Mecânica Quântica no Espaço de Fase

Guilherme M. Oliveira

Bolsista: PIBIC CNPq-UFRGS

Orientador: S. R. Dahmen

Instituto de Física - Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Introdução

Desde o surgimento da Mecânica Quântica(MQ), supõe-se que esta é mais geral do que a teoria clássica até então conhecida. Sendo assim, deveríamos ser capazes de estudar sistemas quânticos em um espaço de fases. Neste trabalho, elaboramos um método para realizar este procedimento.

Equação de Liouville

Supondo conhecida uma função densidade de probabilidade $\rho(q,p,t)$, podemos analisar sua evolução temporal em um certo volume do espaço de fases com auxílio da equação de Liouville:

$$-\frac{\partial\rho(q,p,t)}{\partial t} = \left\{\rho(q,p,t), H(q,p)\right\}. \tag{1}$$

Com este resultado estudamos sistemas descritos por uma superposição coerente de autoestados de energia. No caso onde $\rho(q,p,t) = \rho(q,p)$, podemos ligar esta equação à equação de Schrödinger independente do tempo.

A Transformação de Wigner

Com a equação de Liouville podemos obter diversas informações sobre o sistema físico em estudo. Entretanto, ela não nos proporciona tanta informação quanto a equação de Schrödinger no espaço de Hilbert. Portanto, precisamos de método para transformar os autoestados do espaço de Hilbert em funções do espaço de fases. O método de conversão por nós aplicado fora a *Transformação de Wigner*:

$$\rho(q,p,t) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dx\; \Psi^{\dagger}\left(q-\frac{x}{2},t\right)\, e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\,\Psi\left(q+\frac{x}{2},t\right). \tag{2}$$

Combinação Linear

Dado um pacote de ondas inicial $F(q,p,t)$, podemos escrevê-lo como a superposição de funções de Wigner no espaço de fases na forma:

$$F(q,p,t) = \sum_{n}^{\infty}\sum_{m}^{\infty} c_{nm}\,\rho_{nm}(q,p,t), \tag{3}$$

onde c_{nm} são os coeficientes de cada uma das respectivas funções do somatório. Usando as propriedades das transformadas de Wigner, podemos mostrar que:

$$c_{lk} = 2\pi\hbar\int dqdp\;\rho_{kl}(q,p,t)F(q,p,t). \tag{4}$$

Oscilador Harmônico

Um dos sistemas físicos mais importantes tanto para a MQ quanto para a Mecânica Clássica (MC) é o oscilador harmônico. Mostramos, portanto, alguns dos resultados obtidos.

Utilizando a equação (2) podemos calcular as respectivas equações de Wigner para o espaço de fases quântico/deformado com $\beta = \frac{M\omega}{\hbar}$:

$$\begin{aligned}\rho_{nm}(q,p,t) = {} & \frac{\sqrt{2^{n+m}n!m!}}{\pi\hbar}\, e^{-\beta q^2-\frac{p^2}{\beta\hbar^2}}\, e^{i(n-m)wt}\times \\ & \times\sum_{r=0}^{min(n,m)} \frac{(-1/2)^r}{(m-r)!(n-r)!r!}\left(\sqrt{\beta}q-\frac{ip}{\hbar\sqrt{\beta}}\right)^{m-r}\left(\sqrt{\beta}q+\frac{ip}{\hbar\sqrt{\beta}}\right)^{n-r}.\end{aligned} \tag{5}$$

Superposição equiprobabilística

O primeiro caso estudado é o de uma superposição equiprovável do estado fundamental e do primeiro estado excitado do oscilador:

$$\rho(q,p,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{1}\sum_{m=0}^{1}\rho_{nm}(q,p,t), \tag{6}$$

onde $\rho_{nm}(q,p,t)$ são dadas pela equação (5). Plotando este resultado obtemos:

