UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

A MÉTRICA DE SKOROHOD

Dissertação de Mestrado

Adriana Neumann de Oliveira

Porto Alegre, 05 de março de 2007.

Dissertação submetida por Adriana Neumann de Oliveira[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Artur Oscar Lopes

Banca Examinadora:

Dr. Alexandre Baraviera (PPGMat-UFRGS)
Dr. Artur Oscar Lopes (PPGMat-UFRGS)
Dr. Jairo Bochi (PPGMat-UFRGS)
Dr. Cláudio Landim (IMPA)

Data da Apresentação: 05 de março de 2007.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Resumo:

Considere (E, r) espaço métrico completo e o espaço $D_E[0, \infty)$ das funções $x : [0, \infty) \to E$ contínuas à direita e com limite à esquerda. Neste trabalho vamos apresentar a métrica, d, de Skorohod no espaço $D_E[0, \infty)$. Vamos mostrar que $(D_E[0, \infty), d)$ é completo.

Abstract:

Consider (E, r) a complete metric space and the space $D_E[0, \infty)$ of right continuous functions $x : [0, \infty) \to E$ with left limits. In this work we will introduce the metric d of Skorohod on the space $D_E[0, \infty)$. We will show that $(D_E[0, \infty), d)$ is complete.

À Alexandre Augusto Pereira Feijó,
e aos meus avós: Celda Schäfer Neumann
e Lindolpho Neumann (in memorian).

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador *Artur Lopes*, que acreditou em mim e me apoiou nesta etapa tão importante da minha formação: sempre me dando desafios, que a princípio pareciam estar além da minha competência, mas que com muito trabalho podiam ser superados; sempre respondendo minhas dúvidas com muita paciência e direcionando meu estudo. Outro professor que merece minha gratidão é o *Alexandre Baraviera*, por todo o seu apoio e sua atenção a mim dedicados. Agradeço, também, aos professores *Jairo Bochi* e *Luis Gustavo Mendes* pelo trabalho realizado.

Na UFRGS fiz uma grande amizade com *Cinthya Schneider*, a qual agradeço por todo o companherismo e apoio. Outros colegas da UFRGS pelos os quais, também, tenho uma gratidão especial são: *Guilherme Pumi*, *Márcio Valk, Edite Taufer, Antônio Jesus Ávila, Cleber Bisognin, Flávia Giordani, João Francisco Prolo, Raquel Linhares, Taiane Prass, Paulo Sergio Costa Lino, Joana Mohr, Patrícia Cunha, Vilarbo Júnior, Lisandra Sauer e Lucineia Fabris*. Agradeço às secretárias *Rosane Prates Reginatto dos Santos e Marta Elias de Souza* por todo apoio. Sou grata, também, aos colegas que encontrei na UFRGS, que, assim como eu, fizeram a graduação na UFPel: *Cícero Nachtigall, Maurício Zahn, Elismar Oliveira e Isabel Bonow.*

Agradeço à minha orientadora de iniciação científica *Ludmila Bourchtein* e ao professor *Andrei Bourchtein* por terem me ajudado a dar os meus primeiros passos no estudo da Matemática e terem despertado em mim a paixão por esta ciência. Também agradeço a eles e ao professor *Sérgio Oliveira*, o incentivo que me deram para eu continuar estudando. Na graduação, também, encontrei uma grande amiga *Bianca Herreira Capilheira*, que foi e é companheira para todas as horas.

E, por último e não menos importante, agradeço a quem sempre me deu base para enfrentar os obstáculos:

minha dinda *Wilma Ieda Blaas Corrêa*, pela a atenção dedicada a mim, principalmente na minha estadia em Porto Alegre;

minha cunhada *Marciele Müller Alves*, que se revelou uma grande amiga e companheira;

minha tia *Lúcia Elena Neumann* pelo exemplo de que através do estudo e muito trabalho podemos obter bons resultados e por ela estar sempre pronta a me ajudar;

minha afilhada *Raquel Neumann Bortoluzzi* por ser esta princesa que ilumina a minha vida e me enche de alegria;

meus avós *Celda Schäfer Neumann* e *Lindolpho Neumann* (in memorian), que sempre, com muito amor, me ensinaram os valores importantes, dentre eles a importância da educação;

meus irmãos *André Neumann de Oliveira* e *Maurício Neumann de Oliveira*, que apesar de serem mais novos que eu sempre me protegeram;

meu grande amor *Alexandre Augusto Perreira Feijó*, que nestes últimos 8 anos tem me dado forças nas batalhas que venho enfrentando, sendo um companheiro inseparável e fiel, me ajudando a ser uma pessoa melhor e mais feliz;

meus pais *Vera Lúcia Neumann de Oliveira* e *João Gutknecht de Oliveira*, que são pessoas muito boas e sempre me deram muito amor, carinho e se esforçam muito para me ajudar;

Deus, pela minha vida.

Sumário

Introdução

Muitos processos estocásticos que surgem em aplicações têm a propriedade de ter limite à direita e à esquerda em cada ponto do tempo para quase toda amostra de caminho. Por convenção vamos assumir que os caminhos são contínuos à direita, quando isto pode ser feito (normalmente pode) sem alterar a distribuição finito dimensional. Vamos denotar por $D_E[0,\infty)$ o espaço das funções $x : [0,\infty) \mapsto E$ contínuas à direita e com limite à esquerda, onde (E, r) é espaço métrico.
Muitos resultados de convergência de medidas de probabilidade requerem que espaços métricos sejam separáveis e completos. Por isso, a importância de encontrarmos um métrica que tornasse $D_E[0,\infty)$ separável e completo. Neste trabalho vamos apresentar a métrica de Skorohod, d, que torna $(D_E[0,\infty), d)$ um espaço métrico separável e completo, se E é separável e (E, r) é completo, respectivamente. Nossa apresentação vai trabalhar com bastante detalhes a prova de que $(D_E[0,\infty), d)$ é completo, a qual é descrita na seção 5 do capítulo 3 páginas 116 até 122 do livro [1]. Referimos o leitor, também, a [1] para a prova deste espaço ser separável. Cabe observar, que $(D_E[0,\infty), d)$ não é compacto, e indicar em [1] a seção 6 do capítulo 3, onde os autores do livro tratam de questões relacionadas a compacidade de certos subconjuntos de $(D_E[0,\infty), d)$.

Capítulo 1

A métrica de Skorohod

1.1 Considerações iniciais e definições

Seja (E, r) um espaço métrico e q denota a métrica $r \wedge 1$, onde $\wedge$ significa $a \wedge b = \min\{a, b\}$, $\forall\, a, b$. Também, vamos esclarecer que $\vee$ significa $a \vee b = \max\{a, b\}$, $\forall\, a, b$. $D_E[0, \infty)$ denota o espaço das funções $x : [0, \infty) \mapsto E$ contínuas à direita e com limite à esquerda. Denotaremos para cada $t \geq 0$ o limite de x à direita de t por $\lim\limits_{s \to t+} x(s) = x(t+)$, onde $s \to t+$ significa que $s > t$ e $s \to t$ e o limite de x à esquerda de t por $\lim\limits_{s \to t-} x(s) = x(t-)$, onde $s \to t-$ significa que $s < t$ e $s \to t$; por convenção $\lim\limits_{s \to 0-} x(s) = x(0-) = x(0)$. Assim, com esta notação podemos escrever

$$D_E[0, \infty) = \{x : [0, \infty) \mapsto E; \exists x(t-),\, x(t+) = x(t)\}$$

Nós começamos observando que as funções em $D_E[0, \infty)$ são mais bem comportadas do que podemos suspeitar inicialmente.

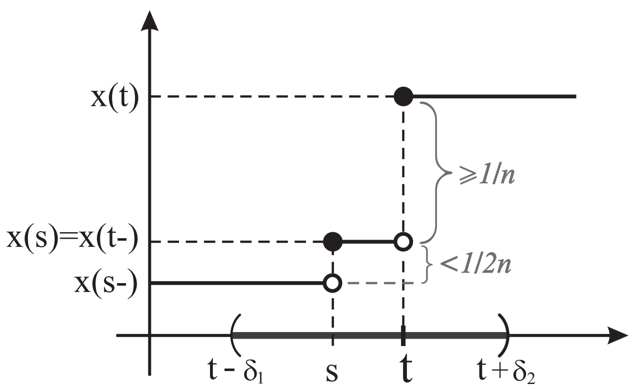
Lema 1.1 *Se $x \in D_E[0, \infty)$, então x tem pontos de descontinuidade enumeráveis.*

Demonstração

Seja $x \in D_E[0, \infty)$. Como $x : [0, \infty) \to E$ é contínua à direita e tem limite à esquerda, as descontinuidades de x são de 1ª espécie (salto) [2]. Definimos

$$A_n = \{t > 0; r(x(t), x(t-)) \geq 1/n\}, \ \forall n = 1, 2, ...,$$

ou seja, A_n é o conjunto dos pontos de descontinuidades de x com salto maior que $1/n$ na métrica r.
Afirmamos que A_n não tem ponto de acumulação, $\forall n = 1, 2, \dots$.
De fato, dado $n \in \{1, 2, ...\}$, vamos fixá-lo temporariamente. Seja $t \in A_n$. Como existe o limite de x à esquerda de t, temos que existe $\delta_1 > 0$ tal que se $s \in (t - \delta_1, t)$ então $r(x(s), x(t-)) < 1/2n$ e $r(x(s-), x(t-)) < 1/2n$. Logo, $r(x(s), x(s-)) \leq r(x(s), x(t-)) + r(x(t-), x(s-)) < 1/2n + 1/2n = 1/n$. Desta forma, $(t - \delta_1, t) \cap A_n = \emptyset$.



Analogamente, pelo fato de x ser contínua à direita existe $\delta_2 > 0$ tal que $(t, t + \delta_2) \cap A_n = \emptyset$. Assim, encontramos uma vizinhança de t, $(t - \delta_1, t) \cup (t, t + \delta_2)$, que não está em A_n. Logo, t é ponto isolado em A_n.

$\square$

Vamos fixar que a notação "$q.t.p.\ t \geq 0$" significa que em quase todo ponto $t \geq 0$ vale uma determinada propriedade, ou melhor, $\exists A \subset [0, \infty)$ tal que $m([0, \infty) \backslash A) = 0$ e a propriedade vale em todo ponto de A.

Definimos

$$\Lambda' = \{\lambda : [0,\infty) \to [0,\infty);\ \lambda \text{ é sobrejetora e estritamente crescente}\}.$$

Observe que se $\lambda \in \Lambda'$, então $\lambda(0) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = \infty$ e λ é bijeção contínua.

Definimos, para as funções $\lambda \in \Lambda'$ que são Lipschitz,

$$\gamma(\lambda) = \sup_{t\geq 0} \text{ess } |\log \lambda'(t)|. \tag{1.1}$$

De [6] página 76, temos que o supremo essencial de $\log \lambda'$ é definido por

$$\sup_{t\geq 0} \text{ess } |\log \lambda'(t)| = \inf\{M > 0;\ |\log \lambda'(t)| \leq M \text{ em } q.t.p.\, t \geq 0\}$$

e, também, pode ser denotado por $\|\ [\log \lambda']\ \|_\infty$ (que é a norma em $\mathcal{L}_\infty$). No texto que segue vamos precisar das seguintes definições:

Definição 1.1: (Função de variação limitada)
Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Dada uma partição* $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_k = b\}$ *de* $[a,b]$. *Seja*

$$t_P = \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Dizemos que f *é de variação limitada se* $\sup\limits_{P} t_P < \infty$.

Definição 1.2: (Função absolutamente contínua)
Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é dita absolutamente contínua se* $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon,$$

sempre que $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < ... < a_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Note que $\gamma(\lambda)$ está bem definido, pois como λ é lipschitziana, por [6] página 161 λ é absolutamente contínua, então do Teorema Fundamental do Cálculo [6] página 166, temos que existe λ' em $q.t.p.$ $t \geq 0$.

Agora, definimos

$$\Lambda = \{\lambda \in \Lambda';\ \lambda \text{ é lipschitziana e } \gamma(\lambda) < \infty\}.$$

Lema 1.2 *Dada* $\lambda \in \Lambda$

$$\gamma(\lambda) = \sup_{s>t\geq 0} \left| \log \frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s-t} \right|$$

Este lema será demonstrado no apêndice.

Definição 1.3: (Métrica de Skorohod)
Para $x,\ y \in D_E[0,\infty)$*, definimos*

$$d(x,y) = \inf_{\lambda\in\Lambda} \left[\gamma(\lambda) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x,y,\lambda,u)du \right], \tag{1.2}$$

onde

$$d(x,y,\lambda,u) = \sup_{t\geq 0} q(x(t\wedge u), y(\lambda(t)\wedge u)). \tag{1.3}$$

Observação 1.1: Para termos uma idéia de como se comporta esta métrica apresentamos a seguir a proposição 1.5 que será demonstrada na seção 1.4:

Dados $\{x_n\} \subset D_E[0,\infty)$ *e* $x \in D_E[0,\infty)$*. Então são equivalentes:*

(a) $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$

(b) *Existe* $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$ *e*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T} r(x_n(t), x(\lambda_n(t))) = 0,$$

$\forall T > 0.$

Observação 1.2: Antes de provarmos que $(D_E[0,\infty), d)$ é espaço métrico, o qual é chamado de **espaço métrico de Skorohod**, vamos analisar alguns exemplos com $E = \{0, 1, ..., N-1\}$ e a métrica r tal que $r(x(t), y(t)) = 1$, se $x(t) \neq y(t)$ e $r(x(t), y(t)) = 0$, caso contrário, onde x, $y \in D_E[0,\infty)$ e $t \geq 0$ (esta métrica é conhecida como a métrica 0-1 ou métrica discreta). Neste caso, dados x, $y \in D_E[0,\infty)$ e $\lambda \in \Lambda$, da definição de q, temos que $q(x(t \wedge u), y(\lambda(t) \wedge u))$ só assume os valores 0 ou 1, $\forall t \geq 0$, então $d(x, y, \lambda, u)$ só assume os valores 0 ou 1.

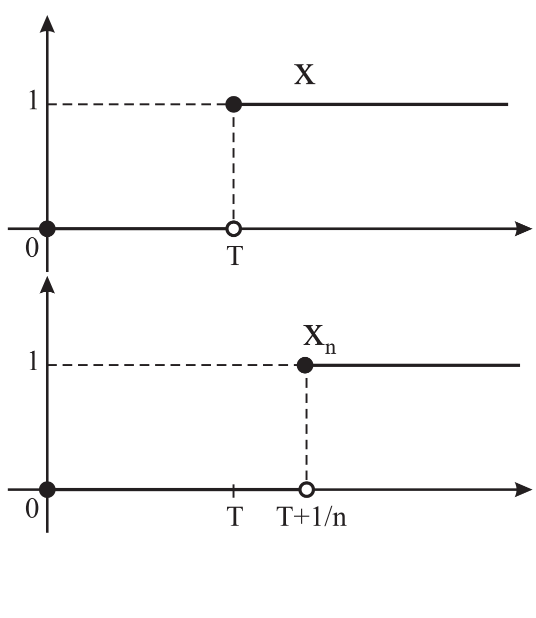
1.2 Exemplos

Nos exemplos desta seção assumimos que $(D_E[0,\infty), d)$ é espaço métrico e consideramos $E = \{0,1\}$ e r a métrica 0-1, então o leitor irá observar que estes exemplos satisfazem a hipótese da observação 1.2, ou seja, dados x, $y \in D_E[0,\infty)$ e $\lambda \in \Lambda$, temos que $d(x, y, \lambda, u)$ só assume os valores 0 ou 1.

Exemplo 1.1: Dado $T > 0$, sejam $x, x_n : [0,\infty) \mapsto \{0,1\}$ tais que

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < T \\ 1, & \text{se } t \geq T \end{cases},$$

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < T + 1/n \\ 1, & \text{se } t \geq T + 1/n \end{cases}, \text{ onde } n \in \{1, 2, ...\}.$$

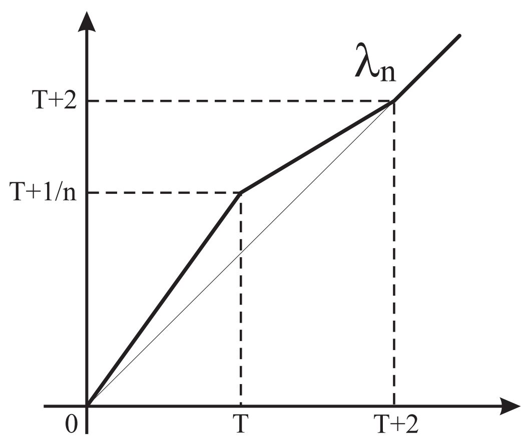


Fixamos $n \in \{1, 2, ...\}$. Vamos estimar $d(x, x_n)$, que por definição é

$$d(x, x_n) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \left[\gamma(\lambda) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x, x_n, \lambda, u) du \right].$$

Consideramos

$$\lambda_n(t) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{Tn}\right) t & , \quad \text{se } 0 \leq t < T \\ \\ \left(1 - \frac{1}{2n}\right) t + \frac{T+2}{2n}, & \text{se } T \leq t < T+2 \\ \\ t & , \quad \text{se } t \geq T+2 \end{cases}$$



Vamos analisar o que acontece com $d(x, x_n, \lambda_n, u)$ quando u varia e n está fixo.

- Se $0 \leq u < T$, então $\lambda_n(t) \wedge u \leq u < T$ e $t \wedge u \leq u < T$, $\forall t \geq 0$. Pela definição de x e x_n, temos que $x(t \wedge u) = 0$ e $x_n(\lambda_n(t) \wedge u) = 0$, $\forall t \geq 0$. Logo, $q(x(t \wedge u), x_n(\lambda_n(t) \wedge u)) = 0$, $\forall t \geq 0$, de onde segue, que

$$d(x, x_n, \lambda_n, u) = \sup_{t \geq 0} q(x(t \wedge u), x_n(\lambda_n(t) \wedge u)) = 0$$

- Se $T \leq u < T + 1/n$, como $\lambda_n \left(T + 2 + \frac{1}{n}\right) = T + 2 + \frac{1}{n} > T + \frac{1}{n} > u$, temos que $\lambda_n \left(T + 2 + \frac{1}{n}\right) \wedge u = u < T + 1/n$ e $\left(T + 2 + \frac{1}{n}\right) \wedge u = u \geq T$. Assim, $x \left(\left(T + 2 + \frac{1}{n}\right) \wedge u\right) = 1$ e $x_n \left(\lambda_n \left(T + 2 + \frac{1}{n}\right) \wedge u\right) = 0$. Logo,

$$1 = q\left(x\left((T + 2 + 1/n) \wedge u\right),\, x_n\left(\lambda_n\left(T + 2 + 1/n\right) \wedge u\right)\right)$$

$$\leq \sup_{t\geq 0} q(x(t\wedge u), x_n(\lambda_n(t)\wedge u)) = d(x, x_n, \lambda, u) \leq 1,$$

de onde segue, que $d(x, x_n, \lambda_n, u) = 1$.

