de partida o

valor  $\alpha=10^3$  ( $\text{tol}=10^{-6}$ ), o qual, no estudo bem mais minucioso feito por Reddy [32] para o problema da convecção natural em cavidade, garantiu-lhe praticamente três algarismos significativos exatos no valor da solução. Este também é o valor de  $\alpha$  usado por Carey e Krishnan [7] na aplicação de seu método de penalidade a um escoamento em cavidade (no referido trabalho, a tolerância do processo iterativo também foi feita igual a  $10^{-6}$ ). Os mesmos casos simulados com  $\alpha=10^3$  foram também simulados com  $\alpha=10^5$  ( $\text{tol}=10^{-8}$ ). Como era esperado, a alteração nos resultados foi muito pequena, imperceptível em uma representação gráfica como a das figuras adiante. Também com a malha 2 fez-se uma comparação entre  $\alpha=10^4$  ( $\text{tol}=10^{-7}$ ) e  $\alpha=10^3$  ( $\text{tol}=10^{-6}$ ) no caso de  $\text{Re}=1000$ , resultando no mesmo efeito desprezível. Por outro lado, a necessidade de se reduzir proporcionalmente o valor da tolerância do processo iterativo traz consigo um severo aumento no custo computacional da simulação, tornando injustificável a opção por um parâmetro de penalidade maior do que  $10^3$ .

Entre os fatores que mais influíram na qualidade dos resultados está o tratamento dado ao termo convectivo. As figuras 5.5 e 5.6 mostram os perfis de cada componente de velocidade na linha média da cavidade para o caso de escoamento com  $\text{Re}=100$ . A linha contínua representa o resultado obtido, empregando-se para o cálculo dos termos convectivos o método MSU, como descrito no item 3 do Capítulo 3 e no Apêndice II. Nas mesmas figuras a linha tracejada representa o resultado obtido, quando os termos de convecção são tratados pelo método dos resíduos ponderados na forma tradicional de Galerkin, descrita no início do Capítulo 3 pelas equações (32) a (34). Os resultados obtidos com as duas malhas são virtualmente iguais.

Nota-se já neste caso uma pequena diferença nos resultados, sendo a solução obtida com o tratamento tradicional de Galerkin a que mais se aproxima dos valores obtidos por Nallasamy e Prasad [27], que podem ser vistos na figura 5.9.

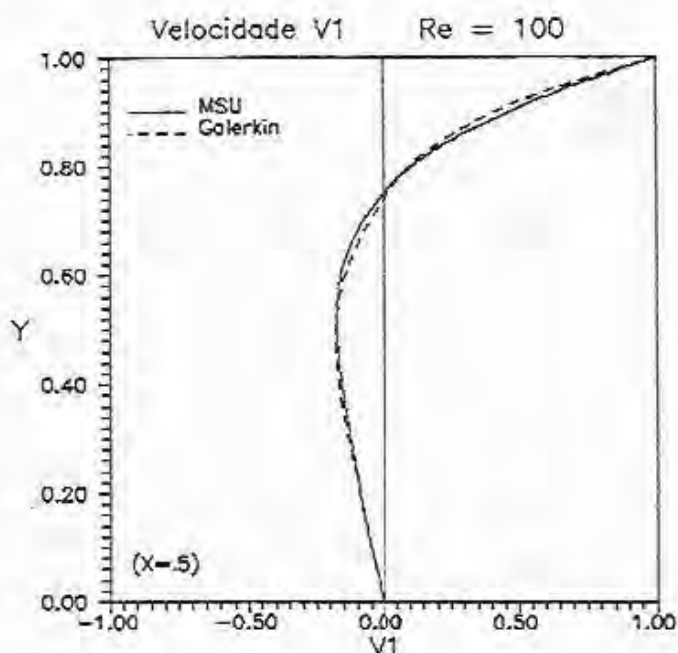


Figura 5.5 - Cavidade: perfil da velocidade  $v_1$ .

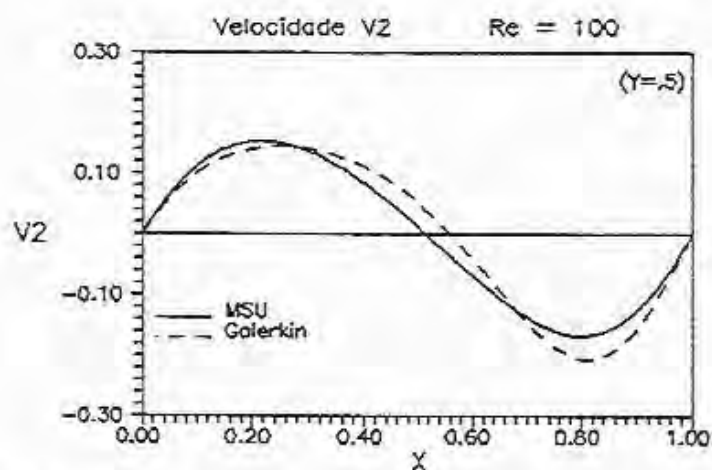


Figura 5.6 - Cavidade: perfil da velocidade  $v_2$ .

A mesma convenção foi empregada para representar os perfis de temperatura nas linhas médias da cavidade, os quais podem ser observados nas figuras 5.7 e 5.8. Os resultados obtidos pelo tratamento convencional dos termos de convecção estão claramente de acordo com os apresentados por Nallasamy e Prasad [27], mostrados na figura 5.10.

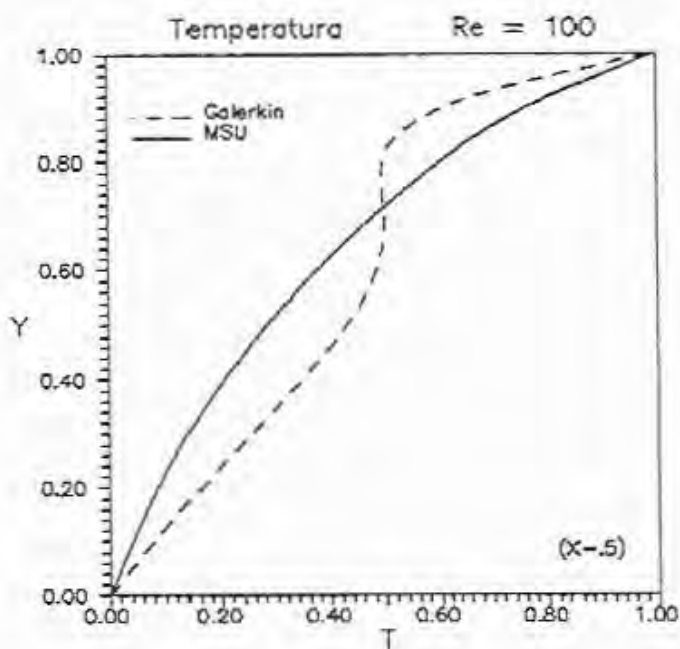


Figura 5.7 - Cavity: perfil vertical de temperatura.

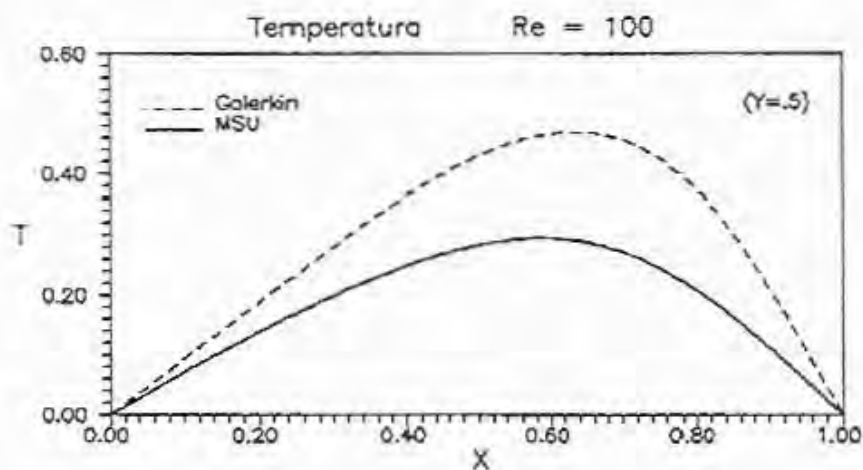


Figura 5.8 - Cavity: perfil horizontal de temperatura.

Os bons resultados obtidos pelo tratamento convencional de Galerkin dos termos convectivos no caso de  $Re=100$  evidenciam que, mesmo para a malha mais grosseira, o tratamento destes termos com diferenças "a montante" se faz desnecessário, fato igualmente observado por Shaw [38] em seu trabalho. Por outro lado, o método MSU mostrou resultados muito piores do que o

esperado. Como foi citado no capítulo 3, é sabido que os métodos de diferença "a montante" produzem um efeito de aumento do coeficiente de difusão, que se torna mais expressivo ainda nas formulações transientes. No entanto, o efeito difusivo do método MSU, neste caso, foi tão forte que levou os testes com  $Re=100$  a produzir perfis típicos de um escoamento com  $Re=10$ .

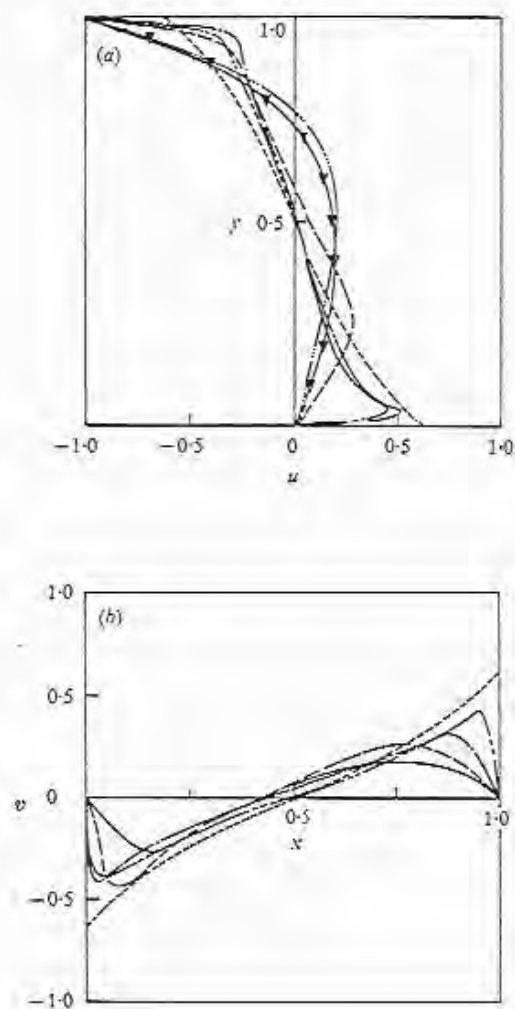


Figura 5.9 – Perfis de velocidade na cavidade: a) veloc.  $v_1$  na linha média vertical; b) veloc.  $v_2$  na linha média horizontal.

— · · —  $Re=0$ ; —  $Re=100$ ; - - -  $Re=1000$ ; - · -  $Re=10000$

(resultados obtidos por Nallasamy e Prasad [27])

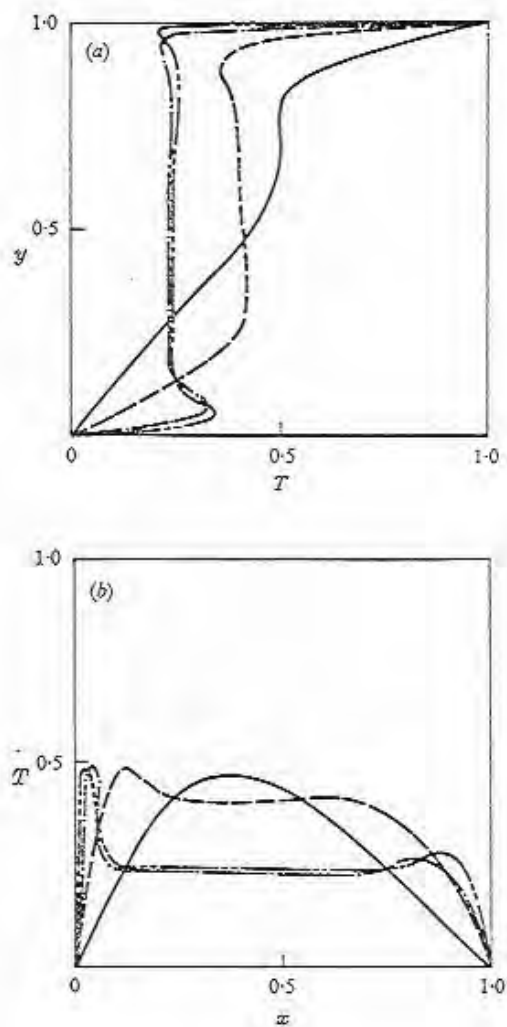


Figura 5.10- Perfis de temperatura na cavidade: a) na linha média vertical; b) na linha média horizontal.

—  $Re=100$ ; - - -  $Re=1000$ ; - : -  $Re=10000$ ; - · · -  $Re=30000$   
 (resultados obtidos por Nallasamy e Prasad [27])



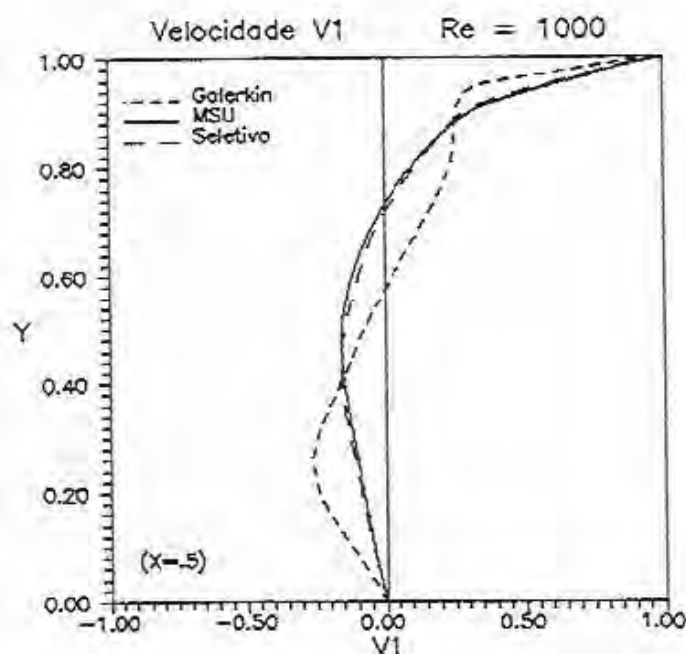


Figura 5.11 - Cavity: perfil da velocidade  $v_1$ .

Como essa discrepância por efeito do método MSU permanecesse nos testes com  $Re=1000$  e estes já mostrassem a necessidade de um tratamento especial da convecção, decidiu-se experimentar a aplicação seletiva do método MSU. Antes de se calcular a matriz correspondente ao termo convectivo a nível de elemento, testava-se o número de Peclet local com relação ao limite estabelecido ( $Pe_{lim}=10$ ) e aplicava-se o método MSU, caso o  $Pe$  local fosse maior que este limite. Nos resultados mostrados a seguir, este procedimento é chamado de seletivo. Com o fim de permitir um maior agrupamento dos resultados, a discussão do processo seletivo será retomada mais adiante.

Nas figuras 5.11 e 5.12 pode-se observar os resultados obtidos para a velocidade com  $Re=1000$  pelas três diferentes abordagens do termo convectivo. Fica evidente a diminuta melhora alcançada pelo processo seletivo com o valor de  $Pe$  limite adotado.

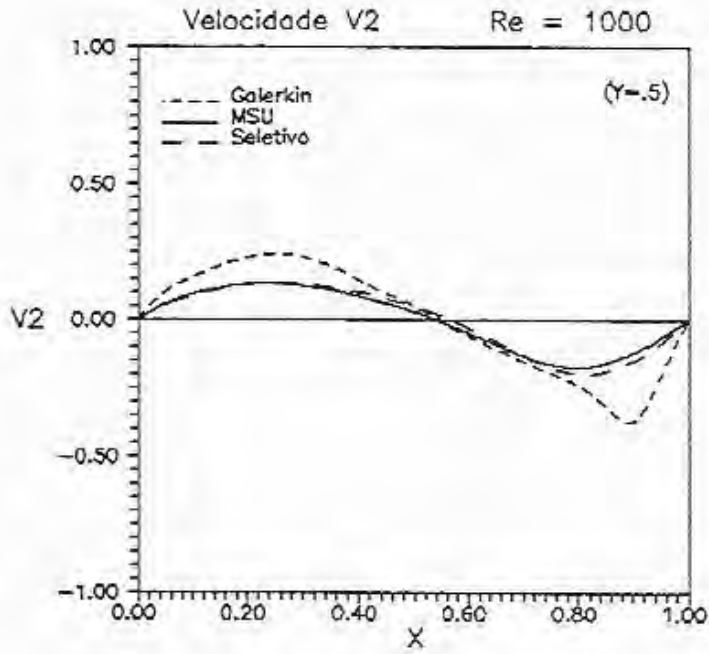


Figura 5.12 - Cavidade: perfil da velocidade  $v_2$ .

