UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

JORDANA DONELLI STREMEL

PROPORCIONALIDADE: UMA ANÁLISE A PARTIR DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Porto Alegre

2013

JORDANA DONELLI STREMEL

PROPORCIONALIDADE: UMA ANÁLISE A PARTIR DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso

Porto Alegre

2013

JORDANA DONELLI STREMEL

PROPORCIONALIDADE: UMA ANÁLISE A PARTIR DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso

____

Profª. Drª. Leandra Anversa Fioreze
Instituto de Matemática – UFRGS
Departamento de Matemática - UFSM

____

Profª. Drª. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
Instituto de Matemática – UFRGS

____

Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso
Instituto de Matemática – UFRGS

Dedico este trabalho aos meus pais Luiz Carlos e Nara que sempre me apoiaram e incentivaram ao estudo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Nara e Luiz Carlos, pela trajetória incrível ao meu lado, por sempre me propiciarem condições para seguir em frente, apoiando, acreditando e estando ao meu lado em todas as decisões tomadas. Vocês são essenciais.

Aos meus tios, João Paulo, Maria Cecília e Maria Inês, pelo carinho dedicado ao longo de todos os anos e por serem meus pais em muitos momentos.

Ao Marcos Pesce, pelo carinho e paciência dedicados neste último ano. As nossas leituras e debates foram essenciais.

Agradeço aos amigos queridos Vera, Odete e Henrique por todos os momentos de ternura e carinho, vocês são como uma família.

À minha dinda, Norma, por ser um exemplo de professora a seguir, que ama o que faz e que me contagia sempre.

Ao amigo Walter pelos longos e importantes anos de graduação, os quais nos fizeram consolidar uma amizade incrível e pelas horas de estudo que não foram poucas. À Natali que se revelou grande amiga nos últimos tempos. À amiga Kellen pelas risadas que demos juntas ao longo da faculdade.

Agradeço ao professor Marcus Basso por me acolher, com toda a disposição, em um momento difícil. Pelo incentivo e pela paciência durante este trabalho. Obrigada pelo exemplo de professor que és e pelas contribuições ao longo destes anos.

Às professoras Leandra Fioreze e Márcia Notare por aceitarem meu convite e contribuírem na elaboração deste trabalho. Aos professores Andréia Dalcin pelas contribuições ao longo do Estágio I e PIBID, e Francisco Egger pelas orientações carregadas de paciência e bom humor no PIBID e nos estágios.

Agradeço a todas as pessoas que contribuíram de alguma forma, ao longo desta primeira jornada acadêmica que foi a graduação.

RESUMO

O presente trabalho relata uma experiência realizada no Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. As atividades propostas foram elaboradas com base na utilização intuitiva de conceitos de proporcionalidade com duas turmas, sendo uma de 6ª e outra de 7ª série, onde a primeira ainda não teve contato formal com os conceitos e a segunda sim. Foi realizada uma análise dos resultados obtidos na aplicação destas atividades, a qual pretende responder ao seguinte questionamento: Quais os esquemas e estruturas utilizados por estudantes de 6ª e 7ª série do Ensino Fundamental ao realizarem atividades envolvendo conceitos de proporcionalidade? As resoluções dos estudantes foram analisadas à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud. Como resultados, ressalta-se que o conteúdo em questão serve como base para outros conceitos. Não é possível afirmar que o contato formal com o conteúdo contribuiu para a compreensão do conceito de proporcionalidade, mas sim, que o contato com um número maior de situações permite identificar evidências no uso do raciocínio de proporcionalidade.

Palavras chave: Proporcionalidade. Teoria dos Campos Conceituais. Estruturas Multiplicativas.

ABSTRACT

This paper describes an experiment that happened at Colégio de Aplicação of Universidade Federal of Rio Grande do Sul. The activities proposed for two classes, of $6^{th}$and 7^{th} grade, were based on the use of intuitive concepts of proportionality, when the first class didn't have any formal contact with these concepts yet, and the other class had already studied these concepts. An analysis of the results obtained by applying these activities was performed, and aimed to answer the following question: What are the schemes and structures used by students of 6th and 7th grade in performing activities involving concepts of proportionality? The analysis of the students' resolutions was based on the Theory of Conceptual Fields, by Gerard Vergnaud. As a result, we point out that the content in question serves as the basis for other concepts. It's not possible to affirm that the formal contact with the content has contributed for the proportionality concept comprehension, but the contact with a bigger number of situations allows us to identify evidences of the use of reasoning of proportionality.

Keywords: Proportionality. Theory of Conceptual Fields. Multiplicative structures.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1.Introdução

O presente trabalho tem como objetivo realizar uma análise de raciocínio de estudantes de 6ª série que têm entre 11 e 13 anos, os quais não tinham nenhum contato com o conteúdo de proporcionalidade, e de 7ª série com idade entre 13 e 14 anos que, de forma contrária, tiveram aulas regulares envolvendo os conceitos antes da execução das atividades propostas. A análise é feita à luz da Teoria dos Campos Conceituais, de Gerard Vergnaud. Considerando que a proporcionalidade pertence ao campo conceitual das estruturas multiplicativas, faz-se a análise com base, também nesse conceito, que para Vergnaud, é o conjunto das situações cuja resolução implica em uma ou várias multiplicações ou divisões e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem a análise dessas situações (1993). O trabalho visa responder o seguinte questionamento: Quais os esquemas e estruturas utilizados por estudantes de 6ª e 7ª série do Ensino Fundamental ao realizarem atividades envolvendo conceitos de proporcionalidade? É objetivo da pesquisa também, ressaltar a importância do professor de Matemática compreender o raciocínio de seus alunos na resolução de problemas envolvendo proporção.

Nesse estudo, raciocínios de estudantes de diferentes séries foram avaliados do ponto de vista dos esquemas utilizados. Além disso, também foi discutida a idade em que os alunos começam a desenvolver o raciocínio de proporcionalidade.

Tendo em vista que a proporcionalidade é um conteúdo que embasa muitos outros, ou seja, de extrema importância tanto para a vida escolar quanto para o cotidiano do aluno, optou-se por interpretar, com base nesta teoria cognitivista, evidências da compreensão dos conceitos relacionados à proporção. Segundo Fioreze:

> Além de entender que é fundamental para o professor saber como o aluno aprende, compreendendo as especificidades conceituais de cada saber escolar a ser ensinado, também é importante discutir a construção de propostas didáticas que valorizem o saber do aluno e sua participação efetiva neste processo (FIOREZE, 2010, p. 19)

O interesse da pesquisadora pelo tema surgiu durante a graduação, justamente por saber da importância do conteúdo, classificando-o como base para o aprendizado e raciocínio, pois este conhecimento envolve relações. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental:

> Ao relacionar ideias matemáticas entre si, podem reconhecer princípios gerais, como proporcionalidade, igualdade, composição, decomposição, inclusão e perceber que processos como o estabelecimento de analogias, indução e dedução estão presentes tanto no trabalho com números e

> operações como no trabalho com o espaço, forma e medidas (BRASIL, 1998, p. 37).

Sendo assim, as atividades foram planejadas de modo que os alunos conseguissem relacionar as situações dos problemas com as situações vivenciadas cotidianamente, ou seja, a fim de que eles conseguissem unir as duas coisas e, então, formulassem suas respostas. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> O estabelecimento de relações é fundamental para que o aluno compreenda efetivamente os conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, eles não se tornam uma ferramenta eficaz para resolver problemas e para a aprendizagem/construção do conhecimento (BRASIL, 1998, p.37)

Ao longo desse trabalho, pretende-se apresentar argumentos que justifiquem o ensino e a aprendizagem da proporcionalidade. Pretende-se, também, expor a relevância para os alunos e a importância de observar o desenvolvimento cognitivo dos estudantes. É, desta forma, que se pretende com esta pesquisa contribuir para o entendimento da compreensão dos conceitos de proporcionalidade. A metodologia de pesquisa utilizada é o Estudo de Caso, através da qual, analisa-se um grupo pequeno de respostas, e baseado neste, se verificam os resultados.

1.2 Estrutura do Trabalho

O primeiro capítulo é designado à apresentação dos objetivos quanto à atividade desenvolvida, bem como à apresentação da teoria que embasa a análise de dados e a metodologia adotada para esta. Apresenta-se, também, a origem da motivação para o estudo relacionado à proporcionalidade.

No segundo capítulo, são apresentadas sínteses de trabalhos relacionados ao tema escolhido, a proporcionalidade. Procura-se fazer uma análise relacionada aos objetivos dos autores, a teoria utilizada e os principais resultados. Descreve-se também, de que forma estes relatos contribuíram para o desenvolvimento do trabalho.

No terceiro capítulo, descreve-se a fundamentação teórica utilizada para a análise de dados: a Teoria dos Campos Conceituais. Explica-se de que forma serão feitas as relações da prática com a teoria proposta para análise. Apresenta-se também a fundamentação teórica relacionada ao estudo da proporcionalidade, bem como conceitos e situações que possibilitem o desenvolvimento dos mesmos.

O quarto capítulo é composto pela metodologia de pesquisa, o qual traz a identificação dos sujeitos da pesquisa, um breve relato do que é um estudo de caso baseado nos estudos de Porto (2006) e o motivo da pesquisa feita ser classificada como tal. Este capítulo também é encarregado de explicar como foi feita a coleta de dados e apresentar a sequência didática aplicada.

Para o quinto capítulo, designou-se a análise de dados. Neste, apresentam-se as respostas selecionadas, análise do raciocínio dos alunos e é estabelecida a relação desta com a Teoria dos Campos Conceituais.

O sexto capítulo engloba as considerações finais. Ele abrange as avaliações da pesquisadora com relação à sua prática.

2. Trabalhos Correlatos

O relato de experiência a seguir, intitulado “O raciocínio proporcional em alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental” (Gonçalves e Freitas, 2010), apresenta como objetivo a investigação das principais estratégias, relacionadas ao raciocínio proporcional, utilizadas por alunos do sétimo ano ao se depararem com situações que envolvam a proporcionalidade direta ou inversa e, também, as estratégias quando essas relações não ocorrem. É proposta, então, essa avaliação antes do ensino formal do conceito de proporcionalidade.

Foi elaborada uma prática envolvendo resolução de problemas, a qual era constituída por situações que abordassem um contexto favorecedor à exploração do conceito de proporcionalidade. A partir da aceitação do aluno para desenvolver as situações-problema sem intervenção do professor, tornando-se protagonista da situação, agindo, refletindo, formulando e validando, ocorre uma situação, chamada por Brosseau, de adidática, a qual constitui a base teórica do relato. Enfatiza-se que a metodologia de pesquisa utilizada pelos autores é a Engenharia Didática.

A primeira fase do experimento tinha como objetivo detectar o raciocínio proporcional através de grandezas diretamente proporcionais. Foram propostos 5 problemas, dentre eles, um exemplo:

Figura 1: Problema ilustrando a relação entre grandezas

Problema 1: O carro de Raul consome, em média, 8 litros de combustível a cada 100 km rodados. Para percorrer 300 km, quantos litros de combustível seu carro gastará?

Fonte: Gonçalves e Oliveira (2010)

Os resultados relatam que os alunos percebem as relações entre as grandezas, mesmo antes do estudo formal acerca dos conceitos de proporcionalidade. Nas estratégias utilizadas pelos alunos, apresentou-se predominantemente a escalar envolvendo tanto as relações aditivas quanto as multiplicativas.

A segunda fase tinha como objetivo a investigação da capacidade de distinção entre situações proporcionais e não proporcionais. Em meio a problemas abrangendo situações que envolvessem proporcionalidade com grandezas diretamente proporcional, apresentou-se então o seguinte problema:

Figura 2: Problema ilustrando a ausência da proporcionalidade

Problema 2: Se um jogador de futebol fez 2 gols em 3 jogos, quantos gols ele fará em 6 jogos?

Fonte: Gonçalves e Oliveira (2010)

Percebeu-se que os alunos insistiam numa resposta numérica, mesmo quando entendiam não haver relação proporcional.

Considera-se que os alunos possuem noções intuitivas acerca da proporcionalidade, conseguindo demonstrar seu raciocínio proporcional através das estratégias. A estratégia utilizada depende do tipo de relação feito entre os valores das grandezas, exemplificando com a estratégia escalar quando eram envolvidos números múltiplos no interior da mesma grandeza. Observou-se dificuldade de distinção da existência e da não existência da proporcionalidade, mas isso em um primeiro momento e devido ao chamado contrato didático.

A leitura deste relato contribuiu para a familiarização com o raciocínio dos alunos, de modo a ajudar na compreensão dos esquemas por eles formulados. Propiciou contato com possíveis respostas de alunos ao depararem-se com situações não proporcionais.

O trabalho, intitulado “O raciocínio proporcional em alunos do Ensino Médio” (Lara e Oliveira, 2013), relata experiências de atividades realizadas pelo PIBID e traz como objetivo a verificação da forma de resoluções de questões relacionadas à proporcionalidade por alunos do Ensino Médio, questões estas que necessitam de uma comparação multiplicativa e não aditiva, ou seja, a identificação da proporcionalidade e não proporcionalidade. Outro objetivo é a verificação da percepção dos alunos acerca da relação da proporcionalidade com outros tópicos, como, por exemplo, a semelhança ou a razão como uma taxa.

O público alvo foi duas turmas do Ensino Médio, sendo uma delas do 2º e outra do 3º ano. As atividades aplicadas foram:

Figura 3: Problema exemplo de atividades para o Ensino Médio

Paulo aplicou R$ 50,00 em um investimento de renda fixa por um ano. Roberto aplicou R$30,00 em um investimento de renda variável no mesmo período de tempo de Paulo. No momento do resgate Paulo recebeu R$80,00 e Roberto, R$60,00. Qual foi o investimento mais lucrativo neste caso? Justifique!

Fonte: Lara (2013)

Esta questão objetivava as comparações aditivas e multiplicativas. Na turma do 3º ano, mais da metade dos alunos optou pela utilização da comparação multiplicativa, fato que não ocorreu em maioria na turma do 2º ano.

Na segunda atividade, os alunos receberam um envelope com vários tipos de retângulos. Formaram-se, então dois grupos de retângulos, o primeiro contendo as figuras de razão entre o lado maior e o menor igual a $\frac{1}{3}$ e o segundo as de razão $\frac{3}{4}$. O objetivo era a percepção entre os conceitos de semelhança e proporcionalidade. Todos os alunos resolveram a questão de forma correta. Porém, a maioria dos alunos de ambas as turmas não conseguiu justificar completamente suas escolhas.

A terceira atividade consistia na identificação da ausência da proporcionalidade, mostrando aos alunos que nem todas as situações são proporcionais.

Figura 4: Problema ilustrando a ausência de proporcionalidade

Os maratonistas Vanderlei Cordeiro e Marilson dos Santos estavam correndo com a mesma velocidade ao redor de uma praça. Vanderlei começou primeiro. Quando ele completou 9 voltas, Marilson completou 3 voltas. Quando Marilson completou 15 voltas, quantas voltas Vanderlei completou?

Fonte: Lara e Oliveira (2013)

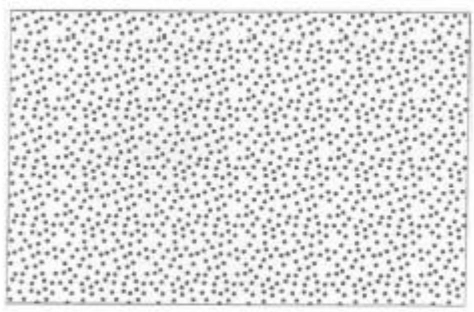
Aplicou-se essa atividade apenas na turma do 3º ano, na qual 50% dos alunos conseguiu perceber que a situação proposta não envolvia proporcionalidade.

Na quarta atividade, o objetivo era a visualização da razão como uma taxa, ou seja, uma comparação multiplicativa de duas grandezas distintas. A proposta era a seguinte:

Figura 5: Problema ilustrando a razão como uma taxa

Estimativa do número de pessoas numa manifestação

Às vezes, a quantidade de pessoas presentes num determinado local é estimada a partir de fotografias aéreas do local da manifestação. Imagine que a ilustração abaixo seja uma foto aérea de um grupo de pessoas que estão em uma manifestação. Cada ponto representa uma pessoa. Dê uma estimativa de quantas pessoas estavam presentes. Explique o método que você utilizou para chegar a sua resposta.



Fonte: Lara e Oliveira (2013)

A atividade interessou mais os alunos do 3º ano, o que gerou um melhor desempenho destes alunos.

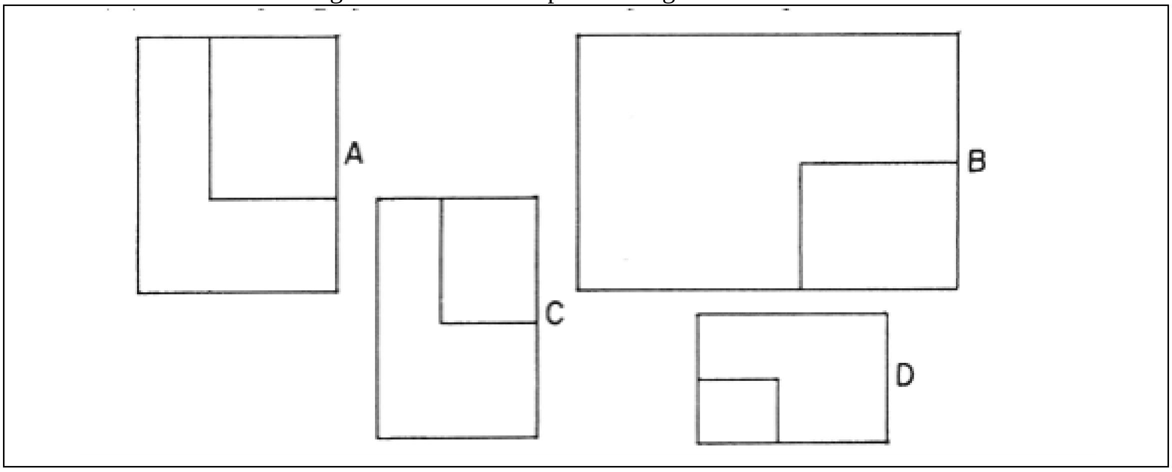
Considera-se que, mesmo os alunos que já tiveram contato e possuem habilidades com o raciocínio proporcional, demonstram dificuldades na escrita de seu raciocínio. As atividades investigativas podem ajudar no entendimento destes conceitos por parte dos alunos.

A leitura deste relato reiterou a ideia de que os alunos, mesmo já tendo um contato anteriormente com o conteúdo, apresentam problemas de compreensão. Há também a ideia de que uma das maiores dificuldades é a transcrição de seu raciocínio para o papel. A leitura deste colaborou, também, para a familiarização da pesquisadora com exercícios diferenciados acerca do tema escolhido.

O relato "Como e quando os alunos utilizam o conceito de proporcionalidade" (Tinoco, 2013) traz experiências do grupo do Setor Matemática do Projeto do Fundão que trabalha com escala, receitas, merendas, enfim, problemas do cotidiano com o objetivo de fazer com que o aluno enxergue os dados do problema e organize-os, preferencialmente em tabelas, para uma melhor observação acerca das relações.

A primeira atividade consistia em entregar uma folha em branco para os alunos, a qual eles colocariam em algum dos cantos da classe. Feito isso, eles receberiam as seguintes representações:

Figura 6: Alternativas para a fotografia da classe com a folha



Fonte: Tinoco (1989)

Foi, então, discutido com os alunos quais das figuras poderiam ser uma fotografia da classe com a folha. Alguns alunos concluem intuitivamente que é a segunda, porém, alguns medem as dimensões. É sugerida a organização dos dados em tabelas.

Outra atividade desenvolvida com os alunos foi a seguinte:

Para preparar a tinta, um pintor mistura, a cada 4 latas de tinta concentrada, 6 latas de água. Quantas latas de água são necessárias para dissolver 8 latas de tinta?

Logo após, apresenta-se aos alunos a seguinte tabela:

Figura 7: Tabela a ser completada

Tinta concentrada	Água	Tinta diluída
4	6	
8		
	3	
1		

Fonte: Tinoco (1989)

Solicita-se aos alunos que explicitem o que fizeram a cada linha preenchida. Muitos alunos utilizam um raciocínio aditivo. A partir disso, neste relato, aborda-se a proporcionalidade juntamente com a adição. Isso é feito da seguinte forma:

Perguntou-se: quantas latas de tinta serão necessárias para diluir 15 latas de tinta concentrada? Alguns alunos somaram todos os elementos da primeira coluna e encontraram como resposta 15. Depois somaram os da segunda coluna e encontraram a resposta correta. Explica-se o raciocínio da seguinte forma:

Figura 8: Explicação referente à soma

se x_1 e x_2 são proporcionais a y_1 e y_2 $\left(\text{ou, se } \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}\right)$, então $\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$

Fonte: Tinoco (1989)

Observando esta equivalência, a resolução de problemas envolvendo proporcionalidade pode envolver um modelo aditivo ou multiplicativo. Observa-se que o modelo aditivo é muito comum nas resoluções. Explora-se, então, com outros exemplos este tipo de raciocínio.

Pode-se concluir que os alunos devem expor o que pensam acerca da resolução dos problemas, pois o método deles pode estar correto e, muitas vezes, o professor quer impor a sua maneira de resolver a questão. Sendo assim, é importante que ele saiba o motivo pelo qual utiliza determinado método.

Este relato foi base para a sequência didática planejada. Do material completo do Projeto do Fundão foram retiradas atividades, as quais considera-se de extrema relevância no estudo da proporcionalidade. A leitura deste relato colaborou com a conscientização de que a utilização de tabelas, a representação geométrica das situações é muito importante, de modo que facilita para o aluno a compreensão de conceitos que, talvez, se não abordados dessa maneira, não são tão simples de compreender. Reafirma a perspectiva de que a proporcionalidade é base para muitos outros conceitos e de que os alunos precisam conhecer seus próprios métodos para a resolução dos problemas, para então, optarem por qual utilizar.

O presente relato intitulado “O conceito de razão em uma perspectiva crítica: recorte de um trabalho realizado com alunos do Ensino Médio” (Dall’Agnol, Gaitto e Fioreze, 2013), descreve uma oficina realizada por alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS com alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola estadual de Porto Alegre. Esta abordou o conceito de razão, objetivando que os alunos comparassem preços de chocolates na época da páscoa, visto que nessa época o formato do chocolate influencia no valor, acerca disso a intenção era gerar reflexões.

Primeiramente, apresentou-se aos alunos um quadro de produtos:

Figura 9: Preços e pesos de chocolates vendidos na Páscoa em 2011

Produto		*Peso*	*Preço(R$)*	*Preço(R$) / Peso(g)*
Ovo	Talento Avelã	375 g	R$ 24,88	
Barra	Talento Avelã	100g	R$ 2,77	
Ovo	Sonho de Valsa	400g	R$ 30,91	
Bombom	Sonho de Valsa	21g	R$ 0,90	
Ovo	Alpino	375g	R$ 24,88	
Barra	Alpino	170g	R$ 3,78	
Ovo	Bis	230g	R$ 18,88	
Biscoito	Bis	140g	R$ 2,98	
Ovo	Baton	300g	R$ 29,69	
Barra	Baton	80g	R$ 3,05	
Ovo	Diamante Negro	215g	R$ 35,98	
Barra	Diamante Negro	170g	R$ 2,98	
Ovo	Ferrero Rocher	250g	R$ 32,98	
15 bombons	Ferrero Rocher	187g	R$ 17,98	
Ovo	Ouro Branco	375g	R$ 32,88	
Bombom	Ouro Branco	21g	R$ 0,80	

Fonte: Dall'Agnol, Gaiatto, Fioreze (2012)

Abaixo do quadro de produtos, foram feitos alguns questionamentos interpretativos como, dentre outros: O que significa 0,17 R$/g? Considerando o ovo e barra, quais os produtos mais vantajosos de se comprar considerando a quantidade e o valor? Analise razões e conclua, em cada dupla, qual deles é mais vantajoso: a) Talento Avelã ovo ou barra? b) Sonho de Valsa ovo ou bombom? c) Diamante Negro ovo ou barra?

A partir disso, foi esclarecido o conceito de razão, visto que é um conceito de extrema importância na educação financeira. Isso foi feito a partir do número de mesas e alunos que estavam em sala de aula, questionando quantas mesas por aluno existiam. Aumentou-se então uma unidade no número de alunos. A dificuldade aumentou, e eles foram instigados, até chegarem à divisão.

A partir dessa divisão inexata, foi explicada a questão dos arredondamentos. Este esclarecimento era necessário para que os alunos conseguissem realizar a tarefa.

Considera-se que este tipo de atividade chama a atenção dos alunos e gera interesse, pois os mesmos pensam que aula de matemática não pode ser atrativa e divertida. Estas atividades contextualizadas permitem a formação de um sujeito crítico, visto que algumas pessoas não conseguem comparar preços quando vão ao supermercado.

A leitura do presente relato contribuiu para a conscientização de que é necessária a introdução de alguns conceitos antes de determinadas práticas. Reforçou a ideia de que trabalhar atividades contextualizadas facilita a compreensão dos alunos, assim como o aproxima do conteúdo abordado.

A presente tese, intitulada “Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade: uma análise a partir da Teoria dos Campos Conceituais” (Fioreze, 2010), tem como objetivo investigar a utilização de atividades digitais no processo de construção da estrutura do pensamento multiplicativo envolvendo a proporcionalidade, para estudantes do Ensino Fundamental, tendo por base a Teoria dos Campos Conceituais. A pesquisa é classificada como qualitativa e o problema da pesquisa é: A utilização de softwares educativos envolvendo a proporcionalidade presentes nas atividades digitais pode contribuir para o processo de construção da estrutura multiplicativa do pensamento dos alunos? A partir deste questionamento surgem outros, dentre eles: As atividades digitais utilizadas pelos alunos contribuem para a aprendizagem dos conceitos de proporcionalidade, tendo em vista os campos conceituais de Vergnaud?

As atividades foram desenvolvidas com alunos da educação básica, com idade de 13 a 15 anos, a pesquisa tem como base teórica a Teoria dos Campos Conceituais, de Gerard Vergnaud e a metodologia utilizada foi a Engenharia Didática.

Primeiramente aplicou-se um questionário para análise, o qual objetivava situar a pesquisadora sobre os conhecimentos dos alunos acerca do tema. A primeira questão é mostrada a seguir:

Figura 10: Questão sobre escalas

Questão 1:

A questão 1 apresenta fotos de dois animais (besouro e leão) em escalas diferer sendo o besouro representado em tamanho consideravelmente maior do que o leão, confo apresentado nas figuras que seguem:

Figura 28: Besouro.

Figura 29: Leão.

Foi solicitado então que os alunos respondessem se as fotos estão na mesma escala.

Fonte: Fioreze (2010)

De modo geral, as questões envolviam noções de escala, ampliação e redução de figuras. No decorrer do capítulo, são feitas as análises de respostas dos alunos com base na teoria proposta.

Posteriormente, a autora aplica um questionário relacionado à utilização do computador pelos adolescentes em questão, a fim de conhecer o público alvo, sua familiaridade com o computador e a finalidade com que era utilizado. Observa-se, então que a maior utilidade do computador para os alunos não é a de estudar.

Segundo a autora, o grupo participante das atividades, inicialmente, era pequeno, fato que mudou no decorrer do período. A produção dos alunos ficava guardada nos computadores e eles também respondiam, em folhas, questionamentos propostos. Realizavam, também, filmagens e fotografias. Produziu-se também um blog da turma, o qual foi observado pela pesquisadora como um recurso motivador.

