

Haroldo Fróes de Azambuja

A função delta

Propriedades e Aplicações

Tese apresentada no concurso para
livre docência da Cadeira de Física
I da Escola de Engenharia da Uni-
versidade do Rio Grande do Sul.

Pôrto Alegre
1964

Haroldo Fróes de Azambuja

A FUNÇÃO DELTA
Propriedades e Aplicações

Pôrto Alegre
1964

P R E F Á C I O

A famosa função delta de Dirac, definida em geral por

$$\delta(x) = 0; \quad x \neq 0$$

com a propriedade

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(x) dx = 1$$

é bastante conhecida daqueles que já estudaram eletromagnetismo, em tratados modernos, ou Mecânica quântica.

Todos concordam em atribuir a Dirac o mérito da introdução da delta em física matemática, pois apesar de ter sido de Hertz a idéia de usar uma tal função, em um artigo seu sobre Mecânica Estatística, não resta dúvida ter sido Dirac que em primeiro lugar a usou extensivamente em seu livro "Quantum Mechanics", depois de estabelecer suas principais propriedades.

Pela definição usual, concluímos tratar-se, como dizem Morse e Feshbach, de uma função "patológica" por não possuir "propriedades físicas" normais de continuidade e derivabilidade no ponto $x = 0$. Sob ponto de vista matemático, a $\delta(x)$ não é uma função. Apesar disto, a $\delta(x)$ tratada formalmente como função nos permite estabelecer uma série de propriedades e o uso destas propriedades nos permite obter resultados corretos.

Recentemente, vários autores, tais como Schwartz, Temple, Mikusinski, etc., desenvolveram a teoria das funções generalizadas ou distribuições, estando a delta incluída nesta classe de funções.

No presente trabalho, pela limitação de tempo e espaço, não seria possível um tratamento completo do assunto. Nestas condições, uma escolha se impunha entre duas possíveis orientações:

1^a - Estudo da delta dentro das teorias da distribuição e das funções generalizadas, sob um ponto-de-vista essencialmente matemático; ou:

2^a - Estudo das propriedades formais da delta, assuntos que envolvem a delta e aplicações a problemas físicos.

Escolhemos a 2^a por razões que nos pareceram óbvias em um concurso para a cadeira de Física I da Escola de Engenharia.

Esperamos, sinceramente, possa, esta pequena monografia, ter alguma finalidade além daquela decorrente de exigência regimentar.

Pôrto Alegre, dezembro de 1963

H.F. de Azambuja

Í N D I C E

1. - A Função de Heaviside	11
2. - A Função Delta - Propriedades e Ortonormalização	21
3. - Representações da Delta	41
4. - A Delta n-Dimensional	51
5. - Transformada de Fourier	67
6. - Transformada de Laplace	85
7. - Função de Green	93
8. - Aplicações	113

--oo0oo--

1. - A FUNÇÃO DE HEAVISIDE

1.1 - Definição

1.2 - Função $H(x - x_0)$

1.3 - Função $H(-x)$

1.4 - Função $H(x_0 - x)$

1.5 - Derivada de $H(x)$

1.6 - Função $\Pi(x; x_1, x_2)$

1.7 - Propriedades Integrais:

1.7.1 - Integral Definida

1.7.2 - Integral Indefinida

1.8 - Representação Integral da Função $H(x)$

1. - FUNÇÃO DE HEAVISIDE

1.1 - DEFINIÇÃO

A função de Heaviside, também chamada função ressalto, que indicaremos por H , é definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \forall x < 0 \\ 1 & \forall x > 0 \end{cases} \quad (1.1-1)$$

e tem como gráfico (Fig. 1.1-1).

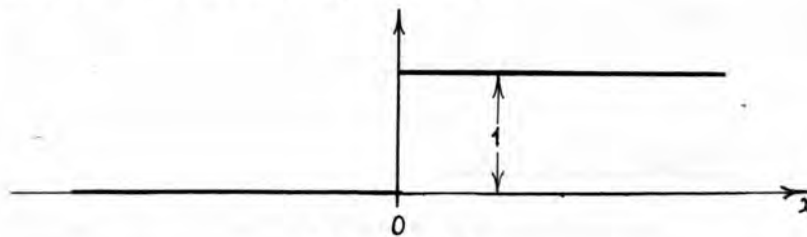


Fig. 1.1-1

Fisicamente esta função deve ser pensada como idealização da função contínua representada na fig. 1.1-2 para $\epsilon \rightarrow 0$.

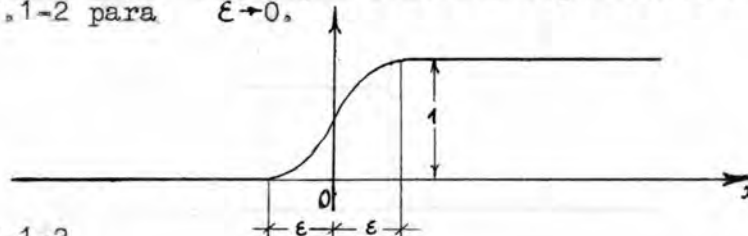


Fig. 1.1-2

Assim, por exemplo, o potencial $\Phi(x)$ do sistema na fig. 1.1-3 seria representado por uma função de Heaviside:

$$\Phi(x) = \Phi_0 H(x) \quad (1.1-2)$$

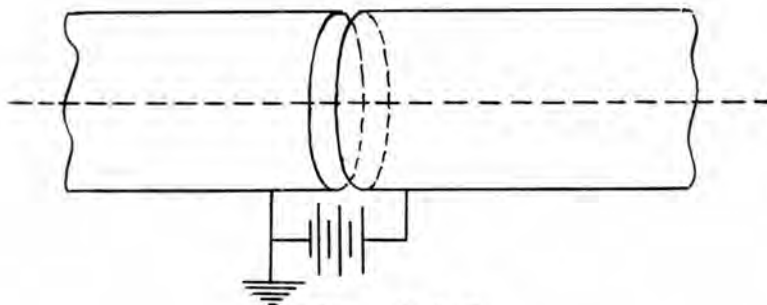


Fig. 1.1-3

Outro exemplo seria a aplicação de uma força F_0 aplicada no instante $t = 0$. Como a aplicação da força não é instantânea, a variação de F com o tempo seria:

$$F(t) = F_0 H(t) \quad (1.1-3)$$

1.2 - FUNÇÃO $H(x - x_0)$

De acordo com a definição em 1.1 temos:

$$H(x - x_0) = \begin{cases} 0 & x - x_0 < 0 \quad \text{ou} \quad x < x_0 \\ 1 & x - x_0 > 0 \quad \text{ou} \quad x > x_0 \end{cases} \quad (1.2-1)$$

O gráfico da função seria o da fig. 1.2-1.

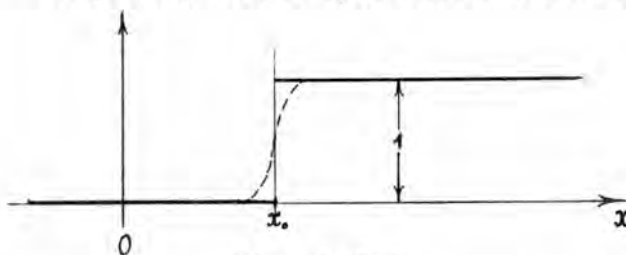


Fig. 1.2-1

$H(x - x_0)$ seria a idealização da função indicada em tracejado.

1.3 - FUNÇÃO $H(-x)$

De acôrdo com a definição de 1.1, temos:

$$H(-x) = \begin{cases} 0 & \forall -x < 0 \quad \text{ou} \quad x > 0 \\ 1 & \forall -x > 0 \quad \text{ou} \quad x < 0 \end{cases} \quad (1.3-1)$$

O gráfico da função está representado na fig. 1.3-1.

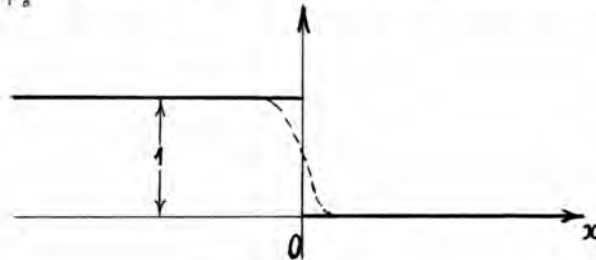


Fig. 1.3-1

$H(-x)$ seria a idealização da função indicada em tracejado.

1.4 - FUNÇÃO $H(x_0 - x)$

De acôrdo com a definição de 1.1, temos:

$$H(x_0 - x) = \begin{cases} 0 & x_0 - x < 0 \quad x > x_0 \\ 1 & x_0 - x > 0 \quad x < x_0 \end{cases} \quad (1.4-1)$$

O gráfico de $H(x_0 - x)$ está representado na fig. 1.4-1.

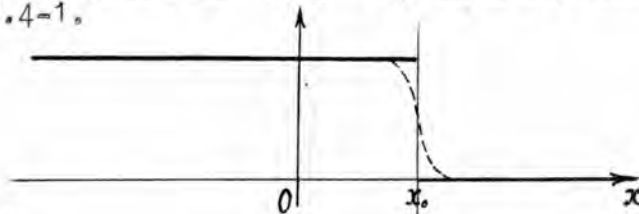


Fig. 1.4-1

Temos naturalmente de (1.4-1) e (1.2-1)
que:

$$H(x - x_0) + H(x_0 - x) = 1 \quad \forall x \neq x_0 \quad (1.4-2)$$

1.5 - DERIVADA de $H(x)$

Se pensarmos $H(x)$ como limite de função contínua a derivada $H'(x)$ terá a forma indicada na fig. 1.5-1 e possui a propriedade:

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} H'(x) dx = 1 \quad (1.5-1)$$

ou:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H'(x) dx = 1 \quad (1.5-2)$$

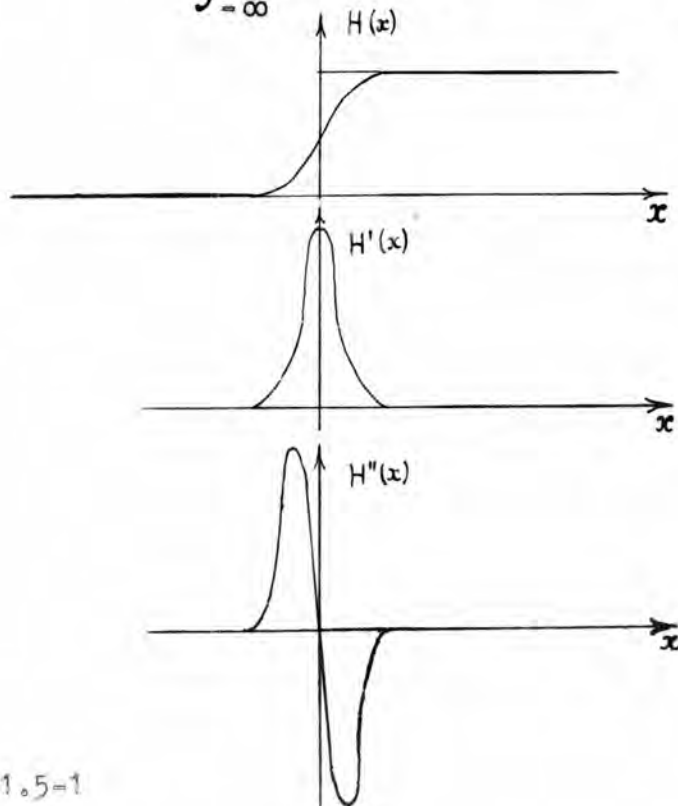


Fig. 1.5-1

Veremos que a propriedade (1.5-2) é característica da função delta a ser introduzida na seção 2.

A $H(x)$ tem derivadas sucessivas $H'(x)$, $H''(x)$, etc.

1.6 - FUNÇÃO $\Pi(x; x_1, x_2)$

Vamos definir a função $\Pi(x; x_1, x_2)$ por

$$\Pi(x; x_1, x_2) = H(x - x_1) - H(x - x_2) \quad (1.6-1)$$

ou seja:

$$\Pi(x; x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \forall x \notin (x_1, x_2) \\ 1 & \forall x \in (x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.6-2)$$

O gráfico da função está representado na fig. 1.6-1.

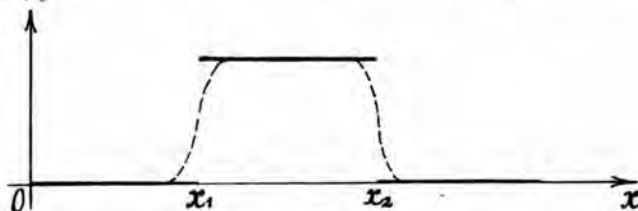


Fig. 1.6-1

Esta função serve para representar funções restritas a um intervalo (x_1, x_2) .

Assim, por exemplo, a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in (x_1, x_2) \\ 0 & \forall x \notin (x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.6-3)$$

é representada por

$$g(x) = \Pi(x; x_1, x_2) f(x) \quad (1.6-4)$$

O gráfico desta representação pode ser visto na fig. 1.6-2.

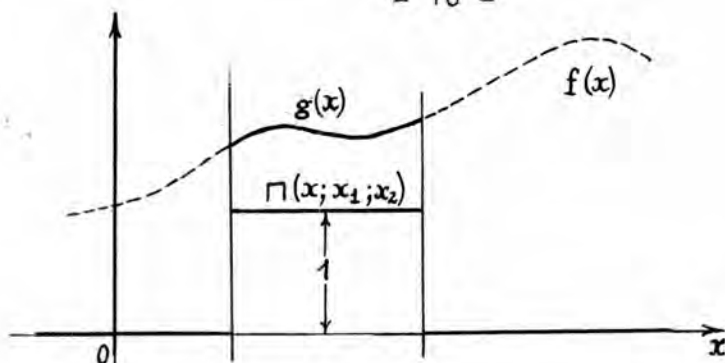


Fig. 1.6-2

1.7 - PROPRIEDADES DE INTEGRAIS

1.7.1 - Integral Definida

Das definições das funções $H(x - x_1)$ e $\Pi(x; x_1, x_2)$ temos de imediato as propriedades:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) H(x - x_0) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad (1.7-1)$$

onde: $[\alpha; \beta] = [x_1, x_2] \cap [x_0, \infty]$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \Pi(x; x'_1, x'_2) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad (1.7-2)$$

onde: $[\alpha; \beta] = [x_1, x_2] \cap [x'_1, x'_2]$.

1.7.2 - Integral Indefinida

Temos a propriedade

$$\int H(x - x_0) dx = (x - x_0) H(x - x_0) + C \quad (1.7-3)$$

Justifica-se a propriedade por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [(x - x_0) H(x - x_0) + C] &= \\ &= H(x - x_0) + (x - x_0) H'(x - x_0) \end{aligned}$$

e

$$(x - x_0) H'(x - x_0) = 0$$

Sem dúvida esta demonstração é formal.

1.8 - REPRESENTAÇÃO INTEGRAL DA FUNÇÃO DE HEAVISIDE

A função de Heaviside $H(x)$ pode ser expressa em forma integral:

$$H(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-iKx}}{K} dK \quad (1.8-1)$$

no plano complexo, onde C indica o contôrno especificado na fig. 1.8-1.

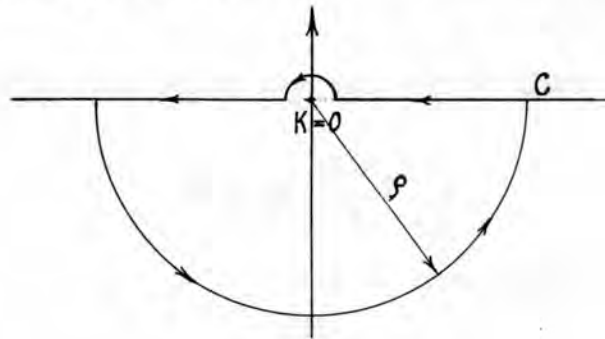


Fig. 1.8-1

Esta integral pode ser calculada pela teoria dos resíduos.

$$x > 0$$

Neste caso podemos fechar o contôrno por um semi-círculo de raio $\rho \rightarrow \infty$ no semi-plano inferior. A contribuição ao longo do semi-círculo é nula.

Assim usando o teorema dos resíduos:

$$\int_C \frac{e^{-iKx}}{K} dK = 2\pi i \operatorname{Res.} \left[\frac{e^{-iKx}}{K}; K = 0 \right]$$

como:

$$\operatorname{Res.} \left[\frac{e^{-iKx}}{K}; K = 0 \right] = 1$$

vem:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-iKx}}{K} dK = 1 \quad (1.8-2)$$

para $x > 0$.

$$x < 0$$

Fechamos o contôrno com um semi-círculo no plano superior. Novamente a contribuição ao longo do semi-círculo se anula.

Como $\frac{e^{-iKx}}{K}$ não tem pólos dentro deste contôrno

$$\int_C \frac{e^{-iKx}}{K} dK = 0$$

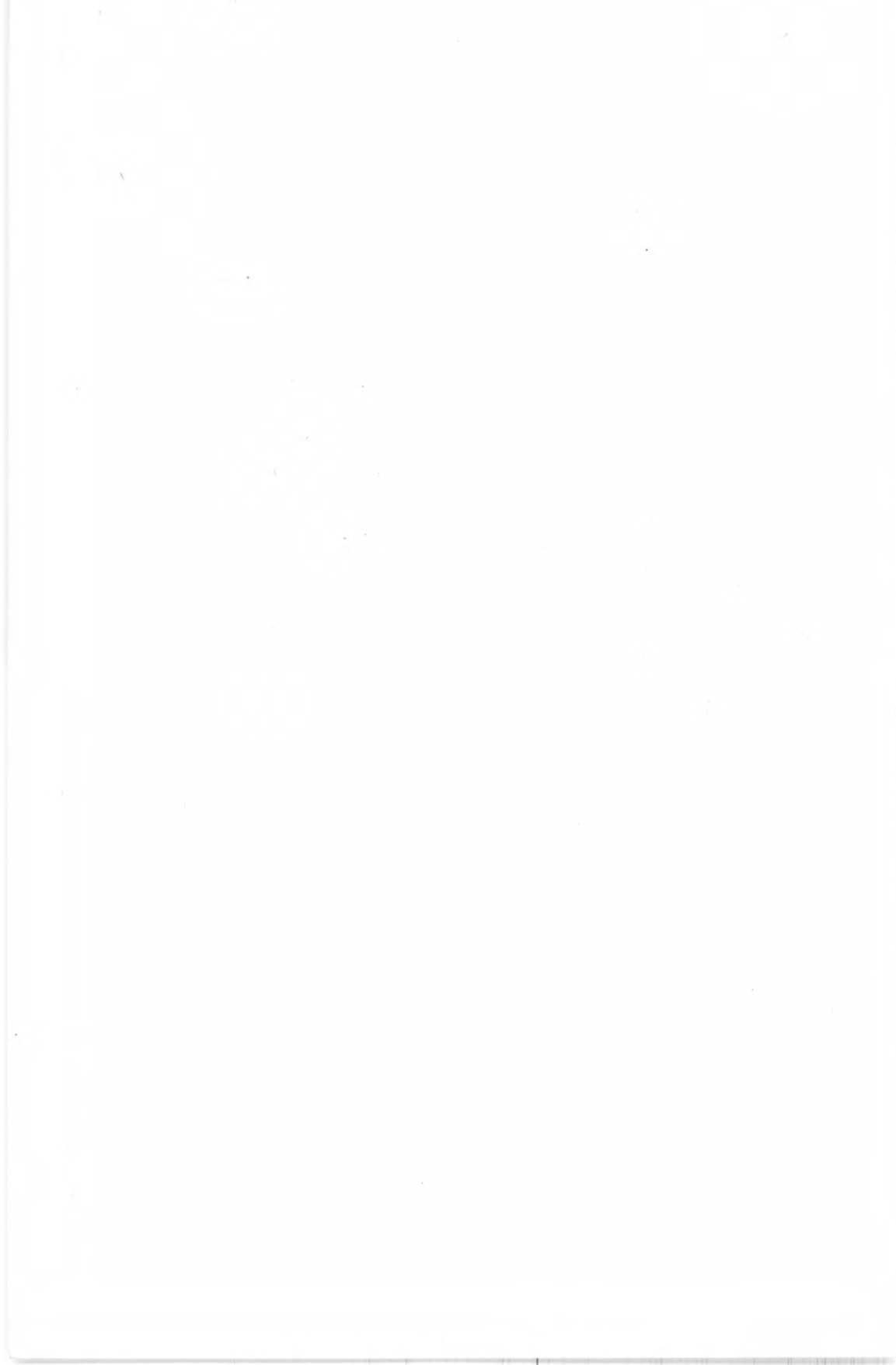
Assim para $x < 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-iKx}}{K} dK = 0 \quad (1.8-3)$$

As integrais (1.8-2) e (1.8-3) nos mostram a validade da representação (1.8-1) para $H(x)$.

2. - A FUNÇÃO DELTA
Propriedades e Ortonormalização

- 2.1 - Introdução
- 2.2 - Propriedade $\delta(x) = \delta(-x)$
- 2.3 - Propriedade $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$
- 2.4 - Propriedade $x\delta(x) = 0$
- 2.5 - Propriedade $\delta(ax) = a^{-1}\delta(x)$
- 2.6 - Propriedade $\delta_K(Kx) = -K^{-2}\delta(x)$
- 2.7 - Propriedade $(x - a)\delta(x) = -a\delta(x)$
- 2.8 - Propriedade $x\delta(x - a) = a\delta(x - a)$
- 2.9 - Propriedade $x\delta'(x) = -\delta(x)$
- 2.10 - Propriedade $(x - a)\delta'(x) = -\delta(x) - a\delta'(x)$
- 2.11 - Propriedades $f(x)\delta^{(n)}(x - a)$
 $f(x)\delta^{(n)}(x)$
- 2.12 - Propriedade $x^n\delta^{(n)}(x) = (-1)^n n!\delta(x)$
- 2.13 - Propriedade $\delta[g(x)]$
- 2.14 - Propriedade $\delta[(x - a)(x - b)]$
- 2.15 - Propriedade $\int f(x)\delta[g(x)] dx$
- 2.16 - Exemplo $\delta(\sin x) = \sum \delta(x - n\pi)$
- 2.17 - Derivada duma função seccionalmente contínua
- 2.18 - Integral da delta
- 2.19 - Propriedades relacionadas com a transformada de Fourier
- 2.20 - Ortonormalização pela delta:
- 2.20.1 - Definição
- 2.20.2 - Condição de clausura
- 2.20.3 - Exemplo-Autofunções do operador momentum



2. - A FUNÇÃO DELTA

Propriedades e Ortonormalização

2.1 - INTRODUÇÃO

Suponhamos uma fôrça concentrada P na origem de um sistema. A fôrça concentrada em um ponto é uma idealização matemática. Fisicamente é uma carga distribuída $q(x)$, em uma vizinhança do ponto considerado (Fig. 2.1-1).

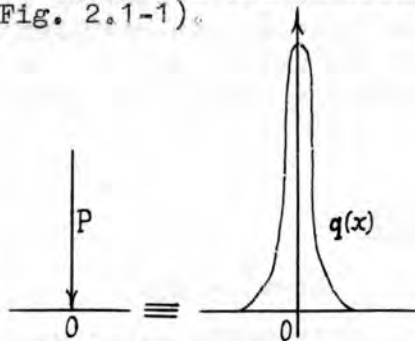


Fig. 2.1-1

e tal que

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} q(x) dx = P \quad (2.1-1)$$

Vamos introduzir a função $\delta(x)$ como definida somente em uma vizinhança da origem e com a propriedade

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(x) dx = 1 \quad (2.1-2)$$

A carga concentrada P poderá ser representada pela carga distribuída

$$q(x) = P \delta(x) \quad (2.1-3)$$

uma vez que

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} q(x) dx = P \int \delta(x) dx = P$$

A função $\delta(x)$ é geralmente definida por

$$\left. \begin{array}{l} \delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0 \\ \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(x) dx = 1 \end{array} \right\} \text{com a propriedade} \quad (2.1-4)$$

Em problemas que envolvam grandezas concentradas, estas poderão ser representadas por intermédio de funções delta, e o uso das propriedades formais que veremos a seguir nos conduz a resultados corretos.

2.2 - PROPRIEDADE

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad (2.2-1)$$

É uma propriedade decorrente da própria definição.

2.3 - PROPRIEDADE

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x) \quad (2.3-1)$$

ou também:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0) \quad (2.3-2)$$

uma vez que a propriedade básica é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Convém notar que a propriedade (2.3-1) assim como as que veremos a seguir têm significado somente quando sob sinal de integral.

A propriedade (2.3-1) ou (2.3-2) justifica-se pelo teorema da média.

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções integráveis em $[a, b]$ e $g(x) \geq 0$.

O produto $g(x)f(x)$ é também integrável. Se l e L são os extremos de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, então pelo teorema da média existe um número m : $l \leq m \leq L$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = m \int_a^b g(x) dx \quad (2.3-3)$$

Se $f(x)$ for contínua em $[a, b]$ existirá um ponto $\xi \in [a, b]$ para o qual $m = f(\xi)$.

Assim teremos para a (2.3-3)

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx \quad (2.3-4)$$

Vamos aplicar a (2.3-4) as funções $f(x)$ e $\delta(x)$, pensando a $\delta(x)$ como limite duma sucessão de funções com a propriedade básica (2.1-2)

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} f(x)\delta(x)dx = f(\xi) \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(x)dx = f(\xi) \quad (2.3-5)$$

sendo $\xi \in [-\epsilon, +\epsilon]$. $f(\xi)$ representa o valor de f numa vizinhança arbitrária da origem e podemos substituir $f(\xi)$ pelo valor de f na origem $f(0)$ sem erro apreciável.

Se f não é definida na origem, usamos:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi).$$

Esta propriedade estende-se de imediato para o caso $\delta(x - a)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - a)dx = f(a), \quad (2.3-6)$$

fazendo $x - a = y$ e usando a (2.3-2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y + a)\delta(y)dy = f(a)$$

Os limites de integração não precisam ser estendidos de $-\infty$ a $+\infty$, mas devem incluir o ponto "a" considerado. Comumente os limites de integração são omitidos em tais integrais ficando subentendido que o domínio de integração é conveniente.

2.4 - PROPRIEDADE

$$x\delta(x) = 0 \quad (2.4-1)$$

ou

$$\int f(x)x\delta(x)dx = 0 \quad (2.4-2)$$

A justificação é imediata pela propriedade anterior (2.3-1) ou (2.3-2) quando consideramos

$$f(x) \cdot x = g(x)$$

e que $g(0) = 0$.

2.5 - PROPRIEDADE

$$\delta(ax) = a^{-1}\delta(x) \quad (2.5-1)$$

Usamos a propriedade básica (2.1-2)

$$\int \delta(y)dy = 1$$

e fazemos

$$y = ax$$
$$dy = adx$$

$$\int \delta(ax) adx = 1$$

$$\int \delta(ax) dx = \frac{1}{a} \int \delta(x) dx$$

$$\int \delta(ax) dx = \int \frac{1}{a} \delta(x) dx$$

Daqui sai a propriedade (2.5-1).

A relação (2.5-1) vale sob sinal de integral, mesmo se no integrando aparecer outra função:

$$\int f(x) \delta(ax) dx = \int f(x) \frac{\delta(x)}{a} dx.$$

2.6 - PROPRIEDADE

$$\frac{\partial}{\partial K} \delta(Kx) = -\frac{1}{K^2} \delta(x) \quad (2.6-1)$$

Demonstra-se usando a propriedade anterior (2.5-1)

$$\delta(Kx) = \frac{1}{K} \delta(x)$$

e derivando em relação a K

$$\frac{\partial}{\partial K} \delta(Kx) = -\frac{1}{K^2} \delta(x)$$

Naturalmente a propriedade estende-se às derivadas de maior ordem:

$$\frac{\partial^n}{\partial K^n} \delta(Kx) = (-1)^n \frac{n!}{K^{n+1}} \delta(x) \quad (2.6-2)$$

2.7 - PROPRIEDADE

$$(x - a)\delta(x) = -a \delta(x) \quad (2.7-1)$$

Temos usando a (2.4-1)

$$(x - a)\delta(x) = x\delta(x) - a\delta(x) = -a\delta(x)$$

2.8 - PROPRIEDADE

$$x\delta(x - a) = a\delta(x - a) \quad (2.8-1)$$

Fazendo $f(x) = x$ e usando a propriedade (2.3-6)

$$\begin{aligned} \int x f(x) \delta(x - a) dx &= a f(a) = \\ &= \int f(x) a \delta(x - a) dx. \end{aligned}$$

2.9 - PROPRIEDADE

$$x\delta'(x) = -\delta(x) \quad (2.9-1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) x \delta'(x) dx =$$

fazendo

$$u = x f(x) \quad du = f(x) + x f'(x)$$

$$dv = \delta'(x) \quad v = \delta(x)$$

vem:

$$= \left[x f(x) \delta(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int [f(x) + x f'(x)] \delta(x) dx =$$

como $x\delta(x) = 0$ conforme (2.4-1)

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx$$

Desta igualdade sai (2.9-1).

Temos também

$$x^n \delta'(x) = -x^{n-1} \delta(x) \quad (2.9-2)$$

relação que se demonstra da mesma forma usando $x^n f(x)$ em vez de $x f(x)$.