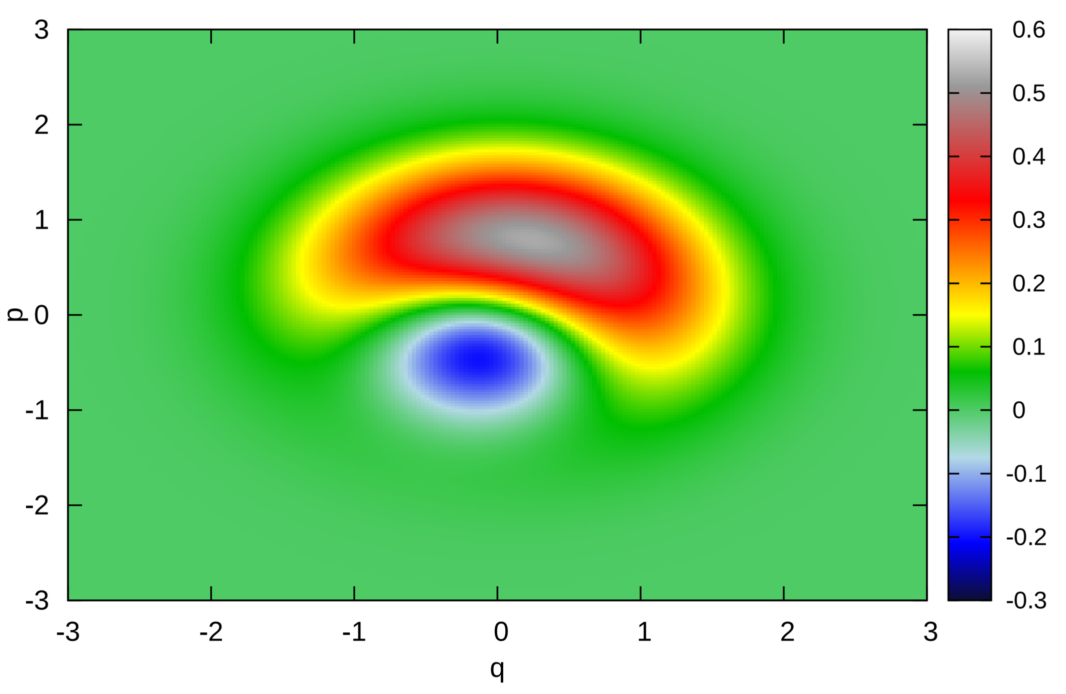


Figure 1: **Função densidade de quasi-probabilidade.** $\hbar = M = \omega = 1; t = 5$