A primeira atividade consistiu em um trabalho com escalas através maquetes escolhidas por eles. Era proposto que, com base nas pequenas construções, os alunos se colocassem no lugar dos construtores e dissessem como construiriam esta obra. Tudo isso sem mencionar a palavra escala.

Na segunda atividade, os alunos assistiram ao vídeo *Matemática na Vida: Razão e Proporção* que, segundo a autora, está disponível no portal Domínio Público. Solicitou-se aos alunos que ressaltassem os aspectos mais importantes.

A terceira atividade consistiu na manipulação do objeto de aprendizagem Proporcionalidade e Semelhança, o qual foi criado pelo grupo de pesquisa RIVED/UNIFRA. O objeto envolve atividades de ampliação e redução de fotografias, os quais aumentam o nível de dificuldade. Segundo a autora, os objetos de aprendizagem contribuem na construção dos conceitos, isso se percebe no momento em que eles estabelecem relações entre as informações. Logo, a atividade cumpre sua função quando permite a simulação da realidade produzindo novos significados ou ampliando o processo de significação.

A quarta atividade consistiu na utilização do Geoplano Virtual. Foi apresentado aos alunos um triângulo e solicitado a eles que o ampliassem de modo que ele ficasse semelhante ao original. A atividade englobou exercícios de ampliação e redução de figuras.

Para a atividade cinco, ficou reservada a manipulação do Excel, na qual eles utilizariam o geoplano para o preenchimento de tabelas referentes a medidas dos lados, perímetros e áreas, desenvolveram-se também gráficos. Após estas atividades, desenvolve-se um experimento prático, relacionado à descoberta de relações entre massa e alongamento.

Na sexta atividade, foi utilizado o objeto de aprendizagem *A matemática das casas e plantas*, no qual o personagem principal interpreta situações envolvendo plantas baixas de imóveis ou mapas. O objeto estimula conceitos relacionados à escala e proporcionalidade. O objeto contribuiu para a representação simbólica de escalas.

A sétima atividade envolveu a utilização do Software Régua e Compasso e planilha eletrônica ou calculadora virtual, através dos quais, foram trabalhadas razões e semelhanças de triângulo.

Considera-se a que a elaboração dos conhecimentos dos alunos consistiu em muito mais do que a aplicação da regra de três. Isso se deve às diferentes situações vivenciadas por eles e à elaboração de diferentes esquemas contribuindo para a construção do conceito de proporcionalidade. As atividades digitais colaboram para que o aluno trabalhe com uma grande quantidade de conceitos de forma articulada.

A leitura desta Tese colaborou para o planejamento da sequência didática aplicada neste TCC, de modo a permitir uma abordagem mais ampla e implícita dos conceitos de proporcionalidade. Ela serviu como referencial teórico, também, para a análise de dados, ajudando na interpretação dos raciocínios dos alunos acerca do tema e nos conceitos referentes à Teoria dos Campos Conceituais, de Gerard Vergnaud.

3. Proporcionalidade e A Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos conceituais foi desenvolvida por Gerard Vergnaud, orientando de Jean Piaget e colaborador no Centro de epistemologia genética em Genebra. Atualmente é professor da Université Paris VIII, atuando como membro associado junto à equipe do Laboratoire Paragraphe (16a. seção do CNRS). Tem experiência na área de Psicologia Cognitiva, com ênfase em Educação.

A Teoria dos Campos Conceituais embasa pesquisas sobre atividades cognitivas complexas referentes a aprendizagens, por isso diz-se que ela envolve didática. Sua principal finalidade é propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos, em crianças e adolescentes, entendendo-se por "conhecimentos", tanto as habilidades quanto as informações expressas (VERGNAUD, 1993, p.1). Sua teoria tem como elemento central a psicologia através da qual analisa a construção do conhecimento matemático e as estratégias utilizadas para isso. Do ponto de vista cognitivo o desenvolvimento é a conceitualização do real, que permite que o aluno, através de esquemas, estruture seu raciocínio e formule o pensamento matemático.

Vergnaud reconhece que sua teoria foi desenvolvida à luz dos conhecimentos e pesquisas de Piaget e dos estudos de Vigotsky. Faz-se presente tal afirmação, pois ela envolve a interação social, linguagem e simbolização no domínio do campo conceitual.

A Teoria dos Campos Conceituais é, portanto, uma teoria carregada de conceitos piagetianos, contudo mais desenvolvida com relação à compreensão do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem. Esta, inicialmente, surgiu para a explicação do processo de conceitualização das estruturas aditivas, das multiplicativas, das relações número espaço e da álgebra, porém, não é exclusivamente Matemática.

3.1.1 Conceitos e Esquemas

O conceito não pode ser tratado apenas como uma definição. Com base na teoria, presume-se que o aluno só relaciona o conceito com a sua definição a partir de situações e de problemas a serem resolvidos. Existem dois casos, o primeiro é aquele em que o aluno tem as competências necessárias para a resolução imediata da situação, o que gera uma automatização comportamental e se organiza por apenas um esquema. O segundo é aquele no qual o aluno não as dispõe de imediato, mas necessita explorar para atingir o sucesso ou o fracasso. Para isso, utilizam-se esquemas variados e posteriormente descobertas aparecem. Segundo Vergnaud:

> Chamemos “esquema” a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada. É nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos - em - ação do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória. (VERGNAUD,1993, p.2)

Os esquemas podem ser eficazes ou ineficazes, sempre baseados na conceitualização de forma implícita. No segundo caso, a criança pode trocar ou modificar os esquemas. Os esquemas são carregados de conhecimentos-em-ação e teoremas-em-ação, os quais se designam por “invariantes operatórias” (VERGNAUD,1993, p.4).

Segundo Vergnaud, quando os alunos analisam seus erros e hipóteses mediante situações de resolução de problemas, tem-se também estruturas de esquemas. Até que a criança chegue a um resultado satisfatório, são utilizados, ou não, esquemas não pertinentes que, ao longo do processo, são modificados. Um exemplo citado pelo autor é o da comparação do volume de um objeto sólido cheio com um recipiente. Alguns esquemas foram utilizados pelos alunos da quinta série: o primeiro foi a comparação das alturas, como se tratasse de comparar a quantidade de suco de laranja em jarros de mesmo formato (o que não leva à conclusão alguma), o segundo foi a imersão parcial de um sólido no recipiente, como o recipiente também estava cheio, água transbordou – o aluno concluiu que o objeto cheio era maior. Só depois, aplicando ações mais “operatórias” conseguiu-se um procedimento satisfatório. Utilizaram-se, neste caso, esquemas não pertinentes, mas que modificados viabilizaram a solução. Conforme Vergnaud:

> Esse exemplo ilustra a ideia de que o funcionamento cognitivo de um sujeito ou de um grupo de sujeitos em uma situação dada baseia-se no repertório de esquemas disponíveis, formados anteriormente, de cada um dos sujeitos individualmente. As crianças descobrem, em situações, novos aspectos e, ao mesmo tempo, eventuais novos esquemas. (VERGNAUD, 1993, p.5)

Cada um dos esquemas utilizados se relaciona a determinadas situações. Para que se possa deslocar, generalizar, transferir ou descontextualizar os esquemas, é necessário a exposição de problemas a uma classe mais ampla. Isso somente acontecerá se forem reconhecidas pelo sujeito, analogias as quais possibilitem a visualização de semelhanças e diferenças entre as classes. A generalização ocorre apenas se o aluno observar invariantes. Os esquemas possibilitam escolhas de opções para a resolução dos problemas. O esquema, totalidade dinâmica organizadora da ação do sujeito para uma classe de situações específica, é, portanto um conceito fundamental da psicologia cognitiva e da didática (VERGNAUD, 1993). É composto também por invariantes operatórias (conceitos em ação e teoremas em ação) que devem ser analisadas individualmente, e inferências, para as quais, partir das invariantes, são construídas regras e antecipações, formando ações para concretizar um objetivo.

Deve-se observar uma grande quantidade de comportamentos e esquemas para a compreensão do que consiste realmente um conceito, somente assim pode-se provar sua operacionalidade. Essa compreensão varia de acordo com suas propriedades e pertinência da situação abordada. Conforme Vergnaud:

> Uma abordagem psicológicaa e didática da formação dos conceitos matemáticos leva-nos a considerar um conceito como um conjunto de invariantes utilizáveis na ação. A definição pragmática de um conceito ocorre, portanto, ao conjunto das situações que constituem a referência de suas diversas propriedades, e ao conjunto dos esquemas utilizados pelos sujeitos nessas situações. (VERGNAUD, 1993, p. 8)

Vergnaud considera indispensável o emprego de significantes explícitos para a conceitualização, considerando, assim, um conceito como uma trinca de significados composta por S, denominado pelo conjunto de situações que dão sentido ao conceito (referência), I, pelo conjunto das invariantes em que se baseia a operacionalidade dos esquemas (significado), L, pelo conjunto das formas de linguagem (ou não) que permitem a representação simbólica do conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante).

3.1.2 Campos Conceituais

Para Vergnaud, organiza-se o conhecimento em campos conceituais, o qual é dominado após um extenso período, por intermédio de experiências, maturidade e aprendizagem. Um campo conceitual é um conjunto de situações.

Analisando-se o campo conceitual das estruturas aditivas, considera-se o conjunto de situações que necessitam de uma adição, subtração ou uma combinação destas, como conceitos e teoremas que permitam a utilização das situações propostas como tarefas matemáticas. Para o campo conceitual das estruturas as multiplicativas, o qual será abordado neste trabalho, temos o conjunto que engloba as situações com necessidades de multiplicações ou divisões, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitam a análise das situações propostas como: proporção simples e múltipla, função linear e n-linear, razão escalar direta e inversa, quociente e produto de dimensões, combinação linear e aplicação linear, fração, razão, número racional, múltiplo e divisor, etc. Segundo Vergnaud (1993), entre os teoremas que explicam esses conceitos, devem-se destacar os seguintes:

- as propriedades de isomorfismo da função linear e sua generalização a razões não inteiras;

- as propriedades concernentes ao coeficiente constante entre duas variáveis linearmente ligadas;

- algumas propriedades específicas da bilinearidade;

Pode-se então classificá-las com base nas tarefas cognitivas e procedimentos a serem adotados em cada uma. A situação em questão é aquela a ser analisada como uma combinação de tarefas, denominada situação complexa, sobre as quais deve se conhecer bem a natureza e as dificuldades. As subtarefas, quando fracassadas, podem originar o fracasso da tarefa.

3.1.3 Situações

Para Vergnaud (1993), o conceito de situação é o de tarefa. Vergnaud também aponta que existem duas ideias centrais relacionadas com o conceito de situação: a de variedade, relacionada a grande variação de situações em determinado campo conceitual, o que possibilita a construção sistemática do conjunto das classes possíveis, e a de história, a qual determina que o conhecimento dos alunos se constrói através das situações enfrentadas e dominadas progressivamente, o que possibilita que o sentido aos conceitos e procedimentos que se deseja ensinar seja atribuído.

Relaciona-se toda a situação a uma combinação de relações de base com dados conhecidos e desconhecidos, correspondentes ao número de questões possíveis. A classificação dessas relações de base e de problemas que se constroem a partir delas é muito importante cientificamente, expandindo o campo das possibilidades e as situações cotidianas.

Nas relações aditivas, encontram-se seis relações de base, a partir das quais se pode abranger todas as operações de adição e subtração da aritmética comum. Já nas multiplicativas, as mais simples são quaternárias, o que se contrapõe às aditivas - que são binárias-, sendo que os problemas mais simples de multiplicação e divisão resultam em uma proporção simples de duas variáveis, uma em relação à outra.

□	□
□	□

A partir desta relação, são geradas quatro classes de problemas elementares:

1	a
b	□

Multiplicação

1	□
b	c

Divisão-partição

1	a
□	c

Divisão-cotação

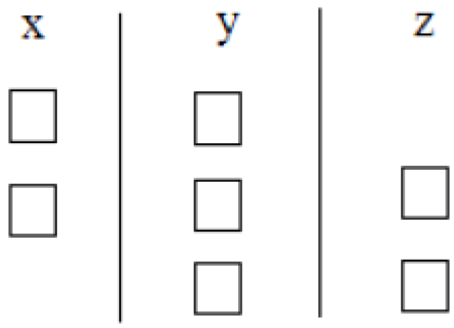
a	c
b	□

Quarta proporcional

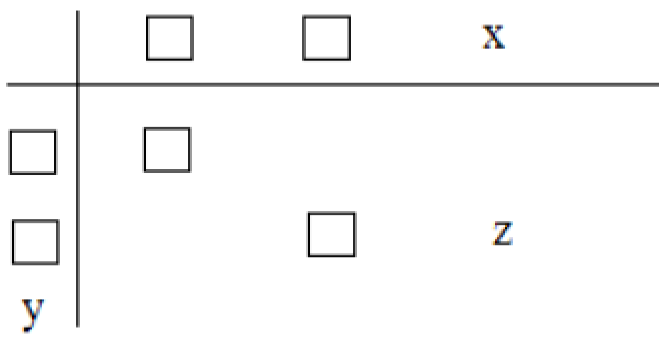
Explicando as relações de base acima:

> Como a incógnita está representada pelo polígono retangular (□), a explicação para a representação utilizada por Vergnaud é dada a seguir:
>
> - A classificação "multiplicação" está relacionada ao fato de que a grandeza □ é a.b;
>
> - A classificação "divisão/partição" ou "divisão/cotação" está relacionada ao fato de que a grandeza □ é $\frac{c}{b}$ ou $\frac{c}{a}$, respectivamente;
>
> - Se forem fornecidas três grandezas a, b e c, a quarta grandeza □ será dada por □ = $\frac{c.b}{a}$. (Fioreze, 2010, p.44)

Analisando os problemas acima, percebe-se que podem existir dificuldades muito diferenciadas dependendo dos valores numéricos atribuídos, principalmente envolvendo os números decimais menores que 1. Posteriormente, temos casos em que existe a combinação de duas proporções: x proporcional a y, y proporcional a z:



Tendo, também, problemas nos quais é abordada a proporção dupla, sendo z proporcional a x e a y, com x e y independentes entre si:



Segundo Vergnaud:

> Nunca é demais destacar a extrema importância epistemológica da proporção dupla (e múltipla) para a geometria, a física, as probabilidades e estatística. O ensino de muitas questões seria melhor, se sua importância fosse melhor reconhecida. Isto porque os alunos só percebem um pouquinho de suas idas e vindas. De um lado porque elas são conceitualmente mais difíceis, de outro porque elas acionam muitos elementos de uma só vez: seis grandezas, três razões para a proporção dupla, sem contar as funções e razões intermediárias a considerar. (VERGNAUD, 1993, p.16)

Existe, então, uma diversidade considerável de figuras, que geram nos alunos dificuldades variadas. Pode-se hierarquizá-las considerando três fatores da complexidade cognitiva: a estrutura dos problemas, os valores numéricos e as áreas de experiência. São, também, muito diversificados os procedimentos adotados, eles oscilam em tentativas, sucessos ou fracassos. Concomitantemente à ideia de diversidade, destaca-se a história da aprendizagem da Matemática, a qual é individual, porém, existe uma regularidade na abordagem e no tratamento das situações, nas propriedades e relações e etapas pelas quais passam (etapas estas que não são ordenadas). O conjunto destas dá coerência para um determinado campo conceitual.

3.1.4 Significados e Significantes

O que faz com que os conceitos matemáticos tenham sentido são as situações, mas ele não está contido nas situações. A representação simbólica, palavra ou enunciado matemático adquirem ou não sentido para um indivíduo particularmente. A situação pode, também, ter ou não sentido. Para Vergnaud:

> O sentido é uma relação do sujeito com as situações e os significantes. Mais precisamente, os esquemas evocados no sujeito individual por uma situação ou por um significante constituem o sentido desta situação ou deste significante para aquele indivíduo. Esquemas, ou seja, comportamentos e sua organização. (VERGNAUD, 1993, p.18)

Por exemplo, na adição, o sentido está no conjunto de esquemas que se pode acionar em situações de confronto simultâneas à ideia de adição.

Afirma-se que uma determinada situação exposta ou, particularmente, um simbolismo não despertam no indivíduo todos os esquemas que se pode relacionar. Então, quando é dito que uma palavra tem determinado sentido, refere-se a um subconjunto de esquemas, o que restringe o conjunto dos esquemas possíveis.

Vergnaud questiona então, a função dos significantes no pensamento e a função da natureza dos esquemas que organizam o tratamento dos significantes, na compreensão e na produção. Que funções cognitivas atribuem-se à linguagem e às representações simbólicas na atividade matemática? Esta função é composta por três respostas: auxilia a identificação das invariantes, o raciocínio e a inferência, antecipações dos efeitos e metas, planificação e controle de ação.

A linguagem possui uma dupla função: na comunicação e na representação, auxiliando o pensamento no acompanhamento da ação. Pode-se entender como calcular um estado inicial conhecendo o final e a transformação do inicial para o final, contudo, expressar essas ideias em palavras nem sempre é simples. Pode-se então, representar a linguagem como uma função composta por três focos: representação dos elementos pertinentes da situação, representação da ação e representação entre a ação e a situação.

> A atividade da linguagem exprime também outros aspectos importantes, como a implicação do sujeito na tarefa ou no julgamento emitido, seus sentimentos, sua estimativa de probabilidade de uma hipótese ou conclusão e, ainda, o relacionamento destes entre si. (VERGNAUD, 1993, p. 20)

As representações simbólicas ilustram, de forma vantajosa, a possibilidade de resolução de um determinado problema que representa um enunciado carregado de dados e então necessitam de muitas etapas para chegar à resposta. Em contraponto, elas têm função apenas de auxilio na resolução de problemas complexos. Podem servir, também, para identificar, de forma mais clara, os objetos matemáticos importantes para a conceitualização. Sem símbolos, são utilizados variadas formas de linguagem natural.

3.2 Proporcionalidade

Para abordar-se uma ideia inicial sobre proporcionalidade, expõem-se as seguintes situações:

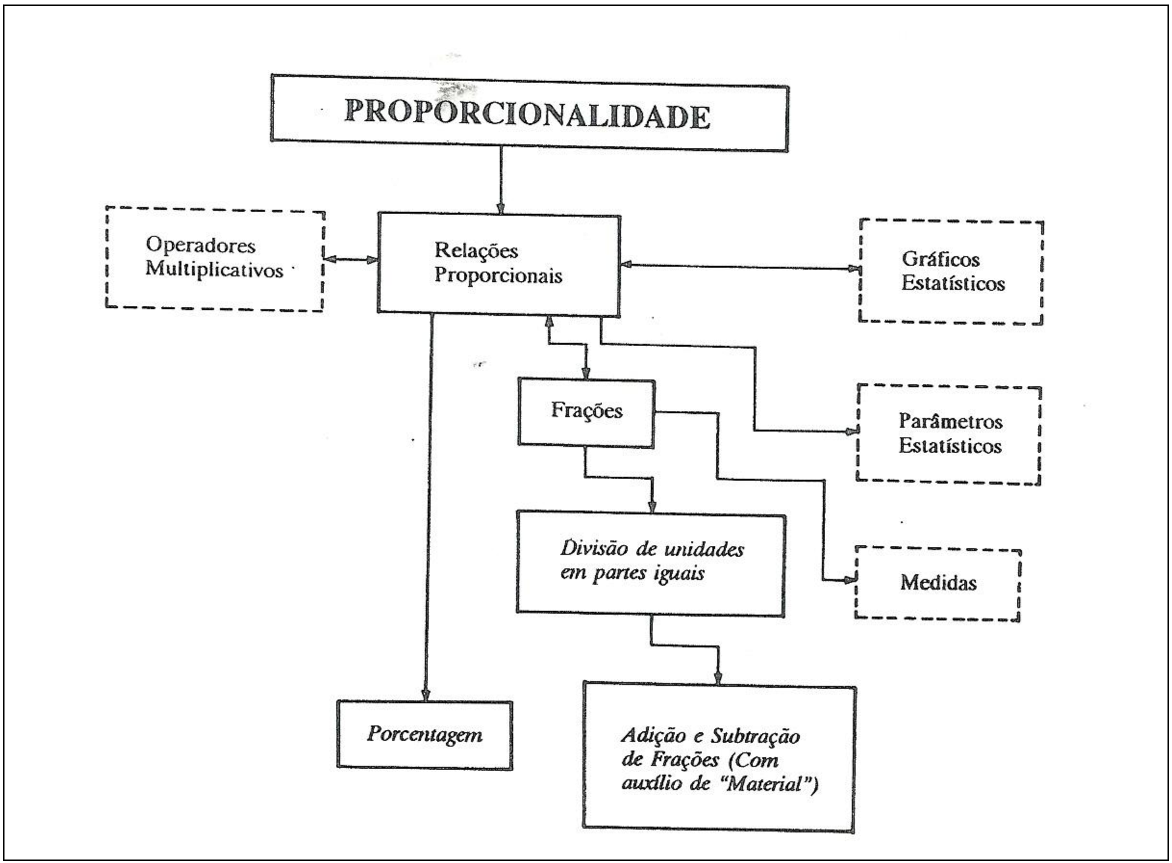
- “Como dividir dois litros de leite entre cinco crianças, de modo a receberem a mesma quantidade?
- $\frac{2}{3}$ dos meus alunos vêm para a escola a pé. Se eu tiver 36 alunos, quantos vêm a pé para a escola?”(CARVALHO, 1990, p.54)

Conforme Carvalho (1990), a proporcionalidade é mais subjacente ao cotidiano dos alunos do que as frações; porém, apenas as frações são trabalhadas na escola e na maioria das vezes de maneira muito restrita.

Tem-se nas situações apresentadas, grandezas contínuas (litros de leite) e grandezas discretas (número de alunos). Em ambas as ocasiões a ideia da divisão em partes iguais está presente, contudo, a diferenciação está no todo a ser dividido. Quando se menciona o leite, temos um todo de natureza contínua, pois ele pode ser subdividido (em copos, por exemplo), o que torna possível a divisão desejada. Já no segundo problema, ninguém iria supor que o número de alunos não fosse divisível por 3 e que tomáramos “partes” dos alunos.

Ainda baseado em Carvalho (1990), situações dos dois tipos e de outra natureza devem ser trabalhadas com os alunos, inclusive nas séries iniciais. A proporcionalidade deve ser trabalhada em outras disciplinas, fazendo-se abordagens como a relação entre idade e peso (Ciências/Biologia), distâncias reais a partir de mapas (Estudos Sociais/Geografia), ampliação e redução de figuras (Artes), e nestes assuntos correlatos, pode-se abordar também o estudo de frações. A seguir, um quadro explicativo das correlações da Matemática:

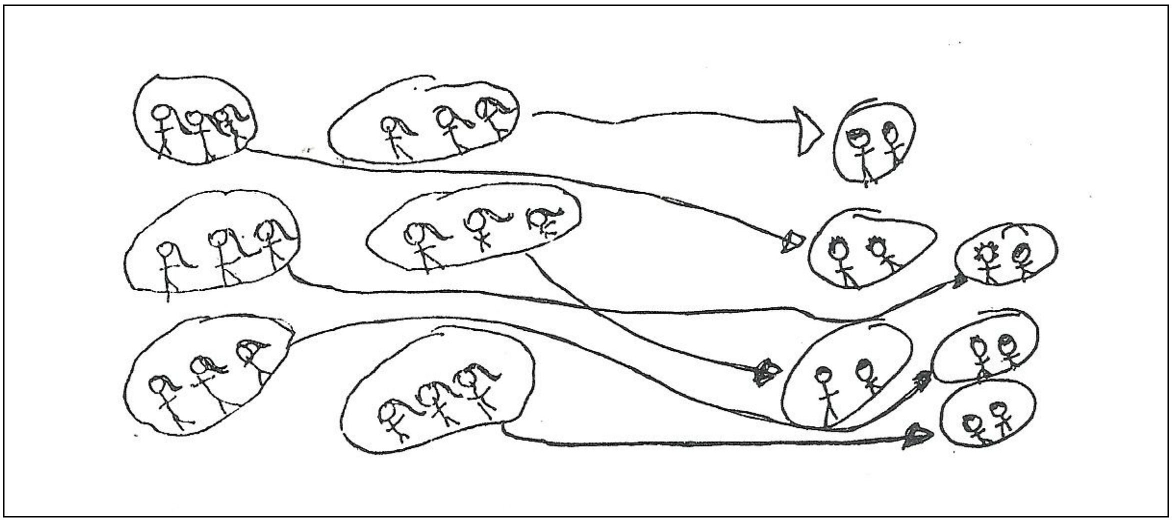
Figura 11: Esquema explicativo sobre proporcionalidade



Fonte: Carvalho (1990)

Na vida cotidiana, os alunos se deparam com situações envolvendo o dobro de alguma coisa, o triplo de outra, ou até mesmo relações proporcionais mais sofisticadas, como, por exemplo, a porcentagem, três objetos pelo preço de dois. Inicialmente, pode-se resolver isso pelo método aditivo. Logo, é função do professor sugerir exemplos os quais, se resolvidos por esse método, serão fracassados, de modo que os alunos sejam instigados à criação de novas estratégias. Observa-se então uma resolução para o seguinte problema: "Em uma festa havia 2 meninos para cada 3 meninas. As meninas eram 18, quantos eram os meninos?" (CARVALHO, 1990, p.56) Segue a resolução:

Figura 12: Esquema de Resolução

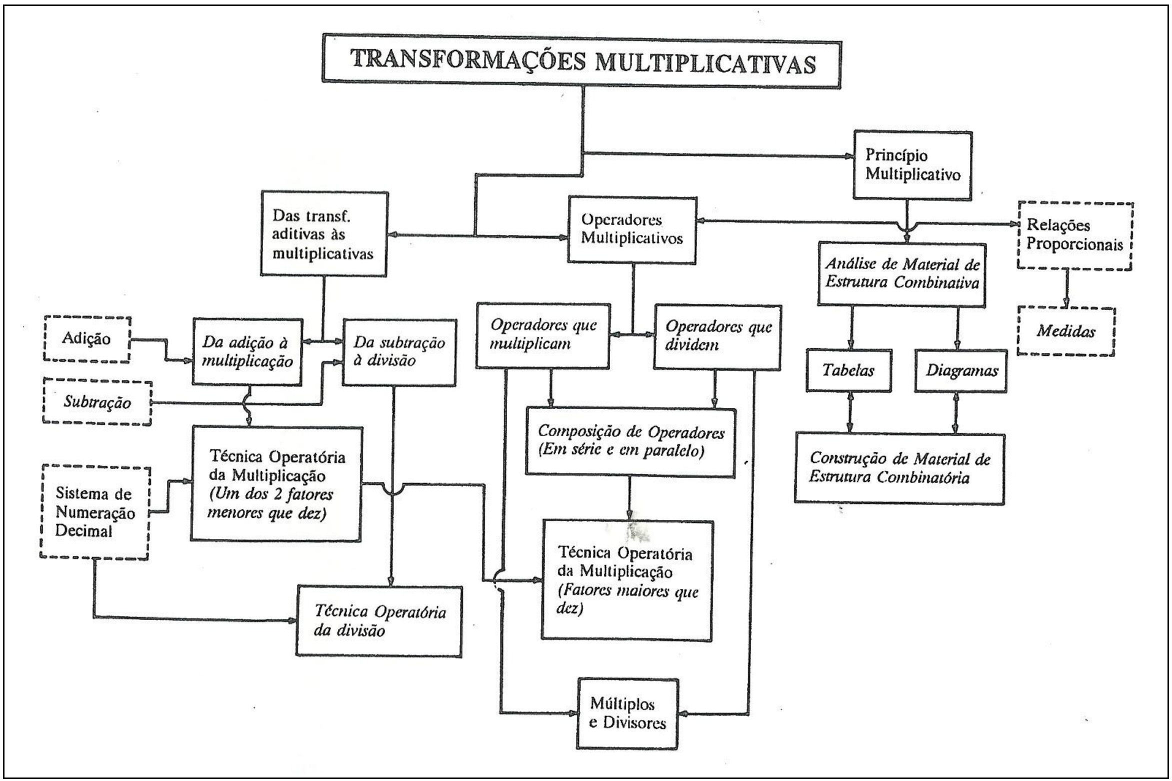


Fonte: Carvalho (1990)

Percebe-se, então, que o aluno através de um diagrama criou uma estratégia de resolução. Esta é uma resolução de um problema simples a qual permite o raciocínio aditivo. Porém, concluí-se que é necessária a problematização de situações para as quais o aluno perceba que este tipo de estratégia é insuficiente. Outro princípio relevante para o estudo da proporcionalidade é que o conhecimento não é construído a partir das ações, ou seja, não é medindo um desenho que foi ampliado, mas sim achando a razão entre as dimensões da figura. Esta se constrói a partir de situações propostas pelo professor de maneira intencional.