2.10 - PROPRIEDADE

$$(x - a) \delta'(x) = -\delta(x) - a \delta'(x) \quad (2.10-1)$$

Sai como consequência da relação (2.9-1).

2.11 - PROPRIEDADES

$$f(x) \delta^{(n)}(x) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f^{(r)}(0) \delta^{(n-r)}(x) \quad (2.11-1)$$

$$f(x) \delta^{(n)}(x - a) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f^{(r)}(a) \delta^{(n-r)}(x - a) \quad (2.11-2)$$

Vejamos para $n = 1$

$$[f(x) \delta(x)]' = [f(0) \delta(x)]' = f(0) \delta'(x) \quad (2.11-3)$$

por outro lado

$$[f(x) \delta(x)]' = f'(x) \delta(x) + f(x) \delta'(x) \quad (2.11-4)$$

de (2.11-3 e 4)

$$f(0) \delta'(x) = f'(x) \delta(x) + f(x) \delta'(x)$$

e usando a propriedade (2.3-1)

$$f(x) \delta'(x) = f(0) \delta'(x) - f'(0) \delta(x) \quad (2.11-5)$$

Vejamos para $n = 2$

$$[f(x) \delta(x)]'' = [f(0) \delta(x)]'' = f(0) \delta''(x) \quad (2.11-6)$$

por outro lado:

$$\begin{aligned} [f(x)\delta(x)]'' &= \{[f(x)\delta(x)]'\}' = \\ &= [f'(x)\delta(x) + f(x)\delta'(x)]' = \\ &= f''(x)\delta(x) + 2f'(x)\delta'(x) + f(x)\delta''(x) = \\ \text{usando as propriedades (2.3-1)} \\ &= f''(0)\delta(x) + 2f'(0)\delta'(x) - 2f''(0)\delta(x) + f(x)\delta''(x) \end{aligned} \quad (2.11-7)$$

de (2.11-6 e 7)

$$\begin{aligned} f(x)\delta''(x) &= f(0)\delta''(x) + f''(0)\delta'(x) - 2f'(0)\delta'(x) \\ &= \sum_{r=0}^{n=2} (-1)^r \binom{n}{r} f^{(r)}(0) \delta^{n-r}(x) \end{aligned} \quad (2.11-8)$$

Generalizando vem a (2.11-1)

$$f(x)\delta^{(n)}(x) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f^{(r)}(0) \delta^{(n-r)}(x)$$

Se fizermos $(x - a) = y$ em

$$f(x)\delta^{(n)}(x - a)$$

e usando a propriedade anterior

$$f(y + a)\delta^{(n)}(y) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f^{(r)}(a) \delta^{(n-r)}(y)$$

ou seja a (2.11-2).

2.12 - PROPRIEDADE

$$x^n \delta^{(n)}(x) = (-1)^n n! \delta(x) \quad (2.12-1)$$

É imediata pela (2.11-1) quando $f(x) = x^n$,

pois

$$f^{(r)}(0) = 0 \quad ; \quad r = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

e para $r = n$

$$f^{(n)}(x) = n!$$

ficando o somatório reduzido a $(-1)^n n! \delta(x)$.

É imediata também a relação

$$(x - a)^n \delta^n(x) = (-1)^n n! \delta(x - a) \quad (2.12-2)$$

2.13 - PROPRIEDADE

$$\delta[g(x)] = \sum_{x_i} \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (2.13-1)$$

onde x_i são os zeros da $g(x)$, isto é:

$$g(x_i) = 0.$$

Consideremos a função $\delta(y)$ sendo $y = g(x)$.

A função $\delta(y)$ tem valores apreciáveis na vizinhança de $y = 0$ ou seja nas vizinhanças dos zeros da $g(x)$.

Considerando $\delta[g(x)]$ como função composta de x , obteríamos o gráfico da figura (2.13-1).

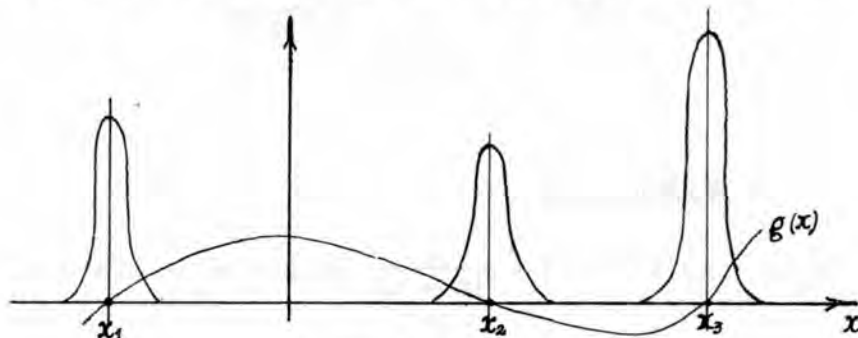


Fig. 2.13-1

Na realidade $\delta[g(x)]$ representa um conjunto de funções δ definidas nas vizinhanças dos zeros da $g(x)$.

Suponhamos que $g(x)$ é analítica nas vizinhanças dos zeros. Desenvolvendo $g(x)$ em série:

$$g(x) = g(x_i) + (x - x_i)g'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2!} g''(x_i) + \dots$$

e considerando que $g(x_i) = 0$, para valores de x numa vizinhança arbitrária de x_i , podemos escrever com boa aproximação:

$$g(x) = g'(x_i)(x - x_i)$$

Como $\delta[g(x)]$ é nula fora destas vizinhanças, podemos escrever:

$$\delta[g(x)] = \sum \delta[g'(x_i)(x - x_i)]$$

Como δ é função par (2.2-1) podemos usar $|g'(x_i)|$ em vez de $g'(x_i)$

$$\delta[g(x)] = \sum_{\substack{x_i \\ g(x_i)=0}} \delta[|g'(x_i)|(x - x_i)]$$

e usando a (2.5-1)

$$\delta[g(x)] = \sum_{\substack{x_i \\ g(x_i)=0}} \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}$$

2.14 - PROPRIEDADE

$$\delta[(x - a)(x - b)] = \frac{1}{|a - b|} [\delta(x - a) + \delta(x - b)] \quad (2.14-1)$$

Demonstra-se pela propriedade anterior fazendo:

$$g(x) = (x - a)(x - b)$$

$$\begin{aligned}x_1 &= a \\x_2 &= b\end{aligned}$$

são os zeros da função

$$g'(a) = (a - b)$$

$$g'(b) = (b - a)$$

$$\delta[(x - a)(x - b)] = \frac{\delta(x - a)}{|a - b|} + \frac{\delta(x - b)}{|a - b|}$$

Como caso particular:

$$\begin{aligned}\delta[(x - a)^2] &= \delta[(x + a)(x - a)] = \\&= \frac{1}{2a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)] \quad (2.14-2)\end{aligned}$$

2.15 - PROPRIEDADE

$$\int f(x)\delta[g(x)]dx = \sum_{\substack{x_i \\ g(x_i)=0}} \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (2.15-1)$$

Usamos a propriedade anterior (2.13-1)

$$\begin{aligned}\int f(x)\delta[g(x)]dx &= \int f(x) \sum_{x_i} \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} dx = \\&= \sum_{x_i} \int f(x) \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} dx = \\&= \sum_{\substack{x_i \\ g(x_i) = 0}} \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}\end{aligned}$$

2.16 - EXEMPLO

$$\delta[\text{sen } x]$$

Zeros de $\text{sen } x$

$$x_i = n_i\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$[\text{sen } x]'_{x_i} = \pm 1$$

$$\delta[\text{sen } x] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n\pi) \quad (2.16-1)$$

Seu gráfico (fig. 2.16-1) representa uma série de deltas espaçadas de π , ou seja uma série de "picos" periódicos.

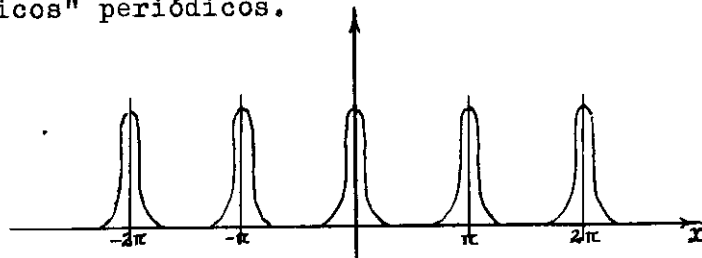


Fig. 2.16-1

2.17 - DERIVADA DUMA FUNÇÃO SECCIONALMENTE CONTÍNUA
(piece-wise contínuos)

Seja $g(x)$ uma função com uma descontinuidade no ponto x_0

$$g(x_{0+}) - g(x_{0-}) = b \quad (2.17-1)$$

Se pensarmos $g(x)$ como limite duma função contínua teremos $g'(x)$ conforme o gráfico da fig. 2.17-1.

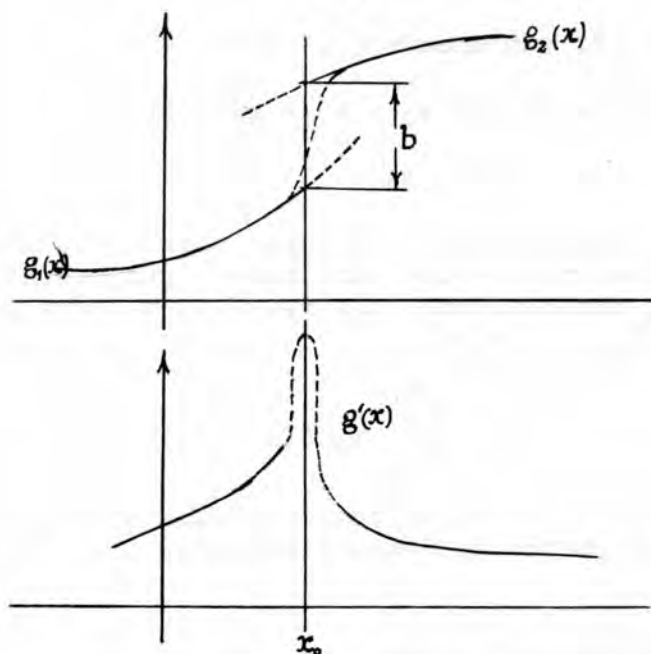


Fig. 2.17-1

Formalmente:

$$g(x) = g_1(x)H(x_0 - x) + g_2(x)H(x - x_0)$$

derivando:

$$g'(x) = g_1'(x)H(x_0 - x) + g_2'(x)H(x - x_0) + g_1(x)H'(x_0 - x) + g_2(x)H'(x - x_0)$$

como:

$$H'(x - x_0) = \delta(x - x_0)$$

$$H'(x_0 - x) = -\delta(x - x_0)$$

conforme (1.4-2), vem:

$$g'(x) = g_1'(x)H(x_0 - x) + g_2'(x)H(x - x_0) + g_1(x)\delta(x - x_0) - g_2(x)\delta'(x - x_0)$$

como:

$$g_1(x)\delta(x - x_0) = g_1(x_0^+)\delta(x - x_0)$$

$$g_2(x)\delta(x - x_0) = g_2(x_0^-)\delta(x - x_0)$$

conforme 2.3, vem usando (2.17-1)

$$g'(x) = g_1'(x)H(x_0 - x) + g_2'(x)H(x - x_0) + b \delta(x - x_0)$$

Assim a derivada duma função seccionalmente contínua (piece-wise contínuos) $g(x)$ com pontos de descontinuidade x_1, x_2, \dots, x_n com saltos b_1, b_2, \dots, b_n será:

$$g'(x) + \sum_{K=1}^n b_K \delta(x - x_K) \quad (2.17-2)$$

onde $g'(x)$ é definida como derivada ordinária, excluídos os pontos de descontinuidade.

2.18 - INTEGRAL DA DELTA

Vimos na função de Heaviside, que

$$H'(x - x_0)$$

tem como propriedade

$$\int_a^b H'(x - x_0) dx = 1 \quad x_0 \in (a, b) \quad (2.18-1)$$

e pode ser identificada com a delta.

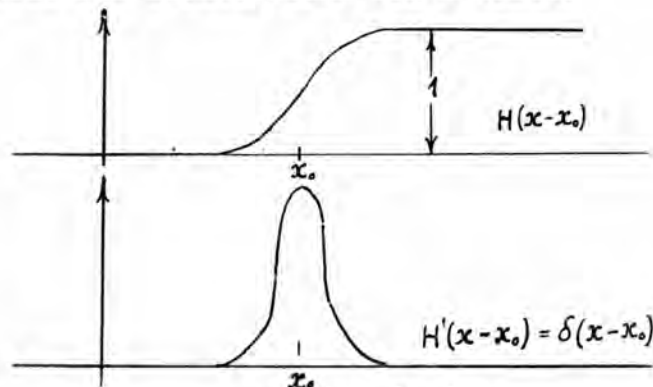


Fig. 2.18-1

Considerando $H(x - x_0)$ e $\delta(x - x_0)$ como limites de sucessões de funções contínuas (Fig. 2.18-1), podemos escrever:

$$\int \delta(x - x_0) dx = H(x - x_0) + C \quad (2.18-2)$$

para a integral indefinida, pois

$$\frac{d}{dx} [H(x - x_0) + C] = \delta(x - x_0)$$

A integral definida da delta pode ser obtida da (2.18-2)

$$\begin{aligned} \int_a^b \delta(x - x_0) dx &= [H(x - x_0) + C]_a^b = \\ &= H(b - x_0) - H(a - x_0) = \Pi(x_0; a, b) \\ &= \begin{cases} 0 & x_0 \notin (a, b) \\ 1 & x_0 \in (a, b) \end{cases} \end{aligned}$$

2.19 - PROPRIEDADES

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega \quad (2.19-1)$$

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-a)} d\omega \quad (2.19-2)$$

Estas propriedades serão vistas na secção 5 - Transformadas de Fourier.

2.20 - ORTONORMALIZAÇÃO PELA DELTA

A dita ortonormalização pela delta aparece comumente em Mecânica Quântica e em eletromagnetismo.

2.20.1 - Definição

Dizemos que as autofunções $\Psi_{\omega}(x)$ dum operador Hermitiano Ω são ortonormalizadas pela delta se

$$(\Psi_{\omega'}; \Psi_{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{\omega'}^*(x) \Psi_{\omega}(x) dx = \delta(\omega - \omega') \quad (2.20-1)$$

(Estamos considerando o caso de espectro contínuo, isto é, ω varia em forma contínua.)

Um conjunto nestas condições nos permite expressar uma função $f(x)$ como combinação linear das autofunções Ψ_{ω}

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) \Psi_{\omega}(x) d\omega \quad (2.20-2)$$

Os $C(\omega)$ são determinados através (2.20-1). Multiplicando ambos os membros por $\Psi_{\omega'}^*$ e integrando em relação a x

$$(\Psi_{\omega'}(x); f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) \Psi_{\omega'}^*(x) \Psi_{\omega}(x) d\omega \right\} dx$$

invertendo a ordem de integração:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{\omega'}^*(x) \Psi_{\omega}(x) dx \right\} C(\omega) d\omega$$

e usando (2.20-1):

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) \delta(\omega - \omega') d\omega = C(\omega')$$

ou

$$C(\omega) = (\Psi_{\omega}; f) \quad (2.20-3)$$

2.20.2 - Condição de Clausura

Como caso particular se

$$f(x) = \delta(x - x_0)$$

teremos:

$$c(\omega) = (\Psi_\omega(x); \delta(x - x_0))$$

ou:

$$c(\omega) = \Psi_\omega(x_0) \quad (2.20-4)$$

e

$$\delta(x - x_0) = \int \Psi_\omega^*(x_0) \Psi_\omega(x) d\omega \quad (2.20-5)$$

que é conhecida como condição de clausura (closure relation).

2.20.3 - Exemplo - Auto-funções do Operador Momentum

O operador momentum $p_{op.}$ em Mecânica quântica é

$$p_{op.} = -i\hbar \nabla \quad (2.20-6)$$

As auto-funções e auto-valores são determinados pela equação

$$-i\hbar \nabla \psi = \tilde{p} \psi \quad (2.20-7)$$

Em uma dimensão temos para a (2.20-7)

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} = p_x \psi$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = + i \frac{p}{\hbar} \psi$$

integrando:

$$\ln \psi = i \frac{p}{\hbar} x + \ln N$$

$$\psi_{p_x} = N e^{i \frac{p_x}{\hbar} x} \quad (2.20-8)$$

p_x assume valores contínuos de $-\infty$ a $+\infty$.

Determinamos N pela condição de ortonormalização pela δ

$$(\psi_{p'_x}; \psi_{p_x}) = \int |N|^2 e^{\frac{i}{\hbar}(p_x - p'_x)x} dx$$

Usando a propriedade (2.19-2)

$$(\psi_{p'_x}; \psi_{p_x}) = |N|^2 2\pi\delta\left(\frac{p'_x}{\hbar} - \frac{p_x}{\hbar}\right) \quad (2.20-9)$$

usando a propriedade (2.5-1)

$$= |N|^2 2\pi\hbar\delta(p'_x - p_x) \quad (2.20-10)$$

As auto-funções ortonormalizadas pela δ são portanto obtidas com a condição

$$2\pi\hbar |N|^2 = 1$$

ou:

$$\psi_{p_x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{p_x}{\hbar}x} \quad (2.20-11)$$

--oo0oo--

3. - REPRESENTAÇÕES DA DELTA

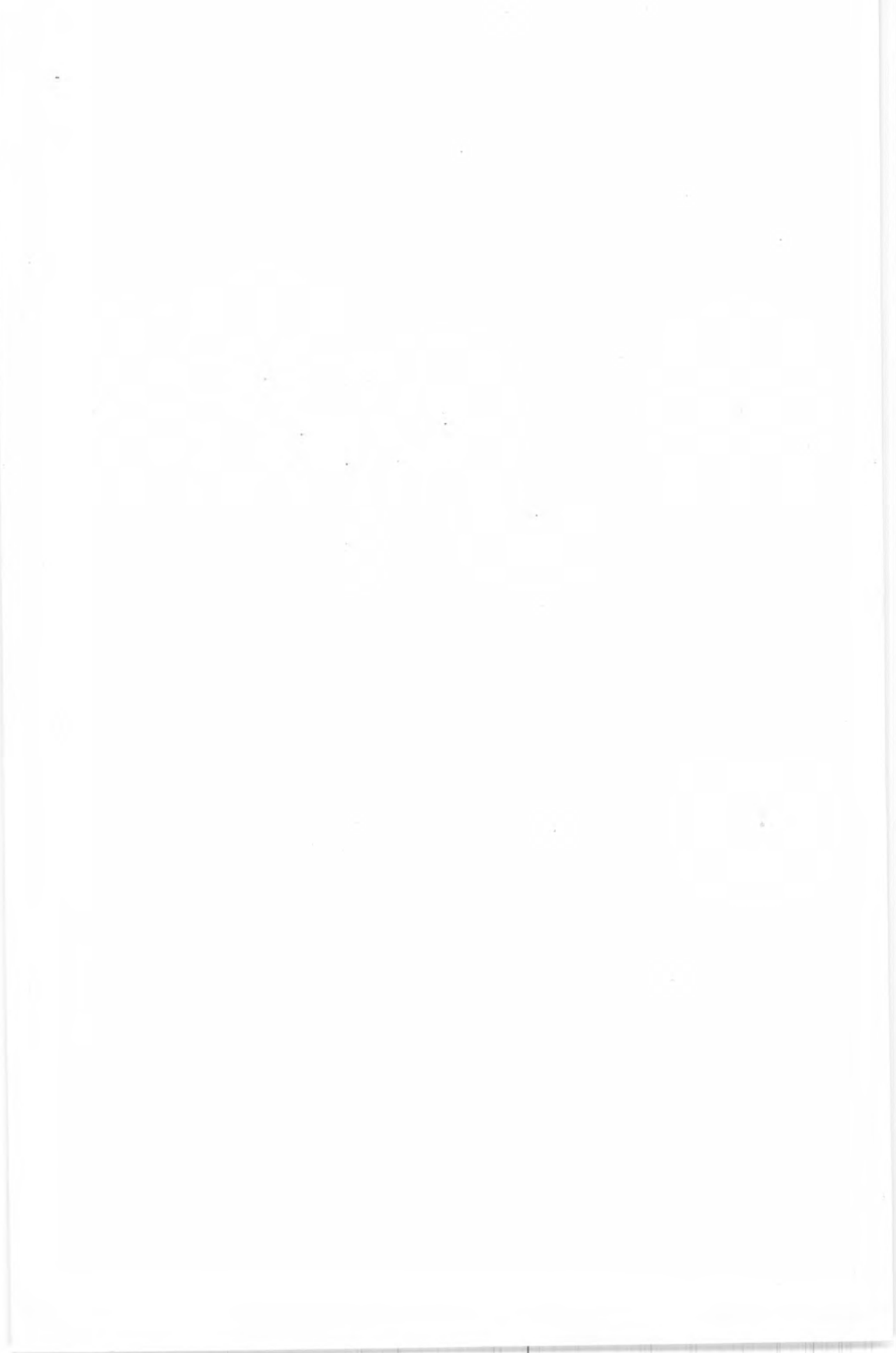
3.1 - Introdução

3.2 - 1ª Representação

3.3 - 2ª Representação

3.4 - 3ª Representação

-oOo-



3. - REPRESENTAÇÕES DA DELTA

3.1 - INTRODUÇÃO

A função delta, pode ser pensada como limite duma sucessão de funções, de tal forma que as propriedades desta sucessão de funções sob sinal de integral terão como limites as propriedades da delta.

A definição por meio de sequências de funções é adotada na teoria das "funções generalizadas".

Ao usar a definição de "função generalizada" por meio de sequência, devemos estabelecer em que condições duas sequências definem a mesma "função generalizada". Para isto multiplicamos cada membro da sequência por uma "função teste" $F(x)$ e integramos de $-\infty$ a $+\infty$ e passamos ao limite. Se obtivermos o mesmo resultado para as duas sequências, qualquer que seja a "função teste" usada, dizemos que as duas sequências definem a mesma "função generalizada".

Assim, se tivermos duas sequências de funções

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n,$$

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$$

com as propriedades:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) F(x) dx = F(0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x) F(x) dx = F(0)$$

então dizemos que as duas sequências definem a função $\delta(x)$.

Desta forma uma "função generalizada" é definida na realidade por uma classe de sucessões de funções.

Vamos mostrar a seguir três exemplos de sucessões de funções que definem a delta.

Uma exposição detalhada e rigorosa da teoria das "funções generalizadas" fugiria ao escopo deste trabalho.

Na "teoria das funções generalizadas" são usadas, nas diferentes versões da teoria, classes distintas de funções testes e as funções das sequências estão sujeitas a restrições.

3.2 - 1ª REPRESENTAÇÃO

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} \quad (3.2-1)$$

Esta representação constitui uma sucessão de funções (Fig. 3.2-1) com as propriedades

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} dx = 1 \quad (3.2-2)$$

(para qualquer valor de n)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \sqrt{\frac{n}{\pi}} F(x) e^{-nx^2} dx = F(0) \quad (3.2-3)$$

As propriedades desta sucessão de funções sob sinal de integral têm como limites as propriedades da delta.

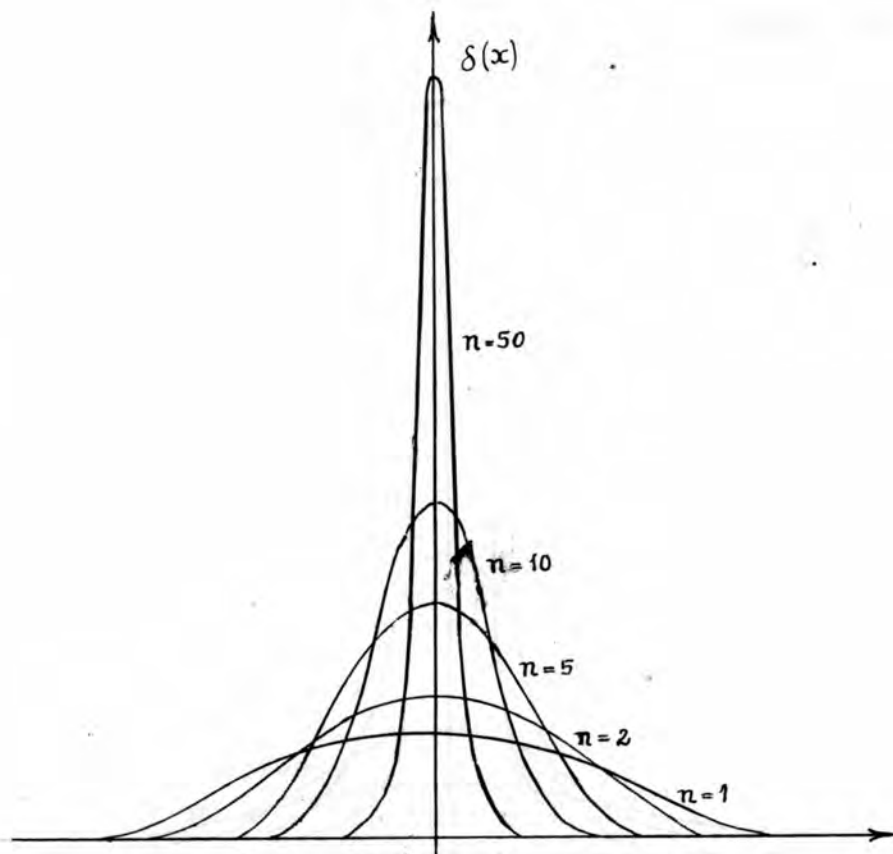


Fig. 3.2-1

3.3 - 2ª REPRESENTAÇÃO

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + n^2 x^2} \quad (3.3-1)$$

A sucessão de funções está representada na fig. 3.3-1.