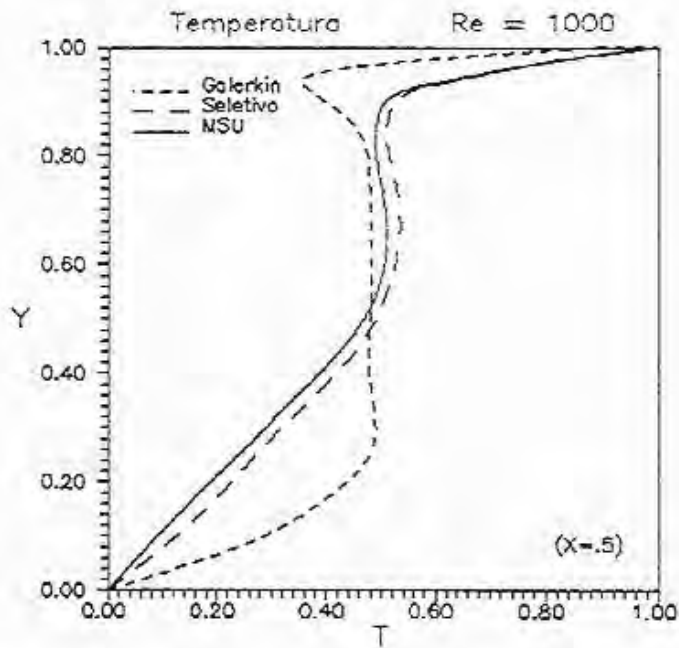


Figura 5.13 - Cavity: perfil vertical de temperatura.

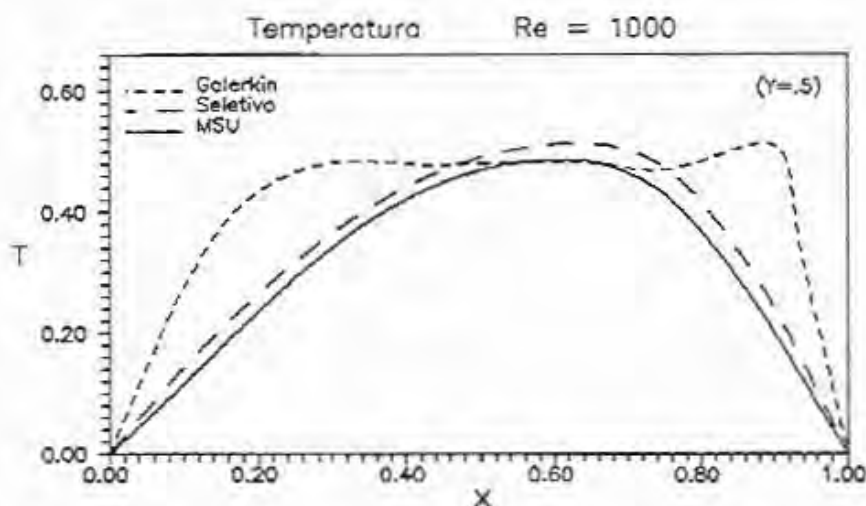


Figura 5.14 - Cavidade: perfil horizontal de temperatura.

Os resultados obtidos para o problema térmico acoplado, no caso de  $Re=1000$ , podem ser observados nas figuras 5.13 e 5.14. Como nos testes com  $Re=100$ , também na simulação de escoamentos com  $Re=1000$  o efeito fortemente difusivo do método MSU produziu resultados semelhantes aos de um escoamento com número de Reynolds cerca de dez vezes menor. Neste caso, no entanto, nem o método de Galerkin conseguiu gerar resultados equivalentes aos obtidos por Nallasamy e Prasad [27], ficando apenas próximos a estes. Mesmo a malha 1, mais refinada, não conduziu a qualquer melhora sensível na solução. A discrepância ainda se torna um pouco maior, quando os perfis de velocidade são comparados aos resultados de Schreiber e Keller [37], que podem ser vistos nas figuras 5.15 e 5.16. Nestas, o perfil a ser observado é o das linhas médias, respectivamente  $y=0,5$  e  $x=0,5$ . A escala das velocidades é tal que um valor unitário corresponde à metade do comprimento de um lado. Note que uma das duas figuras está invertida com relação ao sentido da velocidade da tampa da cavidade.

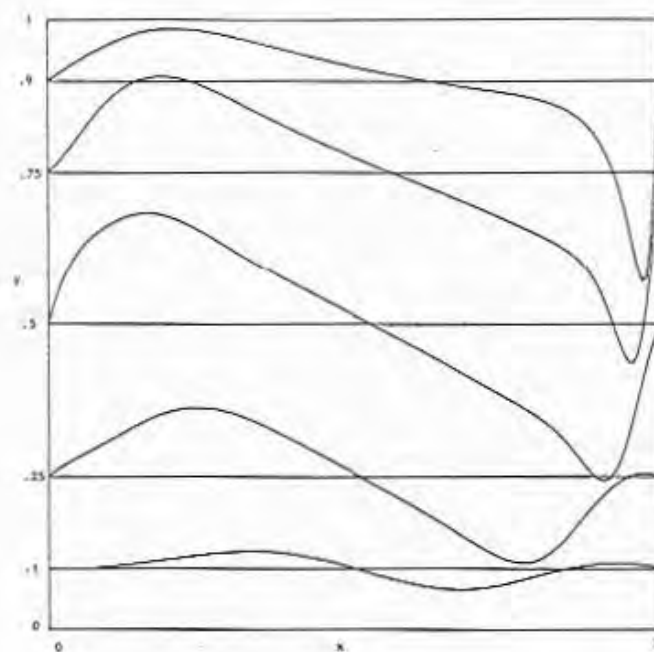


Figura 5.15 - Perfis da velocidade  $v_2$  na cavidade -  $Re=1000$ .  
(resultados obtidos por Schreiber e Keller [37])

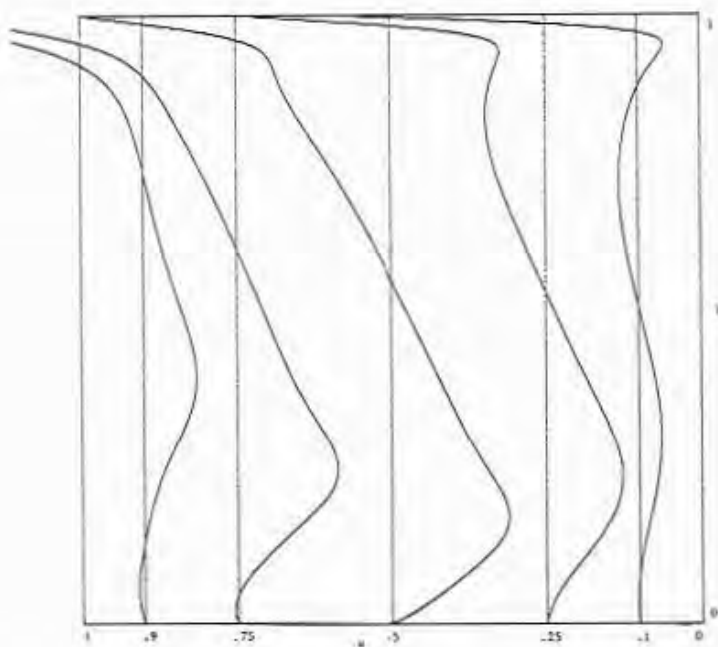


Figura 5.16 - Perfis da velocidade  $v_1$  na cavidade -  $Re=1000$ .  
(resultados obtidos por Schreiber e Keller [37])

A seguir, nas figuras 5.17 a 5.20, são expostos os perfis de velocidade e temperatura em um escoamento com  $Re=10000$ , obtidos nas condições já citadas. Para estes testes, apenas a malha 2 foi utilizada.

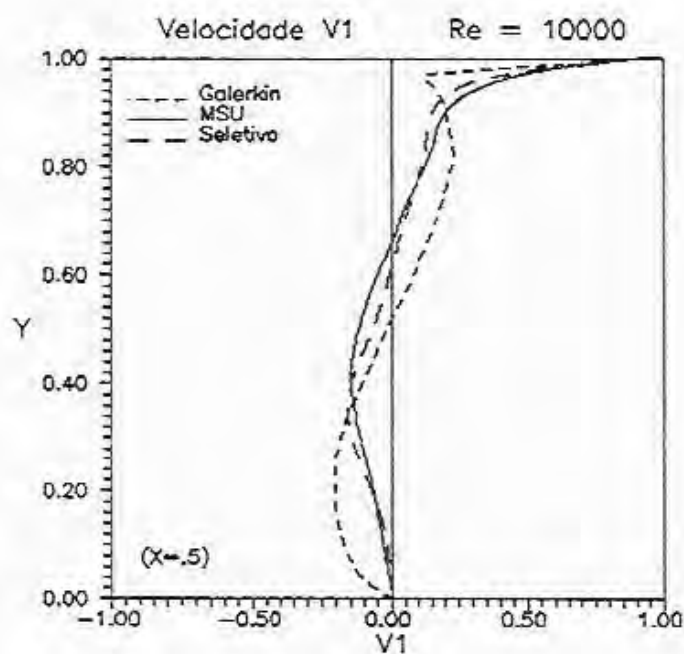


Figura 5.17 - Cavity: perfil da velocidade  $v_1$ .

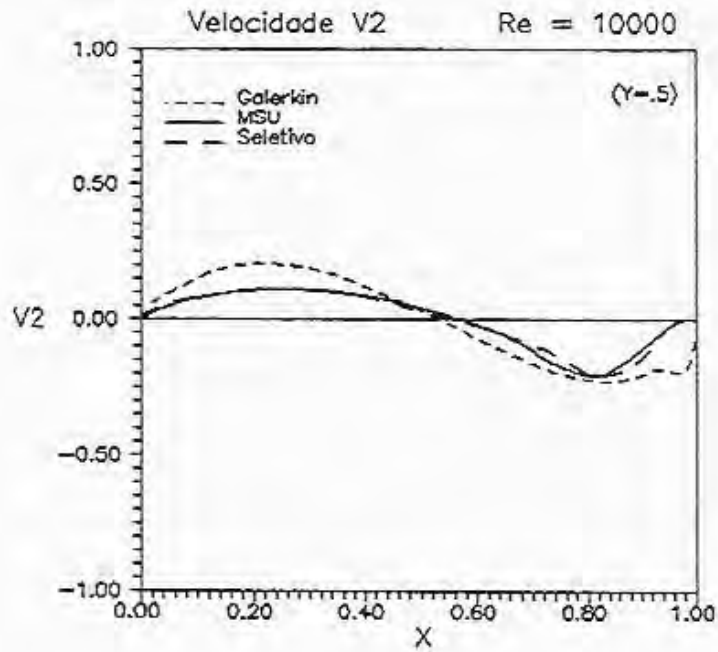


Figura 5.18 - Cavity: perfil da velocidade  $v_z$ .

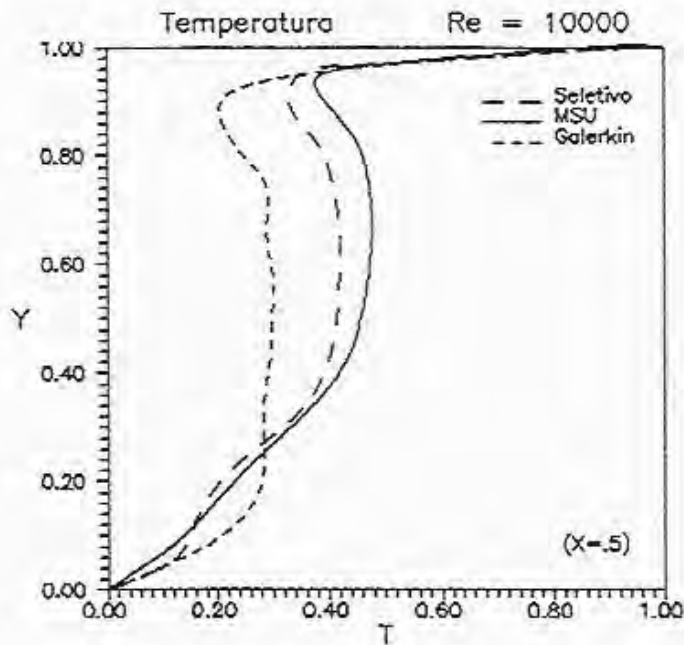


Figura 5.19 - Cavity: perfil vertical de temperatura.



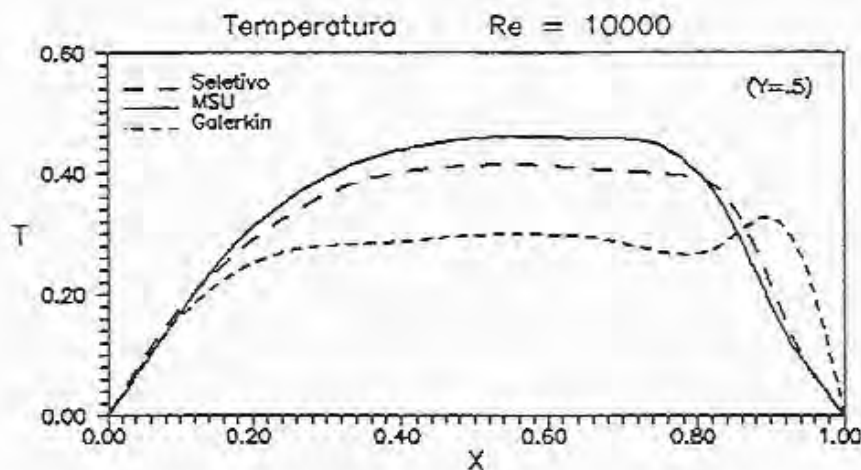


Figura 5.20 - Cavidade: perfil horizontal de temperatura.

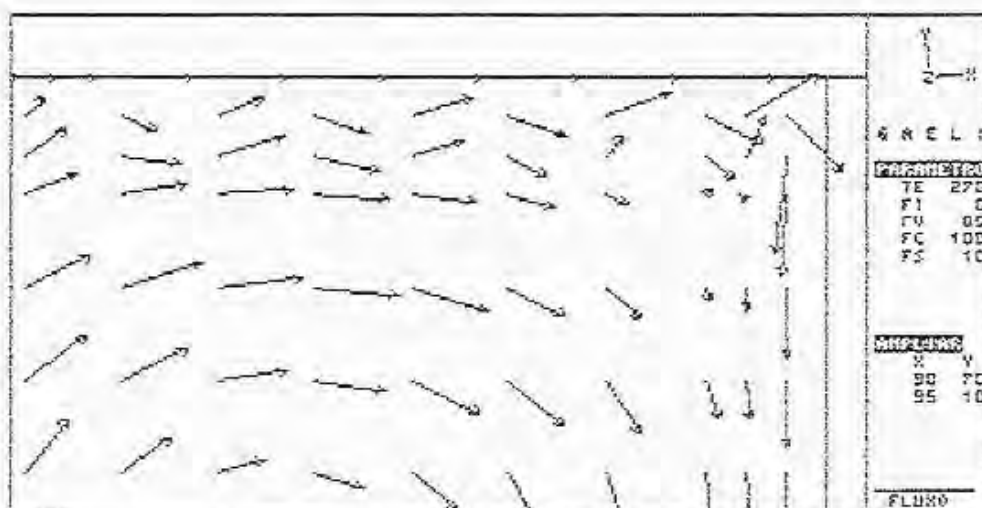


Figura 5.21 - Cavidade: detalhe do campo de velocidades.

$Re=10000$ , convecção tratada pelo método de Galerkin.

