

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

Dinâmica de um feixe de partículas periodicamente focalizado

Jorge da Silva Moraes

Tese realizada sob orientação do Professores Dr. Felipe Barbedo Rizzato e Dr. Renato Pakter e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Porto Alegre

Junho, 2006

Para meus pais,
Rubem Marques de Moraes e Jovelina da Silva Moraes (in memoriam).

À minha esposa Marli
e
meu filho Maxwell, companheiros de todos momentos, que há muito iluminam o
meu caminho.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer aos orientadores desta tese, Prof. Felipe Rizzato e Prof. Renato Pakter, pela dedicação, confiança e paciência, ao longo desses anos de trabalho.

Sou muito grato aos professores Paulo Pureur Neto e Ruth de Souza Schneider, por haverem me dado as cartas de recomendação para o ingresso no doutorado, bem como a todos os professores do Instituto de Física pelo muito que me ensinaram.

Às direções da Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha (Novo Hamburgo), que no período de 2004 a 2006 dispensaram-me de algumas horas de trabalho semanal para a realização desta tese.

Não poderia esquecer da ajuda na parte computacional dos colegas Irapuan Rodrigues e Wilson Simeoni Jr., bem como as críticas do Günther; a eles o meu sincero agradecimento.

Ao meu irmão Carlos Alberto da Silva Moraes, ao amigo Getúlio Nicolau Fernandes e minha madrinha Iolanda Alves Fernandes, pelo incentivo e pelos bons conselhos dados em todos os momentos; a eles a minha gratidão.

Aos amigos Kleber João Andrade, Antenor Balbinot, Renete Cocco e Armindo Cassol, pelo muito que me ensinaram de fundamentos de Matemática e pelos seus exemplos de vida profissional.

Ao amigo Geraldo Beyer Machado, pelo incentivo e entusiasmo .

Aos meus primeiros professores de Física e grandes amigos, Luis Marcos Scolari e Milton Antônio Zaro, que foram os pioneiros em me apresentar as maravilhas desta ciência, o meu reconhecimento.

Aos colegas professores da Fundação Liberato, Ronaldo do Espírito Santo Rodrigues, João Batista Flesch, Luiz André Mützemberg, José Lino, Adriano Salvaro, Edi Grings e aos demais frequentadores do Laboratório de Física, pelo apoio e pelos produtivos momentos de discussão sobre Física e outros assuntos não tão científicos ... ! A eles um grande abraço !

Jorge da Silva Moraes

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Junho 2006

Resumo

Este trabalho objetiva investigar a estabilidade de um feixe de partículas periodicamente focalizado por um campo magnético, dando uma especial atenção às novas regiões de estabilidade que foram recentemente encontradas [46]. Primeiramente investigamos como o perfil do campo magnético focalizador influencia na estabilidade do feixe periodicamente focalizado [41]. A seguir, a importância das perturbações sem simetria axial sobre a estabilidade do feixe foi analisada [40]. Por fim, pesquisamos como o transporte de um feixe fora do centro de simetria do campo focalizador é alterado pela dinâmica de sua centróide, e como cargas induzidas no cilindro condutor que contém o feixe, influenciam a dinâmica e a estabilidade deste [38]. A fim de obtermos informações sobre a estabilidade não-linear dos vários tipos de soluções presentes em nosso problema, usamos os plots de Poincaré [33] e aplicamos o método de Newton-Raphson [41].

Abstract

In this work we investigate the stability of a particle beam periodically focused by a magnetic field, paying special attention to the new regions of the stability found recently [46]. First of all, we investigate how the profile of the focusing magnetic field influence the stability of the periodically focused beam [41]. Afterwards, the importance of perturbations without axial simmetry on the stability of the beam is analyzed [40]. Finally, we research how the transport of an off-axis beam is altered by the dynamics of the its centroid, and how induced charges in the conducting pipe encapsulating the beam influence its dynamics and stability [38]. To obtain information about the stability of several non-linear solutions presents in our problem, we use Poincaré's plots and apply the Newton-Raphson's method [41].

Sumário

Agradecimentos	ii
Lista de Figuras	vii
1 Dinâmica de feixes de partículas: introdução	1
2 Os modelos e a distribuição KV	3
2.1 O modelo para o feixe periodicamente focalizado e para o campo magnético focalizador	3
2.2 Descrição de Vlasov-Maxwell: a equação de Vlasov, instabilidade e equilíbrio de Vlasov-Maxwell	4
2.3 A equação do envelope do feixe e a função de distribuição de equilíbrio KV	7
2.3.1 Equações hamiltonianas de movimento nos referenciais do laboratório e de Larmor	7
2.3.2 A função de distribuição de Kapchinskij-Vladimirskij e a equação do envelope do feixe	11
2.3.3 Equação normalizada do envelope de um feixe casado sujeito a um campo magnético focalizador	15
3 Campo focalizador \times Estabilidade do feixe	16
3.1 Variações do perfil do campo magnético externo focalizador: o modelo	17
3.2 Estabilidade do feixe: análise da equação do envelope	19
3.3 Simulação numérica autoconsistente do feixe	24
4 Instabilidades sem simetria axial	27
4.1 Considerações iniciais	27
4.2 Equações de envelope mais gerais	28
4.3 Análise das soluções das equações de envelope	32
5 Centróide e o cilindro condutor	36
5.1 Considerações iniciais	36

5.2	O modelo e os métodos	38
5.3	Equação geral para o movimento da centróide	39
5.4	Análise de estabilidade	45
5.4.1	Modelamento de baixa dimensão	45
5.4.2	Simulações completas de multipartículas	47
5.5	Influência do cilindro condutor	49
6	Conclusões	52
	Apêndice A Equação para o campo magnético focalizador	55
	Apêndice B Superfícies de secção de Poincaré	59
	B.1 Diagrama de fase	59
	B.2 Superfície de secção ou plot de Poincaré	61
	Apêndice C Método de Newton-Raphson	67
	Referências Bibliográficas	69

Lista de Figuras

2.1	Representação do feixe de partículas periodicamente focalizado.	4
3.1	Alguns perfis do campo magnético focalizador ($\kappa_z(s)$) para diferentes valores do parâmetro Δ . Os outros parâmetros são $\eta = 0, 2$ e $\sigma_0 = 70^\circ$	19
3.2	Plot do espaço de parâmetros σ_0 versus Δ mostrando a localização das duas primeiras regiões de estabilidade para (a) $\eta = 0, 5$ e (b) $\eta = 0, 2$. A intensidade do feixe corresponde a $K = 5, 0$	22
3.3	Plots de Poincaré no espaço de fase r_b versus dr_b/ds para $K = 5, 0$ e (a) $\eta = 0, 5$, $\Delta = 10^{-1}$, $\sigma_0 = 297, 3^\circ$; (b) $\eta = 0, 5$, $\Delta = 10^4$, $\sigma_0 = 294, 2^\circ$; (c) $\eta = 0, 2$, $\Delta = 10^{-1}$, $\sigma_0 = 297, 3$; (d) $\eta = 0, 2$, $\Delta = 10^1$, $\sigma_0 = 357, 9^\circ$; (e) $\eta = 0, 2$, $\Delta = 10^2$, $\sigma_0 = 418, 4^\circ$; (f) $\eta = 0, 2$, $\Delta = 10^4$, $\sigma_0 = 420, 2^\circ$. Todos os casos correspondem a SRE com o mesmo índice de estabilidade $\alpha = -0, 58$	23
3.4	O raio de oscilação mínima das soluções estáveis casadas r_b^* como uma função de Δ para a SRE com $\eta = 0, 2$, $K = 5, 0$ e $\alpha = -0, 58$	24
3.5	Nos painéis (a) e (b), o valor rms das emitâncias transversas ε_x e ε_y versus s obtidas através de simulações numéricas auto-consistentes para os mesmos parâmetros usados nas figuras 3(c) e 3(f), respectivamente. No painel (c) a comparação do raio resultante do feixe obtido da equação do envelope 2.52 e as simulações auto-consistentes para os últimos três períodos apresentados no painel (b).	25
4.1	Diagrama de estabilidade para perturbações bidimensionais; $K = 3, 0$ e $\delta = 1, 0$	32
4.2	Razão entre os semi-eixos da secção elíptica, correspondentes à primeira (figura (a) - feixe com simetria axial - linha cheia) e segunda (figura (b) - feixe oscilando no modo quadrupolar - linha tracejada).	34
4.3	Diferença entre os semi-eixos de uma secção elíptica do feixe. Em (a) se caracteriza o feixe com simetria axial, enquanto que em (b), o feixe oscila no modo quadrupolar.	35

5.1	Esquema da distribuição do feixe da equação 5.13 e os correspondentes vetores. C representa a posição da centróide.	42
5.2	Diagrama de parâmetros indicando as regiões de envelope estável (linhas inclinadas para direita) e regiões de centróide instável (linhas inclinadas para esquerda), para $\eta = 0, 2$ e $K = 5, 0$	46
5.3	Simulação de multipartículas que validam os resultados de baixa dimensão. $N_b = 8000$, $\eta = 0, 2$, $\sigma_0 = 155^\circ$, $\Delta = 10^{-1}$ e $K = 5, 0$. (a) A dinâmica da centróide; (b) comparação da equação 5.11 do envelope e a simulação de multipartículas; (c) emitância obtida através das simulações de multipartículas.	48
5.4	Plots de Poincaré de x'_0 versus x_0 obtidos da equação 5.29. Em (a), $\eta = 0, 2$, $\sigma_0 = 140^\circ$, $\Delta = 10^{-1}$, $K = 5, 0$, e $a = 5, 0$. Em (b), o cilindro condutor é removido ($a \rightarrow \infty$) e, em (c) a aproximação do feixe suave $\kappa_z = \text{const.}$ é usada. Os demais parâmetros são os mesmos usados em (a).	51
B.1	Trajetórias no espaço de fase em duas dimensões.	61
B.2	Movimento no espaço de fase e definição da superfície de secção de Poincaré.	62
B.3	Representação para o caso de dois graus de liberdade.	62
B.4	Representação para o caso de três graus de liberdade.	63
B.5	Intersecção de uma trajetória sobre a superfície de energia com a superfície de secção α definida por $\theta_1 = \text{constante}$. (a) Curva invariante gerada pelas sucessivas intersecções da trajetória com α . (b) Ressonância primária $k = 5, l = 2$ mostrando as primeiras sete intersecções da trajetória com α . (c) Ilhas primárias em torno dos pontos fixos correspondentes a $k = 5, l = 2$ gerados pelas intersecções da trajetória com α . (d) Ressonância secundária com três saltos em torno da ressonância primária $k = 5, l = 2$. As primeiras 17 intersecções com α são mostradas. (e) Camada anular de caos gerada pelas intersecções de uma trajetória única com α , entre duas curvas invariantes. (f) Camada de caos contornada pelas curvas invariantes primária e secundária.	65
B.6	Trajetórias regulares, regiões de caos e separatriz.	66

Capítulo 1

Dinâmica de feixes de partículas: introdução

O estudo do movimento de partículas carregadas sob ação de campos externos começou a desenvolver-se no início do século vinte e, desde então, seus domínios de aplicação tornaram-se cada vez mais vastos [2, 26, 54].

A física de um intenso feixe de partículas em sistemas periodicamente focalizados é uma área ativa da pesquisa teórica e experimental [4, 11, 28, 29, 34, 48], onde campos externos com os mais variados perfis mantêm confinados feixes de íons ou elétrons de alta corrente e baixa emitância [39]. Essa área é crucial para o desenvolvimento de aceleradores de partículas e suas aplicações, tais como a produção de trítio, fontes de nêutrons por espalhamento, fusão de íons pesados, fontes de radiação coerente, e transmutação de resíduos nucleares [16, 32], bem como aplicações diversas na ciência básica [6, 13, 31, 37, 50, 58].

Um aspecto essencial no estudo de feixes de partículas periodicamente focalizados consiste na compreensão de suas propriedades de equilíbrio e estabilidade. A situação de equilíbrio resulta do balanço entre as forças focalizadoras devidas ao campo magnético externo aplicado e ao auto-campo magnético do feixe, e às forças desfocalizadoras, associadas às interações eletrostáticas entre as cargas do feixe e aos efeitos térmicos e de rotação rígida.

Análises feitas desde a década de 80, baseadas tanto na teoria cinética [13] quanto no estudo do envelope do feixe [7, 13, 24, 54], revelaram que num intervalo relativamente limitado de variação do campo focalizador existe somente uma solução de equilíbrio na qual o raio do feixe varia com a mesma periodicidade desse campo; tal solução é denominada de solução casada [41, 46]. Esses trabalhos indicam que acima de um certo valor de intensidade do campo focalizador a solução casada torna-se instável, impossibilitando o transporte do feixe acima desse limiar; tal limiar corresponde a um avanço de fase no vácuo de 90° (veja a definição 2.48 no capítulo 2).

Em trabalho recente [46], porém, mostrou-se que à medida que a intensidade do campo magnético focalizador for aumentada, novas soluções casadas surgem e não existe simplesmente um limiar acima do qual o transporte do feixe torna-se instável, mas sim sucessivas regiões de estabilidade interrompidas por trechos (ou em inglês *gaps*) nos quais as soluções casadas são instáveis, ou simplesmente não existem. Análises detalhadas sobre os efeitos da intensidade do campo revelaram que apesar da presença de algumas características diferentes relacionadas às bifurcações das soluções casadas, as novas regiões de estabilidade estão presentes tanto nos feixes dominados pela emitância, como por aqueles dominados pela carga espacial [26]. O mecanismo dinâmico responsável pelos sucessivos gaps é analisado na referência [41].

Até este trabalho, para a região original de estabilidade foram considerados apenas perfis senoidal ou tipo onda quadrada para o campo externo focalizador; o primeiro fato que investigamos é como a estabilidade do feixe é afetada frente às variações do perfil do campo focalizador, não apenas na região original como também nas novas regiões de estabilidade [51].

Dando prosseguimento ao nosso trabalho, passamos a analisar a importância de instabilidades sem simetria axial no transporte do feixe [9]. Ao realizarmos este estudo aplicamos o método de Newton-Raphson com o objetivo de determinar a estabilidade das soluções casadas e mostramos, de fato, a existência de instabilidades do tipo quadrupólo que aparecem de forma análoga, tanto na região usual ($\sigma_0 < 180^\circ$) quanto nas novas zonas de estabilidade [40], onde σ_0 é um parâmetro adimensional proporcional ao valorrms do campo magnético focalizador (veja a seção 2.3.2, especialmente a equação 2.46).

A influência da dinâmica da centróide do feixe sobre o seu transporte também foi estudada e, em especial, demonstramos a existência de uma solução de equilíbrio cinético para a dinâmica de feixes cuja centróide esteja deslocada do eixo de simetria do sistema. A influência do cilindro que contém o feixe focalizado também foi pesquisada, tanto em perfis senoidais do campo focalizador, como também em perfis mais complexos [39, 38].

Ao finalizarmos este trabalho fazemos uma síntese dos resultados discutidos em detalhes em cada capítulo, bem como indicamos alguns estudos sobre a física de feixes periodicamente focalizados que poderão ser realizados e, assim, dar continuidade ao que fizemos até aqui.

Capítulo 2

Os modelos e a distribuição KV

2.1 O modelo para o feixe periodicamente focalizado e para o campo magnético focalizador

O feixe de partículas, que é o objeto do nosso estudo, é fino, contínuo e se propaga com velocidade axial média $\mathbf{v} = \beta_b c \hat{\mathbf{e}}_z$ através de um campo magnético focalizador dado em geral por

$$\mathbf{B}(x, y, s) = B_z(s) \hat{\mathbf{e}}_z - \frac{1}{2} B'_z(s) (x \hat{\mathbf{e}}_x + y \hat{\mathbf{e}}_y), \quad (2.1)$$

onde $s = z = \beta_b c t$ é a coordenada ao longo do eixo do feixe, sendo que o índice (t) denota a derivada com relação a s e c é a velocidade da luz no vácuo. A obtenção desta equação é mostrada em detalhes no apêndice A. Esse campo magnético que atua sobre o feixe é periódico, ou seja, $B_z(s) = B_z(s + S)$, onde S é o comprimento de periodicidade do campo focalizador, conforme se representa na figura 2.1. No capítulo 3 mostraremos com maiores detalhes como variaremos o perfil do campo magnético focalizador e as influências dessas variações na estabilidade do feixe. O campo magnético focalizador é representado pela grandeza $\kappa_z(s)$, que é periódica, isto é, $\kappa_z(s) = \kappa_z(s + S)$ e dada por

$$\kappa_z(s) = \frac{q^2 B_z^2(s)}{4 \gamma_b^2 \beta_b^2 (m c^2)^2}. \quad (2.2)$$

Uma grandeza que aparece com bastante frequência neste trabalho é a perveância, definida por

$$K = \frac{2q^2 N}{\gamma_b^3 \beta_b^2 m c^2}, \quad (2.3)$$

que é uma medida da densidade de cargas do feixe. Nessas equações, $\beta_b = v/c$ e $\gamma_b = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ é o fator relativístico.