- Se $u \geq T + 1/n$, dado $t \geq 0$.

$$0 \leq t < T \Rightarrow \begin{cases} t\wedge u = t < T & \Rightarrow \quad x(t\wedge u) = 0 \\ e & \\ \lambda_n(t)\wedge u = \lambda_n(t) < T + \frac{1}{n} & \Rightarrow \quad x_n(\lambda_n(t)\wedge u) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q(x(t\wedge u), x_n(\lambda_n(t)\wedge u)) = 0, \ \forall t \in [0, T).$$

$$t \geq T \Rightarrow \begin{cases} t\wedge u \geq T & \Rightarrow \quad x(t\wedge u) = 1 \\ e & \\ \lambda_n(t)\wedge u \geq T + \frac{1}{n} & \Rightarrow \quad x_n(\lambda_n(t)\wedge u) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q(x(t\wedge u), x_n(\lambda_n(t)\wedge u)) = 0, \ \forall t \in [T, \infty).$$

Logo,

$$d(x, x_n, \lambda_n, u) = \sup_{t\geq 0} q(x(t\wedge u), x_n(\lambda_n(t)\wedge u)) = 0$$

Desta forma, para cada $n \in \{1, 2, ...\}$, temos

$$d(x, x_n, \lambda_n, u) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq u < T \\ 1, & \text{se } T \leq u < T + \frac{1}{n} \\ 0, & \text{se } u \geq T + \frac{1}{n} \end{cases},$$

então

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x, x_n, \lambda_n, u)du = \int_T^{T+\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{-u} du = \mathrm{e}^{-T} - \mathrm{e}^{-\left(T+\frac{1}{n}\right)}, \ \forall\, n \in \{1, 2, ...\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(x, x_n) &= \inf_{\lambda\in\Lambda} \left[\gamma(\lambda) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x, x_n, \lambda, u)du\right] \\ &\leq \gamma(\lambda_n) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x, x_n, \lambda_n, u)du \\ &= \gamma(\lambda_n) \vee \left[\mathrm{e}^{-T} - \mathrm{e}^{-\left(T+\frac{1}{n}\right)}\right]. \end{aligned}$$

Como

$$\gamma(\lambda_n) \;=\; \sup_{t\geq 0} \text{ess}\, |\log \lambda_n'(t)| = \log\left(1+\frac{1}{Tn}\right),$$

temos que

$$d(x,x_n) \leq \left[\log\left(1+\frac{1}{Tn}\right)\right] \vee \left[\mathrm{e}^{-T} - \mathrm{e}^{-\left(T+\frac{1}{n}\right)}\right],\ \forall\, n \in \{1,2,...\}.$$

Pela Regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\log\left(1+\frac{1}{Tn}\right)}{\mathrm{e}^{-T}-\mathrm{e}^{-\left(T+\frac{1}{n}\right)}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{T+1/n}}{\mathrm{e}^{-\left(T+\frac{1}{n}\right)}}\right] = \frac{\mathrm{e}^{T}}{T} > 1,$$

então existe $n_0 \in \{1,2,...\}$ tal que $\forall n \geq n_0$ vale

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{Tn}\right)}{\mathrm{e}^{-T}-\mathrm{e}^{-\left(T+\frac{1}{n}\right)}} > 1 \Rightarrow \log\left(1+\frac{1}{Tn}\right) \geq \mathrm{e}^{-T}-\mathrm{e}^{-\left(T+\frac{1}{n}\right)}.$$

Assim,

$$d(x,x_n) \leq \left[\log\left(1+\frac{1}{Tn}\right)\right] \vee \left(\mathrm{e}^{-T}-\mathrm{e}^{-\left(T+\frac{1}{n}\right)}\right) = \log\left(1+\frac{1}{Tn}\right),\ \forall n \geq n_0.$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = 0$. Se tivéssemos considerado a métrica do supremo, que é dada por $d_s(x,y) = \sup_{t\geq 0} r(x(t),y(t))$, $\forall x,y \in D_E[0,\infty)$, neste caso teríamos que $d_s(x,x_n) = 1$, $\forall n \in \{1,2,...\}$.

Exemplo 1.2: Analogamente ao exemplo 1.1 a sequência de funções definidas por

$$\widetilde{x}_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < T - 1/n \\ 1, & \text{se } t \geq T - 1/n \end{cases},$$

onde $n \in \{1,2,...\}$, também, converge para

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < T \\ 1, & \text{se } t \geq T \end{cases},$$

na métrica d. Para provar isso, basta considerar

$$\widetilde{\lambda}_n(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{1}{Tn}\right)t & , \text{ se } 0 \leq t < T \\ \\ \left(1+\frac{1}{n}\right)t - \frac{T+1}{n}, & \text{se } T \leq t < T+1 \\ \\ t & , \text{ se } t \geq T+1 \end{cases}$$

e, por raciocínios análogos aos do exemplo 1.1, obteremos

$$d(x,\widetilde{x}_n,\widetilde{\lambda}_n,u)=\begin{cases}0, & \text{se } 0\le u<T-\frac{1}{n}\\ 1, & \text{se } T-\frac{1}{n}\le u<T\\ 0, & \text{se } u\ge T+\frac{1}{n}\end{cases}.$$

Assim,

$$d(x,\widetilde{x}_n)\le\left[\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\vee\left[\mathrm{e}^{-\left(T-\frac{1}{n}\right)}-\mathrm{e}^{-T}\right],$$

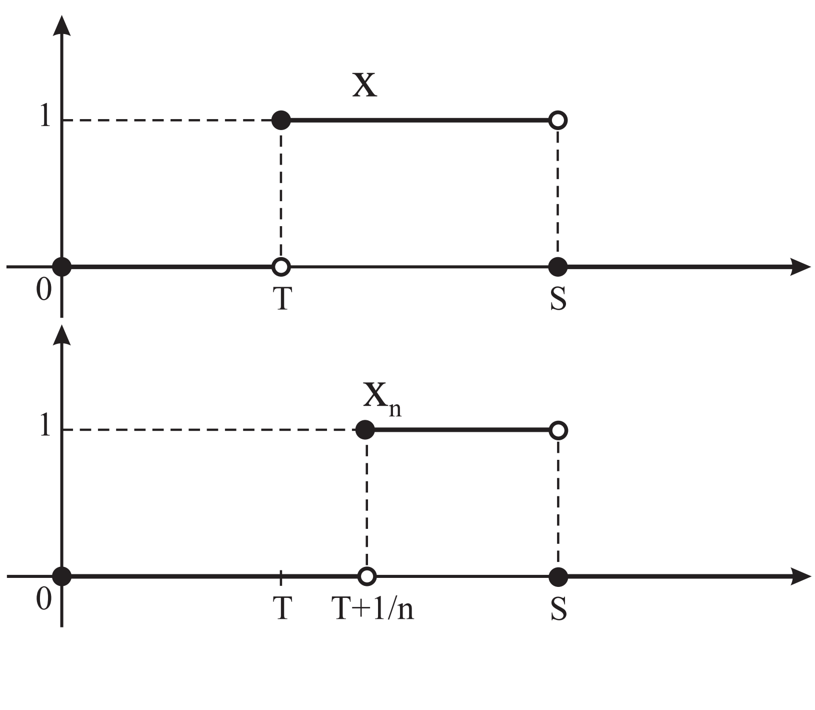
o que nos dará que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x,\widetilde{x}_n)=0$.

Exemplo 1.3: Dado $T>0$, tome $S>0$ tal que $S>T+1$. Sejam $x,x_n:[0,\infty)\mapsto\{0,1\}$ tais que

$$x(t)=\begin{cases}1, & \text{se } T\le t<S\\ 0, & \text{se } 0\le t<T \text{ ou } S\le t\end{cases},$$

$$x_n(t)=\begin{cases}1, & \text{se } T+1/n\le t<S\\ 0, & \text{se } 0\le t<T+1/n \text{ ou } S\le t\end{cases},$$

onde $n\in\{1,2,...\}$.



Fixamos $n \in \{1, 2, ...\}$. Vamos estimar $d(x, x_n)$. Consideramos

$$\lambda_n(t) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{Tn}\right) t & , \text{ se } 0 \leq t < T \\ \\ \left(1 - \frac{1}{n(S-T)}\right) t + \frac{S}{n(S-T)}, & \text{ se } T \leq t < S \\ \\ t & , \text{ se } t \geq S \end{cases}$$

Analogamente ao que fizemos no exemplo 1.1, analisamos o que acontece com $d(x, x_n, \lambda_n, u)$ quando u varia e n está fixo e obtemos que

$$d(x, x_n, \lambda_n, u) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq u < T \\ 1, & \text{se } T \leq u < T + \frac{1}{n} \\ 0, & \text{se } u \geq T + \frac{1}{n} \end{cases},$$

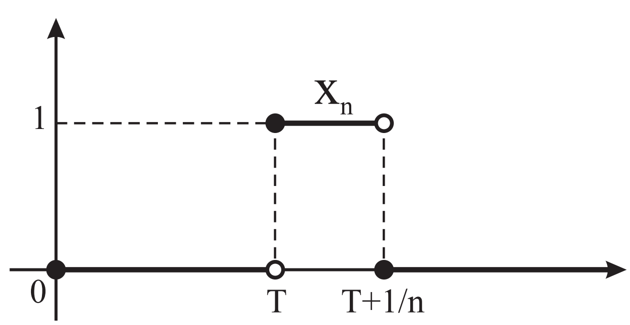
Assim, $d(x, x_n)$ tem a mesma limitação que no exemplo 1.1, então

$$\lim_{n \to \infty} d(x, x_n) = 0.$$

Exemplo 1.4: Dado $T \geq 0$, sejam $x_n, x : [0, \infty) \mapsto \{0, 1\}$ tais que

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } T \leq t < T + 1/n \\ 0, & \text{se } 0 \leq t < T \text{ ou } T + 1/n \leq t \end{cases},$$

onde $n \in \{1, 2, ...\}$ e $x(t) \equiv 0$.



Queremos calcular $d(x, x_n)$, que por definição é

$$d(x, x_n) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \left[\gamma(\lambda) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x, x_n, \lambda, u) du \right]. \tag{1.4}$$

Dada $\lambda \in \Lambda$, vamos fixá-la temporariamente para analisar o que acontece com $d(x, x_n, \lambda, u) = \sup_{t\geq 0} q(x(t\wedge u), x_n(\lambda(t)\wedge u))$ quando u varia e n está fixo.

- Se $0 \leq u < T$, então $\lambda(t)\wedge u \leq u < T$, $\forall t \geq 0$. Pela definição de x e de x_n temos que $x(t\wedge u) = 0$ e $x_n(\lambda(t)\wedge u) = 0$, $\forall t \geq 0$. Logo, $q(x(t\wedge u), x_n(\lambda(t)\wedge u)) = 0$, $\forall t \geq 0$, de onde segue que

$$d(x, x_n, \lambda, u) = \sup_{t\geq 0} q(x(t\wedge u), x_n(\lambda(t)\wedge u)) = 0$$

- Se $u \geq T$, como λ é sobrejetora, temos que existe $t_0 \geq 0$ tal que $\lambda(t_0) = T$. Então $\lambda(t_0)\wedge u = T\wedge u = T$. Assim, $x(t_0\wedge u) = 0$ e $x_n(\lambda(t_0)\wedge u) = 1$. Logo,

$$1 = q(x(t_0\wedge u), x_n(\lambda(t_0)\wedge u)) \leq$$

$$\sup_{t\geq 0} q(x(t\wedge u), x_n(\lambda(t)\wedge u)) = d(x, x_n, \lambda, u) \leq 1,$$

de onde segue, que $d(x, x_n, \lambda, u) = 1$.

Desta forma,

$$d(x, x_n, \lambda, u) = \begin{cases} 0, & \text{se } u < T \\ 1, & \text{se } u \geq T \end{cases}.$$

E, assim, lembrando que λ e n são quaisquer, temos que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x, x_n, \lambda, u)du = \int_T^\infty \mathrm{e}^{-u}du = \mathrm{e}^{-T},\ \forall \lambda \in \Lambda,\ \forall n \in \{1, 2, ...\}. \quad (1.5)$$

De (1.4) e (1.5), obtemos que

$$d(x, x_n) = \inf_{\lambda\in\Lambda} \left[\gamma(\lambda) \vee \mathrm{e}^{-T}\right] =^1 \left[\inf_{\lambda\in\Lambda} \gamma(\lambda)\right] \vee \mathrm{e}^{-T} =^2 0 \vee \mathrm{e}^{-T} = \mathrm{e}^{-T},$$

[1] Afirmação A.3 - veja no apêndice.

[2] $0 \leq \inf_{\lambda\in\Lambda} \gamma(\lambda) \leq \gamma(Id) = \sup_{s>t\geq 0} \left|\log \frac{Id(s) - Id(t)}{s-t}\right| = \sup_{s>t\geq 0} \left|\log \frac{s-t}{s-t}\right| = 0 \Rightarrow \inf_{\lambda\in\Lambda} \gamma(\lambda) = 0.$

$\forall n \in \{1, 2, ...\}$. Portanto, $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = \mathrm{e}^{-T} \neq 0$. Apesar da sequência de funções x_n convergir em $q.t.p.$ $t \geq 0$ para a função $x(t) \equiv 0$. Como x_n converge pontualmente para a função

$$\widetilde{x}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t = T \\ 0, & \text{se } t \neq T \end{cases},$$

apesar de $\widetilde{x} \notin D_E[0, \infty)$, surge a curiosidade sobre o que acontece com $\lim_{n\to\infty} d(\widetilde{x}, x_x)$. Para analisarmos isso, tomamos $n \in \{1, 2, ...\}$ e $\lambda \in \Lambda$ quaisquer e os fixamos, para verificar o que acontece com $d(\widetilde{x}, x_n, \lambda, u)$, quando u varia.

- Se $0 \leq u \leq T$, então $\lambda(t) \wedge u \leq u \leq T$, $\forall t \geq 0$. Pela definição de $\widetilde{x}$ e de x_n, temos que $\widetilde{x}(t \wedge u) = x_n(\lambda(t) \wedge u)$, $\forall t \geq 0$. Logo, $q(\widetilde{x}(t \wedge u), x_n(\lambda(t) \wedge u)) = 0$, $\forall t \geq 0$, de onde segue que

$$d(\widetilde{x}, x_n, \lambda, u) = \sup_{t\geq 0} q(\widetilde{x}(t \wedge u), x_n(\lambda(t) \wedge u)) = 0$$

- Se $u > T$, como λ é sobrejetora e estritamente crescente, temos que existe $t_0 \geq 0$ tal que $\lambda(t_0) \in (T, T + \frac{1}{n})$ e $t_0 \neq T$, então $t_0 \wedge u \neq T$ e $\lambda(t_0) \wedge u \in (T, T + \frac{1}{n})$. Assim, $\widetilde{x}(t_0 \wedge u) = 0$ e $x_n(\lambda(t_0) \wedge u) = 1$. Logo,

$$1 = q(\widetilde{x}(t_0 \wedge u), x_n(\lambda(t_0) \wedge u)) \leq$$

$$\sup_{t\geq 0} q(\widetilde{x}(t \wedge u), x_n(\lambda(t) \wedge u)) = d(\widetilde{x}, x_n, \lambda, u) \leq 1,$$

de onde segue, que $d(\widetilde{x}, x_n, \lambda, u) = 1$.

Desta forma,

$$d(\widetilde{x}, x_n, \lambda, u) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq u \leq T \\ 1, & \text{se } u > T \end{cases}.$$

E, assim, lembrando que λ e n são quaisquer, temos que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(\widetilde{x}, x_n, \lambda, u) du = \int_T^\infty \mathrm{e}^{-u} du = \mathrm{e}^{-T}, \ \forall \lambda \in \Lambda, \ \forall n \in \{1, 2, ...\},$$

então

$$d(\widetilde{x}, x_n) = \inf_{\lambda\in\Lambda}\left[\gamma(\lambda) \vee \mathrm{e}^{-T}\right] =^{3} \left[\inf_{\lambda\in\Lambda}\gamma(\lambda)\right] \vee \mathrm{e}^{-T} = 0 \vee \mathrm{e}^{-T} = \mathrm{e}^{-T},$$

$\forall n \in \{1, 2, ...\}$. Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} d(\widetilde{x}, x_n) = \mathrm{e}^{-T} \neq 0$.
Na seção 1.4 vamos mostrar que a sequência $\{x_n\}$ não é sequência de Cauchy.

Exemplo 1.5: Seja $r > 0$, vamos definir $\sigma_r : D_E[0,\infty) \to D_E[0,\infty)$ tal que para $x \in D_E(0,\infty)$, temos que

$$\sigma_r(x) = y \in D_E[0,\infty), \quad \text{onde} \quad y(t) = x(t + r),$$

mostraremos que esta função é contínua. Sejam $x \in D_E[0,\infty)$ e a sequência $\{x_n\} \subset D_E[0,\infty)$ tais que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Queremos mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} d(\sigma_r(x_n), \sigma_r(x)) = 0$, para isso vamos utilizar a proposição 1.5 mencionada na observação 1.1. De fato, como $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, temos que existe $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$ e

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le T} r(x_n(t), x(\lambda_n(t))) = 0,$$

$\forall T > 0$. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$\widetilde{\lambda}_n(t) = \begin{cases} \frac{\lambda_n(r)}{r} \cdot t, & \text{se } 0 \le t < r \\ \lambda_n(t) \quad, & \text{se } t \ge r \end{cases} .$$

Observamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\gamma(\widetilde{\lambda}_n) = \gamma(\lambda_n) \vee \left| \log \frac{\lambda_n(r)}{r} \right| .$$

Assim, pelo fato de $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$, da observação 1.4 (veja seção 1.3), também, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n(r) = r$. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(\widetilde{\lambda}_n) = 0$. Dado $T > 0$, analisamos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le T} r\left(\sigma_r\left(x_n(t)\right), \sigma_r\left(x\left(\widetilde{\lambda}_n(t)\right)\right)\right)$$

[3]Afirmação A.3 - veja no apêndice.

$$= {}^4 \lim_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le T} r\left(x_n(t+r), x\left(\widetilde{\lambda}_n(t+r)\right)\right) = {}^5 \lim_{n\to\infty} \sup_{r\le s\le T+r} r\left(x_n(s), x\left(\widetilde{\lambda}_n(s)\right)\right)$$

$$= {}^6 \lim_{n\to\infty} \sup_{r\le s\le T+r} r\left(x_n(s), x\left(\lambda_n(s)\right)\right) \le \lim_{n\to\infty} \sup_{0\le s\le T+r} r\left(x_n(s), x\left(\lambda_n(s)\right)\right) = 0$$

e obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le T} r\left(\sigma_r\left(x_n(t)\right), \sigma_r\left(x\left(\widetilde{\lambda}_n(t)\right)\right)\right) = 0.$$

Logo, utilizando novamente a proposição 1.5, temos que $\lim_{n\to\infty} d(\sigma_r(x_n), \sigma_r(x)) = 0$. Portanto σ_r é contínua.

Exemplo 1.6: Seja X uma cadeia de Markov com tempo contínuo e estados discretos em $\{1,2\}$. Vamos analisar que a função característica de $X_0 = 2$, $I_{X_0=2} : D_E[0,\infty) \to \{0,1\}$, é contínua. De fato, sejam $\omega \in D_E[0,\infty)$ e a sequência $\{\omega_n\} \subset D_E[0,\infty)$ tais que $\lim_{n\to\infty} d(\omega_n, \omega) = 0$. Queremos mostrar que $\lim_{n\to\infty} I_{X_0=2}(\omega_n) = I_{X_0=2}(\omega)$. Como $\lim_{n\to\infty} d(\omega_n,\omega) = 0$, da proposição 1.5, temos que existe $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ tal que $\lim_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$ e

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le T} r(\omega_n(t), \omega(\lambda_n(t))) = 0, \ \ \forall T > 0.$$

E, como

$$r(\omega_n(0), \omega(0)) = r(\omega_n(0), \omega(\lambda_n(0))) \le \sup_{0\le t\le T} r(\omega_n(t), \omega(\lambda_n(t))), \ \ \forall T > 0,$$

temos que $\lim_{n\to\infty} r(\omega_n(0), \omega(0)) = 0$. Recordamos que a métrica r que estamos considerando nestes exemplos é a métrica $0-1$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r(\omega_n(0), \omega(0)) = 0$, $\forall n \ge n_0$, ou melhor, $\omega_n(0) = \omega(0)$, $\forall n \ge n_0$. Assim, $I_{X_0=2}(\omega_n) = I_{X_0=2}(\omega)$, $\forall n \ge n_0$, o que implica

$$\lim_{n\to\infty} I_{X_0=2}(\omega_n) = I_{X_0=2}(\omega).$$

Portanto, $I_{X_0=2}$ é contínua.

[4] Usamos a definição de σ_r e lembramos que $x \circ \widetilde{\lambda}_n \in D_E[0,\infty)$.

[5] Mudança de variável $s = t + r$.

[6] Lembramos que $\widetilde{\lambda}_n(t) = \lambda_n(t)$, $\forall t \ge r$.