Desta vez, a abordagem tradicional de Galerkin produziu um campo de velocidades totalmente distorcido na região superior pela presença das oscilações espúrias características. À primeira vista, observando-se apenas os perfis das linhas médias, o método de Galerkin apresentou resultados bem melhores que os demais, sem revelar as oscilações, exceto no perfil da velocidade  $v_2$  (figura 5.18). Mas quando se observa de forma mais geral o campo de velocidades, como se pode ver em detalhe na figura 5.21, nota-se

claramente o padrão oscilatório, que já está presente em escala bem menor na solução de Galerkin para o caso  $Re=1000$ .

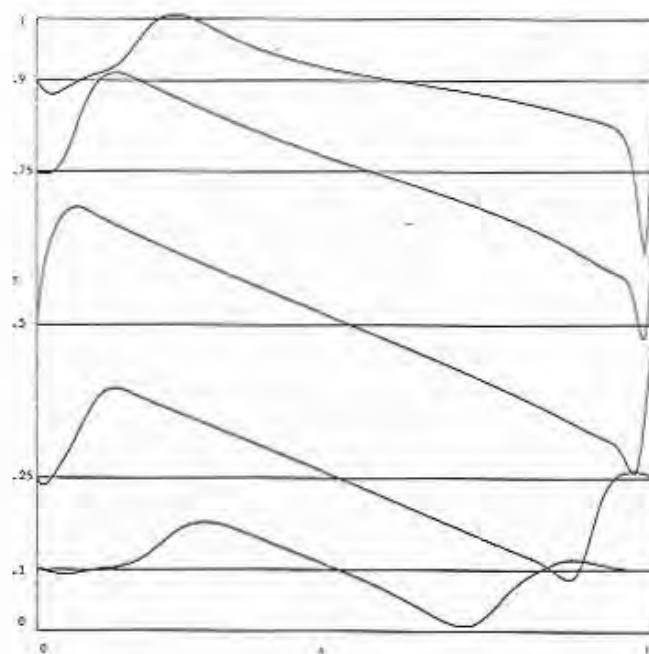


Figura 5.22 - Perfis da velocidade  $v_2$  na cavidade -  $Re=10000$ .  
(resultados obtidos por Schreiber e Keller [37])

As soluções empregando o método MSU de forma absoluta ou seletiva com  $Pe$  limite igual a 10 mostraram-se novamente muito difusivas e distantes dos valores obtidos por Nallasamy e Prasad [27], que ainda podem ser vistos nas figuras 5.9 e 5.10, ou por Schreiner e Keller [37], apresentadas nas figuras 5.22 e 5.23, mesmo que estes não apresentem grande concordância entre si.

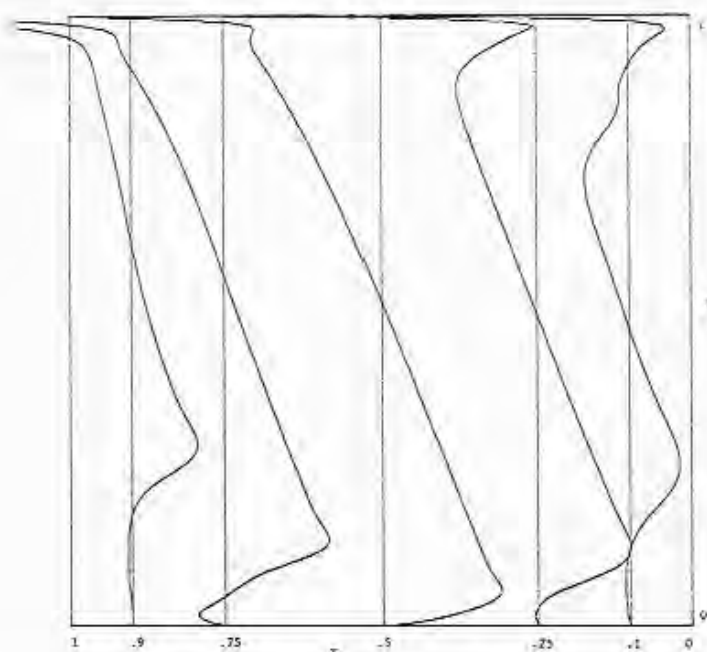


Figura 5.23 - Perfis da velocidade  $v_1$  na cavidade -  $Re=10000$ .  
(resultados obtidos por Schreiber e Keller [37])

Retomando-se a discussão a respeito do processo seletivo, vale lembrar que esta idéia não é nova. Patankar [28] em seu famoso método SIMPLE (de 1972) já tratava o termo convectivo de forma dependente do número de Peclet local, usando a diferença "à montante" quando  $Pe$  fosse maior que 2. Brooks e Hughes [6] em sua formulação de Petrov-Galerkin denominada SUPG aplicam progressivamente o termo de perturbação que caracteriza o método à medida que o  $Pe$  local aumenta, atingindo seu valor pleno a partir de  $Pe=2$ . O resultado bem sucedido obtido através da formulação tradicional de Galerkin (também observado por Shaw [38]) para o caso de  $Re=100$  que, na malha 2, apresentava valores de  $Pe$  que chegavam próximos a 10, conduziu à escolha deste valor como limite para uma primeira tentativa de aplicação seletiva do método MSU. A proximidade dos resultados obtidos pelo processo seletivo e pela aplicação pura do método MSU sugere que novas experiências devam usar valores limites bem maiores. Ao menos,

esta primeira experiência mostrou a compatibilidade existente entre os dois métodos. No caso de  $Re=1000$ , o método MSU foi empregado em 50% dos elementos, enquanto para  $Re=10000$ , aplicou-se este método a aproximadamente 30% dos elementos.

A possibilidade de representação de isorregiões oferecida pelo programa GAELI [17] permite que se tenha uma visão mais global de alguns resultados vistos até aqui, ainda que com algumas limitações. A análise e a comparação das linhas de corrente fica um pouco prejudicada pelo reduzido número de divisões e pelas variações dos limites das isorregiões de um desenho para o outro. Nas figuras 5.24 a 5.26 tem-se a representação de isorregiões da função de corrente, cada limite entre isorregiões correspondendo a uma linha de corrente. As figuras 5.24 e 5.25 correspondem aos resultados obtidos para os casos de  $Re=100$  e  $Re=1000$  respectivamente, sendo em ambos os casos utilizada a forma tradicional de Galerkin para a convecção. A figura 5.26 corresponde ao resultado obtido pelo processo seletivo para o escoamento com  $Re=10000$ .

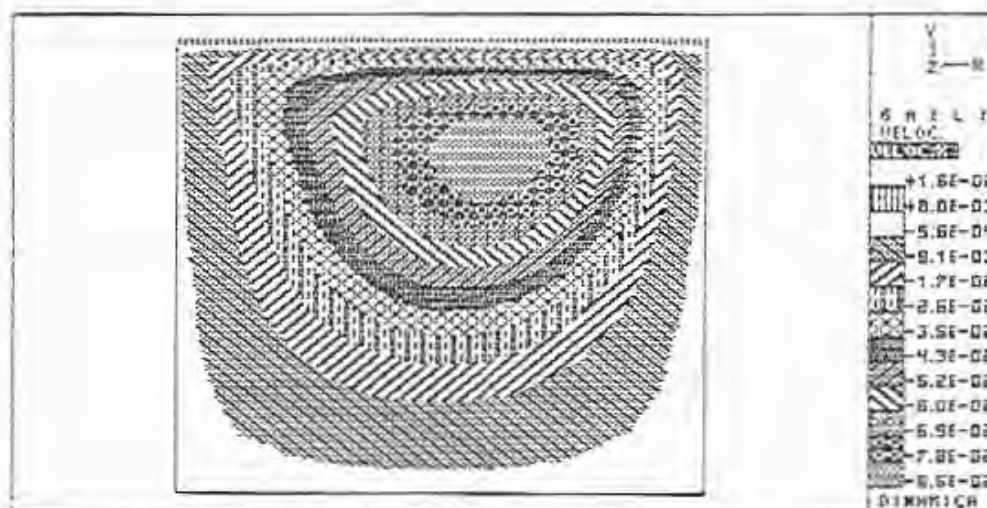


Figura 5.24 - Linhas de corrente na cavidade -  $Re=100$ .

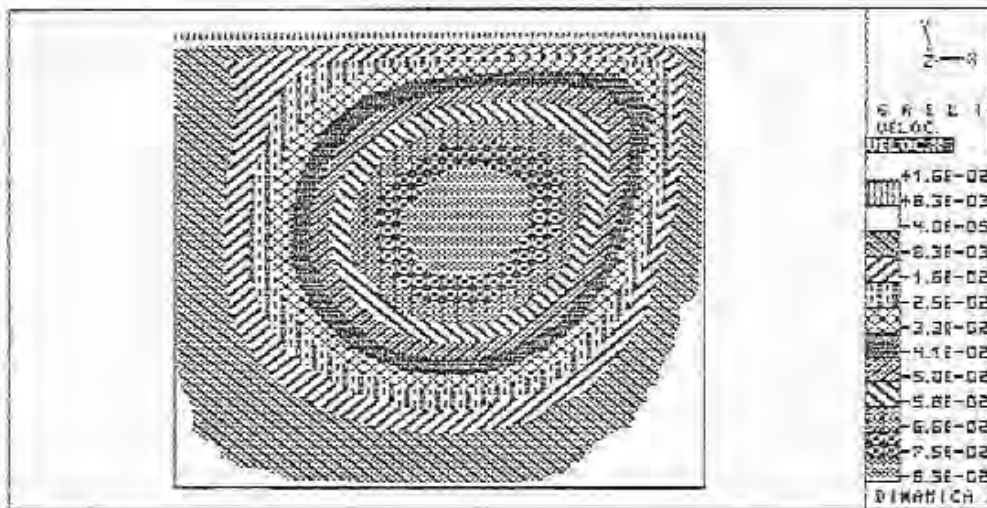


Figura 5.25 - Linhas de corrente na cavidade -  $Re=1000$ .

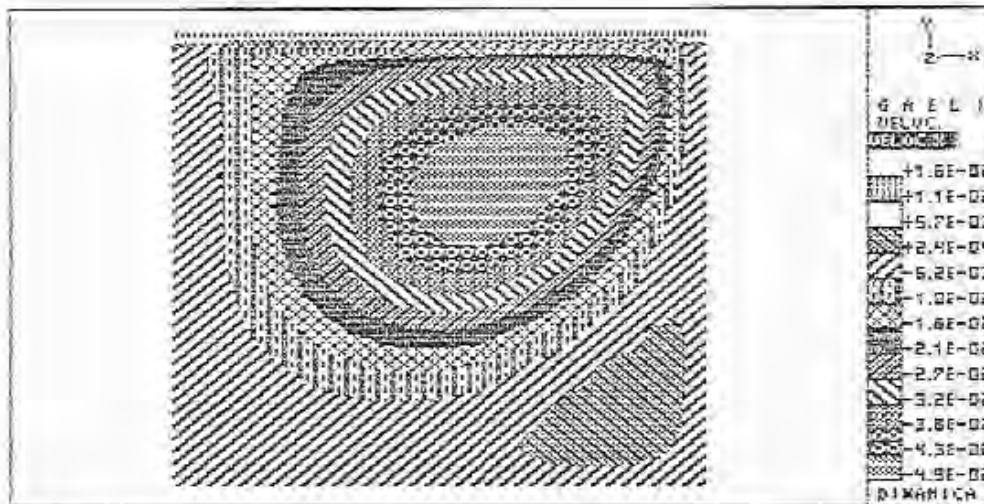


Figura 5.26 - Linhas de corrente na cavidade -  $Re=10000$ .

Na figura 5.26, observa-se um vórtice secundário no canto da cavidade. Este já está presente nos resultados do escoamento com  $Re=1000$ , apesar de não ser captado pela divisão imposta às linhas de corrente na figura 5.25. Para demonstrar o fato, são representados na figura 5.27 os perfis da velocidade  $v_z$  para os três processos tomados na altura  $Y=0,1$ , no caso de

Re=1000. Pode-se comparar esta figura ao perfil correspondente na figura 5.15, lembrando-se que existe grande diferença de escala entre as duas.

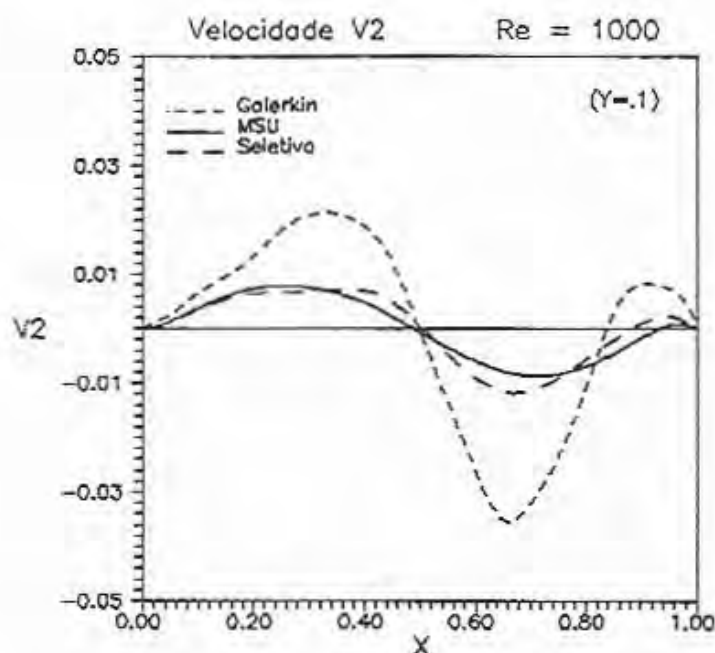


Figura 5.27 - Caverna: perfil da velocidade  $v_2$  em  $Y=0,1$ .

A representação por isorregiões adquire lugar de destaque na análise das distribuições de temperaturas. Os limites prescritos para o valor da temperatura garantem a mesma divisão entre as regiões. As figuras 5.28 e 5.29 representam os resultados de escoamentos com  $Re=100$  e  $1000$  respectivamente, ambos com a convecção tratada por Galerkin. Nota-se na figura 5.29 o efeito das pequenas oscilações da velocidade que já se fazem presente. A figura 5.30 representa a distribuição de temperatura obtida através do processo seletivo para o caso de  $Re=10000$ .



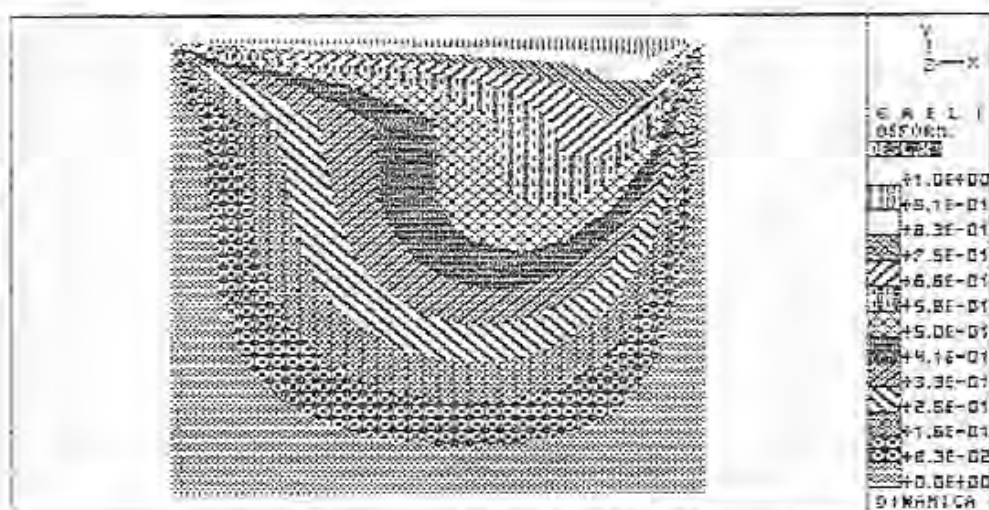


Figura 5.28 - Distribuição de temperatura na cavidade -  $Re=100$ .