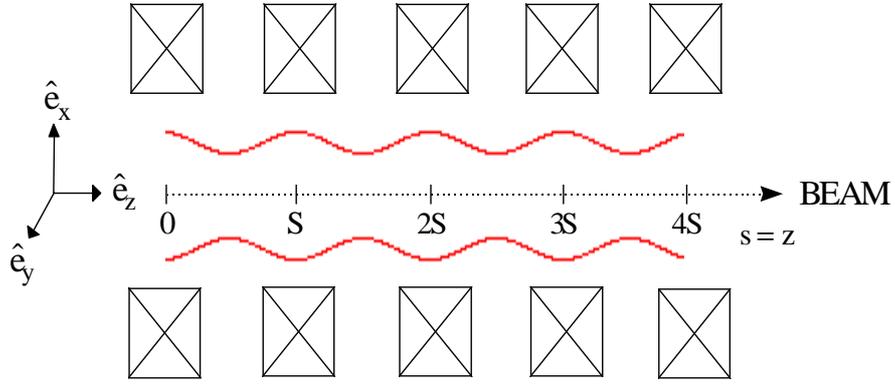


Figura 2.1: Representação do feixe de partículas periodicamente focalizado.

2.2 Descrição de Vlasov-Maxwell: a equação de Vlasov, instabilidade e equilíbrio de Vlasov-Maxwell

Nesta secção, vamos primeiramente considerar um sistema de partículas com características mais gerais do que aquele que forma o feixe especificado na secção anterior e, a seguir, faremos algumas simplificações para descrever de maneira mais direta o feixe que analisamos neste trabalho.

Seja um sistema não-neutro de partículas carregadas, onde uma partícula da espécie “ j ” tenha carga e massa de repouso respectivamente iguais a q_j e m_j ; tomando uma escala de tempo desprezível relativamente ao tempo de colisão entre duas partículas, a função de distribuição de uma partícula para a j -ésima componente é $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ e satisfaz à equação não-linear de Vlasov [13, 14, 16, 20, 42, 55]

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + q_j \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] f_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = 0, \quad (2.4)$$

onde \mathbf{v} e \mathbf{p} são respectivamente a velocidade e o momentum relacionados por

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\gamma m_j} = \frac{\mathbf{p}}{m_j \sqrt{1 + \mathbf{p}^2 / (m_j c)^2}}; \quad (2.5)$$

neste contexto sabemos que a dinâmica da partícula é relativística e $\gamma \equiv \sqrt{1 + \mathbf{p}^2 / (m_j c)^2}$ é o fator relativístico da massa. Como \mathbf{x} e \mathbf{p} são variáveis independentes e levando-se em conta que $\partial / \partial \mathbf{p} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$, a equação 2.4 pode ser expressa equivalentemente

como

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} f_j) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left[q_j \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) f_j \right] = 0, \quad (2.6)$$

que tem a forma de uma equação de continuidade em um espaço de fase hexadimensional (\mathbf{x}, \mathbf{p}) . Os campos elétrico e magnético resultantes, $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$, nas equações 2.4 e 2.6 são determinados auto-consistentemente das equações de Maxwell,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \sum_j q_j \int d^3 p \mathbf{v} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{ext}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \sum_j q_j \int d^3 p f_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + 4\pi \rho_{\text{ext}}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

A segunda e terceira equações em 2.7 nos permitem também incluir os efeitos de cargas e correntes externa [36, 53], $(\rho_{\text{ext}}$ e $\mathbf{J}_{\text{ext}})$. Em um feixe de partículas, cada carga elétrica fica sob ação dos auto-campos elétrico e magnético gerados pelas cargas elétricas do feixe, \mathbf{E}^{auto} e \mathbf{B}^{auto} , e também sob a ação do campo magnético externo focalizador; assim, de uma maneira geral, os campos elétrico e magnético podem ser expressos como

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}^{\text{foc}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{E}^{\text{auto}}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{B}^{\text{foc}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}^{\text{auto}}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Neste contexto, os auto-campos gerados pela carga líquida e pela densidade de corrente são, respectivamente, dados por

$$\begin{aligned} &\sum_j q_j \int f_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 p, \\ &\sum_j q_j \int \mathbf{v} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 p. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Considerando-se as interações não-lineares coletivas entre as partículas com os campos focalizadores aplicados e a média dos auto-campos gerados, as equações 2.4 e 2.6 representam o teorema de Liouville para a evolução incompressível de $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ no espaço de fase hexadimensional. Convém ressaltar que as equações de Vlasov-Maxwell são altamente não-lineares devido ao fato de que $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ poder ser modificada pelos auto-campos gerados, que, então, evoluem como uma função de distribuição de cargas.

Uma importante escala de tempo intrínseca associada à equação de Vlasov (2.4) é $1/\omega_{pj}$, onde $\omega_{pj} = \sqrt{4\pi n_j q_j^2 / m_j}$ é conhecida como frequência de plasma e $n_j = \int f_j d^3 p$ é a densidade do número de partículas. As equações 2.4 e 2.8 podem ser

aplicadas a feixes de partícula única não neutra ($j = b$, que é o caso deste trabalho), plasmas que consistam exclusivamente de elétrons ($q_j = -e$) ou íons ($q_j = +Z_i e$), plasmas não neutros ou a plasmas eletricamente neutros, nos quais há uma mistura de elétrons e íons componentes [13, 15, 16, 43].

Sob as condições de estado quase-estacionário, uma análise de equilíbrio das equações 2.4 e 2.7 é feita tomando-se $\partial/\partial t = 0$ e olhando-se para as soluções estacionárias, $f_j^0(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, $\mathbf{E}^0(\mathbf{x})$ e $\mathbf{B}^0(\mathbf{x})$, que satisfazem às equações

$$\left[\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + q_j \left(\mathbf{E}^0 + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}^0 \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] f_j^0(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0 \quad (2.10)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}^0 &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B}^0 &= \frac{4\pi}{c} \left[\sum_j q_j \int \mathbf{v} f_j^0(\mathbf{v}, \mathbf{p}) d^3 p + \mathbf{J}_{\text{ext}}(\mathbf{x}) \right], \\ \nabla \cdot \mathbf{E}^0 &= 4\pi \left[\sum_j q_j \int f_j^0(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d^3 p + \rho_{\text{ext}}(\mathbf{x}) \right], \\ \nabla \cdot \mathbf{B}^0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Uma análise da equação 2.10 reduz-se à determinação de constantes de movimento de partícula única para os campos em equilíbrio, $\mathbf{E}^0(\mathbf{x})$ e $\mathbf{B}^0(\mathbf{x})$. Para mais aplicações de interesse aqui, $\mathbf{E}^0(\mathbf{x})$ é produzido pela falta de neutralidade da carga em equilíbrio, ou seja, $\sum_j q_j \int f_j^0(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d^3 p \neq 0$, e $\mathbf{B}^0(\mathbf{x})$ gerado pelas fontes externas de corrente, bem como pelo equilíbrio das correntes transportadas pelas cargas componentes do sistema. Podemos observar que os efeitos de equilíbrio dos auto-campos estão incorporados nas equações 2.10 e 2.11 de uma forma auto-consistente. Além disso, observa-se que as equações de equilíbrio 2.10 e 2.11 são não-lineares para a maioria das aplicações de interesse. Observe-se que o termo equilíbrio usado neste contexto não pode ser confundido com equilíbrio térmico. Para uma dada configuração de campo externo aplicado, em geral, é possível o uso do equilíbrio auto-consistente de Vlasov; tal equilíbrio consiste em estados estacionários que podem existir numa escala temporal menor do que o tempo de colisão binária. Dado um específico equilíbrio, este poderá ser instável desde que haja perturbações sobre o crescimento do equilíbrio no tempo ou no espaço.

2.3 A equação do envelope do feixe e a função de distribuição de equilíbrio KV

No final da década de 50, Kapchinskij e Vladimirkij formularam o primeiro modelo de função de distribuição de equilíbrio para um feixe contínuo de partículas sujeito a um campo focalizador periódico; tal modelo incluía os efeitos de espaço-carga e corrente do feixe. A equação do envelope é que determina a evolução do tamanho da secção transversal do feixe de partículas sujeito ao campo magnético focalizador. A equação normalizada do envelope será deduzida e caracterizada por dois parâmetros: a intensidade do campo magnético focalizador e a perveância do auto-campo do feixe. As propriedades da equação do envelope são estudadas numa ampla região de parâmetros espaciais sem usarmos a aproximação de linearização sobre o equilíbrio Kapchinskij-Vladimirkij (KV). Na primeira subsecção vamos usar as equações hamiltonianas de movimento para partícula única, tanto nos referenciais de Larmor como do laboratório, na aproximação paraxial. Na subsecção seguinte construiremos a função de distribuição de equilíbrio KV e, a seguir, deduziremos a equação de envelope do feixe.

2.3.1 Equações hamiltonianas de movimento nos referenciais do laboratório e de Larmor

O feixe de partículas que estamos considerando já foi descrito na secção anterior, bem como o campo magnético periódico que o focaliza, equação 2.1, na aproximação do feixe fino. O potencial vetor para o campo magnético aplicado pode ser escolhido como

$$\mathbf{A}^{\text{ext}}(x, y, s) = \frac{1}{2}B_z(s)(x\hat{\mathbf{e}}_y - y\hat{\mathbf{e}}_x), \quad (2.12)$$

com $\mathbf{B}^{\text{ext}} = \nabla \times \mathbf{A}^{\text{ext}}$.

Na aproximação paraxial [13] o movimento da partícula em qualquer plano transversal do feixe é considerado como sendo não-relativístico, de modo que o parâmetro Budker, ν_B , seja pequeno comparado com a unidade [5, 16], ou seja, $\nu_B = q^2N/(mc^2) \ll 1$, onde $N = \int dx dy n_0(x, y, s)$ é o número de partículas por unidade axial de comprimento do feixe e m e q são a massa de repouso e a carga de cada partícula, respectivamente. Sob essas considerações, os auto-campos elétrico e magnético devidos ao intenso feixe de partículas carregadas pode ser dado aproximadamente por

$$\mathbf{E}^{(\text{auto})}(x, y, s) = -(\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial y})\Phi^{(\text{auto})}(x, y, s) \quad (2.13)$$

e

$$\mathbf{B}^{(\text{auto})}(x, y, s) = (\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial y} - \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial x})A_z^{(\text{auto})}(x, y, s), \quad (2.14)$$

onde o potencial escalar para o auto-campo elétrico satisfaz à equação de Poisson

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi^{(\text{auto})}(x, y, s) = -4\pi q n_0(x, y, s) \quad (2.15)$$

sendo o potencial vetor para o auto-campo magnético dado por

$$\mathbf{A}^{(\text{auto})}(x, y, s) = \beta_b \Phi^{(\text{auto})}(x, y, s) \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (2.16)$$

Faremos a suposição de que a densidade de partículas no equilíbrio, $n_0(x, y, s)$, na equação 2.15, seja uniforme em qualquer secção transversal do feixe cilíndrico com raio $r_b(s)$, ou seja,

$$n_0(x, y, s) = \begin{cases} N/[\pi r_b^2(s)], & \text{para } 0 \leq r < r_b(s) \\ 0, & \text{para } r > r_b(s), \end{cases} \quad (2.17)$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a coordenada radial e $r_b(s)$ é a função envelope, que especifica a dimensão transversal do feixe. Usando-se as equações 2.15 e 2.17, obtemos que o auto-potencial escalar do feixe é dado por

$$\Phi^{(\text{auto})}(x, y, s) = -\frac{qNr^2}{r_b^2(s)}, \quad (2.18)$$

para $r < r_b$, ou seja, no interior do feixe. No referencial do laboratório, as equações de movimento são obtidas a partir do hamiltoniano de partícula única,

$$H(x, y, s, P_x, P_y, P_z) = [c^2(P_x - \frac{q}{c}A_x^{(\text{ext})})^2 + c^2(P_y - \frac{q}{c}A_y^{(\text{ext})})^2 + c^2(P_z - \frac{q}{c}A_z^{(\text{auto})})^2 + (mc^2)^2]^{\frac{1}{2}} + q\Phi^{(\text{auto})}, \quad (2.19)$$

onde (s, P_z) é um par de variáveis canonicamente conjugadas e o momentum canônico \mathbf{P} está relacionado ao momentum mecânico \mathbf{p} por

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{q}{c}[\mathbf{A}^{(\text{ext})} + \mathbf{A}^{(\text{auto})}], \quad (2.20)$$

lembrando que $s = \beta_b ct$ é a coordenada axial e $\beta_b c$ é a velocidade axial média do feixe de partículas. Uma vez que as componentes das velocidades das partículas em qualquer secção transversal do feixe sejam não relativísticas na aproximação paraxial, o momentum mecânico $p_z = \gamma_b m \beta_b c$, pode ser tratado como uma constante; assim sendo, o hamiltoniano completo é aproximadamente dado por

$$H = \gamma_b mc^2 + H_-, \quad (2.21)$$

onde $\gamma_b = (1 - \beta_b^2)^{-1/2} = \text{constante}$ e o hamiltoniano para o movimento transversal é definido por

$$H_-(x, y, P_x, P_y, s) = \frac{1}{2\gamma_b m} \left[P_x + \frac{qB_z(s)}{2c} y \right]^2 + \left[P_y - \frac{qB_z(s)}{2c} x \right]^2 - \frac{q^2 N}{\gamma_b r_b^2(s)} (x^2 + y^2). \quad (2.22)$$

É bastante comum neste tipo de formalismo o uso de um hamiltoniano e de momenta canônicos transversos normalizados, onde tais grandezas são dadas por

$$\begin{aligned} \hat{P}_x &= \frac{P_x}{\gamma_b m \beta_b c}, \\ \hat{P}_y &= \frac{P_y}{\gamma_b m \beta_b c}, \\ \hat{H}_- &= \frac{H_-}{\gamma_b m (\beta_b c)^2}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

sendo o parâmetro de comprimento do campo focalizador e o parâmetro de auto-campo normalizados dados por

$$\sqrt{\kappa_z(s)} = \frac{qB_z(s)}{2\gamma_b \beta_b m c^2}, \quad (2.24)$$

e

$$\kappa_s = \frac{K}{r_b^2(s)}, \quad (2.25)$$

respectivamente. A grandeza $K = 2q^2 N / (\gamma_b^3 \beta_b^2 m c^2)$ é a perveância normalizada do feixe. Fazendo-se uso de toda notação e relações definidas anteriormente, podemos expressar o hamiltoniano para o movimento transversal das partículas do feixe como

$$\hat{H}_-(x, y, \hat{P}_x, \hat{P}_y, s) = \frac{1}{2} \{ [\hat{P}_x + y\sqrt{\kappa_z(s)}]^2 + [\hat{P}_y - x\sqrt{\kappa_z(s)}]^2 - \kappa_s(s)(x^2 + y^2) \}. \quad (2.26)$$

As equações de movimento para partícula única no referencial do laboratório são

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial \hat{H}_-}{\partial \hat{P}_x} = \hat{P}_x + y\sqrt{\kappa_z(s)}, \\ y' &= \frac{\partial \hat{H}_-}{\partial \hat{P}_y} = \hat{P}_y - x\sqrt{\kappa_z(s)}, \\ \hat{P}_x' &= -\frac{\partial \hat{H}_-}{\partial x} = \hat{P}_y \sqrt{\kappa_z(s)} - [\kappa_z(s) - \kappa_s(s)]x, \\ \hat{P}_y' &= -\frac{\partial \hat{H}_-}{\partial y} = -\hat{P}_x \sqrt{\kappa_z(s)} - [\kappa_z(s) - \kappa_s(s)]y. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Convém ressaltar que os movimentos nas direções x e y são fortemente acoplados, no referencial do laboratório.