1.3 A métrica de Skorohod

Agora vamos provar que d, cuja definição é dada por (1.2), é métrica. Para isso, demostraremos os seguintes lemas e proposições:

Lema 1.3 *Dadas* $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n \subset D_E[0,\infty)$.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\{\lambda_n\}\subset\Lambda \ \textit{tal que} \ \lim\limits_{n\to\infty}\gamma(\lambda_n)=0 \ \ e \\ \lim\limits_{n\to\infty} m(\{u\in[0,u_0]; d(x_n,y_n,\lambda_n,u)\geq\varepsilon\})=0, \\ \forall\varepsilon>0 \text{ e } \forall u_0>0, \end{cases}$$

onde m é a medida de Lebesgue.

Demonstração

($\Leftarrow$) Supomos que $\exists\{\lambda_n\}\subset\Lambda$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma(\lambda_n)=0$ e

$$\lim_{n\to\infty} m(\{u\in[0,u_0]; d(x_n,y_n,\lambda_n,u)\geq\varepsilon\})=0,\ \forall\varepsilon>0 \ e \ \forall u_0>0.$$

Queremos provar que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0$, onde

$$d(x_n,y_n)=\inf_{\lambda\in\Lambda}\left[\gamma(\lambda)\vee\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}d(x_n,y_n,\lambda,u)du\right].$$

Dado $\varepsilon>0$, tomamos $u_0>0$ tal que

$$\int_{u_0}^\infty \mathrm{e}^{-u}d(x_n,y_n,\lambda_n,u)\,du \leq \int_{u_0}^\infty \mathrm{e}^{-u}du=\mathrm{e}^{-u_0}<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.6}$$

Definimos

$$A_n=\{u\in[0,u_0]; d(x_n,y_n,\lambda_n,u)\geq\varepsilon/4\},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Da hipótese existe $n_1=n_1(\varepsilon,u_0)\in\mathbb{N}$ tal que

$$m(A_n)=m(\{u\in[0,u_0]; d(x_n,y_n,\lambda_n,u)\geq\varepsilon/4\})<\varepsilon/4,\ \ \forall n\geq n_1.$$

Desta forma, obtemos

$$\int_0^{u_0}\mathrm{e}^{-u}d(x_n,y_n,\lambda_n,u)\,du$$

$$= \int_0^{u_0} \mathrm{e}^{-u} \chi_{A_n} d(x_n, y_n, \lambda_n, u)\, du + \int_0^{u_0} \mathrm{e}^{-u} \chi_{A_n^c} d(x_n, y_n, \lambda_n, u)\, du$$

$$\leq \int_0^{u_0} \chi_{A_n}\, du + \frac{\varepsilon}{4} \int_0^{u_0} \mathrm{e}^{-u}\, du = m(A_n) + \frac{\varepsilon}{4}\left(1 - \mathrm{e}^{-u_0}\right) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad (1.7)$$

onde χ_{A_n} é a função característica de A_n, $\forall n \geq n_1$. De (1.6) e (1.7) podemos avaliar que

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u} d(x_n, y_n, \lambda_n, u)\, du$$

$$= \int_0^{u_0} \mathrm{e}^{-u} d(x_n, y_n, \lambda_n, u)\, du + \int_{u_0}^{\infty} \mathrm{e}^{-u} d(x_n, y_n, \lambda_n, u)\, du < \varepsilon.$$

Também, das hipóteses, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$, então existe $n_2 = n_2(\varepsilon_1) \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma(\lambda_n) < \varepsilon$, $\forall n \geq n_2$.
Tomamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e obtemos que

$$\gamma(\lambda_n) \vee \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u} d(x_n, y_n, \lambda_n, u)\, du < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

Logo,

$$d(x_n, y_n) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \left[\gamma(\lambda) \vee \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u} d(x_n, y_n, \lambda, u)\, du\right]$$

$$\leq \gamma(\lambda_n) \vee \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u} d(x_n, y_n, \lambda_n, u)\, du < \varepsilon, \ \ \forall n \geq n_0.$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$.

($\Rightarrow$) Supomos que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Devemos mostrar que existe $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} m(\{u \in [0, u_0]; d(x_n, y_n, \lambda_n, u) \geq \varepsilon\}) = 0$, $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall u_0 > 0$. Seja $n \in \mathbb{N}$. Como

$$d(x_n, y_n) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \left[\gamma(\lambda) \vee \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u} d(x_n, y_n, \lambda, u)\, du\right] < d(x_n, y_n) + \frac{1}{n},$$

temos que existe $\lambda_n \in \Lambda$ tal que

$$\left[\gamma(\lambda_n) \vee \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u} d(x_n, y_n, \lambda_n, u)\, du\right] < d(x_n, y_n) + \frac{1}{n}. \qquad (1.8)$$

Observamos que

$$0 \leq \gamma(\lambda_n) \leq \left[\gamma(\lambda_n) \vee \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u} d(x_n, y_n, \lambda_n, u)\, du\right] < d(x_n, y_n) + \frac{1}{n},$$

então $\lim_{n\to\infty}\gamma(\lambda_n)=0$. Assim, só está faltando provar que

$$\lim_{n\to\infty} m(\{u\in[0,u_0]; d(x_n,y_n,\lambda_n,u)\geq\varepsilon\})=0,\quad \forall\varepsilon>0 \text{ e } \forall u_0>0.$$

Vamos fazer a prova deste fato por contradição. Supomos que existem $u_0>0$ e $\varepsilon_0>0$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} m(\{u\in[0,u_0]; d(x_n,y_n,\lambda_n,u)\geq\varepsilon_0\})>0,$$

então existem $\alpha>0$ e $n_1\in\mathbb{N}$ tais que

$$m(\{u\in[0,u_0]; d(x_n,y_n,\lambda_n,u)\geq\varepsilon_0\})\geq\alpha>0,\quad \forall n\geq n_1.$$

Vamos denotar

$$B_n=\{u\in[0,u_0]; d(x_n,y_n,\lambda_n,u)\geq\varepsilon_0\},\ \forall n\geq n_1$$

$$\Rightarrow m(B_n)\geq\alpha>0,\ \forall n\geq n_1.$$

Notamos que

$$0\leq\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}d(x_n,y_n,\lambda_n,u)\,du$$

$$\leq\gamma(\lambda_n)\vee\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}d(x_n,y_n,\lambda_n,u)\,du<{}^{7}d(x_n,y_n)+\frac{1}{n},$$

então da hipótese temos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}d(x_n,y_n,\lambda_n,u)\,du=0.$$

Assim, existe $n_2\in\mathbb{N}$ tal que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}d(x_n,y_n,\lambda_n,u)\,du<\varepsilon_0\mathrm{e}^{-u_0}\alpha,\ \forall n\geq n_2.$$

[7] De (1.8).

Tomamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $\forall n \geq n_0$ vale

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 \mathrm{e}^{-u_0}\alpha &> \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x_n, y_n, \lambda_n, u)\, du \\
&= \int_0^{u_0} \mathrm{e}^{-u} d(x_n, y_n, \lambda_n, u)\, du + \int_{u_0}^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x_n, y_n, \lambda_n, u)\, du \\
&\geq \int_0^{u_0} \mathrm{e}^{-u} d(x_n, y_n, \lambda_n, u)\, du \\
&\geq \int_0^{u_0} \mathrm{e}^{-u} \chi_{B_n}(u) d(x_n, y_n, \lambda_n, u)\, du \\
&\geq \varepsilon_0 \int_0^{u_0} \mathrm{e}^{-u} \chi_{B_n}(u) du \\
&\geq \varepsilon_0 \mathrm{e}^{-u_0} \int_0^{u_0} \chi_{B_n}(u) du \\
&= \varepsilon_0 \mathrm{e}^{-u_0} m(B_n) \\
&\geq \varepsilon_0 \mathrm{e}^{-u_0} \alpha.
\end{aligned}$$

Chegamos a um absurdo, o que nos leva concluir que nossa suposição era falsa. E, portanto, $\lim_{n\to\infty} m(\{u \in [0, u_0]; d(x_n, y_n, \lambda_n, u) \geq \varepsilon\}) = 0$, $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall u_0 > 0$, o que completa a nossa demonstração.

$\square$

Lema 1.4 *Seja* $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$, *então*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |\lambda_n(t) - t| = 0, \ \forall T > 0.$$

Demonstração

Sejam $T > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, fixamos n temporariamente. Como λ_n é Lipschitz em $[0, \infty)$, podemos supor que c_n seja constante de Lipschitz de λ_n em $[0, \infty)$. Então existe constante $c_n + 1$ tal que $\forall t, s \in [0, \infty)$, temos

$$\begin{aligned}
|(\lambda_n - Id)(t) - (\lambda_n - Id)(s)| &= |\lambda_n(t) - t - \lambda_n(s) + s| \\
&\leq |\lambda_n(t) - \lambda_n(s)| + |t - s| \\
&\leq c_n|t - s| + |t - s| \\
&= (c_n + 1)|t - s|,
\end{aligned}$$

ou seja, $\lambda_n - Id$ é Lipschitz em $[0, \infty)$. Por [6] página 161, temos que $\lambda_n - Id$ é absolutamente contínua em $[0, T]$. Seja $t \in [0, T]$, vamos fixá-lo temporariamente. De [6] página 166, temos que

$$\lambda_n(t) - t = (\lambda_n(t) - t) - (\lambda_n(0) - 0) = \int_0^t (\lambda_n(s) - s)' ds = \int_0^t (\lambda_n'(s) - 1) ds. \tag{1.9}$$

Assim, de (1.9) e de [7] página 43, temos que

$$|\lambda_n(t) - t| = \left| \int_0^t (\lambda_n'(s) - 1) ds \right| \leq \int_0^t |\lambda_n'(s) - 1| \, ds.$$

De [8] teorema 20.14 página 347, temos que

$$|\lambda_n'(s) - 1| \leq \sup_{0 \leq s \leq T} \text{ess} \; |\lambda_n'(s) - 1|, \text{ em } q.t.p. \; s \in [0, T]$$

e por [5] página 83, obtemos

$$\int_0^t |\lambda_n'(s) - 1| \, ds \leq \int_0^t \sup_{0 \leq s \leq T} \text{ess} \; |\lambda_n'(s) - 1| \, ds = t. \left[\sup_{0 \leq s \leq T} \text{ess} \; |\lambda_n'(s) - 1| \right].$$

Logo,

$$|\lambda_n(t) - t| \leq t. \left[\sup_{0 \leq s \leq T} \text{ess} \; |\lambda_n'(s) - 1| \right]. \tag{1.10}$$

Fazemos variar $t \in [0, T]$ e observamos que (1.10) vale para todo $t \in [0, T]$, então tomamos o supremo sobre $t \in [0, T]$ e obtemos

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\lambda_n(t) - t| \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \left\{ t. \left[\sup_{0 \leq s \leq T} \text{ess} \; |\lambda_n'(s) - 1| \right] \right\} = T. \left[\sup_{0 \leq s \leq T} \text{ess} \; |\lambda_n'(s) - 1| \right]. \tag{1.11}$$

Agora, variamos n e notamos que (1.11) vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que

$$\lim_{n \to \infty} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} \text{ess} \; |\lambda_n'(s) - 1| \right] = 0.$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\varepsilon_0 > 0$ tal que $(\mathrm{e}^{\varepsilon_0} - 1) \vee (1 - \mathrm{e}^{-\varepsilon_0}) < \varepsilon$.

Como $\gamma(\lambda_n) = \sup_{t \geq 0} \text{ess} \; |\log \lambda_n'(t)| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, temos que $\exists n_0 \geq 0$ tal que

$$\begin{array}{rcl}
 & \sup_{t \geq 0} \text{ess} |\log \lambda_n'(t)| < \varepsilon_0, & \forall n \geq n_0 \\
\Rightarrow & |\log \lambda_n'(t)| < \varepsilon_0 & \text{em } q.t.p. \; t \geq 0 \text{ e } \forall n \geq n_0 \\
\Rightarrow & -\varepsilon_0 < \log \lambda_n'(t) < \varepsilon_0 & \text{em } q.t.p. \; t \geq 0 \text{ e } \forall n \geq n_0 \\
\Rightarrow & \mathrm{e}^{-\varepsilon_0} < \lambda_n'(t) < \mathrm{e}^{\varepsilon_0} & \text{em } q.t.p. \; t \geq 0 \text{ e } \forall n \geq n_0
\end{array}$$

$$\Rightarrow |\lambda_n'(t)-1| = \begin{cases} \lambda_n'(t)-1 < \mathrm{e}^{\varepsilon_0}-1 < \varepsilon \\ 1-\lambda_n'(t) < 1-\mathrm{e}^{-\varepsilon_0} < \varepsilon \end{cases} \quad \text{em } q.t.p.\ t \geq 0 \text{ e } \forall n \geq n_0.$$

Assim,

$$\sup_{t\geq 0} \text{ess } |\lambda_n'(t)-1| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0$$

E, como,

$$\sup_{0\leq s\leq T} \text{ess } |\lambda_n'(s)-1| \leq \sup_{t\geq 0} \text{ess } |\lambda_n'(t)-1|,$$

temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{0\leq s\leq T} \text{ess } |\lambda_n'(s)-1|\right] = 0.$$

Portanto, desta afirmação e de (1.11), temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T} |\lambda_n(t)-t| = 0.$$

□

Observação 1.3: Do lema 1.4 temos que se $\lim_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$, então λ_n converge uniformemente à identidade em intervalos limitados. Já que, dado $[a,b] \subset [0,\infty)$. Seja $t \in [a,b]$, temos que

$$|\lambda_n(t)-t| \leq \sup_{a\leq t\leq b} |\lambda_n(t)-t| \leq \sup_{0\leq t\leq b} |\lambda_n(t)-t|,\ \ \forall n \geq n_0.$$

Dado $\varepsilon > 0$, do lema 1.4, temos que existe $n_0 = n_0(\varepsilon, b) \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{0\leq t\leq b} |\lambda_n(t)-t| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Assim, $\forall t \in [a,b]$ vale

$$|\lambda_n(t)-t| \leq \sup_{0\leq t\leq b} |\lambda_n(t)-t| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0.$$

Note que n_0 não depende de t, então temos convergência uniforme de λ_n à função identidade no intervalo $[a,b]$.

Observação 1.4: Se $\lim_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$, então λ_n converge pontualmente à identidade. De fato, dado $t \geq 0$, tomamos $[a,b] \subset [0,\infty)$ tal que $t \in [a,b]$. Da observação 1.3, temos que λ_n converge uniformemente à identidade em $[a,b]$, então $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(t) = t$.

Lema 1.5 *Dados $x, y \in D_E[0,\infty)$.*

$$d(x,y,\lambda,u) = d(y,x,\lambda^{-1},u), \ \ \forall\lambda\in\Lambda \ e \ \forall u \geq 0.$$

Demonstração

Dados $x, y \in D_E[0,\infty)$, $\lambda \in \Lambda$ e $u \geq 0$, vamos fixá-los temporariamente. Primeiro observamos que existe λ^{-1}, pois λ é sobrejetora e estritamente crescente. Seja $t \geq 0$, denotamos $\lambda(t) = s \geq 0$, então $t = \lambda^{-1}(s) \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} d(x,y,\lambda,u) &= \sup_{t\geq 0} q(x(t\wedge u), y(\lambda(t)\wedge u)) \\ &= \sup_{\lambda^{-1}(s)\geq 0} q(x(\lambda^{-1}(s)\wedge u), y(\lambda(\lambda^{-1}(s))\wedge u)) \\ &=^{8} \sup_{s\geq 0} q(x(\lambda^{-1}(s)\wedge u), y(s\wedge u)) =^{9} \sup_{t\geq 0} q(x(\lambda^{-1}(t)\wedge u), y(t\wedge u)). \\ &=^{10} \sup_{t\geq 0} q(y(t\wedge u), x(\lambda^{-1}(t)\wedge u)) = d(y,x,\lambda^{-1},u). \end{aligned}$$

□

Lema 1.6 *Se $\lambda \in \Lambda$, então $\gamma(\lambda) = \gamma(\lambda^{-1})$ e $\lambda^{-1} \in \Lambda$.*

Demonstração

- λ^{-1} é estritamente crescente, pois caso contrário existiriam $t < s$ tais que $\lambda^{-1}(t) \geq \lambda^{-1}(s)$, então pelo fato de λ ser estritamente crescente e bijetora, temos que $t = \lambda(\lambda^{-1}(t)) \geq \lambda(\lambda^{-1}(s)) = s$, o que é absurdo.

- λ^{-1} é sobrejetora, pois $\lambda^{-1}([0,\infty)) = \lambda^{-1}(\lambda([0,\infty))) = [0,\infty)$, já que $[0,\infty) = \lambda([0,\infty))$ e λ é bijetora.

- λ^{-1} é lipschitziana, pois das observações acima, temos que $\lambda^{-1} \in \Lambda'$. Como λ^{-1} está bem definida e é contínua e, além disso, existe $\lambda'(t) > 0$ em *q.t.p.* $t \geq 0$, de [2] página 206, temos que

$$|\log\lambda'(t)| = |-\log\lambda'(t)| = \left|\log\frac{1}{\lambda'(t)}\right| = \left|\log(\lambda^{-1})'(\lambda(t))\right|, \quad (1.12)$$

[8]Como λ está fixo o supremo pode ser tomado em $s \geq 0$ e λ é bijetora.

[9]Somente mudança de notação, i.e., $s = t$.

[10]$q(A,B) = q(B,A)$, $\forall A, B \in E$, pois $q = r \wedge 1$ e r é métrica.

em $q.t.p.$ $t \geq 0$. Assim,

$$\log(\lambda^{-1})'(t) \leq \left|\log(\lambda^{-1})'(t)\right| =^{11} \left|\log(\lambda^{-1})'(\lambda(s))\right| =^{12} |\log\lambda'(s)| \leq \gamma(\lambda),$$

em $q.t.p.$ $t \geq 0$, então

$$(\lambda^{-1})'(t) \leq \mathrm{e}^{\gamma(\lambda)} = \text{constante, em } q.t.p. \ t \geq 0. \tag{1.13}$$

Dados $t, s \in [0, \infty)$, supomos que $t < s$. De acordo com a definição de função de variação limitada, temos que λ^{-1} é de variação limitada em $[t, s]$[13]. De [5] páginas 83 e 106 e de (1.13), temos que

$$|\lambda^{-1}(s) - \lambda^{-1}(t)| = \lambda^{-1}(s) - \lambda^{-1}(t) = \int_t^s (\lambda^{-1})'(\tau)d\tau$$

$$\leq \mathrm{e}^{\gamma(\lambda)}\int_t^s d\tau = \mathrm{e}^{\gamma(\lambda)}|s - t|.$$

Logo, λ^{-1} é lipschitziana.

- $\gamma(\lambda^{-1}) = \gamma(\lambda)$, pois

$$\gamma(\lambda^{-1}) = \sup_{t\geq 0}\text{ess} \ \left|\log\left(\lambda^{-1}\right)'(t)\right| =^{14} \sup_{t\geq 0}\text{ess} \ |\log\lambda'(s)| = \gamma(\lambda).$$

- $\gamma(\lambda^{-1}) < \infty$, pois $\gamma(\lambda^{-1}) = \gamma(\lambda) < \infty$

[11]Como λ é sobrejetora, temos que existe $s \geq 0$ tal que $t = \lambda(s)$.

[12]De (1.12).

[13]Dada uma partição $P = \{t = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_k = s\}$ de $[t, s]$, temos que

$$\sum_{i=1}^{k} |\lambda^{-1}(\tau_i) - \lambda^{-1}(\tau_{i-1})| = \lambda^{-1}(\tau_1) - \lambda^{-1}(\tau_0) + \lambda^{-1}(\tau_2) - \lambda^{-1}(\tau_1) + ...$$

$$+\lambda^{-1}(\tau_k) - \lambda^{-1}(\tau_{k-1}) = \lambda^{-1}(b) - \lambda^{-1}(a),$$

então o supremo sobre todas as partições P de $[s, t]$ nos dá a variação de λ^{-1} em $[t, s]$,

$$\sup_P \sum_{i=1}^{k} |\lambda^{-1}(\tau_i) - \lambda^{-1}(\tau_{i-1})| = \sup_P \left[\lambda^{-1}(b) - \lambda^{-1}(a)\right] = \lambda^{-1}(b) - \lambda^{-1}(a),$$

que é limitada.