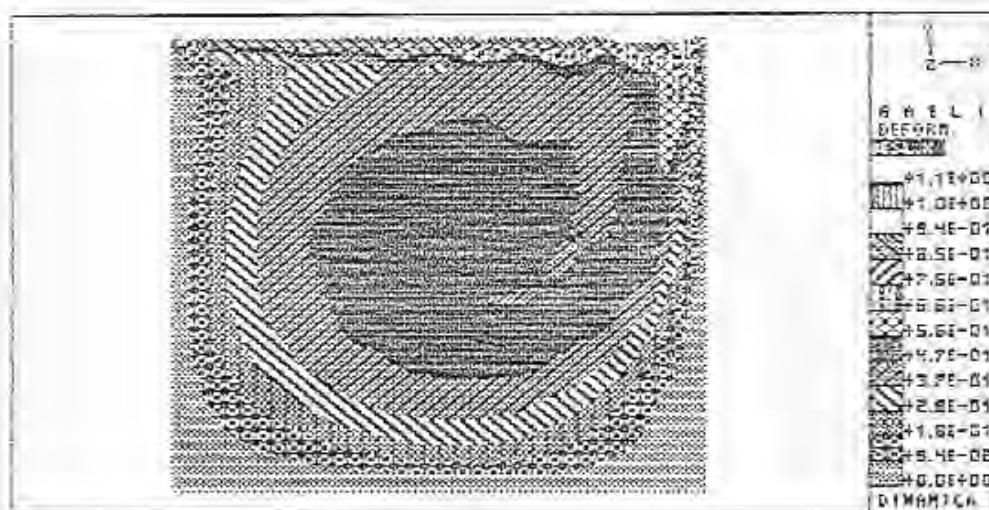


Figura 5.29 - Distribuição de temperatura na cavidade -  $Re=1000$ .

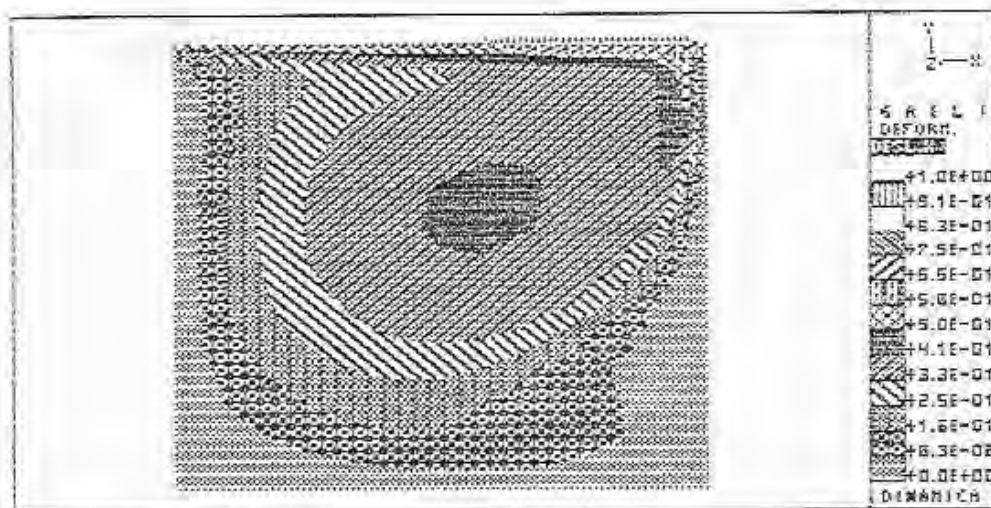


Figura 5.30 - Distribuição de temperatura na cavidade -  $Re=10000$ .

O tipo de elemento adotado no presente trabalho apresenta notórios problemas na representação do campo de pressões, como foi citado no item 4 do Capítulo 3. Em quase todos os casos investigados neste estudo, os resultados da pressão apresentaram fortes oscilações espúrias, que os métodos de suavização empregados não foram capazes de eliminar. Nem tampouco o aumento do valor do parâmetro de penalidade produziu alguma melhora sensível. A única exceção fica por conta do caso de  $Re=10$  simulado na malha 1, com os valores [ $\alpha=10^3$ / $tol=10^{-6}$ ], que apresentou um campo relativamente plano e com os esperados picos de pressão e depressão nos cantos de entrada e de saída do fluido, respectivamente, se bem que com valores bem menores que o esperado.

## 5.2 - CILINDRO

Para exemplificar a capacidade do programa desenvolvido no presente trabalho de simular problemas transientes complexos com grande número de nós e elementos foi escolhido o problema do escoamento aberto isotérmico em torno de um cilindro com número

de Reynolds baseado no diâmetro do cilindro igual a 100. O problema do escoamento aberto em torno de um cilindro é tido como um dos mais exigentes testes de um programa de simulação. Quando o número de Reynolds característico deste escoamento é maior do que 40, perde-se a estabilidade e a zona de recirculação formada atrás do cilindro, inicialmente constituída de 2 vórtices, perde sua simetria. A instabilidade ocasiona o desprendimento periódico e alternado destes vórtices, que são transportados pelo escoamento constituindo a chamada esteira de vórtices de von Kármán. O valor escolhido para  $Re$  vem se constituindo num padrão para teste de algoritmos numéricos que resolvem as equações de Navier-Stokes em problemas transientes e incompressíveis. Brooks e Hughes [6], bem como Young e Ni [39] empregaram este problema como demonstração final da capacidade de seus programas de simulação. Valores experimentais para as quantidades médias do problema podem ser encontrados no trabalho de Zukauskas [42] e no livro de Schlichting [36]. Além disso, os trabalhos de Behr et al. [5] e Engelman e Jamnia [13] resolvem o problema numericamente com extrema precisão e estudam-no sob diversos aspectos, como refinamento da malha, tamanho do domínio e tipos de condições de contorno. Estes últimos trabalhos fornecem ainda informações detalhadas de valores transientes, como coeficientes de arrasto e de sustentação e componentes da velocidade.

A escolha do domínio a ser discretizado desempenha um papel fundamental no problema do escoamento externo transversal a um cilindro. A influência que o cilindro exerce sobre o fluido se estende por diversos diâmetros na direção transversal ao escoamento principal e por uma distância muito maior a jusante do cilindro. A simulação do verdadeiro domínio físico de influência do cilindro seria talvez impraticável e mesmo não é necessária, desde que se observem dimensões mínimas e condições de contorno que não interfiram na qualidade da solução na região de interesse. As dimensões escolhidas neste trabalho se assemelham às adotadas por Brooks e Hughes [7] e por Young e Ni [39] e podem ser vistas, junto com as condições de contorno, na figura 5.31.

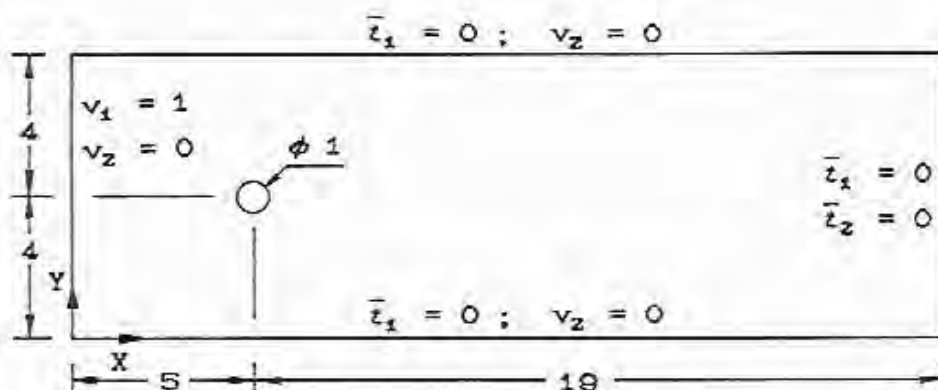


Figura 5.31 - Domínio e condições de contorno para o problema do cilindro imerso com  $Re=100$ .

As condições de contorno na entrada são do tipo essencial com prescrição das duas componentes de velocidade. O valor unitário da velocidade  $v_1$  na entrada, associado aos valores também unitários do diâmetro do tubo e da massa específica e à viscosidade  $\mu=0,01 \text{ kg/m s}$  compõe o número de Reynolds do problema. As condições de contorno nos lados longitudinais do domínio geralmente são homogêneas em relação a  $v_2$ . Com relação a  $v_1$ , encontra-se ambos os tipos de condição: valor unitário prescrito (essencial) ou força nula sobre o fluido no contorno (natural homogênea). No presente trabalho optou-se por esta última. Por fim, na saída aplica-se a condição natural homogênea para as duas componentes de velocidade, a qual é tão apropriada que, segundo a investigação de Behr et al.[5], permitiria a redução do domínio em estudo pela metade no seu comprimento.

A discretização do domínio, feita pelo programa de geração de malhas adaptado ao contexto deste trabalho, resultou em uma malha de 2431 nós e 2336 elementos. A distribuição dos elementos, mais concentrados nas proximidades do cilindro e no início da esteira de vórtices, pode ser observada na figura 5.32. A figura 5.33 mostra um detalhe da malha nas imediações do cilindro. A visualização da malha foi feita através do programa GAELI [17].

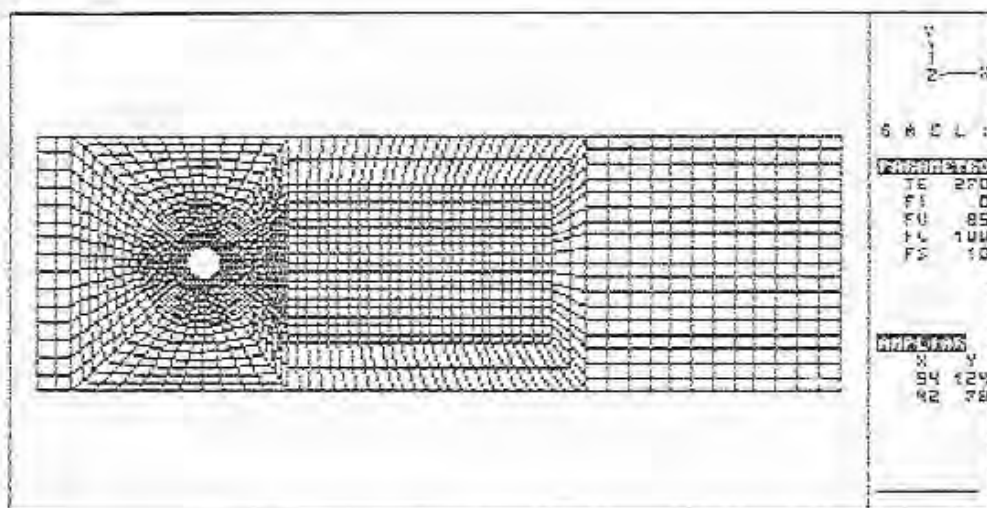


Figura 5.32 - Malha de nós e elementos para o problema do cilindro imerso.

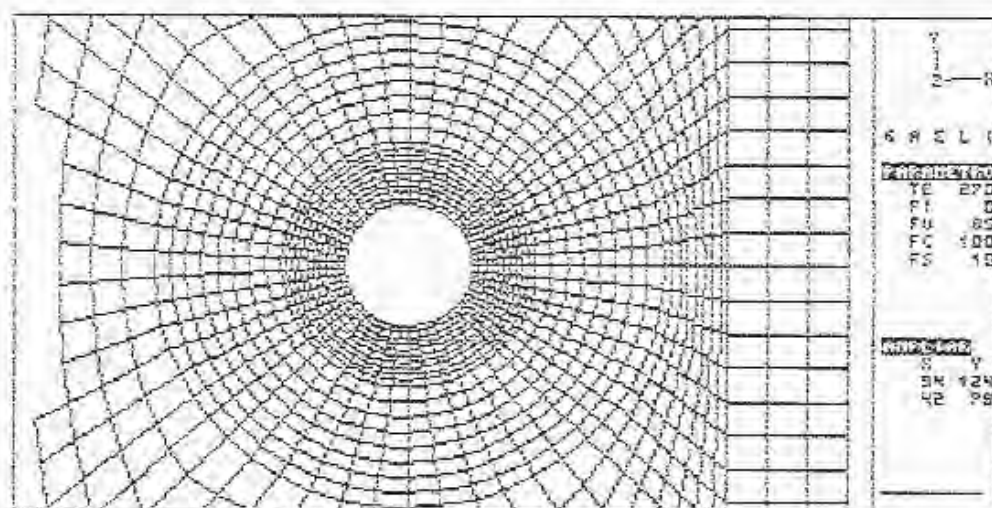


Figura 5.33 - Detalhe da malha em torno do cilindro.

Uma tentativa de simulação com o emprego do método MSU no tratamento dos termos convectivos resultou em um campo de velocidade absolutamente estável com dois vórtices simétricos na zona de recirculação. Esta configuração é típica de um escoamento com  $Re < 40$  e era esperada, devido ao efeito fortemente dissipativo



do método MSU.

Quando os termos da convecção passaram a ser tratados da forma convencional de Galerkin, o escoamento se desenvolveu, oscilações começaram a surgir na linha a jusante do centro do cilindro e se amplificaram constantemente até atingir uma amplitude e frequência estáveis. As figuras 5.34 e 5.35 mostram um histórico da velocidade  $v_z$  em dois pontos do eixo da esteira de vórtices. Os resultados mostram grande semelhança com os obtidos por Engelman e Jamnia [13] nas curvas B e C, respectivamente, da figura 5.37, correspondentes a pontos semelhantes do escoamento. Note-se que os valores da abscissa (tempo) nesta figura devem ser multiplicados por 10. A figura 5.36 é o histórico do primeiro nó a jusante do cilindro na altura do centro do mesmo. Pode-se observar nitidamente que este foi o último nó a atingir a amplitude estável nas oscilações, o que revela o importante efeito amortecedor e estabilizador exercido pelo escoamento principal sobre a esteira de vórtices. A dissipação da energia dos vórtices pode ser melhor observada no decaimento da amplitude das oscilações, que se nota no perfil da velocidade  $v_z$  na linha do centro do cilindro (figura 5.38).

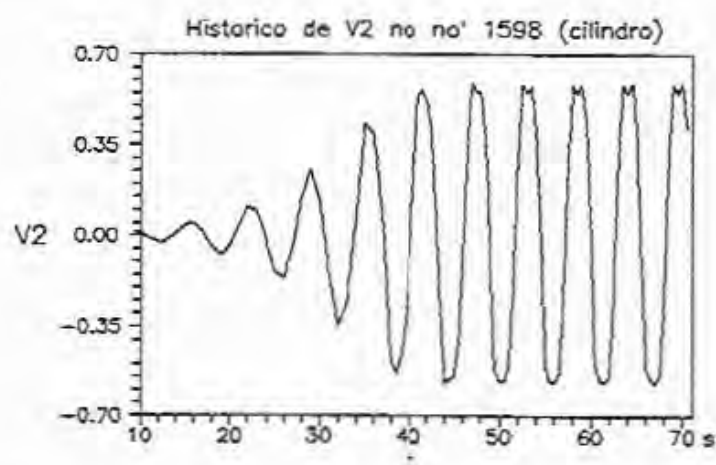


Figura 5.34 - Cilindro: histórico da velocidade  $v_z$  no ponto (9,04;4,0), a 4 diâmetros do centro do cilindro.



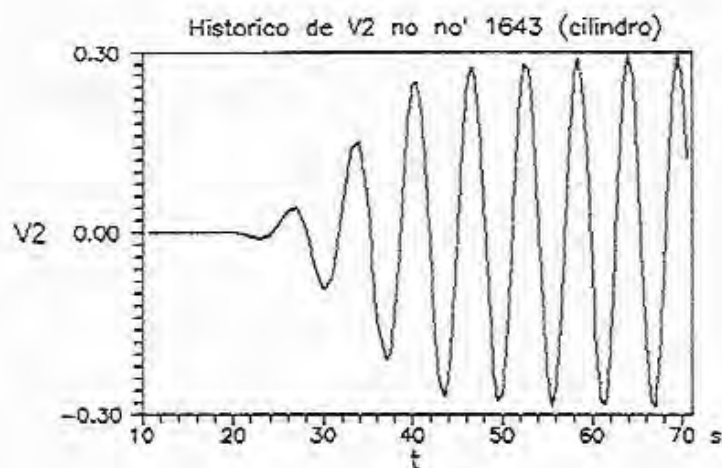


Figura 5.35 - Cilindro: histórico da velocidade  $v_z$  no ponto (24;4), a 19 diâmetros do centro do cilindro.