Temos também aqui que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{1 + n^2 x^2} dx = \left[\text{arc.tg } n^2 x^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

ou seja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2x^2} = 1 \quad (3.3-2)$$

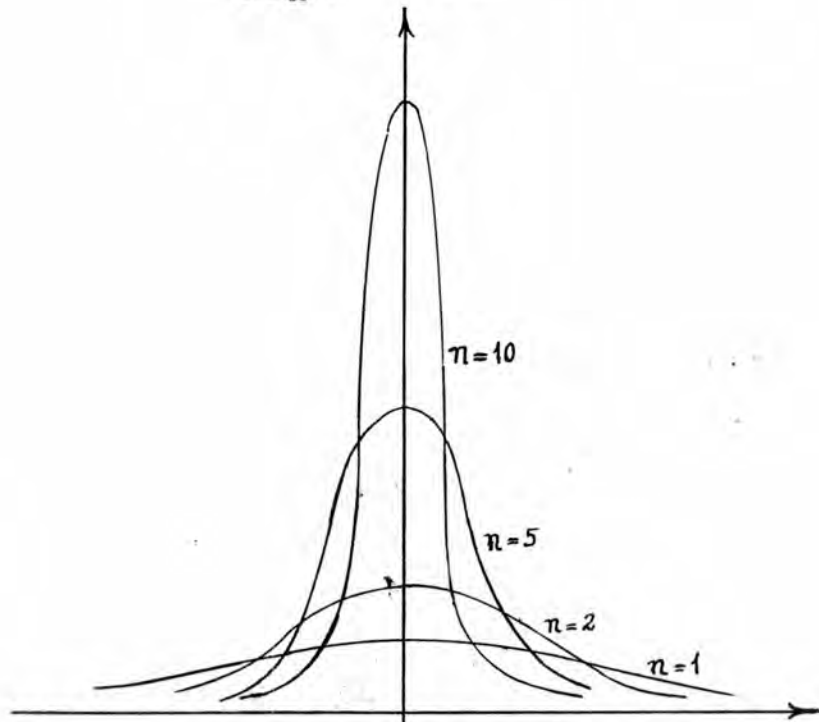


Fig. 3.3-1

3.4 - 3ª REPRESENTAÇÃO DA DELTA

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } nx}{\pi x} \quad (3.4-1)$$

A função

$$\frac{\text{sen } nx}{\pi x}$$

não é definida no ponto $x = 0$. A singularidade poderá ser removida se definirmos o seu valor no ponto $x = 0$ como o

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } nx}{\pi x} = \frac{n}{\pi}$$

A integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } nx}{\pi x} dx$$

pode ser calculada pela teoria dos resíduos, considerando-a como a parte imaginária do valor principal da integral

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-inz}}{\pi z} dz$$

Como

$$\text{Res.} \left[\frac{e^{-inz}}{\pi z}; z = 0 \right] = \frac{1}{\pi}$$

teremos:

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-inz}}{\pi z} dz = 2\pi i \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} = i$$

e portanto:

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } nx}{\pi x} dx = 1 \quad (3.4-2)$$

A função

$$\frac{\text{sen } nx}{\pi x}$$

tem pontos nulos para

$$nx = K\pi \quad K = 0, 1, 2, 3, \dots$$

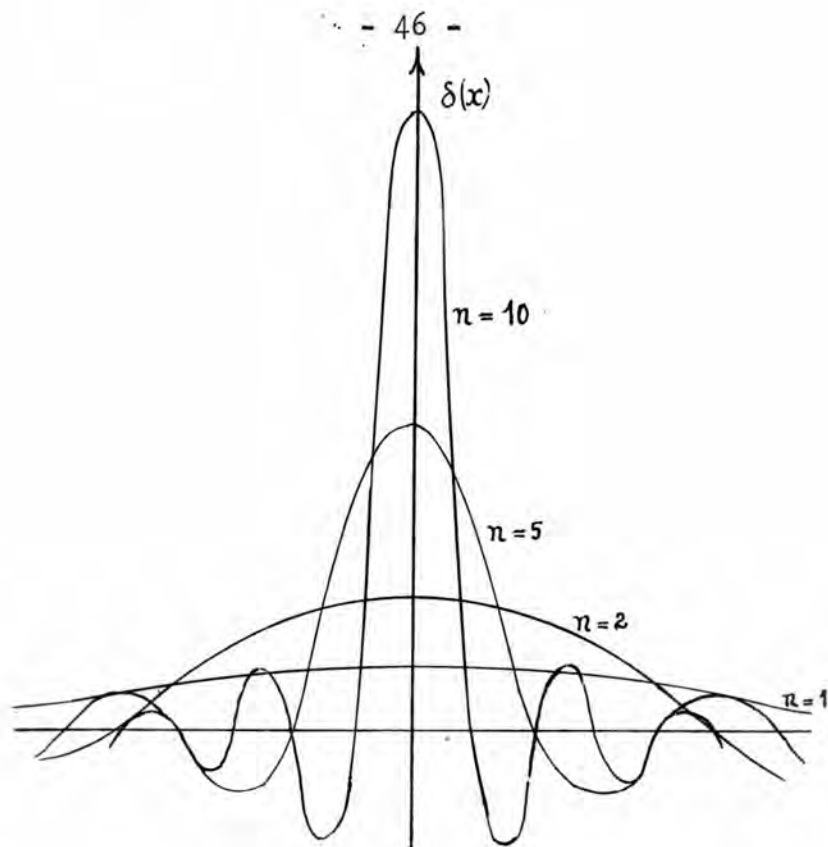


Fig. 3.4-1

Nesta representação é imediata a propriedade

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} F(x)\delta(x)dx = F(0)$$

quando usamos a conhecida "Integral de Dirichlet":

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} F(x) \frac{\text{sen } nx}{x} dx = F(0+) \quad (3.4-3)$$

válida para $F(x)$ de variação limitada em $[0, \delta]$.
Se além disso $F(x)$ é contínua, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{+\delta} F(x) \frac{\text{sen } nx}{\pi x} dx = F(0) \quad (3.4-4)$$

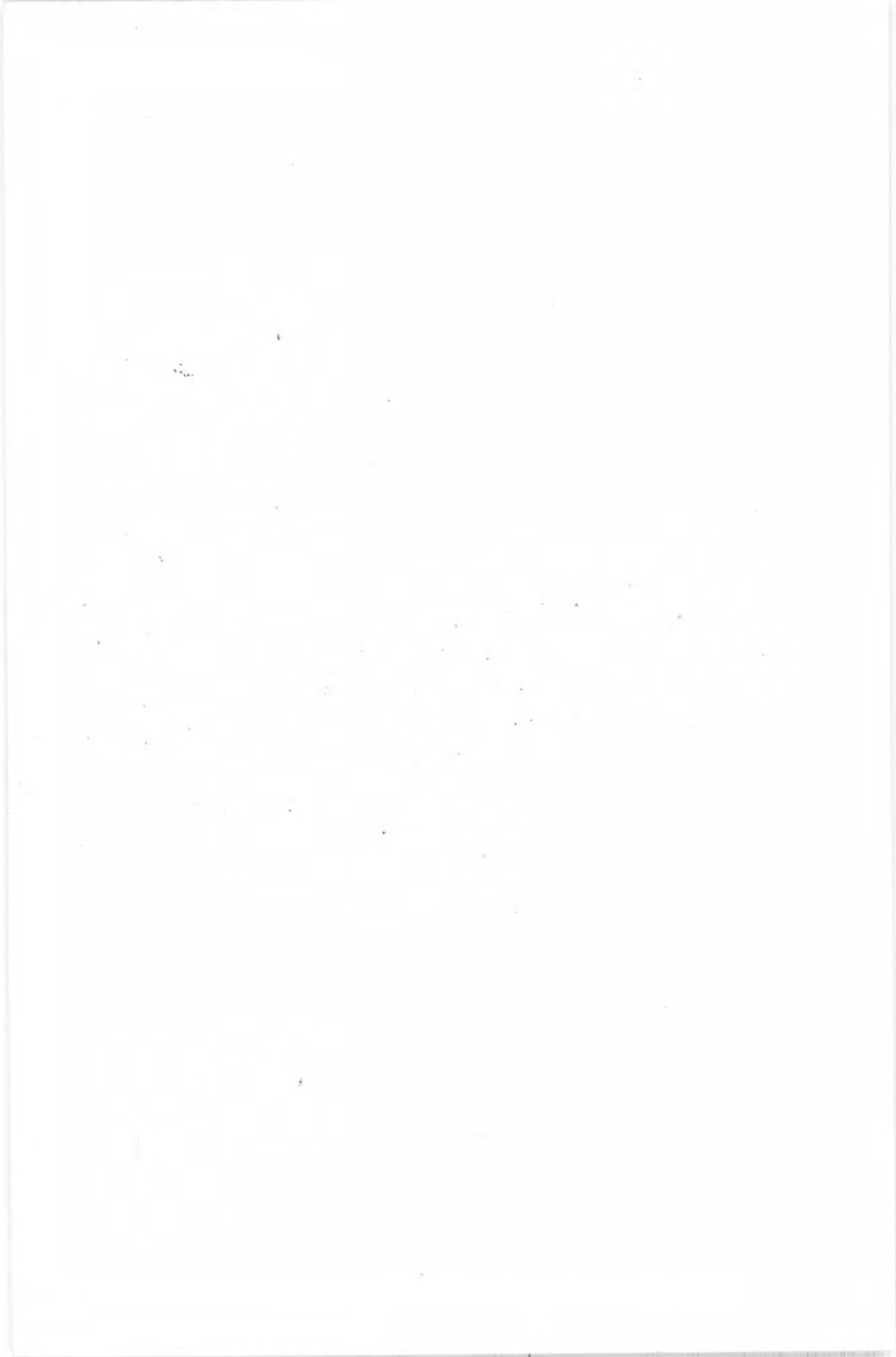
Na figura 3.4-1 temos representadas as funções da sequência correspondentes a

$$n = 1, 2, 5, 10.$$

--oo0oo--

4. - DELTA n-DIMENSIONAL

- 4.1 - Introdução
- 4.2 - Delta n-dimensional como produto de n deltas uni-dimensionais
- 4.3 - Propriedades:
 - 4.3.1 - Propriedade $f(X)\delta(X) = f(0)\delta(X)$
 - 4.3.2 - Propriedade $f(X)\delta(X - \mathbf{a}) = f(\mathbf{a})\delta(X - \mathbf{a})$
 - 4.3.3 - Propriedade $\delta(X) = \delta(-X)$
 - 4.3.4 - Propriedade $\delta(aX) = a^{-n}\delta(X)$
 - 4.3.5 - Propriedade $\delta_k^i(kX) = -\frac{n}{k^{n-1}}\delta(X)$
 - 4.3.6 - Propriedade $X \cdot \nabla(X) = n\delta(X)$
 - 4.3.7 - Propriedade $\nabla_x^2 \frac{1}{|X - X'|} = -4\pi\delta(X - X')$
- 4.4 - Delta n-dimensional em coordenadas curvilíneas:
 - 4.4.1 - Introdução
 - 4.4.2 - Exemplo: Coordenadas cilíndricas
 - 4.4.3 - Exemplo: Coordenadas esféricas
- 4.5 - Funções delta com simetria especial
 - 4.5.1 - Simetria axial (2 dimensões)
 - 4.5.2 - Simetria cilíndrica (n = 3)
 - 4.5.3 - Simetria esférica (n = 3)



4. - DELTA n-DIMENSIONAL

4.1 - INTRODUÇÃO

Definida a delta e examinadas as suas propriedades mais importantes, é natural que façamos a generalização para o espaço n-dimensional.

Seja a variável n-dimensional

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

A função real de variável n-dimensional que representaremos por $\delta(X)$, teria valores apreciáveis apenas numa vizinhança $N(0)$.

A $\delta(X)$ por extensão ao caso unidimensional, deverá satisfazer a propriedade básica

$$\iint \dots \int \delta(X) dX = 1 \quad (4.1-1)$$

onde

$$dX = dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

4.2 - DELTA n-DIMENSIONAL COMO PRODUTO DE DELTAS UNIDIMENSIONAIS

Vamos admitir que possamos escrever:

$$\delta(X) = g_1(x_1) g_2(x_2) \dots g_n(x_n) \quad (4.2-1)$$

Neste caso a condição (4.1-1) implica

$$\int g_1(x_1)dx_1 \int g_2(x_2)dx_2 \int \dots \int g_n(x_n)dx_n = 1 \quad (4.2-2)$$

Esta relação verifica-se naturalmente se fizermos:

$$g_i(x_i) = \delta(x_i) \quad (4.2-3)$$

e neste caso conforme (4.2-1)

$$\delta(X) = \delta(x_1) \delta(x_2) \dots \delta(x_n) \quad (4.2-4)$$

Esta forma de expressar a função delta n-dimensional como produto de deltas unidimensionais satisfaz a propriedade (4.1-1) e além disso permite estender de forma imediata uma série de propriedades já obtidas no caso unidimensional.

4.3- PROPRIEDADES DA δ n-DIMENSIONAL

4.3.1 - Propriedade

$$f(X)\delta(X) = f(0)\delta(X) \quad (4.3-1)$$

ou

$$\int \int \dots \int f(X)\delta(X)dX = f(0) \quad (4.3-2)$$

A justificação é imediata se usamos (4.2-4):

$$\begin{aligned} \int \int \dots \int f(X)\delta(X)dX &= \int \delta(x_1)dx_1 \int \delta(x_2)\delta(x_2)\dots \\ &\dots \int f(x_1, \dots, x_n)dx_n = \int \delta(x_1)dx_1 \int \dots \\ &\dots \int \delta(x_{n-1}) \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)dx_{n-1} = \dots = \\ &= f(0, 0, \dots, 0) = f(0). \end{aligned}$$

4.3.2 - Propriedade

$$f(X)\delta(X - a) = f(a)\delta(X - a) \quad (4.3-3)$$

ou:

$$\iint \dots \int f(X)\delta(X - a)dX = f(a) \quad (4.3-4)$$

Esta propriedade é obtida da anterior com a mudança de variáveis $Y = X - a$, isto é:

$$\iint \dots \int f(Y + a)\delta(Y)dY = f(a)$$

ou:

$$\iint \dots \int f(X)\delta(X - a)dX = f(a)$$

4.3.3 - Propriedade

$$\delta(X) = \delta(-X) \quad (4.3-5)$$

Como

$$\delta(X) = \delta(x_1) \delta(x_2) \dots \delta(x_n)$$

a demonstração é imediata pela propriedade (2.2-1)

$$\delta(x) = \delta(-x)$$

4.3.4 - Propriedade

$$\delta(aX) = \frac{1}{a^n} \delta(X) \quad (4.3-6)$$

Temos

$$aX = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$$

$$\delta(aX) = \delta(ax_1) \delta(ax_2) \dots \delta(ax_n)$$

e usando a propriedade (2.5-1)

$$\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x)$$

obtemos a (4.3-6).

4.3.5 - Propriedade

$$\frac{\partial}{\partial k} \delta(kX) = -\frac{n}{k^{n-1}} \delta(X) \quad (4.3-7)$$

É obtida de imediato da anterior

$$\frac{\partial}{\partial k} \delta(kX) = \frac{\partial}{\partial k} \frac{1}{k^n} \delta(X) = -\frac{n}{k^{n-1}} \delta(X)$$

4.3.6 - Propriedade

$$\vec{X} \cdot \nabla \delta(X) = n\delta(X) \quad (4.3-8)$$

Temos

$$\begin{aligned} \nabla \delta(X) &= \vec{e}_1 \delta'(x_1) \delta(x_2) \dots \delta(x_n) + \dots + \\ &+ \vec{e}_n \delta(x_1) \delta(x_2) \dots \delta'(x_n) \end{aligned}$$

$$\vec{X} = \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \dots + \vec{e}_n x_n$$

$$\begin{aligned} \vec{X} \cdot \nabla \delta(X) &= x_1 \delta'(x_1) \delta(x_2) \dots \delta(x_n) + \dots + \\ &+ \delta(x_1) \delta(x_2) \dots x_n \delta'(x_n) \end{aligned}$$

usando a propriedade (2.9-1) vem:

$$\vec{X} \cdot \nabla \delta(X) = n\delta(X)$$

4.3.7 - Propriedade (Caso tridimensional)

$$\nabla_{\vec{x}}^2 \frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} = -4\pi \delta(\vec{X} - \vec{X}') \quad (4.3-9)$$

Seja

$$r = |\vec{X} - \vec{X}'|$$

(Fig. 4.3-1), isto é:

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

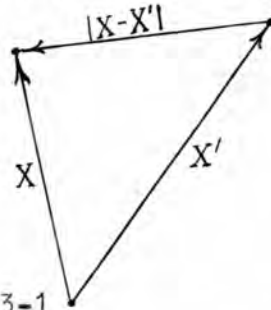


Fig. 4.3-1

Temos

$$2r \frac{dr}{dx} = 2(x - x')$$

e da mesma forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dx} &= \frac{x - x'}{r} \\ \frac{dr}{dy} &= \frac{y - y'}{r} \\ \frac{dr}{dz} &= \frac{z - z'}{r} \end{aligned} \right\} (4.3-10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) &= - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dx} = - \frac{1}{r^3} (x - x') \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) &= - \frac{1}{r^3} (y - y') \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) &= - \frac{1}{r^3} (z - z') \end{aligned} \right\} (4.3-11)$$

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) =$$

$$= - \vec{i} \frac{x - x'}{r^3} - \vec{j} \frac{y - y'}{r^3} - \vec{k} \frac{z - z'}{r^3}$$

e

$$= - \frac{\vec{r}}{r^3} = - \frac{\vec{r}_0}{r^2} \quad (4.3-12)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) &= \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{x - x'}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(- \frac{y - y'}{r^3} \right) + \\ &\frac{\partial}{\partial z} \left(- \frac{z - z'}{r^3} \right) = \left[- \frac{1}{r^3} + \frac{3(x - x')^2}{r^5} \right] + \left[- \frac{1}{r^3} + \frac{3(y - y')^2}{r^5} \right] \\ &+ \left[- \frac{1}{r^3} + \frac{3(z - z')^2}{r^5} \right] = 0 \quad (4.3-13) \end{aligned}$$

para $r \neq 0$.

Por outro lado

$$\begin{aligned} \oint \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d\Omega &= \oint \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\Omega = \\ &= \oint \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot d\vec{S} = - \oint \frac{\vec{r}_0}{r^2} \cdot \vec{n} dS = - \int d\omega = - 4\pi \end{aligned}$$

Assim temos:

$$\oint - \frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d\Omega = 1 \quad (4.3-14)$$

As relações (4.3-13) e (4.3-14) nos permitem escrever a (4.3-9):

$$\nabla^2 \frac{1}{|X - X'|} = - 4\pi \delta(X - X')$$

Esta propriedade é importante, porque nos mostra que a função de Green do operador ∇^2 , ou seja da equação de Poisson na eletrostática com condições homogêneas de contorno num domínio infinito, é:

$$G(X, X') = \frac{1}{|X - X'|} \quad (4.3-15)$$

4.4 - DELTA n-DIMENSIONAL EM COORDENADAS CURVILÍNEAS

4.4.1 - Introdução

Consideremos as coordenadas curvilíneas $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ relacionadas com as coordenadas

que se verifica pela propriedade básica das $\delta(\mu_i)$ (2.1-2).

4.4.2 - Exemplo
Coordenadas Cilíndricas (Fig. 4.4-1)

Temos as coordenadas curvilíneas

$$\mu_1 = r$$

$$\mu_2 = \varphi$$

$$\mu_3 = z$$

e as equações de transformação:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi \\ x_2 &= r \operatorname{sen} \varphi \\ x_3 &= z \end{aligned} \quad (4.4-5)$$

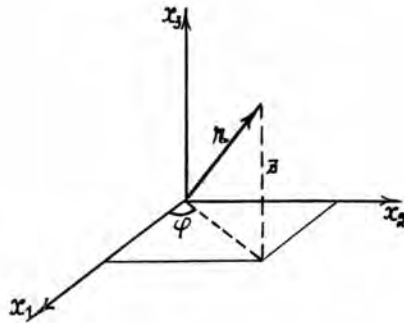


Fig. 4.4-1

$$J(X; U) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi & 0 \\ -r \operatorname{sen} \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Assim

$$\delta(X) = \frac{1}{r} \delta(r) \delta(\varphi) \delta(z) \quad (4.4-6)$$

4.4.3 - Exemplo - Coordenadas Esféricas

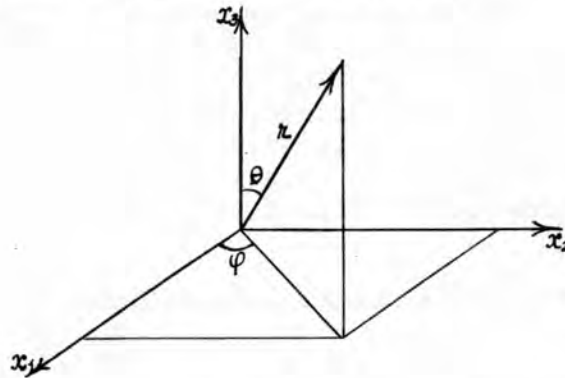


Fig. 4.4-2

As coordenadas curvilíneas são (Fig. 4.4-2)

$$\begin{cases} \mu_1 = r \\ \mu_2 = \theta \\ \mu_3 = \varphi \end{cases}$$

e as equações de transformação

$$\begin{cases} \mu_1 = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ \mu_2 = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ \mu_3 = r \cos \theta \end{cases} \quad (4.4-7)$$

$$J(X, U) =$$

$$= \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi & r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi & -r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= r^2 \operatorname{sen} \theta$$

Assim

$$\delta(X) = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \delta(r) \delta(\theta) \delta(\varphi)$$

4.5 - FUNÇÕES DELTA COM SIMETRIA ESPECIAL

Há vantagem, em certos problemas, de introduzir funções delta com simetria especial. Assim, por exemplo, em problemas de simetria esférica, uma carga unitária na origem, seria representada por uma delta com simetria esférica. Vamos representar estas funções delta pela mesma letra δ , mas com índices indicando o tipo de simetria.

4.5.1 - Simetria Axial (2 Dimensões)

Neste caso, introduzimos a $\delta_a(r)$ cuja forma está representada na fig. 4.5-1.

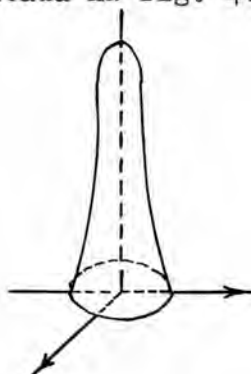


Fig. 4.5-1

A propriedade básica para $\delta_a(r)$ é neste caso:

$$\int_0^{\infty} 2\pi r \delta_a(r) dr = 1 \quad (4.5-1)$$

Para a propriedade (2.3-1) teríamos:

$$\int_0^{\infty} 2\pi r f(r) \delta_a(r) dr = f(0) \quad (4.5-2)$$

A função $\delta_a(r - r_0)$ teria a forma da figura 4.5-2 gerada pela curva C girando em torno do

eixo Z, e como propriedade básica

$$\int 2\pi r \delta_a(r - r_0) dr = 1 \quad (4.5-3)$$

para outras propriedades devemos levar em conta que $2\pi r \delta_a(r - r_0)$ é equivalente a $\delta(r - r_0)$. Temos, assim:

$$\int 2\pi r f(r) \delta(r - r_0) dr = f(r_0) \quad (4.5-4)$$

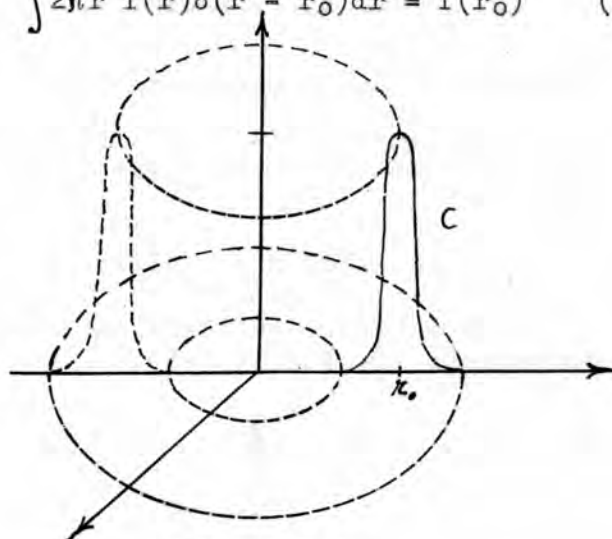


Fig. 4.5-2

A $\delta_a(r - r_0)$ serviria para representar uma carga linear, λ por unidade de comprimento, em forma de circunferência de raio r_0 no plano, isto é

$$q \delta(r - r_0)$$

pois

$$(4.5-5)$$

$$\int 2\pi q \delta(r - r_0) r dr = q$$

4.5.2 - Simetria Cilíndrica (3 dimensões)

No espaço tridimensional podemos introduzir $\delta_c(r, z)$ com simetria cilíndrica escrevendo:

$$\delta_c(r, z) = \delta_a(r)\delta(z) \quad (4.5-6)$$

como produto da $\delta_a(r)$ de 4.5.1 e de uma delta unidimensional $\delta(z)$.

Temos a simetria axial pela $\delta_a(r)$ e a simetria em relação ao plano XOY devido a $\delta(z)$.

Para $\delta_c(r, z)$ temos

$$\iint 2\pi r \delta_c(r, z) dr dz = 1 \quad (4.5-7)$$

como consequência das propriedades de $\delta_a(r)$ e $\delta(z)$.

A $\delta_c(r, z)$ serve para representar uma corrente I em uma espira circular, pela sua densidade de corrente

$$J_\varphi = I\delta_a(r - r_0)\delta(z) \quad (4.5-8)$$

Pois o vetor densidade de corrente tem somente componente J_φ (Fig. 4.5-3).

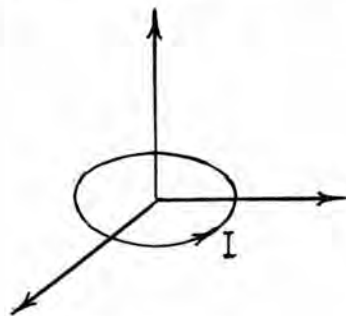


Fig. 4.5-3

4.5.3 - Simetria Esférica (3 Dimensões)

Podemos introduzir a função $\delta_e(r)$ com simetria esférica definida num entorno da origem.

Para $\delta_e(r)$ teríamos:

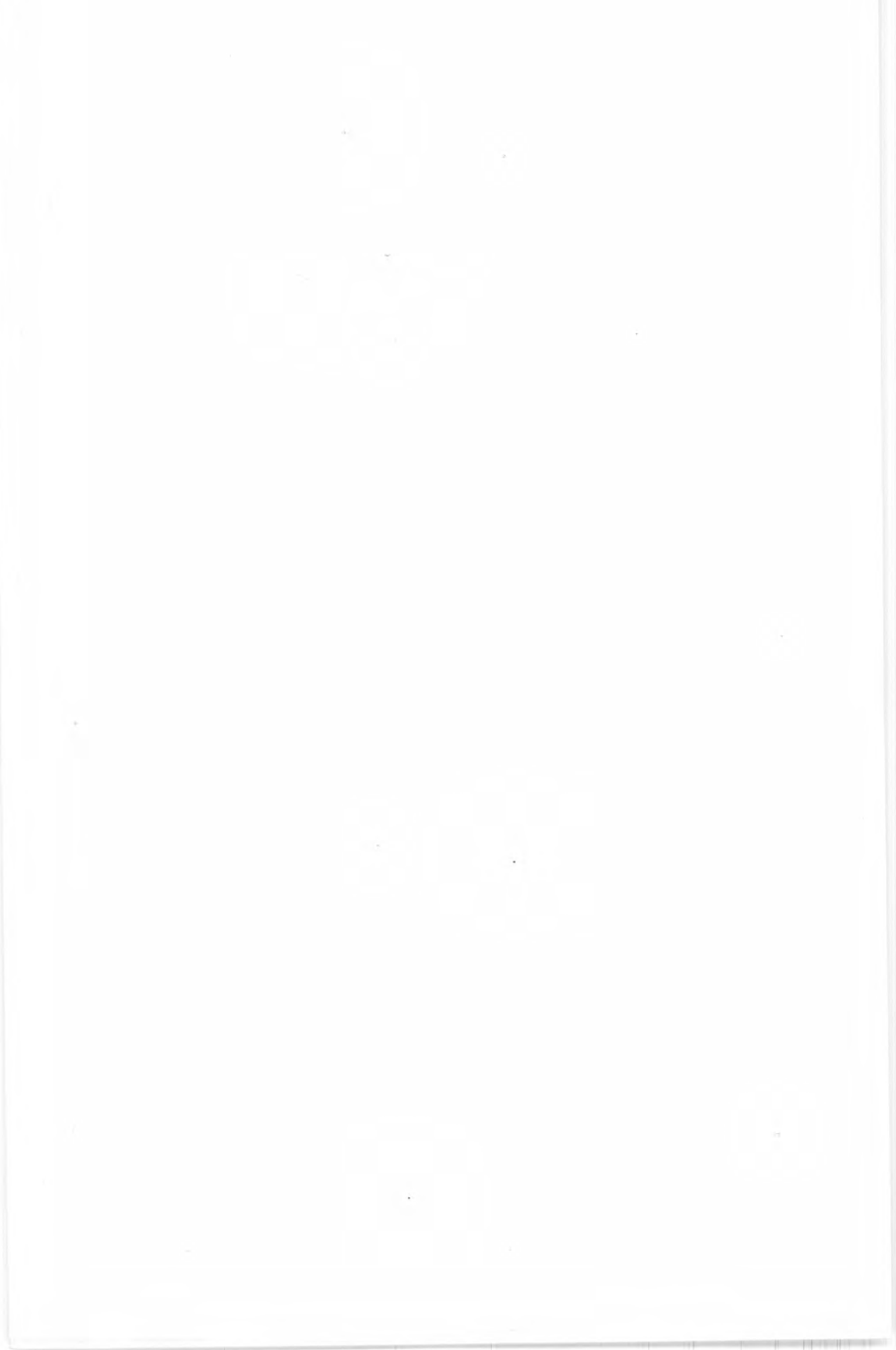
$$\int 4\pi r^2 \delta_e(r) dr = 1 \quad (4.5-9)$$

A função $\delta_e(r - r_0)$ tem simetria esférica e é definida em uma casca esférica de raio médio r_0 . Para $\delta_e(r - r_0)$ temos:

$$\int 4\pi r^2 \delta_e(r - r_0) dr = 1 \quad (4.5-10)$$

Os limites da integral devem incluir r_0 .