[14]De (1.12), com $t = \lambda(s)$.

Portanto, destas observações, concluímos que $\lambda^{-1} \in \Lambda$ e $\gamma(\lambda^{-1}) = \gamma(\lambda)$.

$\square$

Proposição 1.1 *Dados $x, y \in D_E[0,\infty)$, temos $d(x,y) = d(y,x)$*

Demonstração

$$d(x,y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \left[\gamma(\lambda) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x,y,\lambda,u) du \right]$$

$$= ^{15} \inf_{\lambda^{-1} \in \Lambda} \left[\gamma(\lambda^{-1}) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(y,x,\lambda^{-1},u) du \right] = d(y,x)$$

$\square$

Proposição 1.2 *Dados $x, y \in D_E[0,\infty)$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.*

Demonstração

$\Rightarrow$ Supomos que $d(x,y) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$. Seja t_0 um ponto de continuidade de y e o fixamos. Queremos mostrar que $q(x(t_0), y(t_0)) < \varepsilon$. Tomamos T tal que $t_0 \vee \lambda_n(t_0) < T$, $\forall n \in \mathbb{N}$, podemos fazer isso, pois $\{\lambda_n(t_0)\}_n$ é uma sequência convergente. Consideramos $x_n = x$ e $y_n = y$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x,y) = d(x,y) = 0.$$

Pelo lema 1.3, temos que existe $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ tal que $\lim_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} m(\{u \in [0,T]; d(x,y,\lambda_n,u) \geq \varepsilon_0\}) = 0$, $\forall \varepsilon_0 > 0$, ou seja, a sequência de funções de variável u, $\{d(x,y,\lambda_n,u)\}_n$, converge em medida no intervalo $[0,T]$. De [6] página 92, temos que existe $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ tal que $\forall u \in [0,T]$, temos $\lim_{n_k\to\infty} d(x,y,\lambda_{n_k},u) = 0$ (convergência em *q.t.p.* $t \in [0,T]$ de uma subsequência de $\{d(x,y,\lambda_n,u)\}_n$). Tomamos $u_0 \in [0,T]$ tal que $t_0 \vee \lambda_n(t_0) < u_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n_k\to\infty} d(x,y,\lambda_{n_k},u_0) = 0$, então existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x,y,\lambda_{n_k},u_0) < \varepsilon/2, \ \forall n_k \geq n_1. \tag{1.14}$$

[15] Dos lemas 1.5 e 1.6.

Como t_0 é um ponto de continuidade de y, temos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall s \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \text{ temos } q(y(s), y(t_0)) < \varepsilon/2. \tag{1.15}$$

E, pelo fato de $\lim_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$, o lema 1.4 nos diz que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le T} |\lambda_n(t) - t| = 0.$$

Assim, $\lim_{n_k\to\infty} \sup_{0\le t\le T} |\lambda_{n_k}(t) - t| = 0$ e já que $t_0 \in [0,T]$, temos que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\lambda_{n_k}(t_0) - t_0| < \delta, \ \forall n_k \ge n_2. \tag{1.16}$$

Por (1.15) e (1.16), temos que

$$q(y(\lambda_{n_k}(t_0)), y(t_0)) < \varepsilon/2, \ \forall n_k \ge n_2 \tag{1.17}$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, então de (1.14) e de (1.17) vale que

$$d(x, y, \lambda_{n_k}, u_0) < \varepsilon/2 \text{ e } q(y(\lambda_{n_k}(t_0)), y(t_0)) < \varepsilon/2, \ \forall n_k \ge n_0. \tag{1.18}$$

Assim,

$$\begin{aligned} q(x(t_0), y(t_0)) &\le q(x(t_0), y(\lambda_{n_k}(t_0) \wedge u_0)) + q(y(\lambda_{n_k}(t_0) \wedge u_0), y(t_0)) \\ &=^{16} q(x(t_0 \wedge u_0), y(\lambda_{n_k}(t_0) \wedge u_0)) + q(y(\lambda_{n_k}(t_0)), y(t_0)) \\ &\le^{17} d(x, y, \lambda_{n_k}, u_0) + q(y(\lambda_{n_k}(t_0)), y(t_0)) \\ &<^{18} \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \ \forall n_k \ge n_0. \end{aligned}$$

Como ε é qualquer obtemos que $q(x(t_0), y(t_0)) = 0$. Lembre que $q = r \wedge 1$, onde (E, r) é espaço métrico, então $x(t_0) = y(t_0)$. Desta forma, $x(t) = y(t)$, $\forall t \ge 0$ que é ponto de continuidade de y.

Seja, agora, t_1 ponto de descontinuidade de y. Vamos mostrar que $q(x(t_1), y(t_1)) < \varepsilon$. Como x e y são contínuas à direita, temos que existe

[16] $u_0 > t_0 \vee \lambda_n(t_0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

[17] $d(x, y, \lambda_{n_k}, u_0) = \sup_{t\ge 0} q(x(t \wedge u_0), y(\lambda_{n_k}(t) \wedge u_0))$.

[18] De (1.18).

$\delta_0 > 0$ tal que $\forall s \in (t_1, t_1+\delta_0)$ vale $q(x(t_1), x(s)) < \varepsilon/2$ e $q(y(s), y(t_1)) < \varepsilon/2$. Do lema 1.1 as descontinuidades de y são enumeráveis, então existe $t_1 + \delta \in (t_1, t_1 + \delta_0)$ que é um ponto de continuidade de y. Em particular, $q(x(t_1), x(t_1 + \delta)) < \varepsilon/2$ e $q(y(t_1 + \delta), y(t_1)) < \varepsilon/2$. E, pelo fato de $t_1 + \delta$ ser ponto de continuidade de y, temos pelo o que fizemos na primeira parte desta demonstração que $x(t_1 + \delta) = y(t_1 + \delta)$. Logo, $q(x(t_1 + \delta), y(t_1 + \delta)) = 0$. Assim,

$$q(x(t_1), y(t_1)) \leq q(x(t_1), x(t_1+\delta)) + q(x(t_1+\delta), y(t_1+\delta)) + q(y(t_1+\delta), y(t_1)) < \varepsilon.$$

Portanto, $x(t) = y(t)$, $\forall t \geq 0$.

$\Leftarrow$ Supomos que $x = y$.

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x,y) &= \inf_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \gamma(\lambda) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x,y,\lambda,u) du \right\} \\ &\leq \gamma(Id) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x,y,Id,u) du = 0, \end{aligned}$$

pois

$$\gamma(Id) = \sup_{s > t \geq 0} \left| \log \frac{s-t}{s-t} \right| = 0$$

e

$$d(x,y,Id,u) = \sup_{t \geq 0} q(x(t \wedge u), y(t \wedge u)) = 0, \ \ \forall u \geq 0.$$

Portanto, $d(x,y) = 0$.

$\square$

Lema 1.7 *Sejam* $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, *então* $\lambda_1 \circ \lambda_2 \in \Lambda$ *e* $\gamma(\lambda_1 \circ \lambda_2) \leq \gamma(\lambda_1) + \gamma(\lambda_2)$.

Demonstração

- $\lambda_1 \circ \lambda_2 \left([0,\infty)\right) = \lambda_1 \left(\lambda_2 \left([0,\infty)\right)\right) = \lambda_1 \left([0,\infty)\right) = [0,\infty)$, então $\lambda_1 \circ \lambda_2$ é sobrejetora.

- Sejam $t, s \in [0,\infty)$ tais que $t < s$. Como λ_1, λ_2 são estritamente crescentes, temos que $t < s \Rightarrow \lambda_2(t) < \lambda_2(s) \Rightarrow \lambda_1\left(\lambda_2(t)\right) < \lambda_1\left(\lambda_2(s)\right)$. Logo, $\lambda_1 \circ \lambda_2$ é estritamente crescente.

- Como λ_1, λ_2 são funções Lipschitz, temos que existem constantes c_1, c_2 tais que $|\lambda_1(s) - \lambda_1(t)| \leq c_1|s-t|$ e $|\lambda_2(s) - \lambda_2(t)| \leq c_2|s-t|$, $\forall t, s \in [0, \infty)$, então $|\lambda_1(\lambda_2(s)) - \lambda_1(\lambda_2(t))| \leq c_1|\lambda_2(s) - \lambda_2(t)| \leq c_2c_1|s-t|$, $\forall t, s \in [0, \infty)$. Assim, $\lambda_1 \circ \lambda_2$ é Lipschitz.

- Agora, vamos analisar

$$\gamma(\lambda_1 \circ \lambda_2) = \sup_{s>t\geq 0} \left| \log \frac{\lambda_1(\lambda_2(s)) - \lambda_1(\lambda_2(t))}{s-t} \right|$$

$$= \sup_{s>t\geq 0} \left| \log \left[\frac{\lambda_1(\lambda_2(s)) - \lambda_1(\lambda_2(t))}{\lambda_2(s) - \lambda_2(t)} \cdot \frac{\lambda_2(s) - \lambda_2(t)}{s-t} \right] \right|$$

$$= \sup_{s>t\geq 0} \left| \log \left[\frac{\lambda_1(\lambda_2(s)) - \lambda_1(\lambda_2(t))}{\lambda_2(s) - \lambda_2(t)} \right] + \log \left[\frac{\lambda_2(s) - \lambda_2(t)}{s-t} \right] \right|$$

$$\leq \sup_{s>t\geq 0} \left| \log \left[\frac{\lambda_1(\lambda_2(s)) - \lambda_1(\lambda_2(t))}{\lambda_2(s) - \lambda_2(t)} \right] \right| + \sup_{s>t\geq 0} \left| \log \left[\frac{\lambda_2(s) - \lambda_2(t)}{s-t} \right] \right|$$

$$=^{19} \sup_{\lambda_2^{-1}(v)>\lambda_2^{-1}(u)\geq 0} \left| \log \left[\frac{\lambda_1(v) - \lambda_1(u)}{v-u} \right] \right| + \sup_{s>t\geq 0} \left| \log \left[\frac{\lambda_2(s) - \lambda_2(t)}{s-t} \right] \right|$$

$$=^{20} \sup_{v>u\geq 0} \left| \log \left[\frac{\lambda_1(v) - \lambda_1(u)}{v-u} \right] \right| + \sup_{s>t\geq 0} \left| \log \left[\frac{\lambda_2(s) - \lambda_2(t)}{s-t} \right] \right|$$

$$= \gamma(\lambda_1) + \gamma(\lambda_2)$$

- Como $\gamma(\lambda_1 \circ \lambda_2) \leq \gamma(\lambda_1) + \gamma(\lambda_2)$, $\gamma(\lambda_1) < \infty$ e $\gamma(\lambda_2) < \infty$, temos que $\gamma(\lambda_1 \circ \lambda_2) < \infty$.

Destas observações obtemos que $\lambda_1 \circ \lambda_2 \in \Lambda$ e $\gamma(\lambda_1 \circ \lambda_2) \leq \gamma(\lambda_1) + \gamma(\lambda_2)$.

$\square$

Proposição 1.3 *Dados $x, y, z \in D_E[0, \infty)$ vale a desigualdade triangular, i.e.,*

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

[19] Fazendo a seguinte mudança de variável $\lambda_2(t) = u$ e $\lambda_2(s) = v$.

[20] Como λ_2 está fixa podemos tomar o supremo sobre u e v.

Demonstração

Dados $x, y, z \in D_E[0,\infty)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ e $u \geq 0$. Como

$$d(x,z,\lambda_1 \circ \lambda_2, u) = \sup_{t\geq 0} q(x(t\wedge u), z(\lambda_1(\lambda_2(t)) \wedge u))$$

$$\leq \sup_{t\geq 0} q(x(t\wedge u), y(\lambda_2(t)\wedge u)) + \sup_{t\geq 0} q(y(\lambda_2(t)\wedge u), z(\lambda_1(\lambda_2(t))\wedge u))$$

$$=^{21} \sup_{t\geq 0} q(x(t\wedge u), y(\lambda_2(t)\wedge u)) + \sup_{w\geq 0} q(y(w\wedge u), z(\lambda_1(w)\wedge u))$$

$$= d(x,y,\lambda_2,u) + d(y,z,\lambda_1,u),$$

temos que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x,z,\lambda_1\circ\lambda_2,u)du \leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x,y,\lambda_2,u)du + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(y,z,\lambda_1,u)du. \tag{1.19}$$

Assim,

$$d(x,z) = \inf_{\lambda\in\Lambda}\left\{\gamma(\lambda) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x,z,\lambda,u)du\right\}$$

$$\leq {}^{22}\gamma(\lambda_1\circ\lambda_2) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x,z,\lambda_1\circ\lambda_2,u)du$$

$$\leq {}^{23}\left[\gamma(\lambda_1)+\gamma(\lambda_2)\right] \vee \left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x,y,\lambda_2,u)du + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(y,z,\lambda_1,u)du\right]$$

$$\leq \left[\gamma(\lambda_2) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x,y,\lambda_2,u)du\right] + \left[\gamma(\lambda_1) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(y,z,\lambda_1,u)du\right], \tag{1.20}$$

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Vamos supor por contradição que

$$d(x,z) > d(x,y) + d(y,z).$$

Como

$$d(x,y) = \inf_{\lambda_2\in\Lambda}\left\{\gamma(\lambda_2) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x,y,\lambda_2,u)du\right\}$$

e

$$d(y,z) = \inf_{\lambda_1\in\Lambda}\left\{\gamma(\lambda_1) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(y,z,\lambda_1,u)du\right\},$$

[21] Fizemos a mudança de variável $w = \lambda_2(t)$ e lembramos que λ_2 está fixa.

[22] Esta desigualdade vale $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$.

[23] Do lema 1.7 e de (1.19).

temos que existem $\widetilde{\lambda}_2, \widetilde{\lambda}_1 \in \Lambda$ tais que

$$d(x,z) > \left[\gamma(\widetilde{\lambda}_2) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x,y,\widetilde{\lambda}_2,u)du\right] + \left[\gamma(\widetilde{\lambda}_1) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(y,z,\widetilde{\lambda}_1,u)du\right]. \tag{1.21}$$

De (1.20) temos

$$d(x,z) \leq \left[\gamma(\widetilde{\lambda}_2) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x,y,\widetilde{\lambda}_2,u)du\right] + \left[\gamma(\widetilde{\lambda}_1) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(y,z,\widetilde{\lambda}_1,u)du\right],$$

o que contraria (1.21). Portanto,

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

$\square$

Resumindo o que fizemos até aqui, obtemos que $\forall x,y,z \in D_E[0,\infty)$ valem:

(i) $d(x,y) = \inf_{\lambda\in\Lambda} \left[\gamma(\lambda) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x,y,\lambda,u)du\right] \geq 0$

(ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Da proposição 1.2)

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$ (Da proposição 1.1)

(iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Da proposição 1.3)

Portanto d é métrica no espaço $D_E[0,\infty)$, $\boldsymbol{d}$ é chamada de **métrica de Skorohod**.

1.4 $(D_E[0,\infty), d)$ é completo

A seguir vamos demonstrar o Teorema 1.1 que nos diz que se E é completo, então $(D_E[0,\infty), d)$ é completo. Inicialmente consideraremos os seguintes resultados que serão úteis na demonstração deste teorema.

Afirmação 1.1: *Sejam* $\{x_n\} \subset D_E[0,\infty)$ *e* $x \in D_E[0,\infty)$ *tais que* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$. *Dado* $u \geq 0$. *Então existem* $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ *e* $\{u_n\} \subset (u,\infty)$ *tais que* $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x,\lambda_n,u_n) = 0$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$.

Demonstração

Seja $u \geq 0$ e o fixamos. Como $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$, temos pelo lema 1.3 que $\exists\{\lambda_n\}\subset\Lambda$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma(\lambda_n) = 0$ e

$$\lim_{n\to\infty} m(\{u \in [0,u_0]; d(x_n,x,\lambda_n,u) \geq \varepsilon\})=0, \tag{1.22}$$

$\forall\varepsilon > 0$ e $\forall u_0 > 0$, onde m é a medida de Lebesgue. Primeiramente queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ existe $u_n \in (u,\infty)$ tal que $d(x_n,x,\lambda_n,u_n) < \varepsilon$. Vamos supor por contradição que $\exists\varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists n_k \geq k$ tal que $\forall v \in (u,\infty)$, temos $d(x_{n_k},x,\lambda_{n_k},v) \geq \varepsilon_0$. Assim,

$$m(\{v \in [0,u+1]; d(x_{n_k},x,\lambda_{n_k},v) \geq \varepsilon_0\}) \geq 1, \ \ \forall n_k. \tag{1.23}$$

De onde segue, que

$$\lim_{n\to\infty} m(\{v \in [0,u+1]; d(x_n,x,\lambda_n,v) \geq \varepsilon_0\})$$
$$=^{24} \lim_{n_k\to\infty} m(\{v \in [0,u+1]; d(x_{n_k},x,\lambda_{n_k},v) \geq \varepsilon_0\}) \geq^{25} 1,$$

o que contraria (1.22). Logo, $\exists\{u_n\}_n \subset (u,\infty)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x,\lambda_n,u_n) = 0$. Agora, só falta mostrar que $\exists\{u_n\}_n$ como acima e tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$; vamos raciocinar novamente por contradição. Supomos que $\forall\{u_n\}_n \subset (u,\infty)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x,\lambda_n,u_n) = 0$, temos que $\{u_n\}_n$ é limitada. Supomos, sem perda de generalidade, que existe N_0 tal que para cada $n \geq N_0$, temos $d(x_n,x,\lambda_n,u_n) < 1/n$. Fixamos $n > N_0$, sejam x_n e λ_n fixos e encontramos um $\widetilde{u}_n$ maximal tal que

$$d(x_n,x,\lambda_n,\tilde{u}_n) \leq 1/n.$$

[24] Este limite existe, então o limite de uma subsequência é igual ao da sequência.

[25] De (1.23).

Da nossa suposição, existe $M > 0$ tal que $\widetilde{u}_n < M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então $\exists \varepsilon_1 > 0$ tal que $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists n_k \geq k$ tal que $d(x_{n_k}, x, \lambda_{n_k}, v) \geq \varepsilon_1$, $\forall v \in (M, M+1]$. Assim,

$$m(\{v \in [0, M+1]; d(x_{n_k}, x, \lambda_{n_k}, v) \geq \varepsilon_1\}) \geq 1, \ \ \forall n_k.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} m(\{v \in [0, M+1]; d(x_n, x, \lambda_n, v) \geq \varepsilon_1\})$$
$$= \lim_{n_k\to\infty} m(\{v \in [0, M+1]; d(x_{n_k}, x, \lambda_{n_k}, v) \geq \varepsilon_1\}) \geq 1,$$

o que contraria (1.22). Portanto, $\exists \{u_n\} \subset (u, \infty)$ tal que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x, \lambda_n, u_n)$ $= 0$ e $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$.

$\square$

Afirmação 1.2: *Sejam* $\{x_n\} \subset D_E[0,\infty)$, $x \in D_E[0,\infty)$, $u \geq 0$, $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ *e* $\{u_n\} \subset (u, \infty)$. *Então*

$$\sup_{t\geq 0} q(x(\lambda_n(t \wedge u) \wedge u_n), x(\lambda_n(t) \wedge u))$$

$$\leq \left[\sup_{\lambda_n(u)\wedge u \leq s \leq u} q(x(\lambda_n(u) \wedge u_n), x(s))\right] \vee \left[\sup_{u \leq s \leq \lambda_n(u)\vee u} q(x(s), x(u))\right], \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração

Seja $n \in \mathbb{N}$. Dado $t \geq 0$.

