UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

GUILHERME TADEWALD VARELLA

O ENSINO DE EXPRESSÕES NUMÉRICAS COM CALCULADORA E PLANILHA ELETRÔNICA

PORTO ALEGRE

2013/2

GUILHERME TADEWALD VARELLA

O ENSINO DE EXPRESSÕES NUMÉRICAS COM CALCULADORA E PLANILHA ELETRÔNICA

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Leandra Anversa Fioreze

PORTO ALEGRE

2013/2

GUILHERME TADEWALD VARELLA

O ENSINO DE EXPRESSÕES NUMÉRICAS COM CALCULADORA E PLANILHA ELETRÔNICA

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientadora: Leandra Anversa Fioreze

Aprovado em 20 de dezembro de 2013 com conceito ___.

BANCA EXAMINADORA

Profª Dra. Leandra Anversa Fioreze
Universidade Federal de Santa Maria / Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Profª. Dra. Marlusa Benedetti da Rosa
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos não poderiam faltar neste trabalho, visto que não se pode imaginar como ele seria finalizado sem o auxílio e o apoio de pessoas que estavam envolvidas direta e indiretamente no seu desenvolvimento e também no caminho que me levou até o início de sua elaboração.

Gostaria de começar agradecendo aos meus amigos. Creio que não seja necessário citar o nome de cada um deles aqui, pois acredito que todos aqueles que contribuíram durante o meu trajeto na universidade, seja pelo auxílio nos estudos ou pelo companheirismo, sabem da importância que eles tiveram para a minha formação.

Agradeço também a todos os professores que estiveram presentes durante minha vida acadêmica transmitindo seus conhecimentos matemáticos e didáticos, em especial a minha orientadora Leandra Anversa Fioreze que me auxiliou durante a realização deste trabalho.

Por último, mas não menos importante, agradeço a minha família que sempre me apoiou durante essa trajetória (tios, tias, avó, primos e pai), especialmente as minhas irmãs Natália e Ana Clara e a minha mãe Gisele por estarem sempre do meu lado nas horas que eu mais precisei.

A todos vocês, muito obrigado!

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo investigar de que forma uma prática de ensino, aplicada para uma turma do sétimo ano do ensino fundamental, que envolve a utilização da calculadora e da planilha eletrônica num ambiente investigativo pode contribuir para o aprendizado de conceitos envolvendo as quatro operações referentes a expressões numéricas. Entre alguns desses conceitos, se destacam a hierarquização da realização das quatro operações, com ou sem a utilização dos parênteses, e as propriedades de cada uma delas – algumas dessas são abordadas intuitivamente. O trabalho é organizado conforme os princípios da teoria da Engenharia Didática para que os conhecimentos que os alunos possuem antes e durante a realização das atividades possam ser comparados entre si. Suas funções cognitivas em relação aos conceitos propostos são analisadas conforme a teoria dos Registros de Representações Semióticas, de Raymond Duval. Pôde se observar nesta pesquisa que a utilização em sala de aula da calculadora e da planilha eletrônica num ambiente investigativo contribuiu para o aprendizado de expressões numéricas dos alunos que participaram da prática, principalmente no que se diz respeito à ordem em que as operações são efetuadas. Além disso, eles mostraram-se mais interessados em participar das aulas onde era solicitado utilizar esses dois recursos para a realização das atividades do que participar de uma aula onde envolvia uma metodologia de ensino considerada tradicional. Alguns deles mostrarem-se também arraigados a conceitos aritméticos aprendidos nas séries iniciais, o que pode dificultar a transição entre esses conceitos para os algébricos.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem de Matemática, Expressões Numéricas, Calculadora, Planilha Eletrônica, Engenharia Didática, Registro de Representações Semióticas

ABSTRACT

This work aims to investigate how teaching practice, applied to a class of seventh grade of elementary school, which involves the use of calculators and spreadsheet in investigative environment can contribute to the learning of concepts involving the four operations for a numeric expressions. Among some of these concepts, we highlight the hierarchy of performing the four operations, using parentheses or not, and properties of each of them – some of these properties are discussed intuitively. The work is organized according to the principles of the theory of Didactic Engineering for the knowledge that students have before and during implementation of the activities can be compared. His cognitive functions in relation to the proposed concepts are analyzed according to the theory of Representation Semiotic Registers, Raymond Duval. Could be observed in this study that the use of calculator and spreadsheet in the investigative environment classroom contributed to the learning of numerical expressions of the students who participated in the practice, particularly in regard to the order in which operations are performed. Moreover, they seemed more interested in joining classes which was asked to use these two resources to perform the activities than to join a class which involved a teaching methodology considered traditional. Some of them seemed also attached to arithmetic concepts learned in the early grades, which can complicate the transition between these concepts to algebraic.

Keywords: Education and Learning Mathematics, Numerical Expressions, Calculator, Spreadsheet, Didactic Engineering, Representation Semiotic Registers

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Alguns acontecimentos durante minha vida tiveram uma participação bastante importante na escolha do tema abordado no trabalho de conclusão. Abaixo irei relatar que acontecimentos foram esses.

Para dar início a esses relatos, começarei comentando sobre o início da minha carreira escolar. O ensino fundamental foi realizado numa escola particular onde precisei sair no início da quarta série por razões financeiras. Fui para um colégio estadual que, segundo minha avaliação e de minha mãe, não tinha um nível de ensino muito bom, o que me levou a retornar ao colégio que eu estudava anteriormente, depois de uma semana frequentando essa escola. Contudo, na metade da quarta série saí novamente dela e comecei a estudar em outro colégio estadual, que ficava na mesma rua de casa. Depois de um ano estudando nesse colégio, me matriculei em outro estadual, onde estudei até terminar o meu ensino fundamental.

Durante esses oito anos de estudo, minha matéria favorita da escola sempre foi matemática, pois era a que eu considerava a mais fácil de todas e também a mais prazerosa para estudar. Porém, notava que muitos dos meus colegas não compartilhavam desse mesmo sentimento. Muito pelo contrário: eu ouvia relatos de colegas meus falando que tinham muita dificuldade e, o que mais me espantava, tinham ódio de matemática. Por essa razão, muitas vezes me intrigava: por que a maioria dos meus colegas tinham dificuldades em matemática e eu, ao contrário, achava algo tão simples e divertido de estudar?

Ao mesmo tempo em que isso ocorria, percebia que às vezes eu tinha dificuldade em outros conteúdos escolares nos quais meus colegas não pareciam ter, como, por exemplo, Geografia. Isso me levou a acreditar no fato de que alguns colegas tinham mais facilidade com a área das exatas e outros com a área das humanas. Mesmo assim, na época eu queria poder entender o que exatamente os colegas que tinham mais dificuldade em matemática estavam compreendendo sobre determinados conteúdos da maneira que não é a considerada correta. Essa curiosidade se potencializou ainda mais no momento em que me dei conta que eu tinha dificuldade em transmitir aos meus colegas os meus conhecimentos matemáticos quando os mesmos me pediam ajuda.

Além desses fatos que ocorriam no ambiente de sala de aula, desde meus oito anos de idade eu sempre tive bastante contato com computador. Não cheguei ao ponto de querer me especializar profissionalmente em algo voltado para o computador, mas desde essa época ele sempre foi algo que esteve bastante presente na minha vida. Uma das ferramentas do computador que eu mais utilizei durante a vida foram as planilhas eletrônicas, por influência do meu pai, que na época trabalhava bastante com elas. Também não chegava a me aprofundar bastante em funções mais avançadas contidas nos *softwares* de planilhas eletrônicas, mas gostava de utilizá-las para montar tabelas, principalmente de futebol. Hoje em dia, vejo que essa característica minha foi bastante singular, pois, conversando com pessoas da mesma idade que eu, notei que nenhuma chegou a ter o mesmo interesse. Creio que esse interesse surgiu não só com a influência paterna, como também pelo meu interesse pela matemática.

No ensino médio, estudei em duas escolas estaduais (uma delas no primeiro e segundo ano e a outra no terceiro). No terceiro ano, uma colega minha me pediu uma explicação sobre algo relacionado à análise combinatória. Ela não entendia por que o número de eventos possíveis de um lançamento de uma moeda era igual a dois. Lembro que, depois de algumas tentativas, consegui identificar que pensamento ela estava tendo diante desse problema de forma que a levava a interpretá-lo de maneira errada. Com isso, expliquei a ela o motivo utilizando uma analogia com o número de faces de um dado. Finalmente ela conseguiu entender. Naquele momento, vi que a matemática acabava de me proporcionar outro prazer: ensiná-la a alguém e essa pessoa conseguir entender. Esse foi um dos motivos que me impulsionaram a fazer o curso de licenciatura em matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), que poderia ter como fator desfavorável a minha timidez em me comunicar com um público grande. Porém, essa dificuldade desapareceu durante o curso.

Nas práticas docentes que realizei no curso, pude notar que uma das dificuldades que os alunos possuíam em relação aos conteúdos de matemática é de compreender conceitos voltados para a álgebra, como a interpretação das letras. Esse motivo, aliado ao fato de durante minha vida ter me intrigado muitas vezes sobre as dificuldades que meus colegas tinham com conteúdos matemáticos, me levou a pesquisar mais sobre as dificuldades que grande parte dos alunos normalmente encontra em álgebra e também métodos de ensino que poderiam contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Depois de escrever alguns trabalhos sobre as dificuldades que os alunos apresentam na álgebra, onde relacionava as dificuldades que encontrava durante minhas práticas pedagógicas com teorias utilizadas em outros artigos, decidi que o tema do trabalho de conclusão teria relação com esse assunto.

No primeiro semestre do ano de 2013, comecei o trabalho de conclusão que tinha como tema a aplicação de uma prática pedagógica voltada para o ensino de expressões algébricas. Essa prática tinha como característica mais particular, em relação ao que é normalmente visto em sala de aula, o exercício da tradução da linguagem materna do aluno para a linguagem algébrica. Contudo, acabei desistindo de dar prosseguimento à prática no meio dela, pois notei, durante numa das aulas, que os alunos não conseguiam compreender as atividades que eram propostas, tampouco sabiam resolvê-las. Creio que isso ocorreu por diversos motivos. Um deles, e talvez o principal, é que minhas atividades abordavam praticamente tudo sobre expressões algébricas, ao invés de focar num conteúdo específico sobre esse assunto. Além disso, o conteúdo de expressões algébricas é considerado um dos mais difíceis de ensinar aos alunos. Por essas razões, resolvi tentar finalizar o trabalho de conclusão no semestre seguinte.

No começo do segundo semestre de 2013, comecei a trabalhar num escritório de advocacia no qual as ferramentas de trabalho que eu mais iria utilizar eram as planilhas eletrônicas no computador. O fato delas já estarem presentes na minha vida há muito tempo e de no momento estar trabalhando com elas me impulsionaram a tentar elaborar uma prática de ensino que envolvesse a sua utilização. Além disso, as planilhas eletrônicas podem ser facilmente encontradas em qualquer computador; caso não forem, sua instalação não exige conhecimentos de informática muito avançados. Essas razões facilitariam a escolha do professor por esse recurso em sala de aula.

Pensando em elaborar atividades relacionadas a expressões algébricas que poderiam ser trabalhadas com o auxílio de planilhas eletrônicas, capazes de contribuir para o conhecimento dos alunos em relação a esse conteúdo, observei algumas características importantes dessas planilhas que poderiam auxiliar na aprendizagem de matemática de modo geral:

- Poder utilizá-lo para efetuar cálculos de expressões numéricas;
- Trabalhar implicitamente com a ideia de variável em uma função e em expressões algébricas;
- Poder trabalhar com cálculos que envolvem números muito complexos de serem calculados mentalmente ou com a utilização de lápis e papel, como é o caso de números com diversas casas decimais ou que sejam muito elevados. Em outras palavras, as planilhas eletrônicas podem exercer papel semelhante ao das calculadoras;
- A alteração simultânea do valor numérico de uma célula que esteja em função de outra célula que, por sua vez, tem seu valor numérico alterado.
- Poder utilizar cores, bordas e outras ferramentas que facilitam na visualização das tabelas.

Considerando essas cinco características e também o fato de que era preciso utilizar como tema do trabalho de conclusão um conteúdo que não seja tão abrangente como expressões algébricas, entendi que as planilhas eletrônicas poderiam auxiliar os alunos no conhecimento de expressões numéricas. Vale ressaltar que esse não é um conteúdo específico da álgebra, mas a aprendizagem do mesmo pode contribuir para a construção do pensamento algébrico (MODANEZ, 2003).

Além de elaborar uma atividade com a utilização da planilha eletrônica, aproveitei a ideia de que um de seus recursos é o de fazer cálculos e pesquisei sobre atividades de expressões numéricas que envolvessem o uso da calculadora, de forma que acrescente mais uma atividade na prática de ensino que seria desenvolvida. É importante que os alunos exercitem a utilização da calculadora visto que ela se trata, possivelmente, da ferramenta mais conhecida e utilizada para a realização de cálculos e que, portanto, não se pode privar um conhecimento que poderá estar presente com frequência na vida dos alunos. Pesquisando sobre atividades que envolvam expressões numéricas e o uso da calculadora, encontrei o Jogo das Operações como uma atividade que poderia ser interessante acrescentar à prática.

Entendendo que uma expressão numérica pode ser considerada a representação de um valor numérico e que essa representação poderá sofrer transformações tanto internamente – ou seja, por meio de cálculos aritméticos, respeitando as propriedades das operações de uma expressão numérica – como externamente – por exemplo, relacionando uma situação-problema e a expressão numérica que poderá ser utilizada para resolvê-la –, o desenvolvimento cognitivo dos alunos que participaram das atividades foi analisado de acordo com a teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval (2004; 2005). Para isso, foi observado de que forma os alunos realizaram as transformações de tratamento e conversão (interna e externa, respectivamente), e se as atividades contribuíram para o desenvolvimento das atividades cognitivas de comunicação, objetivação e tratamento.

Além disso, por se tratar de uma pesquisa que envolve a verificação dos resultados obtidos para validar a metodologia de ensino utilizada, ela foi desenvolvida nos princípios da Engenharia Didática. Para isso, foram distribuídos aos alunos questionários com perguntas sobre o conteúdo de expressões numéricas antes de começar as atividades. Analisando as respostas obtidas nesse questionário, foi possível compará-las com o que os alunos produziram no decorrer das atividades.

Definindo quais atividades utilizadas para aplicar a prática pedagógica abordada nesta pesquisa, as questões que norteiam o seu desenvolvimento são as seguintes:

- Que estratégias os alunos que participaram da prática de ensino proposta neste trabalho utilizaram para tentar resolver os problemas referentes às expressões numéricas?
- A utilização da metodologia proposta para o ensino de expressões numéricas auxiliará os alunos na compreensão desse conteúdo? De que modo isto acontece?

No segundo capítulo deste trabalho constam referenciais teóricos utilizados para desenvolvê-lo. O primeiro deles cita brevemente algumas pesquisas realizadas recentemente sobre a utilização de calculadora e planilha eletrônica em sala de aula, não só com expressões numéricas, mas também com outros conteúdos de matemática. O segundo descreve características da teoria das representações semióticas que são importantes para verificar as funções cognitivas dos alunos em relação às atividades propostas neste trabalho de conclusão.

O terceiro capítulo fala sobre o que é a Engenharia Didática e como ela será utilizada neste trabalho. Em seguida, ele aborda sobre os três tipos de análises prévias utilizadas numa pesquisa desenvolvida nos princípios da Engenharia Didática. Essas análises são consideradas conforme o conteúdo e as atividades que são objetos deste trabalho de conclusão. As análises são as seguintes:

- **Análise didática**: verificar de que forma está sendo sugerida a utilização da calculadora e o computador na sala de aula conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e como o conteúdo de expressões numéricas está sendo abordado em dois livros didáticos do sétimo ano (sexta série) do ensino fundamental e pelas dez coleções de livros didáticos analisadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).
- **Análise epistemológica**: estabelecer uma abordagem histórica em relação à construção dos símbolos matemáticos utilizados para representar os números e as operações, que são os elementos que formam uma expressão numérica.
- **Análise cognitiva**: analisar as respostas que os alunos obtiveram para as perguntas do questionário que foi entregue antes de iniciar as atividades.

O quarto capítulo descreve de que forma as três atividades utilizadas nesta pesquisa foram planejadas para serem aplicadas em sala de aula.

O quinto capítulo relata alguns acontecimentos, considerados os mais importantes, que ocorreram durante a realização das atividades.

O sexto capítulo é reservado para análise *a posteriori* e validação das atividades executadas nesta pesquisa, onde serão comparadas as respostas obtidas na análise prévia com o que os alunos produziram durante a realização dessas atividades.

No último capítulo constam as considerações finais sobre a realização desta pesquisa.

2. REFERENCIAIS TEÓRICOS

2.1. O ensino de matemática com calculadora e planilha eletrônica

Os recursos tecnológicos estão cada vez mais presentes nas atividades das pessoas. Segundo Fróes, a tecnologia sempre afetou o homem, assim como também a criatividade do homem também gera novas ferramentas tecnológicas. Além disso:

> Os recursos atuais da tecnologia, os novos meios digitais: a multimídia, a Internet, a telemática, trazem novas formas de ler, escrever, e portanto, de pensar e agir. O simples uso de um editor de textos mostra como alguém pode registrar seu pensamento de forma distinta daquela do texto manuscrito ou mesmo datilografado, provocando no indivíduo uma forma diferente de ler e interpretar o que escreve, forma esta que se associa, ora como causa, ora como consequência, a um pensar diferente (FRÓES).

Essa relação entre a tecnologia e o pensamento humano fez com que alguns professores começassem a pensar sobre a inserção de alguns recursos tecnológicos em sala de aula, como a calculadora e o computador, como ferramentas para auxiliá-los na compreensão dos conteúdos. A utilização desses recursos substitui muitas vezes metodologias de ensino consideradas tradicionais, com o uso de quadro-negro, giz e caderno.

Apesar de esses recursos aparentarem ser ferramentas úteis para a aprendizagem, ainda há opiniões divergentes sobre suas utilizações. Conforme Selva e Borba (2010), o debate sobre a utilização dos computadores e das calculadoras no ensino de matemática suscita embates semelhantes. Os que são contrários à inserção desses dois recursos em sala de aula justificavam que os alunos poderão se tornar dependentes à sua utilização, não proporcionando um ambiente de aprendizado a eles. Os que são a favor, acreditam que, se utilizada de maneira adequada em sala de aula, elas poderão proporcionar esse ambiente.

Uma das ferramentas do computador que podem ser utilizadas no ensino de matemática, apesar de não ter sido inventada para este fim, é a planilha eletrônica, que pode ser utilizada para realização de cálculos de forma que possibilite ao aluno poder analisar os resultados encontrados, função esta que se assemelha ao da calculadora (FIOREZE, 2010).

Observando pesquisas recentes envolvendo a utilização de calculadora e planilha eletrônica no ensino de matemática, pode-se notar que o conteúdo em que ambas são utilizadas com mais frequência é no ensino de matemática financeira. Este é o caso das pesquisas de Azevedo (2006), Rech (2011), Vitali (2012) e Feijó (2007), sendo que nesta última tem-se uma comparação entre a utilização da calculadora e da planilha eletrônica na abordagem desse conteúdo.

Essa predominância ocorre, provavelmente, pelo fato da matemática financeira ser uma área que tenha mais significado para os alunos poderem aplicar seus conhecimentos matemáticos, visto que a falta de planejamento financeiro é um grande problema da população nos tempos atuais (THEODORO, 2008). Isso somado ao fato dos recursos tecnológicos estarem cada vez mais presentes no dia-a-dia da população e que, portanto, é necessário que os alunos exercitem o uso desses recursos de forma que possam estar aptos para melhores oportunidades de emprego (D'AMBROSIO, 1998 apud RECH, 2011), justifica por que o ensino com planilhas eletrônicas e calculadoras e o de matemática financeira tende a seguir o mesmo caminho.

Pode-se observar em outros trabalhos que não é só no conteúdo de matemática financeira que esses recursos podem ser utilizados, como é o caso da pesquisa de Magro (2009), onde a calculadora é usada para o ensino de potências, e de Flores (2013), que usa a planilha eletrônica em sala de aula para a construção de gráficos. Além dessas, outras pesquisas mostram que a calculadora e a planilha eletrônica também podem ser utilizadas no ensino de matemática em aulas que têm como característica um ambiente investigativo. Araújo e Soares (2002) experimentaram numa turma de alunos entre 10 e 11 anos um jogo de cartas desenvolvido em Ipatinga, Minas Gerais, chamado de Jogo das Operações. Nesse jogo, os alunos buscam encontrar, com o auxílio das calculadoras, a expressão que resulta o maior valor utilizando uma combinação de três números de 0 a 9 e duas operações entre as quatro básicas (+, –, × e ÷) de forma que possam fazer o maior número de pontos possível durante o jogo. Em outra pesquisa realizada por Pereira (2007), é elaborada uma planilha eletrônica na qual os alunos puderam testar valores nos numeradores de algumas frações e analisar o que ocorre com seus respectivos resultados na forma decimal, observando, por exemplo, em que casos ela resulta em dízima periódica ou em decimal exato.

Neste trabalho as atividades que envolvem o uso de calculadora e planilha eletrônica também são realizadas numa perspectiva didática voltada para a investigação matemática, sendo que o Jogo das Operações é uma dessas atividades aplicadas na prática analisada.

2.2. Representações Semióticas

Além da linguagem natural e das imagens, existem outros tipos de representações que servem não só para a comunicação, mas também para auxiliar no desenvolvimento das atividades cognitivas. Pode-se observar que na matemática há uma variedade de sistemas de expressão e de representação diferentes, tais como: sistemas variados para escrita de números, escritura algébrica, gráficos cartesianos, diagramas, etc..

Duval (2004; 2005) relaciona a utilização das representações semióticas com as atividades cognitivas na matemática. Segundo ele, não se pode ter compreensão em matemática se não distinguirmos um objeto matemático de sua representação, visto que um mesmo objeto pode ser representado de diversas formas. Além disso, ele afirma que a única possibilidade que pode evitar que isso ocorra é de dispor de ao menos dois registros de representação diferentes para um mesmo objeto.

O fato de confundir a representação e objeto, segundo Duval (2004), poderá trazer a seguinte consequência:

> Toda confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão. Os conhecimentos adquiridos tornam-se então rapidamente inutilizáveis fora de seus contextos de aprendizagem: seja por falta de atenção, seja porque eles tornam-se representações inertes não sugerindo tratamento produtor. Por sua pluralidade potencial, as diversas representações semióticas dos objetos matemáticos seriam então secundárias e extrínsecas à aprendizagem conceitual dos objetos (p. 14).

Essa confusão pode ocorrer em diversas situações. Por exemplo, uma das formas de começar a ensinar o conteúdo de funções quadráticas é dizer que todas elas têm o seguinte formato: $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$, e b e c pertencem ao conjunto dos números reais. Normalmente, é realizada a transformação de uma função quadrática desse formato para o formato $f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ para poder encontrar o valor das raízes dessa função, que são iguais a x_1 e x_2. Contudo, se um sujeito aprendeu que a função quadrática deveria ser representado de uma forma, é normal que ele se questione por que ela pode ser expressa de outra. Portanto, é importante que nesse caso ele não confunda a representação de uma função quadrática com o seu conceito, pois há diversas formas de representá-la algebricamente. O formato $f(x) = ax^2 + bx + c$ poderá ser uma representação que os induza a entender o conceito de uma função quadrática, mas a diversidade de representações é importante para que o sujeito não confunda o objeto “função quadrática” com suas representações.

No caso de expressões numéricas, um exemplo onde pode ocorrer confusão entre representação e objeto é quando o sujeito, mesmo sabendo como realizar operações aritméticas e propriedades operatórias numa expressão numérica, não consegue traduzir uma situação-problema para uma expressão numérica que poderá ser utilizada para tentar resolvê-la. Ou seja, nesse caso poderá haver a possibilidade do aluno compreender as expressões somente na sua representação numérica, e não como uma aplicação a situações-problema de forma que possam resolvê-los.

Conforme Duval (2005) existem dois tipos de transformações que ocorrem de uma representação semiótica para outra, onde ambas representam o mesmo objeto, e que são estritamente diferentes entre si: conversão e tratamento.

A transformação por tratamento ocorre de uma representação para outra, onde ambas pertencem a registros de mesma espécie. Um exemplo para esse tipo de transformação são os cálculos aritméticos realizados numa expressão numérica para poder encontrar outra expressão mais simplificada. Se operarmos a expressão $4 \div 2 + 6 \times 5 - 1 \times 2$ de forma que ela fique igual a $2 + 30 - 2$, pode-se notar que, apesar de ambas serem diferentes visualmente, elas representam o mesmo objeto matemático: o valor numérico 30.