O nosso próximo passo será o de realizar uma transformação canônica do referencial do laboratório para o referencial de Larmor. O referencial de Larmor rotaciona em torno do referencial do laboratório com a velocidade angular

$$\Omega = \beta_b c \sqrt{\kappa_z(s)} = \frac{qB_z(s)}{2\gamma_b mc}, \quad (2.28)$$

que corresponde à metade da frequência relativística local. Uma escolha para a função geradora da transformação $(x, y, \hat{P}_x, \hat{P}_y) \longrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{P}_x, \tilde{P}_y)$ é

$$\begin{aligned} F_2(x, y; \hat{P}_x, \hat{P}_y, s) &= x \cos[\phi(s)] - y \sin[\phi(s)] \tilde{P}_x \\ &\quad + x \sin[\phi(s)] - y \cos[\phi(s)] \tilde{P}_y, \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde $\phi(s) = \int_{s_0}^s ds' \sqrt{\kappa_z(s')}$ e F_2 definindo a seguinte transformação:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x \cos[\phi(s)] - y \sin[\phi(s)], \\ \tilde{y} &= x \sin[\phi(s)] + y \cos[\phi(s)], \\ \tilde{P}_x &= \hat{P}_x \cos[\phi(s)] - \hat{P}_y \sin[\phi(s)], \\ \tilde{P}_y &= \hat{P}_x \sin[\phi(s)] + \hat{P}_y \cos[\phi(s)]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Após havermos realizado essas transformações, podemos expressar o hamiltoniano em função das novas variáveis, $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{P}_x, \tilde{P}_y)$, como

$$\tilde{H}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{P}_x, \tilde{P}_y, s) = \frac{1}{2} \left[\tilde{P}_x^2 + \tilde{P}_y^2 + \kappa(s)(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) \right], \quad (2.31)$$

onde definimos $\kappa(s) = \kappa_z(s) - \kappa_s(s)$ e usamos a propriedade

$$\tilde{H}_- = \hat{H}_- + \frac{\partial F_2}{\partial s}. \quad (2.32)$$

Assim, as equações de movimento no referencial de Larmor são

$$\begin{aligned} \tilde{x}' &= \tilde{P}_x, \\ \tilde{y}' &= \tilde{P}_y, \\ \tilde{P}_x' &= -\kappa(s)\tilde{x}, \\ \tilde{P}_y' &= -\kappa(s)\tilde{y}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Combinando-se a primeira com a terceira das equações anteriores e, similarmente, a segunda com a quarta equações, obtemos respectivamente,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + \kappa(s)\tilde{x} &= 0 \\ \frac{d^2\tilde{y}}{ds^2} + \kappa(s)\tilde{y} &= 0.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Para casos particulares desta análise em que a função $\kappa(s)$ for ímpar e periódica, ou seja, $\kappa(s) = \kappa(-s) = \kappa(s + S)$, as duas últimas equações são conhecidas na literatura matemática como equações de Hill [21, 33].

Cabe-nos comentar que dois motivos nos levaram a realizar a transformação do sistema de coordenadas do laboratório para o de Larmor: primeiramente porque sendo a transformação uma rotação pura, ela preserva a invariância de um perfil de densidade de equilíbrio com simetria axial, ou seja, $n_0(r, s) = n_0(\tilde{r}, s)$, onde $\tilde{r} = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}$. Em segundo lugar, o movimento na direção \tilde{x} está desacoplado do movimento na direção \tilde{y} para um perfil com densidade uniforme definido pela equação 2.17. Os desacoplamento dos movimentos nessas duas direções somente poderá ser realizado através de uma rotação pura se, e somente se, o perfil da densidade de equilíbrio tiver simetria axial e for uniforme no feixe.

2.3.2 A função de distribuição de Kapchinskij-Vladimirskij e a equação do envelope do feixe

A distribuição de Kapchinskij-Vladimirskij (KV) é a única distribuição auto-consistente conhecida no equilíbrio de Vlasov para um intenso feixe de partículas carregadas num campo magnético externo focalizador, incluindo os efeitos de auto-campo. Na seção anterior, obtivemos as equações de movimento tanto no referencial do laboratório, como no referencial de Larmor. Devido a essa última configuração ter um alto grau de simetria, decorre uma sutil diferença entre essas duas configurações. Por momento, objetivamos obter a função de distribuição KV para um campo magnético focalizador solenoidal e apontar as diferenças entre as duas configurações mencionadas anteriormente.

Para obtermos a função de distribuição de equilíbrio KV de um intenso feixe de partículas carregadas propagando-se através de um campo magnético focalizador solenoidal e periódico, usaremos o mesmo tratamento de Courant e Snyder [12] para gradientes sincrotron alternados. Definimos os parâmetros dos auto-campos normalizados,

$$\kappa_x^{\text{auto}} = \frac{K}{a(s) + b(s)}\tag{2.35}$$

e

$$\kappa_y^{\text{auto}} = \frac{K}{a(s) + b(s)}, \quad (2.36)$$

onde K é a perveância (equação 2.3) e $a(s)$ e $b(s)$ são os semi-eixos de um feixe com secção transversal elíptica. Como neste caso estamos tratando de um feixe com secção transversal circular, torna-se evidente que $a(s) = b(s) = r_b$, de modo que $\kappa_x = K/(2r_b)$ e $\kappa_y = K/(2r_b)$ e que existe a simetria $\kappa_x(s) = \kappa_y(s) = \kappa(s)$. Definimos $\tilde{x}(s)$ e $\tilde{y}(s)$ como

$$\tilde{x}(s) = A_x \varpi(s) \cos \left| \int_{s_0}^s \frac{ds'}{\varpi^2(s')} + \Psi_{x0} \right| \quad (2.37)$$

e

$$\tilde{y}(s) = A_y \varpi(s) \text{sen} \left| \int_{s_0}^s \frac{ds'}{\varpi^2(s')} + \Psi_{y0} \right|. \quad (2.38)$$

Nas equações 2.37 e 2.38, $\varpi(s) = \varpi(s+S)$ é a raiz quadrada da função de amplitude e A_x, A_y, Ψ_{x0} e Ψ_{y0} são constantes que podem ser determinadas a partir das condições iniciais, $\tilde{x}(s_0), \tilde{y}(s_0), \tilde{P}_x(s_0) = \tilde{x}'(s_0)$ e $\tilde{P}_y(s_0) = \tilde{y}'(s_0)$. Substituindo a equação 2.37 na primeira e terceira equações em 2.33 e a equação 2.38 nas segunda e quarta equações em 2.33, concluímos que as equações 2.37 e 2.38 resolvem as equações de Hamilton 2.33 e, dessa forma, obtemos $\varpi(s)$ que é a solução da equação diferencial

$$\frac{d^2 \varpi}{ds^2} + \kappa(s) \varpi = \frac{1}{\varpi^3}, \quad (2.39)$$

sujeita à condição periódica $\varpi(s) = \varpi(s+S)$.

Por conveniência, vamos fazer a transformação canônica $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{P}_x, \tilde{P}_y) \longrightarrow (X, Y, P_X, P_Y)$ definida por [24]

$$\begin{aligned} X &= \frac{\tilde{x}}{\varpi}, \\ Y &= \frac{\tilde{y}}{\varpi}, \\ P_X &= \varpi \tilde{P}_x + \frac{d\varpi}{ds} \tilde{x}, \\ P_Y &= \varpi \tilde{P}_y + \frac{d\varpi}{ds} \tilde{y}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde a função geradora é

$$\tilde{F}_2(\tilde{x}, \tilde{y}, ; \tilde{P}_X, \tilde{P}_Y, s) = \frac{\tilde{x}}{\varpi} \left(P_X + \frac{\tilde{x}}{2} \frac{d\varpi}{ds} \right) + \frac{\tilde{y}}{\varpi} \left(P_Y + \frac{\tilde{y}}{2} \frac{d\varpi}{ds} \right). \quad (2.41)$$

Assim, a hamiltoniana para as novas variáveis (X, Y, P_X, P_Y) pode ser expressa como

$$H(X, Y, P_X, P_Y, s) = \frac{1}{2\varpi^2(s)} \left(X^2 + Y^2 + P_X^2 + P_Y^2 \right), \quad (2.42)$$

que é proporcional à soma das duas constantes de movimento independentes seguintes:

$$A_x^2 = X^2 + P_X^2 = \text{constante} \quad (2.43)$$

e

$$A_y^2 = Y^2 + P_Y^2 = \text{constante}, \quad (2.44)$$

de modo que a constância das quantidades dadas pelas duas últimas equações pode ser comprovada a partir das equações 2.37, 2.38 e 2.40.

A função de distribuição de Kapchinskij-Vladimirskij [26] pode ser expressa como

$$f_0(X, Y, P_X, P_Y) = \frac{N}{\pi^2 \epsilon} \delta(X^2 + Y^2 + P_X^2 + P_Y^2 - \epsilon), \quad (2.45)$$

onde o parâmetro ϵ representa a emitância não normalizada do feixe. Observe-se que a equação 2.45 descreve uma classe de equilíbrios auto-consistentes de Vlasov ($\partial/\partial s = 0$) para um intenso feixe de partículas carregadas sujeito a um campo magnético solenoidal e periódico, incluindo-se os efeitos dos auto-campos elétrico e magnético associados à carga espacial e corrente do feixe [13]. Realizando-se a integração da função de distribuição KV sobre o espaço dos momenta, (P_X, P_Y) , obtemos que a densidade de partículas $n_0(x, y, s)$ é dada por uma função do tipo degrau na equação 2.17, resultando em

$$r_b(s) = \sqrt{\epsilon \varpi(s)}. \quad (2.46)$$

Devemos dar atenção a dois fatos: primeiramente, a hipótese de se tomar o perfil da densidade dado na subseção anterior consistente com a escolha da função de distribuição KV dada pela equação 2.45 e, em segundo lugar, é que a equação 2.46 também pode ser obtida independentemente se observarmos a simetria axial do feixe e o fato de que o raio $r_b(s)$ desse feixe corresponde ao valor máximo atribuído a $\tilde{x}(s)$ ao longo do eixo \tilde{x} quando $A_y = 0$. Esses resultados nos indicam que $A_x = A_x^{\max} = \sqrt{\epsilon}$ e $\cos[\Psi_{x0} + \int_{s_0}^s ds' / \varpi^2(s')] = 1$ na equação 2.37, o que leva à equação 2.46. Através das equações 2.39 e 2.46 chegamos à equação do envelope

$$\frac{d^2 r_b}{ds^2} + \kappa_z(s) r_b - \frac{K}{r_b} - \frac{\epsilon^2}{r_b^3} = 0. \quad (2.47)$$

Na literatura, a equação 2.47 é também conhecida como equação de Kapchinskij-Vladimirskij [9, 16, 32], sendo que nela se faz uso da relação $\kappa(s) = \kappa_z(s) - \kappa_s(s)$ e da equação 2.25.

Na presença de um campo magnético com configuração solenoidal, a simetria axial tanto do campo magnético focalizador como do perfil da densidade do feixe, nos permite descrever a evolução do equilíbrio KV através de uma única equação diferencial ordinária de segunda ordem. Para um campo magnético cuja configuração

fosse do tipo quadrupólo de gradiente alternado, isto já não seria possível; nesse caso, teríamos um feixe cuja densidade seria uniforme sobre uma área de seção transversal elíptica e cujo envelope deveria ser descrito por duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem acopladas [13, 26].

Com o intuito de construirmos completamente a função de distribuição KV para um intenso feixe de partículas carregadas focalizado por um feixe solenoidal periódico, soluções periódicas da equação 2.47 ainda devem ser obtidas. O procedimento para encontrar uma solução periódica estável para a equação 2.47 com periodicidade de comprimento S será discutido na próxima subseção, quando nos referirmos às soluções casadas. Para um feixe casado em equilíbrio, o avanço de fase sobre um período axial do campo focalizador é definido por

$$\sigma \equiv \int_{s_0}^{s_0+S} \frac{ds}{\varpi^2(s)} = \epsilon \int_{s_0}^{s_0+S} \frac{ds}{r_b^2(s)}, \quad (2.48)$$

onde fizemos uso da equação 2.46. Conforme mostraremos na subseção seguinte, o avanço de fase sem a carga espacial, ou seja, com $\sigma_0 = \sigma|_{K=0}$, constitui-se num importante parâmetro para caracterizar o campo magnético focalizador.

A emitância não normalizada ϵ , na equação 2.45 é uma medida da área no espaço de fase ocupada pelo feixe. A partir da equação 2.47, isso nos leva a concluir que ϵ corresponde à área mínima, tanto no plano de fase (X, P_X) quanto no (Y, P_Y) , o que é necessário para englobar todas as partículas descritas pela função de distribuição KV, f_0 . Por outro lado, é imediato mostrar-se que a emitância não normalizada ϵ é igual ao valor quadrático médio da emitância definida por [30, 52]

$$\epsilon_{\text{rms}} = 4\sqrt{\langle X^2 \rangle \langle P_X^2 \rangle - \langle XP_X \rangle^2}, \quad (2.49)$$

sendo que nesta equação, a média da função de fase $\chi(X, Y, P_X, P_Y)$ sobre o espaço de fase (X, Y, P_X, P_Y) é definida por

$$\langle \chi \rangle = \frac{\int \chi f_0 d\Gamma}{\int f_0 d\Gamma}, \quad (2.50)$$

onde $d\Gamma = dXdYdP_XdP_Y$. Assim, obtivemos a equação que relaciona a emitância não normalizada ϵ com o momentum angular canônico $P_{\theta m}$ relativo às partículas da distribuição KV.

2.3.3 Equação normalizada do envelope de um feixe casado sujeito a um campo magnético focalizador

Para finalizar esta secção vamos obter a equação normalizada do envelope do feixe; para isso, introduziremos parâmetros sem dimensão e variáveis assim definidos:

$$\begin{aligned}\frac{s}{S} &\rightarrow s, \\ \frac{r_b}{\sqrt{\epsilon S}} &\rightarrow r_b, \\ S^2 \kappa_z &\rightarrow \kappa_z, \\ \frac{SK}{\epsilon} &\rightarrow K,\end{aligned}\tag{2.51}$$

de modo que a equação 2.47 adquire a seguinte forma normalizada

$$\frac{d^2 r_b}{ds^2} + \kappa_z(s) r_b - \frac{K}{r_b} - \frac{1}{r_b^3} = 0,\tag{2.52}$$

que é equivalente às duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem,

$$\frac{dr_b}{ds} = r'_b\tag{2.53}$$

e

$$\frac{dr'_b}{ds} = -\kappa_z(s) r_b + \frac{K}{r_b} + \frac{1}{r_b^3}.\tag{2.54}$$

A equação normalizada do envelope do feixe 2.52 agora se apresenta caracterizada por dois parâmetros, $\kappa_z(s)$ e K , relacionados às forças focalizadoras devidas ao campo magnético periódico externo e às forças desfocalizadoras devidas aos auto-campos gerados pelo próprio feixe, respectivamente. Na equação 2.52, $r_b(s) = r_{b\text{dimensional}}/\sqrt{S\epsilon}$ é o raio normalizado do envelope do feixe e K é a perveância normalizada do feixe (veja a definição dada na equação 2.3), onde ϵ é a emitância não normalizada do feixe, N_b é o número de partículas por unidade de comprimento axial, e q , m e $\gamma = (1 - \beta_b^2)^{-1/2}$ são a carga, massa (de cada partícula do feixe) e o fator relativístico do feixe de partículas, respectivamente.

Capítulo 3

Campo focalizador \times Estabilidade do feixe

Conforme mencionado anteriormente, um aspecto fundamental no estudo de feixes de partículas periodicamente focalizados consiste na compreensão de suas propriedades de equilíbrio e estabilidade [17, 36]. Este estudo não possui apenas importância puramente teórica, uma vez que o aparato experimental que produz o campo magnético focalizador pode não conferir a este campo um perfil senoidal ou tipo onda quadrada. Assim, cabe-nos averiguar se as novas soluções casadas terão uma forte dependência das componentes oscilatórias do campo focalizador externo não senoidal e como isto influirá na largura dos *gaps* de instabilidade [46, 51]. Cabe ressaltar que outros modelos analisam diferentes perfis de campos focalizadores, mas na ausência da carga espacial [3].

Neste capítulo, empreendemos uma investigação da estabilidade do envelope do feixe focalizado por um campo magnético periódico externo cujo perfil pode ser variado e, dessa forma, mostramos de uma maneira mais realista e detalhada as configurações do sistema. Consideramos um feixe de alta intensidade (corrente) sujeito inicialmente a um campo focalizador externo periódico senoidal e cujo perfil vai evoluindo até o tipo onda quadrada, através da variação contínua de um parâmetro. Em contraste com a região original de estabilidade, que em geral não é fortemente afetada pela variação do perfil do campo focalizador, constatamos que as novas regiões de estabilidade já apresentam dependência do perfil específico desse campo. Particularmente, as novas regiões tornam-se mais estreitas e ocorrem para maiores avanços de fase no vácuo à medida que o campo focalizador torna-se mais localizado. Quanto mais o perfil do campo focalizador evoluir de modo a se aproximar de uma onda quadrada, tanto maior se torna o número de componentes do espectro de Fourier correspondente e, como conseqüência disso, concluímos que o espaço de fase do envelope é afetado, surgindo um grande número de ressonâncias não-lineares e caos. Apesar de que em todos os casos analisados constatamos a existência de trajetórias

regulares em torno de uma solução casada e o aparecimento da região caótica, simulações auto-consistentes mostraram que o caos no espaço de fase do envelope pode afetar a dinâmica do feixe, conduzindo a um pequeno crescimento da emitância.