--oo0oo--



5. - TRANSFORMADA DE FOURIER

5.1 - Introdução

5.2 - Propriedades básicas

5.3 - Transformadas de Fourier

5.3.1 - Transformada da delta $\delta(x)$

5.3.2 - Transformada de $\delta(x - x_0)$

5.3.3 - Transformada de $\delta^N(x)$

5.3.4 - Transformada de $\delta^N(x - x_0)$

5.3.5 - Transformada de $K = \text{constante}$

5.3.6 - Transformada de x

5.3.7 - Transformada de x^n

5.3.8 - Transformada de $\exp. (iax)$

5.3.9 - Transformada de $x^n \exp. (iax)$

5.3.10 - Transformada de $H(x)$

5.3.11 - Transformada de $x^n H(x)$

5.3.12 - Transformada de $H(x - x_0)$

5.3.13 - Transformada de $\exp.(iax)H(x - x_0)$

5.3.14 - Transformada de $\exp.(iax)x^n H(x)$

5.3.15 - Transformada de $1/x$

5.3.16 - Transformada de $\frac{1}{x - x_0}$

5.3.17 - Transformada de $\frac{\exp.(iax)}{x - x_0}$

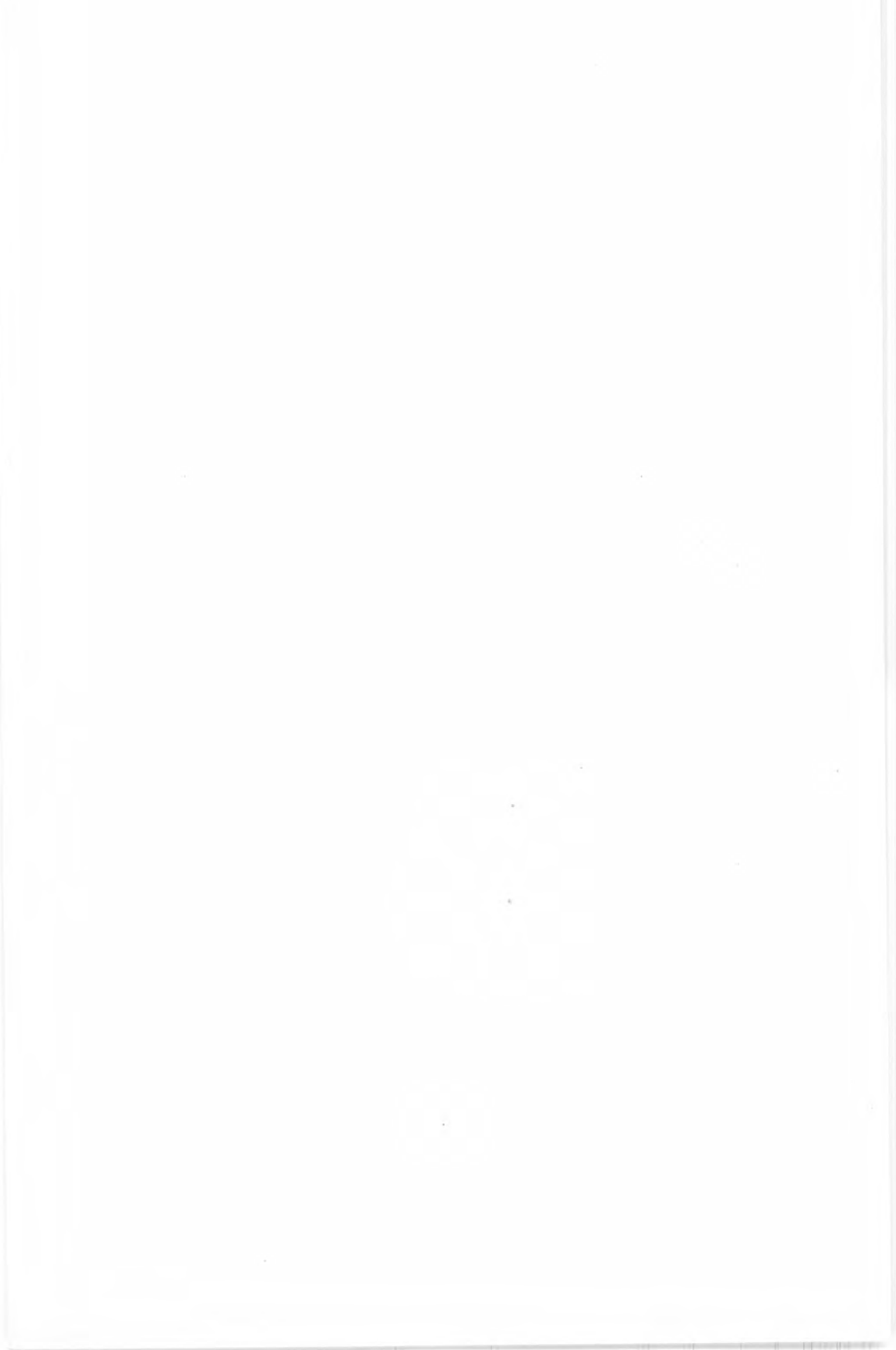
5.3.18 - Transformada de $1/x^n$

5.3.19 - Transformada de $1/(x - x_0)^n$

5.3.20 - Transformada de $\frac{\exp.(iax)}{(x - x_0)^n}$

5.3.21 - Transformada de $(x - x_0)^n H(x - x_0)$

5.3.22 - Transformada de $\exp(iax)(x - x_0)^n H(x - x_0)$



5. - TRANSFORMADA DE FOURIER

5.1 - INTRODUÇÃO

Definimos a transformada complexa de Fourier duma função $f(x)$ pela integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi$$

Esta integral será uma função de ω e será indicada por $F(\omega)$ ou $\mathcal{F}[f(x)]$.

Assim

$$\mathcal{F}[f(x)] = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi \quad (5.1-1)$$

As transformadas seno e cosseno de Fourier, indicadas por $\mathcal{F}_s[f(x)]$ ou $F_s(\omega)$ e $\mathcal{F}_c[f(x)]$ ou $F_c(\omega)$ são definidas por:

$$\mathcal{F}_c[f(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \omega \xi d\xi \quad (5.1-2)$$

$$\mathcal{F}_s[f(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sen \omega \xi d\xi \quad (5.1-3)$$

As fórmulas de inversão das transformadas de Fourier, que nos permitem calcular $f(x)$ a partir das $F(\omega)$, podem ser obtidas da fórmula integral de Fourier.

Consideremos uma função $f(x)$ lisa por partes (piecewise smooth) em qualquer intervalo finito, e nos pontos de descontinuidade, o valor da função é a média aritmética dos limites à esquerda e à direita. Além disso vamos admitir que exista a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$$

Nestas condições demonstra-se a validade da integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \omega (\xi - x) d\xi \quad (5.1-4)$$

Seja $f(x)$ par

$$f(\xi) \cos \omega \xi \cos \omega x \quad \text{é par}$$

$$f(\xi) \sin \omega \xi \sin \omega x \quad \text{é ímpar}$$

em relação a ξ .

Assim a (5.1-4) se reduz a

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega x d\omega \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \omega \xi d\xi$$

e usando a (5.1-2)

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega x d\omega \quad (5.1-5)$$

que é a fórmula de inversão da transformada cosseno.

Seja $f(x)$ ímpar

$$f(\xi) \cos \omega \xi \cos \omega x \quad \text{é ímpar}$$

$$f(\xi) \sin \omega \xi \sin \omega x \quad \text{é par}$$

em relação a ξ .

Usando a (5.1-4)

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \text{sen } \omega x \, d\omega \int_0^{\infty} f(\xi) \text{ sen } \omega \xi \, d\xi$$

e usando a (5.1-3)

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_S(\omega) \text{ sen } \omega x \, d\omega \quad (5.1-6)$$

que é a fórmula de inversão da transformada seno.

Sendo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \omega (\xi - x) d\xi$$

função par de ω podemos escrever

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \omega (\xi - x) d\xi \quad (5.1-7)$$

e sendo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \text{ sen } \omega (\xi - x) d\xi$$

função ímpar de ω podemos escrever:

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \text{ sen } \omega (\xi - x) d\xi \quad (5.1-8)$$

Multiplicando a (5.1-8) por i e subtraindo da (5.1-7)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\omega(\xi-x)} d\xi$$

ou usando a (5.1-1)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (5.1-9)$$

que é a fórmula de inversão da transformada de Fourier complexa.

Resumindo

<u>Transformada</u>	<u>Antittransformada</u>
$\mathcal{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$
$\mathcal{F}_s[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \text{sen } \omega\xi d\xi$	$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \text{sen } \omega x d\omega$
$\mathcal{F}_c[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \text{cos } \omega\xi d\xi$	$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \text{cos } \omega x d\omega$

5.2 - PROPRIEDADES BÁSICAS

Vamos dar a seguir uma série de propriedades importantes sem demonstração, pois a finalidade desta seção 5 é apenas apresentar as transformadas de Fourier que envolvem as função delta e Heaviside.

$$\mathcal{F}[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 \mathcal{F}[f_1] + c_2 \mathcal{F}[f_2] \quad (5.2-1)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{df}{dx}\right] = i\omega \mathcal{F}[f] \quad (5.2-2)$$

$$\mathcal{F}[\theta f] = \theta \mathcal{F}[f] \quad (5.2-3)$$

sendo θ o operador reflexão:

$$\theta[f(x)] = f(-x)$$

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}[f]\} = \mathcal{F}^2[f] = \theta[f(x)] \quad (5.2-4)$$

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)] = e^{-i\omega x_0} \mathcal{F}[f(x)] \quad (5.2-5)$$

$$\mathcal{F}[e^{i\alpha x} f(x)] = F(\omega - \alpha) \quad (5.2-6)$$

onde

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)]$$

5.3 - TRANSFORMADAS DE FOURIER

5.3.1 - Transformada da Delta

$$\mathcal{F}[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (5.3-1)$$

é imediata pois

$$\mathcal{F}[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \delta(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Da fórmula de inversão sai a propriedade (2.19-4) da delta

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} d\omega$$

ou

$$2\pi \delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega \quad (5.3-2)$$

5.3.2 - Transformada da $\delta(x - x_0)$

$$\mathcal{F}[\delta(x - x_0)] = \frac{e^{-i\omega x_0}}{\sqrt{2\pi}} \quad (5.3-3)$$

pois

$$\mathcal{F}[\delta(x - x_0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega x_0}$$

Usando a transformada inversa obtemos a propriedade (2.19-2)

$$\begin{aligned}\delta(x - x_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega x_0} e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-x_0)} d\omega\end{aligned}$$

ou

$$2\pi \delta(x - x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-x_0)} d\omega \quad (5.3-4)$$

5.3.3 - Transformada de $\delta^{(N)}(x)$

$$\mathcal{F}[\delta^{(N)}(x)] = \frac{(i\omega)^N}{\sqrt{2\pi}} \quad (5.3-5)$$

A demonstração é feita através da aplicação sucessiva da (5.2-2) e levando em conta a (5.3-1).

5.3.4 - Transformada de $\delta^{(N)}(x - x_0)$

$$\mathcal{F}[\delta^{(N)}(x - x_0)] = \frac{(i\omega)^N}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega x_0} \quad (5.3-6)$$

A demonstração é feita pela aplicação sucessiva da (5.2-2) levando em conta a (5.3-3).

5.3.5 - Transformada de $K = \text{cte}$

$$\mathcal{F}[K] = \sqrt{2\pi} K \delta(\omega) \quad (5.3-7)$$

pois:

$$\mathcal{F}[K] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} K e^{-i\omega t} dt =$$

e usando a propriedade (5.3-2) e levando em conta que

$$\delta(x) = \delta(-x)$$

vem:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} K 2\pi \delta(\omega) = \sqrt{2\pi} K \delta(\omega)$$

5.3.6 - Transformada de x

$$\mathcal{F}[x] = \sqrt{2\pi} i \delta'(\omega) \quad (5.3-8)$$

pois

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-i\omega x} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(-i)} \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} dx = \end{aligned}$$

usando a (5.2-3)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i \frac{d}{d\omega} 2\pi \delta(\omega) = \sqrt{2\pi} i \delta'(\omega)$$

5.3.7 - Transformada de x^n

$$\mathcal{F}[x^n] = \sqrt{2\pi} i^n \delta^{(n)}(\omega) \quad (5.3-9)$$

A demonstração é idêntica à anterior usando a relação:

$$x^n e^{-i\omega x} = \frac{1}{(-i)^n} \frac{d^n}{d\omega^n} e^{-i\omega x} = (i)^n \frac{d^n}{d\omega^n} e^{-i\omega x} \quad (5.3-10)$$

5.3.8 - Transformada de $e^{i\alpha x}$

$$\mathcal{F}[e^{i\alpha x}] = \sqrt{2\pi} \delta(\omega - \alpha) \quad (5.3-11)$$

pois

$$\mathcal{F}[e^{i\alpha x}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha-\omega)x} dx =$$

usando a (5.3-4)

$$= \sqrt{2\pi} \delta(\omega - \alpha)$$

5.3.9 - Transformada de $x^n e^{i\alpha x}$

$$\mathcal{F}[x^n e^{i\alpha x}] = \sqrt{2\pi} \delta^{(n)}(\omega - \alpha) \quad (5.3-12)$$

demonstra-se usando a relação:

$$x^n e^{-i\omega x} = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} e^{-i\omega x}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x^n e^{i\alpha x}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-i(\omega-\alpha)x} dx = \\ &= \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^n}{d\omega^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega-\alpha)x} dx = \end{aligned}$$

usando a (5.3-4)

$$= i^n \sqrt{2\pi} \delta^{(n)}(\omega - \alpha).$$

5.3.10 - Transformada de $H(x)$

$$\mathcal{F}[H(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{i\omega} + \pi \delta(\omega) \right] \quad (5.3-13)$$

Para obtermos esta transformada vamos usar

$$H(x) + H(-x) = 1$$

para $x \neq 0$

$$\mathcal{F}[1] = \mathcal{F}[H(x) + H(-x)]$$

e usando a (5.3-7) e a linearidade (5.2-1)

$$\mathfrak{F}[H(x)] + \mathfrak{F}[H(-x)] = \sqrt{2\pi} \delta(\omega) \quad (5.3-14)$$

façamos

$$\mathfrak{F}[H(x)] = \psi(\omega) + a \delta(\omega) \quad (5.3-15)$$

com $\psi(\omega)$ ímpar. A (5.3-15) verifica a (5.3-14) para

$$a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

pois

$$\mathfrak{F}[H(-x)] = -\psi(\omega) + a \delta(\omega) \quad (5.3-16)$$

e somando (5.3-15 e 16) vem pela (5.3-14)

$$2a \delta(\omega) = \sqrt{2\pi} \delta(\omega)$$

ou

$$a = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (5.3-17)$$

Para determinarmos $\psi(\omega)$ usamos:

$$\mathfrak{F}[H'(x)] = \mathfrak{F}[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

e pela (5.2-2)

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[H'(x)] &= i\omega \mathfrak{F}[H(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ &= i\omega [\psi(\omega) + a \delta(\omega)] = \end{aligned}$$

e como $\omega \delta(\omega) = 0$

$$= i\omega \psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\psi(\omega) = \frac{1}{i\omega \sqrt{2\pi}} \quad (5.3-18)$$

portanto:

$$\mathfrak{F}[H(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{i\omega} + \pi \delta(\omega) \right]$$

5.3.11 - Transformada de $x^n H(x)$

$$\mathcal{F}[x^n H(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{n!}{(i\omega)^{n+1}} + i^n \pi \delta(\omega) \right] \quad (5.3-19)$$

pois

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x^n H(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n H(x) e^{-i\omega x} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int i^n H(x) \frac{d^n}{d\omega^n} e^{-i\omega x} dx = \\ &= \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^n}{d\omega^n} \int H(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^n}{d\omega^n} \mathcal{F}[H(x)] = \end{aligned}$$

conforme (5.3-13)

$$\begin{aligned} &= \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^n}{d\omega^n} \left[\frac{1}{i\omega} + \pi \delta(\omega) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{i^n}{i} (-1)^n \frac{n!}{\omega^{n+1}} + i^n \pi \delta(\omega) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{n!}{(i\omega)^{n+1}} + i^n \pi \delta(\omega) \right] \end{aligned}$$

5.3.12 - Transformada de $H(x - x_0)$

$$\mathcal{F}[H(x - x_0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\omega x_0}}{i\omega} + \pi \delta(\omega) \right] \quad (5.3-20)$$

Usando a propriedade (5.2-5) vem:

$$\mathcal{F}[H(x - x_0)] = e^{-i\omega x_0} \mathcal{F}[H(x)] =$$

pela (5.3-13)

$$= e^{-i\omega x_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \right] =$$

e usando a propriedade (2.3-1)

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\omega x_0}}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \right]$$

5.3.13 - Transformada de $e^{i\alpha x} H(x - x_0)$

$$\mathfrak{F}[e^{i\alpha x} H(x - x_0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i(\omega - \alpha)x_0}}{i(\omega - \alpha)} + \pi\delta(\omega - \alpha) \right] \quad (5.3-21)$$

Esta relação é obtida a partir da (5.3-20) e da propriedade (5.2-6).

5.3.14 - Transformada de $e^{i\alpha x} \frac{x^n}{x} H(x)$

$$\mathfrak{F}[e^{i\alpha x} \frac{x^n}{x} H(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{n!}{[i(\omega - \alpha)^{n+1}] + \pi i^n \delta^{(n)}(\omega - \alpha)} \right\} \quad (5.3-22)$$

A relação é imediata pela propriedade (5.2-6) e a (5.3-19).

5.1.15 - Transformada de $1/x$

$$\mathfrak{F}\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\pi i - 2\pi i H(\omega)] \quad (5.3-23)$$

Se usarmos a propriedade (5.2-4) em (5.3-13) isto é

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}[H(x)]\} = H(-x)$$

vem:

$$H(-x) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right]\right\}$$

$$H(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i} \mathcal{F}\left[\frac{1}{\omega}\right] + \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}[\delta(\omega)]$$

usando

$$H(-x) = 1 - H(x)$$

$$\mathcal{F}[\delta(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$1 - H(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i} \mathcal{F}\left[\frac{1}{\omega}\right] + \frac{\pi}{2\pi}$$

donde:

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\omega}\right] = \sqrt{2\pi} i - \sqrt{2\pi} i H(x) - \frac{\pi i}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\omega}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\pi i - 2\pi i H(x)]$$

ou

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\pi i - 2\pi i H(x)]$$

5.3.16 - Transformada de $\frac{1}{x - x_0}$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x - x_0}\right] = \frac{e^{-i\omega x_0}}{\sqrt{2\pi}} [\pi i - 2\pi i H(\omega)] \quad (5.3-24)$$

A demonstração é imediata pela aplicação da propriedade (5.2-5) à propriedade anterior (5.3-23).

5.3.17 - Transformada de $\frac{e^{i\alpha x}}{x - x_0}$

$$\mathcal{F}\left[\frac{e^{i\alpha x}}{x - x_0}\right] = \frac{e^{-i(\omega - \alpha)x_0}}{\sqrt{2\pi}} [\pi i - 2\pi i H(\omega - \alpha)] \quad (5.3-25)$$

é imediata pela aplicação da propriedade (5.2-6) à (5.3-24).

5.3.18 - Transformada de $\frac{1}{x^n}$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^n}\right] = \frac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\pi i - 2\pi i H(\omega)] \quad (5.3-26)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^n}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^n} dx =$$

fazendo:

$$\mu = e^{-i\omega x} \quad d\mu = -i\omega e^{-i\omega x} dx$$

$$dv = \frac{dx}{x^n} \quad v = (-1) \frac{1}{(n-1)} \frac{1}{x^{n-1}}$$

e integrando por partes

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-1}{n-1} \frac{e^{-i\omega x}}{x^{n-1}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\omega}{n-1} \frac{e^{-i\omega x}}{x^{n-1}} dx = \\ &= \frac{-i\omega}{(n-1)} \mathcal{F}\left[\frac{1}{x^{n-1}}\right] \quad (5.3-27) \end{aligned}$$

Aplicando a (5.3-7) sucessivamente vem

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^n}\right] = \frac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!} \mathcal{F}\left[\frac{1}{x}\right]$$

e substituindo (5.3-23) obtemos a (5.3-26).

5.3.19 - Transformada de $\frac{1}{(x - x_0)^n}$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{(x - x_0)^n}\right] = \frac{e^{-i\omega x_0} (-i\omega)^{n-1}}{(n-1)! \sqrt{2\pi}} [\pi i - 2\pi i H(\omega)] \quad (5.3-28)$$

Obtemos de imediato pela aplicação da propriedade (5.2-5) à (5.3-26).

5.3.20 - Transformada de $\frac{e^{i\alpha x}}{(x - x_0)^n}$

$$\mathcal{F}\left[\frac{e^{i\alpha x}}{(x - x_0)^n}\right] = \frac{e^{-i(\omega - \alpha)x_0} [-i(\omega - \alpha)]^{n-1}}{(n-1)! \sqrt{2\pi}} [\pi i - 2\pi i H(\omega - \alpha)] \quad (5.3-29)$$

A relação é obtida pela aplicação da propriedade (5.2-6) à (5.3-28).

5.3.21 - Transformada de $(x - x_0)^n H(x - x_0)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[(x - x_0)^n H(x - x_0)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{n! e^{-i\omega x_0}}{(i\omega)^{n+1}} + \right. \\ &\quad \left. + \pi i^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (ix_0)^{n-r} \delta^{(r)}(\omega) \right] \quad (5.3-30) \end{aligned}$$

Usamos a propriedade (5.2-5)

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)] = e^{-i\omega x_0} \mathcal{F}[f(x)]$$

aplicada à (5.3-19)

$$\mathcal{F}[(x - x_0)^n H(x - x_0)] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^{-i\omega x_0}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{n!}{(i\omega)^{n+1}} + \pi i^n \delta^{(n)}(\omega) \right] = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{n! e^{-i\omega x_0}}{(i\omega)^{n+1}} + \pi i^n e^{-i\omega x_0} \delta^{(n)}(\omega) \right] =
 \end{aligned}$$

e usando a propriedade (2.11-1)

$$f(\omega) \delta^{(n)}(\omega) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f^{(r)}(0) \delta^{(n-r)}(\omega)$$

vem:

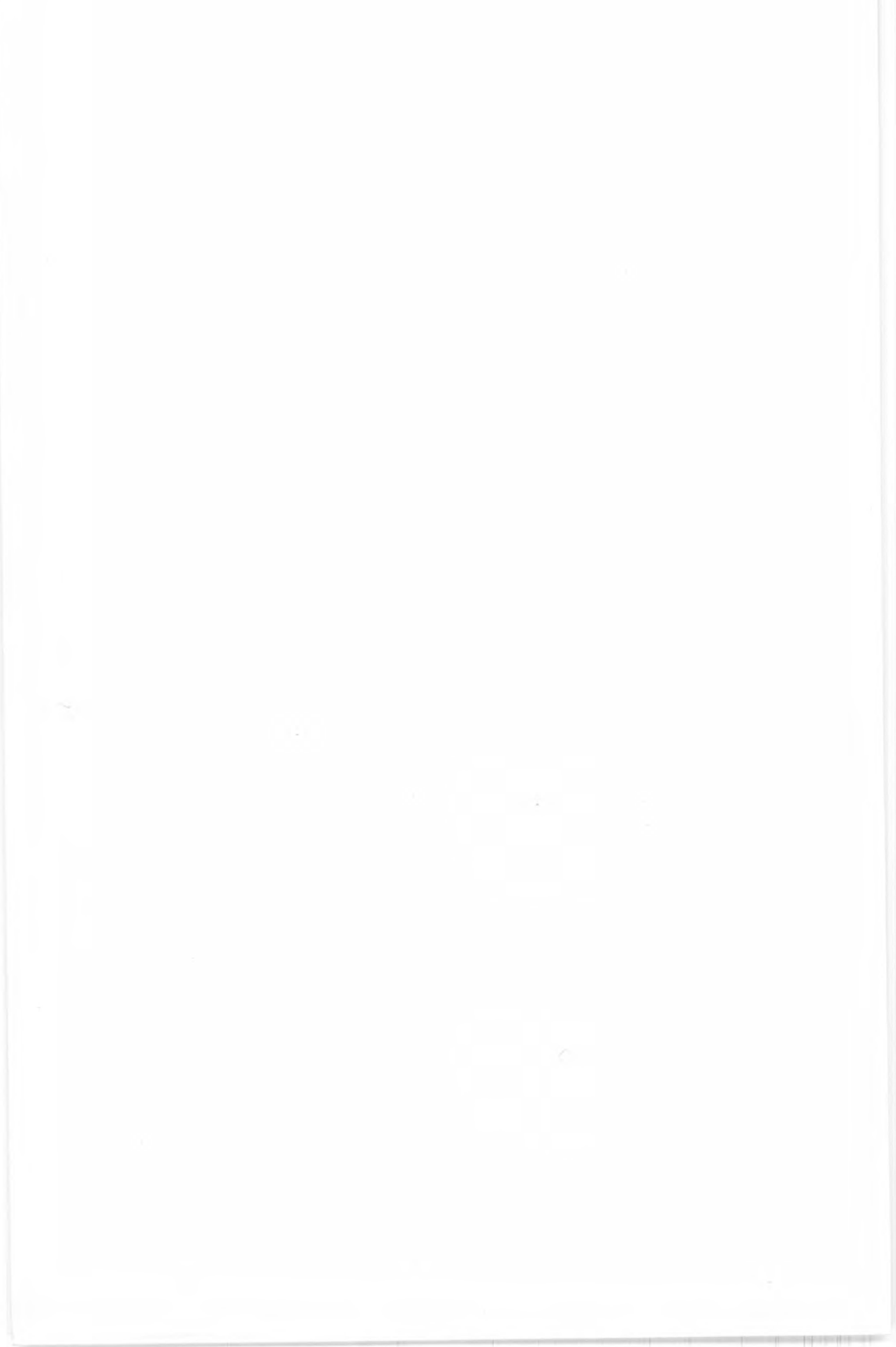
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{n! e^{-i\omega x_0}}{(i\omega)^{n+1}} + \pi i^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (ix_0)^r \delta^{(n-r)}(\omega) \right] = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{n! e^{-i\omega x_0}}{(i\omega)^{n+1}} + \pi i^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (ix_0)^{n-r} \delta^{(r)}(\omega) \right]
 \end{aligned}$$

5.3.22 - Transformada $e^{i\alpha x} (x - x_0)^n H(x - x_0)$

$$\mathcal{F}[e^{i\alpha x} (x - x_0)^n H(x - x_0)] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{n! e^{-i(\omega - \alpha)x_0}}{[i(\omega - \alpha)]^{n+1}} + \pi i^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (ix_0)^{n-r} \delta^{(r)}(\omega - \alpha) \right] \\
 & \hspace{20em} (5.3-31)
 \end{aligned}$$

Usamos a propriedade (5.2-6) em (5.3-30).



6. - TRANSFORMADA DE LAPLACE

6.1 - Introdução

6.2 - Propriedades básicas

6.3 - Transformadas de Laplace

6.3.1 - Transformada de $\delta(x - x_0)$

6.3.2 - Transformada de $H(x)$

6.3.3 - Transformada de $H(x - x_0)$

6.3.4 - Transformada de $\Gamma(x; x_1, x_2)$

6.3.5 - Transformada de $e^{ax} H(x - x_0)$

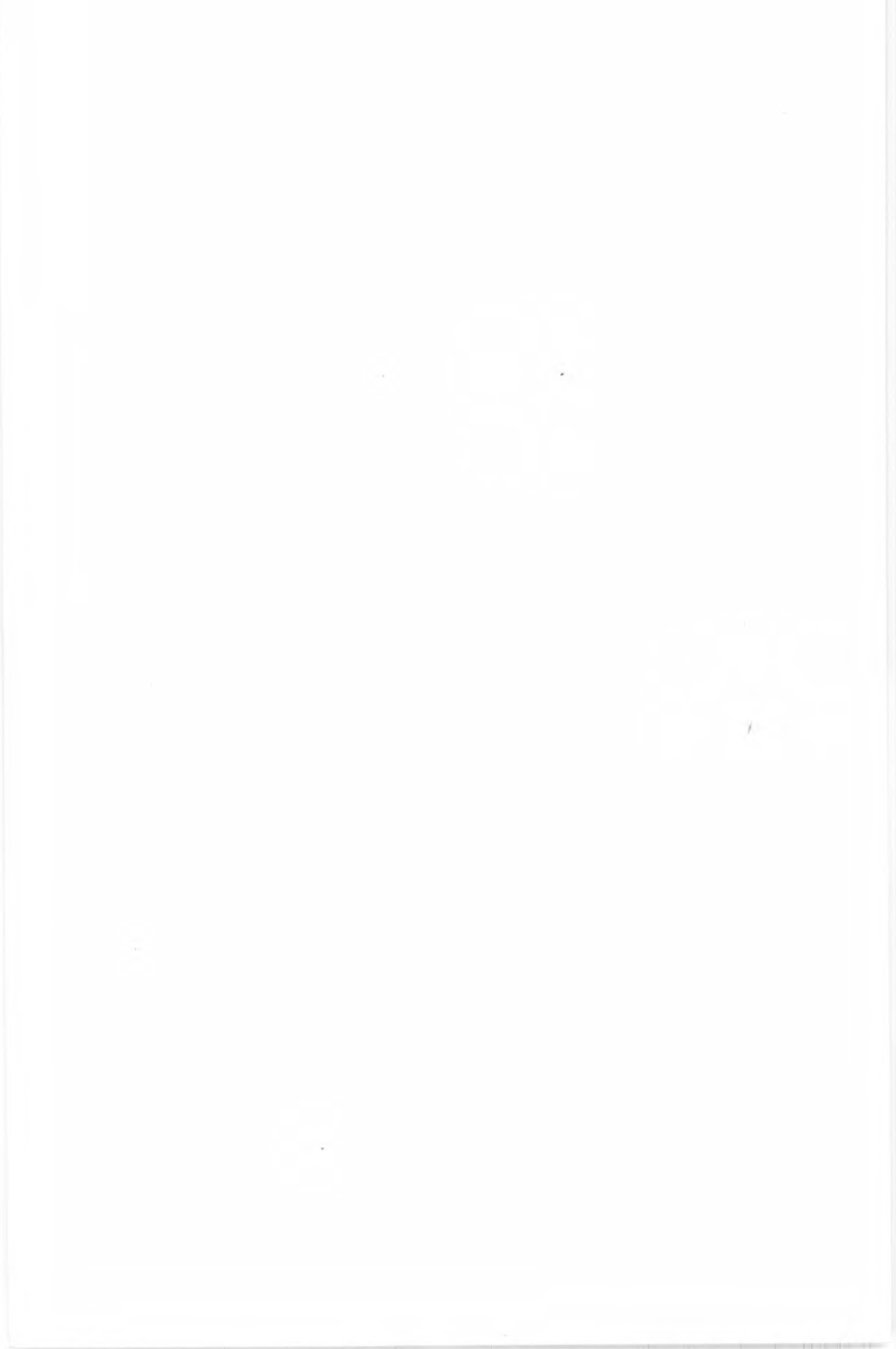
6.3.6 - Transformada de $e^{ax} \Gamma(x; x_1, x_2)$

6.3.7 - Transformada de $xH(x - x_0)$

6.3.8 - Transformada de $x^n H(x - x_0)$

6.3.9 - Transformada de $A \operatorname{sen} h\alpha(x - x_0)H(x - x_0)$

6.3.10 - Transformada de $A \operatorname{cosh} h\alpha(x - x_0)H(x - x_0)$



6. - TRANSFORMADA DE LAPLACE

6.1 - INTRODUÇÃO

As transformadas integrais são definidas por

$$F(\omega) = \int_a^b f(x)K(x, \omega)dx \quad (6.1-1)$$

onde os limites de integração a e b e o núcleo $K(x, \omega)$ são especificados para cada tipo de transformada. Assim para a transformada complexa de Fourier

$$\begin{aligned} a &= -\infty \\ b &= +\infty \\ K(x, \omega) &= e^{-i\omega x} \end{aligned} \quad (6.1-2)$$

Para a transformada de Laplace

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= \infty \\ K(x, s) &= e^{-sx} \end{aligned} \quad (6.1-3)$$

ou seja:

Dada uma função $f(x)$ definida em $[0, \infty]$, a transformada de Laplace de $f(x)$, representada por

$$\mathcal{L}[f(x)] \quad \text{ou} \quad F(s)$$

é definida por

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx \quad (6.1-4)$$

As transformadas podem ser usadas para resolver equações diferenciais com condições de contorno especificadas. Neste caso a técnica a ser usada é esquemáticamente:

- a) Selecionar a transformada apropriada para o problema, conforme o campo de definição e condições de contorno.
- b) Aplicar a transformada à equação diferencial e condições de contorno, usando as propriedades da transformada, ou ainda, multiplicar a equação diferencial e condições de contorno pelo núcleo (kernel) escolhido e integrar em relação à variável escolhida para ser excluída.
- c) Usar na transformada da equação diferencial em b as condições apropriadas de contorno (ou iniciais).
- d) Resolver as equações auxiliares ou "subsidiárias", obtendo desta forma a transformada da solução procurada.
- e) Obter a anti-transformada em tabelas ou por fórmula de inversão.