No caso da transformação por conversão, a transformação ocorre de uma representação para outra, onde ambas pertencem a registros de espécies diferentes entre si. Um exemplo onde isso se torna bastante evidente é quando transformamos uma função quadrática na forma algébrica para a forma gráfica. No caso de expressões numéricas, pode-se pensar numa situação-problema que envolve a utilização de uma expressão numérica para resolvê-la. A transformação por conversão ocorre quando se consegue traduzir a situação-problema para essa expressão, ou vice-versa.

Caso analisarmos o fato de que as representações se tratam apenas de uma forma do indivíduo poder exteriorizar suas representações mentais (conjunto de imagens e de conceituações que ele pode ter sobre o objeto), concluímos que somente elas são dependentes de seus respectivos objetos e que o inverso não ocorre. Porém, segundo Duval (2004):

> [...] a possibilidade de efetuar tratamentos sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótica utilizado. É suficiente considerar o caso do cálculo numérico para se convencer disto. Os procedimentos e seus custos dependem do sistema de escritura escolhida. Os tratamentos matemáticos não podem ser efetuados independentemente de um sistema semiótico de representação. E essa função de tratamento pode ser completada apenas por representações semióticas e não pelas representações mentais [...] (p. 15-16).

Além disso, se pode constatar que, historicamente, o conhecimento matemático vem sempre acompanhado da criação e do desenvolvimento de sistemas semióticos novos, que também acompanham o primeiro dentre eles: o da língua materna.

Conforme Duval (2005 apud SILVA, 2009) um sistema de representação semiótica se organiza por duas funções. A primeira delas é a cognitiva, que é aquela que desenvolve o nível de funcionamento consciente sobre o objeto matemático. Ela trabalha as funções cognitivas de comunicação, que são as funções verbais exteriorizadas; objetivação, que são as funções mentais; tratamento, que envolve as duas anteriores juntas.

A segunda função é a código, que desenvolve o nível de funcionamento não consciente do sujeito. Para que ela funcione de maneira adequada, é preciso que a produção do sujeito ocorra de modo automático. Ela envolve funções cognitivas de transmissão, signo, memorização ou categorização. Um exemplo simples de onde ela pode ocorrer é quando o sujeito efetua mentalmente uma operação aritmética sem precisar relacioná-la com objetos materiais para poder fazer a contagem e poder encontrar o seu resultado. Sendo mais específico, o sujeito está trabalhando a função código caso ele efetue $7 \times 6 = 42$ automaticamente, por exemplo, sem ter a necessidade de fazer a contagem de quantos objetos no total contém seis grupos de sete objetos.

Outro exemplo onde ela pode ocorrer é quando o sujeito utiliza alguns métodos de resolução de problemas matemáticos que foram lhe ensinado, normalmente pelos professores, e que na realidade não condizem com o fenômeno ocorrido durante a resolução do problema, mas acaba se tornando uma maneira de facilitar a sua memorização para resolver o problema com mais rapidez.

Sendo mais específico sobre esse tipo de situação, pegamos um exemplo bastante conhecido. Alguns professores ensinam os alunos a calcular a expressão $(a + b)^2$ como sendo igual à soma $a^2 + 2ab + b^2$ da seguinte forma: soma de a^2 (onde a e 2 se referem ao primeiro número da soma $a + b$ e à potência dessa soma, respectivamente), $2ab$ (que seria o produto dos três valores que estão representados neste registro: a e b na soma e 2 na potência) e b^2 (onde b e 2 se referem ao segundo número da soma $a + b$ e à potência dessa soma, respectivamente). Obviamente, não foram essas as operações que ocorreram para encontrar a outra forma de representar essa expressão. Porém, esse método poderá auxiliar o sujeito a realizar o cálculo com mais rapidez.

Para verificar como a aplicação da prática proposta neste trabalho de conclusão pode interferir no conhecimento dos alunos sobre expressões numéricas, eles foram convidados a responder um questionário com perguntas relacionadas às atividades realizadas durante a prática. Tanto o questionário quanto as atividades contêm registros escritos dos alunos, de forma que possa comparar seus conhecimentos de antes e durante as atividades. Em ambas as situações, foi analisado como os alunos realizam as transformações de tratamento e conversão entre os registros, observando como ocorrem as funções cognitivas de comunicação e tratamento dos alunos; a função de objetivação não pode ser registrada porque ocorre internamente.

As atividades de expressões numéricas deste trabalho de conclusão abordam dois tipos diferentes de grandes registros de representação semiótica que são citadas por Duval (2004): língua natural e sistemas variados de escritura para os números (naturais, inteiros e racionais), sendo que este último é visto tanto na forma de uma expressão numérica como em algoritmos para a realização de cálculos aritméticos. Além dessas duas, o registro material, que não é encontrada nos trabalhos de Duval (SILVA, 2009), também foi analisado neste trabalho em uma das atividades.

3. METODOLOGIA DE PESQUISA: ENGENHARIA DIDÁTICA

3.1. O que é e sua relação com a pesquisa realizada

O termo Engenharia Didática surgiu, conforme Artigue (1995), como uma inspiração do trabalho de um engenheiro, onde não é exigido somente o conhecimento científico, básico e essencial na sua atuação profissional, mas também o enfrentamento de problemas práticos que não precisam necessariamente de uma teoria já formulada. Essa metodologia visa a construção de soluções para problemas encontrados em sala de aula, valorizando o saber prático do professor, com a consciência de que teorias desenvolvidas anteriormente não são suficientes para descrever a complexidade dessas situações.

Segundo Pais (2005), a Engenharia Didática é uma teoria educacional da didática matemática que tem sido utilizada como referência para a realização de diversas pesquisas desta área. Conforme o autor, o interesse pela sua utilização nas pesquisas se justifica por uma de suas vantagens: poder interligar o plano teórico da racionalidade ao território experimental da prática educativa. Ele ainda comenta que:

> [...] a engenharia didática possibilita uma sistematização metodológica para a realização prática da pesquisa, levando em consideração as relações de dependência entre a teoria e a prática. Segundo nosso entendimento, esse é um dos argumentos que valoriza sua escolha na condução da investigação do fenômeno didático, pois sem uma articulação entra a pesquisa e ação pedagógica, cada uma destas dimensões tem seu significado reduzido (p. 99).

Uma pesquisa elaborada nos princípios da Engenharia Didática é organizada da seguinte forma (CARNEIRO, 2005):

- Descrição e justificativa da escolha do tema e do local escolhido onde é realizada a prática de ensino pesquisada;
- Análises prévias sobre os conteúdos que serão trabalhados nas dimensões: epistemológica, associada às características do saber em jogo; cognitiva, associada às características do funcionamento do sistema de ensino; e didática, associada às características do público no qual se dirige o ensino;
- Escolhas e hipóteses que acompanham o planejamento e a experimentação das atividades;

- Análise *a posteriori*, onde será analisado o que os alunos produziram, e validação da experiência, onde são confrontadas as análises *a priori* e *a posteriori*.

Neste trabalho de conclusão, foram feitas algumas considerações em torno das três análises prévias citadas anteriormente, onde a ordem em que elas são abordadas é a seguinte: análise didática, análise epistemológica e análise cognitiva. Na primeira, é abordado como as expressões numéricas e a utilização de computadores e calculadoras são vistas no ensino atual, conforme análise feita nos parâmetros curriculares e nos livros didáticos. Na segunda, é realizada uma abordagem histórica sobre como surgiram os símbolos para números e operações que conhecemos hoje, que são dois tipos de elementos que formam uma expressão numérica. Na terceira, são analisadas, com base na teoria das representações semióticas, as respostas que os alunos obtiveram para as perguntas do questionário que foi entregue a eles antes da realização das atividades. Essas perguntas envolvem questões referentes aos conteúdos que seriam trabalhados nas atividades.

A descrição da turma e a justificativa pela sua escolha são detalhadas na análise cognitiva.

Posteriormente são descritos os planejamentos e a experimentação das atividades. Por último, ocorre a validação das atividades, onde a produção dos alunos é analisada novamente conforme a teoria das representações semióticas.

3.2. Análises Prévias

3.2.1. Considerações sobre a Análise Didática

Dois documentos que foram utilizados para esta análise didática foram os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) e o PNLD (Programa Nacional do Livro Didático). Este último faz uma análise de dez coleções de livros didáticos para que possam servir de modelo também para a elaboração de outros livros didáticos. Além disso, ambos também servem de apoio para discussões em torno do processo educativo atual.

Apesar dos PCN não abordarem sobre o ensino de expressões numéricas (BRASIL, 1998), o conteúdo é ensinado hoje em dia pelos professores e também está presente em grande parte dos livros didáticos – das dez coleções aprovadas pelo PNLD/2011 das séries finais do Ensino Fundamental, somente uma delas não aborda o conteúdo de expressões numéricas.

Em relação à organização dos conteúdos, os PCN (1998) correspondentes ao terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental (equivalente à quinta, sexta, sétima e oitava séries ou sexto, sétimo, oitavo e nono anos) fala que as possibilidades de sequenciar os conteúdos são múltiplas e que, por isso, não é necessária uma hierarquização rígida entre eles. Os conteúdos também devem se organizar de tal forma que o professor consiga obter múltiplas conexões entre eles e também com situações do dia-a-dia e outras áreas de conhecimento. O objetivo disso é possibilitar que o aluno obtenha um conhecimento matemático mais amplo em relação a esses conteúdos interligados. Uma das consequências de se fazer essas conexões é de que o estudo sobre um determinado conteúdo matemático não deve se esgotar em uma única vez; ele deverá ser estudado posteriormente em outras situações.

Observando a listagem de conteúdos dos livros didáticos do sexto e do sétimo ano das coleções comentadas no PNLD (2011), pode-se notar que quatro delas abordam o conteúdo de expressões numéricas mais de uma vez. Na coleção “Matemática”, de Bianchini, o conteúdo aparece em quatro momentos específicos: o primeiro é junto com os números naturais; o segundo com os números racionais positivos; o terceiro com os inteiros; e o quarto com os racionais positivos e negativos. Os dois primeiros constam no livro do sexto ano e os dois últimos no do sétimo. Nas outras três coleções o conteúdo de expressões numéricas é abordado duas vezes, sendo que a primeira vez ocorre no livro do sexto ano e a segunda no do sétimo. Duas dessas coleções trabalham com expressões numéricas paralelamente com número naturais e mais adiante com os inteiros. A outra aborda expressões numéricas depois de serem estudadas todas as operações básicas para números positivos (até a potência) e depois ela é vista novamente quando os alunos estudarem os negativos.

Das cinco coleções onde o conteúdo aparece uma única vez, quatro delas abordam as expressões numéricas praticamente junto com números naturais e suas operações; a outra, logo antes de dar início ao conteúdo de expressões algébricas. Em todas as cinco, o conteúdo de expressões numéricas é estudado no livro do sexto ano.

O PNLD (2011) não é muito específico sobre como é estudado o conteúdo de expressões numéricas em cada coleção. Portanto, para fazer uma análise mais precisa de como esse conteúdo é abordado num livro didático de sétimo ano, que é o nível de ensino correspondente à turma na qual será aplicada a metodologia de ensino dessa pesquisa, foram escolhidos dois livros didáticos, que são voltados para esse ano, para serem analisados:

“Matemática e Realidade” (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 1991) e “Matemática: Conceitos e Histórias” (NETTO, 1996).

O primeiro começa explicando sobre o que são os números inteiros, diferenciando os números positivos dos negativos. Em seguida, ele define o que é o conjunto dos números inteiros e de que forma podem ser comparados dois números desse conjunto. O segundo começa falando sobre potências e raízes quadradas para números naturais, onde já se podem encontrar alguns exercícios de expressões numéricas que envolvem cada uma dessas operações. Essas expressões também envolvem operações básicas entre os naturais (adição, subtração, multiplicação e divisão), que obviamente já devem ter sido estudadas nos anos anteriores.

Depois dos livros abordarem esses conteúdos, ambos explicam propriedades das operações que podem ocorrer entre os números inteiros: propriedades da adição, da subtração, da multiplicação, da divisão, da potenciação e da radiciação. Cada operação tem um subcapítulo destinado a ensinar sobre as propriedades que ocorrem em cada uma delas. No final de cada um desses subcapítulos, são dados alguns exercícios sobre cada um desses assuntos. Em cada um deles aparecem expressões numéricas. Pode-se observar que, além de aparecerem para cada uma das expressões as operações de seu respectivo subcapítulo, também podem ser vistas operações de subcapítulos anteriores.

No segundo livro, as expressões numéricas também aparecem rapidamente num exercício do conteúdo de proporcionalidade, onde é solicitado encontrar qual o valor da razão numa expressão que envolve a divisão entre dois valores que terão de ser encontrados efetuando uma adição ou subtração, como é o caso, por exemplo, de encontrar o valor da razão da expressão $\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\right):\left(-\frac{1}{10}\right)$, na qual a resposta correta é $\frac{2}{3}$.

Tanto para o conteúdo de números inteiros como para o de racionais, os dois livros não contêm um número muito expressivo de exercícios que envolvem a aplicação de uma expressão numérica para resolver uma situação-problema.

Em relação à organização dos conteúdos, pode-se notar que os dois livros seguem um modelo conforme é proposto pelo PCN (1998), visto que as expressões numéricas podem ser encontradas na abordagem de outros também, como é o caso de números inteiros e racionais e suas operações. Porém, nos conteúdos seguintes a estes, com exceção de proporcionalidade no segundo livro, em ambos os livros o conteúdo de expressões numéricas não é encontrado, caso não o considerarmos como uma ideia implícita de expressões algébricas.

Um dos recursos que pode ser utilizado para o ensino das propriedades das operações nas expressões numéricas é a calculadora. Segundo os PCN (1998) da área de matemática no ensino fundamental, apesar de haver controvérsias, a sua utilização é recomendada pela maioria dos pesquisadores e até mesmo professores do ensino fundamental. Dentre as várias razões para seu uso, ressalta-se a possibilidade de explorar problemas com números frequentes nas situações cotidianas e que demandam cálculos mais complexos. Além dessa, o uso da calculadora também pode trazer outras vantagens para o ensino de matemática:

> [...] é um recurso útil para verificação de resultados, correção de erros, podendo ser um valioso instrumento de auto-avaliação. A calculadora favorece a busca e percepção de regularidades matemáticas e o desenvolvimento de estratégias de resolução de situações-problema, pois ela estimula a descoberta de estratégias e a investigação de hipóteses, uma vez que os alunos ganham tempo na execução dos cálculos. Assim elas podem ser utilizadas como eficiente recurso para promover a aprendizagem de processos cognitivos (BRASIL, 1998).

Além da calculadora, a utilização do computador também é destacada nos PCN (1998) de matemática, que tem como uma das finalidades para as aulas de matemática a utilização das planilhas eletrônicas. Estudiosos mostram que os recursos da informática influenciam cada vez mais na linguagem, escrita, visão, audição, criação e aprendizagem. Nessa perspectiva, é inserido o desafio para a escola de como poder incorporar essas novas formas de comunicar e conhecer ao ensino tradicional apoiado pela oralidade e escrita.

Por conseguir efetuar cálculos com mais rapidez e eficiência que cálculos mecânicos, que conta com algoritmos e manipulações simbólicas, a utilização de recursos como a calculadora e o computador poderão relativizar a importância desses tipos de cálculos. Além disso:

> No mundo atual saber fazer cálculos com lápis e papel é uma competência de importância relativa e que deve conviver com outras modalidades de cálculo, como o cálculo mental, as estimativas e o cálculo produzido pelas calculadoras, portanto, não se pode privar as pessoas de um conhecimento que é útil em suas vidas (BRASIL, 1998).

Sobre os recursos tecnológicos de modo geral, além de ser fato que a cada dia eles estejam mais presentes nas atividades da população, o seu uso traz significativas contribuições para se repensar sobre o processo de ensino e aprendizagem de matemática como, por exemplo, fazer com que os alunos se interessem por atividades nas quais envolvem a realização de projetos, investigação e exploração. Além disso, “permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo" (BRASIL, 1998). Outro aspecto interessante em relação à utilização desses recursos está na leitura de informações gráficas, que poderão ser importantes para a compreensão de conceitos. Contudo, para que a intervenção dos recursos tecnológicos para realização de cálculos contribua para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, é preciso que o professor reflita sobre como utilizá-los, não correndo o risco de tornar os alunos extremamente dependentes ao seu uso para efetuar até os cálculos mais simples.

3.2.2. Considerações sobre a Análise Epistemológica

Para poder entender a aprendizagem de expressões numéricas numa perspectiva epistemológica, será analisada a seguir de que forma surgiram os elementos que a constituem: símbolos utilizados para representar os números e as operações.

Conforme Guelli (1992), as primeiras representações para os números surgiram há mais de 30.000 anos atrás. A necessidade que os homens tinham para contar o número de animais mortos durante sua caçada foi o que incentivou a criar uma forma de poder representá-los, onde eram desenhados riscos em pedaços de madeira ou em ossos de animais para poder registrar essa quantidade. Além desses, o homem também utilizava outros tipos de representações de contagem para outras atividades, como a comparação com quantidade de pedras e quantidade de nós em uma corda. Para o homem primitivo, os números sempre estavam ligados a alguma coisa concreta: por exemplo, o número cinco com cinco dedos, cinco peixes, etc.. Dessa forma, pode-se dizer que os números naturais foram os primeiros a serem utilizados pelo homem, mesmo que seu conceito ainda não tivesse sido definido nesta época.

Com o passar dos anos, esses tipos de representação acabariam não se tornando muito práticas de serem utilizados para em outras atividades, como na construção das pirâmides do Egito. Segundo Guelli (1992), no próprio Egito foi onde surgiram um dos primeiros símbolos para representação dos números.

Conforme Boyer (1972), a operação fundamental no Egito era a adição, e as operações de multiplicação e divisão se realizavam por sucessivas "duplações". Por exemplo, uma das maneiras de se calcular 13×9 era somando treze parcelas de nove. Para fazer isso, primeiro os egípcios dobravam o número de parcelas e encontravam seu respectivo resultado, conforme abaixo:

- 1 parcela tinha como resultado 9
- 2 parcelas tinham como resultado $9 + 9 = 18$
- 4 parcelas tinham como resultado $18 + 18 = 36$
- 8 parcelas tinham como resultado $36 + 36 = 72$

Em seguida, eram escolhidas as parcelas tais que sua soma era igual a 13 ($1 + 4 + 8 = 13$) e somavam seus respectivos resultados. Dessa forma, é encontrando o resultado da multiplicação: $9 + 36 + 72 = 117$.

Apesar do símbolo para adição ainda não ter sido criado pelos egípcios, esse tipo de cálculo era possível de ser efetuado por eles. Considerando que as expressões numéricas são todas as expressões matemáticas que são formadas somente por números e operações, pode-se dizer que esse método para multiplicação tenha sido uma das primeiras expressões numéricas realizadas pelo homem, apesar de ainda não ter sido criado um símbolo para a adição.

Segundo Guelli (1992), por volta do ano 3.000 a. C., um faraó chamado Sesótris repartia o solo às margens do rio Nilo entre seus habitantes utilizando cordas. Porém, ao realizar a medição dos lados dos terrenos, muitas vezes não cabia um número natural no sistema de medida que era utilizado por eles. Por essa razão, foram criados os números fracionários. Contudo, os egípcios só conseguiam representar frações com numerador igual a 1; para representar as outras, elas eram expressas como uma soma de números fracionários com numeradores iguais a 1. Além da adição, os cálculos de multiplicação e divisão também eram efetuados no Egito utilizando a adição. Dessa forma, pode-se concluir que nessa época também já eram efetuadas expressões numéricas entre alguns números racionais positivos.

No Egito também foram produzidas duas das mais antigas obras de matemática que se tem notícia: o Papiro Ahmes e o Papiro de Moscou. O primeiro foi escrito por volta de 1.650 a. C. pelo egípcio Aahmesu, enquanto o segundo não se sabe nada sobre seu autor. O Papiro Ahmes contém 80 problemas de matemática relacionados a atividades da época, como o preço do pão e da cerveja, a alimentação do gado, etc.. Porém, como ainda não haviam sido inventados os símbolos para as operações, os problemas eram escritos conforme o exemplo a seguir, onde “montão” pode ser interpretado hoje em dia por uma incógnita:

Um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Digam-me: Qual é a quantidade?

Além do sistema de numeração egípcio, existem outros sistemas de numeração que foram criados com a intenção de serem mais práticos de se realizar cálculos mais complexos em relação ao egípcio, como foi o caso do romano. Somente no final do século VI que os dez algarismos que são utilizados para representar os números do sistema numérico no qual conhecemos hoje, que foi criado pelos hindus, estavam completos com o acréscimo do número zero. Porém, esse sistema numérico só foi reconhecido mundialmente pelos matemáticos mais tarde, graças ao livro escrito pelo árabe al-Khowarizmi por volta do século IX, onde ele explica como funciona sua utilização. Por essa razão, a palavra “algarismo” é derivada de seu nome e o sistema numérico é chamado de indo-arábico.

Além dos números naturais, a utilização desse sistema também tornou mais prática a representação de números fracionários, onde já não se utilizava mais uma soma de duas frações com numeradores iguais a 1, conforme simbologia criada pelos egípcios, para expressá-los, e sim uma razão entre dois números naturais.

Por volta dos séculos XV, XVI e XVII houve progressos importantes em relação à construção dos símbolos para números e operações. Conforme Boyer (1972), muitos tipos de representações diferentes para expressar os números racionais na forma decimal foram utilizados até o século XVI, incluindo a que se insere a vírgula, que acabou se tornando popular pelo matemático escocês John Napier (1550-1617).

Segundo Guelli (1992), apesar do matemático Diofante, que viveu durante o século IV a.C. ser o primeiro a fazer uso sistemático de abreviações nos problemas e nas operações com os números, todas as operações só começaram a ser representadas por símbolos muitos anos depois, entre os séculos XV e XVI. Nessa época, o francês François Viète (1540-1603) começou a representar as operações de adição e subtração pelos símbolos $\bar{p}$ (*plus*) e $\bar{m}$ (*moins*). Mais tarde, ele modificaria esses símbolos por aqueles que conhecemos hoje em dia (“+” e “–“), se inspirando em um truque utilizado por comerciantes, onde eles indicavam num de seus sacos de alimentos a quantidade de quilogramas que eles tinham a mais ou a menos em relação à quantidade inicial. Por exemplo, se no saco havia duas quilogramas a mais, ele anotava nele “+2”; se no saco havia 8 quilogramas a menos, ele anotava “–8”. A consequência dessas novas formas de representação foi também o surgimento dos números negativos, apesar da necessidade de poder representá-los já ocorrer desde a Antiguidade, quando os números eram associados a excessos ou faltas. Para a multiplicação, Viète utilizava a palavra “in”. Enfim, René Descartes (1596-1650) substituiu a palavra “in” pelo símbolo “$\cdot$” para representar uma multiplicação.

Pode-se notar que a evolução histórica da representação dos números e das operações ocorre de forma semelhante ao modo como esses conteúdos são ensinados em sala de aula até o sétimo ano, onde primeiro são ensinados os números naturais, depois os racionais positivos e mais tarde os números negativos no geral, onde em cada um desses conjuntos numéricos são abordadas as propriedades das operações que podem ser realizadas entre números pertencentes a cada um desses conjuntos.

3.2.3. Considerações sobre a Análise Cognitiva

A turma escolhida para a realização da prática é do sétimo ano do ensino fundamental do Colégio de Aplicação da UFRGS. Conforme informação dada pela professora de matemática responsável pela turma, ela é composta por 23 alunos.

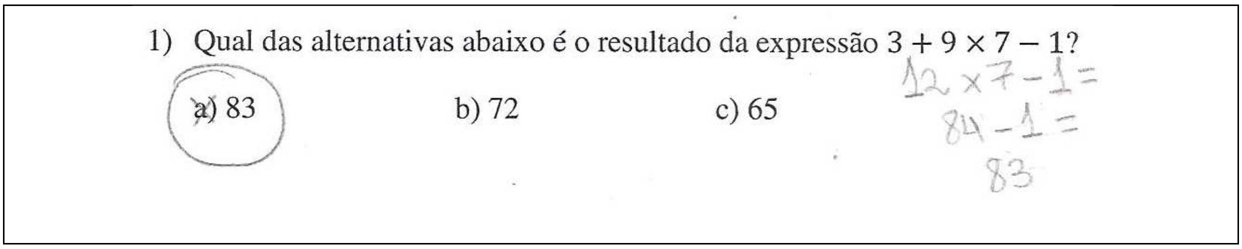
Pode-se notar pelas análises dos livros didáticos que o início do conteúdo de álgebra ocorre, na maioria das vezes, da metade até o final do sétimo ano do ensino fundamental – período no qual será realizada a prática. Levando em consideração que a aprendizagem de expressões numéricas pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico (MODANEZ, 2003), a escolha por uma turma que esteja nesse nível de ensino se deve ao fato de que a prática de expressões numéricas poderá interferir mais diretamente no conteúdo de álgebra, pois os alunos provavelmente já estudaram ou começarão a estudar logo em seguida. Além disso, é provável que estes alunos já tenham estudado os conjuntos numéricos dos inteiros e dos racionais e que isso pode enriquecer a atividade, visto que, então, a possibilidade de números que podem ser operados nas expressões é maior.