- Se $t > u$, então

$$q(x(\lambda_n(t \wedge u) \wedge u_n), x(\lambda_n(t) \wedge u)) = q(x(\lambda_n(u) \wedge u_n), x(\lambda_n(t) \wedge u))$$

$$= q(x(\lambda_n(u) \wedge u_n), x(s)), \ \text{onde } u \geq s = \lambda_n(t) \wedge u \geq \lambda_n(u) \wedge u.$$

  Logo,

$$q(x(\lambda_n(t \wedge u) \wedge u_n), x(\lambda_n(t) \wedge u)) \leq \sup_{\lambda_n(u)\wedge u \leq s \leq u} q(x(\lambda_n(u) \wedge u_n), x(s)). \tag{1.24}$$

- Se $0 \leq t \leq u$, então

$$\begin{aligned} q(x(\lambda_n(t \wedge u) \wedge u_n), x(\lambda_n(t) \wedge u)) &= q(x(\lambda_n(t) \wedge u_n), x(\lambda_n(t) \wedge u)) \\ &= \begin{cases} q(x(\lambda_n(t)), x(\lambda_n(t))) \ , & \text{se } \lambda_n(t) \leq u < u_n \\ q(x(\lambda_n(t) \wedge u_n), x(u)), & \text{se } \lambda_n(t) > u \end{cases} \\ &\leq q(x(\lambda_n(t) \wedge u_n), x(u)) \leq \sup_{t \geq 0} q(x(\lambda_n(t) \wedge u_n), x(u)) \\ &=^{26} \sup_{u \leq s \leq \lambda_n(u) \vee u} q(x(s), x(u)). \end{aligned}$$

Logo,

$$q(x(\lambda_n(t \wedge u) \wedge u_n), x(\lambda_n(t) \wedge u)) \leq \sup_{u \leq s \leq \lambda_n(u) \vee u} q(x(s), x(u)). \quad (1.25)$$

De (1.24) e de (1.25), temos que

$$q(x(\lambda_n(t \wedge u) \wedge u_n), x(\lambda_n(t) \wedge u)) \leq$$

$$\leq \left[\sup_{\lambda_n(u) \wedge u \leq s \leq u} q(x(\lambda_n(u) \wedge u_n), x(s)) \right] \vee \left[\sup_{u \leq s \leq \lambda_n(u) \vee u} q(x(s), x(u)) \right],$$

$\forall t \geq 0$. Tomamos o supremo em $t \geq 0$ na desigualdade acima e obtemos

$$\sup_{t \geq 0} q(x(\lambda_n(t \wedge u) \wedge u_n), x(\lambda_n(t) \wedge u)) \leq$$

$$\leq \left[\sup_{\lambda_n(u) \wedge u \leq s \leq u} q(x(\lambda_n(u) \wedge u_n), x(s)) \right] \vee \left[\sup_{u \leq s \leq \lambda_n(u) \vee u} q(x(s), x(u)) \right].$$

$\square$

Afirmação 1.3: *Sejam* $\{x_n\} \subset D_E[0, \infty)$, $x \in D_E[0, \infty)$, u *ponto de continuidade de* x, $\{u_n\} \subset (u, \infty)$ *e* $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ *tal que* $\lim_{n \to \infty} \gamma(\lambda_n) = 0$. *Então*

$$\lim_{n \to \infty} \left[\sup_{\lambda_n(u) \wedge u \leq s \leq u} q(x(\lambda_n(u) \wedge u_n), x(s)) \right] = 0$$

[26] Fizemos a mudança de variável $s = \lambda_n(t) \wedge u_n$, onde

$$u \leq s = \lambda_n(t) \wedge u_n \leq \lambda_n(u) \wedge u_n \leq \lambda_n(u) \leq \lambda_n(u) \vee u.$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{u\le s\le\lambda_n(u)\vee u} q(x(s),x(u))\right]=0.$$

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$ e lembrando que u é ponto de continuidade de x, temos que $\exists\delta > 0$ tal que $\forall s \in (u-\delta, u+\delta)$ vale $q(x(s), x(u)) < \varepsilon/4$. Como $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma(\lambda_n) = 0$ e da observação 1.4, temos que $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n(u) = u$. Assim, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n(u) \in (u-\delta, u+\delta)$, $\forall n \geq n_0$. Desta forma, $\lambda_n(u)\wedge u$, $\lambda_n(u)\vee u \in (u-\delta, u+\delta)$, $\forall n \geq n_0$. Fixamos $n \geq n_0$ e tomamos qualquer $s \in [u, \lambda_n(u) \vee u]$, então $s \in (u-\delta, u+\delta)$. Pela continuidade de x em u, temos $q(x(s), x(u)) < \varepsilon/4$. Logo,

$$\sup_{u\le s\le\lambda_n(u)\vee u} q(x(s),x(u)) \le \varepsilon/4 < \varepsilon. \tag{1.26}$$

Agora, tomamos qualquer $s \in [\lambda_n(u)\wedge u, u]$. Como $\lambda_n(u)\wedge u$, $s \in (u-\delta, u+\delta)$ e u é ponto de continuidade de x, temos que

$$q(x(\lambda_n(u)\wedge u_n), x(s)) \le q(x(\lambda_n(u)\wedge u_n), x(u)) + q(x(u), x(s)) < \varepsilon/4+\varepsilon/4 = \varepsilon/2.$$

Assim,

$$\sup_{\lambda_n(u)\wedge u\le s\le u} q(x(\lambda_n(u)\wedge u_n),x(s)) \le \varepsilon/2 < \varepsilon. \tag{1.27}$$

Como (1.26) e (1.27) valem $\forall n \geq n_0$, temos que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{\lambda_n(u)\wedge u\le s\le u} q(x(\lambda_n(u)\wedge u_n),x(s))\right]=0$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{u\le s\le\lambda_n(u)\vee u} q(x(s),x(u))\right]=0.$$

$\square$

Proposição 1.4 *Dados* $\{x_n\} \subset D_E[0,\infty)$ *e* $x \in D_E[0,\infty)$. *Então*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\{\lambda_n\}\subset\Lambda \text{ tal que } \lim\limits_{n\to\infty}\gamma(\lambda_n)=0 \text{ e} \\ \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x,\lambda_n,u)=0,\ \forall u\ge 0, \end{cases}$$

onde u *é ponto de continuidade de* x.

Em particular:
$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, *implica que* $\lim_{n\to\infty} x_n(u) = \lim_{n\to\infty} x_n(u-) = x(u)$, $\forall u \geq 0$, *onde* u *é ponto de continuidade de* x.

Demonstração

($\Leftarrow$) Supomos que existe $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ tal que $\lim_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x, \lambda_n, u) = 0$, $\forall u \geq 0$ que é ponto de continuidade de x. Queremos mostrar que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Do lema 1.1 o conjunto dos pontos de descontinuidade de x é enumerável, logo tem medida de Lebesgue nula. Então $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x, \lambda_n, u) = 0$ em *q.t.p.* $u \geq 0$. E, também, temos que $d(x_n, x, \lambda_n, u) \leq 1$, $\forall n \geq 0$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada [4] página 75, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x_n, x, \lambda_n, u)du = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \inf_{\lambda\in\Lambda} \left[\gamma(\lambda) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x_n, x, \lambda, u)du\right] \\ &\leq \left[\gamma(\lambda_n) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x_n, x, \lambda_n, u)du\right], \ \forall n \geq 0, \end{aligned}$$

tomando o limite quando $n \to \infty$, obtemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) &\leq \lim_{n\to\infty} \left[\gamma(\lambda_n) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x_n, x, \lambda_n, u)du\right] \\ &\leq \left[\lim_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n)\right] \vee \left[\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(x_n, x, \lambda_n, u)du\right] = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

($\Rightarrow$) Supomos $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Seja u um ponto de continuidade de x. Da afirmação 1.1, temos que existem $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ e $\{u_n\} \subset (u, \infty)$ tais que $\lim_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x, \lambda_n, u_n) = 0$. Assim,

$$d(x_n, x, \lambda_n, u) = \sup_{t\geq 0} q(x_n(t \wedge u), x(\lambda_n(t) \wedge u))$$

$$\leq \sup_{t\geq 0} q(x_n(t\wedge u), x(\lambda_n(t\wedge u)\wedge u_n)) + \sup_{t\geq 0} q(x(\lambda_n(t\wedge u)\wedge u_n), x(\lambda_n(t)\wedge u))$$

$$\leq {}^{27} d(x_n, x, \lambda_n, u_n) +$$

$$\left[\sup_{\lambda_n(u)\wedge u\leq s\leq u} q(x(\lambda_n(u)\wedge u_n), x(s))\right] \vee \left[\sup_{u\leq s\leq \lambda_n(u)\vee u} q(x(s), x(u))\right], \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.28}$$

Então

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} d(x_n, x, \lambda_n, u) &\leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, x, \lambda_n, u_n) \\ &+ \left\{\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{\lambda_n(u)\wedge u\leq s\leq u} q(x(\lambda_n(u)\wedge u_n), x(s))\right]\right\} \\ &\vee \left\{\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{u\leq s\leq \lambda_n(u)\vee u} q(x(s), x(u))\right]\right\} \end{aligned} \tag{1.29}$$

Assim, de (1.29) e das afirmações 1.1 e 1.3, obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x, \lambda_n, u) = 0.$$

Agora, só falta analisar que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, implica que $\lim_{n\to\infty} x_n(u) = \lim_{n\to\infty} x_n(u-) = x(u)$, $\forall u \geq 0$, onde u é ponto de continuidade de x. De fato, pelo que provamos acima temos que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, implica que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x, \lambda_n, u) = 0$, $\forall u \geq 0$, onde u é ponto de continuidade de x. Assim, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tal que $\forall n \geq n_0$ vale

$$\varepsilon > d(x_n, x, \lambda_n, u) = \sup_{t\geq 0} q(x_n(t\wedge u), x(\lambda_n(t)\wedge u))$$

$$\geq {}^{28} q(x_n(t_0\wedge u), x(\lambda_n(t_0)\wedge u)) = q(x_n(u), x(u)).$$

[27]Da afirmação 1.2 e $\sup_{t\geq 0} q(x_n(t\wedge u), x(\lambda_n(t\wedge u)\wedge u_n)) \leq \sup_{t\geq 0} q(x_n(t\wedge u_n), x(\lambda_n(t)\wedge u_n)) = d(x_n, x, \lambda_n, u_n)$.

[28]Tomamos $t_0 > 0$ tal que $t_0 > u \vee \lambda_n(u)$, $\forall n \geq n_0$, podemos fazer isso, pois $\{\lambda_n(u)\}$ é uma sequência convergente.

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} x_n(u) = x(u).$$

Ainda resta demonstrar que $\lim_{n\to\infty} x_n(u-) = x(u)$, onde $x_n(u-) = \lim_{t\to u-} x_n(t)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Lembrando que u é ponto de continuidade de x, temos que $\exists \delta > 0$ tal que

$$\forall s \in (u-\delta, u+\delta) \text{ vale } q(x(s), x(u)) < \varepsilon/4. \tag{1.30}$$

Dado $t \in (u-\delta, u)$.

$$\begin{aligned} q(x_n(t), x(u)) &= q(x_n(t\wedge u), x(u)) \\ &\leq q(x_n(t\wedge u), x(\lambda_n(t)\wedge u)) + q(x(\lambda_n(t)\wedge u), x(u)) \\ &\leq d(x_n, x, \lambda_n, u) + q(x(\lambda_n(t)\wedge u), x(u)) \end{aligned} \tag{1.31}$$

Já que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ implica que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x, \lambda_n, u) = 0$, temos que $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1$ vale $d(x_n, x, \lambda_n, u) < \varepsilon/4$. Como $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(t) = t$, temos que $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n(t) \in (u-\delta, u)$, $\forall n \geq n_2$. Assim, de (1.30), temos que $q(x(\lambda_n(t)\wedge u), x(u)) < \varepsilon/4, \forall n \geq n_2$. Tomamos $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $q(x(\lambda_n(t)\wedge u), x(u)) < \varepsilon/4$ e $d(x_n, x, \lambda_n, u) < \varepsilon/4$, $\forall n \geq n_3$. O que juntamente com (1.31), implica que $q(x_n(t), x(u)) < \varepsilon/2$, $\forall n \geq n_3$. Como $x_n(u-) = \lim_{\substack{t\to u \\ t<u}} x_n(t)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists t_n \in (u-\delta, u)$ tal que $q(x_n(u-), x_n(t_n)) < \varepsilon/2$. Assim, $\forall n \geq n_3$, $\exists t_n \in (u-\delta, u)$ tal que

$$q(x_n(u-), x(u)) \leq q(x_n(u-), x_n(t_n)) + q(x_n(t_n), x(u)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,\ \forall n \geq n_3.$$

□

Contra-exemplo: *Este contra-exemplo é para a implicação* ($\Rightarrow$) *da proposição 1.4, quando* u *não é ponto de continuidade de* x*, ou seja, queremos mostrar que existem* x *e* $\{x_n\}$ *em* $D_E[0,\infty)$ *tais que* $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$*, mas para algum ponto* u *de descontinuidade de* x*, temos que* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x, \lambda_n, u) \neq 0$*,* $\forall \{\lambda_n\}_n \subset \Lambda$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$*.*

No exemplo 1.1, mostramos que para $T > 0$, as funções $x, x_n : [0, \infty) \mapsto \{0, 1\}$ definidas por

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < T \\ 1, & \text{se } t \geq T \end{cases},$$

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < T + 1/n \\ 1, & \text{se } t \geq T + 1/n \end{cases}, \quad \text{onde } \ n \in \{1, 2, ...\},$$

são tais que $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$. Tomamos qualquer $\{\lambda_n\}_n \subset \Lambda$ tal que $\lim_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$. Dado $n \in \{1, 2, ...\}$, vamos fixá-lo temporariamente.

$$d(x_n, x, \lambda_n, T) = \sup_{t\geq 0} q(x_n(t \wedge T), x(\lambda_n(t) \wedge T)) \geq q(x_n(t \wedge T), x(\lambda_n(t) \wedge T)),$$

$\forall t \geq 0$. Tomamos $t_n \geq 0$ tal que $t_n \wedge \lambda_n(t_n) \geq T$ (podemos fazer isso, pois $\lim_{t\to\infty} \lambda_n(t) = \infty$). Logo, $x_n(t_n \wedge T) = x_n(T) = 0$ e $x(\lambda_n(t_n) \wedge T) = x(T) = 1$, então

$$d(x_n, x, \lambda_n, T) \geq q(x_n(t_n \wedge T), x(\lambda_n(t_n) \wedge T)) = 1.$$

Variamos n e obtemos que $d(x_n, x, \lambda_n, T) \geq 1$, $\forall n \in \{1, 2, ...\}$. Portanto, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x, \lambda_n, T) \neq 0$, $\forall \{\lambda_n\}_n \subset \Lambda$ tal que $\lim_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$.

$\square$

Exemplo: Com a proposição 1.4 podemos mostrar que a sequência do exemplo 1.4 não é sequência de Cauchy. Supomos que $\exists x \in D_E[0, \infty)$ tal que a sequência $\{x_n\}$ do exemplo 1.4 converge para esta função x na métrica de Skorohod. Pela proposição 1.4, temos que $\lim_{n\to\infty} x_n(u) = \lim_{n\to\infty} x_n(u-) = x(u)$, $\forall u \geq 0$ ponto de continuidade de x, então x_n converge pontualmente à x em todos pontos de continuidade de x. Do lema 1.1, temos que o conjunto dos pontos de continuidade de x tem medida total, ou seja, o conjunto dos pontos de descontinuidade de x tem medida nula. Logo, x_n converge à x em $q.t.p.$ $t \geq 0$, na métrica r, que neste exemplo é

$$r(x_n(t), x(t)) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_n(t) = x(t) \\ 1, & \text{se } x_n(t) \neq x(t) \end{cases}$$

Assim, se $\lim_{n\to\infty} r(x_n(t_0), x(t_0)) = 0$, então dado $\varepsilon \in (0, 1)$ $\exists n_0 \in \{1, 2, ...\}$ tal que $r(x_n(t_0), x(t_0)) < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. De onde segue, que $x_n(t_0) = x(t_0)$,

$\forall n \geq n_0$. Logo, $x(t_0) = 0$ ou $t_0 = T$, pois se $x(t_0) = 1$, então $x_n(t_0) = 1$, $\forall n \geq n_0$, o que implicaria em $t_0 = T$. Desta forma, a função x é nula num conjunto de medida total. Lembrando que x deve ser contínua à direita e ter limite à esquerda, temos que a única função tal que x_n converge em *q.t.p.* $t \geq 0$ para ela é a função $x(t) \equiv 0$. Mas, no exemplo 1.4 mostramos que x_n não converge na métrica de Skorohod à função $x(t) \equiv 0$. Logo, a nossa suposição é falsa. Portanto, $\{x_n\}$ não é uma sequência convergente, então não é uma sequência de Cauchy.

□

Proposição 1.5 *Dados* $\{x_n\} \subset D_E[0,\infty)$ *e* $x \in D_E[0,\infty)$. *Então são equivalentes:*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

(b) *Existe* $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$ *e*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T} r(x_n(t), x(\lambda_n(t))) = 0, \tag{1.32}$$

$\forall T > 0$.

Observação 1.5: Notamos que $\{x_n\} \subset D_E[0,\infty)$, $x \in D_E[0,\infty)$ e $\{\lambda_n^{-1}\}_n \subset \Lambda$ tais que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n^{-1}) = 0$ e

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T} r(x_n(\lambda_n^{-1}(t)), x(t)) = 0,$$

$\forall T > 0$, implicam (b) na proposição 1.5. De fato, primeiramente observamos que do lema 1.6 e da hipóteses, temos $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n^{-1}) = 0$. Seja $T > 0$. Também, observamos que $\forall n \in \mathbb{N}$ vale

$$\sup_{0\leq t\leq T} r(x_n(t), x(\lambda_n(t))) =^{29} \sup_{0\leq s\leq \lambda_n(T)} r(x_n(\lambda_n^{-1}(s)), x(s))$$
$$\leq^{30} \sup_{0\leq s\leq T_0} r(x_n(\lambda_n^{-1}(s)), x(s)).$$

[29] $s = \lambda_n(t)$.

[30] Como $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$, temos que $\{\lambda_n(T)\}$ é uma sequência convergente, então $\exists T_0 > 0$ tal que $\lambda_n(T) \leq T_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T} r(x_n(t), x(\lambda_n(t)) \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq s\leq T_0} r(x_n(\lambda_n^{-1}(s)), x(s)) =^{31} 0.$$

Portanto vale a afirmação (b) da proposição 1.5.

□

Observação 1.6: No apêndice na proposição 1.6 vamos apresentar uma outra afirmação que é equivalente a estas afirmações. Vamos apresentá-la, pois pode ter utilidade prática na hora de demonstrar que uma sequência converge para determinada função.

Demonstração

$(a) \Rightarrow (b)$ Supomos que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Pela afirmação 1.1, temos que existem $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ e $\{u_n\} \subset (u, \infty)$ tais que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x, \lambda_n, u_n)$ $= 0$. Como

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x, \lambda_n, u_n) =^{32} \lim_{n\to\infty} \left[\sup_{t\geq 0} q(x_n(t\wedge u_n), x(\lambda_n(t)\wedge u_n))\right]$$

$$=^{33} \lim_{n\to\infty} \left\{\sup_{t\geq 0} \left[r(x_n(t\wedge u_n), x(\lambda_n(t)\wedge u_n)) \wedge 1\right]\right\} =$$

$$\left\{\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{t\geq 0} r(x_n(t\wedge u_n), x(\lambda_n(t)\wedge u_n))\right]\right\} \wedge 1,$$

temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{t\geq 0} r(x_n(t\wedge u_n), x(\lambda_n(t)\wedge u_n))\right] = 0. \tag{1.33}$$

Dado $T > 0$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ (da afirmação 1.1) e $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n(T) = T$ (da observação 1.4), temos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u_n \geq T \vee \lambda_n(T)$, $\forall n \geq n_0$. Então, para $t \in [0, T]$, vale $r(x_n(t\wedge u_n), x(\lambda_n(t)\wedge u_n)) = r(x_n(t), x(\lambda_n(t)))$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{0\leq t\leq T} r(x_n(t), x(\lambda_n(t)))\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\sup_{0\leq t\leq T} r(x_n(t\wedge u_n), x(\lambda_n(t)\wedge u_n))\right]$$

[31] Da hipótese.

[32] Definição de d em (1.2).