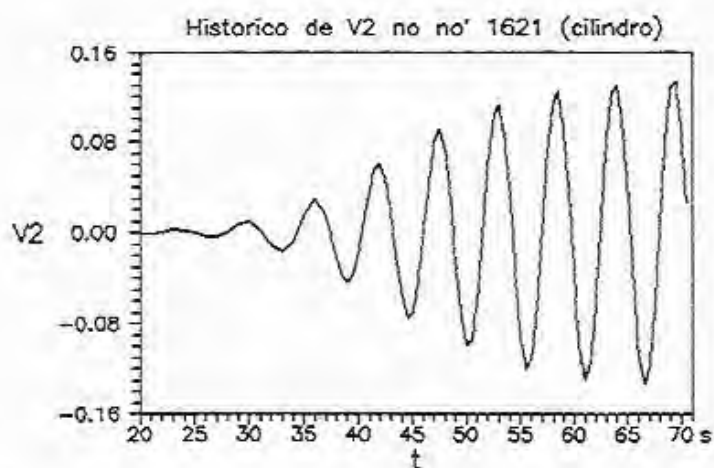


Figura 5.36 - Cilindro: histórico da velocidade  $v_z$  no ponto (5,55;4,0), junto ao cilindro.

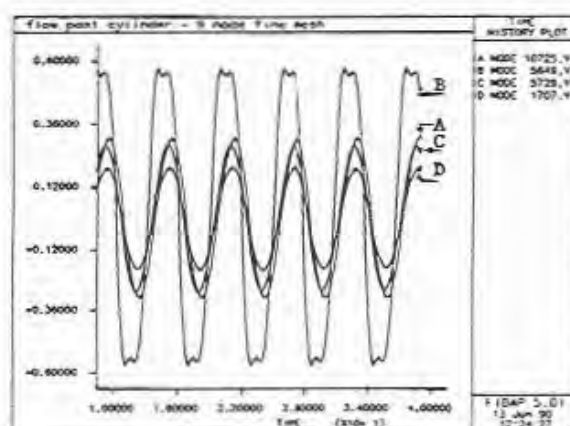


Figura 5.37 - Histórico de  $v_2$  para nós na mesma altura do centro do cilindro e afastados deste por: A) 1 diâmetro; B) 4 diâmetros; C) 20 diâmetros; D) 25,2 diâmetros. (segundo Engelman e Jamnia [13])

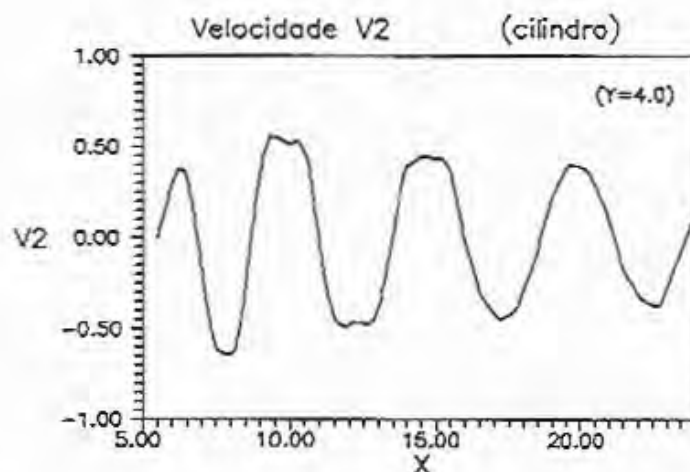


Figura 5.38 - Cilindro: perfil da velocidade  $v_2$  na linha a jusante do centro.

As figuras 5.34 e 5.36 também nos permitem avaliar a frequência do desprendimento de vórtices. O parâmetro adimensional relacionado a esta frequência é o número de Strouhal, calculado da seguinte forma

$$St = \frac{f D}{V_{\infty}} \quad (57)$$

onde  $f$  é a frequência de desprendimento de vórtices (em 1/s ou Hz),  $D$  é o diâmetro do cilindro (em m) e  $V_\infty$  é a velocidade do escoamento principal (em m/s). Como estas duas últimas quantidades são unitárias, o número de Strouhal fica igual à frequência neste caso. O período das oscilações inferido das figuras 5.34 a 5.36 é de aproximadamente 6 segundos, o que resulta em uma frequência e  $St$  iguais a 0,1667. Este valor está em perfeito acordo com os resultados obtidos por Brooks e Hughes [6] e Young e Ni [39] e com o valor experimental citado por Schlichting [36], Behr et al. [5] e Engelman e Jamnia [13] obtém um resultado um pouco superior ( $\approx 0,175$ ), enquanto Zukauskas [42] apresenta um valor inferior ( $\approx 0,155$ ).

Outros valores característicos deste escoamento são os coeficientes de arrasto,  $C_D$ , e de sustentação,  $C_L$ , do cilindro, cujo cálculo é mostrado a seguir

$$C_D = \frac{t_1}{(\rho V_\infty^2 D/2)} \quad (58)$$

$$C_L = \frac{t_2}{(\rho V_\infty^2 D/2)} \quad (59)$$

$$\text{onde } t_1 = \int_{\Gamma_{cyl}} (\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2) d\Gamma$$

$$t_2 = \int_{\Gamma_{cyl}} (\sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2) d\Gamma$$

Como foi exposto no capítulo 2,  $\sigma_{ij}$  são as componentes do tensor das tensões,  $n_i$  são os cossenos diretores da normal à superfície do cilindro,  $\rho$  é a massa específica (em kg/m<sup>3</sup>) e  $\Gamma_{cyl}$  é o contorno do cilindro. Nota-se que os coeficientes de arrasto e sustentação dependem primariamente do tensor das tensões, que por sua vez depende em grande parte da pressão. Como já foi visto, o programa em estudo apresenta dificuldades no cálculo da pressão, o que se reflete também nos valores globais dos coeficientes. As figuras 5.39 e 5.40 apresentam valores de  $C_D$  e  $C_L$  correspondentes ao último ciclo de desprendimento de vórtices simulado. Apesar da

ausência de suavidade na distribuição dos resultados, exceto talvez no último semi-ciclo de  $C_D$ , os valores oscilam em torno de valores médios. Esta oscilação é característica do fenômeno transiente e decorre da variação do valor da pressão na superfície do cilindro à medida que se desprendem os vórtices. O coeficiente de sustentação deve oscilar em torno de zero e o valor médio de  $C_D$  resulta próximo dos obtidos experimentalmente: 1,6 segundo Schlichting [36] e 1,4 segundo Zukauskas [42]. Engelman e Jamnia [13] e Behr et al. [5] obtém valores concordantes, cuja média vale 1,41.

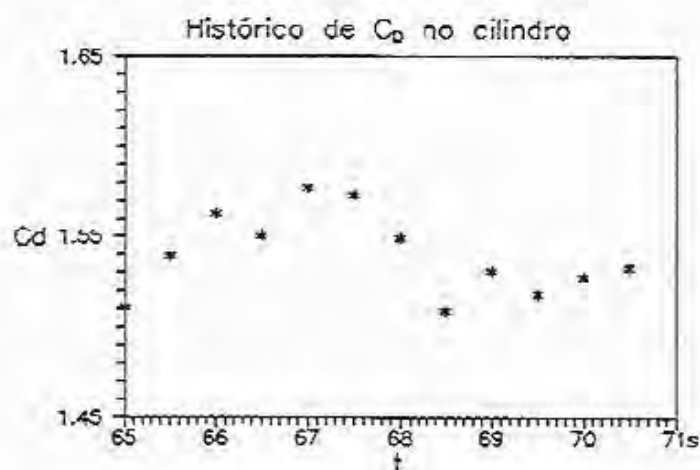


Figura 5.39 - Cilindro: histórico de  $C_D$ .

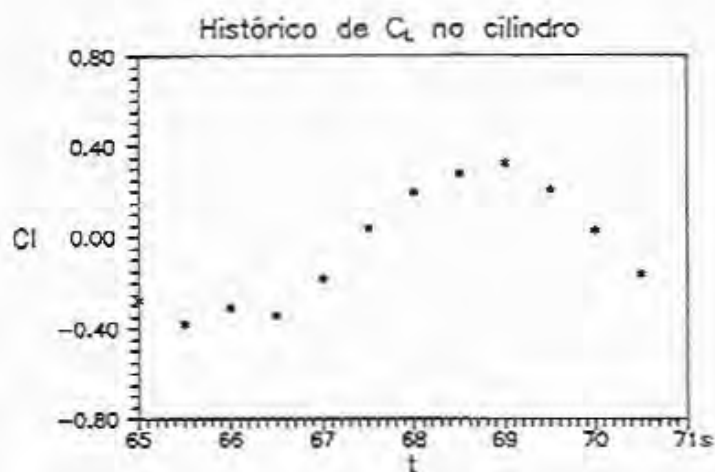
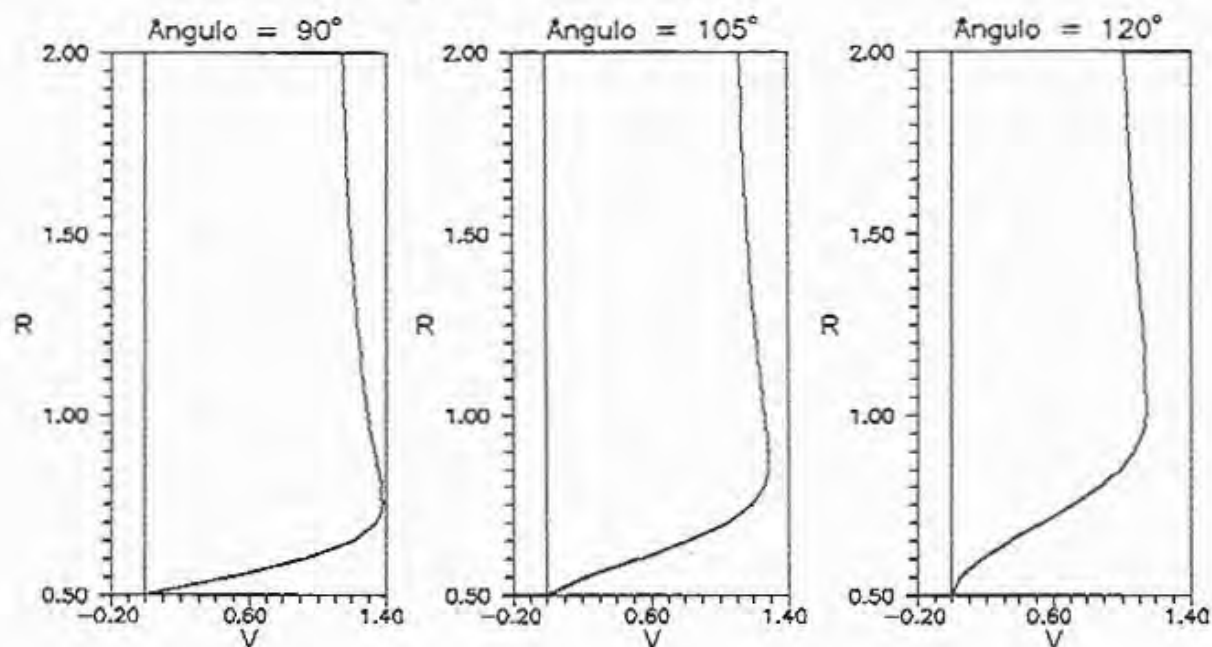


Figura 5.40 – Cilindro: histórico de  $C_L$ .

As figuras seguintes têm por objetivo aproveitar os resultados da simulação e os recursos de pós-processamento para possibilitar uma observação mais física dos resultados. Os gráficos que compõe a figura 5.41 representam perfis da componente de velocidade tangencial ao cilindro e permitem observar o efeito do gradiente adverso de pressão na camada limite até o momento do descolamento no ângulo de  $127,5^\circ$  e adiante, quando ocorre a recirculação. A figura 5.41 corresponde aos resultados calculados para 68 segundos de escoamento e o ângulo é medido no sentido horário a partir do ponto de estagnação frontal do cilindro. A seqüência que compõe a figura 5.41 corresponde ao último ciclo completo de desprendimento de vórtices simulado, que compreende o desprendimento de 2 vórtices opostos. Cada quadro da seqüência representa um detalhe do campo de velocidades próximo ao cilindro, sendo o primeiro referente ao tempo de 65s e os seguintes defasados de 0,5s de escoamento até o último (70,5s), cuja semelhança com o primeiro é notável. A representação por linhas de corrente é usada na figura 5.43 para permitir a visualização global do escoamento durante o desprendimento de um vórtice.

Velocidade tangencial ao cilindro



Velocidade tangencial ao cilindro

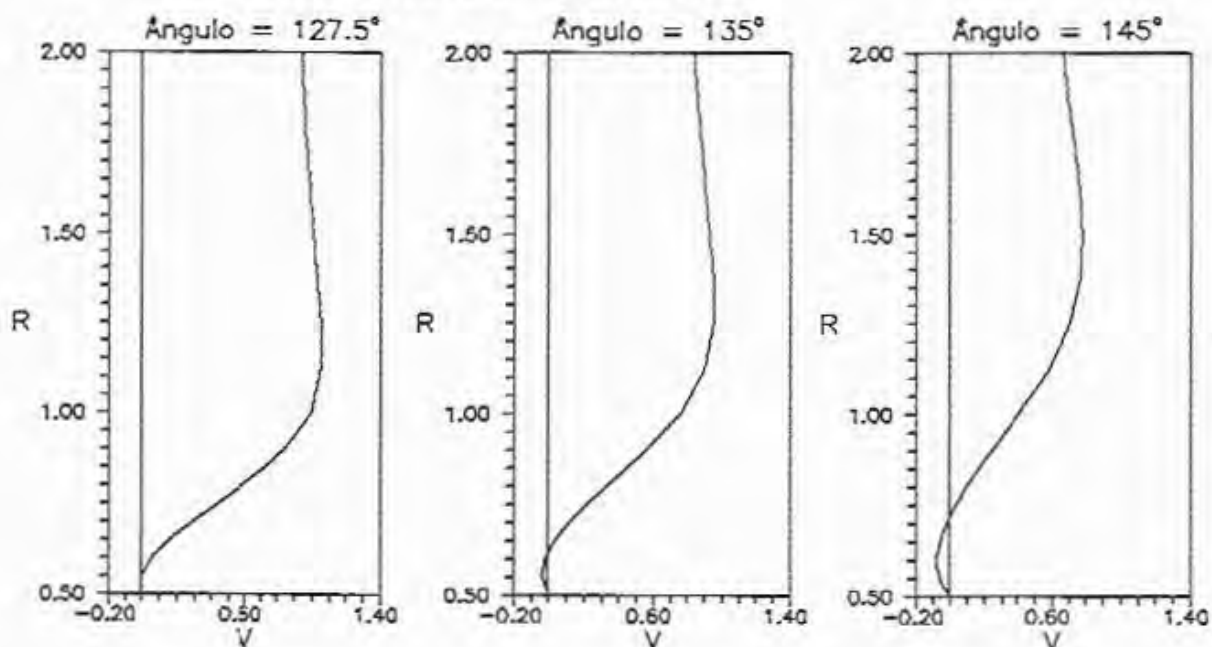


Figura 5.41 - Perfis da velocidade tangencial junto ao cilindro.  
(tempo = 68s)