Para verificar o que os alunos realmente conhecem sobre expressões numéricas e a ordem das operações que a constituem, antes de começar as atividades foi entregue a cada um deles um questionário com perguntas sobre o assunto para que eles pudessem respondê-las. Eles tiveram em torno de dez a quinze minutos para poder responder às questões.

A primeira pergunta do questionário foi “Qual das alternativas abaixo é o resultado da expressão $3 + 9 \times 7 - 1$?”, onde as alternativas eram: 83 (resultado caso resolvesse as operações de acordo com a ordem em que elas aparecem da esquerda para direita), 72 (resultado caso resolvesse a adição e subtração antes da multiplicação) e 65 (resultado caso resolvesse a multiplicação antes da adição e subtração). Cinco alunos marcaram a primeira opção, dois a segunda e treze a terceira (estavam presentes nessa aula 20 alunos).

Observando a resposta de um dos alunos, vemos que, assim como outros quatro deles, ele realiza a transformação de tratamento no sistema de registro numérico de maneira incorreta, operando de acordo com a ordem em que as operações aparecem da esquerda para a direita na expressão. Observe a figura 1:

Figura 1 – Resolução da primeira pergunta do questionário



1) Qual das alternativas abaixo é o resultado da expressão $3 + 9 \times 7 - 1$?

a) 83 b) 72 c) 65

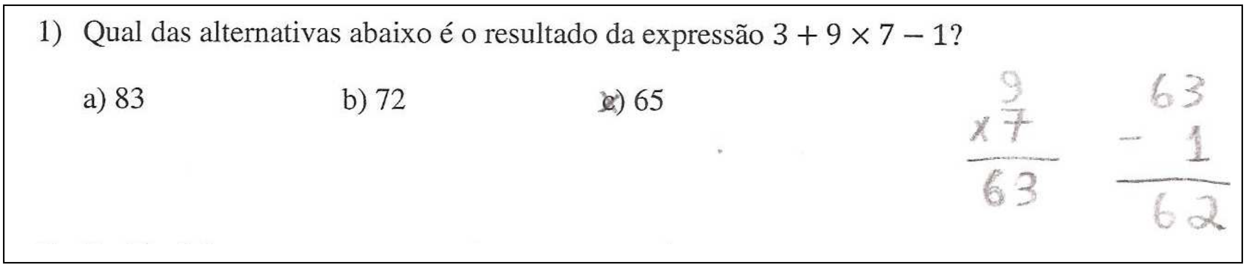
$12 \times 7 - 1 =$
$84 - 1 =$
83

Fonte: arquivo pessoal

Em relação aos dois alunos que escolheram a segunda alternativa, não foram desenvolvidos no questionário os cálculos que os levaram a considerá-la como a correta.

Os alunos que encontraram o valor expresso na última alternativa como a correta tiveram duas maneiras diferentes de resolvê-la, conforme pode ser observado nas figuras 2 e 3:

Figura 2 – Resolução da primeira pergunta do questionário



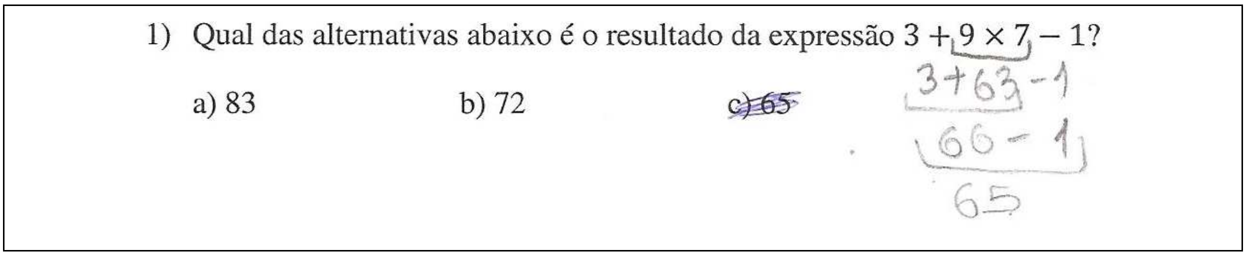
1) Qual das alternativas abaixo é o resultado da expressão $3 + 9 \times 7 - 1$?

a) 83 b) 72 c) 65

$9 \times 7 = 63$
$63 - 1 = 62$

Fonte: arquivo pessoal

Figura 3 – Resolução da primeira pergunta do questionário



1) Qual das alternativas abaixo é o resultado da expressão $3 + 9 \times 7 - 1$?

a) 83 b) 72 c) 65

$3 + 63 - 1$
$66 - 1$
65

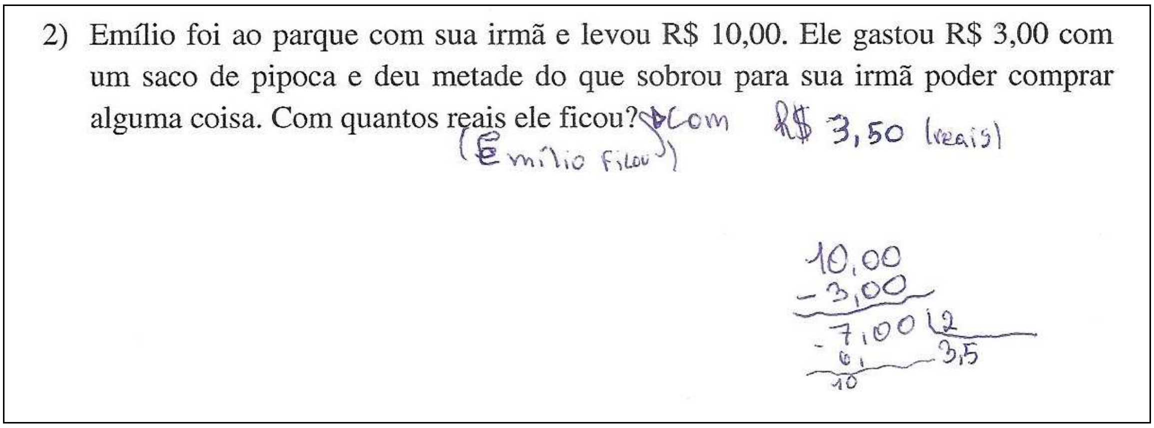
Fonte: arquivo pessoal

Na figura 2, observa-se que o aluno, apesar de considerar a ordem correta em que as operações são realizadas, se sente mais cômodo em expressar o problema com os algoritmos utilizados para efetuar cálculos aritméticos. Logo, pode-se perceber que há uma conversão de registros no que se diz a respeito à maneira como as operações são representadas.

Na segunda resposta, o aluno se preocupa em ilustrar a ordem em que realizou as operações: primeiro a multiplicação entre 9 e 7, depois a adição entre 3 e 63 e por último a subtração entre 66 e 1. Apesar de não importar numa expressão que envolve somente adição e/ou subtração a ordem em que as operações são realizadas, o aluno ilustra que a adição foi efetuada antes da subtração. Como somos capazes de operar somente entre dois números, é provável que simplesmente o aluno tenha achado mais conveniente ilustrar a ordem das operações dessa forma.

A segunda questão envolveu uma situação-problema. Nove alunos conseguiram respondê-la corretamente, sendo que seis deles apresentaram o cálculo que utilizaram para encontrar o resultado. Ao invés de utilizar uma expressão numérica para representar a situação-problema, a maioria desses seis utilizou somente algoritmos para cálculos aritméticos, como no caso que pode ser observado na figura 4:

Figura 4 – Resolução da segunda pergunta do questionário

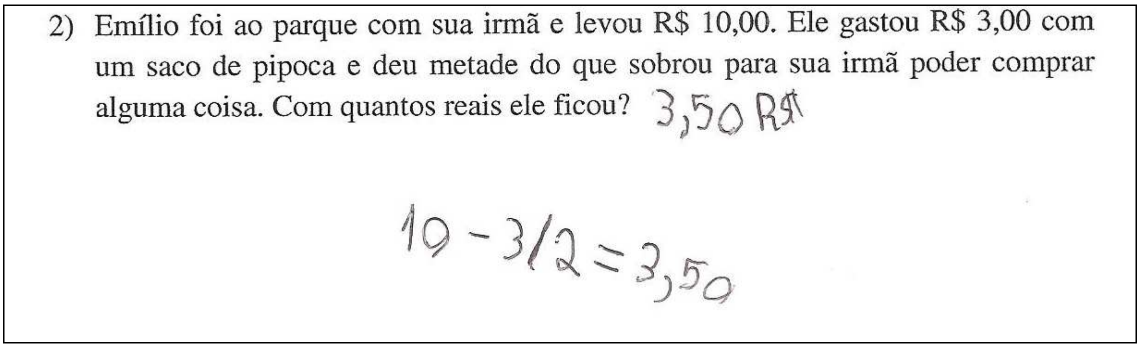

2) Emílio foi ao parque com sua irmã e levou R$ 10,00. Ele gastou R$ 3,00 com um saco de pipoca e deu metade do que sobrou para sua irmã poder comprar alguma coisa. Com quantos reais ele ficou? Com R$ 3,50 (reais) (Emílio ficou)

10,00
− 3,00
7,00 | 2
3,5

Fonte: arquivo pessoal

Somente um dos alunos que acertou o resultado, apresentou o cálculo por meio de uma expressão numérica. Contudo, ele não colocou parênteses onde deveria. Como ele não demonstrou a ordem das operações realizadas na expressão, há a possibilidade dele ter encontrado o resultado de outra maneira e tentou apresentar o cálculo com uma expressão numérica observando que este era o conteúdo abordado no questionário, ou simplesmente realizou as operações de acordo com a ordem em que elas aparecem da esquerda para a direita na expressão. Observe esse caso na figura 5:

Figura 5 – Resolução da segunda pergunta do questionário



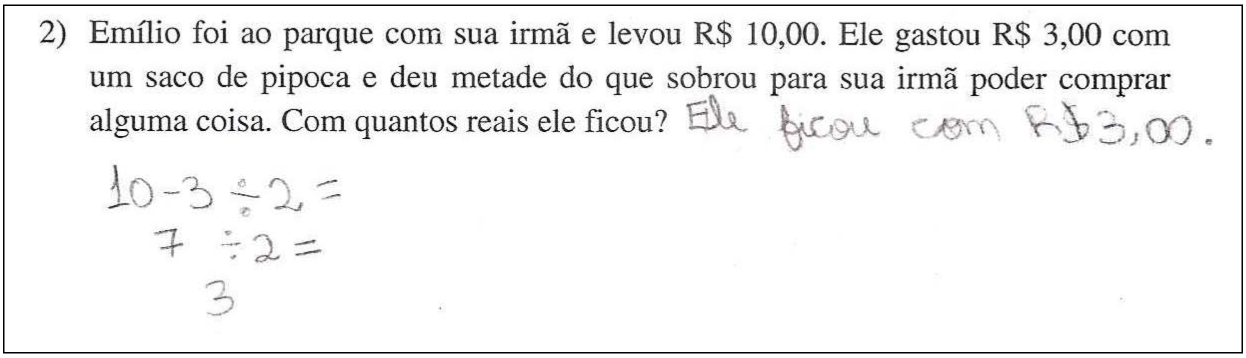
2) Emílio foi ao parque com sua irmã e levou R$ 10,00. Ele gastou R$ 3,00 com um saco de pipoca e deu metade do que sobrou para sua irmã poder comprar alguma coisa. Com quantos reais ele ficou? 3,50 R$

10 - 3/2 = 3,50

Fonte: arquivo pessoal

Conforme foi observado, a maioria dos alunos preferiu representar a situação-problema por meio de algoritmos para cálculos aritméticos. Esse fato pode ser justificado também observando que, com exceção da resposta analisada na figura anterior, todos os alunos que resolveram utilizar a expressão numérica para resolver a situação-problema erraram a resposta, como o caso que ocorreu numa das respostas que pode ser observada na figura 6:

Figura 6 – Resolução da segunda pergunta do questionário



2) Emílio foi ao parque com sua irmã e levou R$ 10,00. Ele gastou R$ 3,00 com um saco de pipoca e deu metade do que sobrou para sua irmã poder comprar alguma coisa. Com quantos reais ele ficou? Ele ficou com R$3,00.

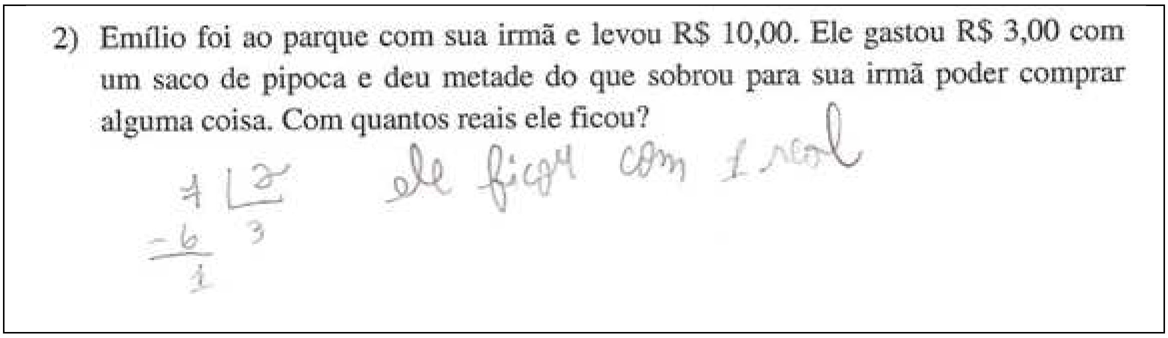
10 - 3 ÷ 2 =
7 ÷ 2 =
3

Fonte: arquivo pessoal

A aluna que escreveu essa resposta é a mesma que no primeiro exercício levou em consideração a ordem em que as operações aparecem da esquerda pra direita na expressão para a sua resolução. Pode-se notar que esse mesmo erro ocorreu nessa questão. Além disso, ao converter o registro da língua natural das informações que constam no enunciado da questão para o numérico, a aluna pode ter escrito a ordem dos números e das operações da expressão de acordo com a sequência em que o objeto que eles representam na situação-problema aparece no enunciado. Pode-se notar que na expressão ela escreve primeiro o número “10”, que corresponde aos “dez reais”, em seguida “– 3”, que corresponde a “gastar 3 reais”, e por último “÷ 2”, que corresponde a “deu metade”.

Na figura 7 tem-se outra resposta dada por um dos alunos:

Figura 7 – Resolução da segunda pergunta do questionário


2) Emílio foi ao parque com sua irmã e levou R$ 10,00. Ele gastou R$ 3,00 com um saco de pipoca e deu metade do que sobrou para sua irmã poder comprar alguma coisa. Com quantos reais ele ficou?

7 |2
-6 3
1

ele ficou com 1 real

Fonte: arquivo pessoal

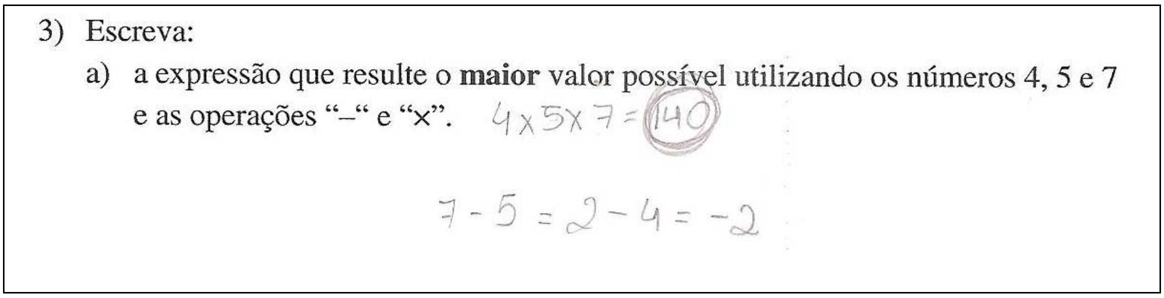
Nesse caso, o aluno não realizou a divisão de 1 por 2 de forma que encontrasse um número decimal como resposta. Além disso, ele considerou o resto da divisão como resposta para o problema, convertendo de maneira incorreta o registro da língua natural, relativo a “quantos reais Emílio ficou”, para o numérico. Isso pode ter ocorrido por ele relacionar os termos “resto” e “quantos reais Emílio ficou”, afinal esta quantidade é a que restou para Emílio.

A terceira questão é dividida em dois itens. Em cada um deles é dada uma combinação de três números e duas operações. Utilizando os números e operações de seus respectivos itens, é solicitada que seja encontrada a expressão numérica que resulte o maior e o menor valor possível para os itens “a” e “b”, respectivamente.

Durante a realização das atividades uma das alunas me perguntou se poderia utilizar a calculadora para responder às questões; respondi que não. Contudo, como no item “b” era preciso utilizar o símbolo de divisão “÷” e continham os números 8, 2 e 3, havia a possibilidade de ocorrer divisões onde o resultado tem casas decimais. Como havia sido combinado que o tempo disponível para resolver as questões era de no máximo 15 minutos, havia pouco tempo para eles efetuarem cálculos mais complexos como esse. Além disso, uma das atividades que seriam propostas posteriormente, e que está relacionada com essa questão, teria que se utilizar a calculadora para poder realizá-la. Por isso, as respostas encontradas pelos alunos no item “b” da terceira questão do questionário não são analisadas neste trabalho.

Em relação ao item “a” dessa questão, nove alunos escreveram corretamente a expressão que resulta o maior valor possível, bem como seu resultado. Daqueles que erraram a resposta da questão, dois interpretaram o enunciado de uma maneira que não era a esperada. No exemplo da figura 8, onde, ao converter o registro escrito da língua natural para o numérico, o aluno considerou que o número de vezes que poderia ser utilizada a operação de multiplicação na expressão era maior que um:

Figura 8 – Resolução da terceira pergunta do questionário


3) Escreva:
a) a expressão que resulte o **maior** valor possível utilizando os números 4, 5 e 7 e as operações “–“ e “×”.

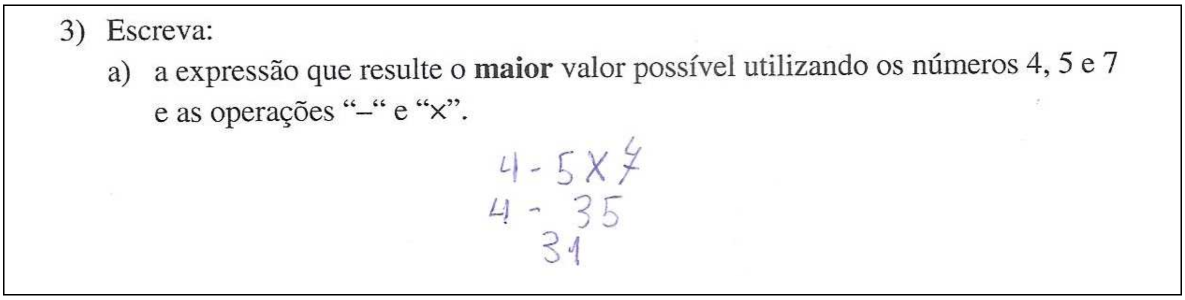
4x5x7 = 140

7 - 5 = 2 - 4 = -2

Fonte: arquivo pessoal

Na figura 9, nota-se um erro em relação à interpretação de uma subtração:

Figura 9 – Resolução da terceira pergunta do questionário


3) Escreva:
a) a expressão que resulte o **maior** valor possível utilizando os números 4, 5 e 7 e as operações “–“ e “×”.

4 - 5 X 7

4 - 35

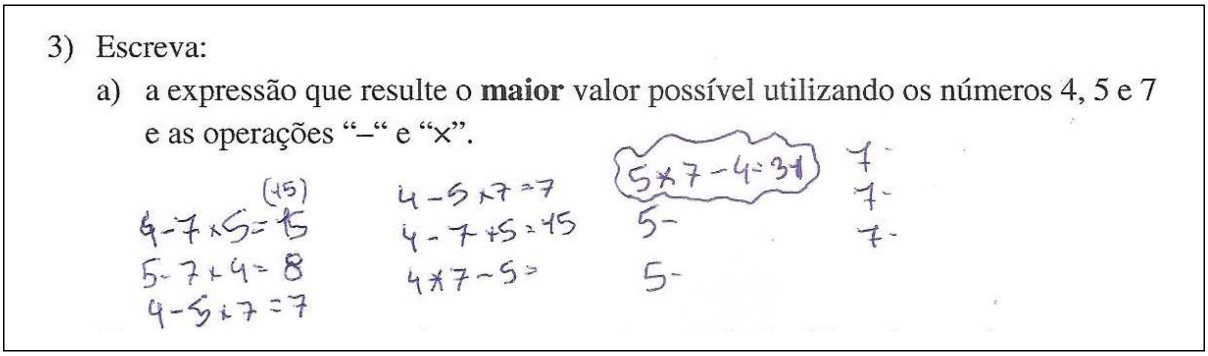
31

Fonte: arquivo pessoal

Pode-se observar que o aluno não soube diferenciar a ordem dos números numa subtração, excluindo a possibilidade de se ter um número negativo como resultado.

Na figura 10 tem-se a resposta de um dos alunos e que está correta:

Figura 10 – Resolução da terceira pergunta do questionário


3) Escreva:

a) a expressão que resulte o **maior** valor possível utilizando os números 4, 5 e 7 e as operações “–“ e “x”.

(45)
4-7×5=15
5-7×4=8
4-5×7=7

4-5×7=7
4-7×5=45
4×7-5=

5×7-4=31
5-
5-

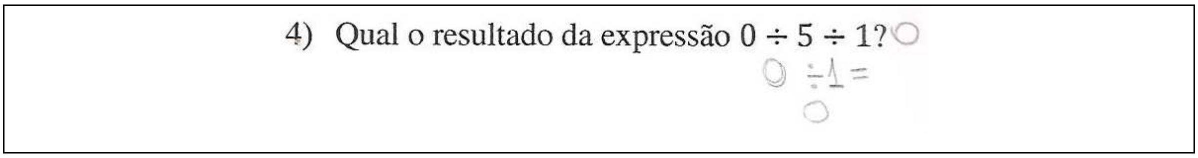
7-
7-
7-

Fonte: arquivo pessoal

Apesar de ser solicitado que os alunos escrevam as resoluções das questões na folha que foi entregue do questionário, esse foi o único aluno que registrou nesta questão as expressões que utilizou para comparar qual resulta o maior valor.

Nas figuras 11 e 12 têm-se dois tipos de resposta diferentes para a quarta questão, que também foram os que mais os alunos responderam:

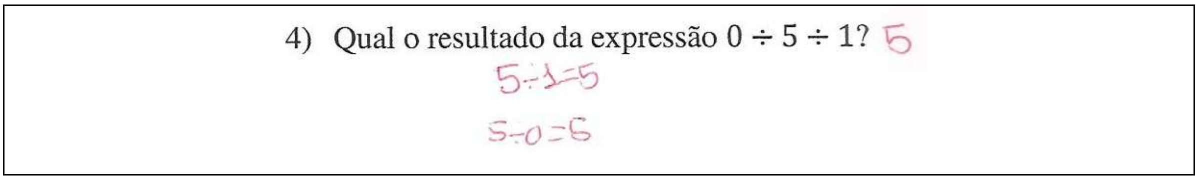
Figura 11 – Resolução da quarta pergunta do questionário


4) Qual o resultado da expressão 0 ÷ 5 ÷ 1? 0

0 ÷ 1 =
0

Fonte: arquivo pessoal

Figura 12 – Resolução da quarta pergunta do questionário


4) Qual o resultado da expressão 0 ÷ 5 ÷ 1? 5

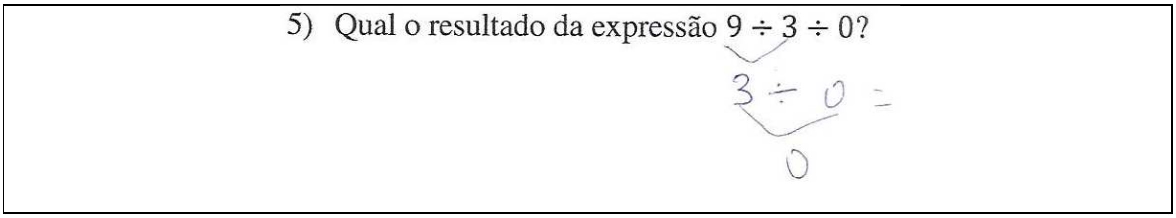
5÷1=5
5÷0=5

Fonte: arquivo pessoal

Enquanto na figura 11 o aluno encontrou a resposta correta para a questão, na 12 pode ser observado um erro bastante comum, no qual os alunos confundem a função do zero numa operação de divisão com a do um. Além disso, foi invertida a ordem dos números na operação de divisão entre zero e cinco. Provavelmente esse erro ocorre, pois os cálculos de divisão vistos na aritmética utilizam um numerador maior ou igual ao denominador e, em alguns casos, o aluno ainda deve estar com esse conceito internalizado.

