CORPOS QUADRÁTICOS E ANÉIS DE INTEIROS QUADRÁTICOS

HASELEIN, Walter Mendes – Bolsista
POGORELSKY, Barbara Seelig - Orientadora

Neste trabalho, serão apresentados os conceitos de Corpos Quadráticos e Anéis de Inteiros Quadráticos, bem como suas características.

CORPOS QUADRÁTICOS

Todo subcorpo de K dos números complexos $\mathbb{C}$ contém o corpo dos racionais $\mathbb{Q}$. Logo, todo subcorpo de $\mathbb{C}$ pode ser visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.

Definição 1. Um corpo quadrático é todo subcorpo de $\mathbb{C}$ de dimensão dois como $\mathbb{Q}$-subespaço vetorial.

Para $\alpha \in \mathbb{C}$, denotaremos $\mathbb{Q}[\alpha] = \{g(\alpha) \in \mathbb{C}; g(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$ e dizemos que $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ é seu polinômio mínimo se for mônico, anular α e se for de grau mínimo com essa propriedade.

Se $\alpha \in \mathbb{Q} \subseteq$ K, com K subcorpo quadrático, então seu polinômio mínimo é $x - \alpha$.

Se $\alpha \in K \setminus \mathbb{Q}$, então $f(x) = x^2 - qx - r$, com $q, r \in \mathbb{Q}$ é o polinômio mínimo de α.

Proposição 1. Todos os corpos quadráticos são da forma $\mathbb{Q}[\sqrt{m}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{m}$, com m inteiro e livre de quadrados.

Definição 2. Um corpo quadrático $K = \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ é *real* se $K \subseteq \mathbb{R}$ ($\Leftrightarrow m > 0$) e *imaginário* se $K \nsubseteq \mathbb{R}$ ($\Leftrightarrow m < 0$).

Seja $\sigma : \mathbb{Q}[\sqrt{m}] \rightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ definido por $\sigma(1) = 1$ e $\sigma(\sqrt{m}) = -\sqrt{m}$. Chamaremos $\sigma(\alpha)$ o conjugado de α e denotaremos por α'.

Se $\alpha = r + s\sqrt{m} \in \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$, então definimos seu Traço e Norma respectivamente por:

$\mathrm{Tr}(\alpha) = \alpha + \alpha' = 2r$.

$\mathrm{N}(\alpha) = \alpha \cdot \alpha = p^2 - mr^2$.

INTEIROS QUADRÁTICOS

Definição 3. Um número complexo é dito *algébrico* se for raiz de um polinômio mônico em $\mathbb{Z}[x]$.

Um anel de inteiros quadráticos, denotado por $\mathcal{O}_k$ é formado por inteiros algébricos de um corpo quadrático.

Proposição 2. Seja $K = \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$. Então:

$$\mathcal{O}_k = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{m}], se\ m \equiv 2{,}3\ (mod\ 4) \\ \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right], se\ m \equiv 1\ (mod 4) \end{cases}$$