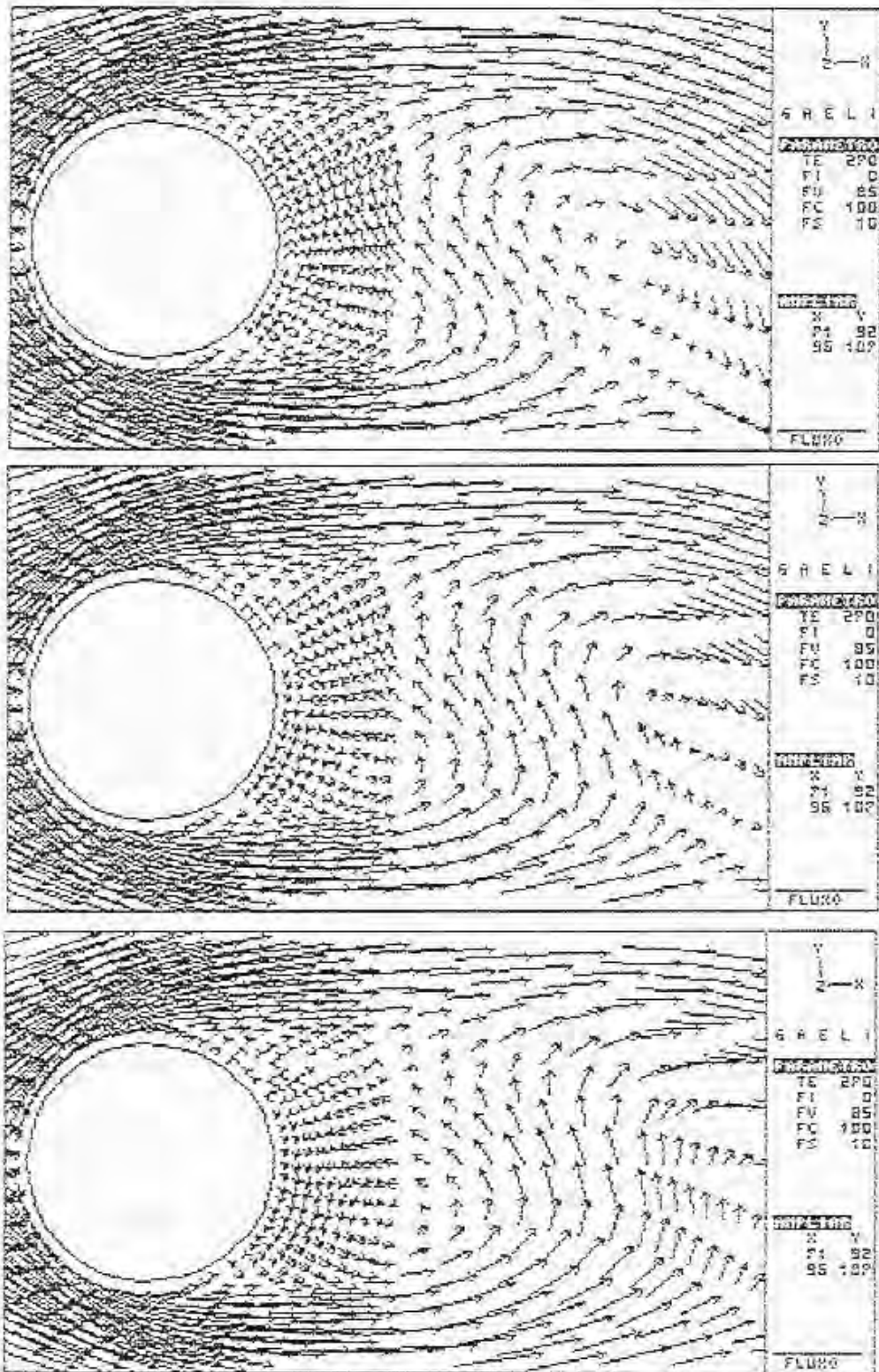


Figura 5.42a - Campo de velocidades em torno do cilindro.  
(tempo = 65s, 65,5s e 66s)

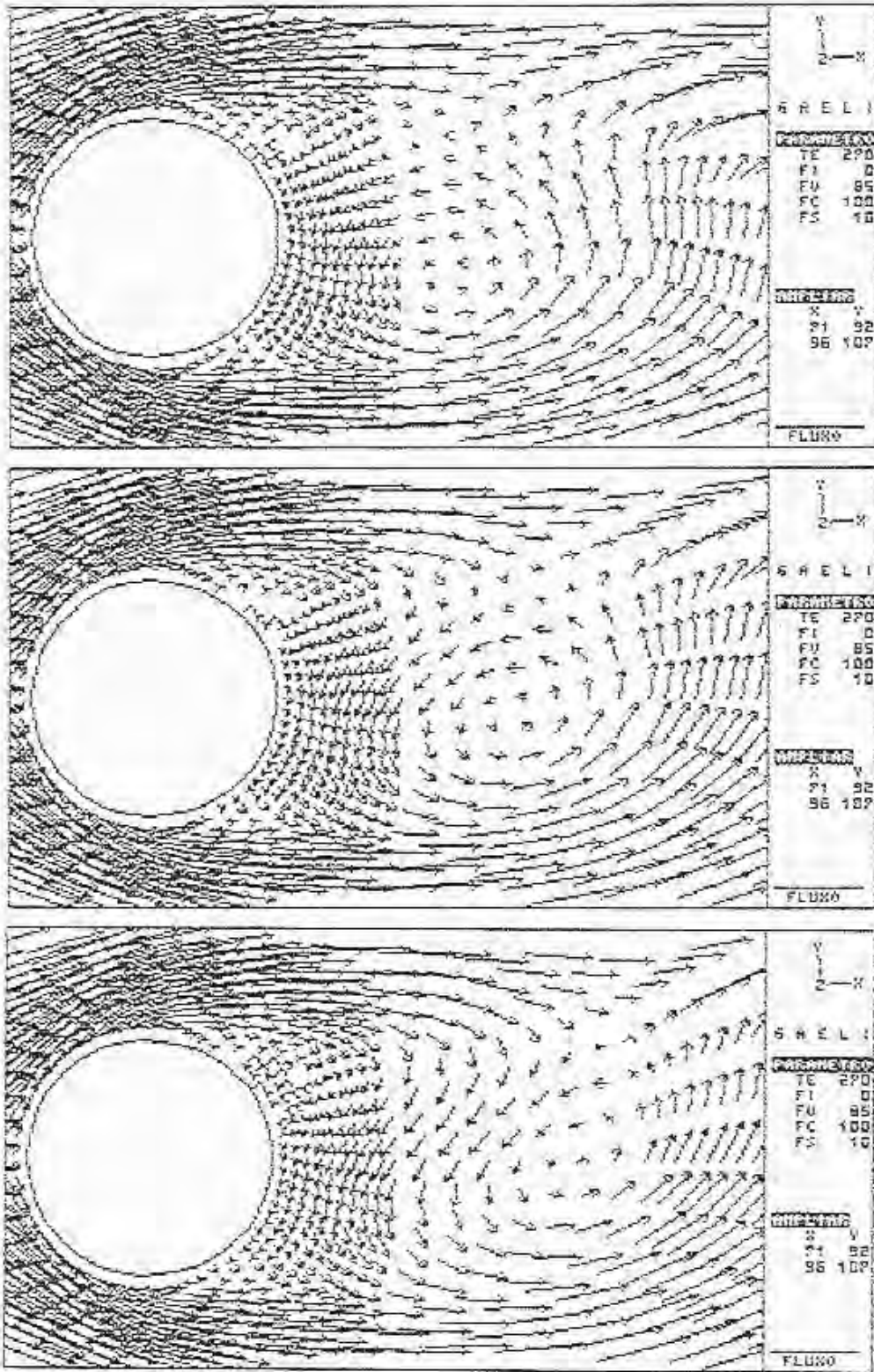


Figura 5.42b - Campo de velocidades em torno do cilindro.  
(tempo = 66,5s, 67s 67,5s)

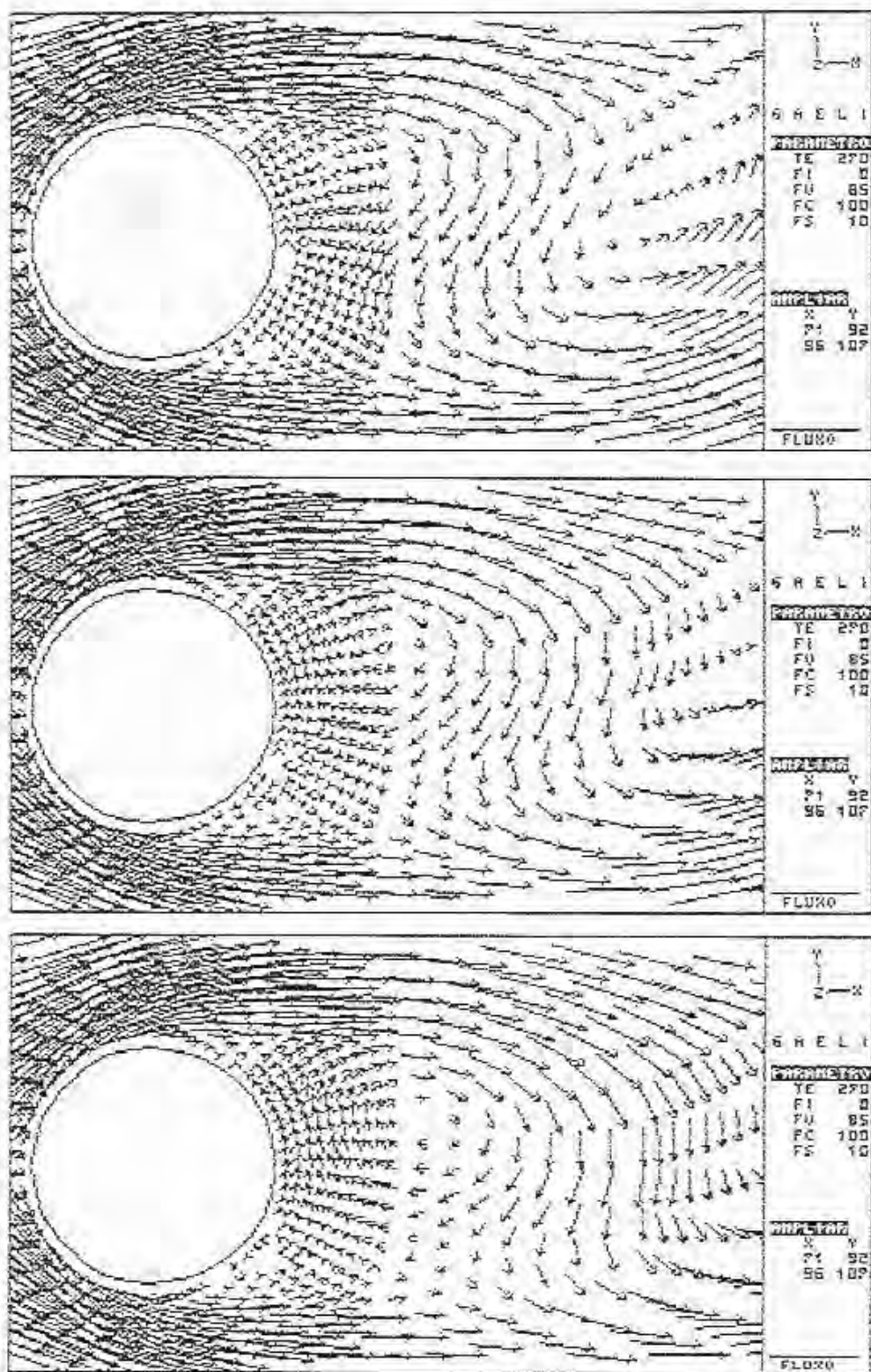


Figura 5.42c - Campo de velocidades em torno do cilindro.  
(tempo = 68s, 68,5s e 69s)

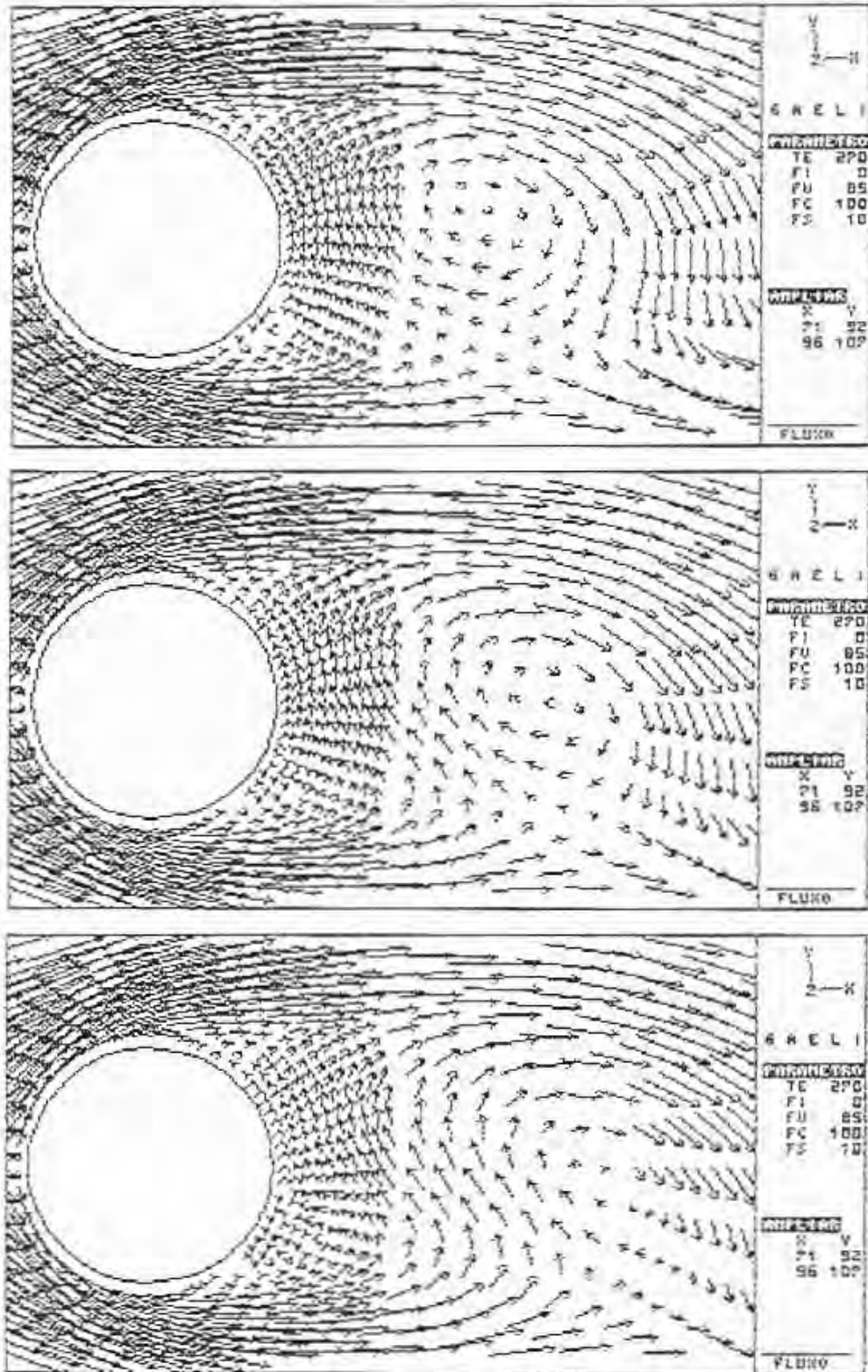


Figura 5.42d - Campo de velocidades em torno do cilindro.  
(tempo = 69,5s, 70s e 70,5s)