Na quinta questão, é questionado o valor de uma expressão na qual divide um número por zero. Nenhum aluno respondeu que não existia valor para essa expressão. A maioria deles, respondeu que o resultado era igual à zero, conforme uma das respostas que pode ser observada na figura 13:

Figura 13 – Resolução da quinta pergunta do questionário



5) Qual o resultado da expressão $9 \div 3 \div 0$?

$3 \div 0 =$

0

Fonte: arquivo pessoal

Além desse, outros resultados incorretos também ocorreram. Um deles foi três, onde os alunos novamente confundiram a função do zero com a de um em uma divisão.

4. PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES

4.1. Aula 1 – Questão envolvendo uma Situação-Problema

Com a intenção de provocar o interesse dos alunos com as atividades propostas e também motivá-los a realizá-las, o primeiro encontro começou sendo proposta uma situação-problema a eles, na qual envolve a aplicação do conhecimento sobre o conteúdo de expressões numéricas para poder resolvê-lo.

Antes de propô-la, foi escrito no quadro a seguinte expressão numérica $4 + 7 \times 3$ e é perguntado qual o seu resultado. O objetivo é tentar criar uma discussão em sala de aula sobre o modo como é calculada uma expressão numérica. Além da resposta correta para essa questão, que é 16, é provável que os alunos também respondam que o resultado da expressão é 33 caso interpretem a ordem das operações numa expressão numérica de acordo com a ordem em que elas aparecem da esquerda pra direita.

A situação-problema é a seguinte:

1) *Um grupo de amigos foi à lanchonete e comprou três pasteis, cinco refrigerantes, um hambúrguer e quatro cachorros-quentes. A tabela de preços da lanchonete era dada da seguinte forma:*

	Preço
Pastel	*R$ 2,00*
Hambúrguer	*R$ 2,50*
Cachorro-Quente	*R$ 4,00*
Refrigerante	*R$ 3,00*

a) *Qual o valor total pago pelo grupo? (Resposta: R$ 39,50 – Expressão Numérica utilizada:* ***3 × 2,00 + 5 × 3,00 + 1 × 2,50 + 4 × 4,00****)*

b) *No dia seguinte, dois amigos resolveram comprar uma unidade de cada um dos itens acima. Na hora de pagar, cada um pagou exatamente a metade do valor total da compra. Quanto cada um pagou? (Resposta: R$ 5,75 – Expressão Numérica utilizada:* ***(2,00 + 2,50 + 4,00 + 3,00) ÷ 2*** *)*

As duas questões apresentadas iniciam o assunto que é trabalhado nas aulas seguintes e têm por objetivo chamar a atenção ao fato de que a ordem das operações influencia no resultado da expressão numérica, além de, em uma situação contextualizada, significar a hierarquia das operações na resolução da expressão numérica. Após resolver com o auxílio dos alunos as duas questões no quadro, o debate sobre a expressão escrita no quadro no começo da aula foi retomado para que eles possam analisar qual a sua resolução.

4.2. Aula 2 – Jogo das Operações

Nessa aula, os alunos participaram do Jogo das Operações. Esse jogo surgiu durante um curso de professores na cidade Ipatinga, em Minas Gerais, e sua ideia foi retomada pela professora Ainara Pinheiro da Costa, de Belo Horizonte. Esse jogo foi aplicado para um grupo de alunos entre 10 e 11 anos numa experiência relatada no texto "Calculadoras e outras geringonças na escola" de Araújo e Soares (2002). A lista dos materiais utilizados no jogo aplicado nesta aula foram os seguintes:

- 40 cartas com números de 0 a 9, onde cada número se repetirá quatro vezes. Essas cartas são de cor azul;
- 24 cartas com operações (+, –, × e ÷), onde cada uma das operações se repetirá seis vezes. Essas cartas são de cor amarela;
- 40 cartas, que serão muito menos largas que os outros dois tipos, contendo parênteses. Essas cartas são de cor verde;
- Calculadoras (uma para cada aluno).

Para essa atividade, a turma foi dividida em seis grupos. A cor das cartas serve para diferenciar os dois tipos quando forem embaralhadas.

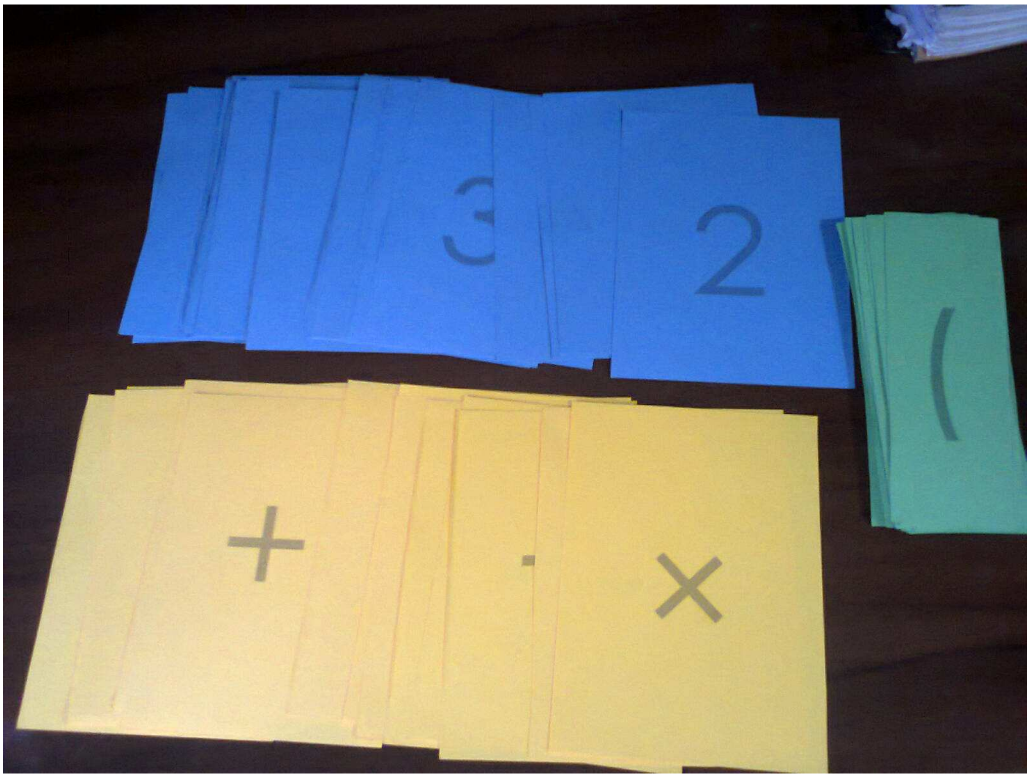
As regras do jogo são as seguintes:

- São divididos dois montes: um para as cartas de números e outra para as de operações. Cada um dos montes é embaralhado;
- Em cada rodada, cada grupo retira três cartas do monte de números e duas do de operações. Dessa forma, cada grupo obtém três números e duas operações (que podem não ser necessariamente diferentes entre si). Esse número de cartas pode ser aumentado nas rodadas posteriores caso os alunos não apresentarem dificuldades com a utilização da quantidade padrão de cartas;

- Alternando os números e operações da forma como quiser, utilizando parênteses quando e onde achar conveniente, um grupo obtém uma expressão numérica. Com o auxílio da calculadora, o grupo encontra o resultado de sua expressão e toma nota dela e de seu resultado. A rodada termina quando os grupos encontrarem e anotarem os resultados de suas expressões numéricas. Além disso, um integrante de cada grupo escreve no quadro a expressão escolhida por ele e seu grupo e o resultado encontrado dela para que sua resolução possa ser debatida com o professor e com os demais alunos.
- O jogo contém quatro rodadas. Terminadas as quatro rodadas, são somados os resultados das expressões de cada rodada de cada um dos grupos. O grupo que obtiver a maior soma vence. Em função disso, a estratégia ideal para se vencer o jogo é em cada rodada o grupo escolher a expressão que resultar o maior valor de todas as possíveis com aquela combinação de números e operações que ele obteve.

Observe na figura 14 uma imagem das cartas que foram utilizadas para esta atividade:

Figura 14 – Cartas utilizadas no Jogo das Operações



Pode-se observar que este é um jogo onde a sorte influencia para que o grupo consiga uma pontuação alta nas rodadas, visto que não é possível escolher uma expressão que resulte um valor alto se houver determinadas combinações entre números e operações numa rodada, conforme será visto mais adiante durante o relato das experiências em sala de aula. Contudo, a sorte não determina o resultado final e a ordem dos números e operações também influenciam. Encontrar a expressão numérica que resulta em maior valor pode fazer com que os alunos reflitam sobre as propriedades das operações e a utilização dos parênteses.

Para que as habilidades cognitivas dos alunos possam ser analisadas, foi solicitado que cada um deles anote em um rascunho as expressões utilizadas durante o jogo, bem como outras anotações consideradas importantes por eles durante a participação da atividade. Para facilitar a análise da parte escrita, foi pedido que os rascunhos estejam organizados, preferencialmente de forma que as anotações estejam separadas de acordo com suas respectivas rodadas em que foram observadas.

4.3. Aula 3 – Utilização da Planilha Eletrônica

Depois de participarem do Jogo das Operações, os alunos utilizaram uma planilha eletrônica que foi desenvolvida por mim para a próxima atividade: Planilha Eletrônica para Expressões Numéricas[1]. Com o auxílio dessa planilha, os alunos puderam observar, explorar e investigar as expressões numéricas e argumentar sobre determinadas propriedades que são analisadas e que possuem relações com o desenvolvimento do Jogo das Operações. Para orientar os alunos a verificarem essas propriedades e fenômenos, eles responderam a algumas questões que constam na própria planilha e também numa folha de papel que foi entregue a eles e que está no anexo deste trabalho de conclusão.

Assim como a atividade com o Jogo das Operações, esta também tem caráter investigativo. Porém, as questões desta atividade podem abordar uma quantidade maior de propriedades e fenômenos que ocorrem nas expressões numéricas, nas quais foram consideradas as mais importantes, e que não puderam ser analisadas pelos alunos durante o Jogo das Operações. Além disso, as questões podem induzir os alunos a se questionarem sobre essas propriedades e fenômenos caso essa curiosidade não foi despertada durante o

1 Para realizar o *download* das versões desta planilha, mais atualizadas em relação a esta que foi utilizada neste trabalho, para *Microsoft Excel* e *Apache OpenOffice Calc*, entre na aba “Download” nos seguintes links:
- http://guivarella.pbworks.com/w/file/71534864/express%C3%B5es_num%C3%A9ricas.xlsx
- http://guivarella.pbworks.com/w/file/71534862/express%C3%B5es_num%C3%A9ricas.ods

jogo. Por essa razão, foi decidido que as atividades teriam essa sequência: primeiro o Jogo das Operações e depois a Planilha Eletrônica para Expressões Numéricas.

Na escola onde a prática foi aplicada, os alunos utilizam em sala de aula *laptops* que são fornecidos pelo projeto PROUCA[2]. Esses computadores foram utilizados por cada um dos alunos para realizar a atividade com a Planilha Eletrônica para Expressões Numéricas.

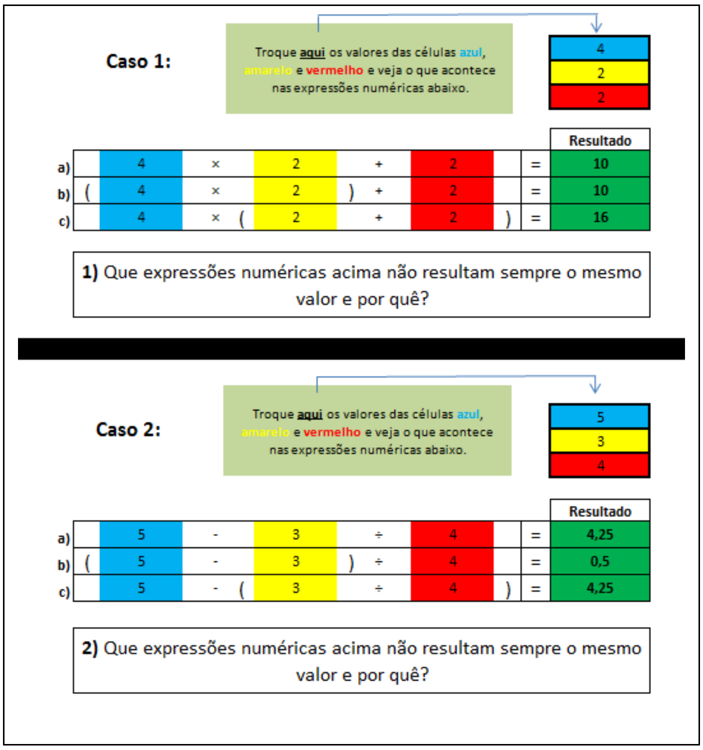
A planilha eletrônica contém quatro abas, onde cada aba é dividida em casos. Cada caso possui um conjunto de expressões numéricas semelhantes que são constituídas pelos mesmos números e operações e também algumas perguntas referentes ao respectivo caso. Esses números podem ser modificados pelos alunos de forma que o resultado de cada expressão semelhante também se altere. Modificando os números e interpretando as perguntas de cada caso, os alunos podem observar os resultados de cada expressão de forma que ele possa responder às questões com base nas observações realizadas. Cada expressão contida nessa planilha eletrônica contém três números e duas operações.

A interface de cada caso contém acima das expressões três células com os números que estão sendo utilizados para formar essas expressões e abaixo delas as questões referentes ao caso. Essas células com os números são as únicas que os alunos podem modificar em toda a planilha eletrônica, pois as demais estão protegidas para evitar que eles modifiquem as funções que atribuem os valores dos números ilustrados nas expressões com os que foram digitados nas células acima, a célula dos resultados com suas respectivas expressões, etc.. Com essas funções, ao modificar as três células acima por um novo valor, automaticamente as expressões abaixo e seus resultados também são modificados. Para auxiliar na visualização, os números utilizados nas expressões estão com a mesma cor de fundo utilizada nas células que podem ser modificadas (azul, amarelo e vermelho). As células que apresentam o resultado de cada expressão estão com fundo de cor verde.

As quatro abas da planilha eletrônica são: “Casos 1 e 2”, “Adição e Multiplicação”, “Subtração e Divisão” e “Divisão 2”. Observe na figura 15 a interface da aba “Casos 1 e 2”:

[2] O PROUCA (Programa Um Computador por Aluno) é um projeto Educacional que tem como uma das finalidades promover a inclusão digital. Graças ao projeto, no Brasil foram fornecidos 150.000 *laptops* educacionais a aproximadamente 300 escolas públicas selecionadas por Estados e Municípios. Além de distribuir os *laptops* para alunos e professores, as escolas recebem infraestrutura para acesso à internet, capacitação de gestores e professores no uso da tecnologia. Mais informações no site: http://www.uca.gov.br/institucional/.

Figura 15 – Interface da aba “Casos 1 e 2”

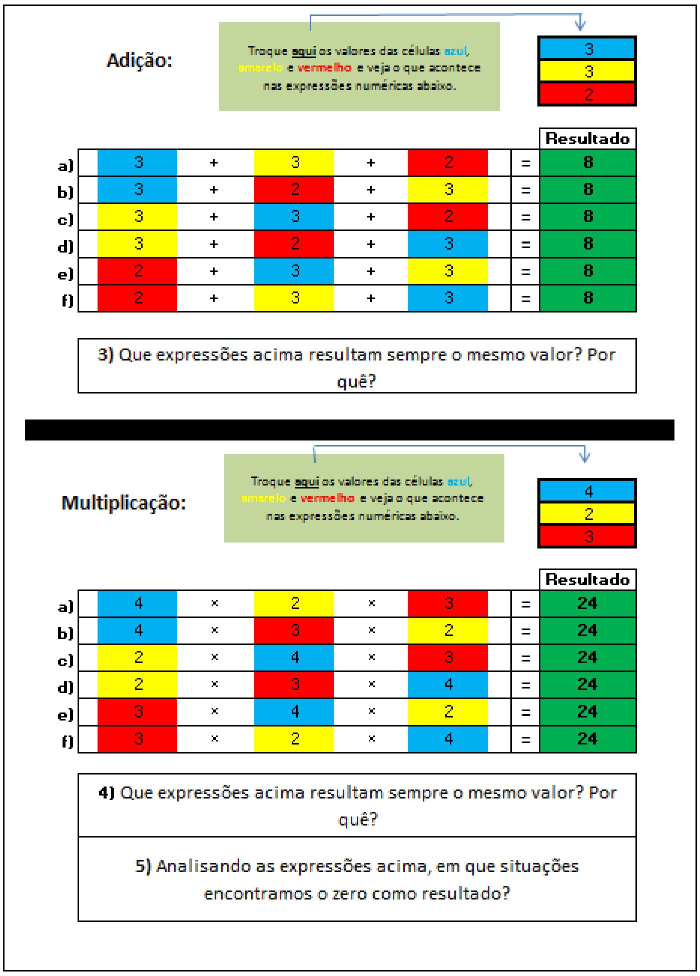


Como pode ser observada, ela é dividida em dois casos: 1 e 2. O caso 1 tem três expressões, onde cada uma possui as operações de multiplicação e adição, nessa ordem, da esquerda pra direita. O que difere cada uma é que a primeira não possui nenhum parênteses, na segunda possui entre os dois números que serão multiplicados e o terceira entre os números que serão adicionados na expressão. Esses parênteses poderão ser modificados para chaves e parênteses caso for utilizado números negativos para a expressão, de forma que auxilie os alunos na visualização. A questão referente ao caso 1 é: “Que expressões numéricas acima não resultam o mesmo valor e por quê?”.

O caso 2 tem três expressões também. Porém, nesse caso as expressões possuem as operações subtração e divisão, nessa ordem, da esquerda pra direita. A primeira expressão não contém parênteses, a segunda contém entre os números que serão subtraídos e na terceira entre os números que serão divididos. A mesma pergunta do caso 1 será feita para esse.

Observe na figura 16 a interface da segunda aba, chamada de “Multiplicação e Adição”:

Figura 16 – Interface da aba “Adição e Multiplicação”



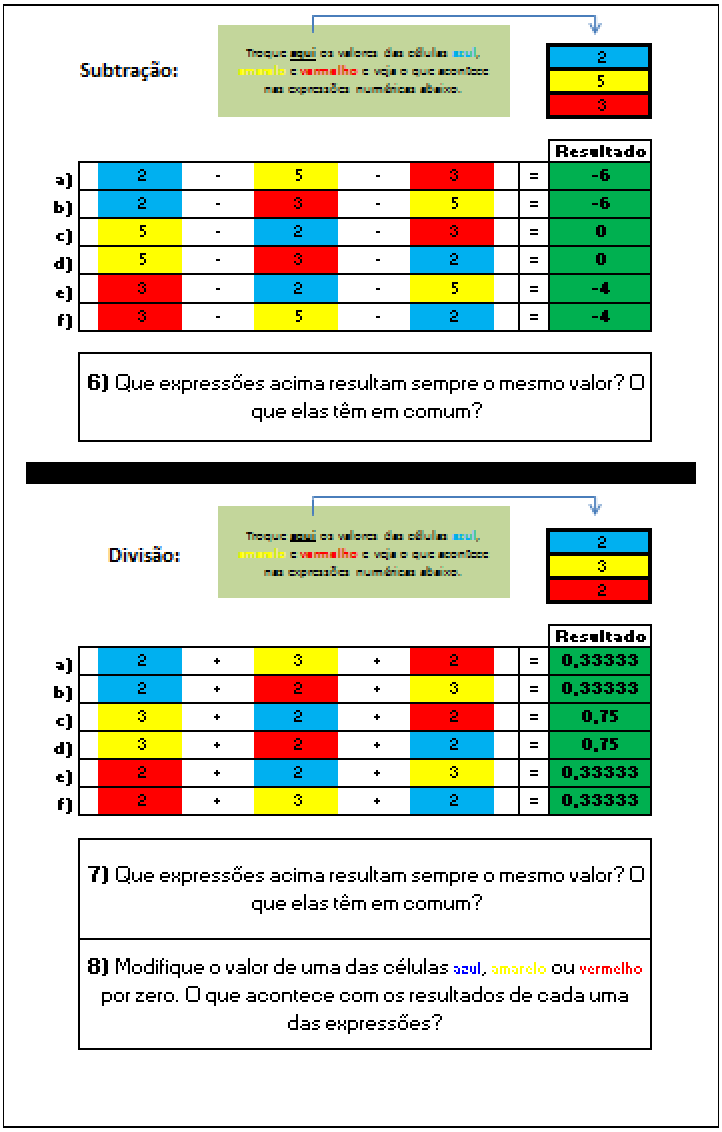
Essa aba é dividida em dois casos. O caso “Adição” contém seis expressões, onde as duas operações para cada uma delas é de adição. O que diferencia cada uma delas é a ordem em que os números aparecem. O caso “Multiplicação” é semelhante: ao invés de adição, as operações são de multiplicação.

A questão do caso “Adição” é: “Que expressões acima resultam sempre o mesmo valor? Por quê?”. Além de conter a mesma questão do caso anterior, o caso “Multiplicação” também contém a seguinte: “Analisando as expressões acima, em que situações encontramos o zero como resultado?”.

Em ambos os casos, as perguntas têm como objetivo induzir os alunos a verificar a propriedade de comutatividade para adição e multiplicação intuitivamente. Além disso, no caso “Multiplicação”, os alunos podem verificar que um produto só é igual a zero se pelo menos um fator dessa multiplicação é igual a zero.

Observe na figura 17 a interface da terceira aba, que é chamada de “Subtração e Divisão”:

Figura 17 – Interface da aba “Subtração e Divisão”



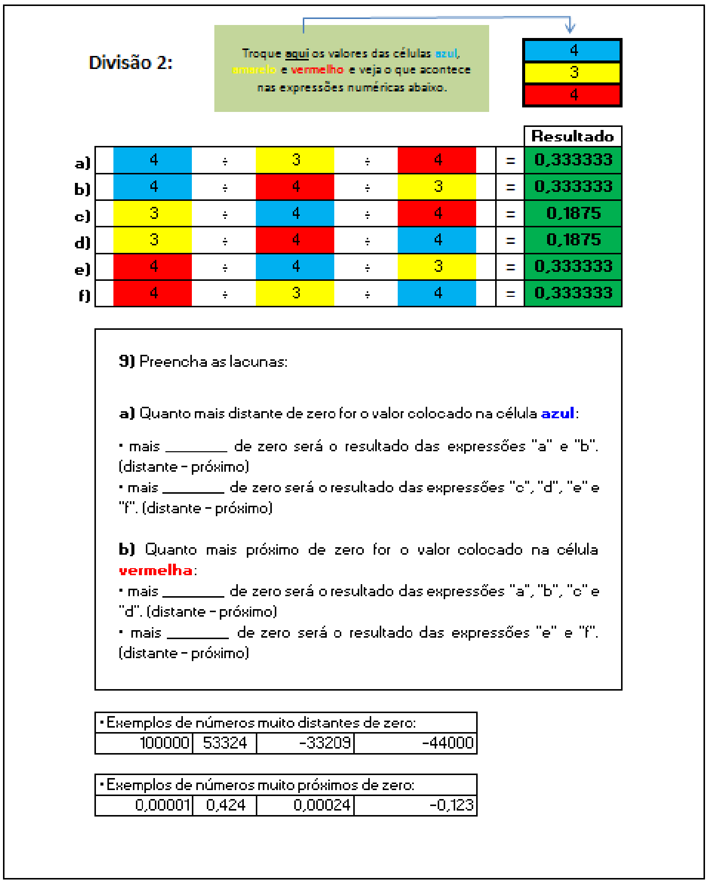
Essa aba é dividida em dois casos. Assim como nos casos “Adição” e “Multiplicação”, os casos “Subtração” e “Divisão” também contêm seis expressões com duas operações de subtração e divisão, respectivamente. São utilizadas para cada um dos dois casos as mesmas perguntas dos dois anteriores. Além disso, o caso “Divisão” contém outra pergunta também: “Modifique o valor de uma das células azul, amarelo ou vermelho por zero. O que acontece com os resultados de cada uma das expressões?”.