A finalidade desta secção 6 é apenas apresentar algumas transformadas de Laplace que envolvem as funções delta e Heaviside.

6.2 - PROPRIEDADES BÁSICAS

Vamos a seguir enunciar as principais propriedades básicas, sem demonstrá-las nem entrarmos em detalhes sobre as condições de validade.

$$\mathcal{L}[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 \mathcal{L}[f_1] + c_2 \mathcal{L}[f_2] \quad (6.2-1)$$

$$\mathcal{L}[f(x - x_0)] = e^{-x_0 s} \mathcal{L}[f] \quad (6.2-2)$$

$$\mathcal{L}[e^{bx} f(x)] = \Phi(s - b) \quad ; \quad \Phi(s) = \mathcal{L}[f] \quad (6.2-3)$$

$$\mathcal{L}[x^n f(x)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f] \quad (6.2-4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}(x)] = & - [f^{(n-1)}(0) + s f^{(n-2)}(0) + \dots \\ & \dots + s^{n-1} f(0)] + s^n \mathcal{L}[f] \end{aligned} \quad (6.2-5)$$

6.3 - TRANSFORMADAS DE LAPLACE

6.3.1 - Transformada de $\delta(x - x_0)$

$$\mathcal{L}[\delta(x - x_0)] = e^{-sx_0} \quad (6.3-1)$$

pois

$$\mathcal{L}[\delta(x - x_0)] = \int_0^{\infty} e^{-sx} \delta(x - x_0) dx = e^{-sx_0}$$

Como caso limite para $x_0 \rightarrow 0$ vem:

$$\mathcal{L}[\delta(x)] = 1 \quad (6.3-2)$$

Naturalmente esta relação se justifica pelos resultados corretos que se obtêm na solução das equações diferenciais com a transformada de Laplace.

6.3.2 - Transformada de $H(x)$

$$\mathcal{L}[H(x)] = \frac{1}{s} \quad (6.3-3)$$

$$\mathcal{L}[H(x)] = \int_0^{\infty} H(x) e^{-sx} dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} dx = \frac{1}{s}$$

6.3.3 - Transformada de $H(x - x_0)$

$$\mathcal{L}[H(x - x_0)] = \frac{e^{-sx_0}}{s} \quad (6.3-4)$$

Justifica-se pela propriedade (6.2-2) e (6.3-3).

6.3.4 - Transformada de $\Pi(x; x_1, x_2)$

$$\mathcal{L}[\Pi(x; x_1, x_2)] = \frac{e^{-sx_1} - e^{-sx_2}}{s} \quad (6.3-5)$$

é imediata, pois

$$\mathcal{L}[\Pi(x; x_1, x_2)] = \mathcal{L}[H(x - x_1) - H(x - x_2)] =$$

pela (6.2-1)

$$= \mathcal{L}[H(x - x_1)] - \mathcal{L}[H(x - x_2)] =$$

usando a (6.3-4)

$$= \frac{e^{-sx_1} - e^{-sx_2}}{s}$$

6.3.5 - Transformada de $e^{ax}H(x - x_0)$

$$\mathcal{L}[e^{ax}H(x - x_0)] = \frac{e^{-(s-a)x_0}}{s - a} \quad (6.3-6)$$

Usamos a propriedade (6.2-3) e a (6.3-4).

6.3.6 - Transformada de $e^{ax} \Pi(x; x_1, x_2)$

$$\mathcal{L}[e^{ax} \Pi(x; x_1, x_2)] = \frac{e^{-(s-a)x_1} - e^{-(s-a)x_2}}{s - a} \quad (6.3-7)$$

Usamos a propriedade (6.2-3) e a (6.3-5).

6.3.7 - Transformada de $xH(x - x_0)$

$$\mathcal{L}[xH(x - x_0)] = e^{-sx_0} \frac{1 + sx_0}{s^2} \quad (6.3-8)$$

é só usar a propriedade (6.2-4) e a (6.3-4).

6.3.8 - Transformada de $x^n H(x - x_0)$

$$\mathcal{L}[x^n H(x - x_0)] = e^{-sx_0} \frac{(sx_0)^n + n(sx_0)^{n-1} + \dots + n!}{s^{n+1}} \quad (6.3-9)$$

Usamos a propriedade (6.2-4) e a (6.3-4), isto é:

$$\mathcal{L}[x^n H(x - x_0)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \frac{e^{-sx_0}}{s}$$

6.3.9 - Transformada de $A \sinh \alpha (x - x_0) H(x - x_0)$

$$\mathcal{L}[A \sinh \alpha (x - x_0) H(x - x_0)] = A \frac{\alpha e^{-sx_0}}{s^2 - \alpha^2} \quad (6.3-10)$$

temos:

$$A \sinh \alpha (x - x_0) = \frac{A}{2} [e^{\alpha(x-x_0)} - e^{-\alpha(x-x_0)}]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[A \sinh \alpha (x - x_0)H(x - x_0)] &= \\ &= \frac{A}{2} \left\{ \mathcal{L}[e^{\alpha(x-x_0)}H(x - x_0)] - \mathcal{L}[e^{-\alpha(x-x_0)}H(x - x_0)] \right\} = \\ &= \frac{A}{2} e^{-\alpha x_0} \mathcal{L}[e^{\alpha x}H(x - x_0)] - \frac{A}{2} e^{+\alpha x_0} \mathcal{L}[e^{-\alpha x}H(x - x_0)] = \end{aligned}$$

usando a (6.3-6)

$$\begin{aligned} &= \frac{A}{2} \left[e^{-\alpha x_0} \frac{e^{-(s-\alpha)x_0}}{s - \alpha} - e^{+\alpha x_0} \frac{e^{-(s+\alpha)x_0}}{s + \alpha} \right] = \\ &= \frac{A}{2} \frac{2\alpha e^{-sx_0}}{s^2 - \alpha^2} = A \frac{\alpha e^{-sx_0}}{s^2 - \alpha^2} \end{aligned}$$

6.3.10 - Transformada de $A \cosh \alpha (x - x_0)H(x - x_0)$

$$\mathcal{L}[A \cosh \alpha (x - x_0)H(x - x_0)] = A \frac{s e^{-sx_0}}{s^2 - \alpha^2} \quad (6.3-11)$$

Demonstração análoga à anterior.

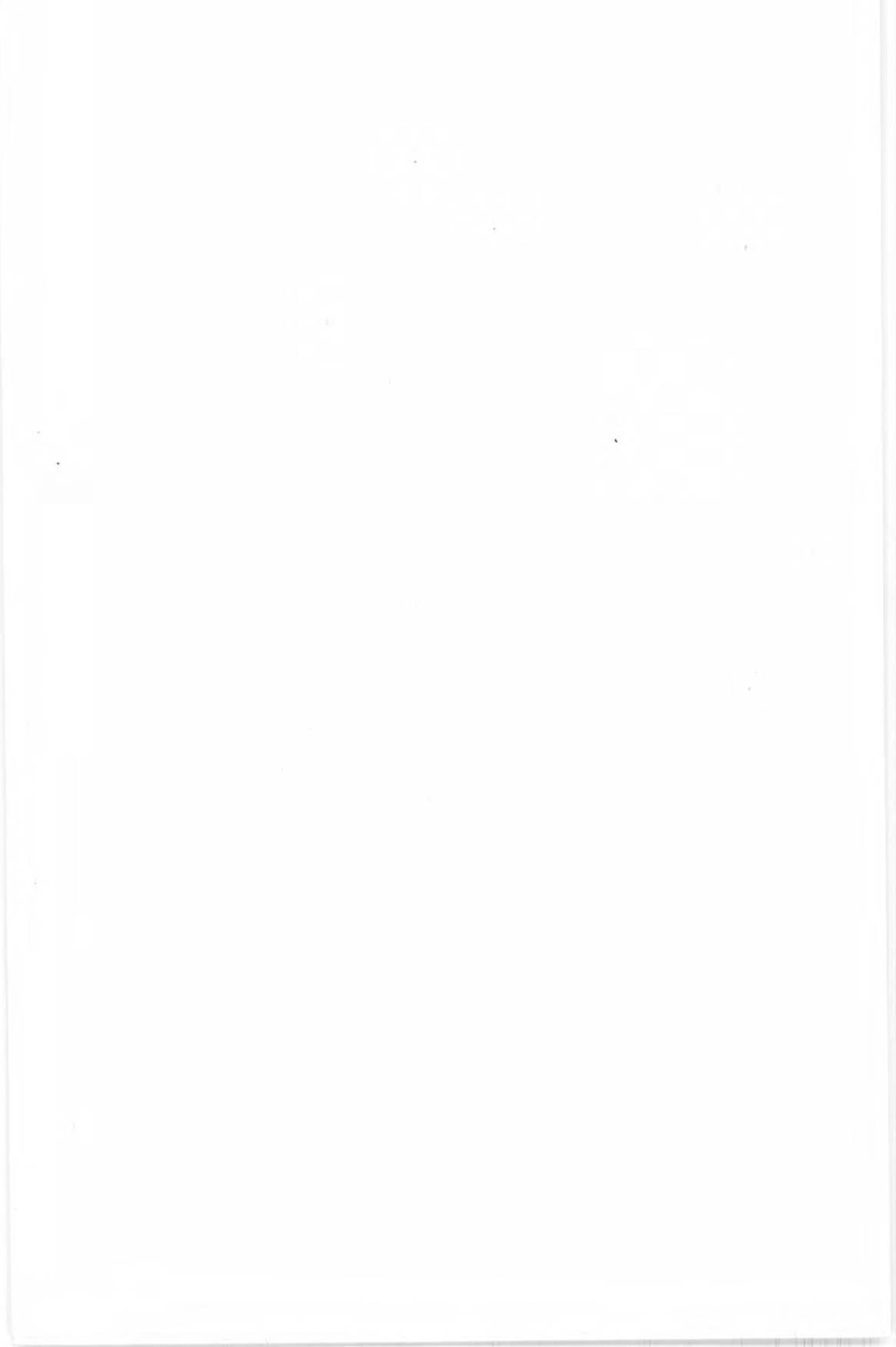
7. - FUNÇÃO DE GREEN

- 7.1 - Equações diferenciais não homogêneas com condições de contorno homogêneas.
- 7.2 - Condições de contorno não homogêneas
- 7.3 - Exemplo
- 7.4 - Expansão da função de Green em série de auto-funções
- 7.5 - Exemplo - Função de Green do operador

$$\left(-\alpha^2 \frac{d^2}{dx^2} + 1\right)$$

em domínio infinito

- 7.5.1 - Determinação de $G(x, x')$ por expansão em série de auto-funções
- 7.5.2 - Determinação de $G(x, x')$ pela solução direta da equação
- 7.5.3 - Determinação de $G(x, x')$ pela solução da equação por transformada de Fourier
- 7.6 - Simetria da função de Green e outras propriedades
 - 7.6.1 - Simetria
 - 7.6.2 - Propriedade $G(x, x') = G(x - x', 0)$
 - 7.6.3 - Propriedade $G(t, t') = G(t - t', 0)$



7. - FUNÇÃO DE GREEN

7.1 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO HOMOGÊNEAS COM CONDIÇÕES DE CONTÔRNO HOMOGÊNEAS

Seja Ω um operador diferencial linear (re-
lativo à variável x).

Consideremos o problema de determinar a
função $f(x)$ que satisfaz à equação diferencial não
homogênea

$$\Omega f(x) = s(x) \quad (7.1-1)$$

com condições especificadas de contôrno e $f(x)$ de-
finida em $[a, b]$.

Seja $G(x, x')$ a solução da equação di-
ferencial

$$\Omega G(x, x') = \delta(x - x') \quad (7.1-2)$$

É fácil demonstrar que

$$f(x) = \int_a^b G(x, x') s(x') dx' \quad (7.1-3)$$

é solução da (7.1-1). Para isto, aplicamos o opera-
dor Ω a ambos os membros da (7.1-3) e levando em
conta que é relativo à variável x e é linear, obtemos:

$$\Omega f(x) = \int_a^b \Omega G(x, x') s(x') dx'$$

e substituindo (7.1-2)

$$\Omega f(x) = \int_a^b \delta(x - x') s(x') dx'$$

e usando a propriedade (2.3-6) e levando em conta que δ é par vem a (7.1-1)

$$\Omega f(x) = s(x)$$

o que nos mostra ser a (7.1-3) solução da equação diferencial (7.1-1).

Devemos examinar as condições de contôrno.

Pela (7.1-3) vemos que se $G(x, x')$ satisfaz condições homogêneas de contôrno, $f(x)$ que é solução da (7.1-1) terá condições de contôrno homogêneas.

Pois se

$$G(a, x') = 0 \quad (7.1-4)$$

$$G(b, x') = 0$$

então, pela 7.1-3

$$f(a) = \int_a^b G(a, x') s(x') dx' = 0 \quad (7.1-5)$$

$$f(b) = \int_a^b G(b, x') s(x') dx' = 0$$

ou ainda se

$$G'_X(a, x') = 0$$

ou

$$G''_X(a, x') = 0$$

} (7.1-6)

temos:

$$\left. \begin{aligned} f'(a) &= \int_a^b G'_X(a, x') s(x') dx' = 0 \\ f''(a) &= \int_a^b G''_X(a, x') s(x') dx' = 0 \end{aligned} \right\} (7.1-7)$$

Assim, uma equação diferencial não homogênea com condições homogêneas de contorno tem como solução a (7.1-3) onde $G(x, x')$ é a função de Green do problema e é a solução da equação diferencial

$$\Omega G(x, x') = \delta(x - x') \quad (7.1-8)$$

com condições homogêneas de contorno.

A função de Green é também chamada "função influência" e a (7.1-3) expressa matematicamente o "princípio da superposição" que é largamente usado em física.

Assim, por exemplo, se $G(x, x')$ é o deslocamento em x pela carga unitária em x' então o des-

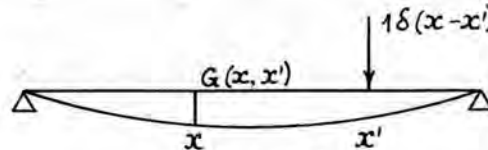


Fig. 7.1-1

locamento em x devido à distribuição de carga $q(x)$ será pelo princípio da superposição

$$\eta(x) = \int_0^b G(x, x') q(x') dx' \quad (7.1-9)$$

7.2 - CONDIÇÕES DE CONTÓRNO NÃO HOMOGENEAS

Vimos em 7.1 a solução da equação

$$\Omega f(x) = s(x) \quad (7.2-1)$$

com condições homogêneas de contorno.

Consideremos agora a solução da (7.2-1) com condições de contorno não homogêneas.

Sejam:

Ψ a solução da equação (7.2-1) com as condições de contorno não homogêneas especificadas, temos:

$$\Omega \Psi = s(x) \quad (7.2-2)$$

ψ_0 a solução da equação (7.2-1) com as condições de contorno homogêneas (ψ_0 pode ser obtida pela função de Green), temos:

$$\Omega \psi_0 = s(x) \quad (7.2-3)$$

Φ solução da equação homogênea associada

$$\Omega \Phi = 0 \quad (7.2-4)$$

com as mesmas condições de contorno não homogêneas especificadas para a (7.2-1).

Temos que $\psi_0 + \Phi$ é solução da (7.2-1) pois pela (7.2-3) e (7.2-4) e a linearidade de Ω

$$\Omega \cdot (\psi_0 + \Phi) = \Omega \psi_0 + \Omega \Phi = s(x)$$

e $\psi_0 + \Phi$ tem as condições de contorno não homogêneas especificadas.

Assim

$$\psi = \psi_0 + \Phi \quad (7.2-5)$$

ou, usando a função de Green

$$\psi = \Phi + \int G(x, x') s(x') dx' \quad (7.2-6)$$

7.3 - EXEMPLO

Resolver

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = Kt \quad (7.3-1)$$

com as condições iniciais

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{aligned} \quad (7.3-2)$$

7.3.1 - Equação Homogênea com Condições Iniciais não Homogêneas (Φ)

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = 0 \quad (7.3-3)$$

$$\Phi(t) = A_1 t + A_2$$

para as condições iniciais (7.3-2)

$$A_1 = v_0$$

$$A_2 = x_0$$

$$\Phi(t) = v_0 t + x_0 \quad (7.3-4)$$

7.3.2 - Equação não Homogênea com Condições Homogêneas de Contorno (Ψ_0)

$$\frac{d^2\Psi_0}{dt^2} = \frac{K}{m} t \quad (7.3-5)$$

$$\Psi_0(t) = \frac{1}{6} \frac{K}{m} t^3 + B_1 t + B_2$$

para $\Psi_0(0) = 0$ vem

$$\Psi_0(t) = \frac{1}{6} \frac{K}{m} t^3 \quad (7.3-6)$$

e conforme (7.2-5)

$$x(t) = \Phi(t) + \Psi_0(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{6} \frac{K}{m} t^3 \quad (7.3-7)$$

é a solução da equação (7.3-1) com as condições iniciais (7.3-2).

7.4 - EXPANSÃO DA FUNÇÃO DE GREEN EM AUTO-FUNÇÕES

Vimos que dada a equação não homogênea

$$\Omega . f(x) = s(x) \quad (7.4-1)$$

com condições de contorno homogêneas, podíamos obter a solução através da função de Green. Vamos agora ver como obter a função de Green dum operador diferencial linear Ω , através de suas auto-funções.

Sejam $\psi_m(x)$ as auto-funções normalizadas, do operador Ω , correspondentes aos auto-valôres λ_m , isto é,

$$\Omega \psi_m(x) = \lambda_m \psi_m(x) \quad (7.4-2)$$

A função de Green do operador Ω , $G(x, x_0)$ pode ser desenvolvida em série das auto-funções

$$G(x, x_0) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(x_0) \psi_m(x) \quad (7.4-3)$$

$G(x, x_0)$ é solução da equação

$$\Omega . G(x, x_0) = \delta(x - x_0) \quad (7.4-4)$$

Substituindo $G(x, x_0)$ da (7.4-3)

$$\Omega . \sum A_m(x_0) \psi_m(x) = \delta(x - x_0)$$

como Ω é linear e relativo a x

$$\sum A_m(x_0) \Omega . \psi_m(x) = \delta(x - x_0)$$

e pela (7.4-2)

$$\sum A_m(x_0) \lambda_m \psi_m(x) = \delta(x - x_0)$$

Multiplicando por $\psi_n^*(x)$ e integrando, e levando em conta a ortonormalização das auto-funções, vem:

$$\sum A_m(x_0) \lambda_m \int \psi_n^*(x) \psi_m(x) dx = \int \psi_n^*(x) \delta(x - x_0) dx$$

ou

$$\lambda_n A_n(x_0) = \psi_n^*(x_0) \quad (7.4-5)$$

e substituindo em (7.4-3) $A_n(x_0)$ desta relação

$$G(x, x_0) = \sum \frac{\psi_n^*(x_0) \psi_n(x)}{\lambda_n} \quad (7.4-6)$$

Para auto-funções reais temos de imediato que

$$G(x, x_0) = G(x_0, x) \quad (7.4-7)$$

A (7.4-6) pode ser estendida para o caso de espectro contínuo.

Sejam ψ_λ as auto-funções de Ω com espectro contínuo:

$$\Omega \cdot \psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda \quad (7.4-8)$$

Suponhamos as $\psi_\lambda(x)$ ortonormalizadas pela δ

$$(\psi_\lambda; \psi_\rho) = \delta(\lambda - \rho) \quad (7.4-9)$$

A função de Green $G(x, x_0)$ do operador Ω , pode ser expressa pela integral

$$G(x, x_0) = \int A(\lambda; x_0) \psi_\lambda(x) d\lambda \quad (7.4-10)$$

Substituindo $G(x, x_0)$ em

$$\Omega \cdot G(x, x_0) = \delta(x - x_0)$$

$$\Omega \cdot \int A(\lambda; x_0) \psi_\lambda(x) d\lambda = \delta(x - x_0)$$

-8) Sendo Ω linear e levando em conta a (7.4-

$$\int A(\lambda, x_0) \lambda \psi_\lambda(x) d\lambda = \delta(x - x_0)$$

multiplicando por $\psi_\gamma^*(x)$ e integrando em x e usando (7.4-9)

$$\int A(\lambda, x_0) \lambda \delta(\lambda - \gamma) d\lambda = \psi_\gamma^*(x_0)$$

ou

$$A(\gamma, x_0) \cdot \gamma = \psi_\gamma^*(x_0) \quad (7.4-11)$$

levando

$$A(\gamma, x_0) = \frac{\psi_\gamma^*(x_0)}{\gamma}$$

em (7.4-10)

$$G(x, x_0) = \int \frac{\psi_\gamma^*(x_0) \psi_\gamma(x)}{\gamma} d\gamma \quad (7.4-12)$$

Para podermos calcular $G(x, x_0)$ não deverá existir auto-valor nulo.

Demonstra-se que:

"A condição necessária e suficiente para que um operador Hermitiano Ω tenha função de Green, é que não tenha zero como auto-valor ou como limite de auto-valores."

7.5 - EXEMPLO - FUNÇÃO DE GREEN DO OPERADOR

$$\Omega = -\alpha^2 \frac{d^2}{dx^2} + 1 \quad \text{EM DOMÍNIO INFINITO}$$

A equação

$$\Omega \cdot f(x) = s(x)$$

descreve, por exemplo, a densidade de absorção de

partículas que se difundem de uma fonte de densidade $s(x)$.

7.5.1 - Determinação de $G(x, x')$ por Expansão em Série de Auto-Funções

Para fazermos uso da (7.4-12), necessitamos conhecer as auto-funções do operador Ω , isto é, resolver

$$\Omega \cdot \Psi_\lambda = \lambda \Psi_\lambda \quad (7.5-1)$$

ou

$$\alpha^2 \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + (\lambda - 1) \Psi = 0$$

Substituindo

$$\Psi = e^{i\omega x}$$

$$\alpha^2 \omega^2 = \lambda - 1$$

$$\lambda = 1 + \alpha^2 \omega^2$$

As auto-funções são $e^{i\omega x}$ e os auto-valôres

$$\lambda = 1 + \alpha^2 \omega^2$$

As auto-funções ortonormalizadas pela δ são:

$$\Psi_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} \quad (7.5-2)$$

correspondentes aos auto-valôres

$$\lambda = 1 + \alpha^2 \omega^2 \quad (7.5-3)$$

Usando a (7.4-12)

$$G(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(x-x')}}{1 + \alpha^2 \omega^2} d\omega \quad (7.5-4)$$

Obviamente temos para $\alpha \rightarrow 0$

$$G(x, x') \rightarrow \delta(x - x')$$

A integral (7.5-4) pode ser avaliada pela teoria dos resíduos. Fazemos

$$\alpha\omega = t \quad d\omega = \frac{dt}{\alpha}$$

$$G(x, x') = \frac{1}{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\frac{x-x'}{\alpha}t}}{(t+i)(t-i)} dt$$

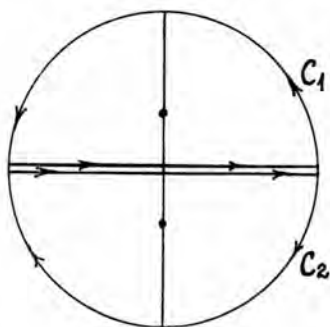


Fig. 7.5-1

A função

$$f(z) = \frac{e^{i\beta z}}{(z+i)(z-i)}$$

tem 2 polos nos pontos $z = \pm i$, e os resíduos nestes dois polos:

$$\text{Res}[f(z); z = +i] = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) f(z) = \frac{e^{-\beta}}{2i}$$

$$\text{Res}[f(z); z = -i] = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i) f(z) = -\frac{e^{\beta}}{2i}$$

Para $\beta > 0$ isto é $x > x'$ escolhemos o contorno C_1 indicado no plano para $\rho \rightarrow \infty$. Usando o teorema dos resíduos

$$G(x, x') = \frac{e^{-\frac{(x-x')}{\alpha}}}{2} \quad (7.5-5)$$

Para $\beta < 0$, isto é, $x < x'$ escolhamos o contorno C_2 (Fig. 7.5-1).

$$G(x, x') = \frac{e^{\frac{x-x'}{\alpha}}}{2} \quad (7.5-6)$$

A (7.5-5) e (7.5-6) podem ser reunidas em

$$G(x, x') = \frac{e^{-\frac{(x-x')}{\alpha}}}{2} \quad (7.5-7)$$

7.5.2 - Determinação de $G(x, x')$ pela Solução Direta da Equação

A função de Green é a solução de

$$\left(-\alpha^2 \frac{d^2}{dx^2} + 1\right) G(x, x') = \delta(x, x') \quad (7.5-8)$$

para condições de contorno homogêneas:

$$G(\pm\infty, x') = 0 \quad (7.5-9)$$

para $x < x'$ e $x > x'$ a (7.5-8) reduz-se a

$$\alpha^2 \frac{d^2}{dx^2} G(x, x') = G(x, x')$$

Usando

$$G(x, x') = G(x') e^{i\varphi x}$$

vem

$$-\alpha^2 \varphi^2 = 1 \quad \varphi = \pm \frac{i}{\alpha}$$

ou seja

$$G(x, x') = a_1(x') e^{-\frac{x}{\alpha}} + a_2(x') e^{+\frac{x}{\alpha}}$$

é solução da (7.5-8) para $x \neq x'$.

As condições (7.5-9) exigem que

$$a_1(x') = 0 \quad \text{para} \quad x < x'$$

$$a_2(x') = 0 \quad \text{para} \quad x > x'$$

Para $x \neq x'$ a solução pode ser escrita

$$G(x, x') = a(x') e^{+\frac{x}{\alpha}} H(x' - x) + b(x') e^{-\frac{x}{\alpha}} H(x - x') \quad (7.5-10)$$

$a(x')$ e $b(x')$ devem ser determinados. Derivando formalmente em relação a x

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dx}(x, x') &= \frac{1}{\alpha} a(x') e^{\frac{x}{\alpha}} H(x' - x) - \frac{1}{\alpha} b(x') e^{-\frac{x}{\alpha}} H(x - x') \\ &+ [a(x') e^{\frac{x}{\alpha}} - b(x') e^{-\frac{x}{\alpha}}] \delta(x - x') \quad (7.5-11) \end{aligned}$$

A expressão entre parêntesis deve ser nula para $x = x'$

$$a(x') e^{\frac{x'}{\alpha}} - b(x') e^{-\frac{x'}{\alpha}} = 0 \quad (7.5-12)$$

pois caso contrário

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x, x')$$

conteria um termo proporcional a

$$\frac{d}{dx} \delta(x - x')$$

que não seria cancelado na equação (7.5-8).

