# Anéis de Inteiros de Corpos Quadráticos

Denise Amengual Gaitsch
Licenciatura em Matemtica Noturno UFRGS
Orientador: Bárbara Seelig Pogorelsky

## Anéis de Inteiros de Corpos Quadráticos

*Definição:* Se $\alpha$ = a + b$\sqrt{m} \in \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$, definimos a Norma por N($\alpha$) = a$^2 - mb^2$.

*Definição:* Um anel de inteiros quadráticos, $\mathcal{O}_\mathcal{K}$, é formado por inteiros algébricos de um corpo quadrático.

*Proposição:* Seja K=$\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$. Então:

$$\mathcal{O}_\mathcal{K} = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{m}], se \quad m \equiv 2,3(mod \quad 4) \\ \mathbb{Z}\left[\dfrac{1+\sqrt{m}}{2}\right], se \quad m \equiv 1(mod \quad 4) \end{cases}$$

## Elementos Destacados em $\mathcal{O}_\mathcal{K}$

Seja A um domínio de integridade.

*Definição:* $\varepsilon$ se chama *unidade* se existe $v \in$ A tal que $\varepsilon$ $v$= $1_A$; $v$= $\varepsilon^{-1}$.

*Exemplo 1:* Seja ${\mathcal{O}_\mathcal{K}}^\times$ o conjunto de unidades de $\mathcal{O}_\mathcal{K}$ para K=$\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$. Calcularemos ${\mathcal{O}_\mathcal{K}}^\times$ para corpos quadráticos imaginários K=$\mathbb{Q}[\sqrt{m}](m<0)$.

R.: $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]^\times = \{\pm1, \pm\sqrt{-1}\}$,
$\mathbb{Z}[\sqrt{m}]^\times = \{\pm1\}$ para $m \neq -1$,
$\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right]^\times = \left\{\pm1, \pm\frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \pm\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right\}$.

*Definição:* $\gamma$ se chama irredutível se não é nulo, não é unidade e $\gamma = \alpha\beta$ implica que $\alpha$ ou $\beta$ é uma unidade.

*Se $\gamma \in \mathcal{O}_\mathcal{K}$ satisfaz N($\alpha$) = p, p primo em $\mathbb{Z}$, então $\gamma$ é irredutível*

No próximo exemplo veremos que a recíproca desta afirmação não é verdadeira.

*Exemplo 2:* O elemento 3 é irredutíel em $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ mas N(3)=9.

*Definição:* $\pi$ se chama primo se não é nulo, não é unidade e se $\pi \mid \alpha\beta$ então $\pi \mid \alpha$ ou $\pi \mid \beta$.

Sabemos que em todo domínio de integridade todo elemento primo é irredutível. A recíproca vale em $\mathbb{Z}$, mas geralmente não em $\mathcal{O}_\mathcal{K}$.

*Exemplo 3:* O número 3 é um elemento irredutível em $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ que divide 15, $15 = (1+\sqrt{-14})(1-\sqrt{-14})$, mas não divide $1\pm\sqrt{-14}$.

## Fatoração em $\mathcal{O}_\mathcal{K}$

Seja A um domínio de integridade.

*Definição:* A se diz *fatorável* se todo elemento $\alpha$ não nulo, não unidade, pode ser escrito como $\alpha = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \ldots \cdot \gamma_n$ com $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ elementos irredutíveis.

*Definição:* A se diz *Domínio de Fatoração Única (DFU)* se é fatorável e se $\alpha = \gamma_1 \ldots \gamma_n = \delta_1 \ldots \delta_m$ ($\gamma_i$, $\delta_i$ irredutíveis) então n = m e existe uma permutação s de n elementos tal que $\gamma_i$ é associado a $\delta_{s(i)}$ para todo i, ou seja, existe $\varepsilon_i$ unidade tal que $\varepsilon_i\gamma_i = \delta_{s(i)}$.

*Propriedade:* Todo $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathcal{O}_\mathcal{K}$ e não unidade, se fatora como produto de irredutíveis em $\mathcal{O}_\mathcal{K}$.

*Exemplo 4:* Notemos que $3^4 = 81 = (5+2\sqrt{-14})(5-2\sqrt{-14})$. Vimos no exemplo 3 que 3 é irredutível em $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$. Veremos que $5\pm2\sqrt{-14}$ também são.