[33] Definição de q em (1.3).

$$\leq \lim_{n\to\infty}\left[\sup_{t\geq 0} r(x_n(t\wedge u_n), x(\lambda_n(t)\wedge u_n))\right].$$

Portanto, por (1.33) temos

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{0\leq t\leq T} r(x_n(t), x(\lambda_n(t)))\right] = 0.$$

$(b) \Rightarrow (a)$ Supomos que existe $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n) = 0$ e (1.32). Seja u um ponto de continuidade de x. Observe que

$$d(x_n, x, \lambda_n, u) = \sup_{t\geq 0} q(x_n(t\wedge u), x(\lambda_n(t)\wedge u))$$

$$\leq \sup_{0\leq t\leq u} q(x_n(t), x(\lambda_n(t)\wedge u_n)) + \sup_{t\geq 0} q(x(\lambda_n(t\wedge u)\wedge u_n), x(\lambda_n(t)\wedge u))$$

$$\leq^{34} \sup_{0\leq t\leq u} q(x_n(t), x(\lambda_n(t)\wedge u_n))$$

$$+\left[\sup_{\lambda_n(u)\wedge u\leq s\leq u} q(x(\lambda_n(u)\wedge u_n), x(s))\right] \vee \left[\sup_{u\leq s\leq \lambda_n(u)\vee u} q(x(s), x(u))\right]$$

$$\leq^{35} \sup_{0\leq t\leq u} q(x_n(t), x(\lambda_n(t)))$$

$$+\left[\sup_{\lambda_n(u)\wedge u\leq s\leq u} q(x(\lambda_n(u)\wedge u_n), x(s))\right] \vee \left[\sup_{u\leq s\leq \lambda_n(u)\vee u} q(x(s), x(u))\right]$$

$$\leq^{36} \sup_{0\leq t\leq u} r(x_n(t), x(\lambda_n(t)))$$

$$+\left[\sup_{\lambda_n(u)\wedge u\leq s\leq u} q(x(\lambda_n(u)\wedge u_n), x(s))\right] \vee \left[\sup_{u\leq s\leq \lambda_n(u)\vee u} q(x(s), x(u))\right]$$

$\forall n \geq n_0$. Assim, de (1.32) e da afirmação 1.3, temos que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x, \lambda_n, u) = 0,$$

---

[34] Da afirmação 1.2.

[35] Como λ_n é estritamente crescente, temos que $\lambda_n(t) \leq \lambda_n(u)$, $\forall t \in [0, u]$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n(u) = u$ e $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$, temos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n(u) \leq u_n$, $\forall n \geq n_0$. Assim, $\lambda_n(t) \wedge u_n = \lambda_n(t)$, $\forall n \geq n_0$.

[36] Lembramos que $q = r \wedge 1$.

então, pela proposição 1.4, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

$\square$

Teorema 1.1: *Se (E, r) é completo, então $(D_E[0,\infty), d)$ é completo.*

Demonstração

Seja $\{x_n\} \subset D_E[0,\infty)$ uma sequência de Cauchy. Vamos mostrar que ela tem subsequência convergente, pois de [3] página 162 teremos que $\{x_n\}$ será convergente. Como $\{x_n\}$ é sequência de Cauchy, temos que dado $k \in \mathbb{N}$, $\exists N_k \geq 1$ tal que para $m, n \geq N_k$, temos

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{2^{k+1}\mathrm{e}^k} \tag{1.34}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $1 \leq N_1 < N_2 < \dots$.

Definimos $y_k = x_{N_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Desta definição e por (1.34) temos

$$d(y_k, y_{k+1}) = d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^{k+1}\mathrm{e}^k} < \frac{1}{2^k\mathrm{e}^k},\ \ \forall k \in \mathbb{N},$$

então pela definição de d existe $\lambda_k \in \Lambda$ tal que

$$\left[\gamma(\lambda_k) \vee \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(y_k, y_{k+1}, \lambda_k, u)du\right] < \frac{1}{2^k\mathrm{e}^k},\ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Em particular,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(y_k, y_{k+1}, \lambda_k, u)du < \frac{1}{2^k\mathrm{e}^k},\ \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.35}$$

Queremos mostrar que $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists u_k > k$ tal que $d(y_k, y_{k+1}, \lambda_k, u_k) \leq \frac{1}{2^k}$. Para isso, supomos (por absurdo) que $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall u > k_0$, temos $d(y_{k_0}, y_{k_0+1}, \lambda_{k_0}, u) > \frac{1}{2^{k_0}}$. Então

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} d(y_{k_0}, y_{k_0+1}, \lambda_{k_0}, u)du$$

$$= \int_0^{k_0} \mathrm{e}^{-u} d(y_{k_0}, y_{k_0+1}, \lambda_{k_0}, u) du + \int_{k_0}^{\infty} \mathrm{e}^{-u} d(y_{k_0}, y_{k_0+1}, \lambda_{k_0}, u) du$$
$$\geq 0 + \frac{1}{2^{k_0}} \int_{k_0}^{\infty} \mathrm{e}^{-u} du = \frac{1}{2^{k_0}\mathrm{e}^{k_0}},$$

o que contraria (1.35). Logo,

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists u_k > k \text{ tal que } d(y_k, y_{k+1}, \lambda_k, u_k) \leq \frac{1}{2^k}. \tag{1.36}$$

E, como

$$\gamma(\lambda_k) \leq \left[\gamma(\lambda_k) \vee \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u} d(y_k, y_{k+1}, \lambda_k, u) du\right] < \frac{1}{2^k \mathrm{e}^k} < \frac{1}{2^k}, \ \ \forall k \in \mathbb{N},$$

temos que

$$[\gamma(\lambda_k) \vee d(y_k, y_{k+1}, \lambda_k, u_k)] \leq \frac{1}{2^k}, \ \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.37}$$

Definimos a sequência de funções

$$\mu_k(t) = \lim_{n\to\infty} [(\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k)(t)], \ \ \forall t \geq 0, \ \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.38}$$

Dado $k \in \mathbb{N}$, vamos fixá-lo para analisar algumas propriedades da função μ_k:

1) *μ_k é estritamente crescente*

Dados $0 \leq a < b$, queremos mostrar que $\mu_k(a) < \mu_k(b)$, para isso fazemos a seguinte análise: Seja $A_l \subset [0, \infty)$ o conjunto de medida total onde λ_l é derivável, $\forall l \in \mathbb{N}$. Dado $n \in \mathbb{N}$ fixo. Observamos que $\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k$ é derivável em $A_k \cap \lambda_k^{-1}(A_{k+1}) \cap \lambda_k^{-1}(\lambda_{k+1}^{-1}(A_{k+2})) \cap ... \cap \lambda_k^{-1}(...(\lambda_{k+n-1}^{-1}(A_{k+n}))...)$ e este conjunto tem medida total. Assim, μ_k é derivável em $A_k \cap \lambda_k^{-1}(A_{k+1}) \cap ... \cap \lambda_k^{-1}(...(\lambda_{k+n-1}^{-1}(A_{k+n}))...)...$, que é um conjunto de medida total. Como $|\log \lambda_l'(t)| \leq \gamma(\lambda_l)$, $\forall t \in A_l$ e $\forall l \in \mathbb{N}$, temos que $\lambda_l'(t) \geq \mathrm{e}^{-\gamma(\lambda_l)}$, $\forall t \in A_l$ e $\forall l \in \mathbb{N}$. Assim, de (1.37), obtemos que $\lambda_l'(t) \geq \mathrm{e}^{-\gamma(\lambda_l)} \geq \mathrm{e}^{-2^{-l}}$, $\forall t \in A_l$ e $\forall l \in \mathbb{N}$. Logo, $\forall t \in A_k \cap \lambda_k^{-1}(A_{k+1}) \cap ... \cap \lambda_k^{-1}(...(\lambda_{k+n-1}^{-1}(A_{k+n}))...)...$, temos que

$$(\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_k)'(t) = \lambda_{k+n}'((\lambda_{k+n-1} \circ ... \circ \lambda_k)(t)) \cdot ... \cdot \lambda_k'(t)$$
$$\geq \mathrm{e}^{-2^{-k+n}} \cdot ... \cdot \mathrm{e}^{-2^{-k}} = \mathrm{e}^{-\sum_{l=0}^{n} 2^{-k+l}} \geq \mathrm{e}^{-2^{-k+1}}. \tag{1.39}$$

Como $\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_k$ é derivável em $A_k \cap \lambda_k^{-1}(A_{k+1}) \cap ...$, de [6] do teorema fundamental do Cálculo, temos que

$$(\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_k)(b) - (\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_k)(a) = \int_a^b (\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_k)'(t)dt. \quad (1.40)$$

E, por (1.39), temos que

$$\int_a^b (\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_k)'(t)dt \geq \int_a^b \mathrm{e}^{-2^{-k+1}} dt = \mathrm{e}^{-2^{-k+1}}(b-a). \quad (1.41)$$

De (1.40) e de (1.41), temos que

$$(\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_k)(b) - (\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_k)(a) \geq \mathrm{e}^{-2^{-k+1}}(b-a).$$

Lembrando que n é qualquer e da definição de μ_k (tomamos o limite quando n tende a infinito na expressão acima), temos que

$$\mu_k(b) - \mu_k(a) \geq \mathrm{e}^{-2^{-k+1}}(b-a) > 0 \Rightarrow \mu_k(b) > \mu_k(a).$$

2) *μ_k é sobrejetora*

Seja $n \in \mathbb{N}$. Observamos que

$$(\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k)([0,\infty)) = (\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_{k+1})(\lambda_k([0,\infty)))$$

$$= (\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_{k+1})([0,\infty)) = \ldots = \lambda_{k+n}([0,\infty)) = [0,\infty).$$

Então

$$\begin{aligned}\mu_k([0,\infty)) &= \lim_{n\to\infty} [(\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k)([0,\infty))] \\ &= \lim_{n\to\infty} [0,\infty) = [0,\infty).\end{aligned}$$

3) *As funções $\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$ têm constantes de Lipschitz limitadas.*

Seja $c_i = \sup\limits_{s>t\geq 0} \dfrac{\lambda_i(s) - \lambda_i(t)}{s-t}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Então c_i é constante de Lipschits de

λ_i, $\forall i \in \mathbb{N}$. Observamos que $\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k$ tem constante de Lipschitz $c_{k+n} \cdot ... \cdot c_{k+1} \cdot c_k$, pois $\forall t, s \in [0, \infty)$ temos

$$|(\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k)(s) - (\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k)(t)|$$

$$\leq c_{k+n} \cdot |(\lambda_{k+n-1} \circ ... \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k)(s) - (\lambda_{k+n-1} \circ ... \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k)(t)|$$

$$\cdots$$

$$\leq c_{k+n} \cdot \ldots \cdot c_{k+1} \cdot |\lambda_k(s) - \lambda_k(t)| \leq c_{k+n} \cdot \ldots \cdot c_{k+1} \cdot c_k \cdot |s - t|.$$

Vamos mostrar que essas constantes de Lipschitz de $\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k$ são limitadas, i.e., $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\log(c_{k+n} \cdot ... \cdot c_{k+1} \cdot c_k) = \sum_{l=0}^{n} \log c_{k+l} \leq \sum_{l=0}^{\infty} |\log c_{k+l}|$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \left| \log \left[\sup_{s>t\geq 0} \frac{\lambda_{k+l}(s) - \lambda_{k+l}(t)}{s-t} \right] \right| \leq \sum_{l=0}^{\infty} \sup_{s>t\geq 0} \left| \log \left[\frac{\lambda_{k+l}(s) - \lambda_{k+l}(t)}{s-t} \right] \right|$$

$$=^{37} \sum_{l=0}^{\infty} \gamma(\lambda_{k+l}) \leq^{38} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+l}} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Logo,

$$c_{k+n} \cdot ... \cdot c_{k+1} \cdot c_k \leq \exp\left(2^{-k+1}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.42}$$

4) μ_k *é lipschitziana.*

Sejam $t, s \in [0, \infty)$, observamos que

$$|\mu_k(s) - \mu_k(t)|$$

$$= \left| \lim_{n\to\infty} [(\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k)(s)] - \lim_{n\to\infty} [(\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k)(t)] \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |[(\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k)(s)] - [(\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k)(t)]|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} [c_{k+n} \cdot \ldots \cdot c_{k+1} \cdot c_k \cdot |s-t|]$$

$$\leq^{39} \lim_{n\to\infty} \left[\exp\left(2^{-k+1}\right) \cdot |s-t| \right] = \exp\left(2^{-k+1}\right) \cdot |s-t|.$$

[37] Do lema 1.2.
[38] Por (1.37).
[39] De (1.42).

5) $\gamma(\mu_k) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.

De fato,

$$\gamma(\mu_k) = \sup_{s>t\geq 0} \left| \log \frac{\mu_k(s) - \mu_k(t)}{s-t} \right|$$

$$= \sup_{s>t\geq 0} \left| \log \frac{\lim_{n\to\infty} [(\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_k)(s)] - \lim_{n\to\infty} [(\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_k)(t)]}{s-t} \right|$$

$$= \sup_{s>t\geq 0} \left| \lim_{n\to\infty} \log \left[\frac{(\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_k)(s) - (\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_k)(t)}{s-t} \right] \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{s>t\geq 0} \left| \log \left[\frac{(\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_k)(s) - (\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_k)(t)}{s-t} \right] \right|$$

$$=^{40} \lim_{n\to\infty} \gamma(\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_k) = \lim_{n\to\infty} \left[\sup_{t\geq 0} \text{ess} \; |\log{(\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_k)'(t)}| \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{t\geq 0} \text{ess} \; \left| \log \left[\lambda'_{k+n}((\lambda_{k+n-1} \circ ... \circ \lambda_k)(t)) \cdot \ldots \cdot \lambda'_{k+1}(\lambda_k(t)) \cdot \lambda'_k(t) \right] \right| \right\}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \left[\sup_{t\geq 0} \text{ess} \; \left| \log \lambda'_{k+n}(t) \right| + ... + \sup_{t\geq 0} \text{ess} \; |\log \lambda'_k(t)| \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\gamma(\lambda_{k+n}) + ... + \gamma(\lambda_k)] = \sum_{l=k}^{\infty} \gamma(\lambda_l) \leq^{41} \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

6) $\mu_k \in \Lambda$

Dos itens (1), (2), (3) e (5), temos que $\mu_k \in \Lambda$.

7) *O limite (1.38) existe uniformemente em cada parte compacta de* $[0, \infty)$.

Vamos mostrar que $\{\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k\}_n$ é eqüicontínua. Seja $t \geq 0$. Dado $\varepsilon > 0$. Tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{\exp\left(2^{-k+1}\right)} > 0$. Assim, $\forall s \in (t-\delta, t+\delta)$ vale

$$|(\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_k)(s) - (\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_k)(t)| \leq c_{k+n} \cdot ... \cdot c_k \cdot |s-t|$$

$$\leq \exp\left(2^{-k+1}\right) \cdot |s-t| < \exp\left(2^{-k+1}\right) \cdot \delta = \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, $\{\lambda_{k+n} \circ ... \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k\}_n$ é eqüicontínua em $t \geq 0$. Como isto vale $\forall t \geq 0$, temos que esta sequência é eqüicontínua. Desta forma, de [3] página

[40] Do lema 1.2.

[41] Por (1.37), temos $\gamma(\lambda_k) \leq 2^{-k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

242, temos que $\{\lambda_{k+n}\circ\ldots\circ\lambda_{k+1}\circ\lambda_k\}_n$ converge uniformemente em cada parte compacta de $[0,\infty)$

8) $\mu_{k+1}^{-1}=\lambda_k\circ\mu_k^{-1}$.
De fato, do item 6, temos que $\mu_k,\mu_{k+1}\in\Lambda$ e pelo lema 1.6, temos que $\exists\mu_k^{-1},\mu_{k+1}^{-1}\in\Lambda$. Então

$$\mu_{k+1}^{-1}=\lambda_k\circ\mu_k^{-1}\ \Leftrightarrow\ \mu_k=\mu_{k+1}\circ\lambda_k. \tag{1.43}$$

Como $\forall s\geq 0$ vale $\mu_{k+1}(s)=\lim\limits_{n\to\infty}\big[(\lambda_{(k+1)+n}\circ\ldots\circ\lambda_{(k+1)+1}\circ\lambda_{(k+1)})(s)\big]$, temos que $\forall t\geq 0$ vale

$$\begin{aligned}(\mu_{k+1}\circ\lambda_k)(t) &= \mu_{k+1}(\lambda_k(t))\\ &= \lim_{n\to\infty}\big[(\lambda_{(k+1)+n}\circ\ldots\circ\lambda_{(k+1)+1}\circ\lambda_{(k+1)})(\lambda_k(t))\big]\\ &= \lim_{n\to\infty}[(\lambda_{k+n+1}\circ\ldots\circ\lambda_{k+2}\circ\lambda_{k+1}\circ\lambda_k)(t))]\\ &= \lim_{n\to\infty}[(\lambda_{k+n}\circ\ldots\circ\lambda_{k+1}\circ\lambda_k)(t))]\\ &= \mu_k(t).\end{aligned} \tag{1.44}$$

De (1.43) e de (1.44), temos que $\mu_{k+1}^{-1}=\lambda_k\circ\mu_k^{-1}$.

Agora, depois de demonstradas estas propriedades de $\{\mu_k\}_k$, vamos mostrar que para a sequência de pontos $\{u_k\}_k$ (que encontramos anteriormente em (1.36)) e para a sequência de funções $\{\mu_k\}_k$ vale

$$\begin{aligned}&\sup_{t\geq 0} q(y_k(\mu_k^{-1}(t)\wedge u_k),\ y_{k+1}(\mu_{k+1}^{-1}(t)\wedge u_k))\\ &=^{42}\sup_{t\geq 0} q(y_k(\mu_k^{-1}(t)\wedge u_k),\ y_{k+1}(\lambda_k(\mu_k^{-1}(t))\wedge u_k))\\ &=^{43}\sup_{s\geq 0} q(y_k(s\wedge u_k),\ y_{k+1}(\lambda_k(s)\wedge u_k))\\ &= d(y_k,y_{k+1},\lambda_k,u_k)\leq^{44}\frac{1}{2^k},\ \ \forall k\in\mathbb{N}.\end{aligned} \tag{1.45}$$

[42] Do item 8 das observações acima.
[43] Mudança de variável: $s=\mu_k^{-1}(t)$.
[44] De (1.37).