Assim de (7.5-12)

$$a(x')e^{\frac{x'}{\alpha}} = b(x')e^{-\frac{x'}{\alpha}} = c(x') \quad (7.5-13)$$

Substituindo

$$a(x') = c(x') e^{-\frac{x'}{\alpha}}$$

$$b(x') = c(x') e^{+\frac{x'}{\alpha}}$$

em (7.5-10) e (7.5-11)

$$G(x, x') = \frac{c(x')}{\alpha} e^{\frac{x-x'}{\alpha}} H(x'-x) + \frac{c(x')}{\alpha} e^{-\frac{x'-x}{\alpha}} H(x-x')$$

ou

$$(7.5-14)$$

$$G(x, x') = \frac{c(x')}{\alpha} e^{-\frac{|x-x'|}{\alpha}}$$

(7.5-14)

e

$$\frac{dG}{dx} = \frac{c(x')}{\alpha} e^{-\frac{x'-x}{\alpha}} H(x'-x) - \frac{c(x')}{\alpha} e^{-\frac{x-x'}{\alpha}} H(x-x')$$

(7.5-15)

derivando (7.5-15)

$$\begin{aligned} \frac{d^2G}{dx^2} &= \frac{1}{\alpha^2} G(x, x') - \frac{c(x')}{\alpha} e^{-\frac{x'-x}{\alpha}} \delta(x-x') \\ &\quad - \frac{c(x')}{\alpha} e^{-\frac{x-x'}{\alpha}} \delta(x-x') \end{aligned}$$

e conforme a propriedade

$$f(x)\delta(x-x') = f(x')\delta(x-x')$$

$$\frac{d^2G}{dx^2} = \frac{1}{\alpha^2} G(x, x') - 2 \frac{c(x')}{\alpha} \delta(x-x')$$

e comparando com (7.5-8) vem:

$$2c(x') \alpha = 1$$

$$c(x') = \frac{1}{2\alpha} \quad (7.5-16)$$

e portanto para a (7.5-14)

$$G(x, x') = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x-x'|}{\alpha}} \quad (7.5-17)$$

Propriedade de $G'(x, x')$

Usando a (7.5-15), temos:

$$G'_x(x'+, x') = -\frac{c(x')}{\alpha}$$

$$G'_x(x'-, x') = \frac{c(x')}{\alpha}$$

A descontinuidade da $G'(x, x')$ por salto no ponto $x = x'$, vale

$$G'_x(x'+, x') - G'_x(x'-, x') = -\frac{2c(x')}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2} \quad (7.5-18)$$

A derivada da função de Green do operador

$$-\alpha^2 \frac{d^2}{dx^2} + 1$$

tem uma descontinuidade por salto, no ponto $x = x'$ igual a $-1/\alpha^2$.

7.5.3 - Determinação da $G(x, x')$ pela Solução da Equação por Transformada de Fourier

$G(x, x')$ é a solução de

$$\left(-\alpha^2 \frac{d^2}{dx^2} + 1\right) G(x, x') = \delta(x - x')$$

para as condições

$$G(\pm\infty, x') = 0$$

Aplicando a transformada de Fourier

$$\mathcal{F}_x \left(-\alpha^2 \frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) G(x, x') = \mathcal{F}_x \delta(x - x')$$
$$+ \alpha^2 \omega^2 \bar{G}(\omega, x') + \bar{G}(\omega, x') = \frac{e^{-i\omega x'}}{\sqrt{2\pi}}$$

e

$$\bar{G}(\omega, x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega x'}}{1 + \alpha^2 \omega^2} \quad (7.5-19)$$

Pela fórmula de inversão:

$$G(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(x'-x)}}{1 + \alpha^2 \omega^2} d\omega$$

que calculada pela teoria dos resíduos, conforme vimos em 7.5.1 nos dá:

$$G(x, x') = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x-x'|}{\alpha}} \quad (7.5-20)$$

7.6 - SIMETRIA DA FUNÇÃO DE GREEN E OUTRAS PROPRIEDADES

7.6.1 - Simetria

A função de Green de um operador auto-adjunto é uma função simétrica do parâmetro x' e da variável x , isto é,

$$G(x, x') = G(x', x) \quad (7.6-1)$$

Não demonstraremos esta propriedade.

A simetria da função de Green expressa a reciprocidade que frequentemente aparece em física: se a força 1 aplicada em x' produz um efeito $G(x, x')$

em x , então a fôrça 1 aplicada em x produz o mesmo resultado em x' .

7.6.2 - Propriedade $G(x - x'; 0) = G(x, x')$

Consideremos a equação diferencial não homogênea com condições homogêneas no domínio $[-\infty, +\infty]$

$$\Omega f(x) = s(x) \quad (7.6-2)$$

A função de Green do problema é a solução de

$$\left. \begin{aligned} \Omega G(x, x') &= \delta(x - x') \\ \text{com as condições} \\ G(\pm\infty, x') &= 0 \end{aligned} \right\} (7.6-3)$$

Como caso particular para $x' = 0$,

$$G(x, 0) = G(x)$$

satisfaz a equação

$$\Omega G(x, 0) = \delta(x) \quad (7.6-4)$$

com as condições

$$G(\pm\infty, 0) = 0 \quad (7.6-5)$$

Se usarmos $x - x'$ em vez de x

$$g(x, x') = G(x - x', 0)$$

satisfaz a (7.6-4)

$$\Omega .g(x, x') = \delta(x - x') \quad (7.6-6)$$

com as condições (7.6-5)

$$g(\pm\infty, x') = 0 \quad (7.6-7)$$

Comparando (7.6-6) e (7.6-5) com (7.6-2) e (7.6-3) concluímos que

$$g(x, x') = G(x, x')$$

ou seja

$$G(x - x', 0) = G(x, x') \quad (7.6-8)$$

Assim a função de Green em domínio infinito $(-\infty, +\infty)$ pode ser calculada através da solução de

$$\Omega G(x) = \delta(x) \quad (7.6-9)$$

com condições homogêneas de contorno por

$$G(x, x') = G(x - x') \quad (7.6-10)$$

Esta relação nos permite escrever a solução:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x')s(x')dx' \quad (7.6-11)$$

da forma

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - x')s(x')dx' \quad (7.6-12)$$

que é a definição de convolução (faltung) da $G(x)$ com $s(x)$ e representa-se por

$$f(x) = G(x) \star s(x) \quad (7.6-13)$$

7.6.3 - Propriedade $G(t, t') = G(t - t', 0)$

Consideremos a equação diferencial

$$\Omega f(t) = s(t) \quad (7.6-14)$$

com condições homogêneas iniciais.

A função de Green do operador Ω é solução de

$$\Omega G(t, t') = \delta(t - t') \quad (7.6-15)$$

com condições iniciais homogêneas.

Como a perturbação $\delta(t - t')$ só se faz sentir após $t > t'$ e como as condições iniciais homogêneas se conservam até $t = t'$, a função $G(t, t')$ será igual a $G(t - t', 0)$ solução de

$$\Omega G(t - t', 0) = \delta(t - t') \quad (7.6-16)$$

com condições homogêneas para $t - t' = 0$.

Portanto, se $G(t)$ é solução de

$$\Omega G(t) = \delta(t) \quad (7.6-17)$$

com condições iniciais homogêneas, a função de Green $G(t, t')$ pode ser calculada por

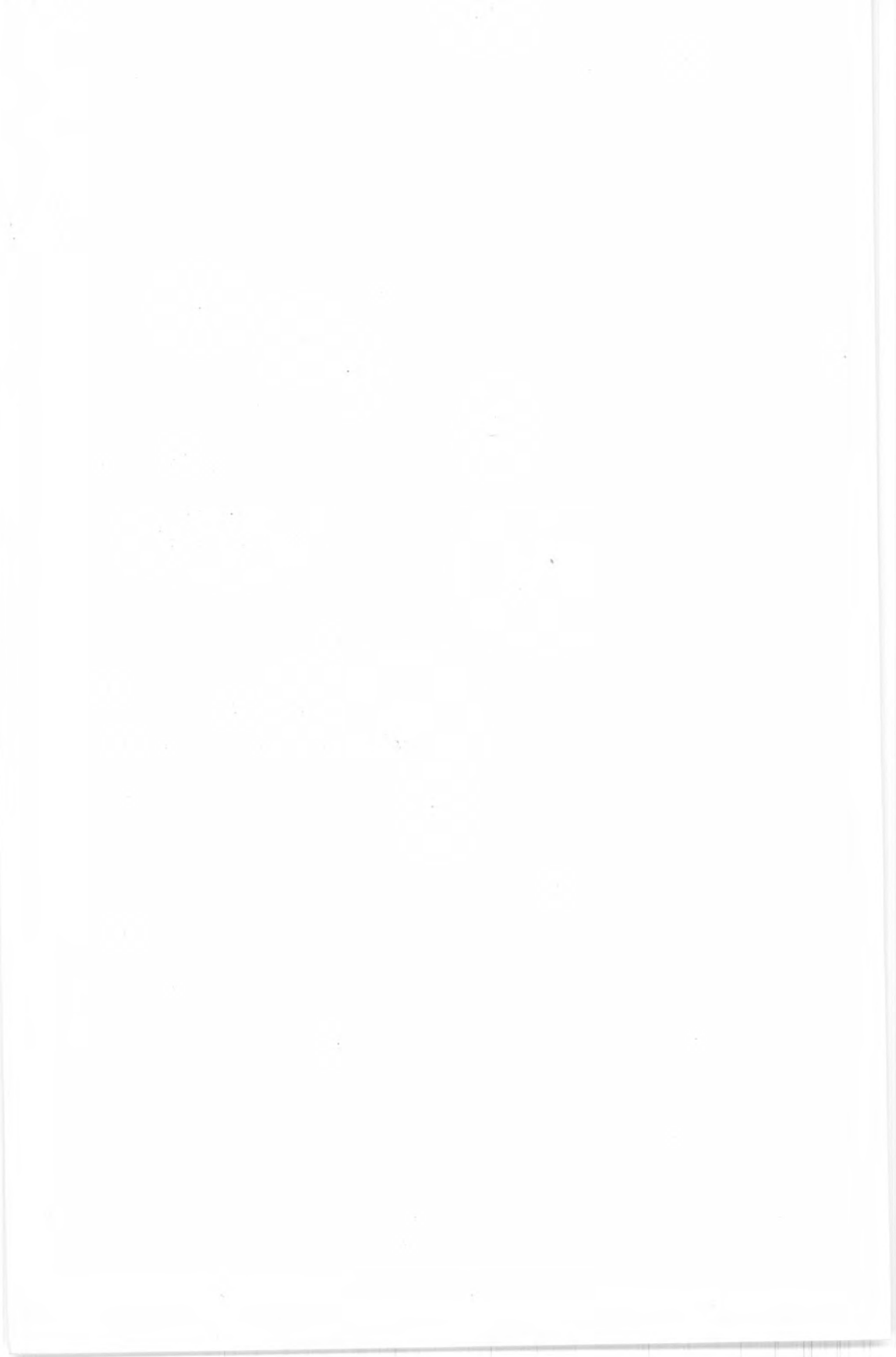
$$G(t, t') = G(t - t', 0) \quad (7.6-18)$$

Naturalmente, tudo o que foi visto nesta secção, pode estender-se sem dificuldade a duas ou mais variáveis.

--oo0oo--

8. - APLICAÇÕES

- 8.1 - Representação de cargas em estática
- 8.2 - Dinâmica - Movimento retilíneo
 - 8.2.1 - Função de Green do problema
 - 8.2.2 - Solução do problema
- 8.3 - Elástica de uma viga apoiada sob ação de um par
 - 8.3.1 - Função de Green da viga apoiada
 - 8.3.2 - Elástica da viga apoiada sob ação de um par de momento M
- 8.4 - Oscilador Harmônico
 - 8.4.1 - Função de Green do Problema
 - 8.4.2 - Vibração harmônica forçada
- 8.5 - Condução do calor
 - 8.5.1 - Equação de Fourier da difusão
 - 8.5.2 - Solução da equação de Fourier uni-dimensional
- 8.6 - Circuito RLC - Função de Green
- 8.7 - Teoria das linhas
 - 8.7.1 - Equações diferenciais
 - 8.7.2 - Equações subsidiárias
 - 8.7.3 - Aplicação - Sinal delta
- 8.8 - Teorema dos potenciais retardados
 - 8.8.1 - Introdução
 - 8.8.2 - Teorema
 - 8.8.3 - Demonstração
 - 8.8.4 - Avaliação de integrais
- 8.9 - Espalhamento para um poço de potencial delta esféricamente simétrico
 - 8.9.1 - Seção de choque diferencial e total
 - 8.9.2 - Validade da aproximação de Born
 - 8.9.3 - Conclusões.



8. APLICAÇÕES

8.1 - REPRESENTAÇÃO DE CARGAS EM ESTÁTICA

Em estática comumente aparecem cargas con centradas, cargas distribuídas por trechos, cargas com distribuição contínua. Estas situações de cargas são representadas facilmente por combinações de funções delta e heaviside. As equações gerais deduzidas para carga com distribuição contínua $q(x)$ podem ser usadas sem nenhuma restrição, bastando fazer uso das propriedades formais.

Dada uma viga de comprimento l com carga distribuída $q(x)$ (Fig. 8.1-1)

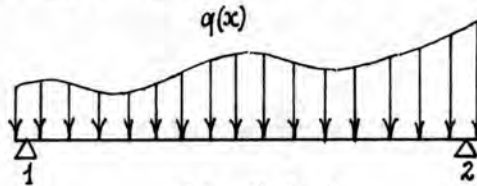


Fig. 8.1-1

temos:

$$R_{1 \cdot l} = \int_0^l q(x)(l - x)dx \quad (8.1-1)$$

$$M(x) = R_1 x - \int_0^x q(x')(x - x')dx' \quad (8.1-2)$$

Consideremos o exemplo da fig. 8.1-2.

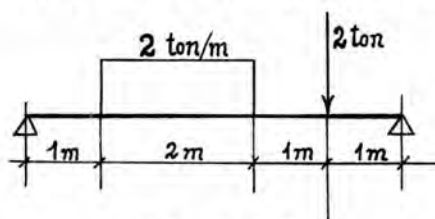


Fig. 8.1-2

A distribuição de carga é representada por

$$q(x) = 2\Pi(x; 1, 3) + 4\delta(x - 4) \quad (8.1-3)$$

Substituindo (8.1-3) em (8.1-1)

$$\begin{aligned} R_{1,5} &= \int_0^5 [2\Pi(x; 1, 3)(5-x) + 4\delta(x-4)(5-x)] dx = \\ &= \int_0^5 2\Pi(x; 1, 3)(5-x) dx + \int_0^5 4\delta(x-4)(5-x) dx = \end{aligned}$$

e usando as propriedades (1.7-2) e (2.3-6) vem

$$= \int_1^3 2(5-x) dx + 4(5-4) = \left[10x - x^2 \right]_1^3 + 4 = 16$$

$$R_1 = \frac{16}{5} = 3,2 \text{ t} \quad (8.1-4)$$

Calculemos o momento no ponto $x = 2m$.

Substituindo (8.1-4) e (8.1-3) em (8.1-2)

$$\begin{aligned} M(2) &= 3,2 \times 2 - \int_0^2 [2\Pi(x'; 1, 3)(2-x') + 4\delta(x'-4)(2-x')] dx' = \\ &= 6,4 - \int_0^2 2\Pi(x'; 1, 3)(2-x') dx' - \int_0^2 4\delta(x'-4)(2-x') dx' = \end{aligned}$$

Usando as propriedades (1.7-2) e (2.3-6) e levando em conta que o intervalo $[0, 2]$ não inclui o ponto $x' = 4$ vem

$$\begin{aligned} &= 6,4 - \int_1^2 2(2 - x') dx' = 6,4 - \left[4x - x^2 \right]_1^2 \\ &= 6,4 - 1 = 5,4 \text{ m t} \end{aligned}$$

8.2 - MOVIMENTO RETILÍNEO

Vamos considerar aqui o seguinte problema:

Determinar a equação do movimento de um ponto de massa m , que parte do repouso sob ação da força

$$F(t) = t^2 \Pi(t; 0, t_1) \quad (8.2-1)$$

A (8.2-1) representa uma força $f(t) = t^2$ agindo do instante $t = 0$ a $t = t_1$.

A equação a resolver é

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t) \quad (8.2-2)$$

Vamos resolvê-la pela função de Green.

8.2.1 - Função de Green do Problema

A função de Green do problema é a solução da equação:

$$m \frac{d^2 G}{dt^2} = \delta(t) \quad (8.2-3)$$

com as condições

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x'(0) &= 0 \end{aligned} \right\} (8.2-4)$$

Vamos resolver a (8.2-3) pela transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\left[m \frac{d^2 G}{dt^2}\right] = \mathcal{L}[\delta(t)]$$

Usando as propriedades da transformada de Laplace (6.3-2)

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

e (6.2-5)

$$\mathcal{L}[f''] = [s^2 \mathcal{L}f - s \mathcal{L}f(0) - f'(0)]$$

vem, levando em conta as (8.2-4)

$$ms^2 \mathcal{L}[G] = 1$$

$$\mathcal{L}[G] = \frac{1}{ms^2} \quad (8.2-5)$$

e portanto a função de Green do problema é

$$G(t) = \frac{1}{m} t \quad (8.2-6)$$

8.2.2 - Solução do Problema

A solução do problema é dada, conforme vimos em 7.6-2, por

$$x(t) = G(t) \star F(t)$$

ou seja

$$x(t) = \int_0^{\infty} G(t - t') F(t') dt'$$

ou seja

$$x(t) = \int_0^{\infty} \frac{t - t'}{m} t'^2 \Pi(t'; 0, t_1) dt'$$

e usando a propriedade (1.7-2) vem com

$$[\alpha; \beta] = [0, \infty] \cap [0, t_1] = [0, t_1]$$

$$x(t) = \int_0^{t_1} \frac{t - t'}{m} t'^2 dt' = \frac{1}{m} \left(t \frac{t_1^3}{3} - \frac{t_1^4}{4} \right) \quad t > t_1$$

$$x(t) = \frac{t_1^3}{12 m} (4t - 3t_1) \quad (8.2-7)$$

válida para $t > t_1$.

Naturalmente não tem sentido calcular $x(t)$ pela (8.2-7) para $t < t_1$. Neste caso o tempo t_1 durante o qual age a força será limitado por t , ou seja $t_1 = t$, e portanto:

$$x(t) = \frac{t^4}{12 m} \quad (8.2-8)$$

Se tivéssemos condições não homogêneas

$$x(0) = x_0 \quad (8.2-9)$$

$$\dot{x}(0) = v_0$$

deveríamos adicionar à solução (8.2-7) da equação não homogênea com condições homogêneas a solução da equação homogênea com as condições não homogêneas especificadas, ou seja, a solução da equação:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

com as condições (8.2-9).

A solução é:

$$x(t) = x_0 + v_0 t \quad (8.2-10)$$

Assim a solução do problema proposto para condições não homogêneas é:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{t_1^3}{12 m} (4t - 3t_1) \quad (8.2-11)$$

para $t > t_1$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{t^4}{12 m} \quad (8.2-12)$$

para $t < t_1$.

8.3 - ELÁSTICA DE UMA VIGA APOIADA SOB AÇÃO DE UM PAR

Vamos resolver este problema pela função de Green. Assim determinaremos em primeiro lugar a função de Green do problema.

8.3.1 - Função de Green da Viga Apoiada

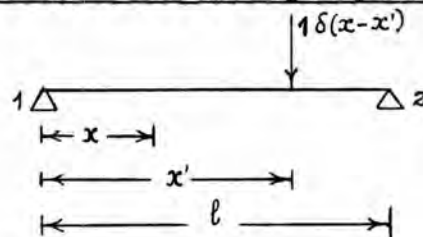


Fig. 8.3-1

A função de Green do problema $G(x, x')$ é a deformação em x devida a uma carga unitária em x' , ou seja, é a solução da equação diferencial

$$EJ \frac{d^4 G}{dx^4} = -\delta(x - x') \quad (8.3-1)$$

com as condições de contorno especificadas (Fig. 8.3-1).

Esta equação pode ser resolvida através das equações diferenciais de 1ª ordem sucessivas, com as condições de contorno especificadas

$$\frac{dT}{dx} = -\delta(x - x') \quad (8.3-2)$$

$$\left. \begin{aligned} T(0) &= \frac{1 - x'}{1} \\ T(1) &= -\frac{x'}{1} \end{aligned} \right\} (8.3-3)$$

$$\frac{dM}{dx} = T \quad (8.3-4)$$

$$M(0) = M(1) = 0 \quad (8.3-5)$$

$$EJ \frac{d^2G}{dx^2} = -M \quad (8.3-6)$$

$$G(0, x') = G(1, x') = 0 \quad (8.3-7)$$

Da (8.3-2) usando a propriedade (2.18-2)

$$T(x) = -H(x - x') + c_1$$

e usando as condições (8.3-3)

$$\left. \begin{aligned} T(0) &= c_1 = \frac{1 - x'}{1} \\ T(1) &= -1 + c_1 = -\frac{x'}{1} \end{aligned} \right\} c_1 = \frac{1 - x'}{1}$$

vem:

$$T(x) = \frac{1 - x'}{1} - H(x - x') \quad (8.3-8)$$

Da (8.3-4) e (8.3-8)

$$\frac{dM}{dx} = \frac{1 - x'}{1} - H(x - x')$$

usando a propriedade (1.7-3)

$$M(x) = \frac{1 - x'}{1} x - (x - x')H(x - x') + c_2$$

$c_2 = 0$ pelas condições (8.3-5)

Assim

$$M(x) = \frac{1 - x'}{1} x - (x - x')H(x - x') \quad (8.3-9)$$

Da (8.3-6) e (8.3-9)

$$EJ \frac{d^2G}{dx^2} = \frac{1 - x'}{1} x - (x - x')H(x - x')$$

integrando e usando a propriedade

$$\int (x - x')H(x - x')dx = (x - x')^2H(x - x') + c$$

$$EJ \frac{dG}{dx} = \frac{1 - x'}{2l} x^2 - \frac{(x - x')^2}{2} H(x - x') + c_3$$

integrando novamente

$$EJ G(x, x') = \frac{1 - x'}{6l} x^3 - \frac{(x - x')^3}{6} H(x - x') + c_3x + c_4$$

usando as condições (8.3-7)

$$G(0, x') = c_4 = 0$$

$$G(l, x') = \frac{1 - x'}{6} l^2 - \frac{(1 - x')^3}{6} + c_3l = 0$$

ou

$$c_3 = - \frac{(1 - x')(2lx' - x'^2)}{6l}$$

$$c_4 = 0$$

Assim

$$EJG(x, x') = \frac{1 - x'}{6l} (2lx'x - xx'^2 - x^3) + \frac{(x - x')^3}{6} H(x - x')$$

ou ainda:

$$6lEJG(x, x') = (1 - x')(2lx'x - xx'^2 - x^3) + l(x - x')^3 H(x - x') \quad (8.3-10)$$

A (8.3-10) é a função de Green do problema.

8.3-2 - Elástica da Viga Apoiada sob Ação de um Par de Momento M

A situação de carga é representada por (Figura 8.3-2)

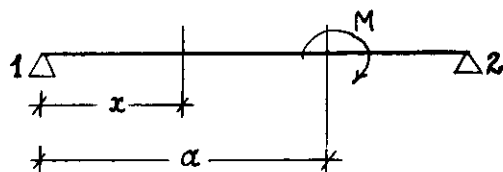


Fig. 8.3-2

$$q(x') = -M\delta(x' - a) \quad (8.3-11)$$

pois:

$$\int_0^1 q(x') dx' = 0$$

$$\int_0^1 (x' - a)q(x')dx' = - \int_0^1 M(x' - a)\delta'(x' - a)dx' = M$$

Estas duas integrais mostram ser o sistema de cargas

$$q(x') = -M\delta'(x' - a)$$

equivalente ao par M.

A elástica será

$$y = \int_0^1 G(x, x')q(x')dx' \quad (8.3-12)$$

ou

$$\frac{61EJ}{M} y = - \int_0^1 61EJG(x, x')\delta'(x' - a)dx' \quad (8.3-13)$$

Substituindo $61EJG(x, x')$ da (8.3-10) e calculando a integral (8.3-13) (ver estes cálculos a seguir) obtemos:

$$\frac{61EJ}{M} y = (21^2x - 6ax + 3a^2x + x^3) + 31(x-a)^2H(x-a) \quad (8.3-14)$$

que é a equação da elástica procurada

Cálculo da integral

$$- \int_0^1 (1 - x') 21x' x \delta'(x' - a) dx =$$

usando a propriedade (2.11-2) para $n = 1$

$$\begin{aligned} f(x') \delta'(x' - a) &= f(a) \delta'(x' - a) - f'(a) \delta(x' - a) \\ &= + 21^2 x - 4a1x \quad (8.3-15) \end{aligned}$$

Cálculo da integral

$$\int_0^1 (1 - x') x x'^2 \delta'(x' - a) dx' =$$

Usando a propriedade (2.11-2) para $n = 1$
e (2.3-6)

$$= - 2a1x + 3a^2x \quad (8.3-16)$$

Cálculo da integral

$$- \int_0^1 (1 - x') x^3 \delta'(x' - a) dx' =$$

Usando a propriedade (2.11-2) para $n = 1$

$$= x^3 \quad (8.3-17)$$

Cálculo da integral

$$- \int_0^1 1(x - x')^3 H(x - x') \delta'(x' - a) dx' =$$

usando a propriedade (1.7-1)

$$= - \int_0^x 1(x - x')^3 \delta'(x' - a) dx' =$$

e usando a (2.11-2) para $n = 1$

$$= \begin{cases} 0 & \text{para } x < a \\ 3l(x - a)^2 & \text{para } x > a \end{cases}$$

ou seja

$$= 3l(x - a)^2 H(x - a) \quad (8.3-18)$$

A soma de (8.3-15, 16, 17, 18) é a (8.3-14).

8.4 - OSCILADOR HARMÔNICO

Vamos resolver aqui o caso de uma mola elástica, solicitada por uma força

$$F(t) = F_0 \text{ sen } \omega t,$$

pela função de Green.

8.4.1 - Função de Green do Problema

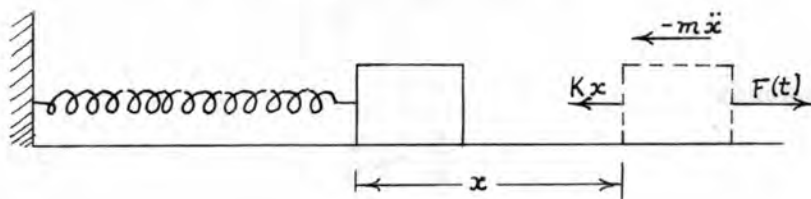


Fig. 8.4-1

A equação diferencial do movimento é

$$F(t) - Kx - m\ddot{x} = 0$$

ou

$$\ddot{x} + \frac{K}{m} x = \frac{1}{m} F(t) \quad (8.4-1)$$

onde \ddot{x} indica

$$\frac{d^2 x}{dt^2}$$

A função de Green do problema é a solução da equação

$$\frac{d^2 G}{dt^2} + \frac{K}{m} G(t) = \frac{\delta(t)}{m} \quad (8.4-2)$$

Aplicando a transformada de Laplace, com as condições iniciais

$$\begin{aligned} G(0) &= 0 \\ G'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (8.4-3)$$

À (8.4-2), vem com as propriedades (6.3-2) e (6.2-5)

$$\mathcal{L}[\ddot{G}] = s^2 \mathcal{L}[G]$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$s^2 \mathcal{L}[G] + \frac{K}{m} [G] = \frac{1}{m}$$

daqui

$$\mathcal{L}[G] = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + \frac{K}{m}}$$

fazendo

$$\frac{K}{m} = \omega_0^2 \quad (8.4-4)$$

$$\mathcal{L}[G] = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + \omega_0^2}$$

e portanto

$$G(t) = \frac{1}{m\omega_0} \text{sen } \omega_0 t \quad (8.4-5)$$

$G(t)$ dada pela (8.4-5) é a função de Green do problema.

8.4.2 - Vibração Harmônica Forçada

Vamos considerar o caso em que

$$F(t) = F_0 \text{ sen } \omega t \quad (8.4-6)$$

A solução da equação diferencial (8.4-1) é dada por:

$$x(t) = G(t) \star F(t) \quad (8.4-7)$$

para condições homogêneas.

Assim:

$$x(t) = \int_0^t \frac{F_0}{m\omega_0} \text{ sen } \omega_0 (t - t') \text{ sen } \omega t' dt' =$$

usando

$$\text{sen } p \text{ sen } q = \frac{1}{2} \cos (p - q) - \frac{1}{2} \cos (p + q)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{F_0}{2m\omega_0} \int_0^t \cos (\omega_0 t - \omega_0 t' - \omega t') dt' - \\ &- \frac{F_0}{2m\omega_0} \int_0^t \cos (\omega_0 t - \omega_0 t' + \omega t') dt' = \\ &= \frac{F_0}{2m\omega_0} \left[\frac{\text{sen } (\omega_0 t - \omega_0 t' - \omega t')}{-(\omega_0 + \omega)} \right]_0^t + \\ &+ \frac{F_0}{2m\omega_0} \left[\frac{\text{sen } (\omega_0 t - \omega_0 t' + \omega t')}{\omega_0 - \omega} \right]_0^t = \\ &= \frac{F_0}{2m\omega_0} \left[\frac{\text{sen } \omega t + \text{sen } \omega_0 t}{\omega_0 + \omega} + \frac{\text{sen } \omega t - \text{sen } \omega_0 t}{\omega_0 - \omega} \right] = \\ &= \frac{F_0}{2m\omega_0} \left[\frac{2\omega_0 \text{ sen } \omega t - 2\omega \text{ sen } \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{\delta_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \left(\text{sen } \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \text{ sen } \omega_0 t \right)$$

onde

$$\frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{K} = \delta_0 \quad (8.4-8)$$

Assim

$$x(t) = \frac{\delta_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \left(\text{sen } \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \text{sen } \omega_0 t \right) \quad (8.4-9)$$

é a solução procurada para as condições homogêneas

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.4-10)$$

Esta solução pode ser decomposta em duas partes.

A primeira

$$x_1(t) = \frac{\delta_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \text{sen } \omega t \quad (8.4-11)$$

é um movimento harmônico, de frequência ω igual à da perturbação, e com amplitude

$$A_1 = \frac{\delta_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = N \delta_0 \quad (8.4-12)$$

N é chamado "fator de amplificação" e sua variação está representada na figura 8.4-2.