A seguir, apresenta-se um quadro explicativo referente às transformações multiplicativas, o qual facilita a compreensão da estrutura que tem a proporcionalidade como um pedaço de sua formação:

Figura 13: Esquema explicativo das transformações multiplicativas



Fonte: Carvalho (1990)

3.2.1 Razão

Conforme Iezzi (2013), tomados dois números a e b, com b ≠ 0 chama-se razão entre a (antecedente) e b (consequente) o quociente a/b. Se estes valores forem medidas de mesma grandeza, deverão ser representados em uma mesma unidade de medida. Para ilustrar, tem-se o seguinte exemplo:

Em determinado ano, as vendas de uma empresa foram de 300 mil reais e as do ano seguinte, foram 450 mil reais. Dividindo as vendas do segundo ano pelo primeiro ano, temos $450 : 300$, que é igual a 1,5. Logo, pode-se dizer que as vendas do segundo ano são uma vez e meia maiores que as do primeiro, diz-se também que este valor (que é uma forma de comparação) é a razão entre vendas.

3.2.2 Proporção

Chama-se de proporção uma igualdade entre duas razões, ou seja, dadas as razões a/b e c/d, à sentença de igualdade $a/b = c/d$ é dita proporção, onde a e d são os extremos e b e c os meios. Retomando o exemplo anterior, ainda com relação à mesma empresa, tem-se para o terceiro ano uma venda de 600 mil reais, e para o quarto 900 mil reais. Então, a razão das vendas do quarto para o terceiro ano é representada por

$900 : 600$ que é igual 1,5, o que equivale à razão do segundo para o primeiro ano $450 : 300$. Podemos representar esta situação da seguinte maneira:

$$450/300 = 900/600$$

Considerando ainda a generalização do exemplo anterior, temos a seguinte proporção:

$$a/b = c/d$$

Vale, então, a seguinte propriedade:

Se $a/b = c/d$, então $a.d = b.c$, ou seja, em toda a proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Conforme Fioreze (2010),

> O raciocínio proporcional está presente em diversas situações, cotidianas ou não. Tem-se variadas situações em que se faz necessária a mobilização de certos processos cognitivos que envolvem e colocam em prática os conceitos relacionados e noções relacionadas à proporcionalidade. Pode-se citar como exemplos a escala musical, as ampliações ou reduções de fotos e mapas (nesses dois últimos casos, deve-se manter a proporção entre os lados da figura, para que a semelhança seja respeitada). (FIOREZE,2010, p.51)

A autora acrescenta:

> Considera-se que o raciocínio proporcional constitui um conceito pivô para os progressos escolares da matemática (e das ciências), pois é considerado o culminar dos alunos do ensino fundamental e é o alicerce de tudo o que segue. É um raciocínio que abrange um espectro amplo e complexo de aptidões cognitivas que incluem tanto a dimensão matemática como a dimensão psicológica. (LESH, POST, BEHR apud FIOREZE, 2010, p. 52) O raciocínio proporcional é conhecido como a capacidade que conduz ao deslocamento conceptual significativo dos níveis operacionais do pensamento concreto para os níveis formais do pensamento" (PIAGET E BETH, apud FIOREZE, 2010, p. 52)

É muito comum, inicialmente, ao invés do raciocínio multiplicativo, a utilização do aditivo pelas crianças quando se deparam com situações que envolvem proporcionalidade. Chama-se esse raciocínio de proporcional aditivo. Muitas vezes, para os alunos, o raciocínio aditivo se desenvolve naturalmente, embora de forma incorreta. (FIOREZE, 2010, p. 53)

3.2.3 Grandezas diretamente proporcionais

Dá-se a seguinte tabela conforme Iezzi (2013) correspondente às vendas de um determinado produto em uma empresa. Representa-se por x a quantidade vendida e por y a receita (em reais) gerada pelas vendas:

x	1	2	3	4	5	...	n	...
y	40	80	120	160	200	...	40n	...

Pode-se observar que quando o valor de x dobra o valor de y também dobra, quando o valor de x triplica, o de y também triplica e assim por diante. Tem-se, então, que a razão entre os valores de y e os correspondentes x é 40 e a razão entre os valores de x e os correspondentes y é constante e vale $\frac{1}{40}$. Diz-se, neste caso, que as grandezas x e y são diretamente proporcionais. Generalizando, duas grandezas são diretamente proporcionais quando a razão entre uma medida y e uma medida x correspondente, com x $\neq$ 0, for constante e diferente de zero, ou seja, $\frac{X}{Y}$ = k, com k constante e diferente de zero. Consequentemente, a razão entre y e seu respectivo x será $\frac{1}{k}$ Iezzi (2013).

3.2.4 Grandezas inversamente proporcionais

Observemos a seguinte tabela a qual ilustra o seguinte problema:

A distância entre duas cidades é 240 km. Um carro realiza esse percurso a uma velocidade média x (em km/h), e a um tempo y (em horas) Iezzi (2013).

x	10	20	30	40	50	...	v	...
y	24	12	8	6	4,8	...	$\frac{240}{v}$	...

Percebe-se que se a velocidade dobra, o tempo de realização do percurso é reduzido à metade; se a velocidade triplica, o tempo é reduzido à terça parte e assim por diante. Em virtude disso, o produto de cada valor de x e seu correspondente y, resultará em 240. Concluí-se, então, que as grandezas expressas por x e y são inversamente proporcionais. Generalizando, duas grandezas são inversamente proporcionais quando o produto da medida y de uma e a correspondente x da outra forem constante e diferente de zero, ou seja, y . x = k para k constante e diferente de zero. Então, y será proporcional ao inverso de x, pois $\frac{y}{\frac{1}{x}} = k$.

4. Procedimentos metodológicos e materiais

Neste capítulo serão identificados os sujeitos da pesquisa, como ocorreu o desenvolvimento das atividades e o método utilizado nas análises dos dados. Será mencionado, também, o modo como decorreram algumas modificações e supressões de atividades. A pesquisa foi composta por atividades que compreendiam conceitos acerca do conteúdo da proporcionalidade, de modo a abrangê-la intuitivamente ou não. Foram realizadas uma a uma, e cada atividade, aumentava o nível de dificuldade.

4.1 Sujeitos da pesquisa

A pesquisa foi realizada no Colégio de Aplicação da UFRGS. A atividade foi desenvolvida com alunos de duas turmas, sendo uma de 6ª e outra de 7ª série, os quais frequentavam regularmente as aulas de Matemática. O trabalho ocorreu, em cada turma, em quatro períodos com duração de 45 minutos cada um. A turma de 6ª série era composta por 23 alunos e a da 7ª série por 30.

4.2 Metodologia: estudo de caso

Segundo Ponte:

> É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenômeno de interesse (PONTE, 2006, p. 2)

O estudo de caso é uma metodologia utilizada por muitas outras áreas além da educação. Nesta área, estes estudos são utilizados como investigações acerca da aprendizagem, práticas e formação dos professores, e inovações curriculares.

Tem-se, um caso, conforme Ponte (2006), como um exemplo. Pode ser um exemplo pela “negativa”, que mostre aspectos perturbadores de uma realidade, evidenciando a forma que um programa ou situação fracassam com relação aos objetivos propostos e mostra-se o motivo. Pode ser, também, um exemplo pela “positiva”, mostrando como uma realidade (ainda não vista) pode existir em determinadas condições, ou um exemplo do funcionamento de uma situação bem sucedida, tratando-se da exibição e compreensão de um caso exemplar, o qual mostra a possibilidade de existência do objeto. Pode-se também ter o estudo de um caso raro ou de um caso neutro.

Um caso é sempre bem definido e faz parte de um contexto. Deve-se, então, em um estudo de caso, considerar-se seu desenvolvimento e os elementos exteriores que o influenciam.

É muito comum fazer-se, também, estudos de caso múltiplo, que consiste em diversos estudos que de algum modo serão comparados. Estes, com a finalidade de auxiliar o conhecimento das inúmeras realidades existentes em um determinado grupo.

Os estudos de caso podem ter propósitos variados:

> Como trabalhos de investigação, podem ser essencialmente *exploratórios*, servindo para obter informação preliminar acerca do respectivo objeto de interesse. Podem ser fundamentalmente *descritivos*, tendo como propósito essencial descrever, isto é, dizer simplesmente como é o caso em apreço. E, finalmente, podem ser *analíticos*, procurando problematizar o seu objeto, construir ou desenvolver nova teoria ou confrontá-la com teoria já existente (YIN, apud PONTE, 2006, p. 6).

Podem ser de cunho positivista, interpretativo ou crítico. Utiliza-se, em um estudo de caso, instrumentos e estratégias muito variadas, o que gera uma pesquisa única, com técnicas de recolha e análise de dados muito variadas. Considera-se o estudo de caso uma investigação de natureza empírica, a qual é feita, normalmente, através de estudo de campo ou análise documental. Analisa determinado objeto inserido no seu contexto real. É muito comum a prática de entrevistas, observações, documentos artefatos (Yin, 1984). É uma pesquisa de cunho fortemente descritivo, mas não pode ser apenas descritivo. Pode-se ter uma grande profundidade analítica, de forma a colaborar com novas teorias e questões para investigação.

Essa metodologia não é uma investigação experimental. Ela é aplicada quando não se tem controle dos acontecimentos e não se pretende manipular os comportamentos dos participantes. O investigador apenas quer conhecer e compreender determinada realidade exatamente como ela é. Não é uma abordagem virada para o estudo de situações de intervenção conduzida pelo investigador (PONTE, 2006, p.8). Ponte salienta que:

> Na verdade, para se descobrir aspectos novos, escondidos, de uma dada situação, é essencial um distanciamento e uma capacidade de interrogar de modo muito livre os acontecimentos. É, por isso, muito importante que o investigador possa tirar partido da possibilidade de se surpreender por não estar afectiva e intelectualmente comprometido com os resultados que possa vir a encontrar (PONTE, 2006, p. 8).

O fato de não poder estar comprometido afetiva e intelectualmente com os resultados não significa que o autor não pode fazer um estudo da sua própria realidade. Alguns autores, quando nesse tipo de situação, utilizam um forte referencial teórico com o intuito de possibilitar uma nova visão da realidade. O estudo de caso é, também, utilizado como instrumento para conhecimento mais aprofundado de profissionais para com a sua prática profissional. Então, para Ponte nestas circunstâncias:

> O caso não se refere à experiência que estão a realizar, tomada como um todo, mas apenas a uma unidade que se identifica dentro dela, seja um aluno, uma aula, uma tarefa ou acontecimento. Desde que consiga gerar um *corpus* de material empírico que permita estudar essa situação e fazê-lo de modo descomprometido, com o necessário distanciamento, não há motivo para que o investigador não possa realizar alguns estudos de caso (PONTE, 2006, p.9).

Os estudos de caso resultam em materiais como textos escritos, comunicações orais ou registro em vídeos. É retratado através de, normalmente, narrativas, as quais relatam histórias relevantes, que acrescentem algo ao conhecimento existente. A natureza do estudo de caso sugere chamar a atenção para o interessante, original e surpreendente abordado na situação estudada, fato que é pertinente para uma narrativa, desde que se preserve a descrição metodológica e a apresentação dos dados, sem os quais não se pode falar de relatos de trabalhos científicos (PONTE, 2006, p.10).

Um estudo de caso possui duas vertentes essenciais, a primeira é a interpretativa, a qual compreende como é o mundo pelo viés dos participantes; a segunda é a pragmática, que objetiva propor uma perspectiva global do objeto de estudo, do ponto de vista do investigador o mais completo e coerente possível (PONTE, 2006, p. 12). Contudo, em ambos os casos, é produzido um conhecimento particularístico.

É muito importante a base empírica dos estudos, contudo, a teoria se faz necessária na orientação da investigação, tanto para a coleta de dados quanto para a análise. Auxilia nas respostas a questionamentos como: Que coisas observar? Que dados escolher? Que perguntas fazer? Que categorias construir?

Em Educação Matemática têm-se alguns tipos de caso considerando a orientação teórica. Temos estudos etnográficos – relacionados à análise sociocultural; históricos – os quais têm como foco a reconstituição de um fenômeno ou organização em um dado intervalo de tempo; psicológicos – focados em um indivíduo e estudando aspectos de seu comportamento, permitindo assim, o estudo de alunos e comportamentos fora do comum; sociológicos – que abordam a sociedade e socialização. Geralmente, estes estudos iniciam com hipóteses que são reformuladas ao longo da investigação.

A perspectiva interpretativa é a que inspira fundamentalmente a investigação qualitativa. Sua ideia principal sugere que a atividade humana é uma experiência social que cada um vai elaborando e significando. Ao investigar-se, procura-se reconstruí-la. Precisa-se, assim, que o investigador compreenda a subjetividade do pensamento dos participantes. Na análise, é indispensável o uso, também, do seu ponto de vista.

O que possibilita que o investigador tenha confiança na relevância e no valor da investigação, para aprofundar o trabalho e convencer os que têm interesse nas questões, resultados e argumentos é a base teórico-metodológica da atividade. Deve-se considerar que um estudo de caso tem como proposta a compreensão e não a comprovação ou falsificação de “leis gerais” (PONTE, 2006, p.18).

Alguns critérios específicos devem ser considerados como resultado da própria natureza de um estudo de caso segundo Ponte (2006):

1. *O objeto de estudo está bem definido?*
2. *O estudo evidencia aspectos característicos fundamentais do caso?*
3. *O estudo de caso, no seu relato, procura acrescentar conhecimento ao conhecimento já existente?*

> De acordo com estes critérios, um requisito fundamental deste tipo de investigação é que lide com casos verdadeiramente interessantes, que nos obriguem a pensar e nos levem a ver coisas novas. Para alguns autores, existe uma preocupação muito centrada nos instrumentos, associada a crença de que com uma instrumentação "rigorosa" se pode fazer uma investigação qualitativa de qualidade. No entanto, a interpretação não é uma questão de aplicação mecânica de instrumentos pretensamente rigorosos. Na verdade, qualquer conceito de rigor é sempre relativo a um quadro teórico (explícito ou implícito). Não se deve ignorar o facto que neste tipo de investigação o principal instrumento é o investigador, não havendo nada que substitua a sua perspicácia observadora, bem como a riqueza e pertinência de suas perspectivas de análise (PONTE, 2006, p.20).

Conclui-se, então, que é indispensável e principal requisito para um estudo de caso de qualidade a fundamentação teórica, tirando o foco do desenvolvimento de instrumentos mais "rigorosos".

Considera-se o estudo de casos uma contribuição para a melhoria das práticas nas instituições educativas. Optou-se então por analisar as atividades através da metodologia do estudo de caso, tendo em vista que serão considerados os esquemas feitos pelos alunos ao resolverem questões sobre proporcionalidade à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

4.3 Coleta de dados

A coleta de dados da pesquisa desenvolveu-se no mês de outubro do ano de 2013, período letivo das aulas de matemática. Os objetos utilizados para registro foram um diário de campo, no qual a professora fazia suas anotações à medida que situações e respostas interessantes e relevantes surgiam, e as anotações dos alunos nas folhas das atividades, as quais continham questionamentos que instigavam os alunos à escrita, de forma a justificarem suas respostas.

Diário de campo: material utilizado pela professora para registros de comentários feitos através de debates com colegas e com a mesma. No diário eram anotadas observações acerca do desenvolvimento das atividades propostas, do raciocínio utilizado pelos alunos e, também, questionamentos instigantes. As anotações não foram feitas de maneira assídua, mas sim na medida em que se eram feitas necessárias. No decorrer do trabalho, estes registros serão analisados. Utilizou-se, também, como material de registro da investigadora, fotografias.

Registros dos alunos: os alunos receberam um total de 13 folhas, cada uma contendo uma atividade envolvendo conceitos de proporcionalidade. Ao final de cada atividade, foram feitos questionamentos, os quais deveriam ser respondidos de maneira descritiva e com justificativas para os procedimentos utilizados. Foi também questionado o nível de dificuldade encontrado por cada um, para cada questão formulada. Conforme os alunos terminavam as atividades, recebiam a próxima e assim por diante.

4.4 Sequência de atividades

As atividades foram planejadas levando em consideração que os conceitos de proporcionalidade estão diariamente presentes na realidade do aluno nas mais diversas situações. A maioria das tarefas é composta por desenhos ou tabelas, as quais instigam os alunos ao raciocínio proporcional sem que isso seja mencionado.

O objetivo da proposta era que os alunos pensassem sobre a proporcionalidade sem que fosse solicitado o uso de qualquer método que possibilitasse a resolução das questões. Os conceitos de ampliação e redução tiveram um papel importante na execução das atividades.

Considerando o volume de questões e de alunos, foram selecionadas para análise, por conveniência, as questões 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10 e 12 e algumas resoluções por tarefa de cada turma, uma de 6ª e outra de 7ª série. Serão analisadas as questões e, em determinados momentos serão confrontadas respostas da 6ª série com as da 7ª, tendo em vista que os alunos da primeira turma não tiveram nenhum contato com o conteúdo abordado e os da 7ª já haviam estudado proporcionalidade.

Atividade 1: Observe a figura 1 e, com suas palavras, explique o que aconteceu nas figuras 2 e 3.

1)  2) 

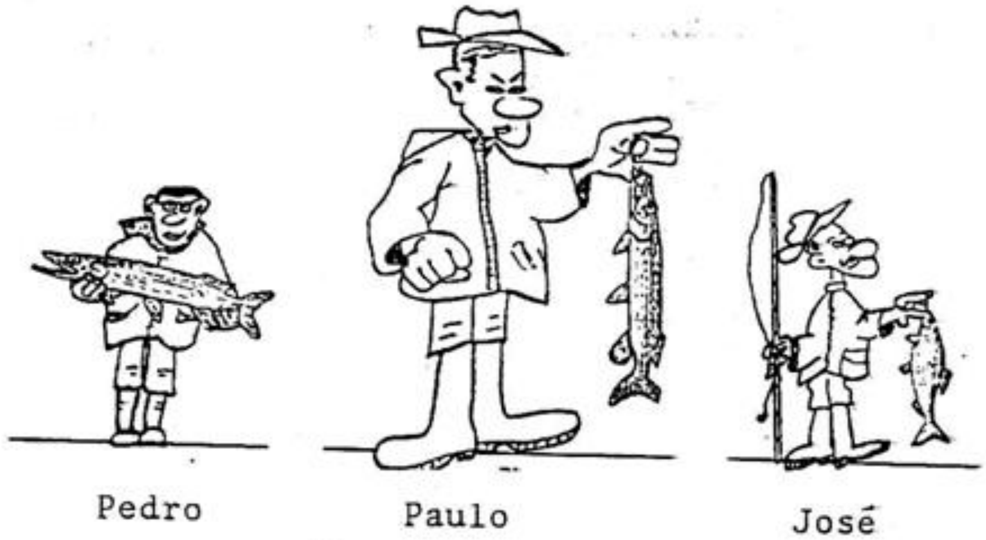
3) 

Figura 2:

Figura3:

Esta atividade foi extraída do Projeto do Fundão – Desafio para a Universidade: Razões e Proporções, Tinoco (1988), transcrita do livro: Mathématiques- 5ª.-IREM, Strasbourg, com algumas alterações.

Atividade 2:

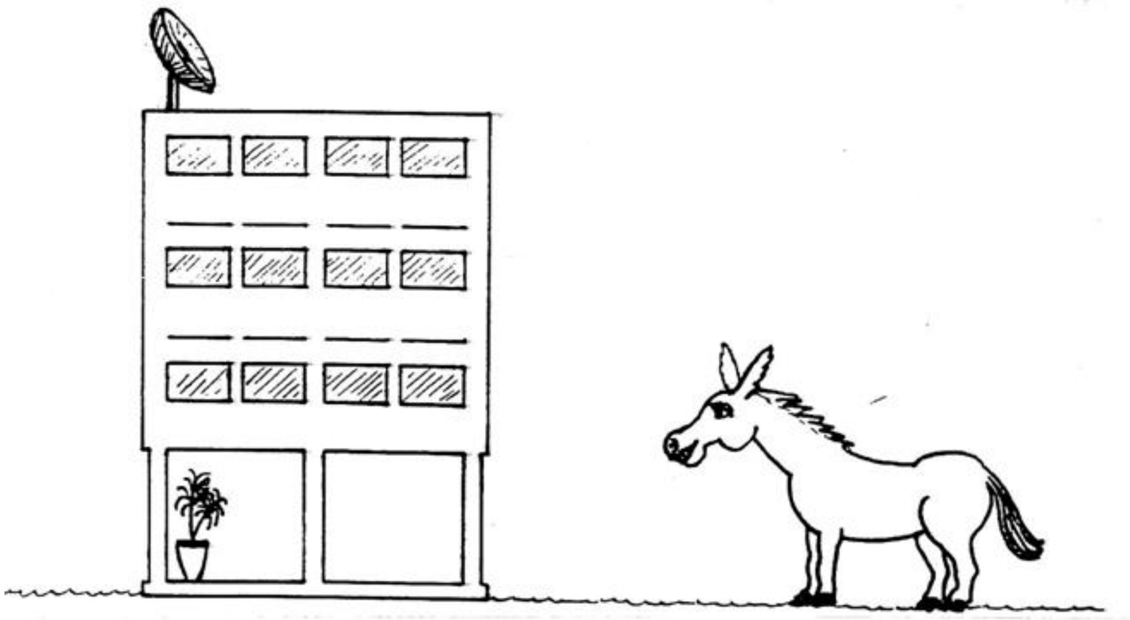


Acima está o desenho de três pescadores que têm a mesma altura. Qual deles pescou o maior peixe? Explique sua resposta.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

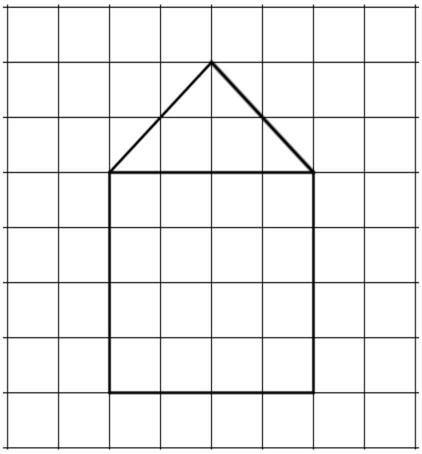
Esta atividade foi extraída do Projeto do Fundão – Desafio para a Universidade: Razões e Proporções, Tinoco (1988), transcrita do livro: Mathématiques- 5ª.-IREM, Strasbourg, com algumas alterações.

Atividade 3:



Observando a figura acima, você consegue identificar algum problema? Qual? Explique sua resposta.

Atividade 4: Faça uma ampliação e uma redução da figura abaixo, de maneira que a sua forma mantenha-se semelhante a figura original.



Explique qual o raciocínio que você utilizou para realizar a tarefa. Você encontrou dificuldades? Quais?

____

____

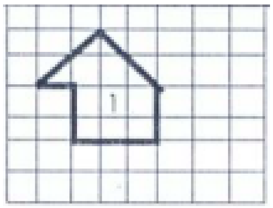
____

____

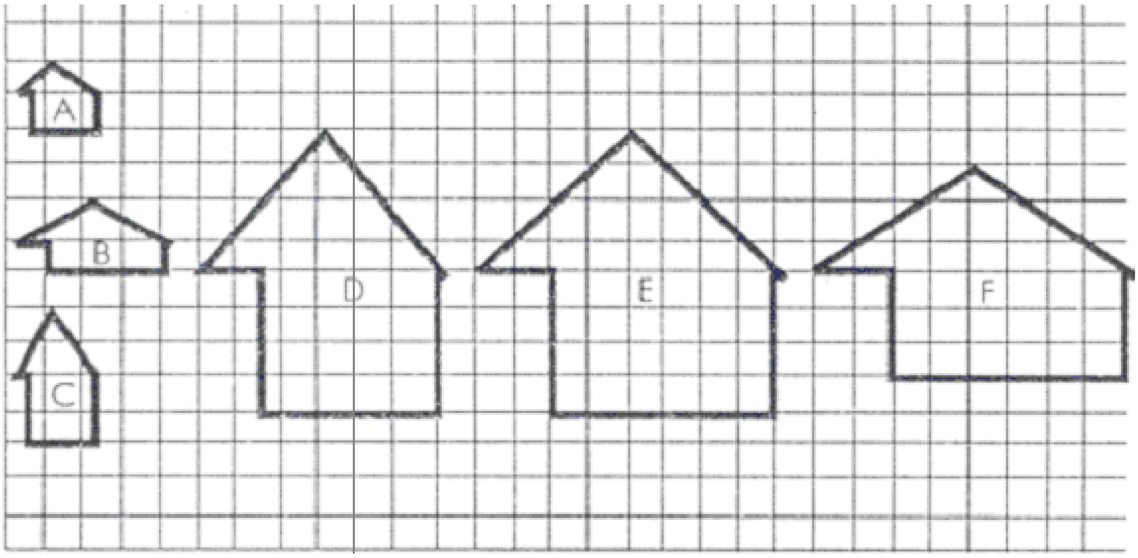
____

Esta atividade foi extraída e adaptada do livro Aprender a Matemática de outra forma, de Jean-Pierre Levain (1997, p. 112).

Atividade 5: Entre os desenhos A, B,C,D, E e F apresentados abaixo, quais são ampliações e reduções do desenho número 1?



Circule a(s) letra(s) correspondente(s) ao(s) desenho(s) que você acha que representa uma ampliação ou redução do desenho número 1.



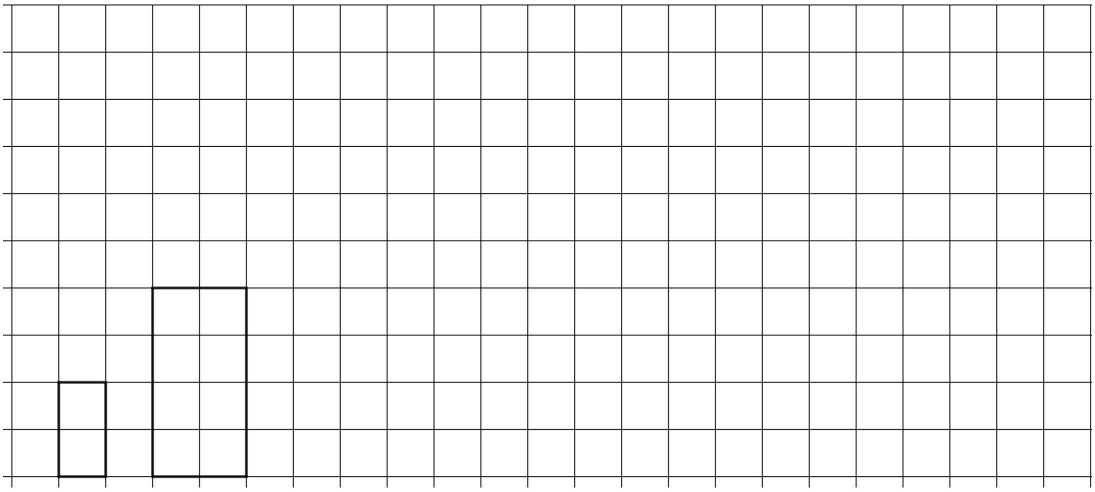
Você teve facilidade ou dificuldade para responder a pergunta acima? Por quê?