Observando esses dois casos, os alunos podem perceber intuitivamente que a propriedade de comutatividade não é válida para subtração e divisão, ao contrário do que pode ser notado para adição e multiplicação, e que também existem três conjuntos de duas expressões onde uma delas resulta sempre no mesmo valor que a outra e que estas duas expressões começam sempre pelo mesmo número entre si. Isso ocorre, pois a ordem dos números subtraídos de uma subtração não interfere no resultado final dela, assim como a ordem dos denominadores de uma divisão.

Em relação à segunda pergunta do caso “Divisão”, quando for substituído um dos números utilizados na expressão por zero, aparece a seguinte mensagem para o resultado das expressões em que o zero é divisor: “não existe!”. Normalmente quando é feito um cálculo de divisão por zero numa célula de uma planilha eletrônica, aparece uma mensagem específica nessa célula, diferente da citada acima, que significa que não é possível efetuar o cálculo, pois não se pode dividir um número por zero. Utilizando as funções da planilha eletrônica, foi configurado para que a Planilha Eletrônica para Expressões Numéricas mostre a mensagem acima quando ocorrer essa situação, de forma que os alunos possam compreender o fenômeno com mais facilidade.

Observe na figura 18 a interface da última aba, que recebe o nome de “Divisão 2”:

Figura 18 – Interface da aba "Divisão 2"



Ao contrário das outras, essa aba contém somente um caso. As expressões desse caso são as mesmas utilizadas no "Divisão", porém ela contém o seguinte exercício que não foi abordado no caso anterior:

Preencha as lacunas:

a) Quanto mais distante de zero for o valor colocado na célula azul:

- mais _____ de zero será o resultado das expressões "a" e "b". (distante – próximo)

- mais _____ de zero será o resultado das expressões "c", "d", "e" e "f". (distante – próximo)

b) Quanto mais próximo de zero for o valor colocado na célula vermelha:

- mais _____ de zero será o resultado das expressões "a", "b", "c", e "d". (distante – próximo)

- mais _____ de zero será o resultado das expressões "e" e "f". (distante – próximo)"

Para auxiliar os alunos a compreender melhor esse exercício, abaixo dele estão exemplos de números distantes e próximos de zero. O objetivo dessas perguntas é de estimular os alunos a verificar as relações entre os numeradores e denominadores de uma expressão numérica com o seu quociente.

Assim como as calculadoras, as células de uma planilha eletrônica têm um limite máximo de caracteres que um número pode assumir. Para representar valores que demandam uma quantidade grande de caracteres, a planilha eletrônica e algumas calculadoras utilizam a notação científica para representá-los de uma forma mais compacta. Contudo, a notação utilizada nas planilhas eletrônicas é diferente da convencional. Por exemplo, caso o número digitado numa célula de uma planilha eletrônica for 0,0000000001, a célula será representada por 1E-10. No caso de número grande, como 120.000.000.000.000, a célula irá representá-la como 1,2E+14. O "E" utilizado nesse tipo de notação tem o significado de exponencial. Em outras palavras, quando for expresso numa célula um número precedido por "E", que por sua vez antecede um sinal positivo ou negativo e em seguida outro número, significa, na maneira convencional, o primeiro número multiplicado por dez elevados à potência positiva ou negativa do último número expresso na célula. Note que, por exemplo, 120.000.000.000.000 consta na célula como 1,2E+14, que corresponde a $1{,}2 \times 10^{14}$.

Se os alunos se depararem com essa situação, será explicado a eles o significado da notação científica da planilha eletrônica relacionando com a da maneira convencional.

5. EXPERIMENTAÇÃO

5.1. Aula 1 – Questão envolvendo uma Situação-Problema

Nos vinte minutos iniciais da primeira aula, me apresentei aos alunos, expliquei qual conteúdo seria trabalhado nas atividades propostas e entreguei para cada um deles uma folha de papel com o questionário para a análise prévia. Quando comentei sobre o conteúdo de expressões numéricas, perguntei se eles já haviam estudado sobre ele. Um dos alunos me falou que eles já viram bastante esse conteúdo em sala de aula.

Depois que recolhi todos os questionários respondidos, falei o que eram expressões numéricas. A definição utilizada foi “Expressões numéricas, como o próprio nome já diz, são expressões utilizadas na matemática para representar alguma situação com números e símbolos das operações matemáticas, como multiplicação, adição, etc.”. Dei alguns exemplos de expressões numéricas no quadro e, como já havia notado que os alunos não aparentavam ter dificuldades com o conteúdo, perguntei como calculava uma expressão que continha uma adição, uma multiplicação e uma subtração, nesta ordem, da esquerda para a direita. A maioria respondeu que era preciso efetuar a multiplicação primeiro, o que levou a crer que não era necessário aprofundar muito na questão de como se resolve uma expressão numérica observando a ordem das operações. Depois de realizar no quadro a multiplicação e obtendo uma nova expressão com adição e subtração, um dos alunos me perguntou qual operação, nesse caso, deveria efetuar primeiro. Respondi: tanto faz, pode começar tanto na adição quanto na subtração. Contudo, acreditei que minha afirmação poderia confundir os alunos e em seguida sugeri que fizessem a primeira operação que aparecesse da esquerda para a direita.

Em função disso, resolvi já propor a situação-problema a eles. Como a ideia inicial dessa aula era reservar o tempo final dela para iniciar o Jogo das Operações, pensei em ditar a eles a situação-problema com o objetivo de que eles copiassem com mais rapidez o exercício. Porém, várias vezes os alunos me pediam para repetir novamente alguma parte da questão. Preocupando-me com que todos tenham no caderno a questão, resolvi interromper o andamento da aula diversas vezes para chegar próximo ao aluno que me pedia ajuda para repetir essas partes. Porém, muitos alunos começaram a conversar entre si durante aula enquanto isso.

Quando resolvi dar início à resolução do exercício, os alunos já estavam bastante agitados e, mesmo eu pedindo atenção deles, eles não fizeram silêncio para ficar atentos à resolução. Contudo, continuei explicando a questão e como se resolviam os dois itens, que eram os seguintes:

> ***1)*** *Um grupo de amigos foi à lanchonete e comprou três pasteis, cinco refrigerantes, um hambúrguer e quatro cachorros-quentes. A tabela de preços da lanchonete era dada da seguinte forma:*

	Preço
Pastel	*R$ 2,00*
Hambúrguer	*R$ 2,50*
Cachorro-Quente	*R$ 4,00*
Refrigerante	*R$ 3,00*

> ***a)*** *Qual o valor total pago pelo grupo?*
> ***b)*** *No dia seguinte, dois amigos resolveram comprar uma unidade de cada um dos itens acima. Na hora de pagar, cada um pagou exatamente a metade do valor total da compra. Quanto cada um pagou?*

Ao questionar como ficaria a expressão numérica para encontrar o resultado do item “a”, os poucos alunos que estavam participando da aula responderam corretamente que era a soma dos produtos $3 \times 2{,}00$, $5 \times 3{,}00$, $1 \times 2{,}50$ e $4 \times 4{,}00$. Pedi para que me ditassem a expressão para eu escrevê-la no quadro e ela ficou da seguinte forma: $3 \times 2{,}00 + 5 \times 3{,}00 + 1 \times 2{,}50 + 4 \times 4{,}00$. Perguntei se era necessário colocar parênteses em cada um dos produtos. Um dos alunos falou que não era preciso, mas que se eu optasse em colocar, poderia fazê-lo.

No item “b” da questão, muitos sabiam o valor em reais que resultaria o problema, que é $5{,}75$, mas não sabiam que expressão poderia ser utilizada no problema para representá-lo. Escrevi no quadro a seguinte expressão que foi ditada por um dos alunos: $2{,}00 + 2{,}50 + 4{,}00 + 3{,}00 \div 2$. Antes que eu resolvesse no quadro essa expressão, outros alunos já haviam notado que aquela expressão não resultava $5{,}75$, e sim $10{,}00$. Esse aluno que me ditou a expressão acima tentou me explicar como era outra expressão que ele acreditava que poderia ser a que resultasse no valor correto do problema; essa expressão envolvia o uso de parênteses. Pedi para que ele fosse ao quadro colocar os parênteses. Ficamos com a seguinte expressão: $(2{,}00 + 2{,}50) + (4{,}00 + 3{,}00) \div 2$. Resolvi essa expressão e, novamente, encontrei um valor diferente do resultado esperado: $8{,}00$. O mesmo aluno me disse que, para que a expressão resultasse o valor correto, talvez devesse colocar os parênteses entre $2{,}00$ e $3{,}00$, somente. Testamos essa possibilidade e, enfim, encontramos a expressão que resulta $5{,}75$, que é a seguinte: $(2{,}00 + 2{,}50 + 4{,}00 + 3{,}00) \div 2$.

Concluindo este último item, comentei que foi necessário colocar os parênteses porque primeiro devíamos encontrar a soma de todos os preços para depois dividi-lo por dois, de forma que encontrássemos exatamente a metade dessa soma. Contudo, assim como ocorreu durante todos os momentos em que tentei resolver os exercícios com os alunos, a maioria deles ficou conversando entre si e poucos deles participaram da resolução deste exercício. Consequentemente, não foi possível observar se eles entenderam por que a expressão ficou dessa forma.

No final da aula, pedi para que fizessem cinco grupos de quatro alunos para o Jogo das Operações. Como eles estavam indecisos com a formação dos grupos e, com isso, demoraram para formá-los, não foi possível realizar a atividade do jogo nesta aula. Pedi para que formassem os grupos para a próxima aula e que trouxessem calculadoras para a realização da atividade que seria proposta.

5.2. Aula 2 – Jogo das Operações

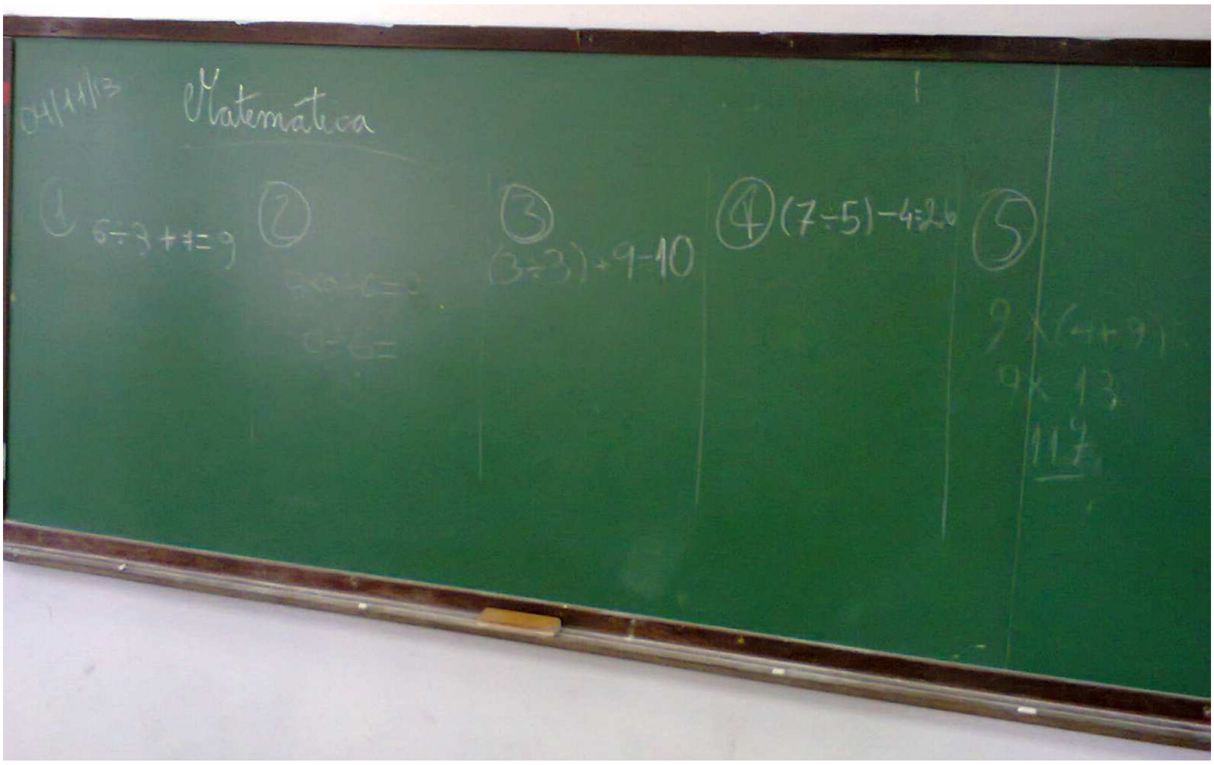
Nessa aula foi realizado o Jogo das Operações e teve a participação da professora regente da turma para me auxiliar na organização do jogo. Foram formados seis grupos, onde dois deles continha três alunos e o restante quatro. Cada um desses grupos, segundo a professora, já havia sido formado nessa turma para cada atividade de matemática que seria proposta para os alunos durante o ano. Em função disso, cada grupo tinha uma numeração que será utilizada neste trabalho para identificação. Como o número de calculadoras que a escola dispunha não era suficiente para cada aluno realizar esta atividade, permiti que eles utilizassem a calculadora do celular e o *laptop* para poder efetuar os cálculos das expressões.

Iniciei a aula explicando as regras do jogo. No final de cada rodada, um integrante de cada grupo foi ao quadro escrever a expressão escolhida e o resultado encontrado. Foi decidido que os pontos de cada rodada seriam atribuídos ao verdadeiro resultado da expressão numérica escolhida, inclusive se o resultado encontrado pelo grupo estiver errado. Escrevi no quadro uma tabela onde seriam preenchidas as pontuações que cada grupo obteve em cada uma das quatro rodadas e o total de pontos de cada um.

Após serem explicadas as regras, eu e a professora distribuímos as cartas para dar início à primeira rodada. Foi determinado que os alunos tivessem no máximo dez minutos para encontrar a expressão. Durante a primeira rodada, alguns alunos me questionaram sobre o que era preciso fazer no jogo.

Passados os dez minutos, um aluno de cada grupo foi ao quadro escrever a expressão obtida para essa rodada. Observe na figura 19 a imagem do quadro-negro com as expressões escritas pelos alunos nessa rodada:

Figura 19 – Expressões escolhidas na primeira rodada do Jogo das Operações



Fonte: arquivo pessoal

As expressões e resultados obtidos nesta rodada foram:

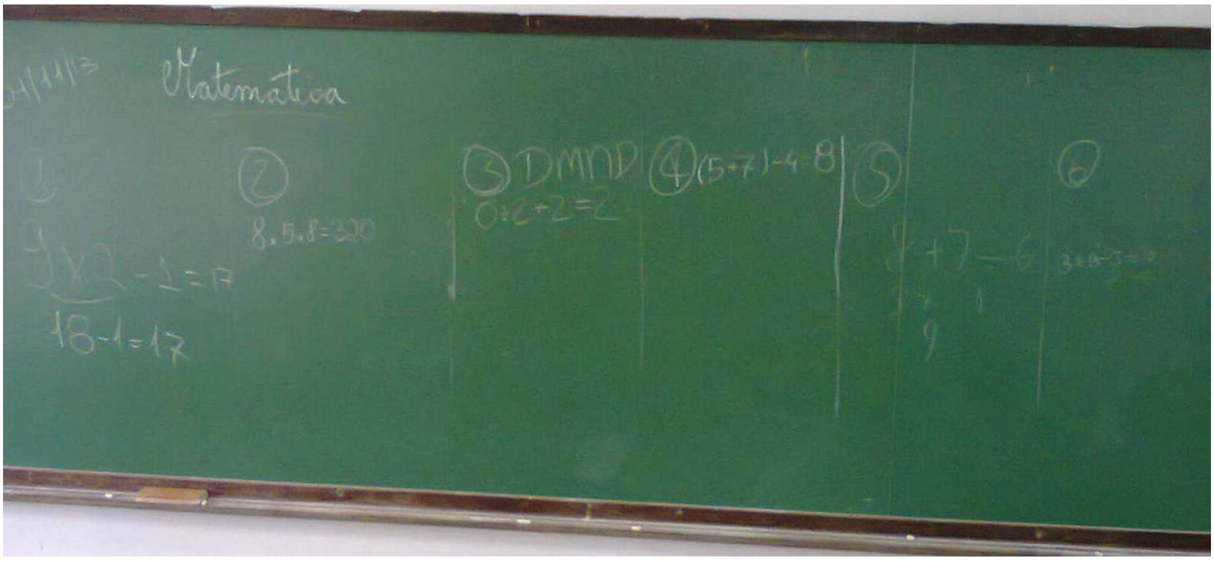
Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**
$6 \div 3 + 7 = 9$	$8 \times 0 \div 6 = 0$	$(3 \div 3) + 9 = 10$
Grupo 4	**Grupo 5**	**Grupo 6**
$(7 \div 5) - 4 = 2{,}6$	$9 \times (4 + 9) = 117$	$2 \times (5 \times 8) = 80$

A expressão escolhida pelo grupo dois foi: $8 \times 0 \div 6$. Perguntei a todos os alunos o que aconteceria se esse grupo optasse pela expressão $8 \times 6 \div 0$ nessa rodada, ao invés daquela. Um dos integrantes do grupo dois respondeu que, conforme a professora disse a eles durante a rodada quando pediram o auxílio dela, não é possível dividir um número por zero. Com a intenção de que os alunos pudessem entender o motivo disso ocorrer, perguntei a todos se sabiam o que significava uma prova real; a maioria disse que sim. Em seguida, transformei a expressão que divide o zero em $48 \div 0$ e comentei: “Vamos supor que quarenta e oito dividido por zero é igual a um número que chamaremos de ‘A’”. Com isso, escrevi a seguinte expressão no quadro: $48 \div 0 = A$. Abaixo, escrevi a prova real dessa expressão: $A \times 0 = 48$. Perguntei então aos alunos que valor o “A” poderia assumir de forma que a expressão seja verdadeira. Nesse instante, os alunos perceberam que não era possível colocar algum valor no lugar de “A” de forma que a expressão seja verdadeira, pois o produto de zero com qualquer número sempre resulta zero. Com isso, eles concluíram nesse momento que a divisão por zero não era possível de ser calculada e que, por isso, não existia valor que seria resultado de tal expressão.

No grupo quatro ocorreu o primeiro erro referente ao resultado encontrado para a expressão numérica escolhida. Conforme pode ser observado na figura 19, o aluno do grupo escreveu no quadro a seguinte expressão: $(7 \div 5) - 4 = 2{,}6$. Nesse caso, ocorreu um erro que já havia sido observado em algumas respostas do questionário em relação à ordem dos números numa operação de subtração, visto que os alunos confundiram o resultado de $1{,}4 - 4$ com o de $4 - 1{,}4$. Para explicar a diferença da ordem dos números, a professora relacionou a operação de subtração com uma situação da realidade, onde subtrair por um número poderia significar a quantidade de dinheiro que uma pessoa estaria devendo, provavelmente utilizando uma relação que ela já havia explicado aos alunos em aulas anteriores. Com isso, ela perguntou “se eu estou com 4 reais e estou devendo 1 real e quarenta centavos, quanto reais eu tenho?” e “se eu estou com 1 real e 40 centavos e estou devendo 4 reais, quantos reais eu tenho?”; os alunos souberam responder ambas as perguntas corretamente. Como o resultado verdadeiro dessa é expressão é $-2{,}6$, a escolha do grupo acabou prejudicando a sua pontuação nessa rodada, que ficou negativa.

Na segunda rodada, foi determinado que cada grupo tivesse no máximo cinco minutos para poder escolher a expressão ideal para a rodada. Na figura 20 tem-se a imagem do quadro-negro com as expressões relativas a essa rodada:

Figura 20 – Expressões escolhidas na segunda rodada do Jogo das Operações



Fonte: arquivo pessoal

As expressões e resultados obtidos nesta rodada foram:

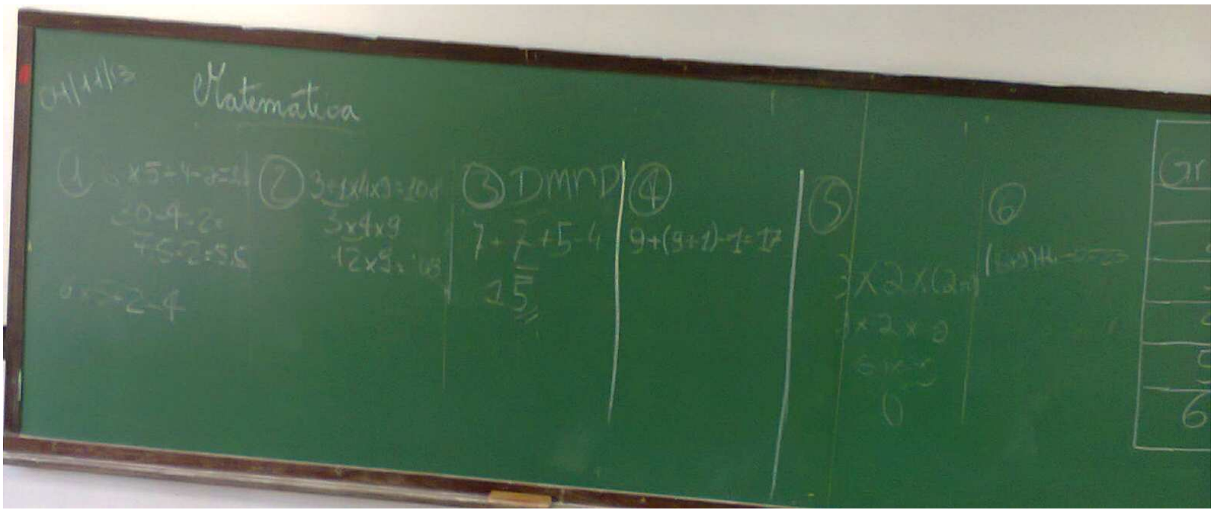
Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**
$9 \times 2 - 1 = 17$	$8 \times 5 \times 8 = 320$	$0 \div 2 + 2 = 2$
Grupo 4	**Grupo 5**	**Grupo 6**
$(5 + 7) - 4 = 8$	$8 + 7 \div 6 = 9$	$9 + 3 - 3 = 9$

Outro detalhe que ocorreu numa das respostas do questionário também aconteceu nessa rodada. Note que na expressão escolhida pelo grupo cinco, que foi $8 + 7 \div 6$, ocorreu uma transformação de tratamento para a expressão $8 + 1$, arredondando o resultado do cálculo aritmético $7 \div 6$, que é $1{,}1666\ldots$, para 1.

Concluindo que nessa rodada os alunos não apresentaram dificuldades para resolver as expressões, perguntei se eles gostariam que fosse aumentado o número de cartas que seriam utilizadas para a terceira rodada. Curiosamente, além de aceitarem empolgados o desafio, quando propus que o número de cartas aumentaria de três para quatro, para os números, e de duas para três, para as operações, alguns alunos preferiam que já fossem utilizadas cinco cartas para os números e quatro para as operações. Contudo, optei por utilizar quatro cartas para números e três para operações na terceira rodada e cinco para números e quatro para operações na quarta rodada, que seria a última.

Após serem distribuídas as cartas e ter transcorrido dez minutos para encontrarem as expressões, eles foram ao quadro anotar quais delas foram escolhidas, conforme a imagem da figura 21:

Figura 21 – Expressões escolhidas na terceira rodada do Jogo das Operações



Fonte: arquivo pessoal

As expressões e resultados obtidos nesta rodada foram:

Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**
$6 \times 5 \div 4 - 2 = 5{,}5$	$3 \div 1 \times 4 \times 9 = 108$	$7 + 7 + 5 - 4 = 15$
Grupo 4	**Grupo 5**	**Grupo 6**
$9 + (9 \div 1) - 1 = 17$	$3 \times 2 \times (2 \div 0) = 0$	$(8 + 9) + 6 - 0 = 23$

Note que no espaço reservado para a expressão do grupo um existem duas expressões diferentes: $6 \times 5 \div 4 - 2$ e $6 \times 5 \div 2 - 4$, que resultam $5{,}5$ e 11, respectivamente. A expressão escolhida pelo grupo foi a primeira. Contudo, um dos integrantes do grupo dois falou que havia outra expressão que o grupo um poderia ter utilizado e que resultaria em um valor maior em relação à expressão escolhida por seus integrantes, que é a outra expressão, anotada por mim no quadro, que consta no espaço reservado para o grupo um. Em seguida, resolvi essa expressão para verificar, junto com os alunos presentes, se a observação desse aluno estava correta (e estava). Comentei que a troca de informações entre os grupos, como essa que ocorreu, é um detalhe interessante para o andamento do jogo.