3.1 Variações do perfil do campo magnético externo focalizador: o modelo

Com o objetivo de investigarmos como o perfil do campo magnético externo focalizador influencia no transporte do feixe, faremos com que tal perfil varie continuamente desde a forma senoidal (suave) até uma configuração de onda quadrada, através de uma parametrização da forma

$$\kappa_z(s) = \sigma_0^2 \left[\frac{1 + \cos \theta(s)}{N} \right], \quad (3.1)$$

onde

$$N = 1 + \int_0^1 \kappa_z(s) ds \quad (3.2)$$

é usado para normalizar a função,

$$\theta(s) = \pi \frac{\arctan[\Delta(\bar{s} + \frac{\eta}{2})] + \arctan[\Delta(\bar{s} - \frac{\eta}{2})]}{\arctan[\Delta(\frac{1+\eta}{2})] + \arctan[\Delta(\frac{1-\eta}{2})]}, \quad (3.3)$$

é a função de fase, e

$$\bar{s} = \text{mod}(s + \frac{1}{2}, 1) - \frac{1}{2} \quad (3.4)$$

é periódico em s e tal que $-1/2 \leq \bar{s} \leq 1/2$; $\Delta > 0$ é o parâmetro que determina o perfil do campo focalizador e $0 < \eta \leq 1$ é o fator de preenchimento. Convém ressaltar que quando $\Delta \ll 1$ o campo focalizador tem o perfil senoidal, enquanto que para $\Delta \rightarrow \infty$ tal campo assume o perfil tipo onda quadrada onde η é, então, a largura de cada elevação. Na figura 3.1 são apresentados alguns perfis do campo focalizador para diferentes valores de Δ . A função $\kappa_z(s)$ na equação 3.1 é construída de modo que para pequenos Δ ela recai numa suave função senoidal de período igual a 1 em s , enquanto à medida que Δ assume valores grandes a referida função permanece periódica, mas descontínua e representada por elevações retangulares cujas larguras são iguais ao fator de preenchimento η . De fato, no limite $\Delta \ll 1$ os argumentos das funções tangente inversa na 3.3 são pequenos de modo a tornar-se válida a aproximação $\arctan(x) = x$, o que nos conduz a $\theta(s) = 2\pi\bar{s}$, correspondendo ao campo focalizador com perfil senoidal

$$\kappa_z(s) = \sigma_0^2 [1 + \cos(2\pi s)], \quad (3.5)$$

estudado nas referências [46, 47]. Cabe observar que nesse limite, η não assume significado no perfil do campo focalizador. Por outro lado, quando $\Delta \gg 1$ as funções tangente inversa apresentam um abrupto salto de $-\pi/2$ para $\pi/2$ assim como seus argumentos trocam de sinal, o que nos leva à aproximação $\arctan(x) = (\pi/2)\text{sign}(x)$ e às descontinuidades na função de fase com $\theta(\bar{s} < -\eta/2) = -\pi$, $\theta(-\eta/2 < \bar{s} < \eta/2) = 0$ e $\theta(\bar{s} > \eta/2) = \pi$; dessa forma o campo focalizador assume o perfil de onda quadrada com fator de preenchimento η , ou seja,

$$\kappa_z(s) = \begin{cases} 0, & \text{para } \eta/2 < s < 1 - \eta/2 \\ \sigma_0^2/\eta, & \text{em outros casos.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Observe-se que para todos os valores de Δ , o denominador na equação 3.3 garante que a função de fase realize um ciclo completo desde $\theta = -\pi$ até $\theta = \pi$, enquanto \bar{s} vai desde $-1/2$ a $1/2$ e, conseqüentemente, $\kappa_z(s)$ permanece contínuo nos contornos do perfil do campo focalizador.

Partimos do fato de que o campo magnético estático na equação 2.1 deve satisfazer às equações de Maxwell, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ e $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$. Enquanto a primeira dessas equações é satisfeita com exatidão, a segunda é válida apenas se assumirmos a condição de que a componente transversal do envelope do feixe é muito menor do que a variação de \mathbf{B} ao longo do eixo do feixe, tal que $r_b^n B_z^{(n)}/B_z \ll 1$, onde $B_z^{(n)} = d^n B_z/ds^n$ e termos da ordem $n \geq 2$ são desprezados. Essa suposição não é certamente verdadeira à medida que $\Delta \rightarrow \infty$, ou seja, o perfil do campo tende à forma de onda quadrada de acordo com a equação 3.6 [58, 57]. Embora seja importante investigarmos as propriedades do feixe sob ação de um campo externo focalizador com o perfil de onda quadrada ($\Delta \rightarrow \infty$), devemos levar em conta que nos aparatos reais, o campo focalizador apresenta perfis não tão drásticos quanto este, sendo mais apropriadamente melhor representado por um valor finito de Δ !

Na figura 3.1 ilustramos alguns dos perfis gerados através da equação 3.1, onde $\kappa_z(s)$ é representado para $\eta = 0, 2$, $\sigma_0 = 70^\circ$ para quatro diferentes valores de Δ : 10^{-1} , 10^1 , 10^2 e 10^4 . Cabe ressaltar que para $\Delta = 10^4$ o perfil é praticamente o de uma onda quadrada. É fácil constatar que à medida que Δ cresce, o campo magnético focalizador vai se tornando mais localizado, já assumindo a forma de onda quadrada para $\Delta = 10^4$. Além do mais, ao fazermos a comparação do perfil da função de fase $\theta(s)$ quando $\Delta = 10^{-1}$ com o de uma função senoidal $\theta(s) = 2\pi\bar{s}$, encontramos uma diferença inferior a 0,1 % para todo s .

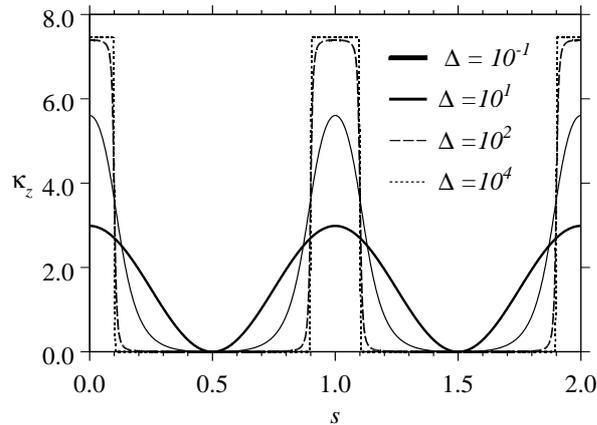


Figura 3.1: Alguns perfis do campo magnético focalizador ($\kappa_z(s)$) para diferentes valores do parâmetro Δ . Os outros parâmetros são $\eta = 0, 2$ e $\sigma_0 = 70^\circ$.

3.2 Estabilidade do feixe: análise da equação do envelope

Nesta secção analisamos a estabilidade de feixes propagando-se através do campo focalizador dado pela equação 3.1, enquanto o perfil do campo é variado. Cabe ressaltar que daremos uma especial atenção às novas regiões de estabilidade mencionadas nas referências [46, 47]. Ao realizarmos essa análise, usamos o método de Newton-Raphson para pesquisarmos e verificarmos a estabilidade das soluções casadas obtidas através da equação 2.52; tal método está descrito com detalhes no apêndice C. A estabilidade é determinada através do índice de estabilidade α , definido como $\alpha = \cos(k_{\text{fix}})$, onde k_{fix} é o número de onda correspondente às pequenas oscilações lineares em torno da trajetória periódica obtida com o método de Newton-Raphson. Para as órbitas estáveis, onde k_{fix} é um número real, $|\alpha| < 1$; se α ultrapassar o contorno inferior, ou seja, tornar-se menor que -1, diremos que houve um dobramento de período e a estabilidade é perdida. Se o parâmetro α ultrapassar o contorno superior $\alpha = +1$ estará caracterizada uma bifurcação do tipo tangente inversa, sendo a estabilidade também perdida [41, 33, 46, 47]. Com o objetivo de obtermos informações sobre a estabilidade não-linear das soluções casadas, também fazemos uso dos plots de Poincaré no espaço de fase do envelope. Tais plots são obtidos através da integração da equação do envelope (equação 2.52) e tomando o par $(r_b, dr_b/ds)$ a cada período do campo focalizador para valores inteiros de s [33]. Mais detalhes sobre os plots de Poincaré poderão ser vistos no apêndice B.

Geralmente, o contexto das bifurcações para as soluções casadas quando se aumenta o avanço de fase no vácuo se dá conforme explicaremos a seguir; uma descrição detalhada é dada nas referências [46, 47]. As soluções casadas estáveis originam-se

no espaço de fase onde $\alpha = +1$. As soluções casadas originais ocorrem exatamente para $\sigma_0 = 0^\circ$, enquanto que para as novas regiões de estabilidade, tais soluções manifestam-se para diferentes $\sigma_0 > 180^\circ$. À medida que o avanço de fase no vácuo é aumentado, os respectivos valores de α evoluem para $\alpha = -1$. Quando o valor $\alpha = -1$ é atingido, a solução casada sofre uma bifurcação do tipo dobramento de período e torna-se instável. Definimos como sendo uma região de estabilidade aquela cujos valores de σ_0 correspondem aos índices de estabilidade que variam desde $\alpha = +1$ até a bifurcação com $\alpha = -1$. Um fato bem conhecido, é que antes das soluções casadas eventualmente desaparecerem do espaço de fase, elas voltam ao valor correspondente a $\alpha = -1$ antes de recuperarem a sua estabilidade, enquanto σ_0 é aumentado. Entretanto, conforme mostrado na referência [47], tais soluções casadas não são usadas para feixes confinados após essa recuperação de estabilidade, uma vez que as simulações numéricas auto-consistentes apontam um pequeno crescimento da emitância do feixe.

Nos casos harmônicos, nos quais o campo magnético focalizador oscila senoidalmente, foram obtidos os resultados analíticos que seguem [47, 51]. As novas regiões de estabilidade ocorrem quando a frequência de oscilação do campo magnético focalizador casa com a frequência de auto-oscilação do envelope. Essa frequência casada pode advir do fato de que enquanto o campo magnético é fixado numa dada frequência, a frequência do envelope varia sobre um intervalo cujos valores são determinados por todos os parâmetros de controle do sistema. Em particular, a frequência de oscilação do envelope aumenta com a intensidade do campo magnético focalizador, que tem um valor aproximadamente igual a $2\sigma_0$. Sendo a frequência do campo magnético igual a 2π , conclui-se que a segunda região conduz aproximadamente a uma região de parâmetros dados por $2\sigma_0 \approx 2\pi$, ou seja, $\sigma_0 \approx 180^\circ$ [46]. Cálculos mais precisos baseados nas formas normais de teoria de bifurcação foram extensamente desenvolvidas nas referências [47, 51], e atualmente mostra-se que após um *gap*, onde não existe solução casada, a segunda região é formada quando σ_0 volta a se tornar maior do que 180° . Nos casos harmônicos, a formação do *gap* ao longo do eixo de σ_0 é rigorosamente iniciada em 180° .

Em casos mais gerais, onde o campo magnético focalizador não é harmônico, análises numéricas foram realizadas e constatou-se que os resultados básicos foram mantidos, exceto o fato de que os *gaps* podem tornar-se mais largos, conforme descreveremos a seguir.

A fim de determinarmos como o perfil do campo magnético focalizador influencia sobre o transporte e estabilidade do feixe, utilizamos *plots* no espaço de parâmetros σ_0 versus Δ , enfatizando as diferentes regiões de estabilidade. De acordo com o que vimos anteriormente, Δ é o parâmetro que determina todos os tipos de perfis para o campo focalizador: enquanto Δ sofre pequenas variações ($\ll 1$) o perfil

do campo focalizador evolui continuamente desde uma suave senoidal até a forma de onda quadrada ($\Delta \rightarrow \infty$). Nesses plots usamos o método de Newton-Raphson para determinar numericamente os contornos $\sigma_0 = \sigma_0(\Delta)$ nos quais as soluções casadas estáveis surgem no espaço de fase com $\alpha = +1$ e perdem a estabilidade com $\alpha = -1$. Os resultados para as duas primeiras regiões de estabilidade (a original e a seguinte) obtidos para $\eta = 0,5$ (a) e $\eta = 0,2$ (b) são mostrados na figura 3.2, onde a intensidade do feixe é escolhida para $K = 5,0$. As regiões escuras correspondem às regiões estáveis; a região abaixo de $\sigma \approx 180^\circ$ é a região original de estabilidade (ROE) e a outra é a segunda região de estabilidade (SRE). As regiões de mais altas ordens de estabilidade também foram investigadas e os resultados são qualitativamente os mesmos que para a SRE.

Para um maior fator de preenchimento, como no caso $\eta = 0,5$ (veja a figura 3.2 (a)), mostrou-se que as regiões de estabilidade não foram grandemente afetadas pelas variações em Δ . Somente algum estreitamento da SRE foi verificado à medida que o campo focalizador tornou-se mais localizado (aumentando Δ). Os painéis (a) e (b) da figura 3.3 comparam os plots de Poincaré do espaço de fase para a SRE obtidos para os casos limite $\Delta = 10^{-1}$ e $\Delta = 10^4$ da figura 3.2(a). A fim de podermos comparar as soluções casadas com situações similares de estabilidade, consideramos avanços de fase no vácuo que conduzem ao mesmo índice de estabilidade α em ambos os casos. Particularmente, encontramos $\alpha = -0,58$ que corresponde a $\sigma_0 = 297,3^\circ$ para $\Delta = 10^{-1}$ e $\sigma_0 = 294,2^\circ$ para $\Delta = 10^4$. Isto tem mostrado que no caso onde $\Delta = 10^{-1}$ o espaço de fase é completamente regular, enquanto que para $\Delta = 10^4$ o aumento significativo das componentes de Fourier do perfil do campo focalizador implica no aparecimento de ilhas de ressonância no espaço de fase. Entretanto, nesse caso, as ressonâncias são pequenas, não levando à sobreposição nem caos, estando afastadas da solução casada; isto sugere que estamos evidenciando apenas muitas soluções descasadas. Portanto, conclui-se que para grandes fatores de preenchimento (η), o detalhado conhecimento do tipo de campo focalizador não é crítico para a estabilidade do feixe.

Por outro lado, para valores menores do fator de preenchimento (η), por exemplo para $\eta = 0,2$, mostramos na figura 3.2(b) que o perfil do campo focalizador é muito significativo para a estabilidade do feixe e à medida que Δ cresce, dois efeitos tornam-se visíveis na SRE. (i) No primeiro, há um aumento no espaço de fase necessário para atingir-se a SRE. Uma vez que σ_0 é proporcional ao valor quadrático médio do campo focalizador, conclui-se que o pico do campo magnético é consideravelmente aumentado à medida que o campo magnético torna-se mais localizado com pequenos valores de η , não apenas porque esta média tende a aumentar, como também a região espacial onde o campo é efetivamente aplicado é diminuída. No caso representado na figura 3.2(b), por exemplo, levando-se em conta que σ_0 para a

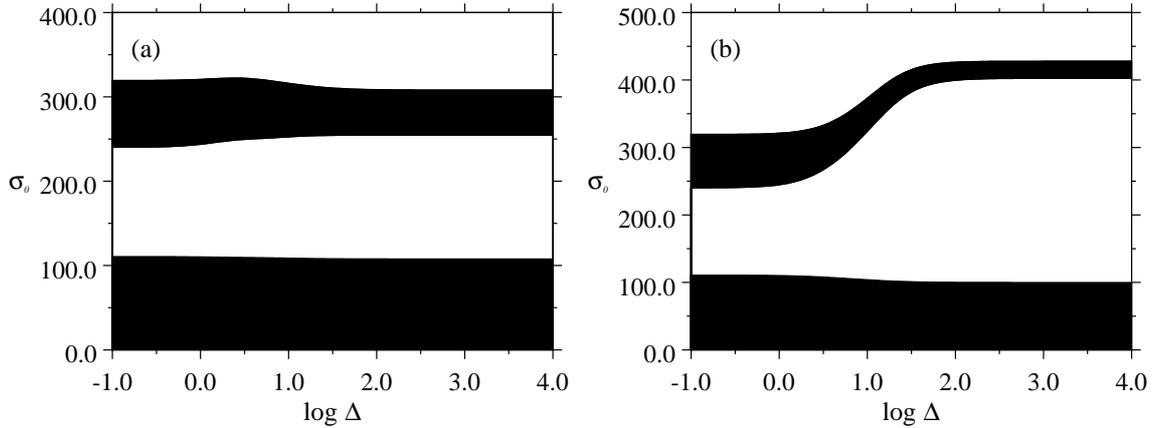


Figura 3.2: Plot do espaço de parâmetros σ_0 versus Δ mostrando a localização das duas primeiras regiões de estabilidade para (a) $\eta = 0,5$ e (b) $\eta = 0,2$. A intensidade do feixe corresponde a $K = 5,0$.