____
____
____
____

Descreva os procedimentos efetuados para resolver a atividade proposta.

____
____
____
____

Atividade 6:



a) Desenhe a próxima etapa da representação acima.

b) Quais serão as medidas da figura na décima etapa? Explique os procedimentos utilizados na resolução.

Esta atividade foi extraída do livro Aprender a Matemática de outra forma, de Jean-Pierre Levain (1997, p. 116), com algumas alterações.

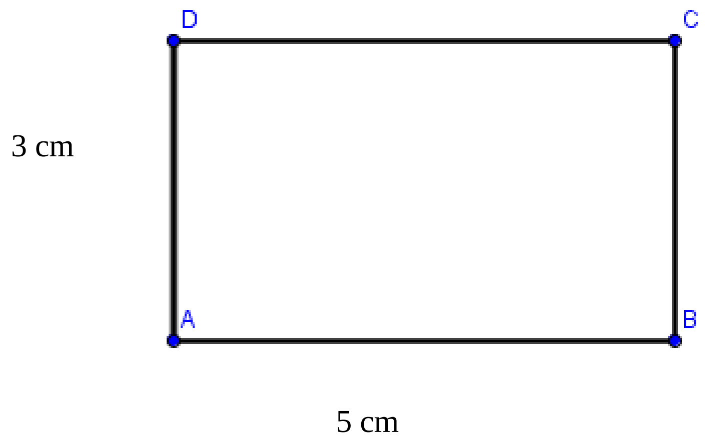
Atividade 7a: Em uma fotografia, Rafael mede 4 cm e Luís mede 6 cm. Este retrato foi ampliado, e agora, Rafael mede 8 cm. Qual é a medida de Luís na foto ampliada? Justifique sua resposta.

Justificativa:

Atividade 7b: Em outra fotografia, João mede 4 cm e Pedro mede 6 cm. Este retrato também foi ampliado, e agora, João mede 6 cm. Qual é a medida de Pedro na foto ampliada? Justifique sua resposta.

Esta atividade foi extraída do livro Aprender a Matemática de outra forma,Levain (1997, p. 114).

Atividade 8: Dado o retângulo ABCD



Termina o retângulo A’B’ C’D’ de modo que ele seja a ampliação do retângulo ABCD.

Você encontrou dificuldades na resolução da atividade proposta? Quais?

Atividade 9: Faça uma ampliação ou redução da bandeira do Brasil, quadriculando-a.

.

Você encontrou dificuldades na execução da tarefa? Quais?

____

____

____

____

____

____

Esta atividade foi extraída do Projeto do Fundão – Desafio para a Universidade: Razões e Proporções, Tinoco (1988), transcrita do livro: Mathématiques- 5ª.-IREM, Strasbourg, com algumas alterações.

Atividade 10: Para preparar suas tintas, um pintor costuma dissolver cada 4 latas de tinta em 6 latas de água. Quantas latas de água são necessárias para dissolver 8 latas de tinta?

Preencha a seguinte tabela descrevendo, a cada linha preenchida, as operações feitas:

Tinta	Água
4	6
8	
	3
1	

Você encontrou dificuldades para realização da tarefa? Quais?

____
____
____
____
____

Esta atividade foi extraída do Projeto do Fundão – Desafio para a Universidade: Razões e Proporções, Tinoco (1988), transcrita do livro: Mathématiques- 5ª.-IREM, Strasbourg, com algumas alterações.

Atividade 11: Priscila foi ao mercado com sua mãe. Como o estacionamento gratuito do supermercado estava lotado, sua mãe precisou deixar o carro em outro estacionamento rotativo, que tinha a tabela de preços abaixo:

Tempo	Preço
1 h	R$ 5,00
2 h	R$ 11,00
3 h	R$ 17,00
4 h	
5 h	

Quanto a mãe de Priscila pagaria de estacionamento se ficasse no supermercado durante 5 horas? Por quê?

____

____

____

Descreva seu raciocínio ao preencher a tabela acima:

____

____

____

____

Atividade 12: Uma cozinheira achou duas receitas de sopa nas quais havia os seguintes ingredientes.

Na 1ª: 3 cebolas, 4 colheres de farinha, 1 litro de água.

Na 2ª: 4 cebolas e meia, 6 colheres de farinha, 1 litro e meio de água.

As duas receitas podem ser da mesma sopa? Justifique.

____
____
____
____

Para que sejam da mesma sopa:

a) As quantidades devem ser iguais?

____
____
____

b) O que deve acontecer para que seja a mesma sopa?

____
____
____

c) Por qual número foram multiplicados os números da primeira receita para obter os da segunda?

____
____

d) Se o cozinheiro usar 5 cebolas para 3 litros de água, a sopa resultante terá mais gosto de cebola ou menos que a sopa da primeira receita? Justifique.

____
____
____

Esta atividade foi extraída de Proporcionalidade na educação científica e matemática: quantidades medidas por razões, Carraher, Carraher, Schliemann, Ruiz (1986), com algumas alterações.

Atividade 13: Identifiquem, nos casos a seguir, quais as opções mais vantajosas:

1º) Um curso de inglês oferece um plano de 4 meses pelo valor de R$ 760,00 e outro oferece 3 meses por R$ 540,00. Justifique.

____

____

____

2º) Uma academia oferece um pacote de 4 meses de atividades por R$ 480,00 e outra 10 meses por R$ 1200,00. Justifique.

____

____

____

3º) Um supermercado vende 5 barras de chocolate por R$ 36,00 e de 20 barras por R$ 124,00. Justifique.

____

____

____

5.Análise de dados

Para análise de dados, optou-se por fazer uma síntese da proposta de cada atividade, nos quais constam seus objetivos. Serão apresentados registros escritos pelos alunos.

Quadro 1: Organização das turmas e distribuição das atividades executadas

Data da execução	Turma	Tempo de execução	Atividades executadas
7 de outubro	71	2 horas aula	1, 2, 3, 4, 5
7 de outubro	Amora II (6ª série)	2 horas aula	1, 2, 3, 4, 5, 6
9 de outubro	71	2 horas aula	6, 7, 8, 10, 11, 12, 13
13 de outubro	Amora II (6ª série)	2 horas aula	7, 8, 10, 11, 12, 13

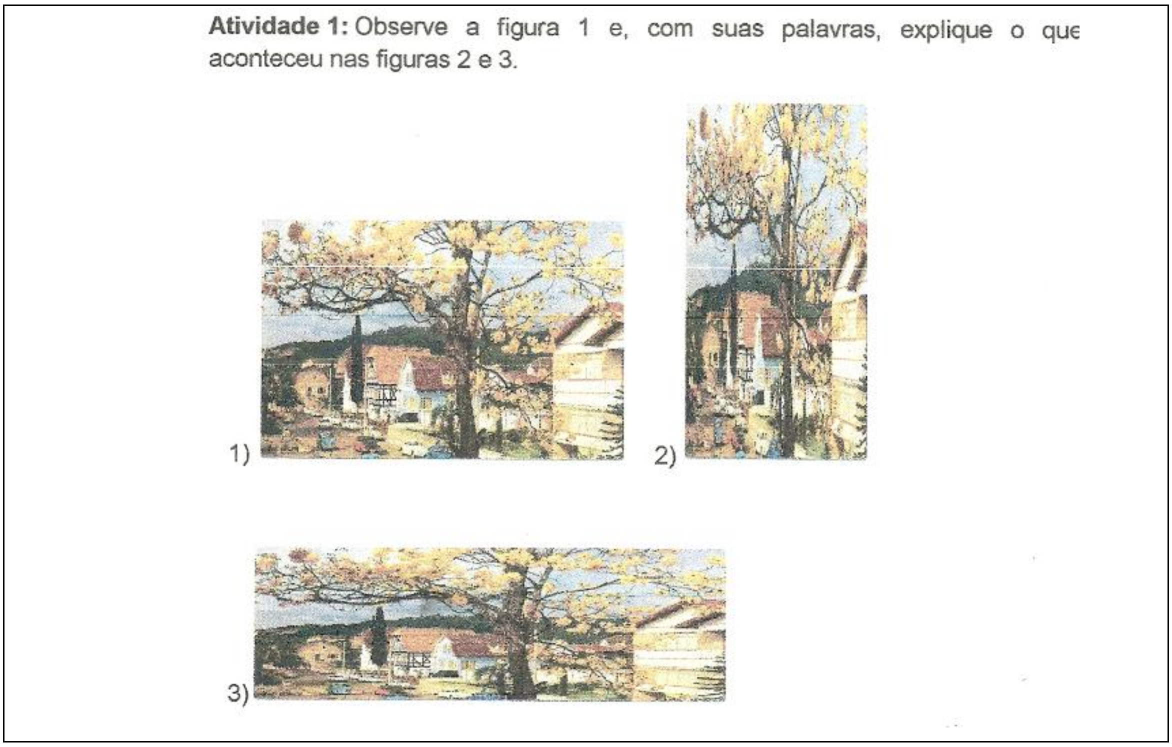
Fonte: Arquivo pessoal

As questões serão analisadas na ordem em que foram aplicadas. Após a síntese, serão analisadas as respostas da 6ª e 7ª série respectivamente. Salienta-se que a questão 9 foi suprimida, tendo em vista que o tempo era escasso e a atividade se assemelhava à algumas outras já aplicadas anteriormente.

Atividade 1:

Nesta atividade foram apresentadas aos alunos três figuras da mesma paisagem, sendo a primeira a original (sem deformações), a segunda deformada verticalmente e a terceira horizontalmente. Solicitava-se aos alunos que, com as palavras deles, escrevessem o que havia acontecido nas imagens 2 e 3, em relação a figura 1. O objetivo era a percepção de deformações com relação ao desenho original.

Figura 14: Atividade 1

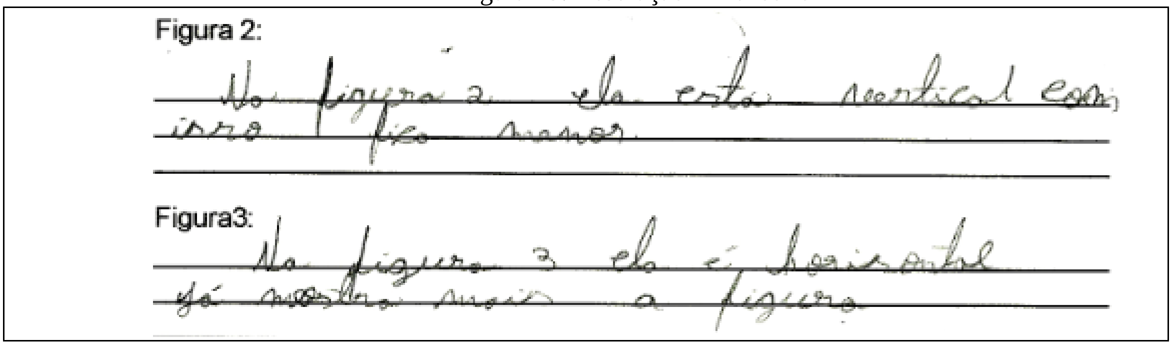


Fonte: Arquivo Pessoal

A maioria dos alunos de ambas as séries conseguiu perceber as deformações, embora houvesse alguns erros com relação aos conceitos de vertical e horizontal.

O primeiro trabalho da 6ª série tinha como respostas às figuras 2 e 3:

Figura 15: Resolução 1 – 6ª série



Fonte: Arquivo Pessoal

Pode-se perceber que o aluno denomina a figura 2 como estando na posição vertical, o que permite pensar que houve o reconhecimento de uma modificação apenas na altura da figura. Contudo, na segunda afirmação, ele relaciona a deformação da imagem com a redução da figura, ou seja, ele considera a modificação na largura. De maneira análoga são feitas as relações na figura 3, porém, a posição é denominada como horizontal e é interpretado que a imagem é ampliada.

A segunda resolução apresentava as seguintes respostas:

Figura 16: Resolução 2 – 6ª série

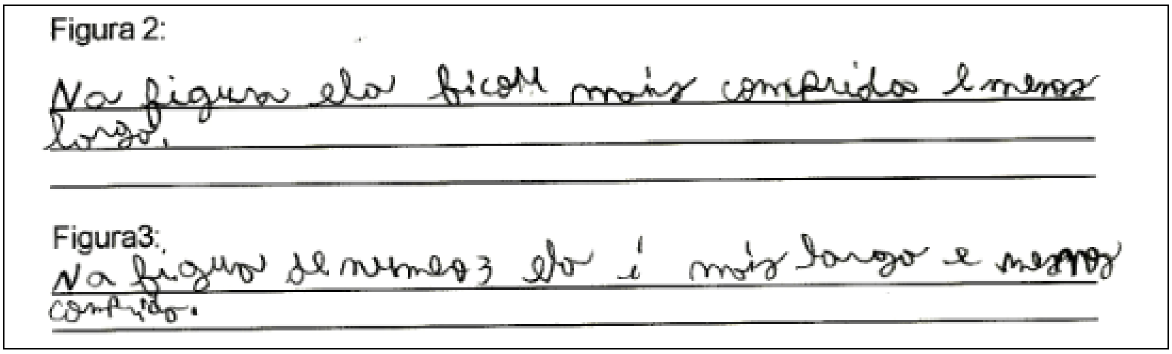


Figura 2:
Na figura ela ficou mais comprida e menos larga.

Figura3:
Na figura de numero 3 ela é mais largo e menos comprido.

Fonte: Arquivo Pessoal

Afirma-se que o aluno conseguiu perceber e expressar, em palavras e de maneira clara, a modificação tanto na largura como na altura de ambas as representações. Porém, nenhum aluno mencionou problemas de proporcionalidade. Isso pode ser devido ao fato de que ainda não tiveram contato formal com esse conceito, apenas em situações cotidianas – fato que os impedem de utilizar a linguagem matemática para fazer tal relação. Segundo Vergnaud (1993), para haver a conceitualização, é necessário que o indivíduo tenha uma gama de situações as quais darão sentido ao conceito, ou seja, os processos cognitivos e respostas dos alunos surgem das situações por eles encontradas.

Analisando as respostas escritas dos alunos da 7ª série, observou-se também certa dificuldade, de parte dos alunos, em relacionar as deformações das figuras com o conceito de proporcionalidade. No entanto, alguns alunos conseguiram responder corretamente. A primeira resolução a ser observada é a seguinte:

Figura 17: Resolução 1 – 7ª série

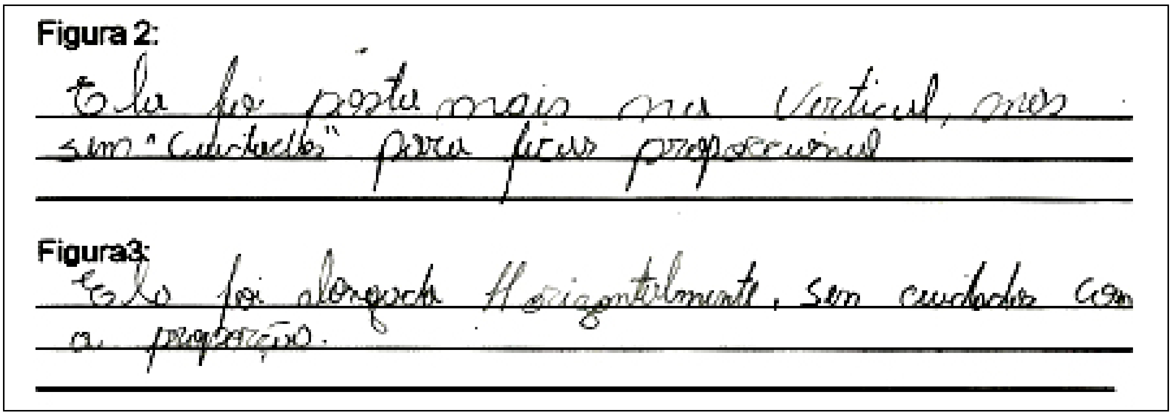


Figura 2:
Ela foi posta mais na vertical, mas sem "cuidado" para ficar proporcional

Figura3:
Ela foi alongada Horizontalmente, sem cuidados com a proporção.

Fonte: Arquivo Pessoal

O aluno descreve a ideia de vertical e horizontal abordando também a ausência da proporcionalidade. Segundo Levain (1997, p.27), o desenvolvimento da proporcionalidade nunca é adquirido antes dos 12 ou 13 anos.

A segunda resposta apresentou-se carregada de similaridades com as da 6ª série:

Figura 18: Resolução 2 – 7ª série

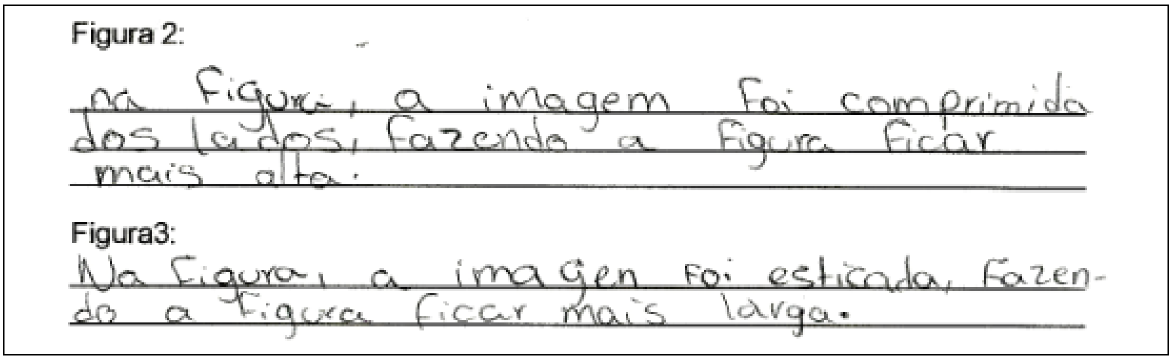


Figura 2:
na figura, a imagem foi comprimida dos lados, fazendo a figura ficar mais alta.

Figura3:
Na figura, a imagen foi esticada, fazen-do a figura ficar mais larga.

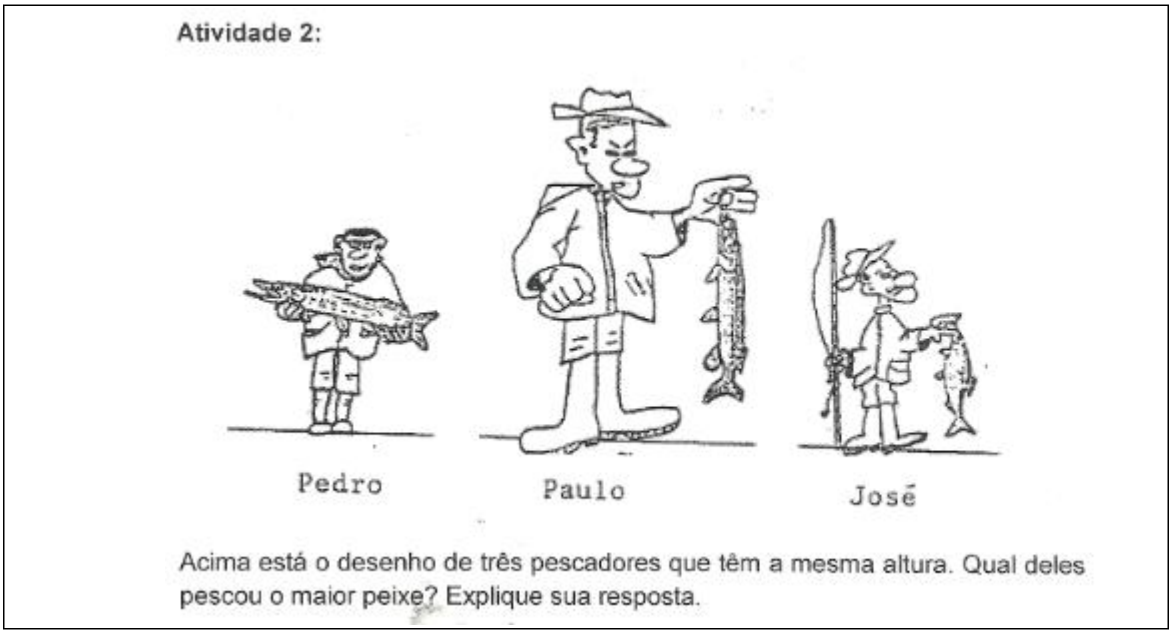
Fonte: Arquivo Pessoal

Pode-se presumir, que como estes alunos já tiveram contato formal com o conceito de proporcionalidade, as situações observadas por ele foram suficientes para proporcionar uma conceitualização acerca do tema.

Atividade 2:

Afirmou-se que os três pescadores tinham a mesma altura, cada um tinha um peixe nas mãos. Perguntou-se então, qual deles havia pescado o peixe maior. O objetivo era que os alunos percebessem que os pescadores estavam em distâncias diferentes do observador e, a partir disso criassem estratégias para descobrir qual peixe era o maior.

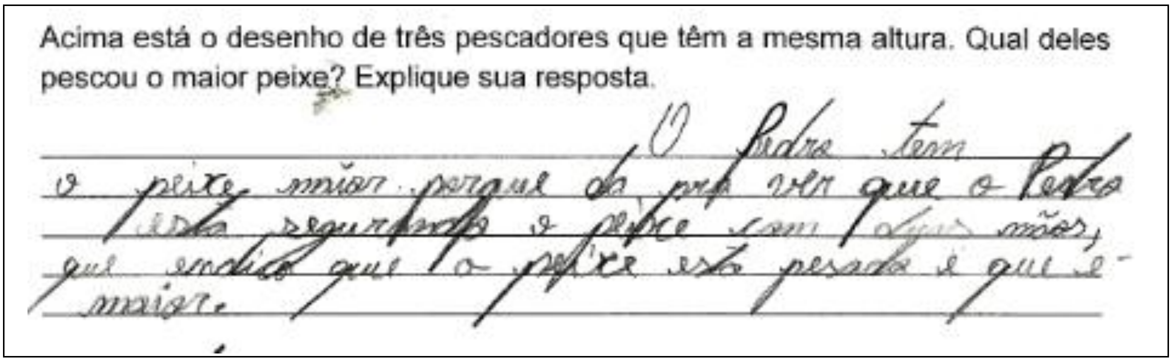
Figura 19: Atividade 2



Fonte: Tinoco (1988)

Alguns alunos utilizaram como estratégia a medição dos peixes com utilização da régua, visto que o material para medir foi entregue na primeira atividade, fato que agregou a eles um novo tipo de resolução o qual não era esperado, mas que os levaria a resposta correta da mesma forma. As respostas foram, em grande parte corretas, contudo as justificativas não foram, na sua totalidade, adequadas. Observamos a justificativa incorreta utilizada na seguinte resposta de um aluno da 6ª série:

Figura 20: Resolução 1 – 6ª série


Acima está o desenho de três pescadores que têm a mesma altura. Qual deles pescou o maior peixe? Explique sua resposta.

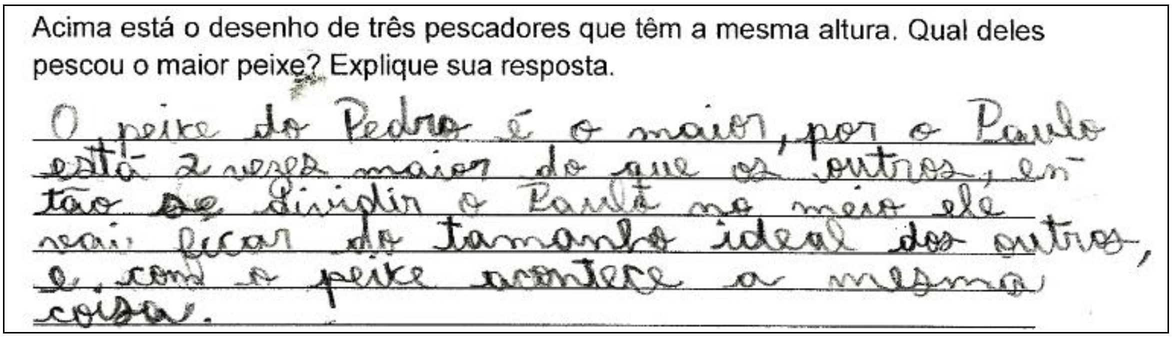
O Pedro tem o peixe maior porque da pra ver que o Pedro esta segurando o peixe com duas mãos, que endica que o peixe esta pesado e que é maior.

Fonte: Arquivo pessoal

Nesta resolução, o aluno responde corretamente que o peixe maior é o do Pedro, mas a justificativa apresentada não explica com clareza a resposta. O Pedro estar segurando o peixe com as duas mãos não implica em ser o maior. Ressalta-se, então, que o aluno não identifica relações entre a distância e os tamanhos das pessoas e dos peixes, o que nos leva a pensar que o raciocínio proporcional não se faz presente.

Outra resolução da 6ª série a ser observada retrata perfeitamente o raciocínio realizado pelo aluno para chegar à conclusão de que o peixe do Pedro é o maior.

Figura 21: Resolução 2 – 6ª série


Acima está o desenho de três pescadores que têm a mesma altura. Qual deles pescou o maior peixe? Explique sua resposta.

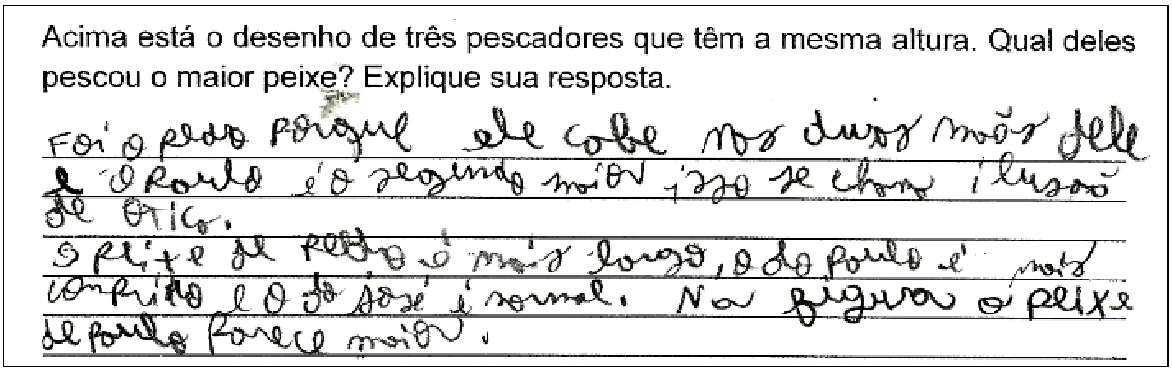
O peixe do Pedro é o maior, por o Paulo está 2 vezes maior do que os outros, então se dividir o Paulo no meio ele vai ficar do tamanho ideal dos outros, e com o peixe acontece a mesma coisa.