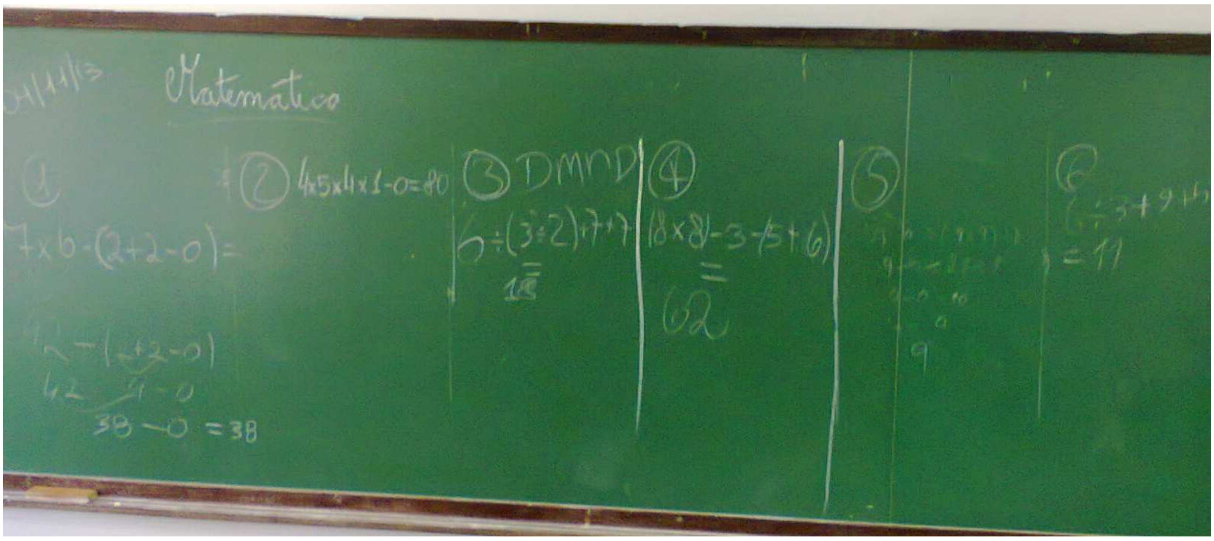
O grupo cinco utilizou a seguinte expressão: $3 \times 2 \times (2 \div 0)$. Apesar de ter enfatizado na primeira rodada que não era possível dividir um número por zero, esse mesmo erro ocorreu nesta rodada, onde os alunos escreveram que o resultado da divisão entre dois e zero resultava zero. Como o verdadeiro resultado para essa expressão não existe, tive que pensar num modo de contar os pontos dos grupos quando escolherem expressões em que ocorre esse tipo de situação, visto que utilizar a pontuação igual à zero poderia ser injusto. Supondo, por exemplo, que um grupo retira os números 0, 0 e 1 e as expressões "–" e "÷", as expressões que resultam o maior valor possível para esse caso são iguais à zero. Logo, a pontuação de um grupo que utilizou uma expressão que resulta um valor existente, como $0 - 0 \div 1$, seria a mesma em relação a outro que escolheu uma expressão na qual não existe um valor como resultado, como $0 - 1 \div 0$. Isso seria injusto, visto que os grupos se beneficiariam da mesma forma, porém o segundo utilizou um cálculo que não é possível de ser efetuado, ao contrário do outro.

Foi então que a professora deu a seguinte sugestão: o próximo grupo que utilizar uma expressão onde ocorre a divisão de um número por zero, será escolhida a rodada em que ela obteve a maior pontuação em relação às outras e essa pontuação será zerada. Aceitei que essa regra fosse a utilizada nesse caso. Contudo, ela só seria implementada a partir daquele momento e, por isso, o grupo cinco não sofreu essa punição, ficando com a pontuação dessa rodada igual a zero. Além disso, em nenhum momento posterior ao da regra ter sido implantada os alunos escolheram uma expressão onde ocorre a divisão de um número por zero e, por isso, ela acabou não sendo aplicada.

Conforme foi dito anteriormente, na quarta e última rodada as cartas foram distribuídas da seguinte forma para cada grupo: cinco cartas de números e quatro de operações. Durante essa rodada, um dos alunos do grupo cinco me chamou e mostrou que uma das quatro operações havia ficado de fora da expressão. Isso ocorreu, pois a expressão ficou da seguinte maneira: $9(9 \times 9) \div 8 - 0$. Note que foram utilizadas três operações, ao invés de quatro, pois o aluno utilizou o parêntese para poder multiplicar nove e o produto de nove por nove, deixando a quarta operação, que era de divisão, de fora. Falei que isso não era possível e que o produto de um número por algo que está dentro dos parênteses só poderia ocorrer se fosse adicionado um símbolo de multiplicação entre os dois.

Transcorridos os dez minutos propostos para que os grupos pudessem encontrar a expressão que resulte o valor mais alto, cada aluno pertencente a um deles foi ao quadro escrever a expressão escolhida, conforme a imagem da figura 22:

Figura 22 – Expressões escolhidas na quarta rodada do Jogo das Operações



Fonte: arquivo pessoal

As expressões e resultados obtidos nesta rodada foram:

Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**
$7 \times 6 - (2 + 2 - 0) = 38$	$4 \times 5 \times 4 \times 1 - 0 = 80$	$6 \div (3 \div 2) + 7 + 7 = 18$
Grupo 4	**Grupo 5**	**Grupo 6**
$(8 \times 8) - 3 - (5 + 6) = 62$	$9 - 0 \div (9 \times 9) \div 8 = 9$	$6 \div 3 + 9 + 5 - 5 = 11$

O único erro ocorrido nessa rodada foi em relação à expressão escolhida pelo grupo quatro. O grupo encontrou o resultado da expressão, que era $(8 \times 8) - 3 - (5 + 6)$, como sendo 62, e não 50.

Depois de serem corrigidas as expressões da última rodada, foram somados os pontos de cada grupo e, comparando os resultados, vimos que o vencedor do jogo foi o grupo dois. A pontuação final dos grupos ficou da seguinte maneira:

Grupo 1 – 69,5 pontos

Grupo 2 – 508 pontos

Grupo 3 – 45 pontos

Grupo 4 – 72,4 pontos

Grupo 5 – 135,167 pontos

Grupo 6 – 123 pontos

5.3. Aula 3 – Utilização da Planilha Eletrônica

Após serem distribuídas aos alunos as folhas contendo as questões e também os computadores de cada um, pois eles ficam guardados num armário em sala de aula quando não são utilizados, expliquei a eles o que era preciso realizar durante essa atividade, atentando a alguns fatos importantes para a utilização da planilha eletrônica, como a mudança de abas, as três células que poderiam ser modificadas, a importância de observar o que ocorre com os resultados de cada expressão para que possam responder às questões, entre outros fatores.

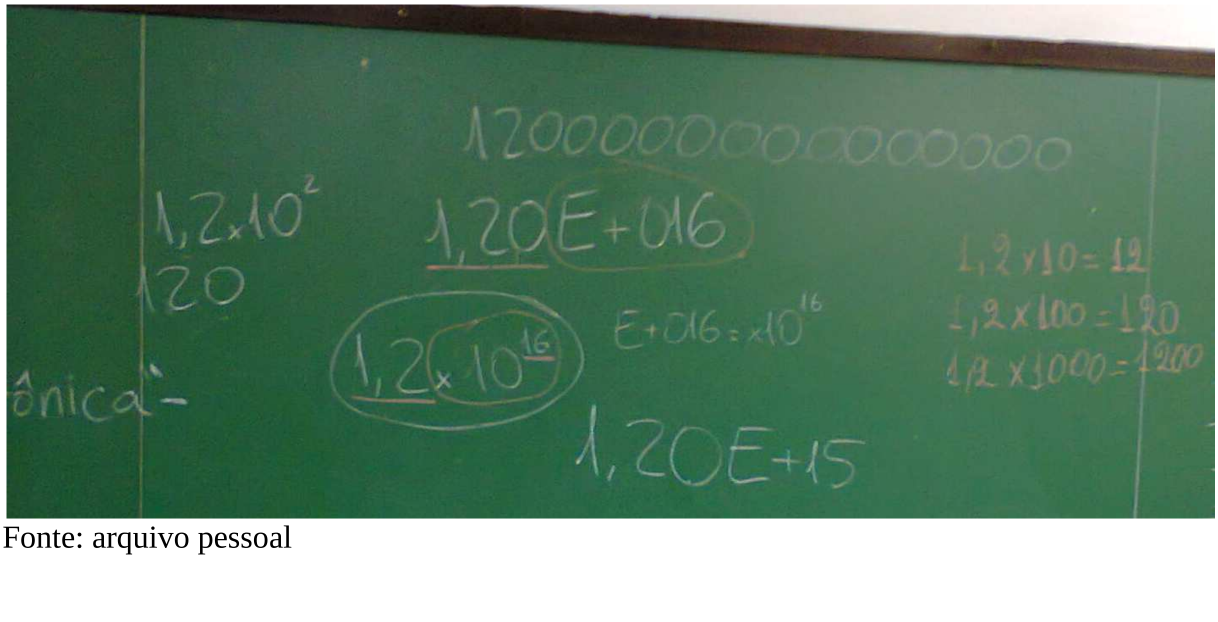
Durante a realização da atividade, notei que todos os alunos pareciam estar mais comprometidos em participar dessa aula, tentando observar o que ocorre em cada um dos casos da planilha eletrônica para poder responder às questões, em relação ao que foi observado nas duas aulas anteriores.

Quando era solicitado o meu auxílio e o da professora da turma, que também estava presente durante essa aula, as questões baseavam-se mais na utilização da planilha eletrônica do que com o conteúdo de expressões numéricas. Mesmo explicando no início da aula sobre a mudança de abas, alguns alunos não chegaram a compreender como se fazia e outros inclusive entenderam que todas as perguntas se referiam somente à primeira, entendendo que ela se tratava da única utilizada em toda a planilha eletrônica. Outros alunos que tinham conhecimento sobre a mudança das abas tiveram dificuldades em saber relacionar com quais casos cada pergunta da folha que foi entregue a eles se referia, não observando que as mesmas perguntas estavam separadas na planilha eletrônica de acordo com seu respectivo caso.

Um dos alunos me mostrou que, ao digitar um número muito grande na planilha eletrônica, ele acaba sendo representado de uma maneira estranha, a qual corresponde a notação científica. Expliquei a todos os alunos o que era esse tipo de notação e por que ela era utilizada na planilha eletrônica e em alguns tipos de calculadoras, justificando o fato de que um número com muitos dígitos não poderia caber no visor da calculadora e em uma célula da planilha eletrônica e que a notação científica seria um método se simplificar a sua representação. Contudo, nas calculadoras é utilizada a notação científica considerada convencional, ao contrário do que ocorre nas planilhas eletrônicas. Quando perguntei aos alunos se tinham conhecimento sobre a notação científica, a maioria falou que sim.

Para os que ainda não conheciam ou não recordavam, utilizei exemplos mais simples com números que tenham uma quantidade de dígitos pequena, como 12 ou 120 – que são iguais, respectivamente, a $1{,}2\times10^1$ e $1{,}2\times10^2$ – relacionando o número do expoente do dez com quantas casas decimais para direita o 1,2 deverá se transformar para encontrar o resultado desse produto. Notando que os alunos compreenderam a utilização da notação para casos mais simples, perguntei a eles como seria representado o número 12.000.000.000.000.000 na notação científica convencional e pedi para que eles observassem como ficaria esse número ao digitá-lo em uma das células da planilha eletrônica. Para finalizar, retirei um zero desse número e perguntei como ficaria o novo número na notação científica convencional e da planilha eletrônica; eles responderam todas as perguntas corretamente. Veja na figura 23 o exemplo que foi utilizado para explicar aos alunos sobre a notação científica:

Figura 23 – Exemplo utilizado para explicar sobre a notação científica



Fonte: arquivo pessoal

Note que o número acima contém catorze zeros, e não quinze, pois eu havia apagado um deles para perguntar como ficaria o novo número na notação científica da planilha eletrônica. Além disso, no primeiro exemplo, tanto na notação científica convencional como na utilizada na planilha eletrônica, foram sublinhados o que as duas escritas têm em comum (o número 1,2) e o que elas têm diferente (o “$\times 10^2$“ da convencional e o “E+016” da planilha) de forma que eles possam relacionar os dois tipos de escrita e verificar qual o significado que alguns elementos de uma podem ter para outra.

Outra questão muito importante que ocorreu durante essa aula é em relação à interpretação que os alunos tiveram sobre as primeiras perguntas de cada caso, onde é solicitado que eles verifiquem quais expressões resultam sempre o mesmo valor. Observe a figura 24, onde constam as expressões e a pergunta do caso 1 na interface da planilha eletrônica:

Figura 24 – Expressões e questão do caso 1

											Resultado
a)		4	×		2		+	2		=	10
b)	(	4	×		2	)	+	2		=	10
c)		4	×	(	2		+	2	)	=	16

1) Que expressões numéricas acima não resultam sempre o mesmo valor e por quê?

A dúvida de alguns alunos era se os resultados das expressões no qual se referia a pergunta eram dos diferentes tipos de expressões que poderiam ocorrer em um dos itens ao invés de comparar os resultados entre cada um dos itens dependendo de quais números seriam utilizados para formar as expressões.

Alguns alunos que compreenderam esse tipo de questão me perguntaram se a resposta correta nos casos 1 e 2 era de que as expressões que eram compostas por parênteses tinham resultados diferentes entre si em função da maneira, que não é a mesma, como os parênteses eram utilizados em cada uma delas. Portanto, pode-se observar que, ao questionar isso, o aluno ignora as primeiras expressões de cada caso, onde não são utilizados os parênteses.

Houve outras ocasiões durante a atividade em que os alunos interpretaram de maneira diferente da esperada as questões referentes à planilha. Numa delas, apontei para interface do segundo caso para explicar ao aluno que na segunda pergunta era necessário verificar quais daquelas expressões não resultam sempre o mesmo valor e responder o que elas tinham de diferente, pois ele havia demonstrado ter dúvidas sobre o que era solicitado. Após fazer essa menção, o aluno me perguntou se a diferença era a operação de divisão, entendendo que, na realidade, eram para ser comparadas as expressões dos casos 2 com as do 1. Em outra ocasião, um dos alunos já havia me entregado a folha com todas as questões respondidas. Contudo, verifiquei que na última pergunta, ao invés de preencher as lacunas com a palavra “distante” ou “próximo”, o aluno utilizou os números 12, 20, 25 e 35 para os itens “a” e “b” do exercício “1” e “a” e “b” do exercício “2”, respectivamente.

Além de utilizar a notação científica de um modo que não é o convencional, e isso pode dificultar a compreensão dos alunos com a atividade, a planilha eletrônica apresentou outros erros e limitações. Num determinado momento, uma das alunas me chamou e mostrou que, após ter digitado “-0” em uma das células, ao mudar para outra célula ela continuou sendo representada por “-0”, ao invés de somente “0”. Outro aluno me mostrou que ao modificar o expoente de um número representado pela notação científica por um número com uma quantidade grande de dígitos, aparece a seguinte mensagem na célula: “#NÚM!”. Isso ocorreu, pois ficou impossível para a planilha eletrônica representar aquele número, visto que o expoente da notação científica era muito grande para poder ser representado na célula.

Encerrada a aula, recolhi todas as folhas que foram entregues aos alunos onde foram escritas as respostas das questões dessa atividade.

6. ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

6.1. Aula 1 – Questão envolvendo uma Situação-Problema

Na questão envolvendo a resolução de uma situação-problema, houve pouca participação dos alunos. Ditar o exercício pode não ter sido a melhor solução para que a atividade fosse realizada, pois poderia ser considerado não tão importante o fato de todos terem, naquele momento, a situação-problema no caderno de forma que possam acompanhar a resolução que seria elaborada no quadro.

Dos alunos que participaram da atividade, pode-se notar que estes demonstraram saber realizar as transformações de conversão, da situação-problema para uma expressão numérica, e de tratamento, visto que eles disseram que a utilização dos parênteses ou não para separar os produtos na soma não iria interferir na resolução do cálculo, no item “a”. Além disso, eles demonstraram não ter dificuldade em relação à ordem em que as operações são realizadas, visto que justificaram que o uso dos parênteses poderia ser uma opção para cada um dos produtos.

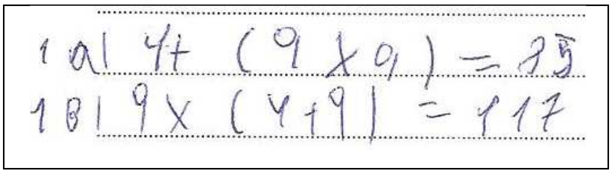
Na resolução do item “b”, a conversão da língua materna para uma expressão numérica não ocorreu como na resolução do item “a”. Pode-se notar, pela fala dos alunos, que eles haviam conseguido encontrar o resultado esperado, que era R$ 5,75, porém não sabiam dizer qual expressão que representaria a situação-problema. É provável que eles tenham encontrado o resultado por outros métodos de resolução, como a utilização de algoritmos para cálculos aritméticos. Quando questionados sobre a expressão numérica que poderia ser utilizada na situação-problema, os alunos responderam três tipos diferentes até encontrar aquela que resulta o mesmo valor que eles haviam encontrado, ou seja, preferiram encontrá-la se baseando na tentativa e erro.

A conclusão do por que a maioria dos alunos não participou da atividade pode ser devido ao fato de que, conforme um dos alunos havia relatado, eles já estudaram diversas vezes o conteúdo de expressões numéricas e, por essa razão, a ideia de estudá-lo novamente não os atraiu.

6.2. Aula 2 – Jogo das Operações

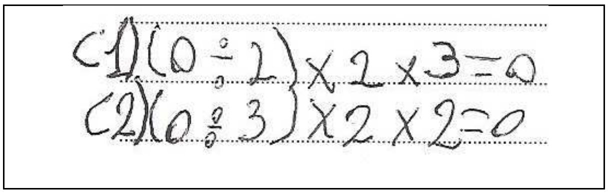
Conforme foi observado nas folhas distribuídas para cada um dos alunos durante a aula, a maioria deles não escreveu quais expressões havia encontrado em cada rodada para que eles pudessem compará-las, assim como a maioria deles também não havia preferido comparar as possíveis expressões no item “a” da terceira questão da análise prévia. A quantidade máxima de expressões que foram utilizadas para serem comparadas foi duas, conforme pode ser observado nas figuras 25, 26 e 27:

Figura 25 – Anotação da atividade 2



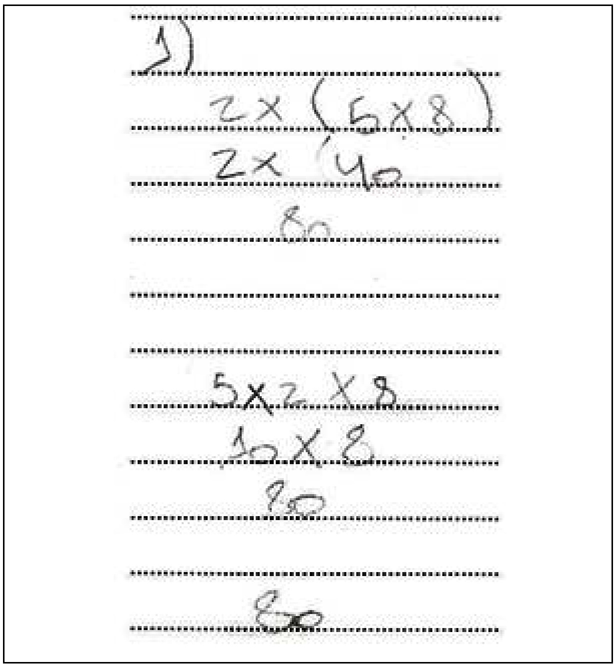
Fonte: arquivo pessoal

Figura 26 – Anotação da atividade 2



Fonte: arquivo pessoal

Figura 27 – Anotação da atividade 2


1)

2x (5x8)

2x 40

80

5x2 x8

10x8

80

80

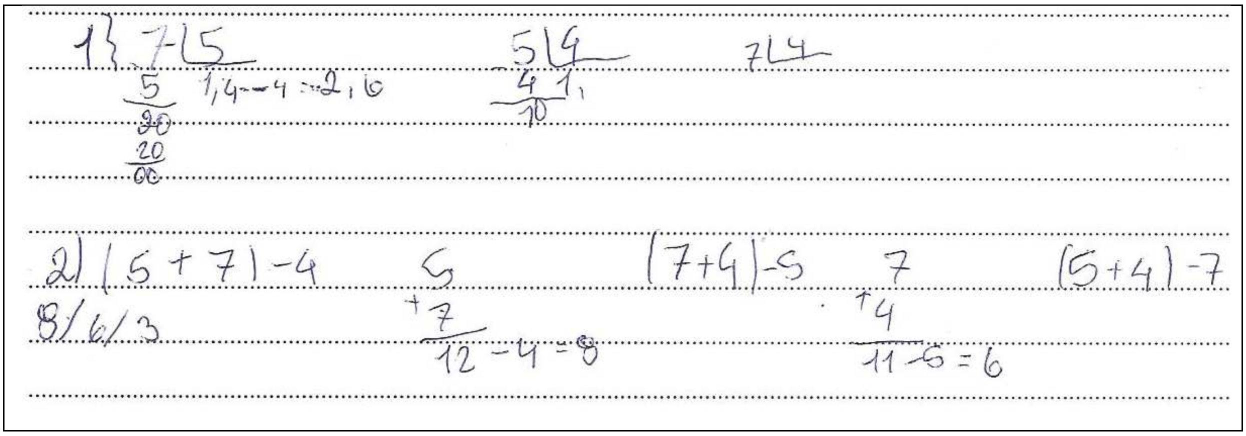
Fonte: arquivo pessoal

Os alunos puderam organizar as cartas na mesa de modo que elas formassem uma expressão que, em seguida, foi transcrita para a sua respectiva folha para que eles pudessem resolvê-la. Nesse processo, pode-se notar que ocorreram os dois tipos de transformação de uma representação semiótica para outra. Ao modificar a ordem das cartas na mesa, os alunos realizam uma transformação de tratamento no tipo de registro material. Quando anotam a expressão encontrada na folha, ocorre a transformação de conversão, pois há uma mudança de registro: material para numérica. A transformação de tratamento ocorre novamente quando o aluno calcula as expressões, encontram seus resultados e os compara.

Conforme figura 25, observa-se que foram comparadas duas expressões: $4 + (9 \times 9)$ e $9 \times (4 + 9)$. A expressão que os alunos do grupo escolheram na rodada foi realmente a que resulta maior valor: a segunda. Na figura 26 são comparadas duas expressões que resultam o mesmo valor, sendo que nenhuma delas foi escolhida pelos alunos do grupo. Por alguma razão eles chegaram a um consenso em não escolher nenhuma delas, que estavam corretas, e utilizaram a expressão cujo resultado não existia por dividir um número por zero. Na figura 27, o grupo pôde verificar que as duas expressões resultam o mesmo valor, e provavelmente concluiu que todas as expressões possíveis utilizando esses números e operações resultam esse valor também, e que, por isso, não faria diferença escolher uma ou a outra.

Ao utilizar a calculadora para efetuar as operações das expressões numéricas, os alunos também fazem uma conversão, pois a calculadora pode ser considerada um registro material e, ao escrever o resultado encontrado nela na folha, estão passando para o numérico. O mesmo ocorre quando faz o cálculo por algoritmos, conforme o exemplo da figura 28, onde, por alguma razão, o aluno se sentiu mais cômodo em utilizá-los, ao invés da calculadora:

Figura 28 – Anotação da atividade 2



Fonte: arquivo pessoal

Observando a figura 28, pode-se notar que ela se trata da anotação de um dos alunos do grupo 4, que foi o que escolheu na primeira rodada a expressão $(7 \div 5) - 4$, encontrando o resultado de $2{,}6$, ao invés de $-2{,}6$. Assim como ocorreu no item “a” da terceira questão da análise prévia, os alunos mostraram dificuldade novamente na ordem dos números em uma subtração, o que mostra que alguns conceitos vistos na aritmética, como subtrair dois números, onde o primeiro é maior ou igual ao segundo, ainda estão interiorizados em alguns alunos. Outra justificativa para isso ter ocorrido é porque, segundo relato da professora, os alunos ainda não tinham vistos números racionais negativos.