Denotamos $z_k = y_k \circ \mu_k^{-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que $z_k \in D_E[0,\infty)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
De fato, sejam $k \in \mathbb{N}$ e $t \geq 0$. Queremos mostrar que existem $z_k(t-)$, $z_k(t+) = z_k(t)$. Dado $\varepsilon > 0$ e lembrando a definição de z_k, temos

$$r(z_k(s), z_k(t)) = r(y_k(\mu_k^{-1}(s)), y_k(\mu_k^{-1}(t))).$$

Como $y_k \in D_E[0,\infty)$, temos que existe o limite de y_k à esquerda de todos pontos, então $\exists \delta_1 > 0$ tal que $\forall v \in (\mu_k^{-1}(t) - \delta_1, \mu_k^{-1}(t))$ vale que $r(y_k(v), y_k(\mu_k^{-1}(t))) < \varepsilon$. Do fato de que $\mu_k^{-1} \in \Lambda$, temos que $\exists \delta_2 > 0$ tal que $\forall s \in (t-\delta_2, t)$ vale que $\mu_k^{-1}(s) \in (\mu_k^{-1}(t)-\delta_1, \mu_k^{-1}(t))$ (pois μ_k^{-1} é contínua e estritamente crescente). Assim, $\forall s \in (t-\delta_2, t)$ vale que $r(y_k(\mu_k^{-1}(s)), y_k(\mu_k^{-1}(t)))$ $< \varepsilon$. Logo, existe $z_k(t-)$. Analogamente, provamos que existe $z_k(t+)$. Falta mostrar que $z_k(t+) = z_k(t)$. Como existe $z_k(t+)$, temos que $\exists \delta_3 > 0$ tal que se $s \in (t, t+\delta_3)$, então $r(z_k(t+), z_k(s)) < \varepsilon/2$. Pelo fato de y_k ser contínua à direita de todos pontos de $[0,\infty)$ e μ_k^{-1} ser contínua e estritamente crescente, temos (analogamente ao que foi feito anteriormente) que $\exists \delta_4 > 0$ tal que $\forall s \in (t, t+\delta_4)$ vale que

$$r(y_k(\mu_k^{-1}(s)), y_k(\mu_k^{-1}(t))) < \varepsilon/2$$

Tomamos $\delta_0 = \min\{\delta_3, \delta_4\}$. Assim, $\forall s \in (t, t+\delta_0)$, temos que

$$r(z_k(t+), z_k(t)) \leq r(z_k(t+), z_k(s)) + r(z_k(s), z_k(t)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Como ε é qualquer e r é métrica, temos que $z_k(t+) = z_k(t)$. Logo, $z_k \in D_E[0,\infty)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Vamos mostrar a seguir que a sequência de funções z_k converge uniformemente em intervalos limitados. Como $\mu_k \in \Lambda$, temos pelo lema 1.6 e pelo item 5 das observações feitas acima que $\lim_{k\to\infty} \gamma(\mu_k^{-1}) = \lim_{k\to\infty} \gamma(\mu_k) = 0$. Da observação 1.3, temos que μ_k^{-1} converge uniformemente à identidade em intervalos limitados. Assim, dados $[a,b] \subset [0,\infty)$ e $\varepsilon > 0$, $\exists k_1 = k_1(\varepsilon, a, b) \in \mathrm{N}$ tal que $\forall t \in [a,b]$ vale

$$|\mu_k^{-1}(t) - t| < \varepsilon, \;\; \forall k \geq k_1.$$

De onde segue, que $\forall t \in [a,b]$ vale $\mu_k^{-1}(t) \leq \mu_k^{-1}(b) < b + \varepsilon$, $\forall k \geq k_1$, já que μ_k^{-1} é estritamente crescente. Tomamos $k_2 = k_2(\varepsilon, b) \in \mathbb{N}$ tal que $b + \varepsilon < k_2$. Seja $k_3 = \max\{k_1, k_2\}$ (notamos que $k_3 = k_3(\varepsilon, a, b)$). Assim, $\forall t \in [a,b]$ vale $\mu_k^{-1}(t) < k$, $\forall k \geq k_3$. Então por (1.36), temos que

$$\mu_k^{-1}(t) < u_k, \quad \forall k \geq k_3. \tag{1.46}$$

Dado $t \in [a,b]$.

$$\begin{aligned} q(z_k(t),\, z_{k+1}(t)) &= {}^{45} q(y_k(\mu_k^{-1}(t)),\, y_{k+1}(\mu_{k+1}^{-1}(t))) \\ &= {}^{46} q(y_k(\mu_k^{-1}(t) \wedge u_k),\, y_{k+1}(\mu_{k+1}^{-1}(t) \wedge u_k)) \\ &\leq \sup_{t \geq 0} q(y_k(\mu_k^{-1}(t) \wedge u_k),\, y_{k+1}(\mu_{k+1}^{-1}(t) \wedge u_k)) \leq {}^{47} \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \geq k_3. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Agora, tomamos $k_0 \geq k_3$ tal que $n/2^k < \varepsilon$, $\forall n > k \geq k_0$ (notamos que $k_0 = k_0(k_3, \varepsilon) = k_0(\varepsilon, a, b)$). Então

$$q(z_k(t),\, z_n(t))$$

$$\leq q(z_k(t),\, z_{k+1}(t)) + q(z_{k+1}(t),\, z_{k+2}(t)) + \ldots + q(z_{n-1}(t),\, z_n(t))$$
$$< {}^{48} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{n}{2^k} < \varepsilon, \quad \forall n > k \geq k_0.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\varepsilon \in (0,1)$, então a desigualdade acima vale para

$$r(z_k(t),\, z_n(t)) < \varepsilon, \quad \forall n > k \geq k_0,$$

já que $q = r \wedge 1$. E, assim, como (E, r) é completo, pelo Critério de Cauchy para convergência uniforme de [3] página 168, temos que a sequência de funções

$z_k : [0, \infty) \to E$ converge uniformemente em $[a,b]$. Logo, a sequência de funções z_k converge uniformemente em intervalos limitados. Desta forma, a

[45] Só notação.
[46] De (1.46).
[47] De (1.45).
[48] De (1.47).

sequência de funções z_k converge uniformemente em $[0, N]$, $\forall N \in \mathbb{N}$. Seja $\widetilde{y}_N : [0, \infty) \to E$ tal que z_k converge uniformemente para $\widetilde{y}_N$ em $[0, N]$, $\forall N \in \mathbb{N}$.

Definimos $y(t) = \widetilde{y}_N(t)$, se $\forall t \in [0, N]$, onde $N \in \mathbb{N}$.

Observamos y está bem definida, pois se existem $t \geq 0$ e $N, N_0 \in \mathbb{N}$ tais que $t \in [0, N]$, $t \in [0, N_0]$ e $\widetilde{y}_N(t) \neq \widetilde{y}_{N_0}(t)$, então $z_k(t)$ converge para dois pontos diferentes, o que é absurdo. Também, observamos que z_k converge uniformemente em intervalos limitados para a função $y : [0, \infty) \to E$ definida acima, pois dado $[a, b]$, temos que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $[a, b] \subset [0, N_1]$ e pela definição acima z_k converge uniformemente em $[0, N_1]$.

Afirmamos que $y \in D_E[0, \infty)$.

De fato, sejam $t \geq 0$ e $\varepsilon > 0$. Como z_k converge uniformemente à y em $[0, t]$, temos que $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r(y(s), z_{k_0}(s)) < \varepsilon/3$, $\forall s \in [0, t]$. Pelo fato do limite de z_{k_0} existir à esquerda de t, temos que $\exists \delta_{k_0} > 0$ tal que $\forall s \in (t - \delta_{k_0}, t)$ vale $r(z_{k_0}(s), z_{k_0}(t)) < \varepsilon/3$. Assim, $\forall s \in (t - \delta_{k_0}, t)$, temos que

$$r(y(s), y(t)) \leq r(y(s), z_{k_0}(s)) + r(z_{k_0}(s), z_{k_0}(t)) + r(z_{k_0}(t), y(t)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Desta forma, $\exists y(t-)$. Analogamente, mostramos que $\exists y(t+)$. Para completar a prova de que $y \in D_E[0, \infty)$, devemos mostrar que $y(t+) = y(t)$. Por existir $y(t+)$, temos que $\exists s_1 > t$ tal que $r(y(t+), y(s)) < \varepsilon/4$, $\forall s \in (t, s_1)$. Da convergência uniforme de z_k à y, obtemos $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$r(y(s), z_{k_1}(s)) < \varepsilon/4, \;\; \forall s \in [t, s_1).$$

Como z_{k_1} é contínua à direita de t, $\exists s_0 \in (t, s_1)$ tal que

$$r(z_{k_1}(s_0), z_{k_1}(t)) < \varepsilon/4.$$

Desta forma,

$$r(y(t+), y(t))$$
$$\leq r(y(t+), y(s_0)) + r(y(s_0), z_{k_1}(s_0)) + r(z_{k_1}(s_0), z_{k_1}(t)) + r(z_{k_1}(t), y(t))$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Logo, $y(t+) = y(t)$, o que implica que $y \in D_E[0, \infty)$.

Da convergência uniforme de $z_k = y_k \circ \mu_k^{-1}$ à y em intervalos limitados, temos que

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} r(y_k(\mu_k^{-1}(t)), y(t)) = 0, \ \ \forall T > 0.$$

De onde segue, pelo $\lim\limits_{k \to \infty} \gamma(\mu_k^{-1}) = 0$ e pela observação 1.5, que vale a afirmação (b) da proposição 1.5 para as sequências de funções $\{\mu_k\} \subset \Lambda$, $\{y_k\} \subset D_E[0, \infty)$ e $y \in D_E[0, \infty)$. Então, por esta proposição, temos que

$$\lim_{k \to \infty} d(y_k, y) = 0.$$

Portanto, $D_E[0, \infty)$ é completo.

$\square$

Apêndice

Agora vamos demonstrar o Lema 1.2, mas para isso necessitamos dos seguintes resultados.

Afirmação A.1: Seja $f : X \to \mathbb{R}$

$$\sup_{x\in X} |f(x)| = \max \left\{ \sup_{x\in X} f(x), -\inf_{x\in X} f(x) \right\}$$

Demonstração Como

$$\begin{array}{rclcl} \sup_{x\in X} |f(x)| & \geq & \sup_{x\in X} f(x) & & \text{e} \\ \sup_{x\in X} |f(x)| & \geq & \sup_{x\in X}[-f(x)] & = & -\inf\limits_{x\in X} f(x), \end{array}$$

temos que

$$\sup_{x\in X} |f(x)| \geq \max \left\{ \sup_{x\in X} f(x), -\inf_{x\in X} f(x) \right\}. \tag{1.48}$$

Supomos por absurdo que a desigualdade em (1.48) seja estrita. Então existe $x_0 \in X$ tal que $|f(x_0)| > \max \left\{ \sup_{x\in X} f(x), -\inf\limits_{x\in X} f(x) \right\}$. Como $|f(x_0)| = \max \{f(x_0), -f(x_0)\}$, temos que

$$\max \{f(x_0), -f(x_0)\} > \max \left\{ \sup_{x\in X} f(x), -\inf_{x\in X} f(x) \right\} \geq \max \{f(x_0), -f(x_0)\},$$

o que é um absurdo. Portanto em (1.48) vale a igualdade.

$\square$

Afirmação A.2:

$$\sup_{s>t\geq 0}\frac{\lambda(s)-\lambda(t)}{s-t}=\sup_{t\geq 0}\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)$$

$$\inf_{s>t\geq 0}\frac{\lambda(s)-\lambda(t)}{s-t}=\inf_{t\geq 0}\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)$$

(*As igualdades desta afirmação são as chamadas Identidades de Dini*).

Demonstração Vamos provar a primeira igualdade (a prova da segunda identidade é análoga). Como

$$\sup_{t\geq 0}\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)={}^{49}\sup_{t\geq 0}\left(\limsup_{s\to t^+}\frac{\lambda(s)-\lambda(t)}{s-t}\right)$$

$$\leq{}^{50}\sup_{t\geq 0}\left(\sup_{s>t}\frac{\lambda(s)-\lambda(t)}{s-t}\right)=\sup_{s>t\geq 0}\frac{\lambda(s)-\lambda(t)}{s-t}, \tag{1.49}$$

para provar que vale a igualdade, vamos supor (por contradição) que a desigualdade acima é estrita. Então exite $m\geq 0$ tal que

$$\sup_{t\geq 0}\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)<m<\sup_{s>t\geq 0}\frac{\lambda(s)-\lambda(t)}{s-t}. \tag{1.50}$$

Defina $\alpha(t)=mt-\lambda(t)$. Observamos que α é crescente (estritamente), pois $\forall t\geq 0$, temos

$$\liminf_{h\to 0^+}\frac{\alpha(t+h)-\alpha(t)}{h}=\liminf_{h\to 0^+}\frac{m.(t+h)-\lambda(t+h)-m.t+\lambda(t)}{h}$$

$$=\liminf_{h\to 0^+}\left[m-\left(\frac{(\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right]\geq{}^{51}m+\liminf_{h\to 0^+}\left(-\frac{(\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)$$

$$={}^{52}m-\limsup_{h\to 0^+}\left(\frac{(\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)>{}^{53}0.$$

[49] Mudança de variável: $t+h=s$.

[50] $\limsup\limits_{s\to t+}f(s)\leq\sup\limits_{s>t}f(s)$, $\forall f$.

[51] De [2] (página 123), temos $\liminf(f+g)\geq\liminf f+\liminf g$.

[52] De [2] (página 123), temos $\liminf(-f)=-\liminf f$.

[53] Da suposição de que $\sup_{t\geq 0}\left(\limsup\limits_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)<m$.

Assim, dados $t, s \in [0, \infty)$ tais que $t < s$, temos

$$m.t - \lambda(t) = \alpha(t) < \alpha(s) = m.s - \lambda(s)$$

$$\Rightarrow \lambda(s) - \lambda(t) < m.(s - t) \Rightarrow \frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t} < m.$$

Logo,

$$\sup_{s>t\geq 0} \frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t} \leq m,$$

então obtivemos uma contradição com (1.50). Portanto, vale a igualdade em (1.49).

□

Demonstração (do Lema 1.2)
Da afirmação A.1, temos que

$$\sup_{s>t\geq 0} \left| \log \frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t} \right| = \tag{1.51}$$

$$= \max \left\{ \sup_{s>t\geq 0} \left(\log \frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t} \right), - \inf_{s>t\geq 0} \left(\log \frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t} \right) \right\}.$$

Como log é uma função estritamente crescente, temos que

$$\sup_{s>t\geq 0} \left(\log \frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t} \right) = \log \left(\sup_{s>t\geq 0} \frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t} \right). \tag{1.52}$$

Pela afirmação A.2 e usando novamente o fato de log ser estritamente crescente, obtemos

$$\log \left(\sup_{s>t\geq 0} \frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t} \right) = \log \left[\sup_{t\geq 0} \left(\limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda(t + h) - \lambda(t)}{h} \right) \right]$$

$$= \sup_{t\geq 0} \left[\log \left(\limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda(t + h) - \lambda(t)}{h} \right) \right]. \tag{1.53}$$

Então de (1.52) e (1.53), temos

$$\sup_{s>t\geq 0} \left(\log \frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t} \right) = \sup_{t\geq 0} \left[\log \left(\limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda(t + h) - \lambda(t)}{h} \right) \right]. \tag{1.54}$$

Analogamente, usando que log é estritamente crescente, temos

$$\inf_{s>t\geq 0} \left(\log \frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t} \right) = \log \left(\inf_{s>t\geq 0} \frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t} \right). \tag{1.55}$$

Novamente pela afirmação A.2 e usando novamente o fato de log ser estritamente crescente, obtemos

$$\log\left(\inf_{s>t\geq 0}\frac{\lambda(s)-\lambda(t)}{s-t}\right) = \log\left[\inf_{t\geq 0}\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right]$$

$$= \inf_{t\geq 0}\left[\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right]. \tag{1.56}$$

Então de (1.55) e (1.56), temos

$$-\inf_{s>t\geq 0}\left(\log\frac{\lambda(s)-\lambda(t)}{s-t}\right) = -\inf_{t\geq 0}\left[\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right]. \tag{1.57}$$

De 1.51, 1.54, 1.57 e afirmação A.1, temos que

$$\sup_{s>t\geq 0}\left|\log\frac{\lambda(s)-\lambda(t)}{s-t}\right| =$$

$$= \max\left\{\sup_{t\geq 0}\left[\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right],\right.$$

$$\left. -\inf_{t\geq 0}\left[\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right]\right\}$$

$$= \sup_{t\geq 0}\left|\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right|. \tag{1.58}$$

Lembramos que sempre o supremo em $t \geq 0$ é maior ou igual ao supremo essencial, também, em $t \geq 0$, então

$$\sup_{t\geq 0}\left|\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right| \geq \operatorname*{sup\,ess}_{t\geq 0}\left|\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right|. \tag{1.59}$$

Como

$$\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right) = \log\lambda'(t),$$

em $q.t.p.$ $t \geq 0$, temos

$$\operatorname*{sup\,ess}_{t\geq 0}\left|\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right| = \operatorname*{sup\,ess}_{t\geq 0}|\log\lambda'(t)|. \tag{1.60}$$

Por 1.58, 1.59, 1.60 e afirmação A.1, temos que

$$\sup_{s>t\geq 0}\left|\log\frac{\lambda(s)-\lambda(t)}{s-t}\right| = \sup_{s>t\geq 0}\left|\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right|$$

$$\geq \sup_{t\geq 0}\operatorname{ess} \left|\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right| = \sup_{t\geq 0}\operatorname{ess}\ |\log \lambda'(t)|$$

Vamos supor por contradição que a desigualdade acima seja estrita, ou seja, que

$$K = \sup_{t\geq 0}\left|\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right| > \sup_{t\geq 0}\operatorname{ess}\left|\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right|$$

Primeiro observamos que $K < \infty$, pois pelo fato de λ ser lipschitziana, existe uma constante c tal que

$$\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h} = \frac{|\lambda(t+h)-\lambda(t)|}{h} \leq \frac{ch}{h} = c,$$

$\forall t \geq 0$ e $\forall h > 0$. Logo,

$$K = \sup_{t\geq 0}\left|\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right| \leq c < \infty.$$

Da nossa suposição de que

$$\sup_{t\geq 0}\operatorname{ess}\left|\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right| < K,$$

existe $r \geq 0$ tal que

$$\sup_{t\geq 0}\operatorname{ess}\left|\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right| < r < K.$$

Como em *q.t.p.* $t \geq 0$ vale

$$\log \lambda'(t) \leq \sup_{t\geq 0}\operatorname{ess}|\log \lambda'(t)| = \sup_{t\geq 0}\operatorname{ess}\left|\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right| < r,$$

temos que

$$\lambda'(t) < e^r, \text{ em } q.t.p.\ t \geq 0. \tag{1.61}$$

Anteriormente, mencionamos que λ é absolutamente contínua, então podemos utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo [6] (página 166) e obter que $\forall t \geq 0$ e $\forall h > 0$ vale

$$\lambda(t+h)-\lambda(t) = \int_t^{t+h}\lambda'(s)ds.$$

Para estimar esta integral usamos (1.61) e a desigualdade para integrais de [5] página 83

$$\int_t^{t+h} \lambda'(s)ds \leq \int_t^{t+h} \mathrm{e}^r ds = \mathrm{e}^r h.$$

Assim,

$$\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h} \leq \mathrm{e}^r,\ \forall t \geq 0\ e\ \forall h > 0.$$

Tomamos o limite superior quando $h \to 0^+$, aplicamos logaritmo na desigualdade acima e chegamos à

$$\log\left(\limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right) \leq r,\ \forall t \geq 0.$$

Nesta desigualdade tomamos o supremo e obtemos

$$\sup_{t\geq 0}\left[\log\left(\limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right] \leq \sup_{s>t\geq 0} r = r < K. \tag{1.62}$$

Por outro lado, em quase todo ponto $t \geq 0$ vale

$$-\log\lambda'(t) \leq \sup_{t\geq 0}\text{ess}\ |\log\lambda'(t)| = \sup_{t\geq 0}\text{ess}\ \left|\log\left(\limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right| < r,$$

temos que

$$\lambda'(t) > e^{-r},\ \text{em } q.t.p.\ t \geq 0.$$

E, analogamente ao que foi feito anteriormente, obtemos

$$\lambda(t+h)-\lambda(t) = \int_t^{t+h} \lambda'(s)ds \geq \int_t^{t+h} \mathrm{e}^{-r} ds = \mathrm{e}^{-r}h,\ \forall t \geq 0 \text{ e } \forall h > 0.$$

Logo,

$$\log\left(\limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right) \geq \log\left(\limsup_{h\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-r}h}{h}\right) = \log \mathrm{e}^{-r} = -r,\ \forall t \geq 0.$$

Tomamos o ínfimo e obtemos

$$\inf_{t\geq 0}\left[\log\left(\limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right] \geq \inf_{s>t\geq 0} -r = -r.$$

Desta forma,

$$-\inf_{t\geq 0}\left[\log\left(\limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right] \leq r < K. \tag{1.63}$$

De (1.62), (1.63) e da afirmação 2.1, temos que

$$\sup_{t\geq 0}\left|\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right| \leq r < K.$$

Mas, isto contraria

$$\sup_{t\geq 0}\left|\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right| = K$$

Logo nossa suposição é falsa, ou seja, vale

$$\operatorname*{sup\,ess}_{t\geq 0}\left|\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right| = \sup_{t\geq 0}\left|\log\left(\limsup_{h\to 0^+}\frac{\lambda(t+h)-\lambda(t)}{h}\right)\right|. \tag{1.64}$$

Portanto, de (1.1), (1.64), (1.60) e (1.58), temos que

$$\gamma(\lambda) = \sup_{s>t\geq 0}\left|\log\frac{\lambda(s)-\lambda(t)}{s-t}\right|.$$