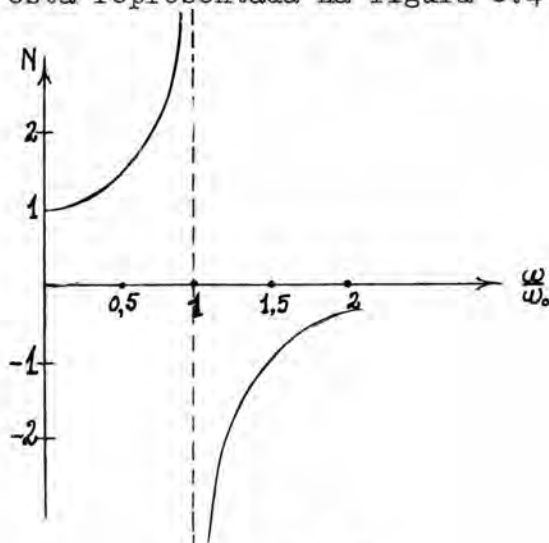


Fig. 8.4-2

Para $\omega = \omega_0$ temos $N = \infty$, que representa a condição de ressonância, para a vibração forçada sem amortecimento.

A 2ª parte

$$x_2(t) = \frac{\delta_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \frac{\omega}{\omega_0} \text{sen } \omega_0 t \quad (8.4-13)$$

$$= A_2 \text{sen } \omega_0 t$$

onde

$$A_2 = N \frac{\omega}{\omega_0} \delta_0 = A_1 \frac{\omega}{\omega_0} \quad (8.4-14)$$

é um movimento harmônico com a frequência fundamental ω_0 .

Como casos particulares:

$$\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$$

A frequência natural é muito menor do que a da perturbação, temos

$$N \cong 1 \quad \text{e} \quad A_1 \cong \delta_0 \gg A_2$$

e nestas condições

$$x(t) \cong \delta_0 \text{sen } \omega t \quad (8.4-15)$$

O movimento resultante tem a frequência da perturbação

$$\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1 \quad N \cong -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

e

$$A_2 \cong \frac{\omega_0}{\omega} \delta_0 \gg A_1$$

e nestas condições o movimento resultante

$$x(t) \cong \frac{\omega_0}{\omega} \delta_0 \text{sen } \omega_0 t \quad (8.4-16)$$

tem a frequência natural mas pequena amplitude

$$\frac{\omega_0}{\omega} \delta_0$$

Para ilustrar o comportamento do sistema, ou seja, da (8.4-9) no limite $\omega \rightarrow \omega_0$ representamos na fig. 8.4-3 os gráficos para:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 0,8 \quad \text{e} \quad \frac{\omega}{\omega_0} = 0,9$$

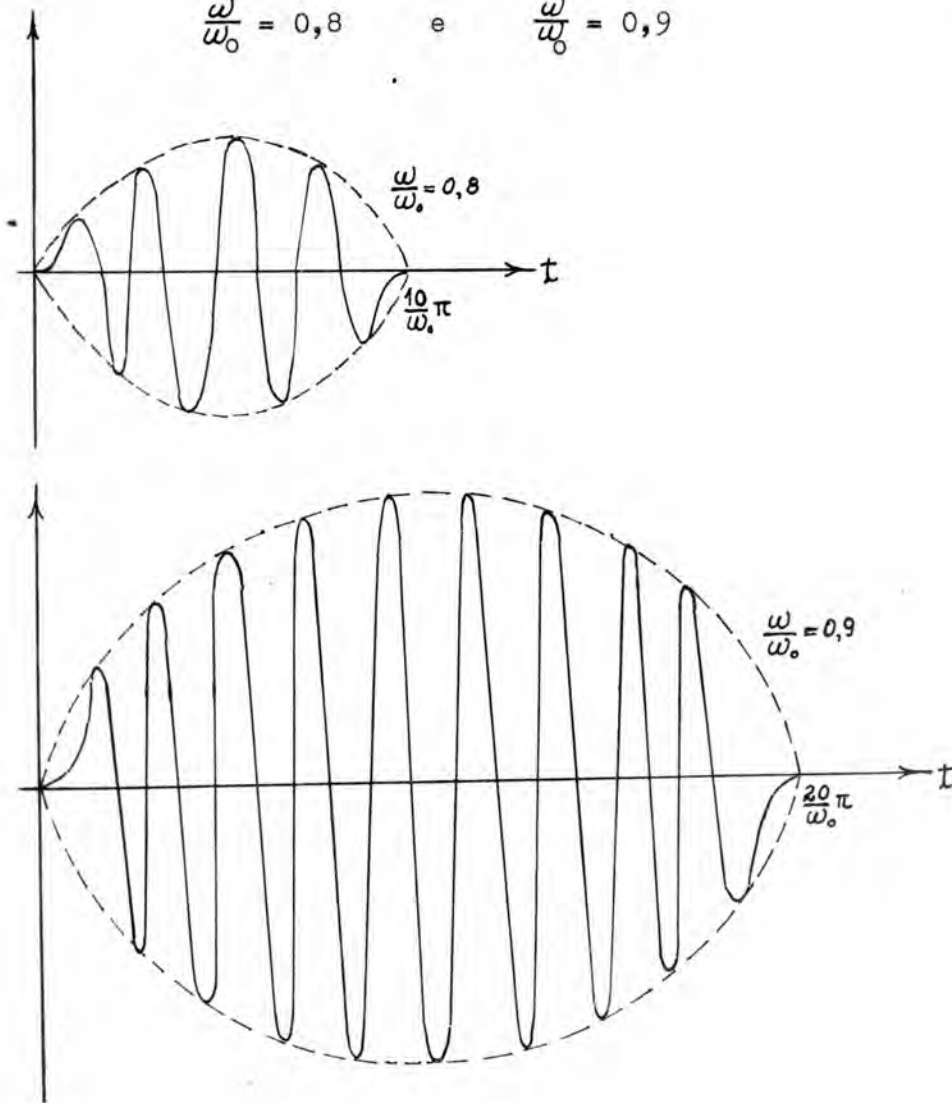


Fig. 8.4-3

Se as condições iniciais forem não homogêneas

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{aligned} \right\} \quad (8.4-17)$$

devemos adicionar à solução encontrada, a solução da equação homogênea para estas condições, ou seja

$$x = A \operatorname{sen} (\omega_0 t + \alpha)$$

com as condições iniciais (8.4-17)

$$x(0) = A \operatorname{sen} \alpha = x_0$$

$$\dot{x}(0) = A \omega_0 \cos \alpha = v_0$$

$$\left. \begin{aligned} A &= x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\omega_0 x_0}{v_0} \end{aligned} \right\} \quad (8.4-18)$$

e portanto

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \operatorname{sen} (\omega_0 t + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega_0 x_0}{v_0}) \quad (8.4-19)$$

A solução para as condições (8.4-17) é a soma de (8.4-9) e (8.4-19)

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\delta_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} (\operatorname{sen} \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t) + \\ &\quad + \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \operatorname{sen} (\omega_0 t + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega_0 x_0}{v_0}) \end{aligned} \quad (8.4-20)$$

8.5 - CONDUÇÃO DO CALOR

8.5.1 - Equação da Difusão de Fourier

A quantidade de calor que atravessa uma superfície dS na unidade de tempo, é dada por

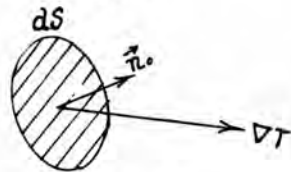


Fig. 8.5-1

$$\frac{dq}{dt} = -k \nabla T \vec{n}_0 dS \quad (8.5-1)$$

onde k é o coeficiente de condutibilidade térmica.

$$\frac{dq}{dt} > 0$$

indica propagação no sentido de \vec{n}_0 .

$$\frac{dq}{dt} < 0$$

indica propagação no sentido contrário a \vec{n}_0 .

Consideremos um elemento de volume Ω , limitado pela superfície S (Fig. 8.5-2).

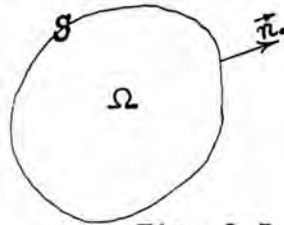


Fig. 8.5-2

A quantidade de calor que passa através de S na unidade de tempo:

$$\frac{dQ}{dt}$$

é dada por

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint k \nabla T \vec{n}_0 dS \quad (8.5-2)$$

$$\frac{dQ}{dt} > 0$$

indica saída de calor de Ω através de S

$$\frac{dQ}{dt} < 0$$

indica entrada de calor através de S.

Aplicando o teorema de Gauss a (8.5-2)

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint k \nabla \cdot (\nabla T) d\Omega$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint k \nabla^2 T d\Omega \quad (8.5-3)$$

Por outro lado a quantidade de calor no volume Ω é dada por

$$Q_1 = \oint \rho c T d\Omega \quad (8.5-4)$$

onde: ρ é a massa específica
 c é o calor específico.

$$\frac{dQ_1}{dt} = \oint \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega \quad (8.5-5)$$

é o acréscimo de Q_1 na unidade de tempo.

$$\frac{dQ_1}{dt} > 0$$

indica aumento da quantidade de calor em Ω ,

$$\frac{dQ_1}{dt} < 0$$

indica diminuição da quantidade de calor em Ω .

Devemos ter:

$$\frac{dQ}{dt} = - \frac{dQ_1}{dt}$$

ou seja pela (8.5-3) e (8.5-5)

$$\oint k \nabla^2 T d\Omega = \oint \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega$$

Como a relação vale para qualquer Ω

$$k \nabla^2 T = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

e fazendo

$$\frac{k}{\rho c} = K \quad (8.5-6)$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{K} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (8.5-7)$$

A (8.5-7) é a equação da difusão de Fourier.

Para o caso uni-dimensional

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{K} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (8.5-8)$$

8.5.2 - Solução da Equação de Fourier Uni-Dimensional

Vamos resolver o seguinte problema (Fig. 8.5-3).

Parede de espessura l com temperatura inicial nula

$$T(x, 0) = 0 \quad (8.5-9)$$

condições de contorno homogêneas

$$\left. \begin{aligned} T(0, t) &= 0 \\ T(l, t) &= 0 \end{aligned} \right\} (8.5-10)$$

e uma quantidade de calor Q_0 colocada no plano $x = a$, isto é:

$$q(x, 0) = Q_0 \delta(x - a) \quad (8.5-11)$$

ou em outras palavras resolver a equação (8.5-8) para as condições dadas.

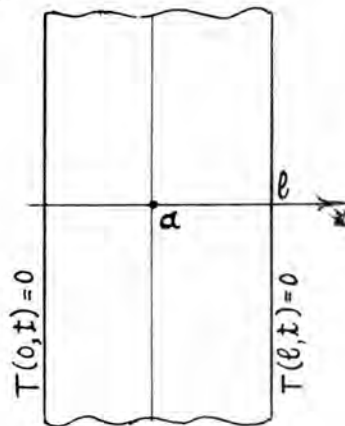


Fig. 8.5-3

Resolveremos pela transformada de Laplace.

Aplicando a transformada de Laplace à (8.5-8), em relação a t

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] = \frac{1}{K} \mathcal{L}\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]$$

e usando a propriedade (6.2-5)

$$\mathcal{L}[f'(t)] = -f(0) + p \mathcal{L}[f]$$

vem fazendo

$$\mathcal{L}_t T(x, t) = \bar{T}(x, p)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{K} [-T(x, 0) + p \bar{T}(x, p)]$$

ou

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} - \frac{p}{K} \bar{T} = -\frac{1}{K} T(x, 0) \quad (8.5-12)$$

como

$$\frac{T(x, 0)}{K} = \frac{\rho c}{k} T(x, 0) = \frac{q(x, 0)}{k}$$

ou

$$T(x, 0) = \frac{K}{k} q(x, 0) = \frac{q(x, 0)}{\rho c} \quad (8.5-13)$$

Substituindo (8.5-13) em (8.5-12)

$$\frac{\partial^2 \bar{T}(x, p)}{\partial x^2} - \frac{p}{K} \bar{T}(x, p) = -\frac{1}{\rho c K} q(x, 0) \quad (8.5-14)$$

Esta equação é a chamada equação diferencial subsidiária.

No problema proposto conforme (8.5-11)

$$q(x, 0) = Q_0 \delta(x - a)$$

A equação subsidiária a ser resolvida é

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2}(x, p) - \frac{p}{K} \bar{T}(x, p) = -\frac{Q_0}{\rho c K} \delta(x - a) \quad (8.5-15)$$

com as condições de contorno

$$\bar{T}(0, p) = \bar{T}(1, p) = 0 \quad (8.5-16)$$

decorrentes das condições de contorno (8.5-10)

Solução da equação subsidiária homogênea

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} - \frac{p}{K} \bar{T} = 0$$

Tem como solução:

$$\bar{T} = A_1 e^{\sqrt{\frac{p}{K}}x} + B_1 e^{-\sqrt{\frac{p}{K}}x}$$

usando

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

e

$$A_1 + B_1 = A$$

$$A_1 - B_1 = B$$

$$\bar{T}(x, p) = A \cosh \sqrt{\frac{p}{K}}x + B \sinh \sqrt{\frac{p}{K}}x \quad (8.5-17)$$

Solução particular da equação subsidiária não homogênea

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} (x, p) - \frac{p}{K} \bar{T}(x, p) = -\frac{Q_0}{\rho c K} \delta(x - a)$$

Aplicando a transformada de Laplace em relação a x

$$\left[-\bar{T}(0, p) + s \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} (0, p) \right] + s^2 \mathcal{L}_x \bar{T} - \frac{p}{K} \mathcal{L}_x \bar{T} = -\frac{Q_0}{\rho c K} e^{-as}$$

como

$$\bar{T}(0, p) = 0$$

da (8.5-16) e

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{T}(0, p) = 0$$

vem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x \bar{T} &= - \frac{Q_0}{\rho c K} \frac{e^{-as}}{s^2 - \frac{p}{K}} \\ \mathcal{L}_x \bar{T} &= - \frac{Q_0}{\rho c K} \sqrt{\frac{K}{p}} \frac{\sqrt{\frac{p}{K}} e^{-as}}{s^2 - \frac{p}{K}} \end{aligned} \quad (8.5-18)$$

e conforme (6.3-10)

$$\bar{T}(x, p) = - \frac{Q_0}{\rho c \sqrt{pK}} \operatorname{senh} \left[\sqrt{\frac{p}{K}} (x - a) \right] H(x - a) \quad (8.5-19)$$

Solução geral da equação subsidiária

Será a soma da (8.5-17 e 19)

$$\begin{aligned} \bar{T}(x, p) &= A \cosh \sqrt{\frac{p}{K}} x + B \operatorname{senh} \sqrt{\frac{p}{K}} x - \\ &- \frac{Q_0}{\rho c \sqrt{pK}} \operatorname{senh} \left[\sqrt{\frac{p}{K}} (x - a) \right] H(x - a) \end{aligned} \quad (8.5-20)$$

A e B são determinados pelas condições (8.5-16)

$$\bar{T}(0, p) = \bar{T}(1, p) = 0$$

ou seja, lembrando que

$$\cosh 0 = 1$$

$$\operatorname{senh} 0 = 0$$

$$\bar{T}(0, p) = A = 0$$

$$\bar{T}(1, p) = B \operatorname{senh} \sqrt{\frac{p}{K}} 1 - \frac{Q_0}{\rho c \sqrt{pK}} \operatorname{senh} \sqrt{\frac{p}{K}} (1 - a) = 0$$

$$B = \frac{Q_0}{\rho c \sqrt{pK}} \frac{\operatorname{senh} \sqrt{\frac{p}{K}} (1 - a)}{\operatorname{senh} \sqrt{\frac{p}{K}} 1}$$

e portanto

$$\bar{T}(x, p) = \frac{Q_0}{\rho c \sqrt{pK}} \left[\frac{\sinh \sqrt{\frac{p}{K}} (1-a)}{\sinh \sqrt{\frac{p}{K}} 1} \sinh \sqrt{\frac{p}{K}} x - \sinh \sqrt{\frac{p}{K}} (x-a) H(x-a) \right] \quad (8.5-21)$$

A fórmula de inversão aplicada à (8.5-21) nos levaria a solução do problema.

Outra forma de resolver o problema é usar a propriedade

$$\delta(x-a) = \frac{2}{1} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{1} a \sin \frac{n\pi}{1} x \quad (8.5-22)$$

e ensaiar a solução

$$T(x, t) = \frac{Q_0}{\rho c} \frac{2}{1} \sum f_n(t) \sin \frac{n\pi}{1} a \sin \frac{n\pi}{1} x \quad (8.5-23)$$

com $f_n(0) = 1$ a fim de que a (8.5-23) verifique a condição inicial (8.5-13)

$$T(x, 0) = \frac{q(x, 0)}{\rho c} = \frac{Q_0}{\rho c} \delta(x-a)$$

Substituindo (8.5-23) na equação (8.5-8)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{K} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$- \sum f_n(t) \left(\frac{n\pi}{1}\right)^2 \sin \frac{n\pi}{1} a \sin \frac{n\pi}{1} x =$$

$$= \frac{1}{K} \sum f_n'(t) \sin \frac{n\pi}{1} a \sin \frac{n\pi}{1} x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 f_n(t) + \frac{1}{K} f_n'(t) \right] \text{sen } \frac{n\pi}{l} a \text{ sen } \frac{n\pi}{l} x = 0$$

$$\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 f_n(t) + \frac{1}{K} f_n'(t) = 0$$

$$\frac{f_n'(t)}{f_n(t)} = -K \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2$$

$$\ln f(t) = -K \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t + \ln f_0$$

$$f(t) = f_0 e^{-K \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t} \quad (8.5-24)$$

como

$$f(0) = 1 \quad ; \quad f_0 = 1$$

Substituindo $f(t)$ em (8.5-23)

$$T(x, t) = \frac{2Q_0}{\varphi_{cl}} \sum e^{-K \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t} \text{sen } \frac{n\pi}{l} a \text{ sen } \frac{n\pi}{l} x \quad (8.5-25)$$

que é a solução do problema.

8.6 - CIRCUITO RLC - FUNÇÃO DE GREEN

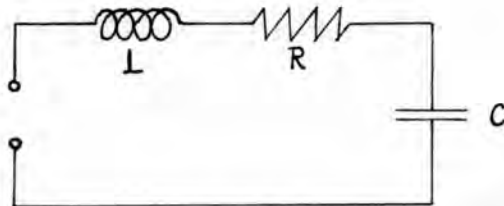


Fig. 8.6-1

Determinar a corrente $I(t)$ do circuito RLC da fig. 8.6-1, constituído por uma indutância L ,

resistência R e condensador C, para uma força eletromotriz impulsiva $E_0\delta(t)$.

A equação diferencial do circuito é

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = V(t) \quad (8.6-1)$$

onde Q - carga do condensador está ligada a I pela relação:

$$\frac{dQ}{dt} = I \quad (8.6-2)$$

Para o caso de

$$V = E_0 \delta(t)$$

vem

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E_0 \delta(t) \quad (8.6-3)$$

$$\frac{dQ}{dt} = I$$

Aplicando a transformada de Laplace à (8.6-3) e admitindo como condições iniciais

$$I(0) = 0$$

$$Q(0) = 0 \quad (8.6-4)$$

e levando em conta as (6.3-2) e (6.2-5)

$$\mathcal{L} L \frac{dI}{dt} = L[\mathcal{S} \mathcal{L}[I] - I(0)] = LS \bar{I}$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

e

$$\mathcal{L} \left[\frac{dQ}{dt} \right] = \mathcal{L}[I] = \mathcal{S} \mathcal{L}[Q] - Q(0) = \mathcal{S} \bar{Q} = \bar{I}$$

vem

$$LS \bar{I} + R \bar{I} + \frac{\bar{I}}{SC} = E_0$$

donde:

$$\bar{I} = \frac{E_0}{LS + R + \frac{1}{SC}} \quad (8.6-5)$$

ou

$$\bar{I} = \frac{E_0 S}{L \left[\left(S + \frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L} \right]}$$

fazendo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R}{2L} &= \mu \\ \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L} &= n^2 \end{aligned} \right\} \quad (8.6-6)$$

$$\bar{I} = \frac{E_0 S}{L \left[(S + \mu)^2 + n^2 \right]} \quad (8.6-7)$$

Para $n^2 > 0$ obtemos (ver adiante)

$$I(t) = \frac{E_0}{nL} e^{-\mu t} (n \cos nt - \mu \operatorname{sen} nt) \quad (8.6-8)$$

Para $E_0 = 1$ a (8.6-8) representa a função de Green do circuito RLC para condições homogêneas

$$G(t, t') = \frac{e^{-\mu(t-t')}}{nL} (n \cos nt - \mu \operatorname{sen} nt) \quad (8.6-9)$$

Cálculo da transformada inversa

Temos:

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen} ax] = \frac{a}{S^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos ax] = \frac{S}{S^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-\mu t} \operatorname{sen} at] = \frac{a}{(S + \mu)^2 + a^2} \quad (8.6-10)$$

$$\int [e^{-\mu t} \cos at] = \frac{S + \mu}{(S + \mu)^2 + a^2} \quad (8.6-11)$$

Assim escrevendo a (8.6-7) sob a forma:

$$\bar{I}(S) = \frac{E_0}{L} \left[\frac{S + \mu}{(S + \mu)^2 + n^2} - \frac{\mu}{(S + \mu)^2 + n^2} \right]$$

vem conforme (8.6-10) e (8.6-11)

$$I(t) = \frac{E_0}{L} e^{-\mu t} (n \cos nt - \mu \operatorname{sen} nt)$$

8.7 - TEORIA DAS LINHAS

8.7.1 - Equações Diferenciais

Suponhamos uma linha de constantes distribuídas com uma carga $Z(l)$, ligada a uma fonte (figura 8.7-1).

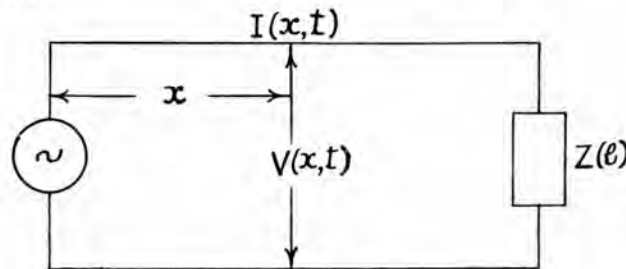


Fig. 8.7-1

Queremos obter os valores de

$$I(x, t) \quad \text{e} \quad V(x, t).$$

A linha dita de constantes distribuídas é aquela que apresenta uma resistência \hat{R}' por unidade de comprimento e uma indutância L' por unidade de comprimento. Além disso, vamos admitir que o meio se caracterize por uma condutância G por unidade de comprimento e um efeito capacitivo caracterizado por

uma capacidade C por unidade de comprimento.

Um trecho de comprimento Δx pode ser representado pelo circuito equivalente da fig. 8.7-2.

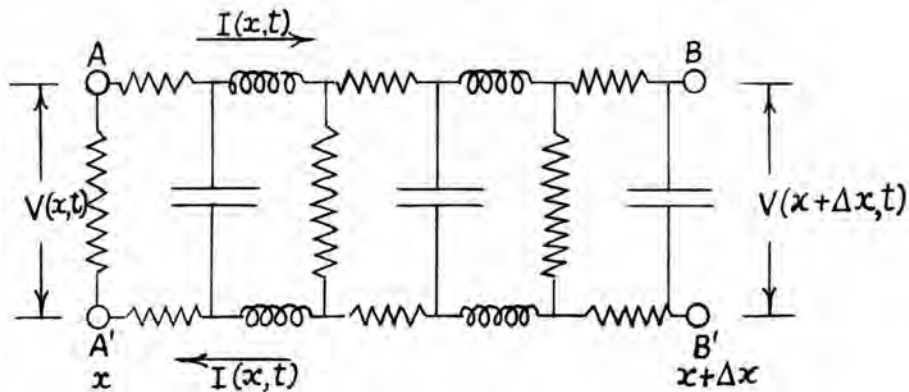


Fig. 8.7-2

- L' - auto indutância por unidade de comprimento (henry/m)
- R' - resistência por unidade de comprimento (Ω/m)
- G - condutância por unidade de comprimento (Ω^{-1}/m)
- C - capacidade por unidade de comprimento (farad/m)

Para o comprimento Δx estas grandezas terão os valores

$$L'\Delta x, R'\Delta x, G\Delta x, C\Delta x$$

Para deduzirmos as equações diferenciais, vamos usar a relação

$$(V_a - V_b) + \sum \mathcal{E} = \sum RI \quad (8.7-1)$$

que nos dá a diferença de potencial entre dois pontos de um circuito. Nesta relação incluímos no $\sum \mathcal{E}$ as f.e.m.:

$$- L \frac{dI}{dt} \quad e \quad - \frac{Q}{C}$$

Assim teremos:

$$V_A - V_B = L' \Delta x \frac{\partial I}{\partial t} + R' \Delta x I$$

$$V_{B'} - V_{A'} = L' \Delta x \frac{\partial I}{\partial t} + R' \Delta x I$$

Somando membro a membro e fazendo

$$\left. \begin{aligned} 2L' &= L \\ 2R' &= R \\ V_A - V_{A'} &= V(x, t) \\ V_B - V_{B'} &= V(x + \Delta x, t) \end{aligned} \right\} (8.7-2)$$

$$V(x, t) - V(x + \Delta x, t) = L \Delta x \frac{\partial I}{\partial t} + R \Delta x I$$

dividindo por Δx e passando ao limite para $\Delta x \rightarrow 0$

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = L \frac{\partial I}{\partial t} + RI \quad (8.7-3)$$

Naturalmente V e I são funções de x e t :

$$V(x, t) \quad \text{e} \quad I(x, t)$$

Vejamos a equação correspondente para

$$I(x, t)$$

Temos

$$I(x, t) - I(x + \Delta x, t) =$$

à corrente que passa através de G mais a corrente no condensador C , isto é:

$$I(x, t) - I(x + \Delta x, t) = G \Delta x V(x', t) + C \Delta x \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_{x''}$$

onde x' e $x'' \in [x, x + \Delta x]$

Dividindo por Δx e passando ao limite para $\Delta x \rightarrow 0$

$$- \frac{\partial I}{\partial x} = C \frac{\partial V}{\partial t} + GV \quad (8.7-4)$$

As equações (8.7-3) e (8.7-4) são conhecidas como equações de Lord Kelvin.

$$\left. \begin{aligned} - \frac{\partial V}{\partial x} &= L \frac{\partial I}{\partial t} + RI \\ - \frac{\partial I}{\partial x} &= C \frac{\partial V}{\partial t} + GV \end{aligned} \right\} (8.7-5)$$

8.7.2 - Equações Subsidiárias

As equações (8.7-5) sujeitas a condições iniciais e de contorno especificadas, nos dão a solução do problema.

As equações subsidiárias são as que aparecem pela aplicação da transformada de Laplace nas equações de Lord Kelvin.

Sejam

$$\left. \begin{aligned} I(x, 0) &= I^{(0)} \\ V(x, 0) &= V^{(0)} \end{aligned} \right\} (8.7-6)$$

as condições iniciais.

Aplicando a transformada de Laplace com relação a t e usando a propriedade (6.2-5)

$$\mathcal{L}[f'(t)] = -f(0) + p \mathcal{L}[f]$$

vem:

$$- LI^{(0)} + Lp \bar{I} + R\bar{I} = - \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}$$

$$- CV^{(0)} + Cp \bar{V} + G\bar{V} = - \frac{\partial \bar{I}}{\partial x}$$

ou

$$\left. \begin{aligned} (Lp + R)\bar{I} &= -\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + LI^{(0)} \\ (Cp + G)\bar{V} &= -\frac{\partial \bar{I}}{\partial x} + CV^{(0)} \end{aligned} \right\} (8.7-7)$$

As (8.7-7) são as equações subsidiárias. U
samos

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \bar{I}(x, p) = \mathcal{L}_t[I(x, t)] \\ \bar{V} &= \bar{V}(x, p) = \mathcal{L}_t[V(x, t)] \end{aligned} \quad (8.7-8)$$

Podemos eliminar \bar{I} , derivando a primeira em relação a x e substituindo $\frac{\partial \bar{I}}{\partial x}$ da segunda

$$(Lp + R) \frac{\partial \bar{I}}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + L \frac{dI^{(0)}}{dx}$$

$$(Lp + R) [-(Cp + G)\bar{V} + CV^{(0)}] = -\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + L \frac{dI^{(0)}}{dx}$$

ou

$$\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} - (Lp + R)(Cp + G)\bar{V} = L \frac{dI^{(0)}}{dx} - C(Lp + R)V^{(0)} \quad (8.7-9)$$

e \bar{I} é dado por

$$\bar{I}(x, p) = -\frac{1}{Lp + R} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \frac{LI^{(0)}}{Lp + R} \quad (8.7-10)$$

Se fizermos

$$q^2 = (Lp + R)(Cp + G) \quad (8.7-11)$$

A solução da equação homogênea associada da (8.7-9)

$$\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} - q^2 \bar{V} = 0 \quad (8.7-12)$$

é

$$\bar{V}(x, p) = A e^{qx} + B e^{-qx} \quad (8.7-13)$$

onde A e B são determinadas pelas condições de contorno.