Na figura 29, observa-se que o aluno escreveu para a quarta rodada somente uma expressão, que não foi a escolhida pelo grupo. Isso mostra que, provavelmente, os alunos puderam ter trabalhado em grupo de maneira em que cada integrante dele escolhia uma expressão, calculava e, posteriormente, eles comparavam todas as respostas obtidas para verificar qual expressão resulta o maior valor entre elas. Observe:

Figura 29 – Anotação da atividade 2

4) $6 \div (3+9) + 5 - 5 = 0{,}5$

Fonte: arquivo pessoal

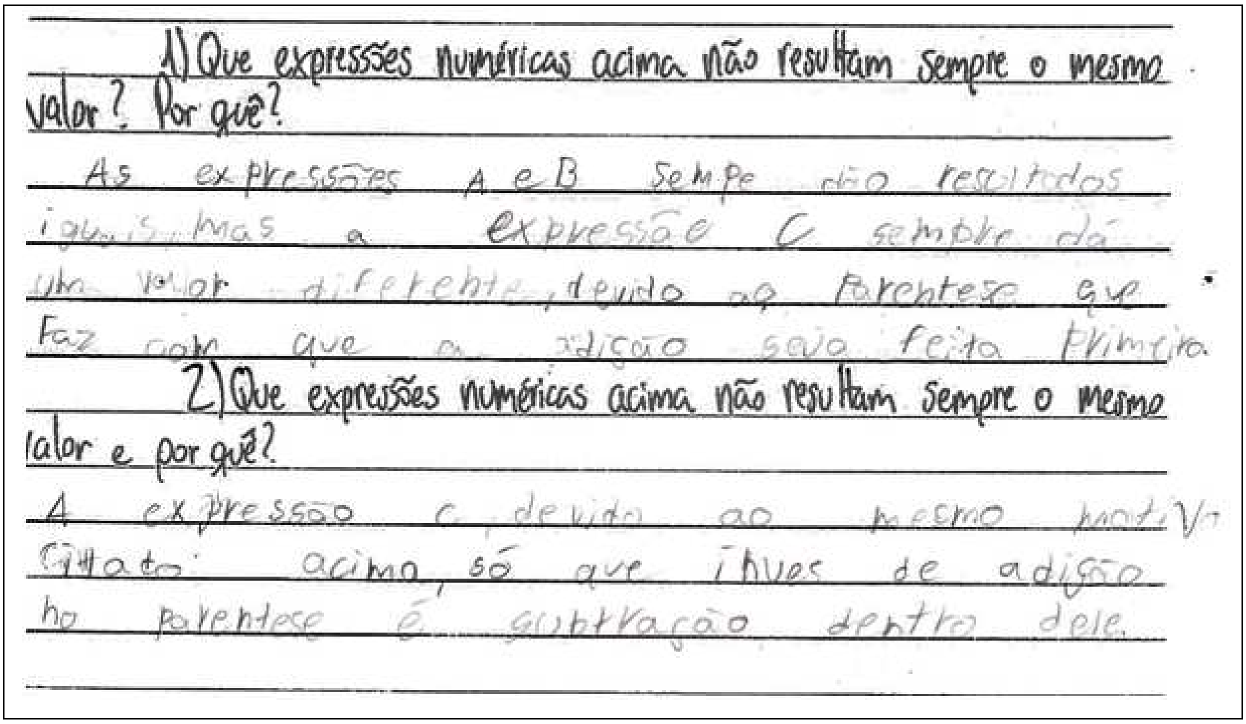
Neste grupo, os demais alunos somente escreveram as expressões escolhidas na folha.

O que também pode ser observado nas expressões escolhidas pelos grupos durante esta atividade é que foram utilizados os parênteses de forma demasiada nelas, até quando não era necessário. Isso também mostra que muitos deles podem ainda não estar se sentindo totalmente seguros em utilizar as expressões.

6.3. Aula 3 – Utilização da Planilha Eletrônica

Analisando as respostas dos alunos para a primeira e segunda questão, o que se pode notar é que muitos deles justificaram o fato das expressões dos itens “c”, do caso 1, e “b”, do caso 2, não resultarem sempre um valor igual às demais, pois os parênteses indicam que a adição e subtração serão as primeiras operações que deverão ser realizadas nela, e não a multiplicação e divisão. Observe as respostas de um dos alunos na figura 30:

Figura 30 – Resolução da primeira e segunda pergunta da atividade 3


1) Que expresssões numéricas acima não resultam sempre o mesmo valor? Por quê?

As expressões A e B sempe dão resultados iguais, mas a expressão C sempre dá um valor diferente, devido ao parentese que faz com que a adição seja feita primeiro.

2) Que expressões numéricas acima não resultam sempre o mesmo valor e por quê?

A expressão C, devido ao mesmo motivo citato acima, só que invés de adição no parentese é subtração dentro dele.

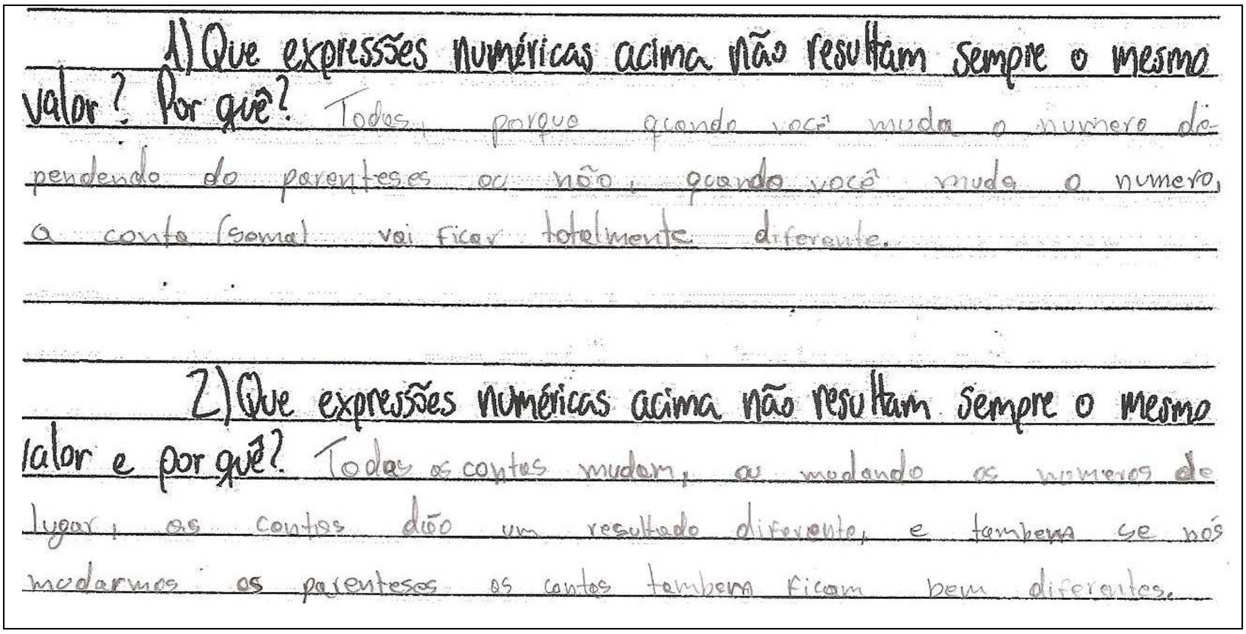
Fonte: arquivo pessoal

Contudo, era esperado que em ambas as perguntas os alunos fizessem referência ao fato de que, quando não são utilizados os parênteses, as primeiras operações que devem ser efetuadas numa expressão numérica são as de multiplicação e divisão, o que não ocorreu em nenhuma das respostas. Ao invés disso, os alunos se preocuparam mais em explicar de que forma foram calculadas as expressões que não resultam sempre um valor igual às demais. Pode-se compreender que isso tenha ocorrido, pois as questões fazem menção especificamente às expressões que tinham esse caráter.

Apesar disso ter ocorrido, pela análise das respostas obtidas nota-se que nenhum dos alunos interpretou, assim como ocorreu na análise prévia, a ordem das operações de maneira errada.

Outro tipo de resposta que se observou nas duas questões pode ser observado na figura 31:

Figura 31 – Resolução da primeira e segunda pergunta da atividade 3


1) Que expresssões numéricas acima não resultam sempre o mesmo valor? Por quê? Todas, porque quando você muda o numero dependendo do parenteses ou não, quando você muda o numero, a conta (soma) vai ficar totalmente diferente.

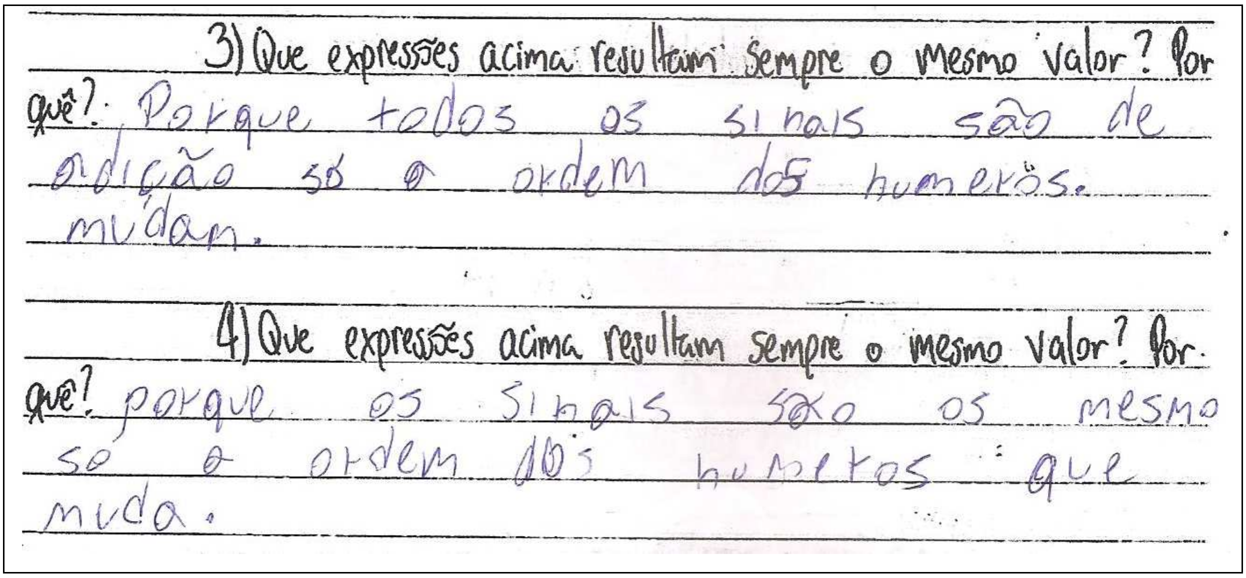
2) Que expressões numéricas acima não resultam sempre o mesmo lalor e por quê? Todas as contas mudam, ou mudando os numeros de lugar, as contas dão um resultado diferente, e tambem se nós mudarmos os parenteses as contas tambem ficam bem diferentes.

Fonte: arquivo pessoal

Conforme foi relatada anteriormente a experiência desta atividade, um dos alunos já havia me questionado se as expressões solicitadas para serem comparadas são todas as possíveis de escrever no próprio item, conforme os valores se alteram, ou comparar cada expressão de um caso que é representada pela sua respectiva letra. No exemplo da figura 31, pode-se notar que outro aluno interpretou as duas questões dessa maneira.

Na terceira e na quarta questão poucos alunos não perceberam que todas as expressões dos casos “Adição” e “Multiplicação” eram sempre iguais. Daqueles que perceberam, muitos responderam que o motivo disso ocorrer é porque todas as expressões continham os mesmos números e operações entre si e o que as diferencia é a ordem em que aparecem os números. Observe o exemplo na figura 32:

Figura 32 – Resolução da terceira e quarta pergunta da atividade 3

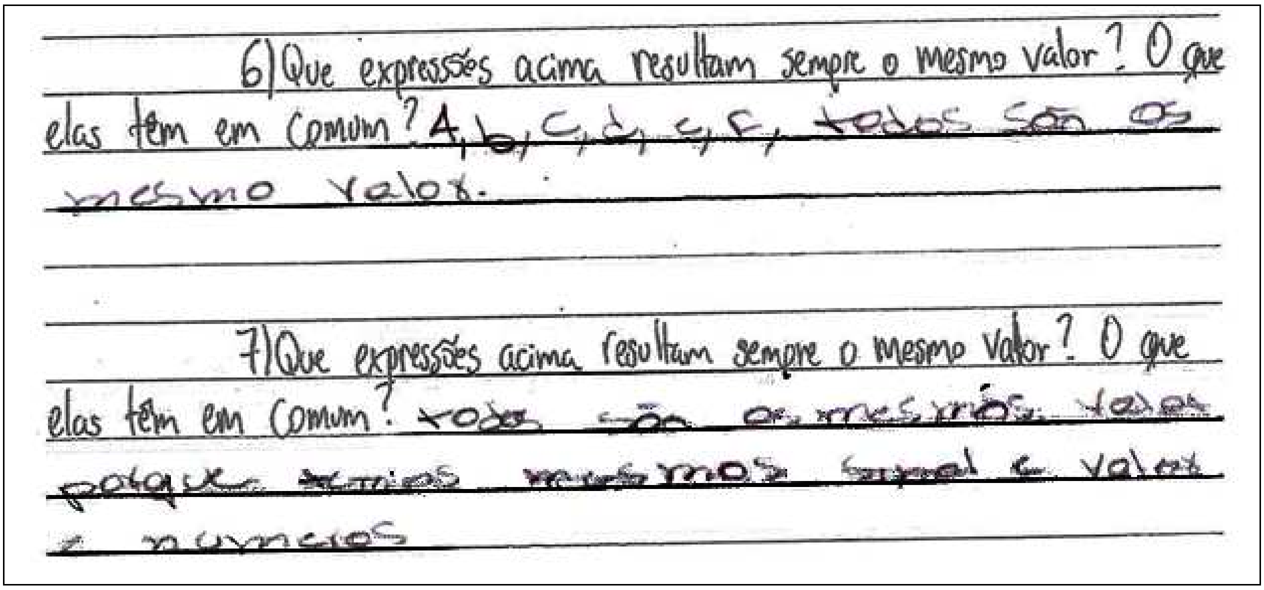

3) Que expressões acima resultam sempre o mesmo valor? Por quê? Porque todos os sinais são de adição só a ordem dos numerös mudam.

4) Que expressões acima resultam sempre o mesmo valor? Por quê? porque os sinais são os mesmo so a ordem dos numeros que muda.

Fonte: arquivo pessoal

Contudo, utilizando esse argumento para justificar que as expressões dos casos “Adição” e “Multiplicação” resultam sempre o mesmo valor, necessariamente as expressões dos casos “Subtração” e “Divisão” deveriam resultar o mesmo valor também, pois elas contêm sempre os mesmos números e operações. Alguns dos alunos que responderam a terceira e a quarta questão dessa forma citada acima escreveram que as expressões dos casos “Subtração” e “Divisão” sempre resultam o mesmo valor também pelo mesmo motivo, ignorando o que poderia ser observado na planilha eletrônica. Observe as respostas na figura 33:

Figura 33 – Resolução da sexta e sétima pergunta da atividade 3

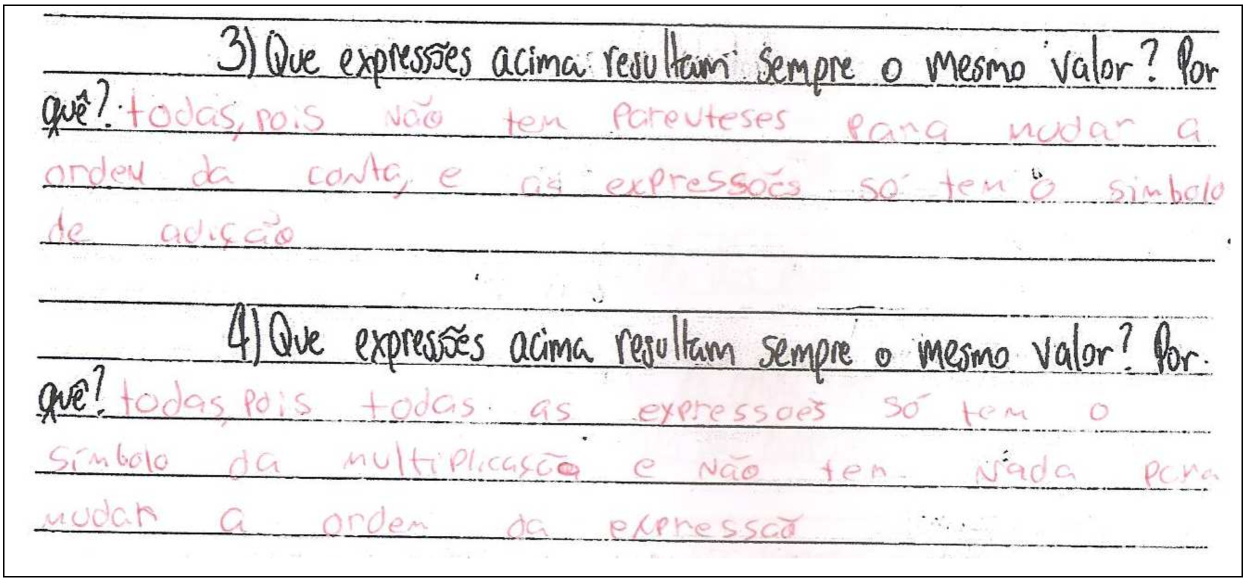

6) Que expressões acima resultam sempre o mesmo valor? O que elas tem em comum? A, b, c, d, e, f, todos são os mesmo valor.

7) Que expressões acima resultam sempre o mesmo valor? O que elas tem em comum? todos são os mesmos todos porque temos mesmos sinal e valor e numeros

Fonte: arquivo pessoal

Duas alunas responderam que as expressões dos casos "Adição" e "Multiplicação" resultam sempre o mesmo valor, pois todas as expressões de ambas não contêm parênteses e, por essa razão, eles não interferem na ordem em que as operações deverão ser efetuadas. Ou seja, essas alunas entendem que, se houvesse parênteses na expressão, eles definiriam qual operação deveria ter sido efetuada primeiro. Como não existem parênteses em nenhuma delas, as operações de adição e multiplicação ocorrem "simultaneamente". Observe as respostas de uma das alunas na figura 34:

Figura 34 – Resolução da terceira e quarta pergunta da atividade 3

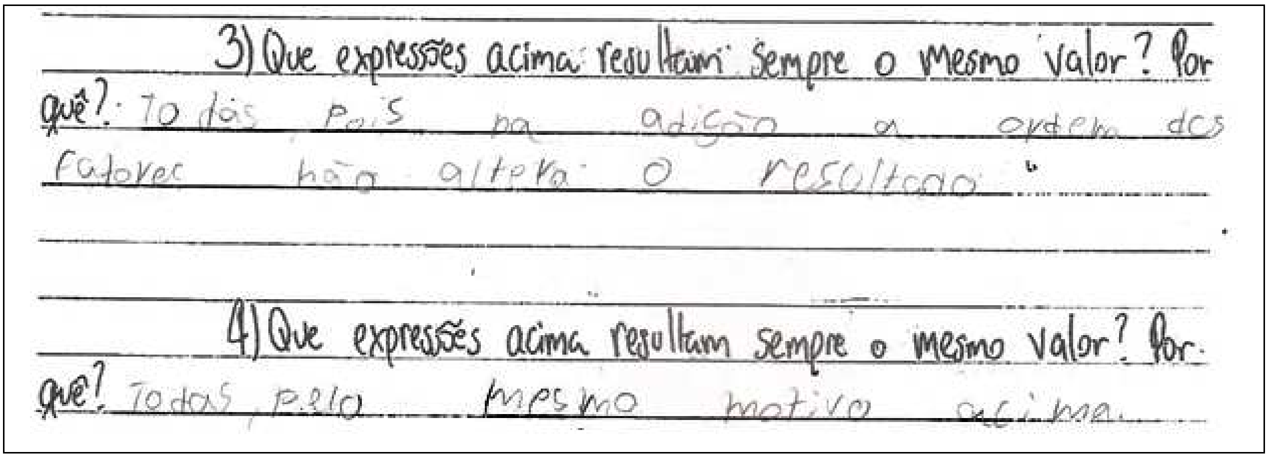

3) Que expressões acima resultam sempre o mesmo valor? Por quê? todas, pois não tem parenteses para mudar a ordem da conta, e as expressoes só tem o simbolo de adição

4) Que expressões acima resultam sempre o mesmo valor? Por quê? todas pois todas as expressoes só tem o simbolo da multiplicação e não tem nada para mudar a ordem da expressão

Fonte: arquivo pessoal

Três alunos responderam corretamente a terceira e quarta questão, conforme pode ser visto na figura 35:

Figura 35 – Resolução da terceira e quarta pergunta da atividade 3

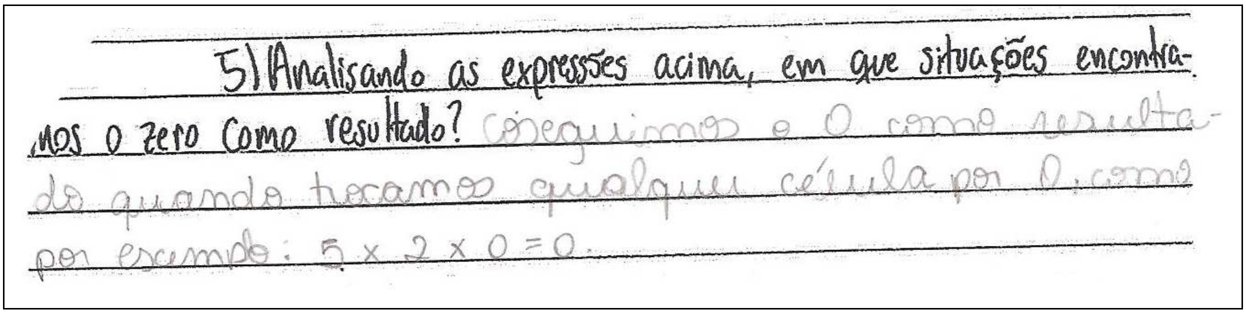

3) Que expressões acima resultam sempre o mesmo valor? Por quê? todas pois na adição a ordem dos fatores não altera o resultado

4) Que expressões acima resultam sempre o mesmo valor? Por quê? todas, pelo mesmo motivo acima

Fonte: arquivo pessoal

Na quinta questão, a maioria dos alunos respondeu corretamente que era preciso digitar em uma das células do caso "Multiplicação" o número zero como valor, como foi o caso da resposta da figura 36:

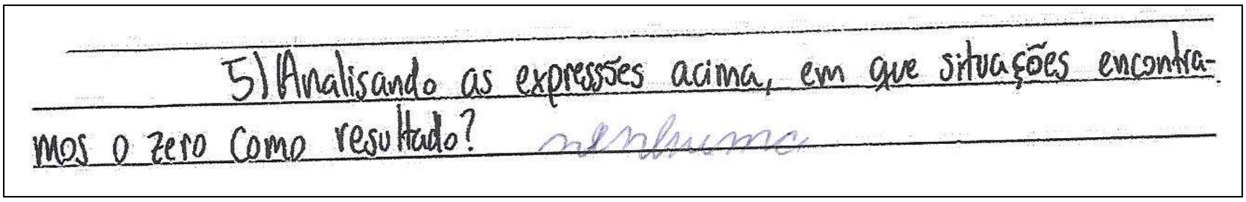
Figura 36 – Resolução da quinta pergunta da atividade 3


5) Analisando as expressões acima, em que situações encontramos o zero como resultado? conseguimos o 0 como resultado quando trocamos qualquer célula por 0, como por exemplo: 5 x 2 x 0 = 0.

Fonte: arquivo pessoal

Contudo, alguns alunos não encontraram em que situações o zero é resultado das expressões. Uma possibilidade para que eles tenham concluído dessa forma é que devam ter testado uma certa quantidade de números nas células, exceto o zero, e não encontraram em que situação os resultados são iguais a zero. Observe a resposta de um desses alunos na figura 37:

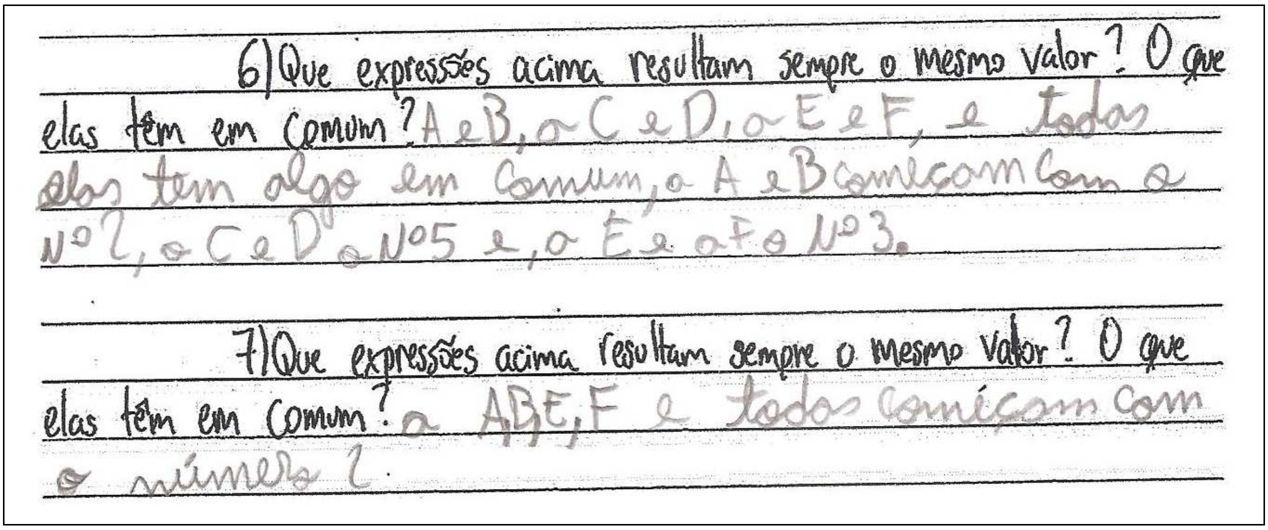
Figura 37 – Resolução da quinta pergunta da atividade 3


5) Analisando as expressões acima, em que situações encontramos o zero como resultado? nenhuma

Fonte: arquivo pessoal

Outra possibilidade pode ser analisada em respostas obtidas pelos alunos em outras questões: na sexta e sétima. Observe a figura 38:

Figura 38 – Resolução da sexta e sétima pergunta da atividade 3


6) Que expressões acima resultam sempre o mesmo valor? O que elas têm em comum? A e B, o C e D, o E e F, e todas elas tem algo em comum, o A e B começam com o Nº 2, o C e D o Nº5 e, o E e o F o Nº 3.