SRE aumenta drasticamente de 50% quando Δ varia de 10^{-1} para 10^4 , o aumento no pico do campo magnético é cerca de 3,75 vezes maior. Representando o raio mínimo do envelope por r_b^* , pode-se concluir que o pico do campo magnético para a SRE diminui com Δ , enquanto que r_b^* é notoriamente reduzido. A figura 3.4 representa como r_b^* varia com $\log \Delta$ e mostra que o decréscimo em r_b^* à medida que Δ vai de 10^{-1} para 10^4 é cerca de 5 vezes, o que de fato supera o acréscimo na intensidade do pico do campo magnético focalizador. (ii) Em segundo lugar, a SRE torna-se muito mais estreita enquanto Δ é aumentado. O intervalo do avanço do espaço de fase no vácuo para a qual a SRE existe vai desde 80° até 25° , à medida que Δ é aumentado. Esse resultado não apenas revela que quanto mais precisa for a intensidade do campo focalizador, torna-se necessário um canal focalizador mais localizado para $\eta = 0,2$, como também sugere que mais ressonâncias não-lineares podem aparecer no espaço de fase devido às variações de α com σ_0 , e ainda que o intervalo de frequências orbitais no espaço de fase é ampliado. Isso é confirmado pelos plots de Poincaré do espaço de fase para a SRE, mostrados nas figuras 3.3 (c)-(f), com $\Delta = 10^{-1}$, 10^1 , 10^2 e 10^4 , respectivamente, correspondentes aos mesmos valores de Δ usados na figura 3.1. Ainda, para comparar casos com comportamentos similares da estabilidade, em todas as figuras o avanço de fase no vácuo é escolhido tal que o fator de estabilidade é também $\alpha = -0,58$. No painel (c) ($\Delta = 10^{-1}$), o espaço de fase é completamente regular com ausência de ressonâncias não-lineares, nem caos. Ao aumentarmos Δ para 10^1 [painel (d)], muitos grupos de ressonâncias não-lineares surgem. Entretanto, elas ainda são suficientemente pequenas de modo que nem sobreposição de ressonâncias, nem caos, são perceptíveis. Ao aumentarmos Δ para 10^2 [painel (e)], as ilhas de ressonância não-lineares crescem consideravelmente, com mais proeminência de caos separatriz e sobreposição de ressonâncias. Para $\Delta = 10^4$ [painel (f)] as ilhas de ressonância são

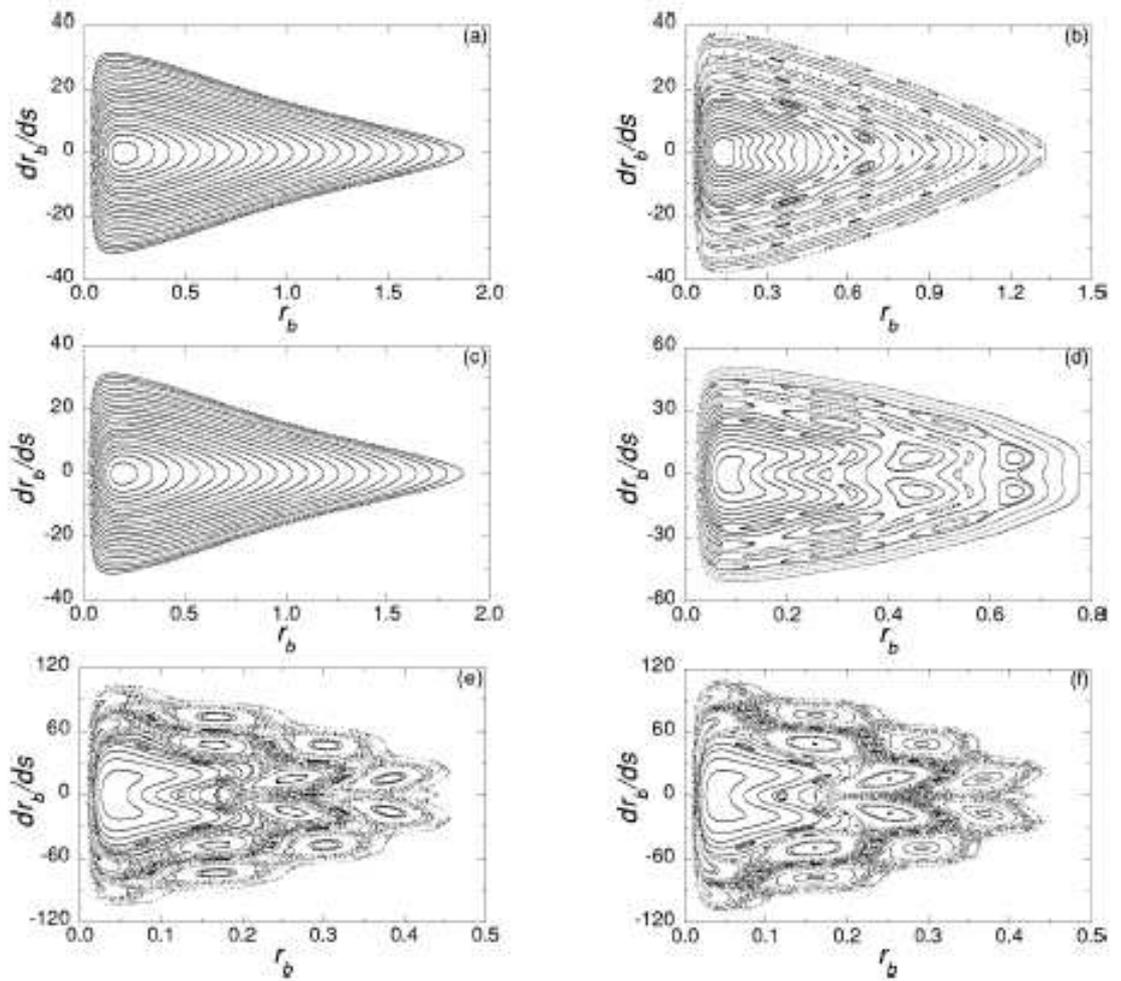


Figura 3.3: Plots de Poincaré no espaço de fase r_b versus dr_b/ds para $K = 5, 0$ e (a) $\eta = 0, 5$, $\Delta = 10^{-1}$, $\sigma_0 = 297, 3^\circ$; (b) $\eta = 0, 5$, $\Delta = 10^4$, $\sigma_0 = 294, 2^\circ$; (c) $\eta = 0, 2$, $\Delta = 10^{-1}$, $\sigma_0 = 297, 3$; (d) $\eta = 0, 2$, $\Delta = 10^1$, $\sigma_0 = 357, 9^\circ$; (e) $\eta = 0, 2$, $\Delta = 10^2$, $\sigma_0 = 418, 4^\circ$; (f) $\eta = 0, 2$, $\Delta = 10^4$, $\sigma_0 = 420, 2^\circ$. Todos os casos correspondem a SRE com o mesmo índice de estabilidade $\alpha = -0, 58$.

completamente sobrepostas, apresentando-se uma fina camada caótica que se estende por uma região de caos na qual o envelope do feixe pode difundir-se para valores cada vez maiores à medida que o feixe descasado se propaga. Apesar de que em todos os casos apresentados na figura 3.3 (c)-(f) haja uma indicação de que as trajetórias regulares disponham-se em torno da solução casada, algum caos pode estar presente. O caos no espaço de fase do envelope pode ainda afetar no transporte do feixe, levando tal feixe a perder qualidade, conforme se discute na referência [7]. Essa questão será estudada com mais detalhes na próxima secção onde adicionaremos a simulação auto-consistente do feixe.

Outros valores do fator de preenchimento, η , também serão investigados e a conclusão mais geral é que $\eta = 0, 5$ pode ser encarado como um ponto de equilíbrio,

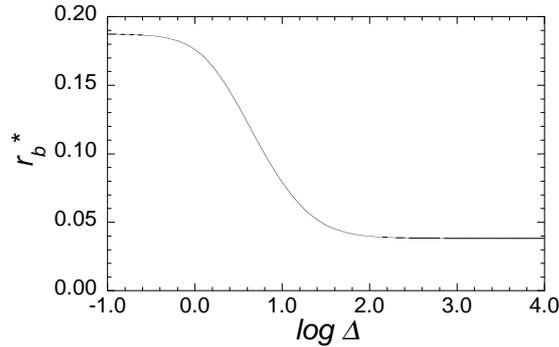


Figura 3.4: O raio de oscilação mínima das soluções estáveis casadas r_b^* como uma função de Δ para a SRE com $\eta = 0,2$, $K = 5,0$ e $\alpha = -0,58$.

no sentido que acima da SRE, neste valor as novas regiões de estabilidade não são grandemente afetadas pelas variações no parâmetro do campo focalizador. Isso está provavelmente relacionado ao fato de que exatamente para $\eta = 0,5$ os limites para o campo focalizador, senoidal ($\Delta \rightarrow 0$) e onda quadrada ($\Delta \rightarrow \infty$), apresentam a mesma norma $N = 1 + \int_0^1 \cos(s) ds = 1,0$, de modo que o pico do campo magnético seja o mesmo em ambos os casos. Para $\eta > 0,5$ encontramos que as novas regiões tendem a crescer enquanto Δ é aumentado a partir de 0, aproximando-se da ROE. De fato, podemos eventualmente encontrar conjunto de parâmetros para os quais duas soluções casadas estáveis coexistam no espaço de fase. Por outro lado, como mostramos detalhadamente para $\eta = 0,2$, quando $\eta < 0,5$ as novas regiões tornam-se mais estreitas e ocorrem para maiores avanços de fase no vácuo à medida que Δ é aumentado. Particularmente, para o caso de lentes finas onde $\eta \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow \infty$, e $\kappa_z(s)$ tende a uma série de funções delta de Dirac, o início das novas regiões de estabilidade somente ocorre para $\sigma_0 \rightarrow \infty$, o que objetivamente significa que tais regiões não existem. Entretanto, conforme discutimos no capítulo anterior, este limite não é realístico devido às restrições impostas pelas equações de Maxwell sobre o feixe focalizador dado pela equação 2.1.

3.3 Simulação numérica autoconsistente do feixe

A fim de investigar o transporte e estabilidade do feixe, também realizamos simulações numéricas autoconsistentes usando o método da função de Green, com macropartículas de tamanho finito [45] e, assim, calcularmos os autocampos. Nessas simulações, $N = 2500$ macropartículas foram lançadas de acordo com a distribuição de Kapchinskij-Vladimirskij [26] e transportadas sob ação de um campo magnético focalizador cujo perfil é dado pela equação 3.1. O número finito de macropartículas naturalmente introduz descasamentos no envelope e imprecisões na distribuição do

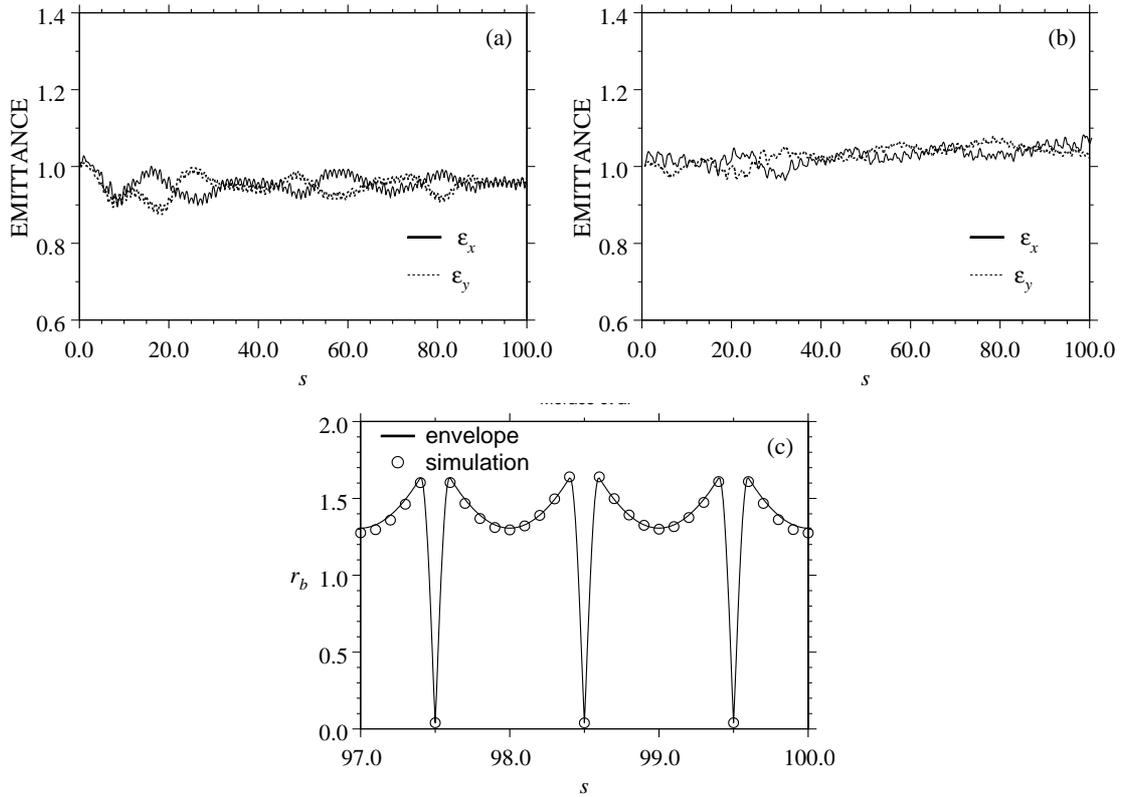


Figura 3.5: Nos painéis (a) e (b), o valor rms das emitâncias transversas ϵ_x e ϵ_y versus s obtidas através de simulações numéricas auto-consistentes para os mesmos parâmetros usados nas figuras 3(c) e 3(f), respectivamente. No painel (c) a comparação do raio resultante do feixe obtido da equação do envelope 2.52 e as simulações auto-consistentes para os últimos três períodos apresentados no painel (b).

feixe, o que poderá ser visto como alguma instabilidade. O raio do feixe KV foi calculado autoconsistentemente ,

$$r_b = \left[2(x^2 + y^2) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.7)$$

que é $\sqrt{2}$ o valor *rms* do raio, e o *rms* da emitância transversa é dado por

$$\epsilon_\zeta = 4\sqrt{\langle \zeta^2 \rangle \langle \zeta'^2 \rangle - \langle \zeta \zeta' \rangle^2}, \zeta = x, y \quad (3.8)$$

que determina se a qualidade do feixe é preservada. Nas equações 3.7 e 3.8, $\langle \dots \rangle$ representa uma média sobre todas macropartículas.

Na figura 3.5 comparamos o comportamento da emitância para casos correspondentes àqueles mostrados nos painéis (c) e (f) da figura 3.3. Constata-se que para o perfil quase senoidal do campo focalizador em que $\Delta = 10^{-1}$ da figura 3.5 (a) a emitância permanece em torno de $\epsilon_{x,y} = 1$, enquanto que para o perfil quase onda quadrada, caso em que $\Delta = 10^4$, se verifica um pequeno crescimento da emitância.

Tal crescimento está provavelmente associado com a presença de ressonâncias não-lineares vistas na figura 3.3 (f), conforme sugerido nas referências [7, 8], embora isto não seja suficientemente forte a ponto de desestabilizar a dinâmica do envelope. De fato, o último painel, figura 3.5 (c), mostra que a concordância entre a dinâmica do envelope obtida através da simulação autoconsistente e da equação 2.52 (que presuppõe emitância constante) é preservada através do canal focalizador. O crescimento da emitância, tão pequeno como nesse caso, às vezes torna-se um problema no transporte do feixe. Por outro lado, essa desvantagem em se controlar o feixe pode ser compensada pela pequena espessura do feixe obtida na SRE, tudo dependendo das condições experimentais e finalidades. Espera-se que o crescimento da emitância seja menor do que no caso do correspondente perfil de onda quase quadrada, como nas situações aqui investigadas, cujos perfis do campo focalizador realístico caracterizam-se por uma pequena suavidade.