8.7.3 - Aplicação - Sinal Delta

Linha ideal, $R = G = 0$, com um sinal na origem $V(0, t) = E_0 \delta(t)$, condições iniciais homogêneas, isto é

$$\left. \begin{aligned} I(0) &= I(x, 0) = 0 \\ V(0) &= V(x, 0) = 0 \end{aligned} \right\} (8.7-14)$$

e aberto na extremidade

$$V(1, t) = 0 \quad (8.7-15)$$

Neste caso temos para a (8.7-11)

$$q^2 = LCp^2 \quad (8.7-16)$$

A equação a resolver (8.7-9) é portanto

$$\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} - LCp^2 = 0$$

cuja solução é

$$\bar{V}(x, p) = A e^{\frac{p}{v}x} + B e^{-\frac{p}{v}x} \quad (8.7-17)$$

onde fizemos

$$LC = \frac{1}{v^2} \quad (8.7-18)$$

Determinação de A e B.

O circuito sendo aberto na extremidade

$$I(1, t) = 0 \quad (8.7-19)$$

e

$$\bar{I}(1, p) = \mathcal{L}[I(1, t)] = 0 \quad (8.7-20)$$

Assim pela (8.7-10) com

$$R = 0 \quad \text{e} \quad I^{(0)} = 0$$

$$\bar{I}(x, p) = - \frac{1}{Lp} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}$$

e usando a (8.7-17)

$$\bar{I}(x, p) = - \frac{1}{Lp} \frac{p}{v} (A e^{\frac{p}{v}x} - B e^{-\frac{p}{v}x})$$

e pela (8.7-20)

$$A e^{\frac{p_1}{v}} - B e^{-\frac{p_1}{v}} = 0 \quad (8.7-21)$$

Por outro lado

$$\bar{V}(0, p) = \mathcal{L}[V(0, t)] = \mathcal{L}[E_0 \delta(t)] = E_0 \quad (8.7-22)$$

e portanto pela (8.7-17)

$$A + B = E_0 \quad (8.7-23)$$

As relações (8.7-21 e 23) nos permitem de terminar A e B.

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{E_0}{e^{\frac{p_1}{v}} + e^{-\frac{p_1}{v}}} e^{-\frac{p_1}{v}} \\ B &= \frac{E_0}{e^{\frac{p_1}{v}} + e^{-\frac{p_1}{v}}} e^{\frac{p_1}{v}} \end{aligned} \right\} (8.7-24)$$

Substituindo (8.7-24) em (8.7-17) obtemos:

$$\bar{V}(x, p) = E_0 \frac{e^{\frac{p(1-x)}{v}} + e^{-\frac{p(1-x)}{v}}}{e^{\frac{p_1}{v}} + e^{-\frac{p_1}{v}}} =$$

$$= E_0 \frac{\cos h \frac{p}{v} (1-x)}{\cos h \frac{p}{v} 1} \quad (8.7-25)$$

Dividindo numerador e denominador por

$$e^{\frac{p}{v} 1}$$

vem:

$$\bar{V}(x, p) = \frac{e^{-\frac{p}{v} x} + e^{-\frac{p}{v}(21-x)}}{1 + e^{-2\frac{p}{v} 1}} E_0$$

e desenvolvendo

$$\frac{1}{1 + e^{-2\frac{p}{v} 1}}$$

em série como

$$\frac{1}{1 + \mu} = 1 - \mu + \mu^2 - \mu^3 + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \mu^r \quad (8.7-26)$$

obtemos

$$|\mu| < 1$$

$$\bar{V}(x, p) = E_0 \left[e^{-\frac{p}{v} x} + e^{-\frac{p}{v}(21-x)} \right] \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r e^{-2r\frac{p}{v} 1}$$

$$\begin{aligned} \bar{V}(x, p) &= E_0 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r e^{-\frac{p}{v}(x+2r1)} + \\ &+ E_0 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r e^{-\frac{p}{v}[2(r+1)1-x]} \quad (8.7-27) \end{aligned}$$

$V(x, t)$ é calculado pela transformada inversa de (8.7-27).

$$V(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{V}(x, p)]$$

Se usarmos a propriedade (6.3-1)

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-p\alpha}] = \delta(t - \alpha) \quad (8.7-28)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} V(x, t) = E_0 \sum (-1)^r \delta\left(t - \frac{x + 2rl}{v}\right) + \\ + E_0 \sum (-1)^r \delta\left(t - \frac{2(r+1)l - x}{v}\right) \end{aligned} \quad (8.7-29)$$

A (8.7-29) é a solução do problema.

Este resultado pode ser interpretado de imediato como sinais delta que se propagam em forma de ondas com velocidade v e que se refletem sucessivamente nas extremidades (Fig. 8.7-3) sofrendo inversão sempre que se refletem na origem $x = 0$.

A propagação em forma de ondas nas linhas ideais, poderá ser mostrada pelas equações (8.7-5) com $R = 0$, $G = 0$

$$\left. \begin{aligned} - \frac{\partial V}{\partial x} &= L \frac{\partial I}{\partial t} \\ - \frac{\partial I}{\partial x} &= C \frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (8.7-30)$$

Derivando a primeira em relação a x

$$- \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = L \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial t} = L \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial I}{\partial x}$$

e substituindo $\partial I / \partial x$ da segunda

$$- \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = - LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

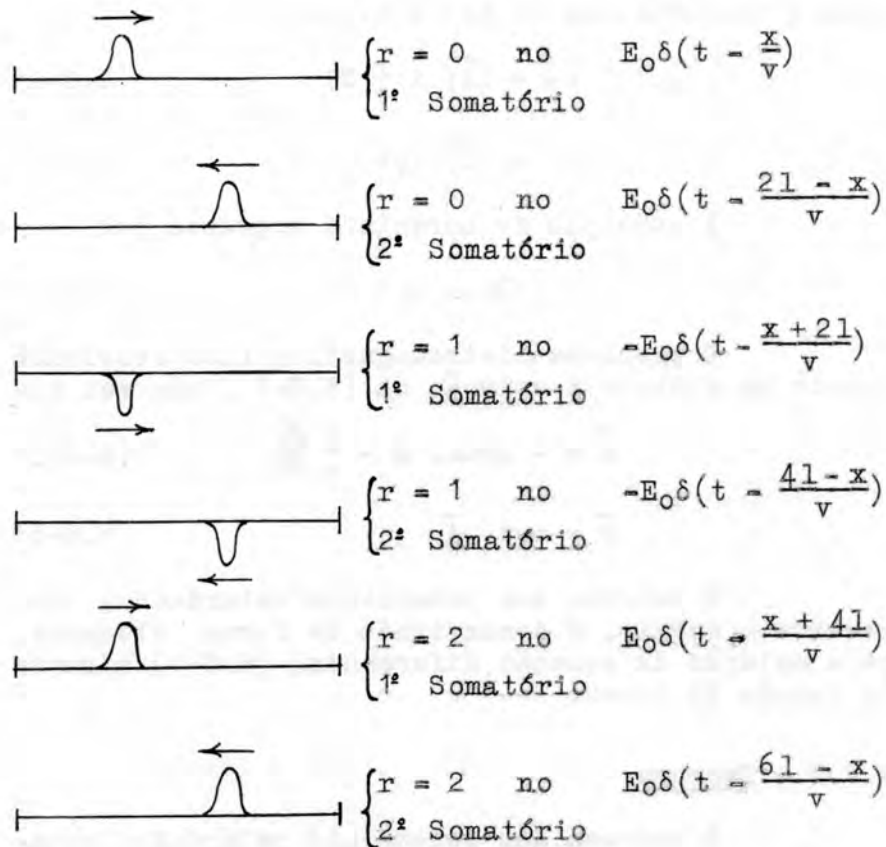
ou

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (8.7-31)$$

que nada mais é do que a equação de d'Alembert (Ondas).

A (8.7-31) nos diz que $V(x, t)$ se propaga em forma de ondas, com velocidade

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.7-32)$$



etc.

Fig. 8.7-3

8.8 - TEOREMA DOS POTENCIAIS RETARDADOS

8.8.1 - Introdução

As equações de Maxwell nos potenciais ficam reduzidas a uma única equação diferencial

$$\square^2 A_{\nu} = - \frac{4\pi}{\gamma^4} \mu J_{\nu} \quad (8.8-1)$$

quando introduzimos os tetravetores

$$A_{\nu} = (\vec{A}; i \frac{\gamma}{v} \Phi) \quad (8.8-2)$$

$$J_{\nu} = (\vec{J}; i \rho v) \quad (8.8-3)$$

A condição de Lorentz é expressa por

$$\square \cdot A_{\nu} = 0 \quad (8.8-4)$$

O problema eletromagnético fica resolvido quando se conhece a solução da (8.8-1), uma vez que

$$\vec{E} = - \text{grad. } \Phi - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (8.8-5)$$

$$\vec{B} = \text{rot. } \vec{A} \quad (8.8-6)$$

O teorema dos potenciais retardados, que veremos a seguir, é demonstrado de forma elegante, pela solução da equação diferencial (8.8-1) através da função de Green.

8.8.2 - Teorema

O teorema dos potenciais retardados estabelece:

"Os potenciais originados por cargas elétricas ou correntes não estacionárias são calculadas da mesma forma que nos casos estacionários, salvo o retardo no tempo devido à propagação da perturbação".

Consideremos uma distribuição de densidades de cargas e correntes dadas por (Fig. 8.8-1)

$$\rho(\vec{r}_1, t) \quad \text{e} \quad \vec{J}(\vec{r}_1, t) \quad (8.8-7)$$

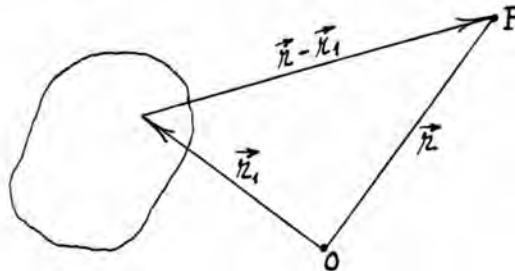


Fig. 8.8-1

Os potenciais vetorial e escalar

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \quad \text{e} \quad \Phi(\vec{r}, t)$$

em um ponto P, no instante t, devido à distribuição (8.8-7), podem ser calculados de acordo com o teorema, pela distribuição "estacionária".

$$\rho(\vec{r}_1; t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_1|}{v}) \quad (8.8-8)$$

$$\vec{J}(\vec{r}_1; t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_1|}{v})$$

Pela solução da equação (8.8-1) com a função de Green obteremos

$$\vec{A}_V(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{\gamma^1} \iiint \frac{\vec{J}_V(\vec{r}_1; t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_1|}{v})}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d\vec{r}_1$$

que comparada com a solução para casos estacionários, nos permite enunciar o teorema.

As constantes que aqui aparecem, dependem do sistemas de unidades adotado e estão ligadas por

$$v^2 = \frac{\gamma \gamma^1 h}{4\pi \epsilon \mu} \quad (8.8-9)$$

8.8.3 - Demonstração

Vamos resolver a (8.8-1)

$$\square^2 A_\psi = - \frac{4\pi}{\gamma^4} \mu J_\psi$$

onde

$$A_\psi = (A_x, A_y, A_z, i \frac{\gamma}{v} \Phi) = (\vec{A}, i \frac{\gamma}{v} \Phi) \quad (8.8-10)$$

$$J_\psi = (J_x, J_y, J_z, ivg) = (\vec{J}, ivg) \quad (8.8-11)$$

$$\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \quad (8.8-12)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \\ x_4 = ivt \end{array} \right\} \vec{r} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \\ x_4 = ivt \end{array}} \right\} X \quad (8.8-13)$$

pela função de Green.

A função de Green $G(X)$ é a solução da equação

$$\square^2 G(X) = - \delta(X) \quad (8.8-14)$$

Seja $\bar{G}(K)$ a transformada de Fourier da $G(X)$, isto é:

$$G(X) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \iiint \bar{G}(K) e^{iKX} dK \quad (8.8-15)$$

onde

$$K = (K_1, K_2, K_3, K_4) = (\vec{K}, iK_0)$$

e

$$dK = dK_1, dK_2, dK_3, dK_0$$

Assim

$$\square^2 \cdot G(X) = - \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \iiint \iiint KK \bar{G}(K) e^{iKK} dK \quad (8.8-16)$$

por outro lado, como generalização de (5.3-2)

$$\delta(X) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint \iiint e^{iKK} dK \quad (8.8-17)$$

Das (8.8-16 e 17) tiramos:

$$\bar{G}(K) = \frac{1}{4\pi^2 KK} \quad (8.8-18)$$

Pela fórmula da inversão da transformada de Fourier obtemos:

$$G(X) = \frac{1}{4\pi r} \delta(r - vt) \quad (8.8-19)$$

A solução é obtida por

$$A_Y(X) = \frac{4\pi}{\gamma^4} \mu J_Y(X) \star G(X) \quad (8.8-20)$$

ou seja

$$A_Y(X) = \iiint \iiint \frac{4\pi}{\gamma^4} \mu J_Y G(X - X_1) dX_1 \quad (8.8-21)$$

$$\begin{aligned} G(X - X_1) &= \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_1|} \delta[\vec{r} - \vec{r}_1 - v(t - t_1)] \\ &= \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_1|} \delta[v(t_1 - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_1|}{v})] \end{aligned}$$

Se usarmos a propriedade (2.5-1)

$$\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x)$$

$$G(X - X_1) = \frac{1}{4\pi v |\vec{r} - \vec{r}_1|} \delta(t_1 - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_1|}{v}) \quad (8.8-22)$$

Substituindo (8.8-22) em (8.8-21) vem

$$A_{\nu}(X) = \iiint \frac{4\pi\mu}{\gamma'} J_{\nu}(\vec{r}_1, t_1) \frac{1}{4\pi v |\vec{r} - \vec{r}_1|} \delta\left[t_1 - t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_1|}{v}\right] dX_1$$

onde

$$dX_1 = dx dy dz v dt_1$$

Integrando em relação a t_1 vem

$$A_{\nu}(X) = \frac{\mu}{\gamma'} \iiint \frac{J_{\nu}(\vec{r}_1, t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_1|}{v})}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d\vec{r}_1 \quad (8.8-23)$$

Esta solução comparada com a solução obtida para distribuições estacionárias

$$A_{\nu}(\vec{r}) = \frac{\mu}{\gamma'} \iiint \frac{J_{\nu}(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d\vec{r}_1 \quad (8.8-24)$$

nos permite enunciar o teorema.

8.8.4 - Cálculo de Integrais

a) Cálculo da integral

$$G(X) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \iiint \bar{G}(K) e^{iKX} dK$$

para

$$\bar{G}(K) = \frac{1}{4\pi^2 K K_0}$$

ou seja

$$G(X) = \frac{1}{16\pi^4} \iiint \frac{e^{iK \cdot X}}{K K_0} dK \quad (8.8-25)$$

onde

$$dK = dK_1 dK_2 dK_3 dK_0$$

e

$$\begin{aligned} K X &= K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3 - K_0 x_0 = \vec{K} \cdot \vec{r} - K_0 x_0 \\ K K &= \vec{K} \cdot \vec{K} - K_0^2 = \vec{K}^2 - K_0^2 \end{aligned}$$

Poderemos escrever a (8.8-25) sob a forma

$$G(X) = \frac{1}{16 \pi^4} \int e^{-iK_0 x_0} dK_0 \iiint \frac{e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}}}{\vec{K} \cdot \vec{K} - K_0^2} d\vec{K}$$

a segunda integral vale

$$\frac{2\pi^2 e^{+iK_0 r}}{r}$$

conforme item b. Assim

$$\begin{aligned} G(X) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iK_0 x_0 + iK_0 r}}{r} dK_0 \\ &= \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iK_0 (r - x_0)} dK_0 \end{aligned}$$

A integral vale $2\pi \delta(r - x_0)$ conforme propriedade (2.19-2)

$$G(X) = \frac{1}{4\pi r} \delta(r - x_0)$$

ou

$$G(X) = \frac{1}{4\pi r} \delta(r - vt) \quad (8.8-26)$$

b) Avaliação da integral

$$\iiint \frac{e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}}}{\vec{K} \cdot \vec{K} - K_0^2} d\vec{K} =$$

Temos de acôrdo com a fig. 8.8-2

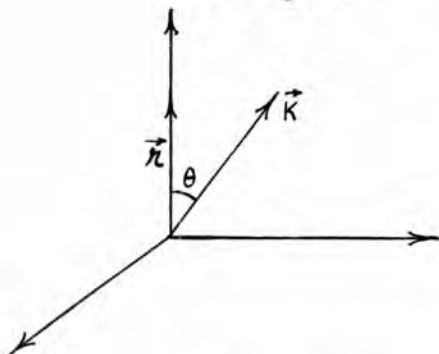


Fig. 8.8-2

$$\begin{aligned} \vec{K} \cdot \vec{r} &= |\vec{K}| r \cos \theta & (8.8-27) \\ &= kr \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \iiint \frac{e^{ikr \cos \theta}}{k^2 - K_0^2} k^2 \sin \theta d\theta d\phi dk = \\ &= 2\pi \iint \frac{e^{ikr \cos \theta}}{k^2 - K_0^2} k^2 \sin \theta d\theta dk = \\ &= -\frac{2\pi}{ir} \iint \frac{e^{ikr \cos \theta}}{k^2 - K_0^2} k (-ikr \sin \theta d\theta) dk = \\ &= -\frac{2\pi}{ir} \int \frac{k dk}{k^2 - K_0^2} \int_0^\pi e^{ikr \cos \theta} d(ikr \cos \theta) = \\ &= \frac{2\pi i}{r} \int_0^\infty \frac{k dk}{k^2 - K_0^2} (e^{-ikr} - e^{+ikr}) = \\ &= \frac{2\pi i}{r} \left\{ \int_0^\infty \frac{k e^{-ikr}}{k^2 - K_0^2} dk - \int_0^\infty \frac{k e^{+ikr}}{k^2 - K_0^2} dk \right\} \\ &= \frac{2\pi i}{r} \int_{-\infty}^\infty \frac{k e^{-ikr}}{k^2 - K_0^2} dk = 2\pi^2 \frac{e^{iK_0 r}}{r} \end{aligned}$$

cujo cálculo é feito com o auxílio da teoria dos resíduos, no item c.

c) Cálculo da integral

$$\frac{2\pi i}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikr}}{k^2 - K_0^2} k dk$$

A função

$$f(z) = z \frac{e^{-izr}}{z^2 - K_0^2}$$

tem dois polos

$$z = \pm K_0$$

Os resíduos desta função nestes pólos são:

$$\text{Res} [f(z); z = K_0] = + \frac{e^{-iK_0 r}}{2}$$

$$\text{Res} [f(z); z = -K_0] = + \frac{e^{+iK_0 r}}{2}$$

Integrando ao longo da trajetória indicada na fig. 8.8-3 quando o raio da semi-circunferência tende a infinito:

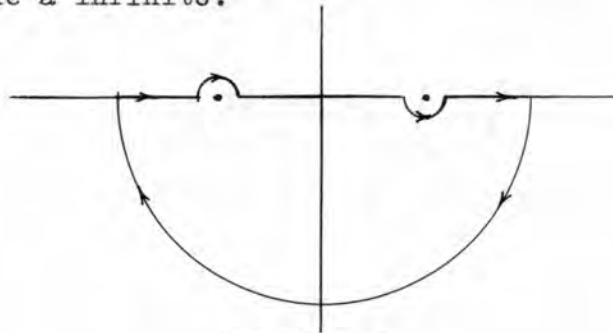


Fig. 8.8-3

vem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikr}}{k^2 - K_0^2} k dk = -2\pi i \frac{e^{+iK_0 r}}{2}$$

e portanto:

$$\frac{2\pi i}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikr}}{k^2 - K_0^2} k dk = \frac{2\pi^2}{r} e^{+iK_0 r}$$

8.9 - ESPALHAMENTO - POÇO DELTA

8.9.1 - Seções de Choque Diferencial e Total

Seja

$$V(r) = -B \delta(r) \quad (8.9-1)$$

o potencial espalhador. Para calcularmos a secção de choque diferencial faremos uso da aproximação de Born para potenciais esféricamente simétricos, a saber:

$$f(\theta) = - \frac{2m_0}{k\hbar^2} \int_0^{\infty} V(r) r \sin kr \, dr \quad (8.9-2)$$

Aplicando ao potencial do problema:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= + \frac{2m_0 B}{k\hbar^2} \int_0^{\infty} r \sin kr \delta(r) dr \\ &= + \frac{2m_0 B}{\hbar^2} \int_0^h r^2 \frac{\sin kr}{kr} \delta(r) dr = \end{aligned}$$

usando a propriedade da $\delta(r)$ (com simetria esférica)

$$\int_0^a 4\pi r^2 f(r) \delta(r) dr = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\epsilon) \quad (8.9-3)$$

vem

$$f(\theta) = \frac{m_0 B}{2\pi\hbar^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \epsilon}{\epsilon} = \frac{m_0 B}{2\pi\hbar^2} \quad (8.9-4)$$

A secção de choque diferencial por unidade de ângulo sólido

$$\sigma(\theta, \varphi) = |f(\theta)|^2 = \frac{m_0^2 B^2}{4\pi^2 \hbar^4} \quad (8.9-5)$$

A (8.9-5) nos mostra ser o espalhamento isotrópico.

A seção de choque total será:

$$\sigma = \frac{m_0^2 B^2}{\pi \hbar^4} \quad (8.9-6)$$

É interessante notar que σ pode ser obtida como caso limite do poço retangular para baixas energias,

$$\sigma = \frac{16}{9} \frac{m_0^2 \pi V_0^2 a^4}{\hbar^4} \quad (8.9-7)$$

para $a \rightarrow 0$ e $V_0 \rightarrow \infty$ com a condição

$$\frac{4}{3} \pi V_0 a^3 = B \quad (8.9-8)$$

isto é

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{m_0^2}{\pi \hbar^4} \left(\frac{4}{3} \pi V_0 a^3 \right)^2 \\ \sigma &= \frac{m_0^2 B^2}{\pi \hbar^4} \quad (8.9-9) \end{aligned}$$

8.9.2 - Validade da aproximação de Born

A condição de validade da aproximação de Born é expressa por

$$\left| \frac{m_0}{\hbar^2 k} \int_0^\infty (e^{2ikr} - 1) V(r) dr \right| \ll 1 \quad (8.9-10)$$

$$\left. \begin{aligned} e^{2ikr} &= \cos 2kr + i \operatorname{sen} 2kr \\ V(r) &= -B\delta(r) \end{aligned} \right\} (8.9-11)$$

Calculamos a integral da (8.9-10)

$$\begin{aligned} & \left| \frac{m_0}{\hbar^2 k} \int_0^\infty (e^{2ikr} - 1) B\delta(r) dr \right| = \\ & = \left| \frac{m_0 B}{\hbar^2 k} \left\{ \int_0^\infty \cos 2kr \delta(r) dr + i \int_0^\infty \operatorname{sen} 2kr \delta(r) dr \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \int_0^\infty \delta(r) dr \right\} \right| = \end{aligned}$$

e usando as propriedades da delta

$$\begin{aligned} & = \left| \frac{m_0 B}{\hbar^2 k 4\pi} \left[\frac{\cos 2k\varepsilon}{\varepsilon^2} + i \frac{\operatorname{sen} 2k\varepsilon}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \right] \right| = \\ & = \left| \frac{m_0 B}{\hbar^2 k 4\pi} \left[\frac{\cos 2k\varepsilon - 1 + i \operatorname{sen} 2k\varepsilon}{\varepsilon^2} \right] \right| = \\ & = \left| \frac{m_0 B}{\hbar^2 k 4\pi} \frac{2 \operatorname{sen}^2 k\varepsilon + i 2 \operatorname{sen} k\varepsilon \cos k\varepsilon}{\varepsilon^2} \right| = \\ & = \frac{m_0 B}{\hbar^2 k 4\pi} \left| \sqrt{\frac{4 \operatorname{sen}^4 k\varepsilon + 4 \operatorname{sen}^2 k\varepsilon \cos^2 k\varepsilon}{\varepsilon^4}} \right| = \\ & = \frac{m_0 B}{\hbar^2 k 4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} k\varepsilon}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

e este limite tende a ∞ , não se verificando portanto a condição de validade da aproximação de Born.

8.9.3 - Conclusões

A aplicação formal da aproximação de Born para potenciais esféricamente simétricos ao potencial

$$V(r) = - B \delta(r) \quad (8.9-12)$$

leva a resultados corretos, isto é, que coincidem com aqueles obtidos como limites de um poço retangular a baixas energias, apesar de a condição de validade da aproximação de Born não se verificar.

No poço $V(r) = - B \delta(r)$

$$\nu = \int_0^{\infty} B \delta(r) 4\pi r^2 dr = B \quad (8.9-13)$$

representa o "volume" do poço de potencial.

Vejamos as seções de choque total de outros dois poços de potencial de curto alcance em função do "volume do poço".

Poço Retangular

$$\nu = \frac{4}{3} \pi a^3 V_0 \quad (8.9-14)$$

$$\sigma = \frac{16}{9} \frac{\pi m_0^2 V_0^2 a^6}{\hbar^4} = \frac{m_0^2 \nu^2}{\pi \hbar^4} \quad (8.9-15)$$

$$\text{Poço } V(r) = -V_0 e^{-\frac{r}{a}}$$

$$\nu = \int_0^{\infty} 4\pi r^2 V_0 e^{-\frac{r}{a}} dr = 8\pi V_0 a^3 \quad (8.9-16)$$

como se pode verificar integrando por partes.

$$\sigma = \frac{64\pi m_0^2 V_0^2 a^6}{\hbar^4} = \frac{m_0^2 \nu^2}{\pi \hbar^4} \quad (8.9-17)$$

Comparando (8.9-9, 15, 17) e (8.9-13) concluímos que para baixas energias e potenciais de curto alcance a seção de choque total depende somente

do "volume" do poço, isto é:

$$\sigma = \frac{m_0^2 v^2}{\pi \hbar^4}$$

Um espalhamento deste tipo pode ser descrito por um potencial tipo delta

$$V = - B \delta(r)$$

onde B representa o "volume do poço".

Neste caso o nosso maior interesse é ajustar a constante B ao valor conhecido da seção de choque.

--oo0oo--

BIBLIOGRAFIA

1. Apostol
Mathematical Analysis
McGraw Hill Book Company, 1951.
2. Belluzi
Scienza delle costruzioni
Nicola Zanichelli Editore, 1951.
3. Carslaw and Jager
Operational Methods in Applied Mathematics
Oxford University Press, 1947.
4. Courant and Hilbert
Methods of Mathematical Physics
Interscience Publishers Inc., 1953.
5. Dirac
Quantum Mechanics
Oxford University Press, 1958.
6. Goertzel and Tralli
Some Mathematical Methods of Physics
McGraw Hill Book Company Inc., 1960.
7. Goldman - Krivchenkov
Problems in Quantum Mechanics
Academic Press Inc., 1960
8. Jackson
Classical Eletrodynamics
John Wiley & Sons Inc., 1962

9. Kaplan
Operational Methods for Linear Systems
Addison Wesley Publishing Company Inc., 1962.
10. Lighthill
Fourier Analysis & Generalized functions
Cambridge University Press, 1958.
11. Mandl
Quantum Mechanics
Butterworths Scientific Publications, 1957.
12. Marchand
Distributions - An outline
North Holland Publishing Company, 1962.
13. Morse and Feshbach
Methods of Theoretical Physics
McGraw Hill Book Company Inc., 1953.
14. Panofsky and Phillips
Classical electricity and Magnetism
Addison Wesley Publishing Company Inc., 1955.
15. Powell and Craseman
Quantum Mechanics
Addison Wesley Publishing Company Inc., 1961.
16. Schiff
Quantum Mechanics
McGraw Hill Book Company Inc., 1949.
17. Sneddon
Fourier Transforms
McGraw Hill Book Company Inc., 1951.
18. Staricco
Anotações de aula.
19. Titchmarsh
Theory of Fourier Integrals
Oxford University Press, 1948.
20. Tranter
Integral Transforms in Mathematical Physics
Methuen & Co. Ltd, 1956.

NOTAÇÕES

$\forall x$	para todo x
$\delta(x)$	função delta
$H(x)$	função Heaviside
Π	função retangular
\in	pertence
\notin	não pertence
\cap	intersecção de dois conjuntos
ε	valor arbitrário > 0
δ_K^1	derivada parcial em relação a K
$\delta^{(n)}$	derivada de ordem n
x	variável unidimensional
X	variável n -dimensional
$N(X)$	vizinhança de X
$\mathcal{F}_0 \cdot f$ $F(\omega)$	} transformada de Fourier da $f(x)$
$\mathcal{F}_S \cdot f$ $F_S(\omega)$	
$\mathcal{F}_C \cdot f$ $F_C(\omega)$	} transformada de Fourier cosseno da $f(x)$
θ	

$\mathcal{L}[f]$ f	transformada de Laplace da f
f ★ g	convolução (faltung)
G(x, x')	função de Green
E	módulo de elasticidade
J	momento de inércia da seção
R	resistência
L	indutância
G	condutância
C	capacidade.

--oo0oo--

EDITORA MERIDIONAL "EMMA"

100, Avenida José Martí, 308
23, Calle 1300, 17, Apto.
P.O. Box 1000 - H. C. de N.Y.