7) Que expressões acima resultam sempre o mesmo valor? O que elas têm em comum? a A,B,E,F e todos começam com o número 2.

Fonte: arquivo pessoal

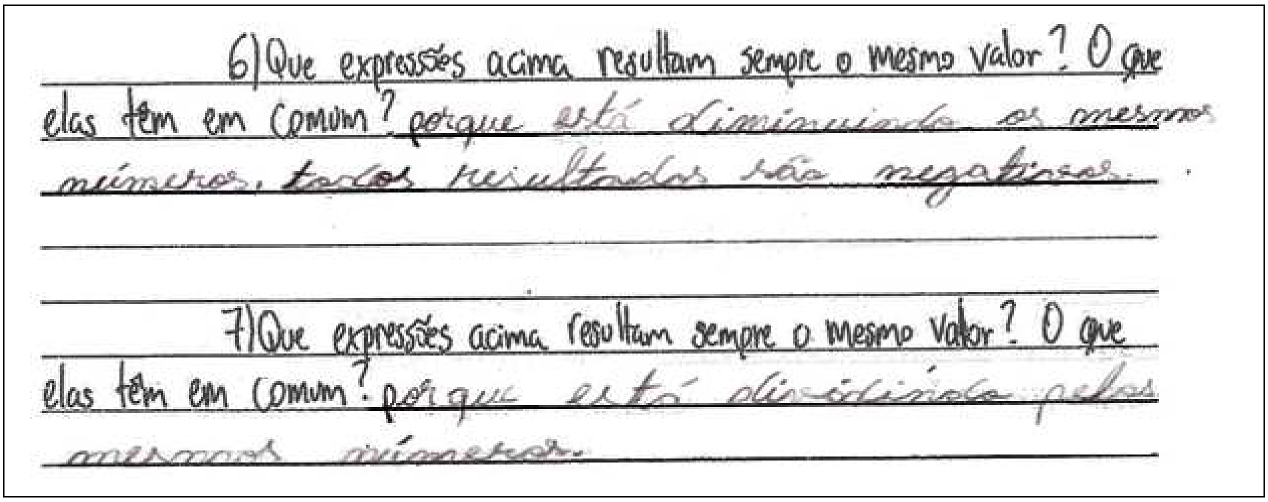
Pode-se observar que o aluno fixa números utilizados na planilha para justificar suas respostas. Esses números são exatamente os que já estão digitados ao iniciá-la, ou seja, o aluno não modificou o valor das células de forma que possa analisar o que ocorre com diversos tipos diferentes de expressões. Também se pode notar que ele responde na sétima questão que as expressões “a”, “b”, “e” e “f” resultam sempre o mesmo valor. O motivo disso é que, ao iniciar a planilha, essas expressões estão escritas de tal forma que resultam todas no mesmo valor: todas elas iniciam por 2.

Logo, pode haver a possibilidade dos alunos que responderam na quinta questão que não há situações onde o resultado das expressões do caso “Multiplicação” resulta zero, não terem modificado os números utilizados para cada uma das expressões, assim como ocorreu na sexta e sétima questão, de forma que possam identificar que situações são essas.

A dificuldade em relacionar as perguntas da folha com os casos da planilha que foram analisadas por meio de questões elaboradas pelos alunos durante a atividade ocorreu novamente com um deles, quando este mencionou a expressão “b” do caso 2 na resposta da quinta questão.

Dois alunos tiveram respostas que podem ser consideradas “parcialmente” corretas para a sexta e sétima questões. Observe as figuras 39 e 40:

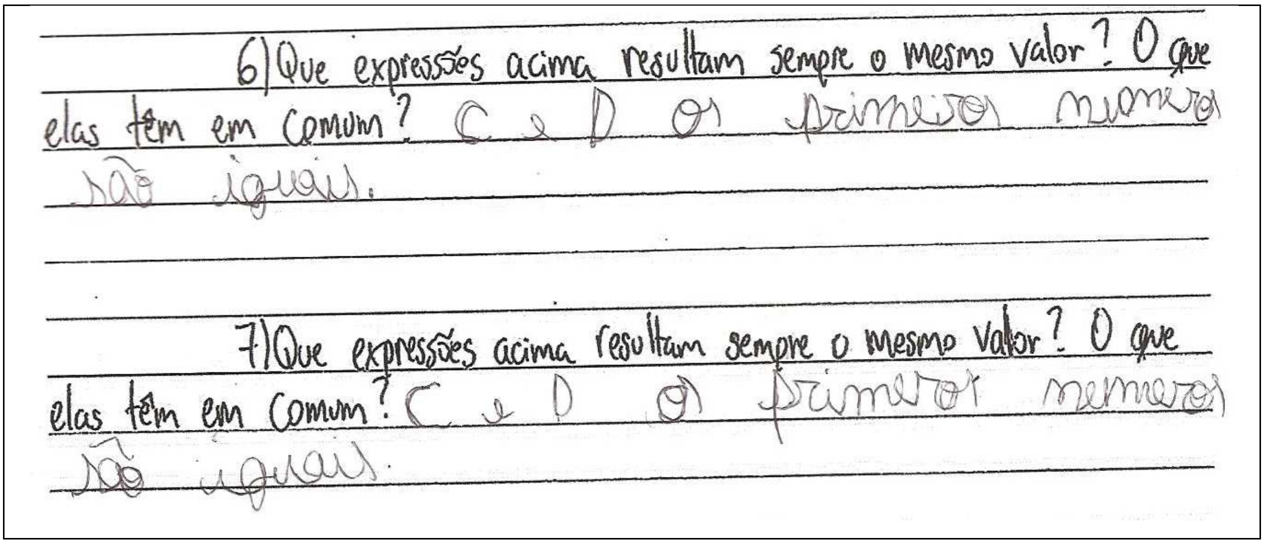
Figura 39 – Resolução da sexta e sétima pergunta da atividade 3


6) Que expressões acima resultam sempre o mesmo valor? O que elas têm em comum? porque está diminuindo os mesmos números, todos resultados são negativos.

7) Que expressões acima resultam sempre o mesmo valor? O que elas têm em comum? porque está dividindo pelos mesmos números.

Fonte: arquivo pessoal

Figura 40 – Resolução da sexta e sétima pergunta da atividade 3


6) Que expressões acima resultam sempre o mesmo valor? O que elas têm em comum? C e D os primeiros numeros são iguais.

7) Que expressões acima resultam sempre o mesmo valor? O que elas têm em comum? C e D os primeiros numeros são iguais.

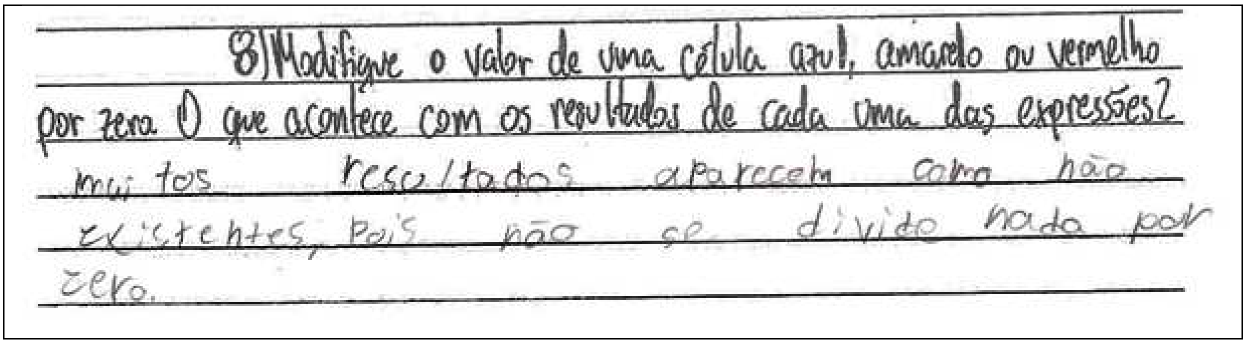
Fonte: arquivo pessoal

Nas respostas do aluno na figura 39, ele não citou quais expressões que resultam sempre o mesmo valor, mas justificou corretamente o motivo delas terem essa característica. Além disso, os números que ele testou para analisar o que ocorre com as expressões foram limitados ao ponto de todas as expressões verificadas por ele resultarem um valor negativo.

Em relação ao aluno que respondeu conforme a figura 40, ele identificou somente um conjunto de duas expressões que resultam o mesmo valor para cada um dos casos e explicou que ambas começam pelo mesmo número.

Como a oitava pergunta orienta os alunos a realizar um procedimento específico e pergunta o que ocorre com as expressões em seguida, a maioria dos alunos a respondeu exatamente dessa forma, sem explicar por qual motivo as expressões sofreram tais alterações. Poucos alunos explicaram o motivo, como o resposta da figura 41:

Figura 41 – Resolução da oitava pergunta da atividade 3


8) Modifique o valor de uma célula azul, amarelo ou vermelho por zero. O que acontece com os resultados de cada uma das expressões?
mui tos resultados aparecem como não existentes, pois não se divide nada por zero.

Fonte: arquivo pessoal

Pela variedade de respostas obtidas para a última pergunta e por ela se tratar de um exercício onde os alunos optam entre duas respostas possíveis, pois era solicitado escolher entre duas palavras para preencher as lacunas, foi considerado que suas análises não contribuiriam para a validação desse exercício, visto que há a possibilidade de que alguns alunos possam simplesmente ter escolhido uma das duas respostas sem precisar ter uma justificativa para a escolha.

6.4. Considerações gerais sobre as atividades realizadas

Nas atividades desenvolvidas com os alunos, apesar de ser mencionado que não existia valor numérico para uma expressão onde é realizada uma divisão por zero, durante a realização da atividade com o Jogo das Operações, pode-se notar que houve este erro em um dos grupos de alunos. Possivelmente isso tenha ocorrido, pois havia confusão se o zero teria que ser utilizado como numerador ou denominador de uma divisão para que isso aconteça. Isso pode ser justificado, pois numa das rodadas um grupo me perguntou em qual dos dois casos isso ocorria. Além disso, no questionário, e em uma das expressões escritas no quadro durante a atividade com o jogo, foi observado que alguns alunos desta turma já apresentavam dificuldade em diferenciar duas operações de subtração ou divisão onde as ordens dos números eram diferentes entre si.

Em alguns casos, há a possibilidade dos alunos terem confundido o objeto matemático de sua representação, pois, assim como afirma Duval (2004; 2005), não souberam dispor de mais de uma representação para um mesmo objeto, visto que alguns se limitaram muito à utilização de algoritmos de cálculos aritméticos para representar os problemas, ao invés das expressões numéricas. É possível também que alguns deles preferiram utilizar os algoritmos do que realizar os cálculos com calculadora, o que justificaria ainda mais o fato de uns terem utilizado como resultado de uma expressão números inteiros, ao invés da forma decimal.

As perguntas realizadas durante a atividade com a Planilha Eletrônica para Expressões Numéricas poderiam ter sido melhor direcionadas, como ter feito referência às expressões que deviam ser comparadas nas primeiras questões (por exemplo, perguntar se as expressões “a” e “b” são sempre iguais, depois as “a” e “c” e por último as “a” e “c”, ao invés de questionar se todas elas são sempre iguais). Além disso, cada questão da folha com os exercícios poderia ter sido relacionada ao seu caso correspondente, assim como ocorreu dentro da planilha eletrônica.

Alguns alunos também se limitaram a observar somente as expressões que foram utilizadas ao abrir a planilha eletrônica, sem terem modificado os números que as compõem. Por essa razão, poderia ter deixado vazia as células nas quais eram pra ser preenchidas com os números das expressões. Outra forma para lidar com essa situação é convencê-los que, na matemática, não basta afirmar que algo ocorre para todos os casos tomando como base somente um deles. Para justificar essa afirmação, poderia ser dado o seguinte exemplo, que é falso, aos alunos: $a \times a = a + a$ acontece para qualquer número real a, pois $2 \times 2 = 2 + 2$.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho procurou verificar de que forma as atividades investigativas com calculadora e planilha eletrônica, propostas para uma turma de sétima série, poderiam contribuir para o desenvolvimento de conceitos e propriedades referentes às quatro operações básicas numa expressão numérica. As análises das produções dos alunos foram com base na teoria das Representações Semióticas, de Raymond Duval, e o trabalho foi organizado conforme os princípios da teoria da Engenharia Didática.

Com a Engenharia Didática, foi possível comparar determinados conceitos que os alunos tinham conhecimento antes em relação ao que aprenderam durante a experimentação das atividades e a organização da pesquisa nos princípios dessa teoria contribuiu para a escolha da prática de ensino utilizada. As resoluções dos alunos puderam ser analisadas com a teoria das Representações Semióticas, onde a coleta de dados poderia ter sido feito de outras maneiras em alguns momentos. Esta constatação se deve ao fato de que a maioria dos alunos não estão acostumados a escrever o que pensou, deixando de explicitar fatos importantes que contribuiriam para esta análise. O registro da língua falada, com a utilização de instrumentos de gravação, poderia ter sido utilizado.

O ambiente investigativo no qual foram inseridos, com a utilização da calculadora e da planilha eletrônica na segunda e na terceira aula, respectivamente, mostrou ser mais efetivo em relação à participação dos alunos com as atividades do que com o método tradicional de ensino realizado na primeira aula, onde foi proposta uma situação-problema aos alunos de forma que ela fosse resolvida no quadro com o auxílio deles. Uma das possibilidades que justifique esse acontecimento é o poder que a tecnologia possui em interferir no comportamento do sujeito, visto que, na medida em que as atividades envolviam o uso de uma ferramenta com tecnologia mais avançada, pois vimos primeiro ser utilizada a calculadora e depois o computador, os alunos demonstraram estar mais interessados nas atividades que eram propostas. Outra possibilidade, que não exclui necessariamente a primeira, é de que os alunos puderam observar as expressões numéricas em perspectivas variadas com o uso desses recursos, ao invés de somente utilizar anotações no caderno e quadro-negro, que possivelmente foram os meios em que eles mais puderam estudar sobre esse conteúdo.

A atividade do Jogo das Operações trouxe discussões interessantes entre os professores e os alunos, como a divisão de um número por zero e de que forma o valor, que na realidade não existe, de uma expressão que contém esse tipo de operação poderia ser considerado na pontuação do jogo. Também pode-se notar que os alunos de grupos diferentes trocaram informações entre si ao demonstrarem uns aos outros uma expressão que poderia ser utilizada no lugar de outra que já havia sido escolhida. É importante que ocorra essa troca de experiências entre os alunos, tendo um aumento da variedade de maneiras para o aprendizado, pois muitas vezes o aluno aprende mais com outro colega do que com o professor. Além disso, essa reação mostrou que os alunos pareciam estar envolvidos com esta atividade.

Os alunos também demonstraram arraigados a alguns conceitos vistos na aritmética das séries iniciais – como é o caso, por exemplo, de utilizar somente os algoritmos de cálculos aritméticos na resolução dos problemas – o que pode dificultar a transição entre esses conceitos para os algébricos.

Na análise prévia, observou-se que alguns alunos não obedeciam à ordem hierárquica das operações na resolução de expressões numéricas. Durante a prática, houve melhoras na aprendizagem dos alunos, sendo que todos os alunos resolviam as expressões numéricas de forma correta. Espera-se que este, e também outros conceitos relacionados às operações nas expressões numéricas vistos durante as atividades, possa contribuir para a resolução de problemas algébricos nos quais os alunos estão estudando e ainda estudarão durante a sua vida escolar.

Apesar de ocorrer alguns erros em relação à aplicação da terceira atividade, como algumas configurações realizadas na Planilha Eletrônica para Expressões Numéricas – que poderiam ter sido feitas de outras maneiras – e as perguntas relativas a esta atividade – que poderiam ter sido melhor direcionadas – ela demonstrou ser a mais rica das três no que se refere à participação dos alunos.

Além das considerações já realizadas em relação a melhorias que poderiam ser feitas em relação à aplicação da Planilha Eletrônica para Expressões Numéricas em sala de aula, ela fica a disposição para professores que considerarem pertinente a sua utilização e também como objeto de pesquisa, podendo interferir no modo como ela pode ser aplicada. Além disso, se espera que ela seja uma motivação para professores criarem seus próprios objetos de aprendizagem em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO; Denise A.; SOARES, *Eduardo S. Calculadoras e Outras Geringonças na Escola*. Revista Presença Pedagógica, set./out. 2002. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/carmen/disciplinas/Tics/calculador/47.pdf>. Acesso em: 03 nov. 2013.

ARTIGUE, M.; DOUADY, R; MORENO, L.; GÓMEZ, P. (Ed.). *Ingenieria didáctica em educatión matemática*, pp. 33-59. 1995. “uma empresa docente” & Grupo Editorial Iberoamérica. Impreso em México.

AZEVEDO, João Luis Antoniazzi de. *Trabalhando conceitos matemáticos com tecnologias informaticas por meio da elaboracao de projetos de construcao civil*. 2008. 177f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro (SP). Orientador: Marcus Vinicius Maltempi. Disponível em: <http://www.fae.ufmg.br/ebrapem/completos/06-14.pdf>. Acesso em: 09 nov. 2013.

BOYER, Carl Benjamin. *A history of mathematics*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. *Guia de livros didáticos: PNLD 2011: Matemática*. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.

_______. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. *Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática*. Zetetike, Campinas – UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118).

DUVAL, Raymond. *Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais* (Sémiosis et. Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels): (fascículo I)/Raymond Duval. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

_______. *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática*. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). Aprendizagem em Matemática. Campinas: Papirus, 2005.

FEIJÓ, Adriano Brandão. *O Ensino de Matemática Financeira na Graduação com a Utilização da Planilha e da Calculadora: Uma Investigação Comparativa*. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

FIOREZE, Leandra Anversa. *Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade: uma análise a partir da teoria dos campos conceituais*. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2010.

FLORES, Jeronimo Becker. *O uso de planilhas eletrônicas nas aulas de matemática no ensino fundamental*. Universidade de Caxias do Sul, julho/2013. Disponível em < http://www.fatecbauru.edu.br/ojs/index.php/CET/article/view/71/65>. Acesso em: 09 nov. 2013.

FRÓES, Jorge R. M. Educação e Informática: A Relação Homem/Máquina e a Questão da Cognição. Disponível em <http://edu3051.pbworks.com/f/foes+cognicao_aula2.PDF>. Acesso em: 15 dez. 2013.

GUELLI, Oscar. *Contando a História da Matemática. A Invenção dos Números*. Vol. 1. São Paulo: Ática, 1992.

_______. *Contando a História da Matemática. Equação: o idioma da álgebra*. Vol. 2. São Paulo: Ática, 1992.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. *Matemática e Realidade*. 6ª série. 2. ed. São Paulo. Atual, 1991.

MAGRO, Juliana Zys. *Uso da calculadora na sala de aula: ensino de potências reais*. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

MODANEZ, Leila. *Das seqüências de padrões geométricos à introdução do pensamento algébrico*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC – São Paulo, 2003.

NETTO, Scipione Di Pierro. *Matemática: Conceitos e Histórias*. 6ª série. 4. ed. São Paulo. Scipione, 1996.

PAIS, Luiz Carlos. *Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PEREIRA, Marcelo Eduardo. *Análise de situações de aprendizagem envolvendo números racionais: Uma abordagem para o ensino de argumentações e provas na Matemática Escolar*. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 2007, 217 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

RECH, Simone Teresinha. *Matemática Financeira: juros simples e compostos no Ensino Fundamental*. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Sapiranga, 2011. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/31628?locale=en>. Acesso em: 09 nov. 2013.

SELVA, Ana Coelho Vieira; BORBA, Rute Elizabete S. Rosa. *O uso da calculadora nos anos iniciais do ensino fundamental*. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

SILVA, Graziele Cristine Moraes da; SILVA, Maria José Ferreira da. *O jogo Contig 60, as expressões numéricas e os registros de representação semiótica*. Revista Horizontes, jan./jun. 2009. Disponível em: <http://webp.usf.edu.br/itatiba/mestrado/educacao/uploadAddress/61-67%5B14024%5D.pdf>. Acesso em: 03 nov. 2013.

THEODORO, Flavio Roberto Faciolla. *O uso da matemática para a educação financeira a partir do ensino fundamental*. Taubaté-SP, maio de 2008. Disponível em: <http://www.academiafinanceira.com.br/educacaofinanceira/matematica.pdf>. Acesso em: 09 nov. 2013.

VITALI, Tamara Versteg. *Trabalhando a matemática financeira através da resolução de problemas: a perspectiva da visualização a partir do eixo das setas*. Universidade do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

APÊNDICE A – ANÁLISE PRÉVIA

COLÉGIO DE APLICAÇÃO UFRGS

SÉTIMO ANO – 2013

NOME:

EXERCÍCIOS – EXPRESSÕES NUMÉRICAS

1) Qual das alternativas abaixo é o resultado da expressão $3 + 9 \times 7 - 1$?

   a) 83 b) 72 c) 65

2) Emílio foi ao parque com sua irmã e levou R$ 10,00. Ele gastou R$ 3,00 com um saco de pipoca e deu metade do que sobrou para sua irmã poder comprar alguma coisa. Com quantos reais ele ficou?

3) Escreva:
   a) a expressão que resulte o **maior** valor possível utilizando os números 4, 5 e 7 e as operações "–" e "×".

   b) a expressão que resulte o **menor** valor possível utilizando os números 2, 3 e 8 e as operações "+" e "÷".

4) Qual o resultado da expressão $0 \div 5 \div 1$?

5) Qual o resultado da expressão $9 \div 3 \div 0$?

APÊNDICE B – ATIVIDADE DA AULA 3 (PRIMEIRA PARTE)

Colégio de Aplicação UFRGS

Sétimo Ano - 2013

Colégio de Aplicação UFRGS

Nome:

Atividade de Expressões Numéricas com Planilha Eletrônica

1) Que expresssões numéricas acima não resultam sempre o mesmo valor? Por quê?

2) Que expressões numéricas acima não resultam sempre o mesmo valor e por quê?

3) Que expressões acima resultam sempre o mesmo valor? Por quê?

4) Que expressões acima resultam sempre o mesmo valor? Por quê?

APÊNDICE C – ATIVIDADE DA AULA 3 (SEGUNDA PARTE)

5) Analisando as expressões acima, em que situações encontramos o zero como resultado?

6) Que expressões acima resultam sempre o mesmo valor? O que elas têm em comum?

7) Que expressões acima resultam sempre o mesmo valor? O que elas têm em comum?

8) Modifique o valor de uma célula azul, amarelo ou vermelho por zero. O que acontece com os resultados de cada uma das expressões?

9) Preencha as lacunas:

a) Quanto mais distante de zero for o valor colocado na célula azul:

- mais ______ de zero será o resultado das expressões "a" e "b". (distante-próximo)
- mais ______ de zero será o resultado das expressões "c", "d", "e" e "f". (distante-próximo)

b) Quanto mais próximo de zero for o valor da célula vermelha:

- mais ______ de zero será o resultado das expressões "a", "b", "c" e "d". (distante-próximo)
- mais ______ de zero será o resultado das expressões "e" e "f". (distante-próximo)

ANEXO A – FOTOS DA EXPERIMENTAÇÃO

Figura 42 – Foto da experimentação da atividade envolvendo o Jogo das Operações

Figura 43 – Foto da experimentação da atividade envolvendo o Jogo das Operações

Figura 44 – Foto da Planilha Eletrônica para Expressões Numéricas sendo utilizada em um dos computadores fornecidos pelo PROUCA