Intersecção de Curvas Planas

CNPq/UFRGS
Apoio

Lucas Gabriel Mota da Silveira (lucasgmsilveira@gmail.com)
Bolsista

Vilmar Trevisan (trevisan@mat.ufrgs.br)
Orientador

Introdução

Este trabalho apresenta uma das várias aplicações da resultante junto com o cálculo do mdc entre polinômios em duas variáveis: a intersecção de curvas planas.
Com o auxílio da resultante, intersectar duas curvas planas será reduzido ao cálculo de raízes de polinômio em uma variável. O Teorema de Bézout aparece para nos dizer a quantidade de pontos na intersecção: será o produto do grau total dos polinômios em questão (desde que seu mdc seja igual à 1).
Caso o mdc entre tais polinômios seja um polinômio não constante em duas variáveis, teremos uma resultante nula, o que nos diz que teremos infinitos pontos de intersecção.

Finitude da intersecção

Apresentaremos a seguir alguns resultados que nos garantem a finitude da intersecção.

Lema 1 *Sejam $f,g \in F[X,Y]$ polinômios sem fatores irredutíveis em comum e F corpo. Então existe uma relação*

$$af + bg = c(X),$$

onde $a,b \in F[X,Y]$ enquanto c é um polinômio apenas na variável X, não nulo.

Se $f \in F[X]$ é um polinômio não constante, sabemos que a equação $f(X) = 0$ admite no máximo um número finito de soluções. O próximo resultado é uma versão deste fato para polinômios em duas variáveis.

Proposição 1 *O conjunto das soluções de um sistema de duas equações polinomiais a duas incógnitas sem fator irredutível em comum é finito.*

A proposição acima utiliza o Lema 1 em sua demonstração, e poderia ser reformulada em linguagem geométrica da seguinte forma: *a intersecção de duas curvas algébricas planas sem componentes em comum é finita.*

A resultante

Definição 1 *Sejam $f = \Sigma_{0\leq j\leq n}\, a_j x^j$, $g = \Sigma_{0\leq j\leq n}\, b_j x^j$, com $a_j,b_j \in F$ corpo. Chamamos de matriz de Sylvester a matriz $(m+n)_x(m+n)$ definida por*

$$S = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & & a_n & 0 \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & & b_m & 0 \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & & b_m \end{pmatrix}$$

onde os coeficientes de f aparecem nas m primeiras linhas e os coeficientes de g nas últimas n linhas.

Definição 2 *Se F corpo e $f,g \in F[X]$, então $res(f,g) = det\ S$ é a resultante entre f e g.*

Teorema 1 *Sejam $f,g \in F[X]$ não nulos de graus n,m, respectivamente, e F corpo. São equivalentes:*

i) $mdc(f,g) = 1$
ii) $res(f,g) = det\ S \neq 0$.
iii) *não existem $s,t \in F[X] \setminus \{0\}$ tais que*

$$sf + tg = 0, \quad \partial s < m, \quad \partial t < n.$$

(∂ = grau)

Teorema de Bézout *Sejam $f,g \in F[X,Y]$, $\partial f = n$, $\partial g = m$, F corpo, $A=\{(a,b) \in F^2;\ f(a,b)=0\}$ e $B=\{(a,b) \in F^2;\ g(a,b)=0\}$. Se $mdc(f,g) = 1$ em $F[X,Y]$ então $A \cap B$ possui nm pontos.*

Exemplo 1 *Sejam $f = X^2 + Y^2 - 1$ e $g = 3X + 4Y$ polinômios em $F[X,Y]$. Então $A=\{(a,b) \in F^2;\ f(a,b)=0\}$ é um círculo de raio 1 centrado na origem e $B=\{(a,b) \in F^2;\ g(a,b)=0\}$ é uma reta com declividade -3/4 que passa pela origem. O Teorema de Bézout nos diz que existem $\partial f \cdot \partial g = 2$ pontos de intersecção (destacados na figura abaixo, em preto).*
Calculando a resultante, temos:

$$res_Y(f,g) = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & X^2-1 \\ 4 & 3X & 0 \\ 0 & 4 & 3X \end{pmatrix} = 25X^2 - 16,$$

E a projeção Z de $A \cap B$ *no eixo x consiste dos dois zeros $Z=\{4/5,-4/5\}$ da $res_y(f,g)$ (em vermelho na figura). Obtemos os respectivos valores para y tomando os mdcs:*

$$mdc\left(f\left(\frac{4}{5},Y\right),g\left(\frac{4}{5},Y\right)\right) = mdc\left(Y^2 - \frac{9}{25}, 4Y + \frac{12}{5}\right) = Y + \frac{3}{5},$$

$$mdc\left(f\left(-\frac{4}{5},Y\right),g\left(-\frac{4}{5},Y\right)\right) = mdc\left(Y^2 - \frac{9}{25}, 4Y - \frac{12}{5}\right) = Y - \frac{3}{5},$$

e, portanto, os dois pontos de intersecção são:

$$A \cap B = \left\{\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right),\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)\right\}.$$

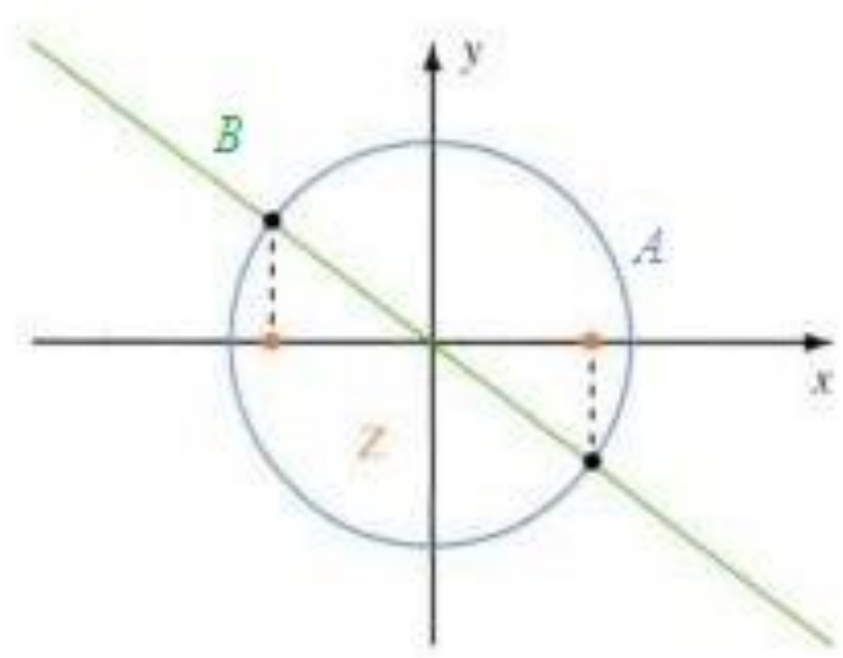

Figura 1: *Intersecção do círculo A com a reta B.*

Referências

Gathen, J. von zur e Gerhard, J. (2003). Modern Computer Algebra. 2nd edition. Cambridge University Press.
Vainsencher, I. (2005), Introdução às Curvas Algébricas Planas.