Fonte: Arquivo pessoal

Através das suas percepções, ele observa que o Paulo parece duas vezes maior que os demais, ou seja, se ele dividir o tamanho do Paulo por dois, ele consegue igualar as alturas e então, respeitando a proporcionalidade, a mesma coisa acontecerá com o peixe dele. Verifica-se, assim, que o conceito de proporcionalidade faz sentido para o aluno, pois através das antecipações (raciocínio pelo qual ele identificou que o tamanho do Paulo era duas vezes maior do que os outros) percebeu-se a utilização de conceitos-em-ação e conhecimentos-em-ação, os quais os levaram à compreensão da questão.

Analisando outra resolução:

Figura 22: Resolução 3 – 6ª série


Acima está o desenho de três pescadores que têm a mesma altura. Qual deles pescou o maior peixe? Explique sua resposta.

Foi o pedro porque ele cabe nas duas mãos dele e o Paulo é o segundo maior isso se chama ilusão de otica.
O peixe de pedro é mais longo, o do paulo é mais comprido e o do José é normal. Na figura o peixe de paulo parece maior.

Fonte: Arquivo pessoal

O aluno enxerga a diferença de tamanho dos peixes como uma ilusão de ótica, não conseguindo associar as distâncias com os tamanhos e não estabelecendo relação alguma com a proporcionalidade. Percebe-se também que o aluno considera aquilo que ele enxerga como o verdadeiro, sem considerar absolutamente nenhum fator matemático na escolha de sua resposta.

Tomando-se as resoluções da 7ª série, na primeira, observa-se a resposta:

Figura 23: Resolução 1 – 7ª série

Acima está o desenho de três pescadores que têm a mesma altura. Qual deles pescou o maior peixe? Explique sua resposta.

O Pedro, porque o Pedro e o José estão na mes ma distância, mas o peixe do Pedro é maior que o do José.
E o Paulo ta mais Perto Por isso o Peixe dele é menor que o do Pedro.

Fonte: Arquivo pessoal

Observou-se então que o aluno conseguiu estabelecer uma relação de ordem, não utilizando os conceitos de proporcionalidade. Ele percebeu que Pedro e José encontram-se a uma mesma distância do observador, o que os coloca em uma mesma classe de comparações, ou seja, o aluno utiliza, nesse momento, uma proposição a qual, segundo Vergnaud, pode tornar-se um argumento.

> Tais distinções são indispensáveis para a didática, porque a transformação dos conceitos-instrumentos e conceitos-objetos é um processo decisivo na conceitualização do real. Esta transformação significa, entre outras coisas, que as funções proposicionais podem tornar-se argumentos. A denominação é uma operação linguística essencial nesta transformação (VERGNAUD, 1993, p. 8).

Pode-se concluir que o conjunto de esquemas utilizados pelo aluno envolveu intuitivamente, conceitos de proporcionalidade, levando ele a resolver a questão conseguindo fazer as relações necessárias para chegar à resposta correta.

Na segunda resolução, tem-se:

Figura 24: Resolução 2 – 7ª série

Acima está o desenho de três pescadores que têm a mesma altura. Qual deles pescou o maior peixe? Explique sua resposta.

O PEIXE DO PEDRO, POIS MESMO MAIS LONGE ~~QUE (PORPORÇÃO)~~ (PROPORÇÃO) O PEIXE TEM O MESMO TAMANHO MAS SE FOSSE MAIS PERTO ELE FICARIA MAIOR.

Fonte: Arquivo pessoal

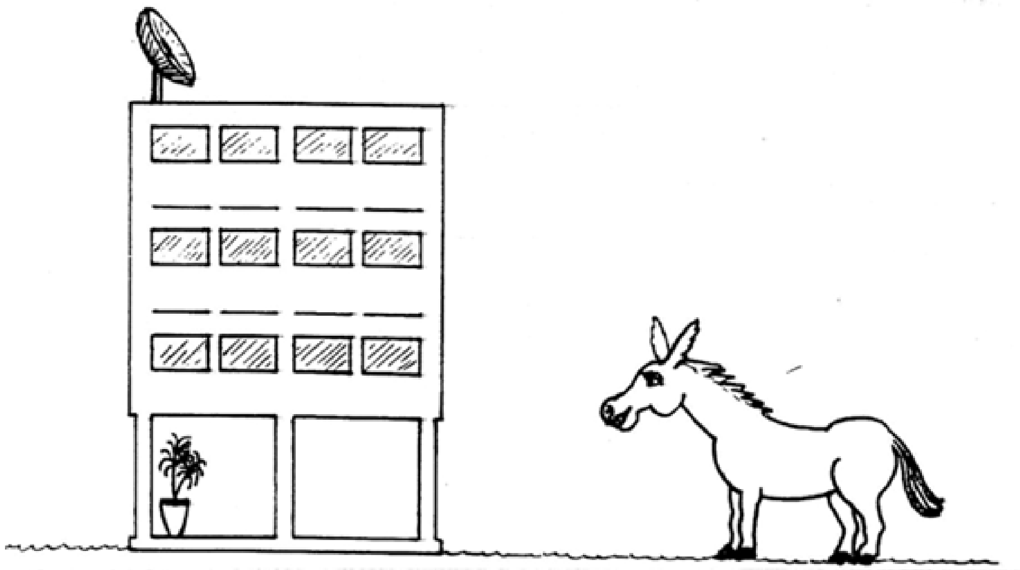
Observa-se que nesta resposta a noção do conceito de proporcionalidade está representada, o aluno percebe que se o Pedro estivesse mais próximo do observador, o peixe dele ficaria maior que o do Paulo, ou seja, ele percebe que o peixe e o homem aumentariam de forma proporcional.

Atividade 3:

Foi apresentada uma figura que continha um prédio, um burro e um vaso com uma planta. As proporções estavam distorcidas, a altura do burro era, praticamente, a metade da altura edifício. Pediu-se então para que os alunos escrevessem, justificando sua resposta, quais os problemas por eles encontrados na figura. O objetivo era que eles conseguissem perceber a ausência de proporcionalidades mesmo que sem falar matematicamente.

Figura 25: Atividade 3

Atividade 3:



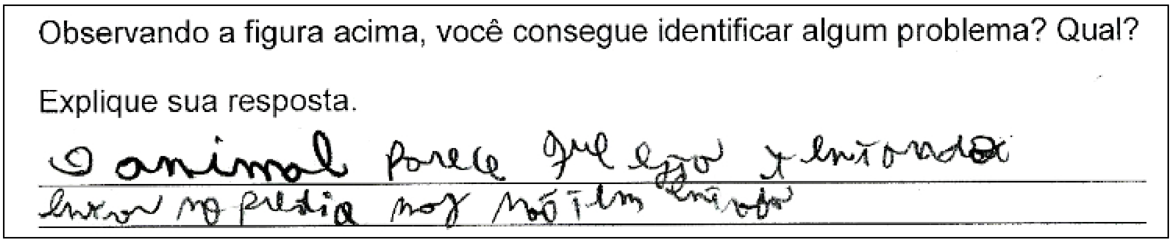
Observando a figura acima, você consegue identificar algum problema? Qual?

Explique sua resposta.

Fonte: Tinoco (1988)

Observou-se que uma quantidade expressiva dos alunos conseguiu identificar problemas com relação à proporção. Porém, alguns alunos não mostraram entendimento com relação à proposta do exercício. Questões da 6ª série foram selecionadas para análise, dentre elas a primeira:

Figura 26: Resolução 1 – 6ª série


Observando a figura acima, você consegue identificar algum problema? Qual?

Explique sua resposta.

[illegible]

Fonte: Arquivo pessoal

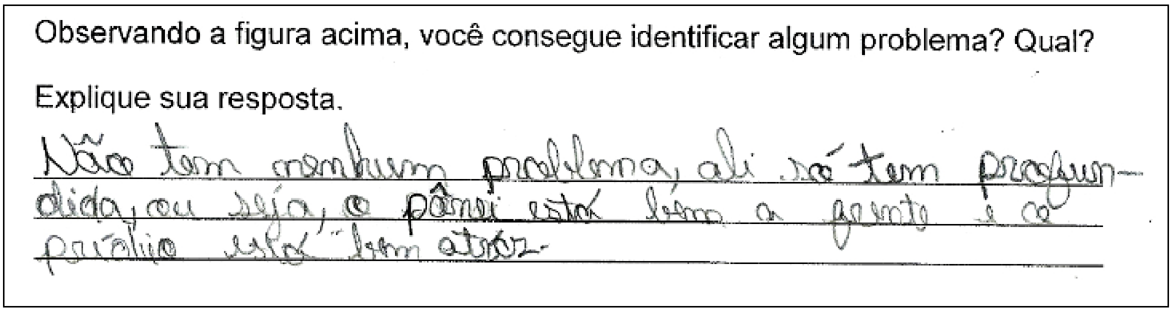
Percebe-se que, nesta resposta, o aluno não identifica nenhum problema com relação aos tamanhos do burro, do prédio e da planta. Pode-se considerar que o ele não tenha conseguido interpretar a questão de forma a satisfazer o que era esperado na questão, o que não é um problema, pois segundo Vergnaud:

> A ação operatória não é a totalidade da conceitualização do real; longe disso. Não se discute a veracidade ou falsidade de um enunciado totalmente implícito. Não se identificam os aspectos do real aos quais se deve prestar atenção sem ajuda das palavras, enunciados, símbolos e sinais. O emprego de significantes explícitos é indispensável à conceitualização. (VERGNAUD, 1993, p.8)

Desta forma, pode-se concluir que, para esse aluno, o enunciado pode ter se apresentado de forma implícita em se tratando dos objetivos, ou seja, ele não relacionou o questionamento à conceitualização matemática, fato que o impossibilitou de referenciar a proporcionalidade.

Outra resposta que foi bastante corriqueira dentre os alunos da 6ª série ocorreu ao relacionar a figura com a profundidade:

Figura 27: Resolução 2 – 6ª série


Observando a figura acima, você consegue identificar algum problema? Qual?

Explique sua resposta.

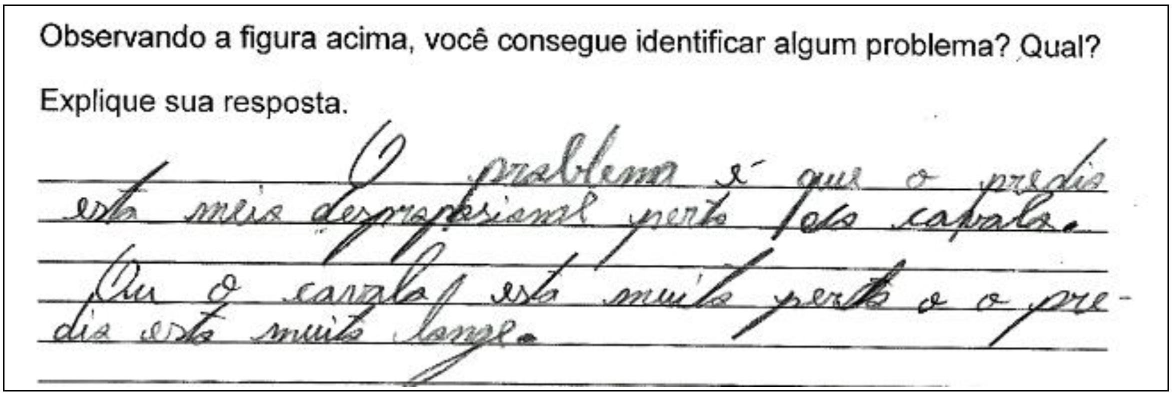
Não tem nenhum problema, ali só tem profun-dida, ou seja, o pônei está bem a frente e o prédio está bem atráz.

Fonte: Arquivo pessoal

A justificativa apresentada pelo aluno é totalmente aceitável, tendo em vista que ele faz uso de um conhecimento em ação, ou seja, quando ele menciona a possibilidade de o burro estar mais a frente com relação ao prédio, traz o conceito de perspectiva.

Além destes dois tipos de respostas, observou-se que alguns alunos conseguiram fazer a relação tanto com a proporcionalidade quanto com a perspectiva, ou seja, para esses alunos, ficou explícita a ideia que deveria por eles ser abordada.

Figura 28: Resolução 3 – 6ª série


Observando a figura acima, você consegue identificar algum problema? Qual? Explique sua resposta.

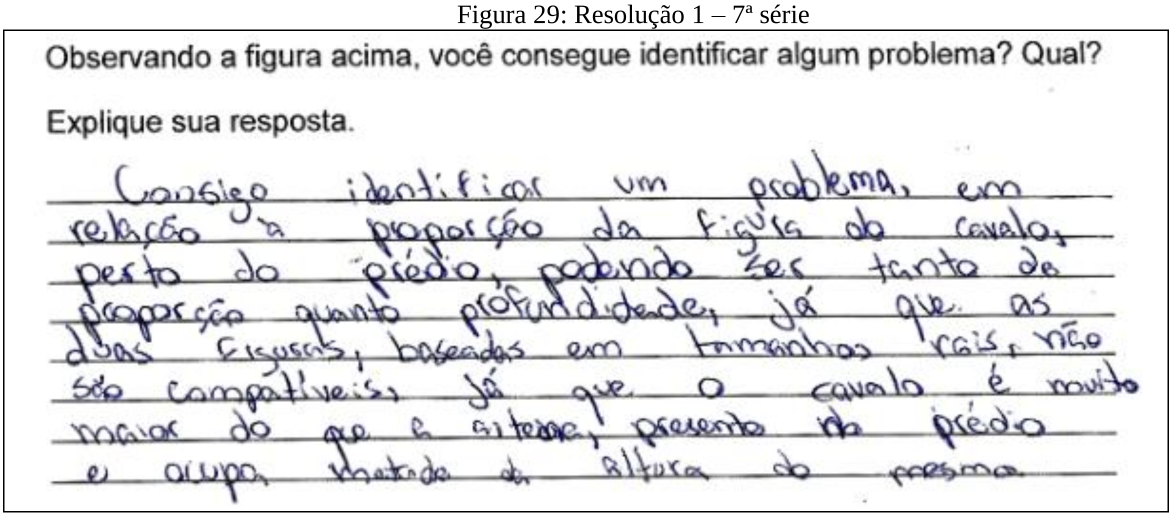
O problema é que o predio esta meio desproporcional perto dos cavalos. Ou o cavalo esta muito perto e o predio esta muito longe.

Fonte: Arquivo pessoal

Na 7ª série, respostas semelhantes à primeira analisada foram quase que inexistentes. Isso pode ser devido ao contato anterior, dos alunos, com conceitos de proporcionalidade. Percebe-se nas respostas de alguns, uma maturidade ao se tratar do conteúdo, refletindo extrema familiaridade com os conceitos. Nesta turma, os equívocos relacionados aos objetivos da tarefa foram muito mais reduzidos, apresentando respostas de forte relação com o esperado.

A escolhida para análise foi:

Figura 29: Resolução 1 – 7ª série


Observando a figura acima, você consegue identificar algum problema? Qual? Explique sua resposta.

Consigo identificar um problema, em relação à proporção da figura do cavalo, perto do prédio, podendo ser tanto de proporção quanto profundidade, já que as duas figuras, baseadas em tamanhos reais, não são compatíveis, já que o cavalo é muito maior do que a [illegible], presente no prédio e ocupa metade da altura do mesmo.

Fonte: Arquivo pessoal

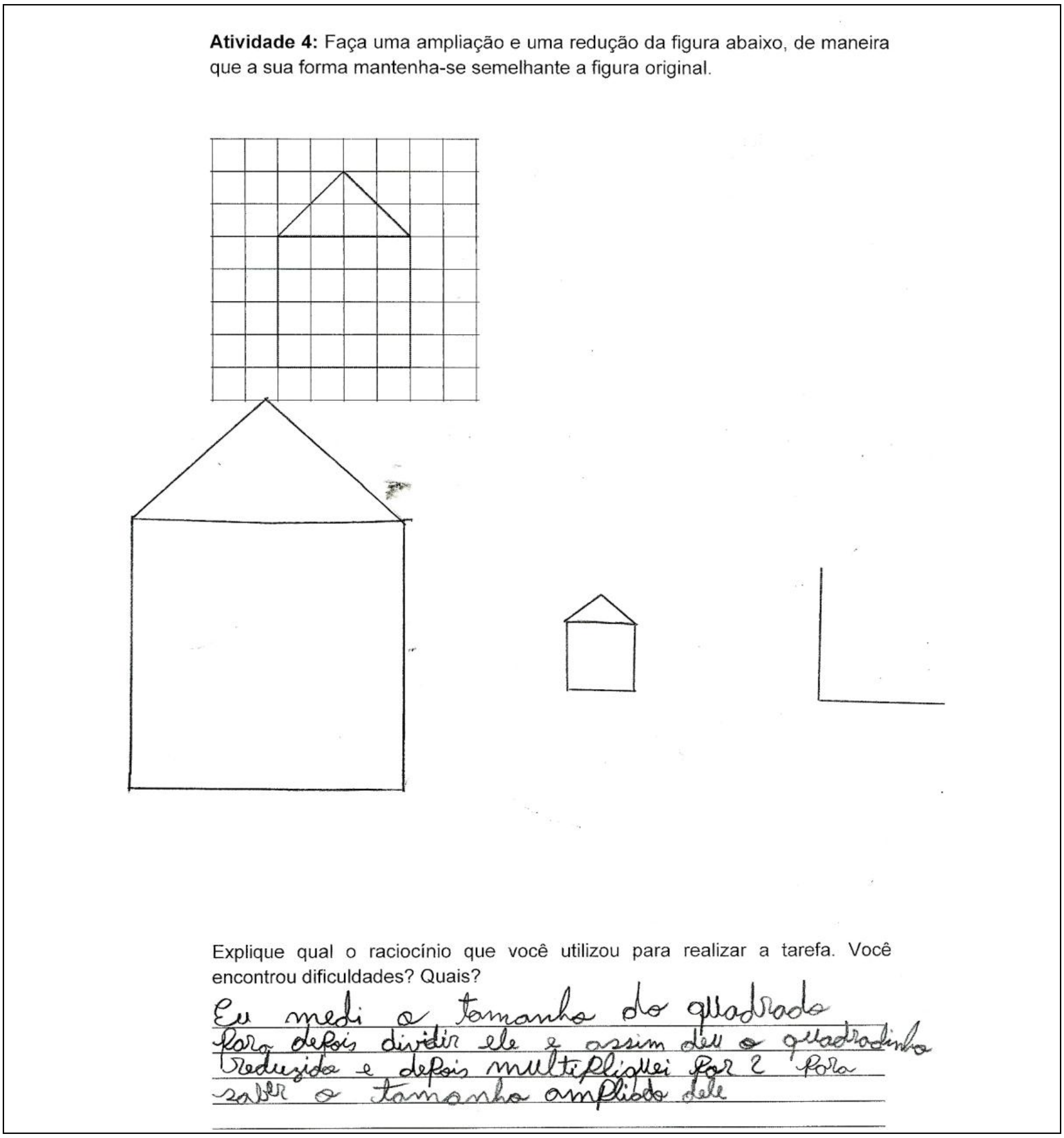
O aluno conseguiu identificar problemas, que sob seu ponto de vista, poderiam abranger a proporcionalidade ou até mesmo profundidade. Nesse tipo de resposta, pode-se notar certa confusão, pois não se sabia definir exatamente a origem do problema. É notória a facilidade com que ele compreende, se expressa e relaciona os tamanhos da gravura com os tamanhos reais, ou seja, a quantidade de situações que podem ter sido apresentadas a ele anteriormente, embasou a capacidade dele de fazer relações.

Atividade 4:

Esta atividade apresentava aos alunos uma casa, a qual estava sobre uma malha quadriculada. No enunciado, era solicitado que fizessem uma ampliação e uma redução. Não foi fornecida a malha aos alunos para que não fossem induzidos a alguma estratégia de resolução pré-determinada.

Os alunos da 6ª série, embora tivessem a oportunidade de solicitar a malha, não o fizeram. Ou seja, eles apenas mediram com a régua as dimensões e tentaram ampliar, solução que era esperada. Uma das questões desta série a ser analisada é:

Figura 30: Resolução 2 – 6ª série

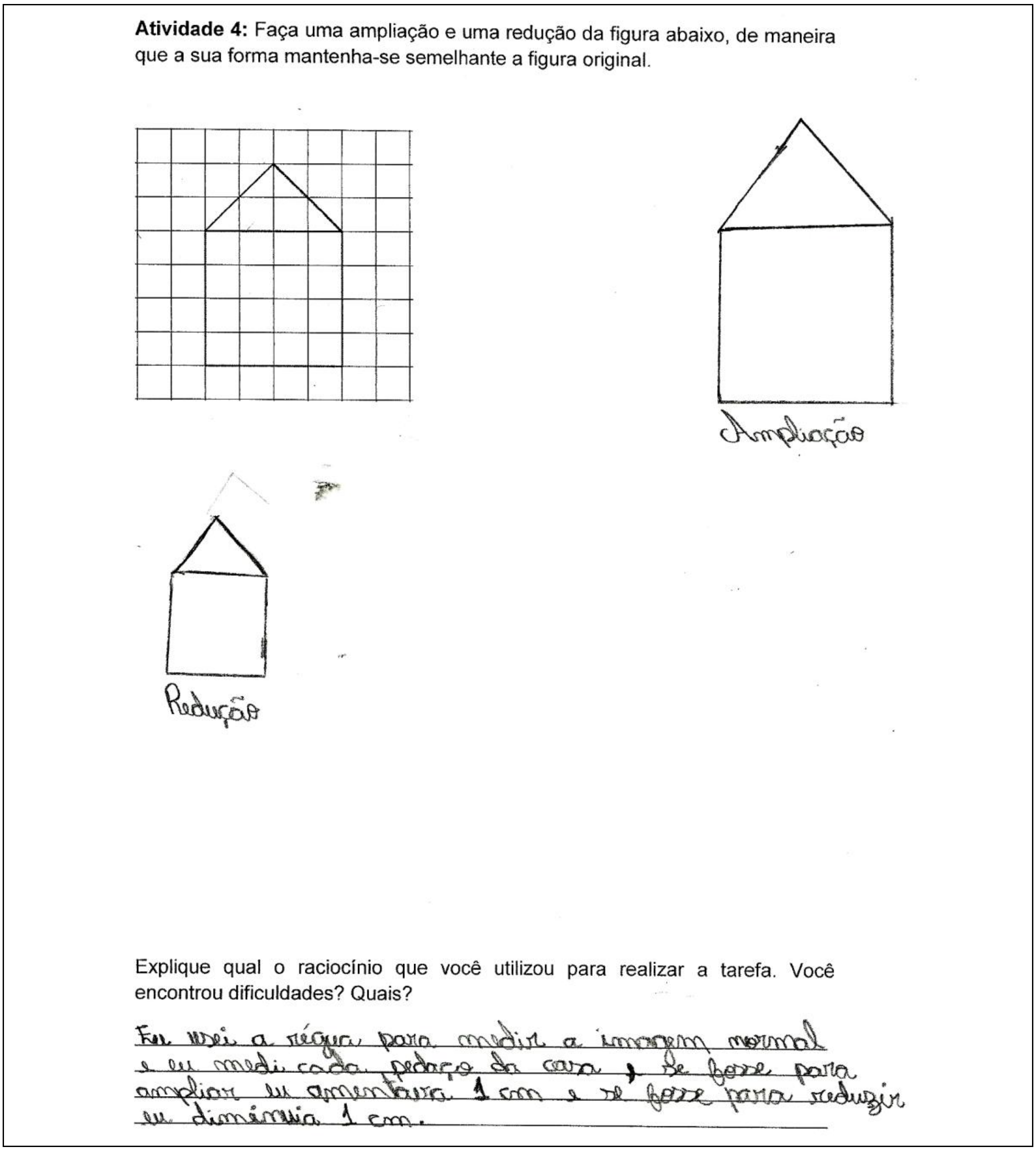


Fonte: Arquivo pessoal

Este aluno inicia medindo o tamanho o quadrado. Ele não deixa claro quando descreve os procedimentos que divide por dois, apenas que multiplica por dois. Mas o desenho demonstra que o raciocínio utilizado ao desenhar foi o da multiplicação na figura à esquerda e divisão por dois na figura à direita. Ou seja, o aluno, sem o contato formal com o conteúdo de proporção consegue, de maneira intuitiva, desenvolver o raciocínio de proporcionalidade. Deste modo, o aluno faz uso do que é tratado por Vergnaud como campo conceitual das estruturas multiplicativas, o qual é definido por um conjunto de situações cujo tratamento implica em uma ou várias multiplicações (1993, p. 10), no qual a proporcionalidade está incluída.

Contudo, o raciocínio explicado anteriormente não se faz presente na maioria das resoluções da 6ª série. O que predomina nas respostas é a adição e a subtração, como é ilustrado a seguir:

Figura 31: Resolução 3 – 6ª série

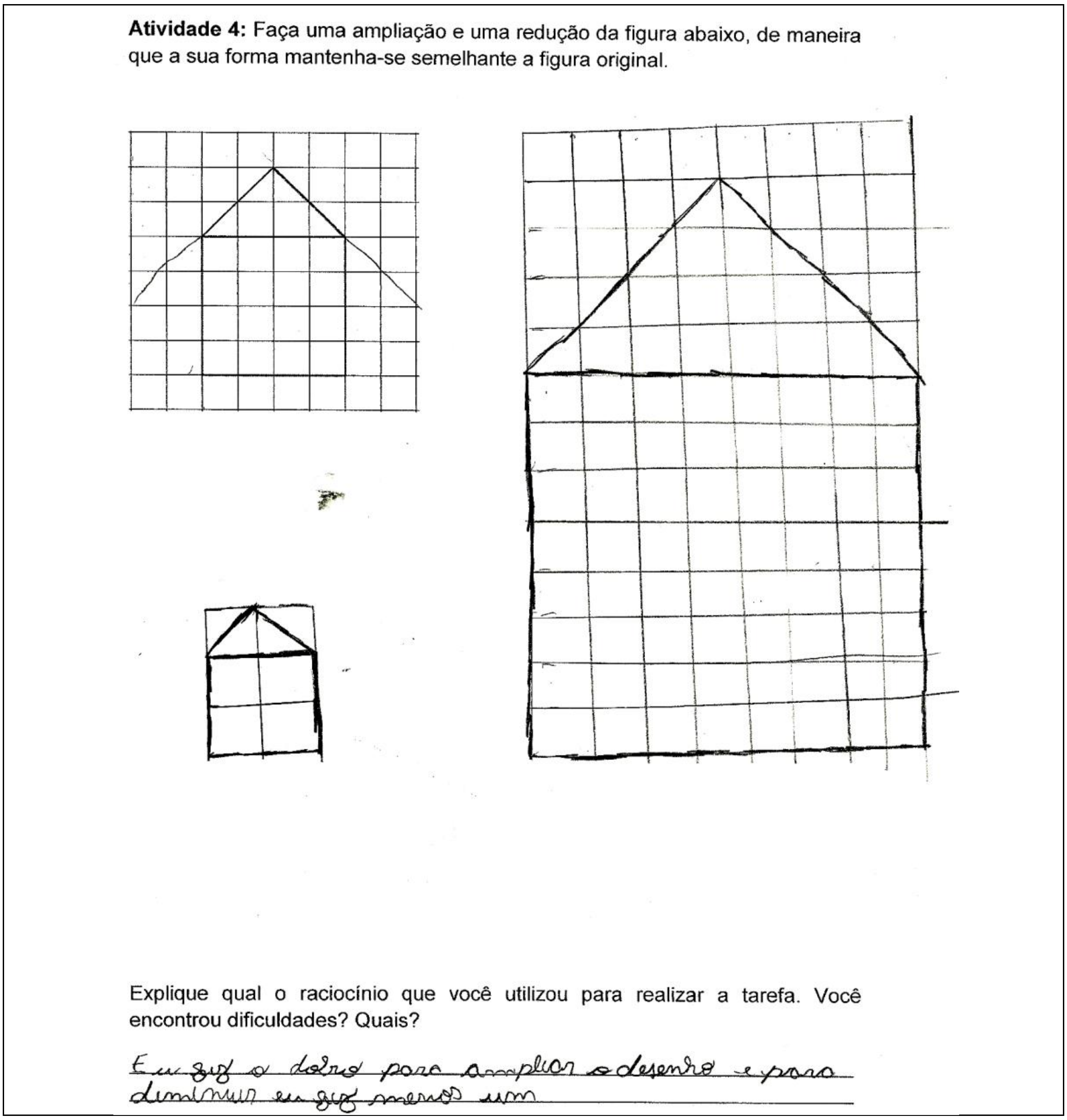


Fonte: Arquivo Pessoal

Observa-se, neste caso, a ausência parcial da compreensão acerca dos conceitos de ampliação e redução, embora no exemplo da casa, como é um quadrado, se somarmos unidades iguais em ambos os lados teremos a mesma razão, ou seja, figuras proporcionais. O aluno adiciona 1 cm quando amplia e subtrai a mesma quantidade quando reduz. Nesse momento, não se faz uso do raciocínio proporcional; esse aluno coloca em prática um raciocínio aditivo, o qual, sob a visão de Vergnaud, está presente no campo conceitual das estruturas aditivas, que é representado pelo conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias adições e subtrações (1993, p.9), do qual a proporcionalidade não faz parte. Percebe-se que o procedimento descrito não condiz com o desenho, deixando também de aumentar e diminuir o telhado da casa.