Capítulo 4

Instabilidades sem simetria axial

4.1 Considerações iniciais

Um estudo relevante relacionado à física de feixes periodicamente focalizados diz respeito à influência na dinâmica e estabilidade do feixe, quando este fica sujeito a perturbações azimutais. Primeiramente devemos lembrar que a equação do envelope do feixe (equação 2.54) pode descrever somente perturbações em feixes com simetria axial e com flutuações não azimutais. Uma análise completa da estabilidade do feixe que incorpore perturbações azimutais pode ser difícil, quando esse feixe for confinado por campos com estrutura periódica. Porém, uma importante classe de perturbações sem simetria axial pode ser investigada usando-se equações de envelope mais gerais, dadas por [16, 54],

$$\begin{aligned}\frac{d^2a}{ds^2} &= -\kappa_z(s)a + \frac{2K}{a+b} + \frac{1}{a^3}, \\ \frac{d^2b}{ds^2} &= -\kappa_z(s)b + \frac{2K}{a+b} + \frac{1}{b^3},\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde $a = a(s)$ e $b = b(s)$ representam os semi-eixos de uma secção transversal elíptica do feixe ao longo das direções x e y , respectivamente, enquanto que os demais parâmetros e normalizações permanecem os mesmos usados na equação 2.54. As equações 4.1 podem ser deduzidas de maneira análoga ao que fizemos para a equação do envelope para um feixe com secção circular (equação 2.52); assim sendo, nos limitaremos a indicar como podem ser deduzidas as equações de movimento nos referenciais do laboratório e de Larmor, a função de distribuição KV para um feixe de secção elíptica e a equação normalizada do envelope de um feixe casado sujeito a um campo magnético focalizador. A dedução completa de cada um desses passos pode ser encontrada na referência [16].

4.2 Equações de envelope mais gerais

Consideremos um feixe de partículas carregadas intenso e contínuo, exibindo as mesmas características e descrito da mesma maneira que fizemos no capítulo 2. Na aproximação paraxial, o movimento transversal da partícula é assumido como sendo não-relativístico, e o parâmetro de Budker [5] muito menor do que a unidade, ou seja, $\nu_B = q^2 N / (mc^2) \ll 1$, onde $N = \int n_b(x, y, s) dx dy$ é a densidade do feixe por comprimento axial, q e m são a carga e a massa de repouso das partículas do feixe, respectivamente. Os auto-campos elétricos e magnéticos em equilíbrio, relativos ao feixe, são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\text{auto}}(x, y, s) &= \left(-\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi^{\text{auto}}(x, y, s), \\ \mathbf{B}^{\text{auto}}(x, y, s) &= \left(\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial y} - \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial x} \right) A_z^{\text{auto}}(x, y, s), \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde o potencial escalar para o auto-campo elétrico, satisfaz à equação de Poisson,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi^{\text{auto}}(x, y, s) = -4\pi q n_b(x, y, s), \quad (4.3)$$

e o potencial vetorial para o auto-campo magnético é dado por

$$\mathbf{A}^{\text{auto}}(x, y, s) = \beta_b \phi^{\text{auto}}(x, y, s) \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (4.4)$$

Considerando um feixe de partículas axialmente contínuo, com densidade uniforme $N_b = \int n_b(x, y, s) dx dy = n_b \pi a b = \text{constante}$, ou seja, independente das coordenadas x e y , e que tenha secção transversal elíptica com semi-eixos a e b tais que $0 \leq x^2/[a^2(s)] + y^2/[b^2(s)] < 1$, o potencial do auto-campo adimensional é

$$\psi(x, y, s) \equiv \frac{q \phi^{\text{auto}}(x, y, s)}{\gamma_b^3 m \beta_b^2 c^2}. \quad (4.5)$$

A equação de Poisson bidimensional, 4.3, assume a forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x, y, s) = \begin{cases} -(2\pi K/N_b) n_b(x, y, s), & \text{se } 0 \leq x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1 \\ 0, & \text{se } x^2/a^2 + y^2/b^2 > 1. \end{cases} \quad (4.6)$$

Na equação anterior, K é a perveância do auto-campo, definida no capítulo 2, a e b são os semi-eixos maior e menor de uma secção elíptica do feixe, onde $a, b \ll R_{\text{cil}}$ e R_{cil} é o raio do cilindro condutor que envolve o feixe. A solução exata da equação 4.6 é

$$\psi(x, y, s) = -\frac{K}{a+b} \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right) \quad (4.7)$$

no interior do feixe ($0 \leq x^2/[a^2(s)] + y^2/[b^2(s)] < 1$), assumindo $\psi(x=0, y=0) = 0$ (ou seja, $\psi = 0$ no centro do feixe). De maneira análoga ao feito no capítulo 2, as equações de movimento no referencial do laboratório podem ser derivadas do hamiltoniano de partícula única definido por [7, 8]

$$H(x, y, s, P_x, P_y, P_z) = \left[\left(P_x - \frac{qA_x^{\text{foc}}}{c} \right)^2 + \left(P_y - \frac{qA_y^{\text{foc}}}{c} \right)^2 + \left(P_z - \frac{qA_z^{\text{auto}}}{c} \right)^2 + mc^2 \right]^{\frac{1}{2}} + q\phi^{\text{auto}}, \quad (4.8)$$

onde (s, P_z) é o par de variáveis canonicamente conjugadas, sendo que o momentum canônico se relaciona com o momentum mecânico por $\mathbf{P} = \mathbf{p} + (q/c)\mathbf{A}^{\text{foc}} + \mathbf{A}^{\text{auto}}$. Introduzindo os momenta canônicos transversais normalizados, $\hat{P}_x = P_x/(\gamma_b m \beta_b c)$ e $\hat{P}_y = P_y/(\gamma_b m \beta_b c)$, o hamiltoniano normalizado, $\hat{\Omega} = \Omega/(\gamma_b m \beta_b c)$, o parâmetro focalizador normalizado, $\sigma_0 = qB_z/(2\gamma_b m \beta_b c^2)$ e os parâmetros dos auto-campos normalizados, $\kappa_x^{\text{auto}}(s) = K/\{[a(s) + b(s)]a(s)\}$ e $\kappa_y^{\text{auto}}(s) = K/\{[a(s) + b(s)]b(s)\}$, o hamiltoniano pode ser escrito como

$$\hat{\Omega}(x, y, \hat{P}_x, \hat{P}_y, -H, s) = -1 + \frac{1}{2} \left[(\hat{P}_x + \sigma_0 y)^2 + (\hat{P}_y - \sigma_0 x)^2 \right] - (\kappa_x^{\text{auto}} x^2 + \kappa_y^{\text{auto}} y^2). \quad (4.9)$$

Definindo o hamiltoniano transversal, $\Omega_- = \hat{\Omega} + 1$, obtemos

$$\Omega_-(x, y, \hat{P}_x, \hat{P}_y, s) = \frac{1}{2} \left[(\hat{P}_x + \sigma_0 y)^2 + (\hat{P}_y - \sigma_0 x)^2 \right] - (\kappa_x^{\text{auto}} x^2 + \kappa_y^{\text{auto}} y^2). \quad (4.10)$$

Para um feixe com secção elíptica, as equações transversais do movimento no referencial do laboratório são

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{\partial \Omega_-}{\partial \hat{P}_x} = \hat{P}_x + \sigma_0 y, \\ \frac{d\hat{P}_x}{ds} &= -\frac{\partial \Omega_-}{\partial x} = \hat{P}_y \sigma_0 - [\sigma_0^2 - 2\kappa_x^{\text{auto}}(s)]x, \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{\partial \Omega_-}{\partial \hat{P}_y} = \hat{P}_y - \sigma_0 x, \\ \frac{d\hat{P}_y}{ds} &= -\frac{\partial \Omega_-}{\partial y} = -\hat{P}_x \sigma_0 - [\sigma_0^2 - 2\kappa_y^{\text{auto}}(s)]y, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde se pode observar que o movimento na direção x é fortemente acoplado com o movimento na direção y . Após realizar-se uma transformação canônica do referencial do laboratório para o referencial de Larmor, que rota em relação ao referencial do laboratório com velocidade angular $\beta_b c \sigma_0 = qB_z/(2\gamma_b m c)$, chega-se a um novo hamiltoniano transversal Λ_- , expresso nas variáveis do referencial de Larmor $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{P}_x, \tilde{P}_y)$,

e dado por

$$\Lambda_-(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{P}_x, \tilde{P}_y) = \frac{1}{2} (\tilde{P}_x^2 + \tilde{P}_y^2) + \frac{\sigma_0^2}{2} (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) + \psi(\tilde{x}, \tilde{y}, s), \quad (4.12)$$

onde

$$\psi(\tilde{x}, \tilde{y}, s) = -\frac{K}{a+b} \left(\frac{\tilde{x}^2}{a} + \frac{\tilde{y}^2}{b} \right). \quad (4.13)$$

A solução completa da equação de Poisson em coordenadas elípticas pode ser encontrada na referência [13]. Utilizando-se os parâmetros dos auto-campos normalizados, $\kappa_x^{\text{auto}} = K/\{[a(s) + b(s)]a(s)\}$ e $\kappa_y^{\text{auto}} = K/\{[a(s) + b(s)]b(s)\}$ (equações 2.35 e parautoynorm), obtemos

$$\psi(\tilde{x}, \tilde{y}, s) = -\left(\kappa_x^{\text{auto}}\tilde{x}^2 + \kappa_y^{\text{auto}}\tilde{y}^2\right); \quad (4.14)$$

dessa forma, o hamiltoniano 4.12 pode ser escrito como

$$\Lambda_- = \frac{1}{2} (\tilde{P}_x^2 + \tilde{P}_y^2) + \frac{\sigma_0^2}{2} (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) - \left(\kappa_x^{\text{auto}}\tilde{x}^2 + \kappa_y^{\text{auto}}\tilde{y}^2\right). \quad (4.15)$$

Definindo-se $\kappa_x = \sigma_0^2 - 2\kappa_x^{\text{auto}}$ e $\kappa_y = \sigma_0^2 - 2\kappa_y^{\text{auto}}$, as equações de movimento no referencial de Larmor são

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{ds} &= \frac{\partial \Lambda_-}{\partial \tilde{P}_x} = \tilde{P}_x, \\ \frac{d\tilde{y}}{ds} &= \frac{\partial \Lambda_-}{\partial \tilde{P}_y} = \tilde{P}_y, \\ \frac{d\tilde{P}_x}{ds} &= -\frac{\partial \Lambda_-}{\partial \tilde{x}} = -\kappa_x \tilde{x}, \\ \frac{d\tilde{P}_y}{ds} &= -\frac{\partial \Lambda_-}{\partial \tilde{y}} = -\kappa_y \tilde{y}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Combinando a primeira e a terceira equações com a segunda e a quarta em 4.16, obtemos novamente as conhecidas equações de Hill [16, 21, 33],

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{x}}{ds^2} + \kappa_x \tilde{x} &= 0, \\ \frac{d^2 \tilde{y}}{ds^2} + \kappa_y \tilde{y} &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Convém observar que agora os movimentos nas direções \tilde{x} e \tilde{y} tornam-se desacoplados para um perfil de densidade uniforme.

Analogamente ao realizado no capítulo 2 para o caso de um feixe de secção circular, constrói-se a função de distribuição KV de equilíbrio para um feixe intenso de partículas carregadas no referencial de Larmor, adaptando-se o procedimento de Courant e Snyder [12] do síncrotron de gradiente alternado, resultando

$$f_b(A_x^2, A_y^2) = C \delta \left(\frac{A_x^2}{\epsilon_x} + \frac{A_y^2}{\epsilon_y} - 1 \right), \quad (4.18)$$

onde C é uma constante de normalização que será calculada posteriormente, ϵ_x e ϵ_y são as emitâncias transversais do feixe, assumidas como sendo constantes e $\delta \left(\frac{A_x^2}{\epsilon_x} + \frac{A_y^2}{\epsilon_y} - 1 \right)$ é a função delta de Dirac; esta expressão é conhecida como distribuição de Kapchinskij-Vladimirskij (KV) [7, 16, 26]. A distribuição 4.18 também assume a forma

$$f_b = \frac{N}{\pi^2 \epsilon_{\tilde{x}} \epsilon_{\tilde{y}}} \delta \left[\frac{1}{\epsilon_{\tilde{x}}} (X^2 + P_X^2) + \frac{1}{\epsilon_{\tilde{y}}} (Y^2 + P_Y^2) - 1 \right]. \quad (4.19)$$

Uma propriedade de equilíbrio da distribuição KV, o perfil de densidade do feixe, pode ser escrita como

$$n_b = \begin{cases} N_b / [\pi a(s) b(s)], & \text{se } 0 \leq \tilde{x}^2 / [a^2(s)] + \tilde{y}^2 / [b^2(s)] < 1 \\ 0, & \text{se } \tilde{x}^2 / [a^2(s)] + \tilde{y}^2 / [b^2(s)] > 1, \end{cases} \quad (4.20)$$

onde identifica-se $a(s) = \sqrt{\epsilon_{\tilde{x}} \omega_{\tilde{x}}}$ e $b(s) = \sqrt{\epsilon_{\tilde{y}} \omega_{\tilde{y}}}$, correspondentemente a um perfil de densidade uniforme na secção transversal elíptica do feixe, $\tilde{x}^2 / [a^2(s)] + \tilde{y}^2 / [b^2(s)] = 1$, e em consistência com o tipo de distribuição *KV* (equação 4.19); dessa forma fica demonstrada a auto-consistência do sistema.

O envelope externo do feixe é definido por $\tilde{x}^2 / [a^2(s)] + \tilde{y}^2 / [b^2(s)] = 1$. O máximo afastamento da partícula carregada na direção x corresponde a $x = a(s)$, que ocorre quando $\psi_{\tilde{x}}(s) + \phi_{\tilde{x}0} = 0$ e $\psi_{\tilde{y}}(s) + \phi_{\tilde{y}0} = 0$. Após algum trabalho algébrico, semelhante ao realizado para se obter a equação do envelope para um feixe de secção circular, resulta

$$\frac{d^2 a(s)}{ds^2} + \sigma_0^2 a(s) - \frac{2K}{[a(s) + b(s)]} - \frac{\epsilon_{\tilde{x}}^2}{a^3(s)} = 0, \quad (4.21)$$

que descreve como o semi-eixo maior da elipse, $a(s)$, evolui. Analogamente, o outro semi-eixo da secção elíptica, $b(s)$, evolui de acordo com a equação

$$\frac{d^2 b(s)}{ds^2} + \sigma_0^2 b(s) - \frac{2K}{[a(s) + b(s)]} - \frac{\epsilon_{\tilde{y}}^2}{b^3(s)} = 0. \quad (4.22)$$

Assim, o envelope do feixe é descrito por duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem acopladas.

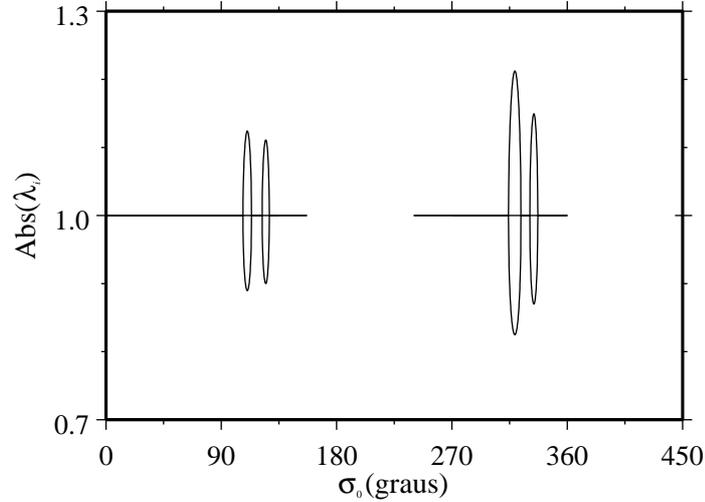


Figura 4.1: Diagrama de estabilidade para perturbações bidimensionais; $K = 3,0$ e $\delta = 1,0$.