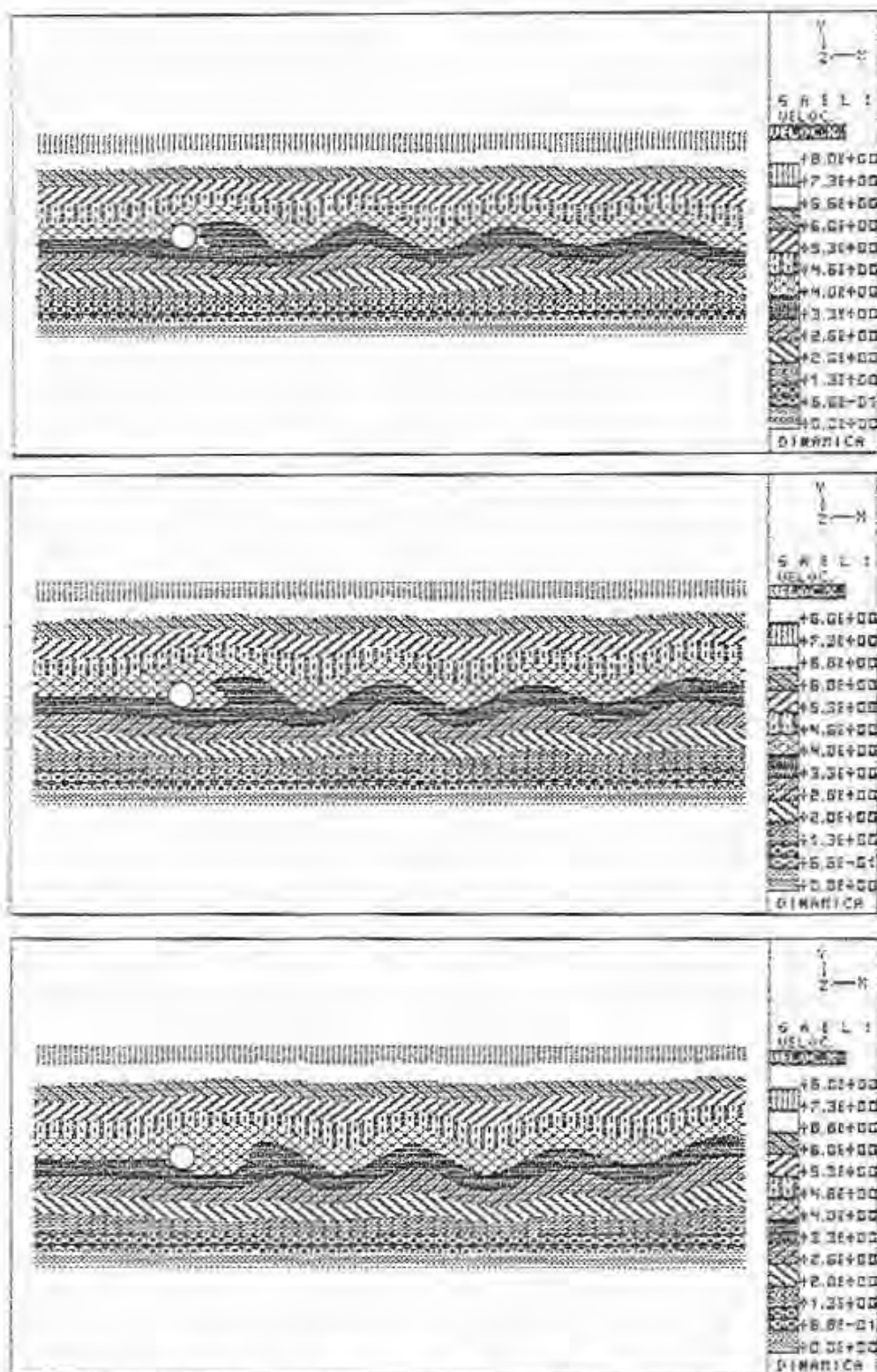


Figura 5.43 - Linhas de corrente no problema do cilindro imerso.  
(tempo = 65s, 66s e 67s)

## 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

O programa desenvolvido no presente trabalho mostrou-se capaz de simular escoamentos transientes laminares incompressíveis e não-isotérmicos em domínios bidimensionais com boa precisão nos casos de  $Re$  baixos até moderados, ou seja, menores do que 1000. Foi comprovada sua capacidade de resolver problemas com grande número de incógnitas ao simular-se, no caso do cilindro imerso, um domínio com quase 5000 graus de liberdade. O programa mostrou-se eficiente apenas na solução de problemas com  $Re$  da ordem de 100 ou menor, diminuindo sua eficiência à medida que a não-linearidade do termo convectivo predominava. Para escoamentos com  $Re$  da ordem de 1000 ou maiores, é preciso aprimorar a forma de tratamento do termo convectivo, aparente causa da perda de precisão. O programa é ainda capaz de resolver problemas isolados de escoamento isotérmico e de condução de calor pura.

A seguir destaca-se alguns aspectos relevantes do estudo realizado e faz-se algumas sugestões para o aprimoramento do programa e para a continuação do trabalho iniciado.

- O campo de velocidades, nas condições iniciais e a cada passo de tempo, deve satisfazer a condição de divergência nula, ao menos no nível de precisão correspondente ao valor do parâmetro de penalidade.

- Existe uma relação ótima entre o valor do parâmetro de penalidade e o da tolerância no método de gradientes conjugados (MGC), a qual é mais evidente nos casos de  $Re$  igual ou maior que 100. Indica-se como aproximação inicial a proporção: tolerância= $10^{-3}/\alpha$ . Valores muito discrepantes podem prejudicar ou



impedir a obtenção da solução.

- O método MSU de Rice e Schnipke [33] tem efeito muito forte de difusão artificial nos resultados. O uso seletivo do método, em conjunto com a formulação tradicional de Galerkin e em função do número de Peclet local, parece ser uma boa alternativa. Estudos posteriores nesta direção devem buscar um valor limite ideal para o  $Pe$  local, partindo de um valor próximo de 100. Outra alternativa pode ser o uso de diferença "a montante" de ordem superior a um, o que envolveria a extrapolação da linha de corrente para elementos vizinhos.

- Os resultados obtidos pelo programa para o campo de pressões deixam muito a desejar. As oscilações espúrias são tão fortes, que outros métodos de suavização também não conseguiriam obter um campo razoável a partir dos resultados gerados. Para superar definitivamente o problema, parece ser necessária a implementação de outro tipo de elemento mais estável, como o de interpolação biquadrática da velocidade e linear da pressão. Para uma tentativa de remediar o problema, sem o elevado custo da troca de elemento, pode-se buscar obter a pressão através da equação de Poisson originária da equação da continuidade e característica de muitos métodos, ao invés de calculá-la pelo termo de penalidade.

- A solução do sistema de equações através do MGC mostrou-se robusta, sendo capaz de resolver problemas fortemente não-lineares, como os da cavidade com  $Re=10000$  e o do escoamento aberto em torno do cilindro. O MGC revelou-se eficiente na solução de problemas quase-lineares, isto é, com  $Re$  baixos, exigindo um número de iterações relativamente baixo para atingir a convergência. Quando a não-linearidade era significativa, no entanto, o método mostrou-se muito demorado. Os novos recursos computacionais disponíveis, que permitem o trabalho com grandes matrizes na memória central, sugerem que se use um processo direto de inversão da matriz de coeficientes a cada passo de tempo, alterando-se a partir daí apenas o vetor do lado direito

até a convergência.

Além das sugestões feitas acima com vistas à superação das deficiências apresentadas pelo programa, sugere-se ainda, em continuação ao trabalho, a implementação de um modelo de turbulência, com o objetivo de possibilitar ao programa a simulação de escoamentos com  $Re$  mais elevado, a adimensionalização das equações e a adaptação a domínios axissimétricos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALLAIRE,P.E., ROSEN,M.C., RICE,J.G. Simplex finite element analysis of viscous incompressible flow with penalty function formulation. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.1, p.71-88, 1985.
- [2] ALQUATI,E.L.G. Precondicionamento do método dos gradientes conjugados numa formulação elemento-por-elemento. Porto Alegre: CPGEC, 1991. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola de Engenharia UFRGS.
- [3] ARGYRIS,J. et al. Finite element solution of viscous flow problems. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FINITE ELEMENTS IN FLOW PROBLEMS, 5, 1984, Austin, Texas. *Finite elements in fluids*. Chichester: John Wiley, 1985. v.6, cap.3, p.89-114.
- [4] AWRUCH,A.M. Un modelo matematico para estudio del movimiento de aguas "poco profundas" en regimen no permanente. Porto Alegre: CPGEC, 1976. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola de Engenharia UFRGS.
- [5] BEHR,M. et al. Vorticity-streamfunction formulation of unsteady incompressible flow past a cylinder: sensitivity of the computed flow field to the location of the outflow boundary. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v.12, p.323-342, 1991.
- [6] BROOKS,A.N., HUGHES,T.J.R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.32, p.199-259, 1982.
- [7] CAREY,G.F., KRISHNAN,R. Penalty approximation, iteration, and continuum for Navier-Stokes problems. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FINITE ELEMENTS IN FLOW PROBLEMS, 5, 1984, Austin, Texas. *Finite elements in fluids*. Chichester: John Wiley, 1985. v.6, cap.8, p.189-197.

- [8] CAREY,G.F., ODEN,J.T. Finite elements: fluid mechanics. In: BECKER,E.B., CAREY,G.F., ODEN,J. Finite elements. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1984, v.6.
- [9] CARNHAN,B., LUTHER,H.A., WILKES,J.O. Applied Numerical Methods. New York: John Wiley, 1969. 604 p.
- [10] CHUNG,T.J. Finite element analysis in fluid dynamics. New York: McGraw-Hill, 1978. 378p.
- [11] DHAUBADEL,M.N., REDDY,J.N., TELIONIS,D.P. Finite element analysis of fluid flow and heat transfer for staggered bundles of cylinders in cross flow. International Journal for Numerical Methods in Fluids, v.7, p.1325-1342, 1987.
- [12] DUROCHER,L.L., GASPER,A. A versatile two-dimensional mesh generator with automatic bandwidth reduction. Computer and Structures, v.10, p.561-575, 1979.
- [13] ENGELMAN,M.S., JAMNIA,M-A. Transient flow past a circular cylinder: a benchmark solution. International Journal for Numerical Methods in Fluids, v.11, p.985-1000, 1990.
- [14] ENGELMAN,M.S. et al. Consistent vs. reduced integration penalty methods for incompressible media using several old and new elements. International Journal for Numerical Methods in Fluids, v.2, p.25-42, 1982.
- [15] FRANCA,L.P., FREY,S.L., HUGHES,T.J.R. Stabilized finite element methods. I. Application to the advective-diffusive model. Rio de Janeiro:Laboratório Nacional de Computação Científica, 1990. (Relatórios de Pesquisa e Desenvolvimento, 32).
- [16] GRESHO,P.M. Time integration and conjugate gradient methods for the incompressible Navier-Stokes equations. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FINITE ELEMENTS IN WATER RESOURCES, 6, 1986, Lisboa. Proceedings... Berlin: Springer, 1986. p.3-27.
- [17] GRESHO,P.M., SANI,R.L. On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FINITE ELEMENTS IN FLOW PROBLEMS, 6, 1986, Antibes-Juan les Pins. Finite Elements in Fluids. Chichester: John Wiley, 1988, v.7, p. 123-157.

- [18] GROEHS,A.G., SANTOS,M.I.G. GAELI - Gerador e analisador de estruturas lineares. Parte 1/2 - Versão 03-90. Porto Alegre: CPGE/UFRRGS, 1990.
- [19] HUGHES,T.R.J., BROOKS,A.N. A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions applications to the streamline-upwind procedure. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FINITE ELEMENTS IN FLOW PROBLEMS,3,1980, Banff, Alberta. Finite elements in fluids. Chichester: John Wiley, 1982. v.4, p.47-65
- [20] HUGHES,W.P., GAYLORD,E.W. Basic equations of engineering science. New York: Schaum, 1964. 163p.
- [21] JENNINGS,A. Matrix computations for engineers and scientists. London: John Wiley, 1977. 330p.
- [22] JENNINGS,A. MALIK,G.M. The solution of sparse linear equations by the conjugate gradient method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.12, p.141-158, 1978.
- [23] KIM,S.W., DECKER,R.A. Velocity pressure integrated versus penalty finite element methods for high-Reynolds number flows. International Journal for Numerical Methods in Fluids, v.9, p.43-57, 1989.
- [24] KREITH,F. Princípios da transmissão de calor. 3.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1977. 550p.
- [25] LANGTANGEN,H.P. A method for smoothing derivatives of multilinear finite element fields. Communications in Applied Numerical Methods, v.5, p.275-281, 1989.
- [26] LIU,Y., CHEN,K. More findings in using the program, "A versatile two-dimensional mesh generator with automatic bandwidth reduction". Computer and Structures, v.32, n.1, p.145-147, 1989.
- [27] NALLASAMY,M., PRASAD,K.K. On cavity flow at high Reynolds numbers. Journal of Fluid Mechanics, v.79, pt.2, p.391-414, 1977.
- [28] PATANKAR,S.V. Numerical heat transfer and fluid flow. Washington: Hemisphere, 1980.



- [29] PELLETIER,D., FORTIN,A., CAMARERO,R. Are FEM solutions of incompressible flows really incompressible? (or how simple flows can cause headaches!). *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v.9, p99-112, 1989.
- [30] PIRONNEAU,O. *Finite element methods for fluids*. [S.l.: s.n., 1991] 143p.
- [31] REDDY,J.N. *An introduction to the finite element method*. New York: McGraw-Hill, 1984. 495p.
- [32] REDDY,J.N. On penalty function methods in the finite element analysis of flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v.2, p.151-171, 1982.
- [33] RICE,J.G., SCHNIPKE,R.J. A monotone streamline upwind finite element method for convection-dominated flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.48, p.313-327, 1985.
- [34] RICE,J.G., SCHNIPKE,R.J. An equal-order velocity-pressure formulation that does not exhibit spurious pressure modes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.58, p.135-149, 1986.
- [35] ROACHE,P.J. *Computational fluid dynamics*. Albuquerque, N.M.: Hermosa, 1972. 434p.
- [36] SCHLICHTING,H. *Boundary-layer theory*. 7.ed. New York: McGraw-Hill, 1979. 817p.
- [37] SCHREIBER,R., KELLER,H.B. Driven cavity flows by efficient numerical techniques. *Journal of Computational Physics*, v.49, n.2, p.310-333, Feb.1983.
- [38] SHAW,C.T. Using a segregated finite element scheme to solve the incompressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v.12, p.81-92, 1991.
- [39] YOUNG,Der-Liang. NI,Wey-Bin. Penalty finite element applications to flow problems. In: JOINT WORKSHOP ON RECENT ADVANCES IN COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS, 1989, Princeton. *Proceedings...* Berlin: Springer, 1989. p.484-507
- [40] ZIENKIEWICZ,D.C. et al. Finite elements in fluid mechanics - a decade of progress. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FINITE ELEMENTS FOR FLOW PROBLEMS, 5, 1982, Tokyo. *Finite elements in fluids*. Chichester: John Wiley, 1984. v.5, p.1-26.



- [41] ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L. The finite element method: basic concepts and linear applications. 4.ed. London: McGraw-Hill, 1989, 648p.
- [42] ZUKAUSKAS, A. Heat transfer from tubes in crossflow. Advances in Heat Transfer, n.8, p.93-160, 1972.

## APÊNDICE I

### MULTIPLICADOR DE LAGRANGE E FUNÇÃO DE PENALIDADE

Para exemplificar a aplicação de restrições através de multiplicadores de Lagrange ou de termos de penalidade serão usadas as equações que descrevem o escoamento de Stokes, um caso particular das equações de Navier-Stokes, em que os termos viscosos predominam largamente sobre os termos da derivada substantiva (os dois primeiros termos da equação (11) no Capítulo 2), permitindo que estes sejam desprezados.

Considerando como ponto de partida o problema variacional com restrição, como apresentado no item 3 do capítulo 2 e na equação (25), a formulação variacional do problema de Stokes fica

$$\int_{\Omega} \left\{ \mu \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\} d\Omega = \int_{\Gamma_{2v}} \omega_k \bar{t}_i d\Gamma \quad (I.1)$$

$i, j = 1, 2 ; k = i$

onde  $v_i$  = componentes da velocidade - [m/s]

$\omega_k$  = funções de teste ou funções-peso

$\mu$  = viscosidade dinâmica do fluido - [kg/m s]

$\bar{t}_i$  = força sobre o fluido no contorno - [N/m<sup>2</sup>]

O funcional que dá origem à equação anterior é clássico e pode ser escrito da seguinte forma [8]

$$J(v_i) = \int_{\Omega} \frac{\mu}{2} \left\{ \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\} d\Omega - \int_{\Gamma} v_k \bar{t}_i d\Gamma \quad (I.2)$$

$i, j = 1, 2 ; k = i$

Como já foi explicado, esta formulação impõe que o

espaço de funções aproximadoras da velocidade satisfaça de antemão a condição de divergência nula. A fim de relaxar esta exigência, pode-se incorporar a restrição ao funcional da equação (I.2) através de um multiplicador de Lagrange,  $\lambda$ . O funcional modificado vem dado por

$$\bar{J}(v_i, \lambda) = J(v_i) + \int_{\Omega} \lambda \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right] d\Omega \quad (I.3)$$

$i = 1, 2$

Anulando-se a primeira variação do funcional modificado para obter a forma variacional correspondente, tem-se

$$\delta \bar{J} = \int_{\Omega} \left\{ \mu \frac{\partial(\delta v_k)}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \right\} d\Omega - \int_{\Gamma_{zv}} (\delta v_k) \bar{t}_i d\bar{\Gamma} +$$

$$+ \int_{\Omega} \lambda \frac{\partial(\delta v_k)}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \lambda \left[ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right] d\Omega = 0 \quad (I.4)$$

$i, j = 1, 2 ; k = i$

A primeira variação das componentes de velocidade,  $\delta v_k$ , será chamada de  $\omega_k$  e  $\delta \lambda$  é a primeira variação do multiplicador de Lagrange. Como a equação (I.4) deve ser válida para valores arbitrários de  $\omega_k$  e de  $\delta \lambda$ , segue que

$$\int_{\Omega} \left\{ \mu \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] + \lambda \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} \right\} d\Omega - \int_{\Gamma_{zv}} \omega_k \bar{t}_i d\bar{\Gamma} = 0 \quad (I.5)$$

$$\int_{\Omega} \delta \lambda \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\Omega = 0 \quad (I.6)$$

$$i, j = 1, 2 ; k = i$$

que é a formulação variacional correspondente ao funcional  $\bar{J}$ . No Capítulo 2 é mostrado que  $\lambda = -p$ .