Observando as resoluções da 7ª série, percebe-se que a maioria dos alunos utilizou uma nova malha para as ampliações e reduções, o que não implica em obter resultados corretos. Um dos exemplos é citado a seguir:

Figura 32: Resolução 1 – 7ª série

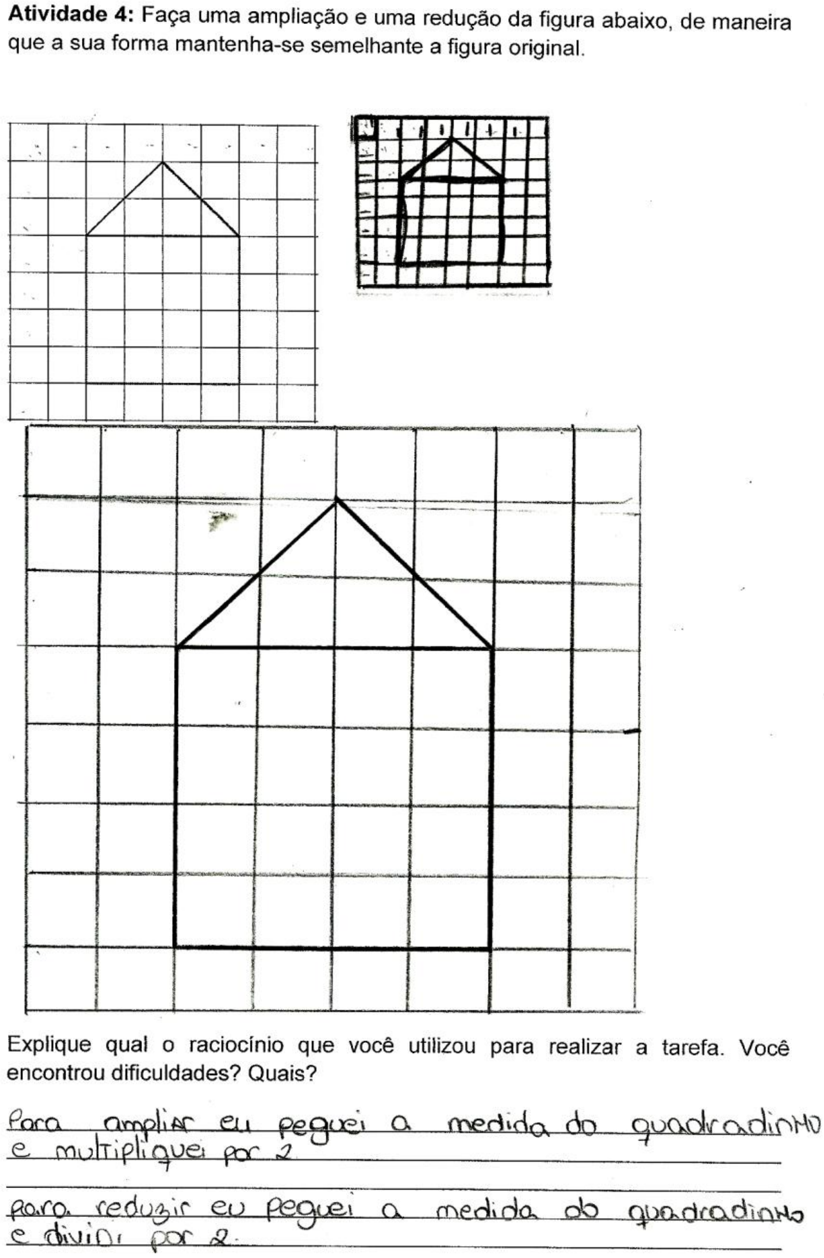


Fonte: Arquivo pessoal

Nesta questão, o aluno utiliza o raciocínio multiplicativo na etapa da ampliação, porém, na etapa da redução é utilizado o raciocínio aditivo. Isso demonstra um equívoco nos conceitos, tendo em vista que o contato formal com os conceitos envolvendo proporcionalidade já existiu. Pode ser que o aluno não tenha entrado em contato suficientemente com situações que envolvessem esse conceito a ponto de conseguir fazer analogias.

Na próxima questão a ser analisada, pode-se observar que o educando conseguiu, perfeitamente, fazer a ampliação e redução da casa. Utilizou a malha de modo a auxiliá-lo.

Figura 33: Resolução 2 – 7ª série



Fonte: Arquivo pessoal

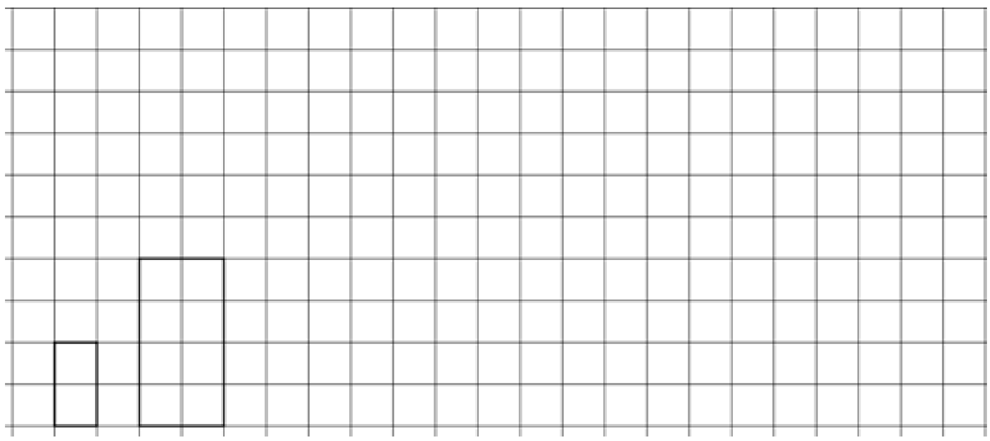
Baseado na teoria de Vergnaud, pode-se afirmar que o esquema construído pelo aluno foi adequado, ou seja, as invariantes operatórias utilizadas nele foram suficientes para que ele conseguisse, baseado em seu raciocínio, chegar à resposta correta. Pode se afirmar também que os conhecimentos em ação presentes no esquema foram suficientes para o entendimento da proposta.

Questão 6:

Nesta questão, foram fornecidas aos alunos duas etapas de uma sequência quadriculada. Pedia-se então que eles desenhassem a terceira. Posteriormente, questionava-se sobre quais eram as medidas da figura na décima etapa. O objetivo era o reconhecimento do padrão estabelecido de forma a segui-lo e desenhar a etapa seguinte. Também era esperado que os alunos fizessem uma projeção das etapas posteriores. Isso exigia uma capacidade de abstração, visto que a malha fornecida só permitia o desenho de etapas próximas. Observou-se a partir das respostas dos sujeitos que, para não haver ambiguidade, um terceiro retângulo deveria fazer parte da atividade. No entanto, apresentamos a tarefa tal como os estudantes as receberam. As análises serão feitas com base em tais respostas e de acordo com a interpretação da pesquisadora, tomando por base teórica a Teoria dos Campos Conceituais.

Figura 34: Atividade 6

Atividade 6:



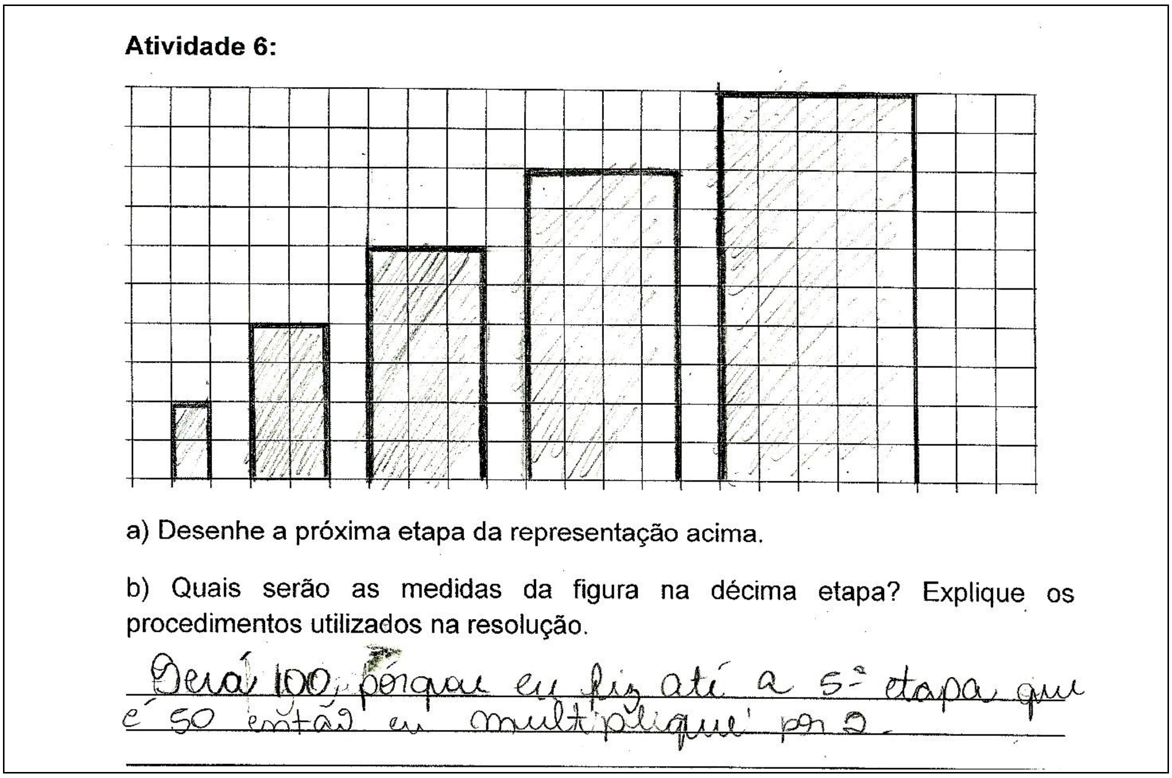
a) Desenhe a próxima etapa da representação acima.

b) Quais serão as medidas da figura na décima etapa? Explique os procedimentos utilizados na resolução.

Fonte: Arquivo pessoal

De modo geral, esta questão teve mais acertos do que erros, porém o segundo item deixou a questão um tanto mais complexa. Na 6ª série, as respostas tiveram um padrão tal qual é ilustrado na figura 35:

Figura 35: Resolução 1 – 6ª série



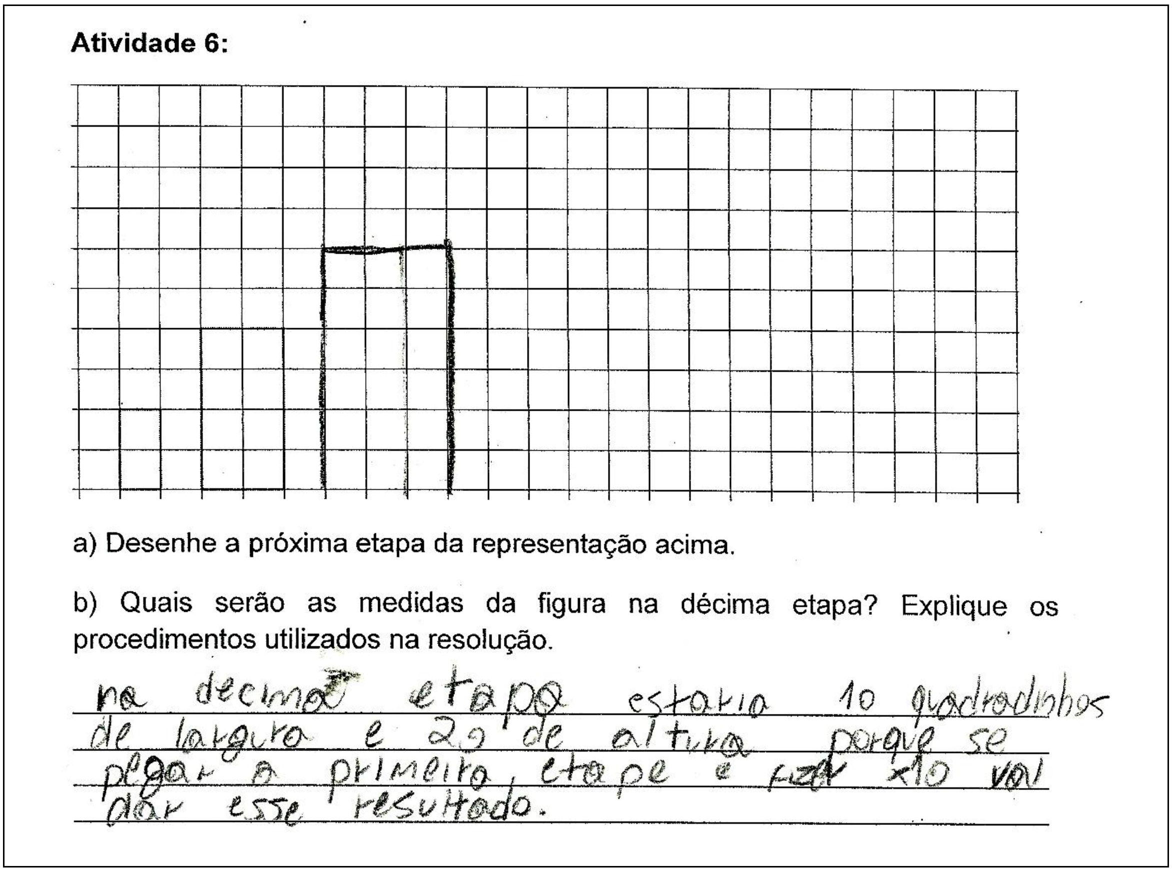
Fonte: Arquivo pessoal

Nesta resolução, com relação ao desenho, pode-se fazer duas observações. A primeira delas é que o aluno pode ter utilizado um raciocínio aditivo, ou seja, em cada etapa, na base somou 1 unidade e na altura somou 2 unidades. Enquadra-se esse raciocínio nas estruturas aditivas da Teoria dos Campos Conceituais. A segunda interpretação é que foi observado o que aconteceu da primeira para a segunda etapa (dobrou a altura e a largura) e tomou-se como parâmetro a primeira; então na terceira etapa triplicou os valores da primeira, na quarta, quadruplicou os valores da primeira e assim por diante. Este raciocínio classifica-se como um esquema pertencente à classe das estruturas multiplicativas, da qual faz parte a proporcionalidade.

Quando o aluno responde ao item b) da questão, percebe-se que ele dá a resposta da suposta área, mas quando ele efetua a tarefa até a quinta etapa e depois só multiplica o número de quadradinhos por dois, o que demonstra que o aluno não compreendeu a questão.

Para justificar a afirmativa feita anteriormente, de que as respostas foram padrão, apresenta-se a figura 36:

Figura 36: Resolução 2 – 6ª série


Atividade 6:

a) Desenhe a próxima etapa da representação acima.

b) Quais serão as medidas da figura na décima etapa? Explique os procedimentos utilizados na resolução.

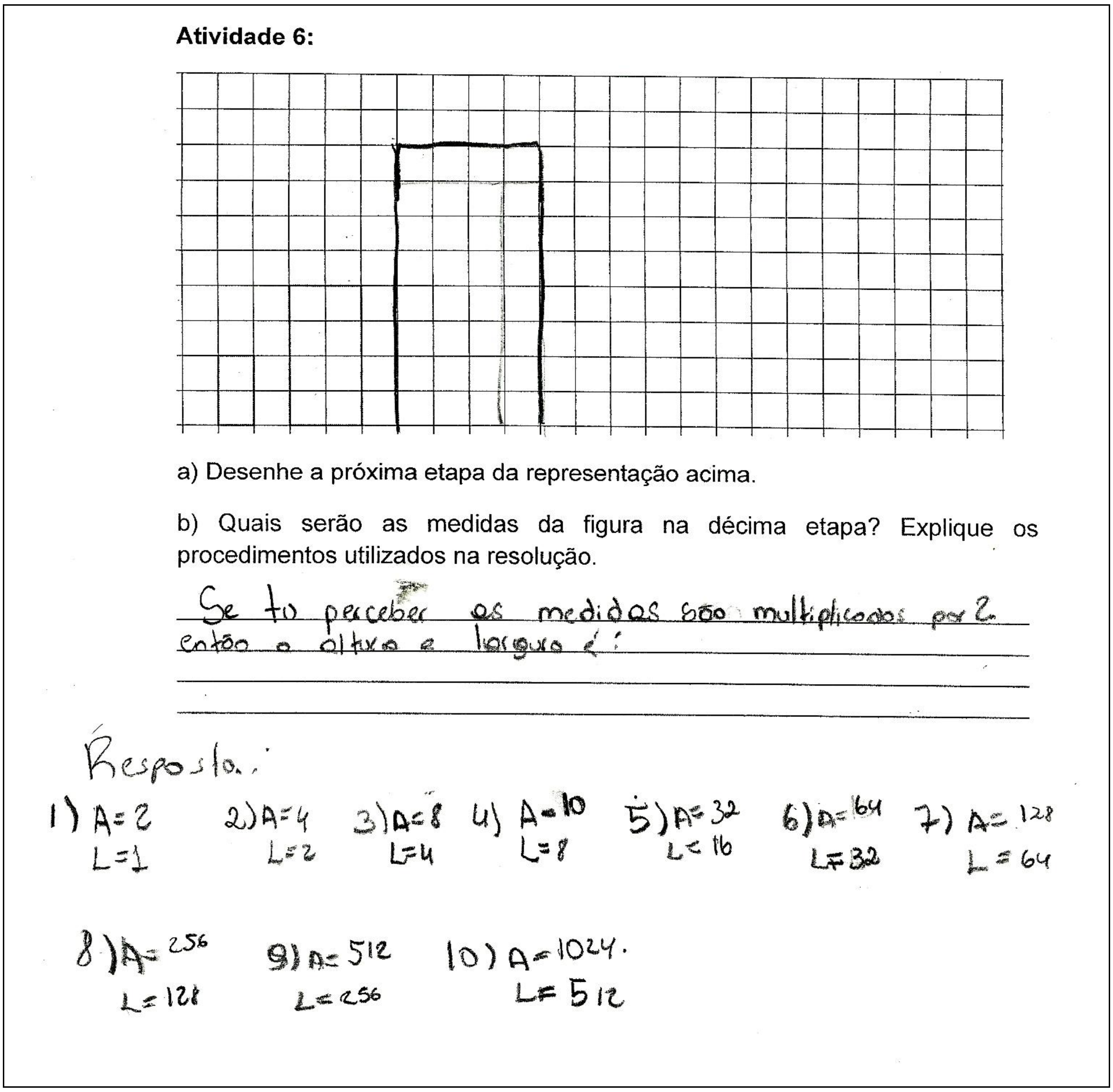
na decima etapa estaria 10 quadradinhos de largura e 20 de altura porque se pegar a primeira etape e faz x10 vai dar esse resultado.

Fonte: Arquivo pessoal

Nota-se que a terceira etapa do desenho permite as mesmas análises do item anterior. Porém, o item b) desta questão está respondido de forma correta, o que permite pensar que o aluno utilizou esquemas para a realização que nos levam fazer a análise sob o segundo olhar, no qual o aluno faz, a partir do dobro, o triplo, o quádruplo e assim por diante, enquadrando-se nas estruturas multiplicativas, tendo um raciocínio proporcional envolvido em seus esquemas.

Na 7ª série, em geral também se teve resoluções semelhantes às da 6ª, contudo dois alunos resolveram a questão de forma surpreendente, pois não era o tipo de raciocínio esperado para essa questão. Apresenta-se, então, a primeira solução na figura 37:

Figura 37: Resolução 1 – 7ª série



Atividade 6:

a) Desenhe a próxima etapa da representação acima.

b) Quais serão as medidas da figura na décima etapa? Explique os procedimentos utilizados na resolução.

Se tu perceber as medidas são multiplicados por 2 então a altura e largura é:

Resposta:

1) A = 2 L = 1 2) A = 4 L = 2 3) A = 8 L = 4 4) A = 10 L = 8 5) A = 32 L = 16 6) A = 64 L = 32 7) A = 128 L = 64

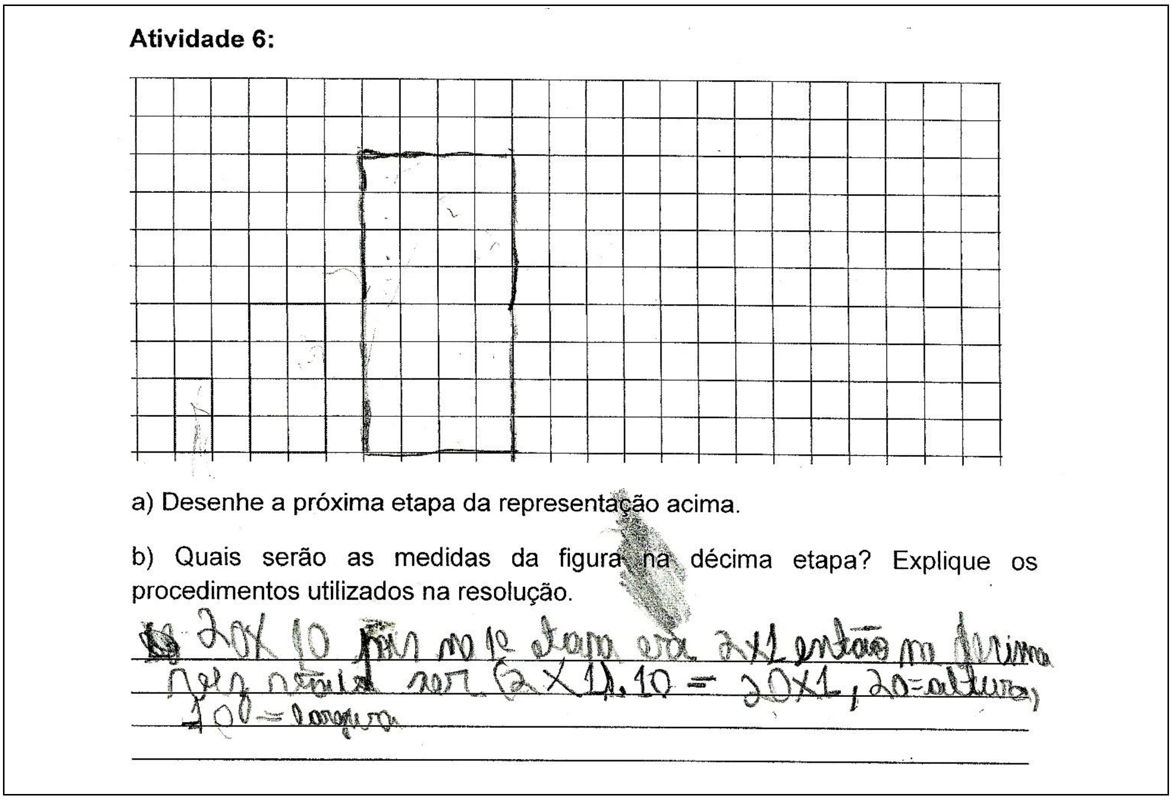
8) A = 256 L = 128 9) A = 512 L = 256 10) A = 1024. L = 512

Fonte: Arquivo pessoal

Ao observar a terceira etapa desenhada pelo aluno, nota-se que ele repetiu o procedimento desenvolvido da primeira para a segunda, ou seja, se tivesse que desenhar as próximas etapas o procedimento utilizado por ele seria exatamente o mesmo. Isso fica comprovado quando é respondido o item b), o qual representa as potências de base 2 tanto na altura quanto na largura. O aluno utiliza uma estratégia diferente, a qual também está correta, porém o raciocínio utilizado é quadrático, estratégia que não era esperada. Enquadra-se também este esquema nas estruturas multiplicativas.

Com base na resolução anterior, escolheu-se outra atividade para análise:

Figura 38: Resolução 2 – 7ª série

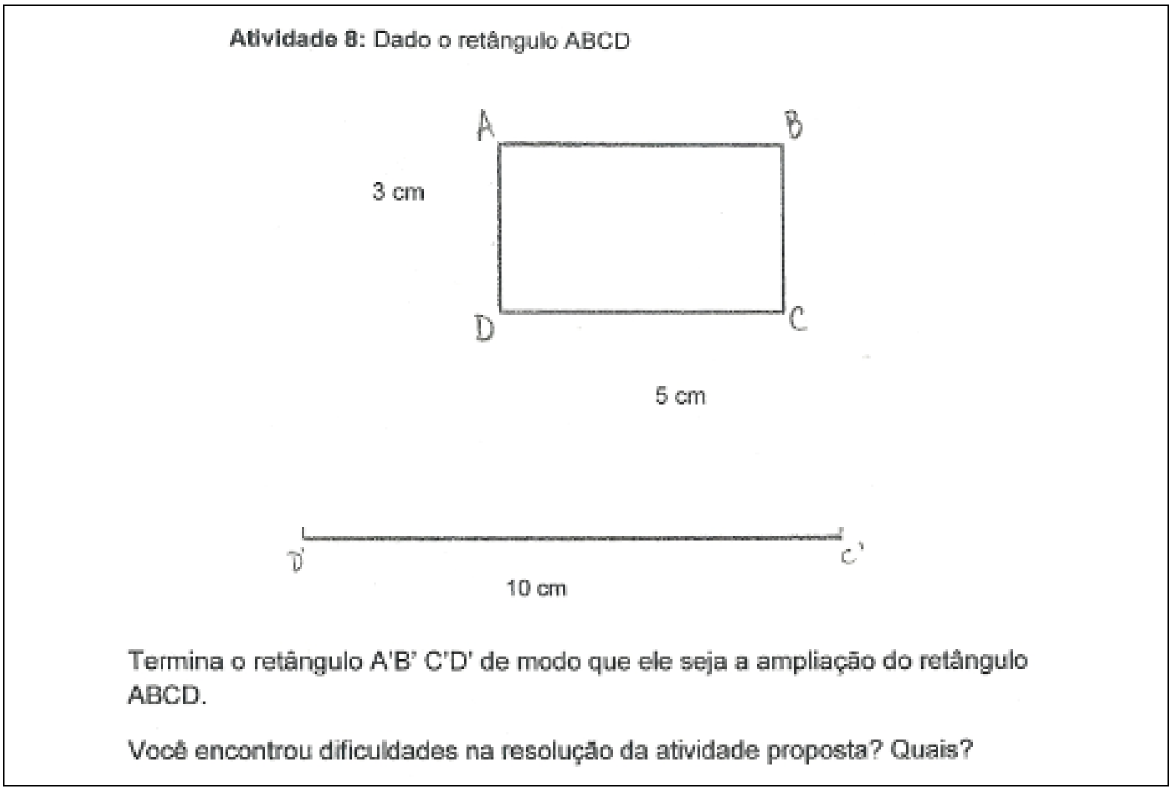


Fonte: Arquivo pessoal

Pode-se observar nesta resolução, inicialmente no item a), que o aluno constrói a terceira etapa da mesma forma que foi feita na análise anterior. Porém, quando observa-se a resolução do item b), percebe-se uma divergência de resoluções, ou seja, no primeiro item verifica-se uma proporção quadrática e no segundo, uma proporção linear, na qual o aluno teria, a partir da primeira multiplicação (por 2), multiplicado por 3 e assim sucessivamente, até chegar na décima etapa, a qual ele explicita de maneira clara e organizada via cálculo. Enfim, verifica-se que as duas maneiras estão corretas, mas não deveriam estar representadas na mesma questão. O aluno demonstra raciocinar proporcionalmente apresentando, no entanto, alguns conflitos em relação aos esquemas a serem utilizados.