4.3 Análise das soluções das equações de envelope

A equação 4.1 descreve os modos em que o feixe se apresenta com simetria axial, $a(s) = b(s)$, bem como os modos sem simetria axial onde a e b oscilam em oposição de fase [54], desde que desprezemos a rotação do envelope elíptico do feixe no referencial de Larmor [45]. Referimo-nos a esses modos como do tipo quadrupólo. A fim de realizarmos a análise da estabilidade do feixe cujo envelope é descrito pelas equações 4.1 vamos novamente aplicar o método de Newton-Raphson, levando em conta que estamos trabalhando com um sistema de $(2 + 1/2)$ graus de liberdade. Embora os algoritmos numéricos sejam similares aos usados anteriormente, podemos resumir os resultados obtidos na figura 4.1. Devido à complexidade relativa nas operações das simulações, escolhemos mostrar os valores absolutos dos autovalores da matriz de estabilidade; se algum dos autovalores for maior que a unidade, a solução casada é instável. Na figura 4.1 identifica-se a existência de diferentes regiões de estabilidade separadas por *gaps*, nos quais soluções casadas não se fazem presentes. Além disso, a figura 4.1 mostra um par de elevações instáveis em cada região de estabilidade. A primeira elevação de instabilidade em cada par corresponde ao dobramento de período da oscilação do feixe com simetria axial. A segunda elevação de cada par é correspondente a uma região de instabilidade adicional associada à instabilidade do tipo quadrupólo, na qual $a(s)$ e $b(s)$ oscilam em oposição de fase. Entretanto, as regiões instáveis do tipo quadrupólo ocorrem nas secções onde cresce o índice de estabilidade, conforme se verifica na figura 4.1 com $110^\circ \lesssim \sigma_0 \lesssim 135^\circ$ e $315^\circ \lesssim \sigma_0 \lesssim 360^\circ$, sendo que tais secções não são convenientes para o confinamento do feixe devido à proliferação

de ilhas de ressonância. Nas regiões apropriadas de confinamento, onde o índice de estabilidade diminui, a estabilidade é preservada, isto é, nesse caso a segunda zona de estabilidade exibe o mesmo tipo de propriedades de estabilidade que aquelas previstas pela análise da simetria axial.

Embora as instabilidades do tipo quadrupólo ocorram tanto na região usual ($\sigma_0 < 180^\circ$) quanto nas novas regiões de estabilidade, convém ressaltar que:

1 - nas regiões correspondentes ao dobramento de período (primeira elevação), os semi-eixos, $a(s)$ e $b(s)$, oscilam de modo axissimétrico, sendo $a(s) \approx b(s)$, ou seja, a secção transversal do feixe mantém-se praticamente circular. O gráfico 4.3 indica que, nessas regiões, $a(s)$ e $b(s)$ diferem no máximo da ordem de 0,3%.

2 - Já nas regiões correspondentes às instabilidades de quadrupólo, onde $a(s)$ e $b(s)$ oscilam em oposição de fase (segunda elevação), a secção transversal do feixe torna-se bastante excêntrica para certos valores da coordenada axial s , de modo que um dos semi-eixos da secção elíptica torna-se até cerca de 2,5 vezes maior do que o outro semi-eixo. Observe-se na figura 4.3 que o crescimento de qualquer um dos semi-eixos é saturado. Este fato também pode ser visualizado através do gráfico 4.3. O gráfico 4.3 mostra claramente que, para certos intervalos da coordenada axial s praticamente não existe diferença entre os semieixos $a(s)$ e $b(s)$, de modo que a secção elíptica muito se aproxima de uma secção circular, correspondendo às regiões de dobramento de período (primeira elevação), mas para outros intervalos da coordenada s tal diferença é bastante acentuada, correspondendo às instabilidades de quadrupólo (segunda elevação). Esse comportamento ocorre como se, periodicamente, a direção em que estão dispostos os eletroímãs do sistema magnético confinador fosse mudada para uma direção perpendicular à anterior; nesse caso, as oscilações ocorreriam como se o feixe estivesse sujeito a um quadrupólo magnético.

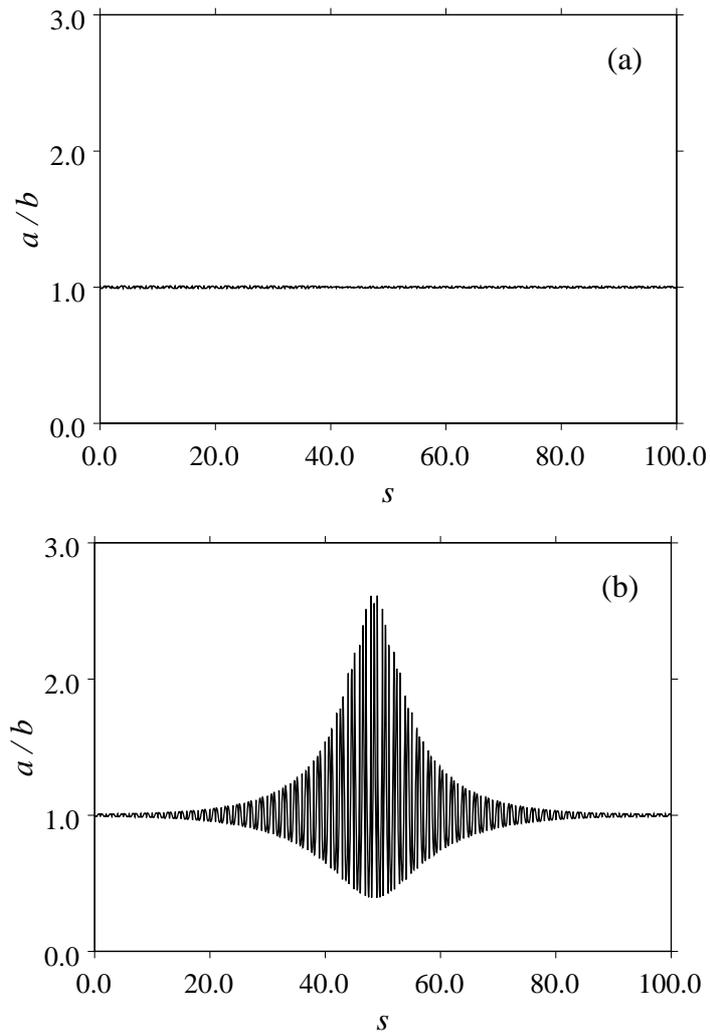


Figura 4.2: Razão entre os semi-eixos da secção elíptica, correspondentes à primeira (figura (a) - feixe com simetria axial - linha cheia) e segunda (figura (b) - feixe oscilando no modo quadrupolar - linha tracejada).

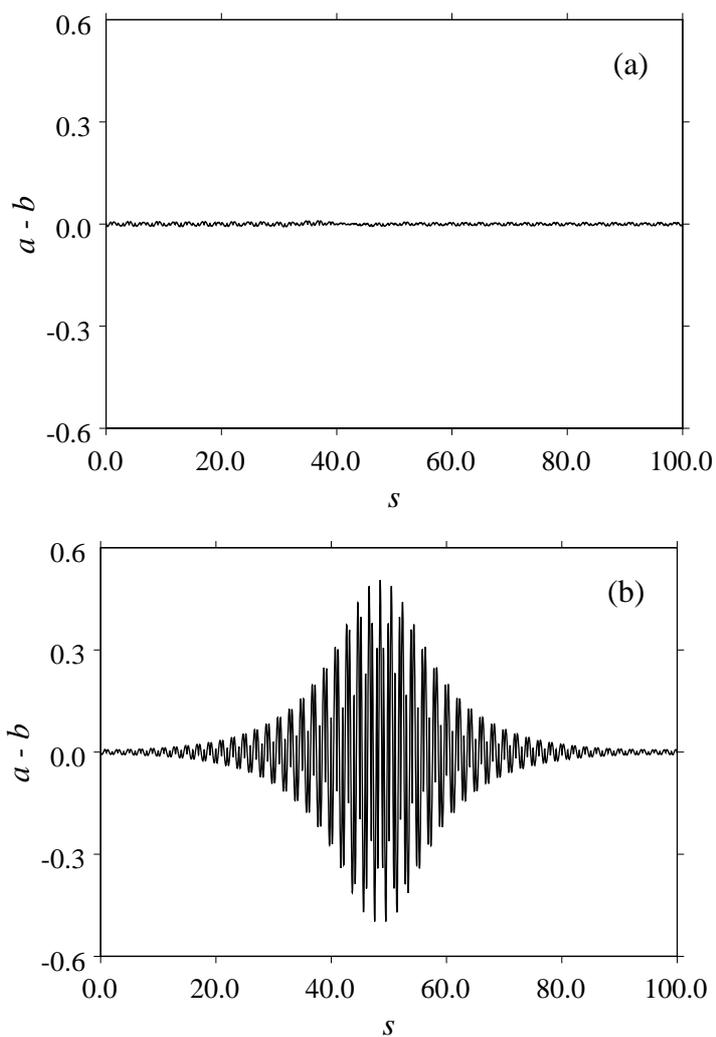


Figura 4.3: Diferença entre os semi-eixos de uma secção elíptica do feixe. Em (a) se caracteriza o feixe com simetria axial, enquanto que em (b), o feixe oscila no modo quadrupolar.

Capítulo 5

Centróide e o cilindro condutor

5.1 Considerações iniciais

Uma prática comum na análise do transporte de um feixe intenso de partículas em sistemas confinados por um campo periódico, é considerar que a centróide do feixe esteja perfeitamente alinhada com o eixo do sistema [7, 8, 9, 16, 47]. A suposição de que o eixo de simetria do sistema seja uma posição de equilíbrio para a centróide é muitas vezes adequada. Esse equilíbrio é predominantemente estável quando se usa a aproximação de feixe suave, na qual flutuações periódicas do sistema focalizador podem ser tomadas como uma média [22, 23]. Ressonâncias paramétricas envolvendo o movimento da centróide e o campo focalizador periódico podem, entretanto, afetar a estabilidade quando a frequência de oscilação da centróide e do campo periódico são comensuráveis, o que torna proibitivo o uso de técnicas de mediação. Esse tipo de instabilidade adiciona algumas restrições operacionais, além daquelas já exigidas para a estabilidade da dinâmica do envelope do feixe, desde que as regiões estáveis para a dinâmica do envelope superponham-se com as regiões instáveis para a dinâmica da centróide.

O estudo da dinâmica do envelope tem sido objeto de estudos recentes, buscando para as regiões operacionais estáveis um conjunto de parâmetros definido pelo perfil e intensidade do campo focalizador, os quais são parâmetros de controle relevantes para esse tipo de sistema [41]. Dando atenção às soluções com a mesma periodicidade do campo magnético focalizador (as quais denominamos de soluções casadas), resultados anteriores ressaltam o fato de que as regiões estáveis existem e são separadas uma da outra por um conjunto de vazios nos quais as soluções casadas são instáveis ou simplesmente não existem [46, 51, 54]. Regiões de instabilidade do envelope são imediatamente descartadas do conjunto de regiões operacionais para o transporte do feixe, de modo que estamos interessados em compreender como as regiões estáveis do envelope respondem à dinâmica da centróide. Desestabilização

devida à centróide pode ser visualizada como uma restrição adicional, reduzindo o espaço de parâmetros operacionais disponíveis.

A idéia aqui é, portanto, realizar análises da combinação dos movimentos da centróide e do envelope sob influência de um campo focalizador periódico. Primeiramente consideraremos a propagação de um feixe de densidade homogênea em um aparato focalizador solenoidal em espaço livre, já que este modelo é suficientemente genérico para representar o que ocorre em uma variedade de situações relevantes [16, 26]. Demonstra-se que a distribuição de equilíbrio Kapchinskij-Vladimirskij (KV) existe para feixes fora do eixo, e as equações para a evolução da centróide e do envelope são obtidas concordantemente. Mostramos que as regiões de instabilidade da dinâmica da centróide podem superpor-se com as regiões estáveis para a dinâmica do envelope apenas, e que esta sobreposição persiste enquanto o perfil do campo focalizador periódico é variado desde a forma senoidal até a de onda quadrada. Conforme mencionado, essa instabilidade resulta dos batimentos entre a periodicidade do campo focalizador e a frequência natural de oscilação da centróide; tal comportamento não é exibido em sistemas homogêneos, embora deva ser tratado com cautela em sistemas periódicos de confinamento. A análise é suplementada com simulações que envolvem um grande número de macropartículas, as quais mostram que a abordagem de baixa dimensão baseada nas equações do envelope e da centróide são bastante precisas.

Considerações relativas à simetria nos levam a concluir que a influência do cilindro condutor sobre a dinâmica do envelope é nula, em geometrias solenoidais com simetria axial. Mesmo em geometrias mais gerais e complexas, como aquelas que exibem quadrupólos alternados, a influência do cilindro condutor é fraca [49]. A influência do cilindro condutor sobre a dinâmica da centróide tem sido estudada, mas somente sob a aproximação de feixe suave, conforme mencionado anteriormente [22, 23]. Portanto, é apropriado para visualizar essa última questão quando as aproximações de feixe suave falham e, assim, desenvolvemos uma análise pertinente na parte final desse capítulo. Mostramos que a dinâmica da centróide pode tornar-se caótica à medida que os efeitos não-lineares das paredes condutoras forem incluídos. A região caótica não se estende abaixo do eixo, mas sob certas condições pode tornar-se muito fechada a ponto de ameaçar a estabilidade não-linear do esquema de transporte.

Este capítulo está organizado conforme segue: na seção 2 definimos o modelo e introduzimos os métodos de análise a serem empregados, enquanto que na seção 3 fazemos o mapeamento das várias regiões estáveis e instáveis relativas aos movimentos da centróide e do envelope, com a ajuda de um método numérico para determinação de raízes e simulações completas de multipartículas.

5.2 O modelo e os métodos

Consideremos um intenso e contínuo feixe de partículas transportado com velocidade axial constante sob ação de um campo magnético focalizador periódico. Quando o feixe estiver perfeitamente alinhado com o eixo de transporte, que tomamos como sendo o eixo z , a equação apropriada que descreve o envelope r_b é

$$r_b'' + \kappa_z(s)r_b = F(r_b), \quad (5.1)$$

onde introduzimos a notação usual $s \equiv z$ da física de feixes e $r_b'' \equiv d^2r_b/ds^2$.

Um entendimento fundamental das propriedades de equilíbrio cinético e estabilidade de certos sistemas é procurado. Esses sistemas incluem feixes de altas correntes periodicamente focalizadas e de baixa emitância. Vimos que tal entendimento é crucial para um grande número de aplicações, como aceleradores de partículas e fontes coerentes de radiação. Por muito tempo, a distribuição Kapchinskij-Vladimirskij (KV) [26] foi a única distribuição de equilíbrio de Vlasov [27] conhecida para a propagação de feixes intensos de partículas periodicamente focalizados. A análise de equilíbrio e estabilidade baseada no feixe KV tem sido crítica para o desenvolvimento e compreensão da física de um feixe intenso [7, 8, 16, 18, 46, 47, 54]. Mais recentemente, tem-se mostrado que a distribuição KV pode ser generalizada para permitir o estudo da rotação do feixe rígido relativamente ao referencial de Larmor, sujeito a campos focalizadores solenoidais periódicos [9]. Tais estudos indicam que a rotação pode ter um papel importante para estabilidade do feixe de partículas [10]. Na obtenção desse equilíbrio de Vlasov, faz-se a suposição de que o feixe esteja perfeitamente alinhado com o eixo de simetria do campo focalizador [7, 9, 26]. Usualmente, essa suposição simplificadora é empregada na análise de um feixe intenso de partículas [16], por ser o eixo de simetria do sistema uma posição de equilíbrio para a centróide do feixe, sendo o equilíbrio estável quando a aproximação do feixe suave for empregada, onde as flutuações periódicas do campo focalizador forem mediadas [22, 23]. Em alguns casos, entretanto, podemos esperar o início de uma ressonância paramétrica envolvendo o movimento da centróide e as oscilações do campo focalizador. Isto causaria uma desestabilização no movimento da centróide e afetaria fortemente a totalidade da dinâmica do feixe. Em tais condições o procedimento de mediação não tem grande alcance de validade e uma descrição detalhada da dinâmica da centróide torna-se obrigatória.

Nesta secção deduziremos, a partir da descrição da teoria cinética de Vlasov-Maxwell, uma equação geral para a centróide de um feixe livre, contínuo e intenso, propagando-se fora do eixo de simetria do campo focalizador solenoidal e periódico. Mostraremos que a centróide obedece a uma equação do tipo Mathieu [1]. A equação é independente da distribuição específica do feixe, tornando-se instável sempre que

a frequência de oscilação da centróide, que está relacionada ao valor rms do campo focalizador, for comensurável com a periodicidade do auto-campo. No caso particular de um feixe de densidade uniforme em torno de sua centróide, mostramos que existe uma distribuição auto-consistente de equilíbrio de Vlasov para a dinâmica do feixe. Mostra-se que o envelope que determina um raio exterior de equilíbrio para o feixe em torno de sua centróide, obedece à familiar equação do envelope [7, 8, 16, 30, 52], sendo independente do movimento da centróide. Um exemplo do equilíbrio de Vlasov é discutido em detalhe para mostrar a possibilidade de encontrar-se as soluções do feixe para as quais a equação do envelope [7, 35, 41, 46, 47, 54], que foi extensamente estudada, seja estável, enquanto o movimento da centróide permaneça instável, revelando a importância do movimento da centróide sobre todas as propriedades do feixe confinado.