Outra forma de se incorporar uma restrição a um funcional consiste em acrescentar-lhe um termo de penalidade, o qual leva a solução a cumprir de forma aproximada a condição imposta. No método da penalidade, o funcional  $J(v_i)$  recebe a

seguinte modificação [8]

$$\bar{J}_\alpha(v_i) = J(v_i) + \frac{1}{2} \int_\Omega \alpha \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega \quad (1.7)$$

$i = 1, 2$

onde  $\alpha$  é um escalar de valor elevado, chamado parâmetro de penalidade. Para obter a formulação variacional equivalente, procede-se como no caso anterior e tem-se

$$\delta \bar{J}_\alpha = \int_\Omega \left\{ \mu \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\} d\Omega + \int_\Omega \left( \alpha \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} d\Omega -$$

$$- \int_{\Gamma_{2v}} \omega_k t_i d\bar{\Gamma} = 0 \quad (1.8)$$

$i, j = 1, 2 ; k = i$

Comparando-se as equações (1.5) e (1.8), pode-se ver que a expressão entre parêntesis na segunda integral desta última equação corresponde a uma aproximação do multiplicador de Lagrange e, por sua vez, da pressão.

## APÊNDICE II

### MSU - DETALHES DA IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO

O método baseado em Rice e Schnipke [33] para o tratamento especial do termo convectivo, introduzido no item 3 do Capítulo 3 e aqui chamado de MSU (*Monotone Streamline Upwind*), será detalhado a seguir.

Como já foi visto, quando se faz uma mudança de coordenadas conveniente, os termos que expressam a convecção de uma propriedade  $\phi$  reduzem-se a um só, calculado na direção da linha de corrente. Para a implementação do método faz-se a seguinte hipótese simplificativa

$$\rho \mathbf{v}_s \frac{\partial \phi}{\partial s} = \text{constante} \quad (\text{II.1})$$

onde  $s$  é a direção da linha de corrente,  $\mathbf{v}_s$  o vetor velocidade que é tangencial à mesma e  $\rho$  é a massa específica. Assim a formulação variacional do termo convectivo pode ser aproximada da seguinte forma

$$\frac{\rho \bar{\mathbf{v}}_s}{\Delta s} (\phi_j - \phi') \int_{\Omega_e} \phi_j d\Omega_e \quad (\text{II.2})$$

onde  $\phi$  = valor de  $\phi$  (veloc. ou temp.) no nó de jusante

$\phi_j$  = valor de  $\phi$  (veloc. ou temp.) no ponto de montante

$\phi_j$  = função de peso correspondente ao nó  $j$

$\bar{v}_j = \frac{(v_j + v')}{2}$  = média entre as velocidades no nó de jusante e no ponto de montante

$\Delta s = \sqrt{(x_j - x')^2 + (y_j - y')^2}$  = comprimento aproximado do segmento de linha de corrente no elemento

A estimativa do ponto de montante se faz através de um balanço de massa dos lados do elemento. Uma vez determinada a existência de um nó de jusante, conforme a condição estabelecida na equação (49) e na figura 3.1, renumera-se os nós e lados do elemento a partir deste nó, chamado de  $j$  ou  $II$ , como na figura II.1.

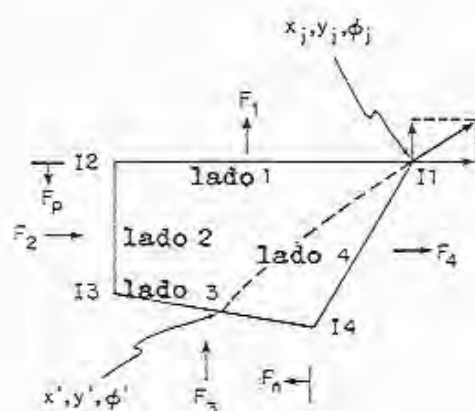


Figura II.1 - Lados e funções relativas ao nó de jusante.

O fluxo de massa em cada lado vem dado por seu respectivo fator  $F$ , como segue



$$\begin{aligned}
 F_1 &= \int_{I_1}^{I_2} -\rho v_2 \, dx + \int_{I_1}^{I_2} \rho v_1 \, dy \\
 F_2 &= \int_{I_2}^{I_3} \rho v_2 \, dx - \int_{I_2}^{I_3} \rho v_1 \, dy \\
 F_3 &= \int_{I_3}^{I_4} \rho v_2 \, dx - \int_{I_3}^{I_4} \rho v_1 \, dy \\
 F_4 &= \int_{I_4}^{I_1} -\rho v_2 \, dx + \int_{I_4}^{I_1} \rho v_1 \, dy
 \end{aligned}
 \tag{II.3}$$

Os fatores de interpolação empregados na determinação aproximada do ponto de montante baseiam-se em relações entre estes fluxos de massa. Rice e Schnipke [33] propõe a seguinte expressão para os fatores de interpolação  $F_p$  e  $F_n$

$$F_p = \max \{ \min \{ F_1/F_2, 1 \}, 0 \} \tag{II.4}$$

$$F_n = \max \{ \min \{ F_4/F_3, 1 \}, 0 \} \tag{II.5}$$

Estes fatores são empregados para o cálculo aproximado das coordenadas e do valor da propriedade transportada no ponto de montante, assinaladas com um apóstrofe.

$$x' = (1-F_p) x_{I_2} + (1-F_n) x_{I_4} + F_p F_n x_{I_3} \tag{II.6}$$

$$y' = (1-F_p) y_{I_2} + (1-F_n) y_{I_4} + F_p F_n y_{I_3} \tag{II.7}$$

$$\phi' = (1-F_p) \phi_{I_2} + (1-F_n) \phi_{I_4} + F_p F_n \phi_{I_3} \tag{II.8}$$

A idéia é fazer-se uma interpolação linear entre os nós do lado que contém o ponto de montante. Para tal, os fatores  $F_p$  e  $F_n$  variam entre zero e a unidade, devendo sempre pelo menos um deles ser igual a 1. Quando um dos fatores vale 1, ele anula automaticamente a contribuição do nó que não faz parte do lado que contém o ponto de montante. Uma análise mais acurada, no entanto, revela que, no caso de elementos quadriláteros não regulares, o cálculo dos fatores de interpolação através das expressões (II.4) e (II.5) pode levar à inconsistência. Se tomamos por exemplo a situação representada na figura II.2, observa-se que o fluxo de massa  $F_2$  é negativo, o que levaria o fator  $F_p$  a ser nulo. Erroneamente as equações (II.6) a (II.8)

interpolariam valores entre I2 e I4, ao invés dos nós I3 e I4, sendo ainda a soma dos pesos maior que um.

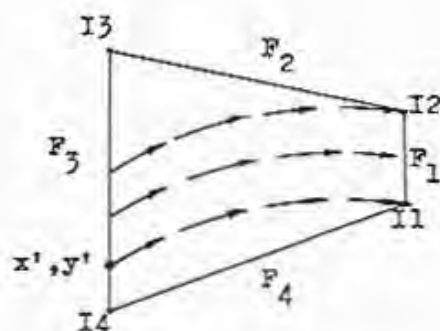


Figura II.2 - Exemplo de nó de jusante.

Para contornar o problema, foi alterado neste trabalho o cálculo dos fatores de interpolação, tendo sido adotada a forma que segue

$$F_p = \begin{cases} F_1/F_2 & \text{se } 0 \leq (F_1/F_2) \leq 1 \\ 1 & \text{nos demais casos} \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

$$F_n = \begin{cases} F_4/F_3 & \text{se } 0 \leq (F_4/F_3) \leq 1 \\ 1 & \text{nos demais casos} \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

O problema citado acima também pode ocorrer no caso de expansão no escoamento compressível que, apesar de fugir ao escopo deste trabalho, igualmente fica resolvido pelo emprego das expressões (II.9) e (II.10).

Tendo em vista que o método MSU se destina à obtenção de uma solução estável em discretizações mais grosseiras do domínio, ou seja, que empregam elementos maiores, considerou-se ainda a possibilidade ocorrer uma variação mais acentuada na direção da velocidade dentro do domínio de um elemento. No caso em que o ponto de montante estivesse no lado relativo número 4, o cálculo através das equações (II.6) a (II.8) resultaria na identidade entre o ponto de montante e o nó I3, uma vez que os

fatores  $F_p$  e  $F_n$  ficam iguais a um. O mesmo problema pode ocorrer se o ponto de montante se situar no lado relativo número 1. Para levar em conta esta situação, introduz-se dois novos fatores de interpolação,  $F_{r1}$  e  $F_{r4}$ , que são descritos a seguir

$$F_{r1} = \begin{cases} 0 & \text{se } F_1 \geq 0 \text{ e } F_4 \geq 0 \\ 1 & \text{se } F_4 < 0 \\ -(F_1/\bar{F}_1) & \text{se } F_1 < 0 \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

$$F_{r4} = \begin{cases} 0 & \text{se } F_4 \geq 0 \text{ e } F_1 \geq 0 \\ 1 & \text{se } F_1 < 0 \\ -(F_4/\bar{F}_4) & \text{se } F_4 < 0 \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

$$\text{onde } \bar{F}_1 = \left| \int_1^2 \rho v_2 dx \right| + \left| \int_1^2 \rho v_1 dy \right|$$

$$\bar{F}_4 = \left| \int_4^1 \rho v_2 dx \right| + \left| \int_4^1 \rho v_1 dy \right|$$

As equações de interpolação (II.6) a (II.8) são alteradas para incluir os novos fatores e ficam

$$x' = \left[ (1 - F_p)x_{I2} + (1 - F_n)x_{I4} + F_p F_n x_{I3} \right] (1 - F_{r1})(1 - F_{r4}) + F_{r4} (1 - F_{r1})x_{I2} + F_{r1} (1 - F_{r4})x_{I4} + F_{r1} F_{r4} x_{I1} \quad (\text{II.13})$$

$$y' = \left[ (1 - F_p)y_{I2} + (1 - F_n)y_{I4} + F_p F_n y_{I3} \right] (1 - F_{r1})(1 - F_{r4}) + F_{r4} (1 - F_{r1})y_{I2} + F_{r1} (1 - F_{r4})y_{I4} + F_{r1} F_{r4} y_{I1} \quad (\text{II.14})$$

$$\varphi' = \left[ (1 - F_p)\varphi_{I2} + (1 - F_n)\varphi_{I4} + F_p F_n \varphi_{I3} \right] (1 - F_{r1})(1 - F_{r4}) + F_{r4} (1 - F_{r1})\varphi_{I2} + F_{r1} (1 - F_{r4})\varphi_{I4} + F_{r1} F_{r4} \varphi_{I1} \quad (\text{II.15})$$

A forma final da matriz de convecção a nível de elemento correspondente à equação (II.2) será exemplificada a seguir, considerando-se um caso em que o nó de jusante é o terceiro e é único. A matriz será chamada  $FJ_e$  de dimensão  $[4 \times 4]$  e

para o caso citado cada coeficiente da matriz vale

$$\begin{aligned}
 f_{j_{e_{ik}}} &= 0 && \text{para } i \neq 3 \text{ e } k = 1,4 \\
 f_{j_{e_{31}}} &= \frac{\rho \bar{v}_s}{\Delta s} \left[ -(1 - F_{r1})(1 - F_{r4}) F_p F_n \right] \int_{\Omega_e} \phi_3 \, d\Omega_e \\
 f_{j_{e_{32}}} &= \frac{\rho \bar{v}_s}{\Delta s} \left\{ -(1 - F_{r4}) \left[ (1 - F_{r1})(1 - F_n) + (1 - F_{r1}) \right] \right\} \int_{\Omega_e} \phi_3 \, d\Omega_e \\
 f_{j_{e_{33}}} &= \frac{\rho \bar{v}_s}{\Delta s} \left[ 1 - F_{r1} F_{r4} \right] \int_{\Omega_e} \phi_3 \, d\Omega_e \\
 f_{j_{e_{34}}} &= \frac{\rho \bar{v}_s}{\Delta s} \left\{ -(1 - F_{r1}) \left[ (1 - F_{r4})(1 - F_p) + F_{r4} \right] \right\} \int_{\Omega_e} \phi_3 \, d\Omega_e
 \end{aligned}$$

Por último, foi testada uma forma alternativa de cálculo do segmento de linha de corrente  $\Delta s$ , baseado em uma aproximação quadrática. Em concordância com as conclusões de Rice e Schnipke [33], não se constatou qualquer alteração significativa nos resultados, sendo o tempo de processamento sensivelmente incrementado. Por isso, conservou-se o cálculo linear de  $\Delta s$ , como na equação (II.2). Como foi citado no capítulo 3, em condições de erro, como quando  $F_1$  e  $F_4$  são simultaneamente negativos (ainda que por um valor desprezível), o método precisa ser contornado e a formulação tradicional de Galerkin é usada em seu lugar.

## APÊNDICE III

### MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS

Será descrito o pré-condicionamento e o algoritmo de solução do MGC. Considera-se que o sistema de equações algébricas descrito no Capítulo 3 pode ser representado da seguinte forma genérica

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (\text{III.1})$$

onde  $A$  é a matriz global de coeficientes,  $x$  é o vetor de valores nodais a determinar e  $b$  é o vetor do lado direito, conhecido.

A matriz de pré-condicionamento  $B$  é formada pela diagonal principal da matriz de coeficientes  $A$  e pode ser decomposta em um produto de matrizes auxiliares

$$[B] = [T]^T [T] \quad (\text{III.2})$$

onde  $B = DA$

$$T = [DA]^{1/2}$$

O sistema original é transformado para a aplicação do MGC da seguinte forma

$$[\bar{A}]\{\bar{x}\} = \{\bar{b}\} \quad (\text{III.3})$$

onde  $\bar{A} = [T]^T [A] [T]^{-1}$

$$\bar{x} = [T]\{x\}$$

$$\bar{b} = [T]^{-T}\{b\}$$

O algoritmo geral do método é como segue

- a) - inicialização de  $\bar{x}$ , aplicando a solução do tempo anterior para  $x_0$  ou fazendo  $x_0=0$   
 -  $\bar{R}_0 = T^{-T} (b - Ax_0)$   
 -  $\bar{p}_0 = \bar{R}_0$
- b)  $\bar{\alpha}_i = \bar{R}_i^T \bar{R}_i / \bar{p}_i^T \bar{A} \bar{p}_i$
- c) -  $\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \bar{\alpha}_i \bar{p}_i$   
 - teste de convergência da norma euclidiana  $\|\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i\| / \|\bar{x}_{i+1}\|$
- d) -  $\bar{R}_{i+1} = b - \bar{A} \bar{x}_{i+1} = \bar{R}_i - \bar{\alpha}_i \bar{A} \bar{p}_i$   
 - teste de convergência da norma simples do resíduo  $\|\bar{R}_{i+1}\|$
- e) caso os dois testes anteriores apontarem a convergência, o processo é terminado aqui.
- f)  $\bar{\beta}_{i+1} = \bar{R}_{i+1}^T \bar{R}_{i+1} / \bar{R}_i^T \bar{R}_i$
- g)  $\bar{p}_{i+1} = \bar{R}_{i+1} + \bar{\beta}_i \bar{p}_i$
- h) retorna-se ao passo b).

Após obter a solução convergida para o problema modificado, calcula-se a solução do sistema original

$$\{x\} = [T]^{-1} \{\bar{x}\} \quad (\text{III.4})$$

Devido ao tratamento especial dado à não-linearidade do termo convectivo, que faz com que o vetor  $\{b\}$  mude a cada iteração, é necessário usar a primeira forma de cálculo do resíduo no passo d), apesar de ser mais lenta, porque a segunda igualdade só vale em sistemas lineares.