Questão 8: Esta atividade foi extraída do livro Aprender a Matemática de outra forma, de Jean-Pierre Levain (1997, p. 114).

Figura 39: Atividade 8



Fonte: Levain (1997)

Este problema envolve a ampliação de uma figura geométrica, um retângulo. Deve-se determinar a largura do retângulo a ser ampliado, com base nas dimensões do retângulo original. Conforme Levain:

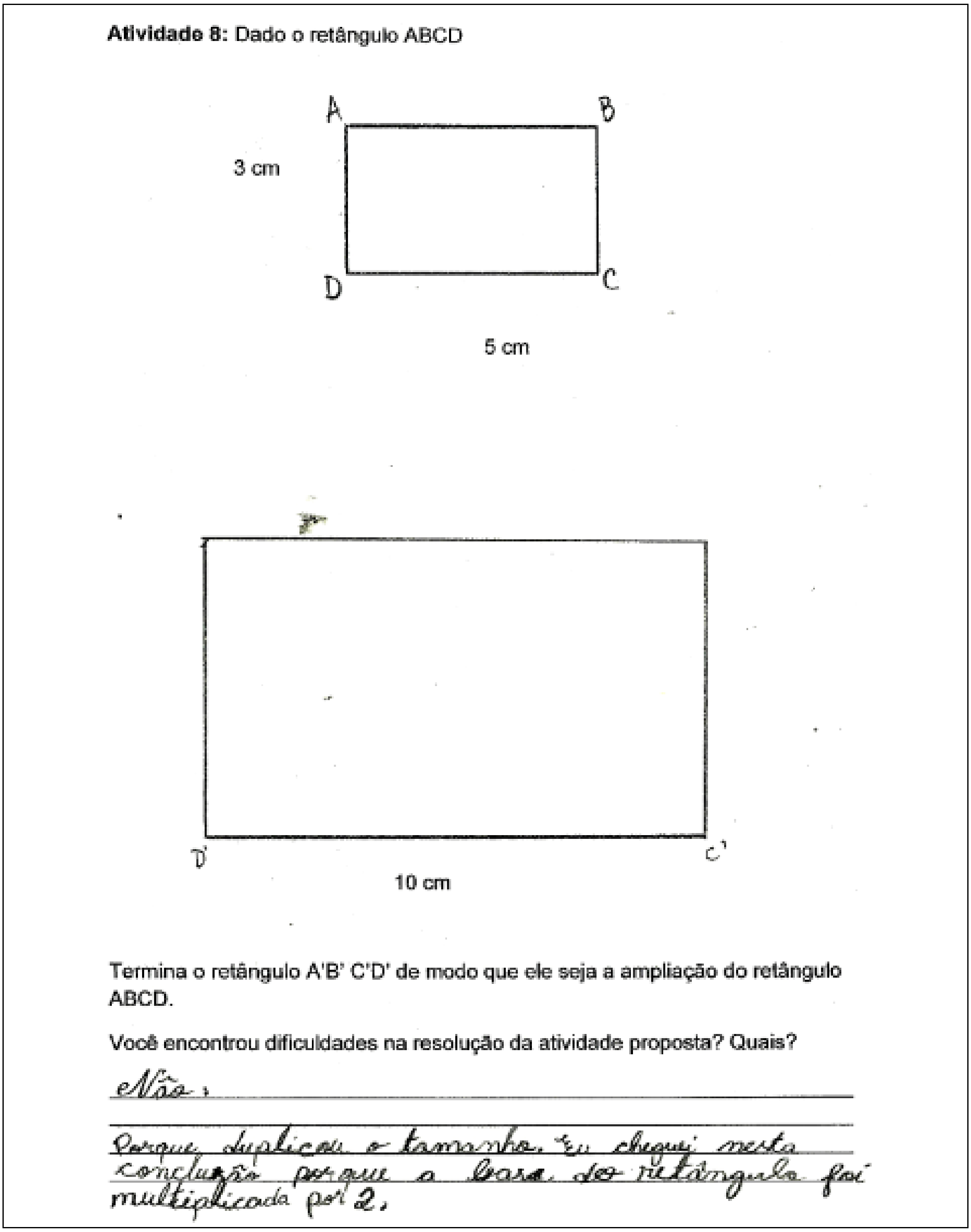
> Estes problemas permitem-nos combinar o tipo de relação utilizada (interno ou externo) com o grau de dificuldade desta relação (simples ou complexa) da seguinte maneira. A relação interna calcula-se entre o comprimento e a largura do mesmo rectângulo. A relação externa corresponde à relação de ampliação e calcula-se a partir dos comprimentos respectivos dos dois rectângulos (LEVAIN, 1997, p.113)

Ou seja, neste caso a relação interna é classificada como complexa, pois é representada pela fração $\frac{3}{5}$ e a relação externa é classificada como simples, pois é representada pela fração $\frac{2}{1}$.

Os alunos, de modo geral, da 6ª e da 7ª série tiveram facilidade na resolução da questão. Neste caso, para a ampliação, espera-se a utilização da relação externa. Conforme Levain, os problemas são resolvidos com facilidade se uma das relações, pelo menos, for simples (1993).

Apresenta-se, então, a primeira resolução da 6ª série:

Figura 40: Resolução 1 – 6ª série

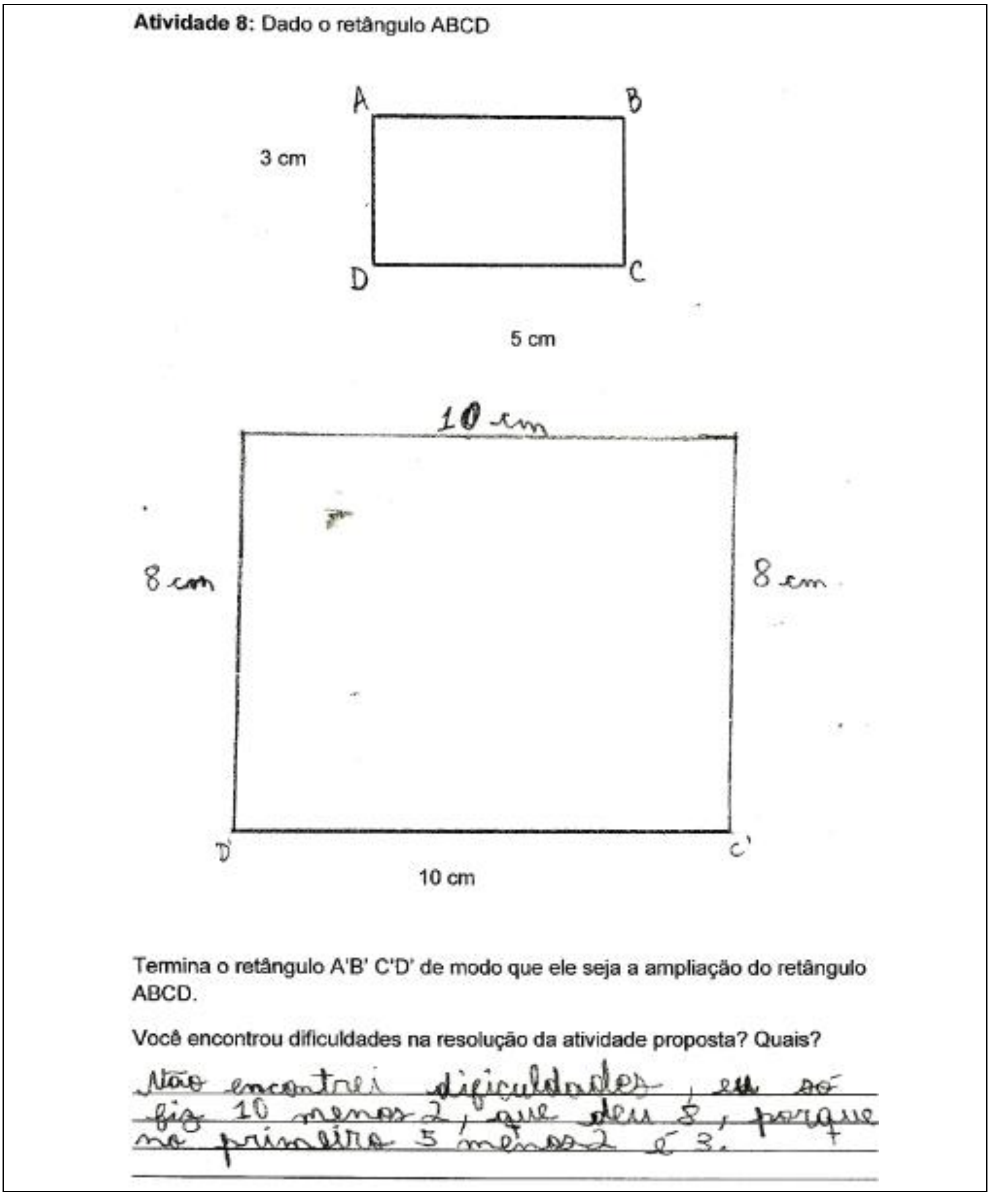


Fonte: Arquivo pessoal

Neste caso, o aluno percebe facilmente que se uma medida foi multiplicada por dois, logo, ele multiplicará a outra também por dois. O raciocínio proporcional é evidente nesta resolução, ou seja, ele percebe que existe um coeficiente α chamado coeficiente de semelhança que representa a quantidade de vezes que a figura foi ampliada (FIOREZE, 2010). Pode-se então afirmar que ele utilizou a estrutura multiplicativa.

Este tipo de resolução apareceu em maior quantidade, porém, alguns alunos optaram por utilizar o método da diferença. Observa-se então outra estratégia criada por um aluno da 6ª série:

Figura 41: Resolução 2 – 6ª série

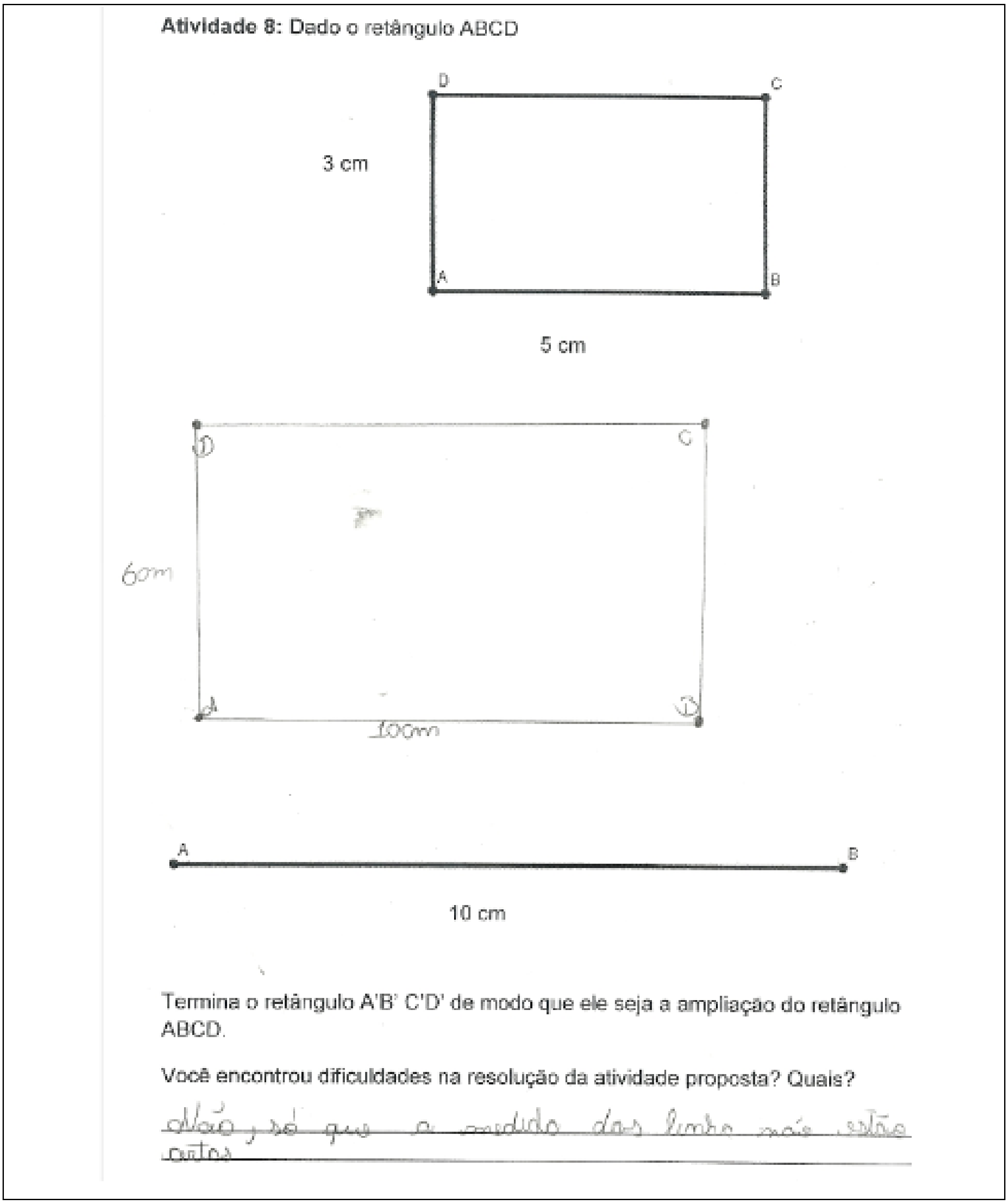


Fonte: Arquivo pessoal

Nota-se que o aluno calculou a diferença entre as medidas dos lados do retângulo ABCD, a qual resultou em 2 cm. Baseado neste resultado, dos 10 cm subtraiu os 2 cm e encontrou o suposto lado que faltava: 8cm. Enquadra-se o raciocínio do aluno na estrutura citada por Vergnaud como aditiva.

A questão foi aplicada também aos alunos de 7ª série, porém havia uma incompatibilidade de informações; a medida real dos segmentos não correspondia aos valores apresentados numericamente, porém ambos eram proporcionais. O retângulo ABCD media 6,5 cm de base, mas o valor apresentado era 5 cm e a altura media 4 cm, mas o valor apresentado era 3 cm. O segmento fornecido media 13 cm. Este foi o maior problema mencionado pelos alunos, as medidas reais não correspondiam ao que estava escrito. Alguns alunos optaram por desenhar novamente com as medidas corretas como neste caso:

Figura 42: Resolução 1 – 7ª série



Fonte: Arquivo pessoal

Observa-se, então, que essa questão não apresentou tanta dificuldade para os alunos e permitiu que se identificasse perfeitamente se os conceitos de proporcionalidade se faziam presentes ou não. Pode-se atribuir essa “facilidade” ao fato desses alunos já terem experiências anteriores com situações envolvendo proporcionalidade.

Questão 10:

Esta atividade foi extraída do Projeto do Fundão – Desafio para a Universidade: Razões e Proporções, Tinoco (1988), transcrita do livro: Mathématiques-5ª.-IREM, Strasbourg, com algumas modificações. A atividade tinha como objetivo o reconhecimento intuitivo da proporcionalidade através da apresentação de tabelas.

Figura 43: Questão 10

Atividade 10: Para preparar suas tintas, um pintor costuma dissolver cada 4 latas de tinta em 6 latas de água. Quantas latas de água são necessárias para dissolver 8 latas de tinta?

Preencha a seguinte tabela descrevendo, a cada linha preenchida, as operações feitas:

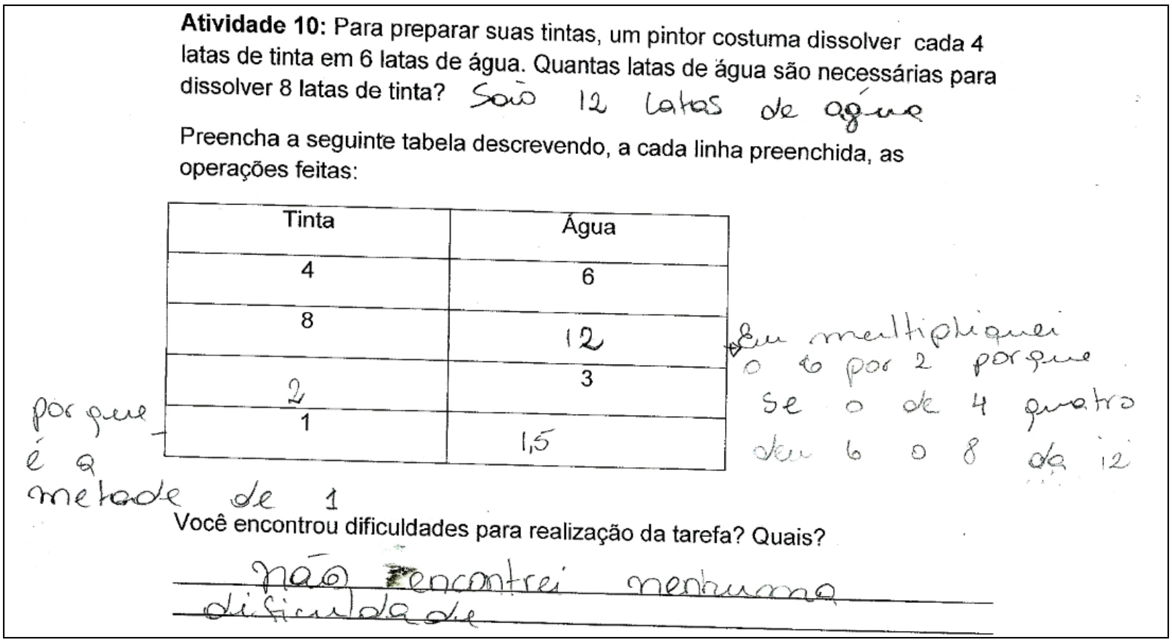
Tinta	Água
4	6
8	
	3
1	

Você encontrou dificuldades para realização da tarefa? Quais?

Fonte: Tinoco (1988)

Nesta questão, conseguiu-se identificar de forma muito clara os equívocos cometidos pelos alunos acerca das estruturas aditivas e multiplicativas. Essa afirmação se faz clara quando analisamos duas questões da 6ª série, por exemplo. A primeira a ser analisada é a seguinte:

Figura: 44: Resolução 1 – 6ª série



Atividade 10: Para preparar suas tintas, um pintor costuma dissolver cada 4 latas de tinta em 6 latas de água. Quantas latas de água são necessárias para dissolver 8 latas de tinta? São 12 latas de água

Preencha a seguinte tabela descrevendo, a cada linha preenchida, as operações feitas:

Tinta	Água
4	6
8	12
2	3
1	1,5

Eu multipliquei o 6 por 2 porque se o de 4 quatro deu 6 o 8 da 12

porque é a metade de 1

Você encontrou dificuldades para realização da tarefa? Quais?

não encontrei nenhuma dificuldade

Fonte: Arquivo pessoal

Nesta resolução, o aluno não se deparou com nenhuma dificuldade, como mencionado por ele. Observa-se que ele analisa a tabela verticalmente, fato que não ocorre em todas as resoluções. Desta maneira, se remete ao raciocínio proporcional, ou seja, das estruturas multiplicativas. Nota-se que, mesmo não tendo contato formal com os conceitos de proporção, o aluno consegue demonstrar domínio das situações. Os esquemas por ele utilizados demonstram compreensão acerca do tema em questão. Faz-se uso, então, de conhecimentos em ação, pois intuitivamente o cálculo é feito mediante o raciocínio proporcional, demonstrando que não existe a mecanização do processo, pois segundo Fioreze:

> Agora, se no processo de cálculo, o aluno utilizou a regra de três sem usar diretamente o raciocínio proporcional, então ou há uma mecanização do processo (...) ou já há uma sistematização do processo e o raciocínio proporcional poderá estar incluso na resolução de problemas de regra de três (FIOREZE, 2010, p.121)

Já na próxima resolução a ser apresentada, o raciocínio utilizado não estava contido nas estruturas multiplicativas, mas sim nas aditivas:

Figura: 45: Resolução 2 – 6ª série

Atividade 10: Para preparar suas tintas, um pintor costuma dissolver cada 4 latas de tinta em 6 latas de água. Quantas latas de água são necessárias para dissolver 8 latas de tinta? 10, pois a cada quantidade de tinta eu somei mais 2, porque 4 tintas até 6 latas de água há 2 espaços, então eu somei mais 2. Por exemplo: nesta tabela.

Preencha a seguinte tabela descrevendo, a cada linha preenchida, as operações feitas:

Tinta	Água
4	6
8	10
1	3
1	3

Você encontrou dificuldades para realização da tarefa? Quais?

Não tive dificuldades.

Fonte: Arquivo pessoal

O aluno observa a tabela horizontalmente, ou seja, ele verifica qual a quantidade existente entre a tinta e a água, resultando em duas unidades. Seguindo o mesmo raciocínio ele adiciona duas unidades ao oito e diminui também do três para o um. Essa última subtração poderia tê-lo feito perceber que algo estava errado, pois teriam duas linhas com os mesmos dados. Ele ressalta que não teve dificuldades, ou seja, ele realmente não pensou proporcionalmente, em momento algum ele teve o raciocínio multiplicativo. Porém, segundo o próprio aluno, seu raciocínio estava correto.

Nas resoluções da 7ª série, observou-se que o contato prévio com o conteúdo ajudou os alunos na compreensão da questão e, mas, em alguns casos, não foi suficiente. Temos as seguintes resoluções, dentre elas a primeira:

Figura: 46: Resolução 1 – 7ª série

Atividade 10: Para preparar suas tintas, um pintor costuma dissolver cada 4 latas de tinta em 6 latas de água. Quantas latas de água são necessárias para dissolver 8 latas de tinta?

Preencha a seguinte tabela descrevendo, a cada linha preenchida, as operações feitas:

Tinta	Água
4	6
8	12
2	3
1	2

Você encontrou dificuldades para realização da tarefa? Quais?

não

Fonte: Arquivo pessoal

Nesta resolução, o aluno afirma não ter encontrado dificuldades. Ele conseguiu perceber que na coluna da tinta, da primeira para a segunda linha os valores dobraram, na coluna da água deve acontecer a mesma coisa. Na coluna da água, da segunda para a terceira linha, baseado no valor encontrado por ele, o 12 é dividido por 3, então a mesma coisa acontecerá na tinta. Porém, da terceira para a quarta linha, na coluna da tinta, presume-se que o aluno não identifica o que acontece, para que a mesma coisa aconteça com a água. Ou pode-se pensar que a dificuldade está na divisão do 3 por 2, pois isso não resulta em uma divisão exata. Vergnaud (1993) afirma que, quando se tratando de problemas que envolvem proporcionalidade, os alunos demonstram dificuldades na multiplicação e divisão por decimais. Com base nisso, observa-se que a dificuldade também existe quando as divisões resultam em números decimais, pois muitos alunos conseguiram resolver as primeiras operações da tabela, mas expressaram dificuldades na última.

Outra resposta que chamou muito a atenção foi a seguinte:

Figura: 47: Resolução 2 – 7ª série

Atividade 10: Para preparar suas tintas, um pintor costuma dissolver cada 4 latas de tinta em 6 latas de água. Quantas latas de água são necessárias para dissolver 8 latas de tinta?

$\frac{4}{6}$ $\frac{8}{12}$ $\frac{x}{3}$

Preencha a seguinte tabela descrevendo, a cada linha preenchida, as operações feitas:

Tinta	Água
4	6
8	12
2	3
1	3/2 de lata

$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{x}$

Você encontrou dificuldades para realização da tarefa? Quais?

Não. Aplica-se a regra de 3 e Resolve-se tudo.

$\frac{4}{8} \times \frac{6}{x}$ 12

$\frac{8}{x} \times \frac{12}{3}$ 2

$\frac{2}{1} \times \frac{3}{x}$ 3/2

Fonte: Arquivo pessoal

Nesta situação, fica evidente que a aluna faz uma utilização mecânica da regra de três. Observa-se isso quando, ao invés de perceber o que acontece de uma quantidade para a outra, o aluno opta por fazer cálculos, os quais podem ser facilmente dispensados. Nota-se que o esquema utilizado por ele contempla as estruturas multiplicativas, o que implica em respostas corretas. Mas pode-se fazer outra análise, através de Fioreze (2010), que explica que se o aluno utiliza a regra de três sem usar diretamente o raciocínio proporcional, pode haver uma mecanização do processo ou já há uma sistematização do processo e o raciocínio proporcional pode estar incluso na resolução através da regra de três.

Questão 12:

Esta questão consistia em uma receita de sopa, a qual foi alterada de forma proporcional. O primeiro questionamento fez-se a fim observar se os alunos percebiam que, se a sopa tivesse os mesmos ingredientes e estes fossem alterados proporcionalmente, ela continuaria sendo a mesma sopa. O segundo ainda estava relacionado com o primeiro, perguntando se as quantidades deveriam ser iguais, ou seja, se o aluno respondesse a primeira questão dizendo que não, seria coerente que eles respondessem a segunda de forma positiva e vice-versa. O terceiro questionamento tinha a finalidade de verificar a ideia de as sopas serem, ou não, iguais do ponto de vista das concentrações de ingredientes. Para isso, os alunos deveriam expor as condições para que elas fossem iguais. Observando o quarto e o quinto questionamento, os conceitos de proporção eram abordados de forma numérica e não trivial.

Figura 48: Atividade 12

Atividade 12: Uma cozinheira achou duas receitas de sopa nas quais havia os seguintes ingredientes.

Na 1ª: 3 cebolas, 4 colheres de farinha, 1 litro de água.

Na 2ª: 4 cebolas e meia, 6 colheres de farinha, 1 litro e meio de água.

As duas receitas podem ser da mesma sopa? Justifique.

Para que sejam da mesma sopa:

a) As quantidades devem ser iguais?