$\square$

Afirmação A.3: Dado $T \geq 0$.

$$\inf_{\lambda\in\Lambda}\left[\gamma(\lambda)\vee \mathrm{e}^{-T}\right] = \left[\inf_{\lambda\in\Lambda}\gamma(\lambda)\right]\vee \mathrm{e}^{-T}$$

Demonstração

- Se $\gamma(\lambda) \geq \mathrm{e}^{-T}$, $\forall \lambda \in \Lambda$,

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma(\lambda)\vee \mathrm{e}^{-T} = \gamma(\lambda),\ \forall\lambda\in\Lambda & \Rightarrow \quad \inf_{\lambda\in\Lambda}\left[\gamma(\lambda)\vee \mathrm{e}^{-T}\right] = \inf_{\lambda\in\Lambda}\gamma(\lambda) \\ \qquad e & \\ \inf_{\lambda\in\Lambda}\gamma(\lambda) \geq \mathrm{e}^{-T} & \Rightarrow \quad \left[\inf_{\lambda\in\Lambda}\gamma(\lambda)\right]\vee \mathrm{e}^{-T} = \inf_{\lambda\in\Lambda}\gamma(\lambda) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \inf_{\lambda\in\Lambda}\left[\gamma(\lambda)\vee \mathrm{e}^{-T}\right] = \left[\inf_{\lambda\in\Lambda}\gamma(\lambda)\right]\vee \mathrm{e}^{-T}$$

- Se $\exists \lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\gamma(\lambda_0) \leq \mathrm{e}^{-T}$,

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma(\lambda_0)\vee \mathrm{e}^{-T} = \mathrm{e}^{-T} & \Rightarrow \quad \inf_{\lambda\in\Lambda}\left[\gamma(\lambda)\vee \mathrm{e}^{-T}\right] \leq \mathrm{e}^{-T} \\ \qquad e & \\ \inf_{\lambda\in\Lambda}\gamma(\lambda) \leq \mathrm{e}^{-T} & \Rightarrow \quad \left[\inf_{\lambda\in\Lambda}\gamma(\lambda)\right]\vee \mathrm{e}^{-T} = \mathrm{e}^{-T} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \inf_{\lambda\in\Lambda}\left[\gamma(\lambda)\vee \mathrm{e}^{-T}\right] \leq \left[\inf_{\lambda\in\Lambda}\gamma(\lambda)\right]\vee \mathrm{e}^{-T}$$

Observando que $\forall\lambda\in\Lambda$ temos

$$\left[\inf_{\lambda\in\Lambda}\gamma(\lambda)\right]\vee \mathrm{e}^{-T} \leq \gamma(\lambda)\vee \mathrm{e}^{-T}.$$

Então tomando o ínfimo sobre todas as funções $\lambda\in\Lambda$ obtemos

$$\left[\inf_{\lambda\in\Lambda}\gamma(\lambda)\right]\vee \mathrm{e}^{-T} \leq \inf_{\lambda\in\Lambda}\left[\gamma(\lambda)\vee \mathrm{e}^{-T}\right].$$

Assim, vale a igualdade que queríamos provar, i. e.,

$$\inf_{\lambda\in\Lambda}\left[\gamma(\lambda)\vee \mathrm{e}^{-T}\right] = \left[\inf_{\lambda\in\Lambda}\gamma(\lambda)\right]\vee \mathrm{e}^{-T}$$

□

Proposição 1.6 *Dados* $\{x_n\}\subset D_E[0,\infty)$ *e* $x\in D_E[0,\infty)$. *Então são equivalentes:*

i) *Existe* $\{\lambda_n\}\subset\Lambda$ *tal que* $\lim_{n\to\infty}\gamma(\lambda_n)=0$ *e*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq t\leq T} r(x_n(t), x(\lambda_n(t)))=0,$$

$\forall T>0$.

ii) *Para cada* $T>0$, *existe* $\{\lambda_n\}\subset\Lambda'$ *(esta sequência de funções pode depender de* T*) tais que valem* $\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq t\leq T}|\lambda_n(t)-t|=0$ *e*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq t\leq T} r(x_n(t), x(\lambda_n(t)))=0.$$

Demonstração

$(i)\Rightarrow(ii)$ Supomos que existe $\{\lambda_n\}\subset\Lambda$ tal que $\lim_{n\to\infty}\gamma(\lambda_n)=0$ e $\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq t\leq T} r(x_n(t), x(\lambda_n(t)))=0$, $\forall T>0$. Para completar esta prova, basta mostrarmos que para cada $T>0$ vale $\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq t\leq T}|\lambda_n(t)-t|=0$. Mas, isso pode ser obtido do lema 1.4 pelo fato de $\lim_{n\to\infty}\gamma(\lambda_n)=0$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supomos que para cada $T > 0$, existe $\{\lambda_n\} \subset \Lambda'$ (esta sequência de funções pode depender de T) tais que valem $\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T} |\lambda_n(t) - t| = 0$ e (1.32). Seja $N \in \mathbb{N}$. Escolha $\{\lambda_n^N\} \subset \Lambda'$ satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq N} |\lambda_n^N(t) - t| = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq N} r(x_n(t), x(\lambda_n^N(t)) = 0$$

e, ainda, queremos que

$$\lambda_n^N(t) = \lambda_n^N(N) + t - N, \;\; \forall t > N.$$

Definimos a sequência de pontos de $[0, \infty)$

$$\tau_0^N = 0$$

$$\tau_k^N = \begin{cases} \inf\{t > \tau_{k-1}^N; r(x(t), x(\tau_{k-1}^N)) > 1/N\}, & \text{se } \tau_{k-1}^N < \infty \\ \\ \infty \hfill , & \text{se } \tau_{k-1}^N = \infty \end{cases},$$

onde $k = 0, 1, 2, ...$.

Observações sobre $\{\tau_k^N\}_k$:

- $\{\tau_k^N\}_k$ *é estritamente crescente nos termos que são finitos.*
  De fato, dado $k \in \mathbb{N}$ tal que $\tau_k^N < \infty$. Como x é contínua à direita de τ_{k-1}^N, temos que existe $\delta_{k-1} > 0$ tal que $r(x(t), x(\tau_{k-1}^N)) < 1/N$, $\forall t \in (\tau_{k-1}^N, \tau_{k-1}^N + \delta_{k-1})$. Então

  $$\tau_k^N = \inf\{t > \tau_{k-1}^N; r(x(t), x(\tau_{k-1}^N)) > 1/N\} \geq \tau_{k-1}^N + \delta_{k-1} > \tau_{k-1}^N$$

- $\{\tau_k^N\}_k$ *não tem ponto de acumulação finito*
  Pelo raciocínio feito acima cada ponto finito desta sequência é um ponto isolado.

Definimos, para cada n fixo, a sequência de pontos de $[0,\infty)$ por

$$u_{k,n}^N = (\lambda_n^N)^{-1}(\tau_k^N),$$

onde $k = 0,1,2,...$ e $(\lambda_n^N)^{-1}(\infty) = \infty$. Observamos que $\{u_{k,n}^N\}_k$ é uma sequência crescente, pois $\lambda_n^N \in \Lambda'$, então $(\lambda_n^N)^{-1}$ é estritamente crescente, $\forall n$, e lembre que $\{\tau_k^N\}_k$, também, é crescente. Agora, vamos definir a sequência de funções de Λ

$$\mu_n^N(t) = \begin{cases} \tau_k^N + \frac{t-u_{k,n}^N}{u_{k+1,n}^N - u_{k,n}^N}(\tau_{k+1}^N - \tau_k^N), & \text{se } t \in [u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N) \cap [0,n], \\ & \qquad k = 0,1,2,... \\ \mu_n^N(N) + t - N \qquad , & \text{se } t > N \end{cases},$$

por convenção $\infty^{-1}\infty$=1. Com esta convenção, afirmamos que

$$\gamma(\mu_n^N) = \max_{\substack{k=0,1,2,... \\ \left[u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N\right) \cap [0,N] \neq \emptyset}} \left\{ \left| \log \frac{\tau_{k+1}^N - \tau_k^N}{u_{k+1,n}^N - u_{k,n}^N} \right| \right\}. \tag{1.65}$$

De fato,

$$\gamma(\mu_n^N) = \sup_{t\geq 0} \text{ess} \ \left| \log(\mu_n^N)'(t) \right|$$

$$= \max_{k=0,1,2,...} \left\{ \sup_{t \in \left[u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N\right) \cap [0,N]} \text{ess} \ \left| \log(\mu_n^N)'(t) \right|, \ \sup_{t\in(N,\infty)} \text{ess} \ \left| \log(\mu_n^N)'(t) \right| \right\}.$$

Seja $t \in (N,\infty)$, então $\mu_n^N(t)$ é diferenciável, pois μ_n^N é linear neste intervalo. Logo, podemos calcular

$$\begin{aligned} (\mu_n^N)'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mu_n^N(t+h) - \mu_n^N(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\mu_n^N(N) + t + h - \mu_n^N(N) - t}{h} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sup_{t\in(N,\infty)} \text{ess} \ \left| \log(\mu_n^N)'(t) \right| = 0.$$

De onde segue, que

$$\gamma(\mu_n^N) = \max_{k=0,1,2,...} \left\{ \sup_{t \in \left[u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N\right) \cap [0,N]} \text{ess} \ \left| \log(\mu_n^N)'(t) \right| \right\}. \tag{1.66}$$

Agora, também, fixamos $k = 0, 1, 2, ...$ com $[u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N) \cap [0, N] \neq \emptyset$. Observamos que μ_n^N é diferenciável em todo ponto $t \in [u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N) \cap [0, N]$, pois μ_n^N é linear neste intervalo. Como $\forall t \in [u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N) \cap [0, N]$, temos

$$(\mu_n^N)'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mu_n^N(t+h) - \mu_n^N(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\left(\tau_k^N + \frac{t + h - u_{k,n}^N}{u_{k+1,n}^N - u_{k,n}^N} (\tau_{k+1}^N - \tau_k^N) \right) - \left(\tau_k^N + \frac{t - u_{k,n}^N}{u_{k+1,n}^N - u_{k,n}^N} (\tau_{k+1}^N - \tau_k^N) \right) \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{h}{u_{k+1,n}^N - u_{k,n}^N} (\tau_{k+1}^N - \tau_k^N) \right) = \frac{\tau_{k+1}^N - \tau_k^N}{u_{k+1,n}^N - u_{k,n}^N}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname*{sup\,ess}_{t \in \left[u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N\right) \cap [0,N]} \left| \log(\mu_n^N)'(t) \right| &= \operatorname*{sup\,ess}_{t \in \left[u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N\right) \cap [0,N]} \left| \log \frac{\tau_{k+1}^N - \tau_k^N}{u_{k+1,n}^N - u_{k,n}^N} \right| \\ &= \left| \log \frac{\tau_{k+1}^N - \tau_k^N}{u_{k+1,n}^N - u_{k,n}^N} \right|. \end{aligned} \tag{1.67}$$

De (1.66) e (1.67), obtemos (1.65).

Agora, afirmamos que

$$\sup_{0 \leq t \leq N} r(x(\lambda_n^N(t)), x(\mu_n^N(t))) \leq \frac{2}{N}, \quad \forall n. \tag{1.68}$$

De fato,

$$\sup_{0 \leq t \leq N} r(x(\lambda_n^N(t)), x(\mu_n^N(t))) = \max_{k=0,1,2,...} \left\{ \sup_{t \in [u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N) \cap [0,N]} r(x(\lambda_n^N(t)), x(\mu_n^N(t))) \right\}, \tag{1.69}$$

por isso basta analisar

$$\sup_{t \in [u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N) \cap [0,N]} r(x(\lambda_n^N(t)), x(\mu_n^N(t))),$$

para cada $k = 0, 1, 2, ...$, onde $[u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N) \cap [0, N] \neq \emptyset$. Novamente, fixamos $k = 0, 1, 2, ...$ com $[u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N) \cap [0, N] \neq \emptyset$. Lembre que $\forall t \in [\tau_k^N, \tau_{k+1}^N)$, o que implica que $r(x(t),x(\tau_k^N)) \leq 1/N$, pois $\tau_{k+1}^N = \inf\{t > \tau_k^N; r(x(t),x(\tau_k^N)) > 1/N\}$. Como $\lambda_n^N \in \Lambda'$, temos que λ_n^N é estritamente crescente, então

$$\tau_k^N = \lambda_n^N(u_{k,n}^N) \leq \lambda_n^N(t) < \lambda_n^N(u_{k+1,n}^N) = \tau_{k+1}^N, \quad \forall t \in [u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N).$$

De onde segue, que

$$r(x(\lambda_n^N(t)),x(\tau_k^N)) \leq 1/N, \quad \forall t \in [u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N). \tag{1.70}$$

Como μ_n^N é linear em $[u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N)$, $\mu_n^N(u_{k,n}^N) = \tau_k^N$ e $\mu_n^N(u_{k+1,n}^N) = \tau_{k+1}^N$, temos que $\tau_k^N \leq \mu_n^N(t) < \tau_{k+1}^N$, $\forall t \in [u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N)$. De onde segue, que

$$r(x(\mu_n^N(t)),x(\tau_k^N)) \leq 1/N, \quad \forall t \in [u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N). \tag{1.71}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[u_{k,n}^N,u_{k+1,n}^N)\cap[0,N]} r(x(\lambda_n^N(t)),x(\mu_n^N(t))) \\
\leq &\sup_{t\in[u_{k,n}^N,u_{k+1,n}^N)\cap[0,N]} r(x(\lambda_n^N(t)),x(\tau_k^N)) + \sup_{t\in[u_{k,n}^N,u_{k+1,n}^N)\cap[0,N]} r(x(\tau_k^N),x(\mu_n^N(t))) \\
&\leq^{54} 1/N + 1/N = 2/N.
\end{aligned} \tag{1.72}$$

Assim, de (1.69) e de (1.72), temos (1.68). O que implica que

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq t\leq T} r(x_n(t),x(\mu_n^N(t))) \\
&\leq \sup_{0\leq t\leq T} r(x_n(t),x(\lambda_n^N(t))) + \sup_{0\leq t\leq T} r(x(\lambda_n^N(t)),x(\mu_n^N(t))) \\
&\leq^{55} \sup_{0\leq t\leq T} r(x_n(t),x(\lambda_n^N(t))) + \frac{2}{N}, \quad \forall n.
\end{aligned}$$

Da hipótese, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq N} r(x_n(t),x(\lambda_n^N(t)) = 0,$$

então $\exists n_1^N$ tal que $\sup_{0\leq t\leq N} r(x_n(t),x(\lambda_n^N(t)) < 1/N$, $\forall n \geq n_1^N$. Logo

$$\sup_{0\leq t\leq T} r(x_n(t),x(\mu_n^N(t))) \leq \frac{3}{N}, \quad \forall n \geq n_1^N. \tag{1.73}$$

[54] De (1.70) e (1.71).

[55] De (1.68).

Como $\lim_{n\to\infty} \gamma(\lambda_n^N) = 0$ e pelo lema 1.6, temos que $\lim_{n\to\infty} \gamma((\lambda_n^N)^{-1}) = 0$. Da observação 1.4, temos que $\{(\lambda_n^N)^{-1}\}_n$ converge pontualmente à identidade, de onde segue que

$$\lim_{n\to\infty} u_{k,n}^N =^{56} \lim_{n\to\infty} (\lambda_n^N)^{-1}(\tau_k^N) =^{57} \tau_k^N, \quad \forall k. \tag{1.74}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \gamma(\mu_n^N) &= \lim_{n\to\infty} \left[\max_{\substack{k=0,1,2,\ldots \\ \left[u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N\right) \cap [0,N] \neq \emptyset}} \left| \log \frac{\tau_{k+1}^N - \tau_k^N}{u_{k+1,n}^N - u_{k,n}^N} \right| \right] \\
&= \max_{\substack{k=0,1,2,\ldots \\ \left[u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N\right) \cap [0,N] \neq \emptyset}} \left[\lim_{n\to\infty} \left| \log \frac{\tau_{k+1}^N - \tau_k^N}{u_{k+1,n}^N - u_{k,n}^N} \right| \right] \\
&= \max_{\substack{k=0,1,2,\ldots \\ \left[u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N\right) \cap [0,N] \neq \emptyset}} \left| \log \frac{\tau_{k+1}^N - \tau_k^N}{\lim_{n\to\infty} u_{k+1,n}^N - \lim_{n\to\infty} u_{k,n}^N} \right| \\
&=^{58} \max_{\substack{k=0,1,2,\ldots \\ \left[u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N\right) \cap [0,N] \neq \emptyset}} \left| \log \frac{\tau_{k+1}^N - \tau_k^N}{\tau_{k+1}^N - \tau_k^N} \right| \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{1.75}$$

Então $\exists n_2^N$ tal que $\gamma(\mu_n^N) < 1/N, \forall n \geq n_2^N$. Tomamos $n_N = \max\{n_1^N, n_2^N, N\}$. Assim, de (1.73), temos que

$$\sup_{0\leq t\leq N} r(x_n(t), x(\mu_n^N(t)) < 3/N \;\text{ e }\; \gamma(\mu_n^N) < 1/N, \;\; \forall n \geq n_N.$$

Variamos N e observamos que a sequência $\{n_N\}_N$ pode ser tomada estritamente crescente. Como $N \leq n_N$, temos que $\lim_{N\to\infty} n_N = \infty$, então podemos definir para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\hat{\lambda}_n = \begin{cases} \mu_n^N, & \text{se } n_N \leq n < n_{N+1}, \; N \geq 1 \\ Id, & \text{se } 1 \leq n < n_1 \end{cases}.$$

Precisamos mostrar que $\hat{\lambda}_n$ satisfaz a letra (b) desta proposição.

[56]Da definição de $u_{k,n}^N$

[57]Da convergência pontual.

- $\hat{\lambda}_n \in \Lambda$, pois se $n_N \leq n < n_{N+1},\ N \geq 1$, então $\hat{\lambda}_n = \mu_n^N \in \Lambda$ e se $1 \leq n < n_1$, então $\hat{\lambda}_n = Id \in \Lambda$.

- $\lim_{n\to\infty} \gamma(\hat{\lambda}_n) = 0$, pois se $n_N \leq n < n_{N+1},\ N \geq 1$, então $\lim_{n\to\infty} \gamma(\hat{\lambda}_n) = \lim_{n\to\infty} \gamma(\mu_n^N) = 0$ e se $1 \leq n < n_1$, então $\lim_{n\to\infty} \gamma(\hat{\lambda}_n) = \lim_{n\to\infty} \gamma(Id) = 0$.

- $\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T} r(x_n(t), x(\hat{\lambda}_n(t))) = 0$, $\forall T > 0$. De fato, seja $T > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T < N_0$ e $3/N_0 < \varepsilon$. Tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{N_0} \leq n_0 < n_{N_0+1}$, então $\forall n \geq n_0$ temos que $\exists N_n \geq N_0$ tal que $n \geq n_{N_n} \geq n_0 \geq n_{N_0}$ e $\hat{\lambda}_n = \mu_n^{N_n}$. Assim,

  $$\sup_{0\leq t\leq T} r(x_n(t), x(\hat{\lambda}_n(t))) \leq \sup_{0\leq t\leq N_n} r(x_n(t), x(\mu_n^{N_n}(t))) < \frac{3}{N_n} \leq \frac{3}{N_0} < \varepsilon,$$

  $\forall n \geq n_0$.

Destas observações obtemos que $\hat{\lambda}_n$ satisfaz (i).

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Stewart N. Ethier, Thomas G. Kurtz. *Markov Processes - Characterization and Convergence*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley-Interscience, Hoboken, New Jersey, 2005.

[2] Elon Lages Lima. *Curso de Análise*, Vol. 1. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 1995.

[3] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 1993.

[4] Pedro Jesus Fernandez. *Medida e Integração*, 2ª ed.. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2002.

[5] H. L. Royden. *Real Analysis*. The Macmillam Company. New York, 1963.

[6] Augusto Armando de Castro júnior. *Curso de Teoria da Medida*. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[7] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

[8] Edwin Hewitt, Karl Stromberg. *Real and Abstract Analysis*. Springer-Veralg, New York, 1965.