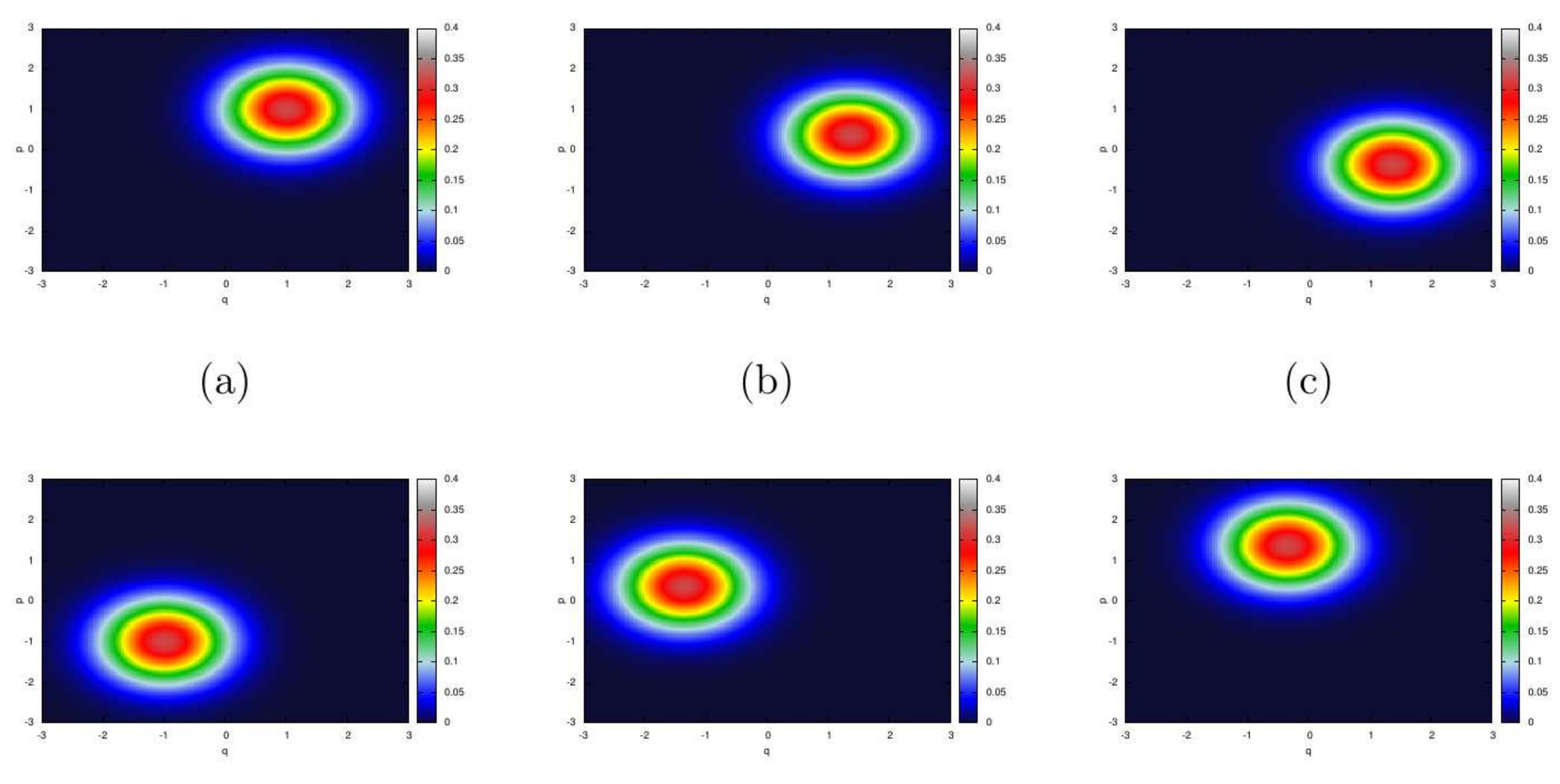
Integrando para q ou p, temos os mesmos resultados calculados via equação de Schrödinger para o espaço de momentum e posição, respectivamente.

Estado coerente

Usando a equação (4), podemos calcular os coeficientes de uma superposição coerente para o oscilador harmônico. Estes são dados por:

$$c_{nm} = \frac{1}{\sqrt{2^{n+m}n!m!}}\left(\sqrt{\beta}q_o-\frac{ip_o}{\hbar\sqrt{\beta}}\right)^n\left(\sqrt{\beta}q_o+\frac{ip_o}{\hbar\sqrt{\beta}}\right)^m e^{-\frac{\beta}{2}q_o^2-\frac{p_o^2}{2\beta\hbar^2}}, \tag{7}$$

onde q_o e p_o são os valores esperados de posição e momentum em $t=0$, respectivamente. Realizando o somatório (3) com estes coeficientes e suas respectivas funções, obtemos a seguinte trajetória no espaço de fases:



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

Figure 2: **Oscilador clássico com energia $\frac{3}{2}\hbar\omega$. Em (a) t=0.00 adicionando-se $\frac{\pi}{6}$ até (f).** $\hbar = M = \omega = p_o = q_o = 1$

Referências

[1] H.J. Groenewold. - On the principles of elementary quantum mechanics. *M. Nijhoff*, 1946.

[2] L. Cohen - Generalized Phase-Space Distribution Functions. *J Math Phys* 7(5), 1966.

[3] M.Blaszak, Z. Domański. - Phase space quantum mechanics. *Annals of Physics*, 2011