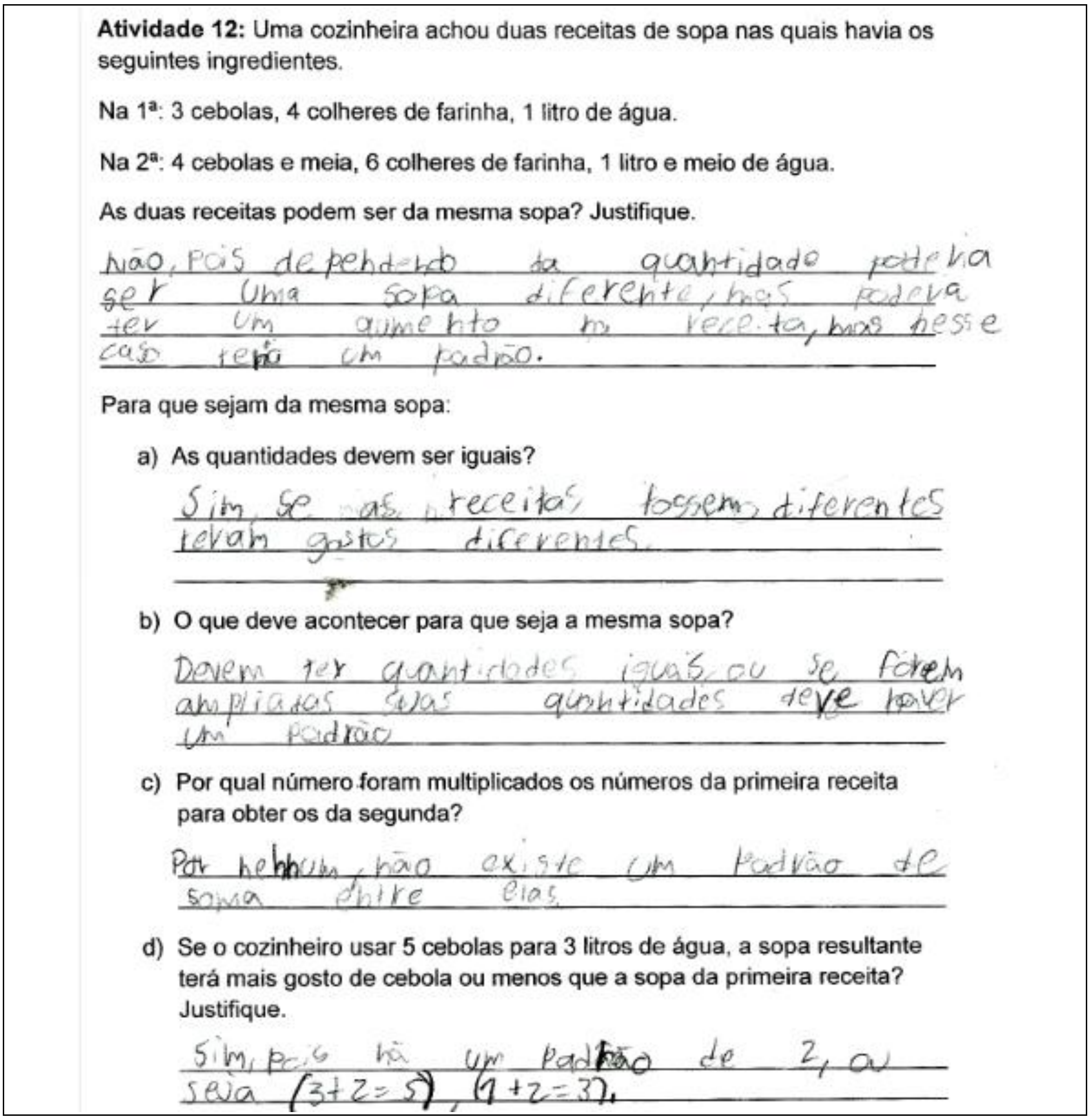
b) O que deve acontecer para que seja a mesma sopa?

c) Por qual número foram multiplicados os números da primeira receita para obter os da segunda?

d) Se o cozinheiro usar 5 cebolas para 3 litros de água, a sopa resultante terá mais gosto de cebola ou menos que a sopa da primeira receita? Justifique.

Duas respostas da 6ª série foram selecionadas para análise, dentre elas, a primeira:

Figura 49: Resolução 1 – 6ª série



Atividade 12: Uma cozinheira achou duas receitas de sopa nas quais havia os seguintes ingredientes.

Na 1ª: 3 cebolas, 4 colheres de farinha, 1 litro de água.

Na 2ª: 4 cebolas e meia, 6 colheres de farinha, 1 litro e meio de água.

As duas receitas podem ser da mesma sopa? Justifique.

não, pois dependendo da quantidade poderia ser uma sopa diferente, mas poderia ter um aumento na receita, mas nesse caso tem um padrão.

Para que sejam da mesma sopa:

a) As quantidades devem ser iguais?

Sim se as receitas fossem diferentes teriam gostos diferentes.

b) O que deve acontecer para que seja a mesma sopa?

Devem ter quantidades iguais ou se forem ampliadas suas quantidades deve haver um padrão

c) Por qual número foram multiplicados os números da primeira receita para obter os da segunda?

Por nenhum, não existe um padrão de soma entre elas.

d) Se o cozinheiro usar 5 cebolas para 3 litros de água, a sopa resultante terá mais gosto de cebola ou menos que a sopa da primeira receita? Justifique.

Sim, pois há um padrão de 2, ou seja (3+2=5), (1+2=3).

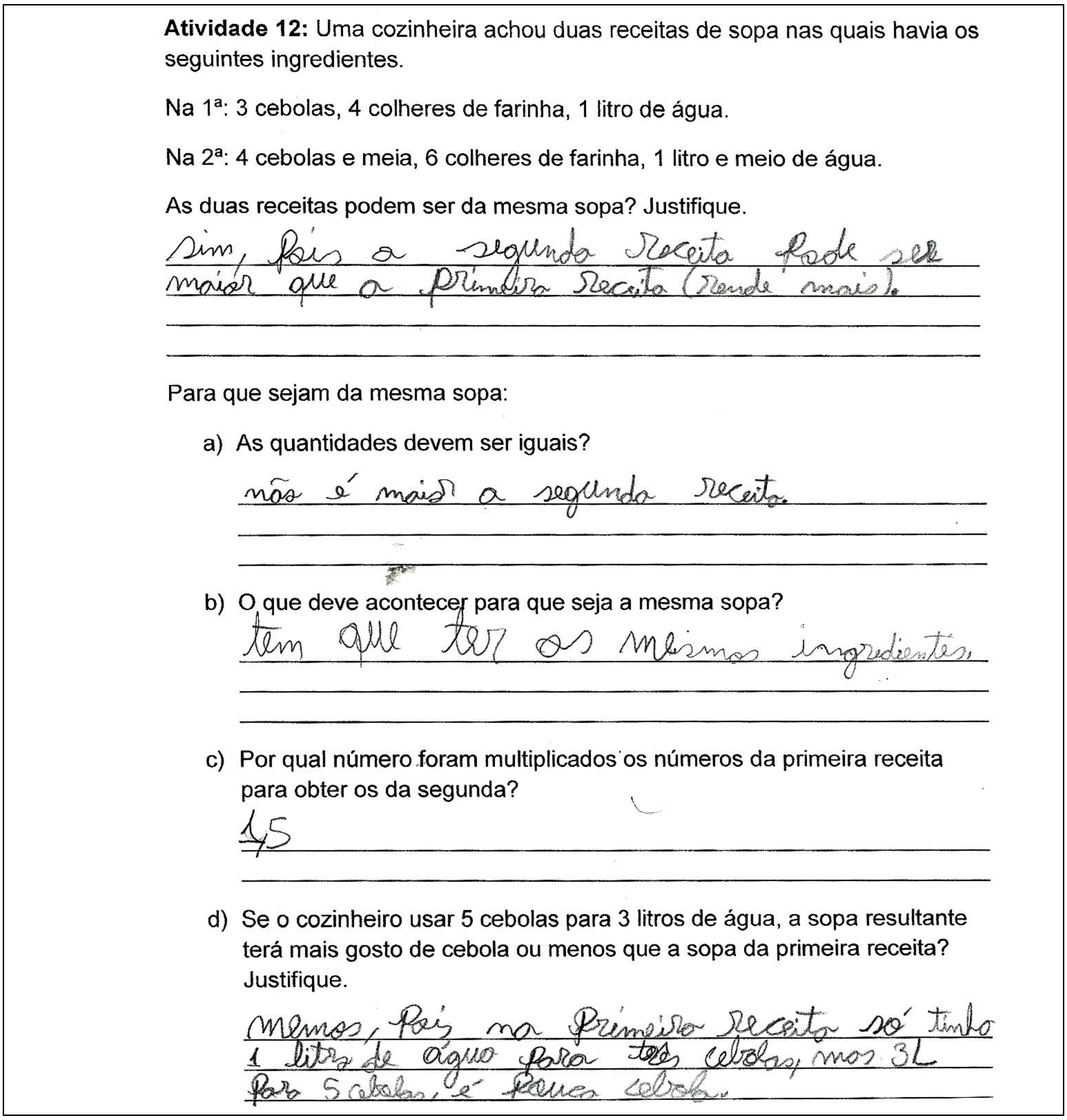
Fonte: Arquivo pessoal

Pode-se observar que o aluno não percebe que, se os ingredientes fossem multiplicados pelo mesmo valor, seriam aumentados ou diminuído de forma proporcional, ou seja, seria a mesma receita, porém em maior ou menor quantidade. Esse tipo de resposta para o item a foi corriqueiro nesta série. Em geral, os alunos ainda não conseguiram fazer relações entre aumento e redução das quantidades de forma a conservar as proporções e manter-se então a mesma sopa.

Na segunda resposta, coerentemente, o aluno diz que as quantidades precisam ser iguais, reafirmando a análise anterior. Já no terceiro questionamento o aluno fala em um padrão, o que pode ser interpretado, em um primeiro exame, como ele querendo se referir a algo proporcional. Contudo, observando a próxima resposta, percebe-se que o padrão referenciado por ele é de soma, o que com base na teoria de Vergnaud, faz com que se enquadre nas estruturas aditivas. Constata-se assim, que não há um raciocínio proporcional nas respostas do aluno. Este fato fica comprovado com a resposta por ele dada ao item d), no qual ele percebe um “padrão de soma” igual a dois.

Mostrando que este tipo de resposta não foi unânime, apresenta-se a seguinte resolução:

igura 50:Resolução 2 – 6ª série


Atividade 12: Uma cozinheira achou duas receitas de sopa nas quais havia os seguintes ingredientes.

Na 1ª: 3 cebolas, 4 colheres de farinha, 1 litro de água.

Na 2ª: 4 cebolas e meia, 6 colheres de farinha, 1 litro e meio de água.

As duas receitas podem ser da mesma sopa? Justifique.

Sim, pois a segunda receita pode ser maior que a primeira receita (rende mais).

Para que sejam da mesma sopa:

a) As quantidades devem ser iguais?

não é maior a segunda receita.

b) O que deve acontecer para que seja a mesma sopa?

tem que ter os mesmos ingredientes.

c) Por qual número foram multiplicados os números da primeira receita para obter os da segunda?

1,5

d) Se o cozinheiro usar 5 cebolas para 3 litros de água, a sopa resultante terá mais gosto de cebola ou menos que a sopa da primeira receita? Justifique.

menos, pois na primeira receita só tinha 1 litro de água para três cebolas, mas 3L para 5 cebolas, é pouca cebola.

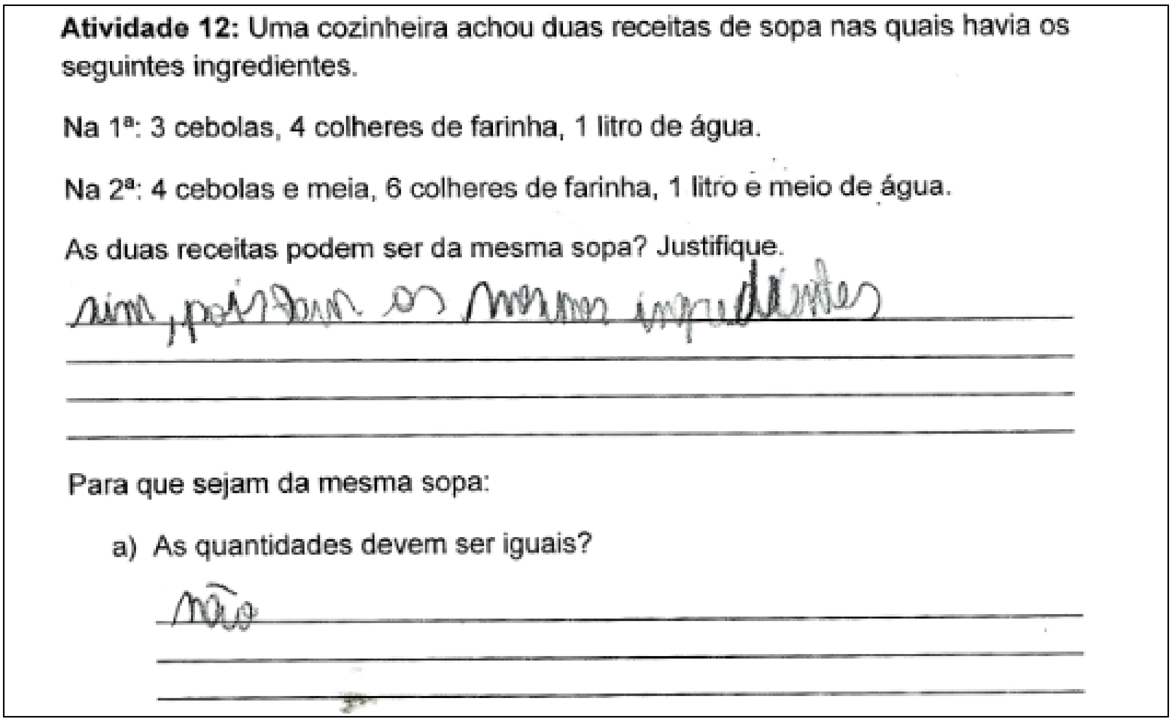
Fonte: Arquivo pessoal

Neste caso, observa-se que a primeira resposta fornecida pelo aluno retrata uma visão totalmente diferente da anterior, ou seja, ele percebe que existe a possibilidade da receita estar aumentada e continuar sendo a mesma receita, porém, ele não consegue, ainda, falar de proporcionalidade. Mas este fato não impede que o aluno verifique as situações de forma a abordar implicitamente os conceitos relacionados à proporcionalidade. Este fato é reforçado na resposta da letra b), na qual o aluno apenas diz que os ingredientes devem ser iguais. Nestas situações analisadas, percebe-se que é preciso observar as respostas em conjunto. No item c), fica evidente, que os conceitos fazem parte das estratégias e esquemas utilizados por ele, pois retratam domínio, o que resultou na resposta correta, fato que se mostra como uma exceção quando Vergnaud (1993) afirma que nos problemas que envolvem proporcionalidade os alunos expressam dificuldades na multiplicação e divisão por decimais.

O esquema utilizado pelo aluno no item d) deixa claro o pensamento envolvendo proporcionalidade (1 litro de água para 3 cebolas e 3 litros para 5 cebolas), mostrando-se, sob a ótica de Vergnaud, eficaz. Observa-se, então, que os cálculos são desnecessários, neste caso, o que é necessário é a compreensão acerca da situação por ele vivenciada. Enquadra-se o raciocínio do aluno nas estruturas multiplicativas.

Foram analisadas, também, questões da 7ª série. A maioria dos alunos afirmam que as receitas podem ser da mesma sopa, o que implica em respostas negativas com relação à letra a). Vejamos:

Figura 51: Resolução 1 item a) - 7ª série



Atividade 12: Uma cozinheira achou duas receitas de sopa nas quais havia os seguintes ingredientes.

Na 1ª: 3 cebolas, 4 colheres de farinha, 1 litro de água.

Na 2ª: 4 cebolas e meia, 6 colheres de farinha, 1 litro e meio de água.

As duas receitas podem ser da mesma sopa? Justifique.

sim, pois tem os mesmos ingredientes

Para que sejam da mesma sopa:

a) As quantidades devem ser iguais?

não

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 52: Resolução 2 item a) - 7ª série

Atividade 12: Uma cozinheira achou duas receitas de sopa nas quais havia os seguintes ingredientes.

Na 1ª: 3 cebolas, 4 colheres de farinha, 1 litro de água.

Na 2ª: 4 cebolas e meia, 6 colheres de farinha, 1 litro e meio de água.

As duas receitas podem ser da mesma sopa? Justifique.

Sim, porque uma pode ser mais forte que a outra!

Para que sejam da mesma sopa:

a) As quantidades devem ser iguais?

Não.

Fonte: Arquivo pessoal

A turma não retratou maiores dificuldades na resolução destes itens. Para o item b) as respostas foram relacionadas a terem os mesmos ingredientes e o mesmo sabor. Seguem, as respostas dos mesmos alunos dos itens c) e d):

Figura 53: Resolução 1 item c) e d) - 7ª série

c) Por qual número foram multiplicados os números da primeira receita para obter os da segunda?

1,5; 2; 1,5

d) Se o cozinheiro usar 5 cebolas para 3 litros de água, a sopa resultante terá mais gosto de cebola ou menos que a sopa da primeira receita? Justifique.

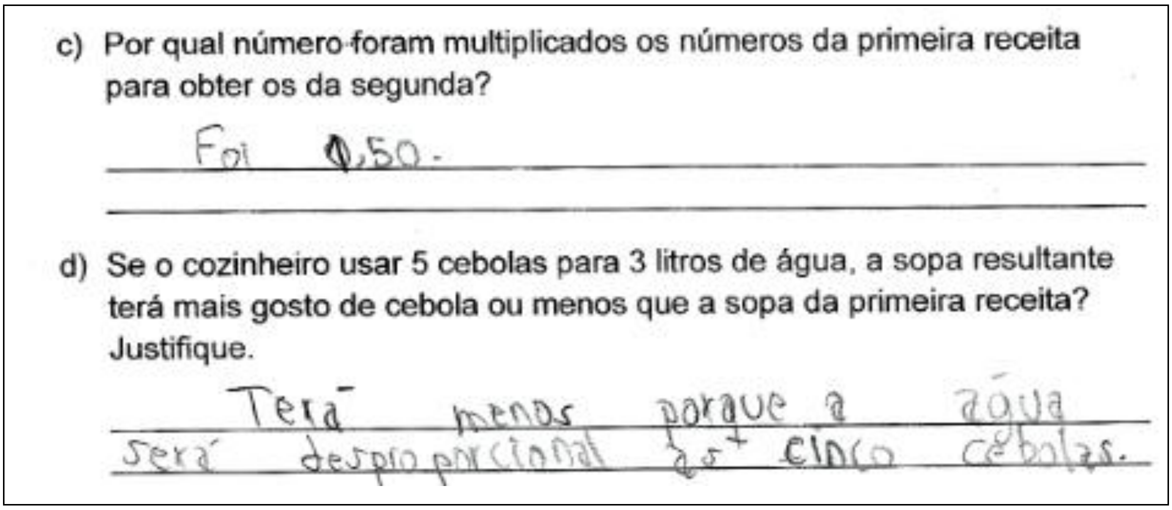
mesmo pois seguiu a proporção aumentou a cebola e aumentou 2 litros de água

Fonte: Arquivo pessoal

Alguns alunos, mesmo já tendo contato com os conceitos formais de proporcionalidade, apresentaram dificuldades na identificação do coeficiente de semelhança α o qual identifica o número de vezes que o ingrediente foi aumentado ou diminuído. Afirma-se, então, que o aluno utilizou a estrutura aditiva.

A outra resolução retrata a afinidade do aluno com o conceito de proporção:

Figura 54: Resolução 2 item c) e d) - 7ª série


c) Por qual número foram multiplicados os números da primeira receita para obter os da segunda?

Foi 0,50.

d) Se o cozinheiro usar 5 cebolas para 3 litros de água, a sopa resultante terá mais gosto de cebola ou menos que a sopa da primeira receita? Justifique.

Terá menos porque a água será desproporcional às cinco cebolas.

Fonte: Arquivo pessoal

O coeficiente de proporcionalidade α é identificado por ele, e o pensamento proporcional se faz presente. Isso fica comprovado quando é mencionado que "a água será desproporcional às 5 cebolas". Pode-se interpretar essa afirmativa do ponto de vista de que o aluno identifica que o coeficiente de semelhança não está igual nos dois ingredientes, ou seja, as quantidades não estão proporcionais. Diz-se que o aluno utilizou a estrutura multiplicativa para fazer tal afirmação.

6.Considerações Finais

Com a realização desse estudo, reafirma-se que a proporcionalidade é um conteúdo com abordagem que deve ser repensada na Escola. Pensa-se que atividades que permitam a identificação prévia das dificuldades dos alunos devem ser desenvolvidas.

A partir dos resultados obtidos pela aplicação da sequência com os alunos da 7ª série, observou-se que os estudantes tiveram mais facilidade na resolução das questões. Muitos conseguiram compreender o que era solicitado nas questões, as quais apresentavam o conteúdo de proporcionalidade de forma implícita. Contudo, observa-se que, em alguns casos, ainda existe dificuldade em identificar a proporcionalidade em situações nas quais ela não é mencionada, isto é, alguns alunos ainda apresentam indícios de que não ocorreu a compreensão do conteúdo, pois não conseguem estabelecer relações e analogias. Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino médio:

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à atribuição e apreensão de significados; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe identificar suas relações com outros objetos e acontecimentos (BRASIL, 1998, p. 57).

Ressalta-se que o contato formal com o conteúdo contribuiu para a compreensão do conceito de proporcionalidade, e que o confronto com um número maior de situações permitiu identificar evidências no uso do raciocínio de proporcionalidade.

Quanto aos resultados obtidos na experiência com a 6ª série, a qual mostrou que os alunos, mesmo sem esse contato prévio, têm uma noção intuitiva sobre proporcionalidade. Porém, a dificuldade de escrita dos alunos sobre seu próprio raciocínio, pode esconder raciocínios intuitivos coerentes. Acredita-se que propor exercícios que explorem as concepções intuitivas dos estudantes sobre o raciocínio de proporcionalidade deveria ocorrer frequentemente e, com isso, a capacidade de organização dos esquemas dos alunos pode ser potencializada. Pensa-se que este tipo de trabalho poderia ser desenvolvido de forma a anteceder o conteúdo, como foi feito na 6ª serie. Isso poderia ajudar o professor a perceber o conhecimento do aluno e diagnosticar os pontos a serem tratados com mais cuidado no momento da formalização de conceitos.

Percebeu-se durante a análise que alunos da 7ª série utilizaram, com maior frequência, estruturas multiplicativas. Já os alunos da 6ª, tiveram suas resoluções enquadradas no campo conceitual das estruturas aditivas. Isso pode acontecer na turma de 6ª série, pelo fato desse raciocínio estar relacionado a uma das etapas que compõe o processo de formulação do conceito, as quais não foram completadas ainda. Pode, além disso, dever-se a falta do contato formal com o conteúdo, e também, pela falta de familiarização com as situações, pois segundo Vergnaud:

> As situações dão sentido aos conceitos matemáticos, mas o sentido não se contém nas situações em si mesmas. Ele também não está nas palavras. No entanto, afirma-se que uma representação simbólica, uma palavra ou um enunciado matemático tem sentido, ou vários sentidos, ou nenhum sentido para ou aquele indivíduo (VERGNAUD, 1993, p. 18).

Ou seja, para o aluno realmente compreender o que deve ser feito nessa ou naquela situação, é necessário que se depare com variadas situações para que assim, saiba como desenvolver seu raciocínio e organizar seus esquemas.

Verificou-se também, que, em determinadas situações, alguns alunos que já tiveram a formalização do conceito, agem de maneira mecânica através da regra de três e, muitas vezes, nem se certificam de poder utilizá-la. Portanto, deve-se ter cuidado para que a estratégia de resolução não seja mecanizada, mas sim compreendida.

Atividades envolvendo desenhos, principalmente contendo ampliações e reduções, podem contribuir para a verificação das estratégias de resolução. Também podem colaborar para o desenvolvimento e escrita do que é pensado para ser apresentado como justificativa de tais estratégias.

Desta forma, abordando conceitos de maneira intuitiva e implícita é possível que ocorra não a mecanização dos conceitos, mas sim a construção destes, de modo que fiquem claros a ponto de serem apreendidos e não decorados. Para o professor, este tipo de proposta colabora a título de conhecer os seus alunos, saber como eles pensam e quais estratégias serão utilizadas por eles em determinadas situações, podendo assim, melhorar seus planejamentos e fortalecer determinados aspectos.

Ao finalizar este trabalho, foi possível constatar também, a ocorrência de aprendizagens enquanto futura professora-pesquisadora. Dentre outras aprendizagens destaca-se a da coleta de dados, conhecimento muito importante para um professor na relação ensino-aprendizagem dos seus alunos. A partir disso, deu-se o início ao uso de uma teoria que permite a interpretação destes dados, ou seja, que permite que o professor conheça e analise melhor a maneira com que seu aluno pensa e se expressa. Este trabalho proporcionou um conhecimento válido acerca da Teoria dos Campos Conceituais, despertando interesse e satisfação no decorrer do estudo.

7.Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais de 5ª a 8ª. Séries – Matemática.** Brasília, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 18 nov. 2013.

CARRAHER, T.N. et al. Proporcionalidade na educação científica e matemática: quantidades medidas por razões. R.bras. Est. Pedag., Brasília, 67(155), 93-107, jan./abr. 1986.

CARVALHO, D. L. de. **Metodologia do Ensino da Matemática.** 3ª Ed. Editora Cortez, São Paulo, 1990.

DALL'AGNOL, R.; GAIATTO, L.K.; FIOREZE, L.A. - O conceito de Razão em uma perspectiva crítica: recorte de um trabalho realizado com alunos do ensino médio. In: Encontro Nacional de Educação Matemática: retrospectivas e perspectivas. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática: retrospectivas e perspectivas.** Curitiba: PUCPR, 2013, p. 1-9.

FIOREZE, L A. **Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade: uma análise a partir da Teoria dos Campos Conceituais.** 2010. 244 f. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

GONÇALVES, M.J.S.V.; FREITAS, L.M.F. – O raciocínio proporcional em alunos do sétimo ano do ensino fundamental. In: Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática: retrospectivas e perspectivas.** Bahia, 2010, p. 1-11.

IEZZI, G.; DEGENSZAJN, D. **Fundamentos de matemática elementar.** 1ª Ed. Editora Atual, 2013, vol. 11.

PONTE, J.P.. **Estudo de** caso em educação matemática. BOLEMA, São Paulo, v.19, n.23, 2006, p.1-23.

LARA, C.P.B.; OLIVEIRA, L.L. – O raciocínio proporcional em alunos do ensino médio. In: Encontro Nacional de Educação Matemática: retrospectivas e perspectivas. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática: retrospectivas e perspectivas.** Curitiba: PUCPR, 2013, p. 1-9.

LEVAIN, J.P. **Aprender a matemática de outra forma.** Lisboa: Instituto Piaget, 1997.

MARTINS, E. F. **Robótica na sala de aula de matemática: os estudantes aprendem matemática?** 2012. 168 f. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

TINOCO, L. **Como e quando os alunos utilizam o conceito de proporcionalidade**. Revista do Professor de Matemática, (14), 1989.

TINOCO, L. – Razões e proporções. IM/UFRJ – Projeto do Fundão SPEC/PADCT/CAPES.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In: 1º SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO. **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio Janeiro.** Rio de Janeiro: UFRJ, 1993, p. 1 – 26.