5.3 Equação geral para o movimento da centróide

Considerando-se um feixe de partículas carregadas propagando-se com velocidade axial $\beta_b c \hat{e}_z$ através de um campo magnético focalizador periódico e solenoidal dado por

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, s) = B_z(s) \hat{e}_z - \frac{1}{2} r B'_z(s) \hat{e}_r, \quad (5.2)$$

onde $\mathbf{r} = x \hat{e}_x + y \hat{e}_y$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ é a distância radial do eixo de simetria do campo, $s = z = \beta_b c t$ é a coordenada axial, $B_z(s + S) = B_z(s)$ é o campo magnético atuante ao longo do eixo, $B'_z(s) \equiv dB_z(s)/ds$, c e S são a velocidade da luz no vácuo e o comprimento de periodicidade do campo magnético focalizador, respectivamente. Desde que o campo focalizador seja solenoidal, torna-se conveniente trabalharmos no referencial de Larmor [16], que rotaciona relativamente ao referencial do laboratório com uma velocidade angular dada por $\Omega_L(s) = q B_z(s) / (2 \gamma_b m c)$, onde q , m e $\gamma_b = (1 - \beta_b^2)^{-1/2}$ são, respectivamente, a carga, massa e o fator relativístico do feixe de partículas. O referencial de Larmor é usado durante esta secção, onde \hat{e}_x e \hat{e}_y são tomados como os vetores unitários ao longo dos eixos de rotação. Na aproximação paraxial, a função de distribuição do feixe, $f_b(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s)$, evolui de acordo com o sistema de Vlasov-Maxwell [16]

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_b}{\partial s} + \mathbf{v} \cdot \dot{\nabla} f_b + (-\kappa_z \mathbf{r} - \nabla \psi) \cdot \dot{\nabla}_v f_b &= 0, \\ \nabla^2 \psi &= -\frac{2\pi \mathbf{K}}{\mathbf{N}_b} \mathbf{n}_b(\mathbf{r}, s), \\ n_b &= \int f_b d\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde $n_b(\mathbf{r}, s)$ é o perfil da densidade do feixe, $\kappa_z(s) = q^2 B_z^2(s)/[4\gamma_b^2 \beta_b^2 (mc)^2]$ é o parâmetro do campo focalizador, $K = 2q^2 N_b/(\gamma_b^3 \beta_b^2 mc^2)$ é a perveança do feixe, $N_b = \int f_b d\mathbf{r} d\mathbf{v} = \text{const.}$ é o número de partículas por unidade axial de comprimento, e $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$; na rotação aqui mencionada, a derivada de um vetor com relação a s representa a derivada diretamente no referencial de Larmor, onde $\hat{\mathbf{e}}_x$ e $\hat{\mathbf{e}}_y$ são considerados vetores unitários fixos. A primeira das equações em 5.3 expressa a conservação da probabilidade em nosso modelo. Na segunda equação em 5.3, ψ é um potencial normalizado que incorpora tanto o auto-campo elétrico como o auto-campo magnético, \mathbf{E}^{auto} e \mathbf{B}^{auto} . Uma dedução detalhada [16], mostra que ψ está relacionado aos potenciais auto-escalares e auto-vetoriais através de

$$\begin{aligned}\phi^{\text{auto}} &= \frac{A_z(s)}{\beta_b} = \frac{1}{q} \gamma_b^3 \beta_b^2 mc^2 \psi(\mathbf{r}, s), \\ \mathbf{A}^{\text{auto}}(\mathbf{r}, s) &= A_z^{\text{auto}}(\mathbf{r}, s) \hat{\mathbf{e}}_z, \\ \mathbf{E}^{\text{auto}}(\mathbf{r}, s) &= -\nabla \phi^{\text{auto}}(\mathbf{r}, s), \\ \mathbf{B}^{\text{auto}}(\mathbf{r}, s) &= \nabla \times \mathbf{A}^{\text{auto}}(\mathbf{r}, s).\end{aligned}\tag{5.4}$$

Nossa primeira tarefa aqui é determinar a evolução da centróide do feixe localizada em

$$\bar{\mathbf{r}}(s) \equiv \frac{1}{N_b} \int \mathbf{r} f_b(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s) d\mathbf{r} d\mathbf{v}.\tag{5.5}$$

Multiplicando-se a primeira das equações 5.3 por \mathbf{r} e integrando sobre o espaço de fase obtemos

$$\bar{\mathbf{r}}' = \bar{\mathbf{v}},\tag{5.6}$$

onde $\bar{\mathbf{v}} \equiv (1/N_b) \int \mathbf{v} f d\mathbf{r} d\mathbf{v}$. Se agora multiplicarmos a primeira das equações 5.3 por \mathbf{v} e integrarmos sobre o espaço de fase, obteremos

$$\bar{\mathbf{v}}' = -\kappa_z \bar{\mathbf{r}} - \overline{\nabla \psi},\tag{5.7}$$

onde $\overline{\nabla \psi} \equiv (1/N_b) \int f \nabla \psi d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ é obtida através de integração por partes de $\nabla_{\mathbf{v}}$ termo no espaço de velocidades. Observe-se que, do ponto de vista estatístico, a equação 5.7 tem a mesma origem da equação ??, neste contexto. A partir da segunda e terceira equações em 5.3, podemos reescrever $\overline{\nabla \psi}$ como

$$\overline{\nabla \psi} = \frac{1}{N_b} \int f \nabla \psi d\mathbf{r} d\mathbf{v} = \frac{1}{N_b} \frac{-N_b}{2\pi K} \int \nabla \psi \nabla^2 \psi d\mathbf{r}.\tag{5.8}$$

Dessa forma, observamos que o integrando da equação 5.8 pode ser apresentado de uma forma mais adequada,

$$\nabla \psi \nabla^2 \psi = \nabla \cdot \left[\nabla \psi \nabla \psi - \mathbf{I} \frac{(\nabla \psi)^2}{2} \right],\tag{5.9}$$

onde o diádico \mathbf{I} é dado por $\mathbf{I} \equiv \hat{\mathbf{e}}_x \hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_y \hat{\mathbf{e}}_y$, onde $(\mathbf{grad}\psi)^2 = \nabla\psi \cdot \nabla\psi$. Agora, aplicando o teorema de Gauss chegamos à expressão

$$\overline{\nabla\psi} = \frac{1}{2\pi K} \oint \hat{\mathbf{e}}_n \cdot [\nabla\psi - \mathbf{I}(\nabla\psi)^2] dA = 0, \quad (5.10)$$

uma vez que $\nabla\psi \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$ para feixes no espaço livre. Na equação 5.10, dA e $\hat{\mathbf{e}}_n$ são, respectivamente, o elemento de contorno diferencial e o vetor unitário normal ao contorno da integração quando $r \rightarrow \infty$. De fato, o resultado $\overline{\nabla\psi} = 0$ é o esperado, com base na lei da ação-reação; desde que $-\nabla\psi$ corresponda à auto-força exercida pelas partículas do feixe sobre elas mesmas, a média tomada sobre a distribuição do feixe tende a desaparecer devido à estrutura de interação eletromagnética entre as partículas. Usando as equações 5.7 e 5.10 na equação 5.6, finalmente obtemos a equação de movimento da centróide

$$\bar{\mathbf{r}}'' + \kappa_z(s)\bar{\mathbf{r}} = 0. \quad (5.11)$$

Vamos nos atentar ao fato de que, até agora, não tenhamos feito alguma suposição sobre uma forma particular da função de distribuição do feixe. Assim, a equação da centróide (equação 5.11) permanece válida ao longo do feixe que a envolve, de acordo com o sistema de Vlasov-Maxwell, ou seja com as equações 5.3. No referencial do laboratório, combinado ao movimento oscilatório descrito pela equação 5.11, a centróide também rotaciona com velocidade angular $\Omega_L(s)$ em torno do centro $r = 0$. Levando-se em conta que $\kappa_z(s)$ é periódico, a equação 5.11 é do tipo de Mathieu [1], que descreve um oscilador periódico harmônico forçado. Essa equação é conhecida por apresentar soluções instáveis relacionadas às ressonâncias paramétricas no movimento de $\bar{\mathbf{r}}$. Escrevendo-se convenientemente a média de $\kappa_z(s)$ sobre um período como

$$\frac{1}{S} \int_0^s \kappa_z(s') ds' \equiv \frac{\sigma_0^2}{S^2}, \quad (5.12)$$

onde σ_0 é um parâmetro adimensional proporcional ao valor rms do campo focalizador, que mede o avanço de fase no vácuo num pequeno campo, na aproximação do feixe suave, as instabilidades no movimento da centróide são esperadas à medida que se verifica a aproximação $\sigma_0 \sim n\pi$; essa condição é correspondente às ressonâncias paramétricas entre a periodicidade da oscilação de $\bar{\mathbf{r}}$ na média (rms) do campo focalizador e a periodicidade do auto-campo focalizador. Dependendo do perfil exato de $\kappa_z(s)$, os tipos das regiões de instabilidade em torno de $\sigma_0 \sim n\pi$ variam significativamente. Se o objetivo é o confinamento do feixe, tais regiões devem ser evitadas. Levando-se em conta o fato de que a equação 5.11 é estritamente válida para feixes livres, espera-se que ela forneça uma boa descrição do movimento da centróide em

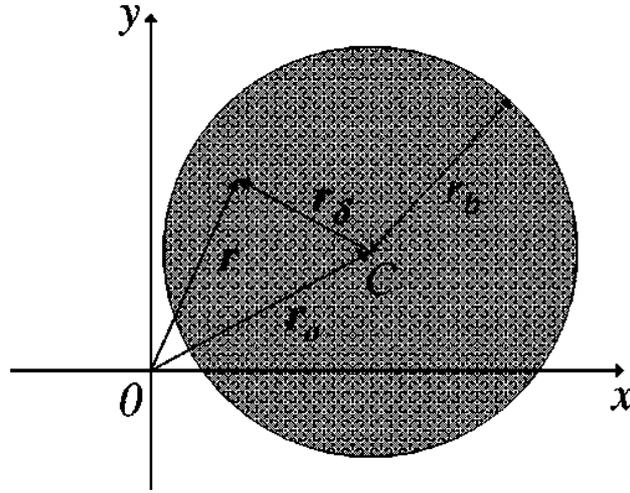


Figura 5.1: Esquema da distribuição do feixe da equação 5.13 e os correspondentes vetores. C representa a posição da centróide.

sistemas ligados, se o feixe for aproximadamente simétrico e não excessivamente deslocado do centro do cilindro condutor, localizado em $r = 0$. A razão disso, é que nesse caso $\nabla\psi = \pm\hat{\mathbf{e}}_n |\nabla\psi|$ nas paredes do cilindro condutor, onde $\hat{\mathbf{e}}_n$ é agora o vetor unitário normal à parede, e a integral de superfície na equação 5.10, calculada ao longo do contorno, vai desaparecendo enquanto que $|\nabla\psi|$ torna-se aproximadamente constante. Cabe também observar que a presença do cilindro condutor geralmente não suprime as instabilidades da centróide, discutidas em relação à equação 5.11; de fato, isso é realçado pelo fato das cargas imagem induzirem cargas de sinal oposto, causando a atração do feixe pela parede do cilindro condutor.

Nosso próximo objetivo é mostrar que podemos construir um equilíbrio de Vlasov para um feixe transportado fora do eixo de simetria do sistema. Particularmente, assumimos que o feixe tenha uma densidade radial uniforme distribuída em torno do centro localizado em $\mathbf{r}_0(s) = x_0(s)\hat{\mathbf{e}}_x + y_0(s)\hat{\mathbf{e}}_y$, isto é,

$$n_b(\mathbf{r}, s) = \begin{cases} N_b/[\pi r_b^2(s)], & \text{para } r_\delta < r_b(s), \\ 0, & \text{para } r_\delta > r_b(s), \end{cases} \quad (5.13)$$

onde $r_b(s)$ é o envelope do feixe em equilíbrio e $\mathbf{r}_\delta \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. Um esquema da distribuição do feixe da equação 5.13 e os correspondentes vetores, está mostrado na figura 5.1. Para o feixe em questão, podemos facilmente reconhecer $\mathbf{r}_0(s)$ como sendo a coordenada da centróide. De acordo com o que vimos anteriormente, a posição da centróide evolui de acordo com a equação

$$\mathbf{r}_0'' + \kappa_z(s)\mathbf{r}_0 = 0. \quad (5.14)$$

Usando $n_b(\mathbf{r}, s)$ que aparece na segunda equação em 5.3, obtemos o auto-potencial normalizado,

$$\psi(\mathbf{r}, s) = -|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 \frac{K}{2r_b^2(s)}, \quad (5.15)$$

no interior do feixe ($r_\delta < r_b$). Portanto, uma partícula única do feixe localizada em $\mathbf{r}(s)$, sujeita à força do campo focalizador externo, $-\kappa_z(s)\mathbf{r}$, e à força do auto-campo, $-\nabla\psi(\mathbf{r}, s)$, move-se de acordo com

$$\mathbf{r}'' + \kappa_z \mathbf{r} - \frac{K}{r_b^2} \mathbf{r}_\delta = 0. \quad (5.16)$$

Subtraindo-se a equação 5.14 da 5.16, obtém-se

$$\mathbf{r}_\delta'' + \kappa_z \mathbf{r}_\delta - \frac{K}{r_b^2} \mathbf{r}_\delta = 0, \quad (5.17)$$

que descreve o movimento do feixe de partículas relativamente ao centro \mathbf{r}_0 . A equação 5.17 pode ser resolvida com o conhecimento de técnicas de física de feixes [7, 16]. Considerando-se o movimento ao longo do eixo x , pode-se escrever

$$x_\delta = A_{x\delta} \omega(s) \text{sen} \left[\int^s \zeta(s') ds' + \zeta_{x\delta 0} \right], \quad (5.18)$$

onde $A_{x\delta}$ e $\zeta_{x\delta 0}$ são constantes. Substituindo essas expressões na equação 5.17, obtém-se

$$\omega'' + \kappa(s)\omega = \frac{1}{\omega^3}, \quad (5.19)$$

sendo $\zeta(s) = \omega^{-2}(s)$, $\kappa(s) \equiv \kappa_z(s) - K/[r_b^2(s)]$ e a constante de movimento $A_{x\delta}$ expressa como

$$A_{x\delta}^2 = \left(\frac{x_\delta}{\omega} \right)^2 + \left(\omega x'_\delta - \omega' x_\delta \right)^2. \quad (5.20)$$

Realizando um cálculo equivalente para o movimento ao longo do eixo y , chega-se a uma expressão semelhante à anterior, ou seja,

$$A_{y\delta}^2 = \left(\frac{y_\delta}{\omega} \right)^2 + \left(\omega y'_\delta - \omega' y_\delta \right)^2, \quad (5.21)$$

que também é uma constante de movimento. Da equação 5.17 podemos ver que todas as forças são centrais relativamente à centróide \mathbf{r}_0 . Dessa forma, pode-se de imediato demonstrar que o momentum angular canônico,

$$P_{\Theta\delta} = x_\delta y'_\delta - y_\delta x'_\delta \quad (5.22)$$

é uma constante de movimento. Devido ao fato de que $A_{x\delta}^2$, $A_{y\delta}^2$ e $P_{\Theta\delta}$ sejam constantes exatas de movimento de partícula única, uma possível escolha da função distribuição

de equilíbrio de Vlasov é

$$f_b^{EQ}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s) = \frac{N_b}{\pi^2 \epsilon_T} \delta \left[A_{x\delta}^2 + A_{y\delta}^2 - 2\omega_b P_{\Theta\delta} - (1 - \omega_b^2) \epsilon_T \right], \quad (5.23)$$

onde $df_b^{EQ}/ds = 0$, $\epsilon_T = \text{const.}$ é uma emitância efetiva e o parâmetro de rotação $\omega_b = \text{const.}$ pertence ao intervalo $-1 < \omega_b < 1$ para feixes radialmente confinados. Usando f_b^{EQ} na terceira equação em 5.3, torna-se direto mostrar que o perfil da densidade uniforme centrado em \mathbf{r}_0 da equação 5.13 é consistentemente obtido, resultando em $r_b(s) = \sqrt{\epsilon_T \omega(s)}$. Então, $r_b(s)$ obedece à familiar equação de envelope

$$r_b'' + \kappa_z(s)r_b - \frac{K}{r_b} - \frac{\epsilon_T^2}{r_b^3} = 0. \quad (5.24)$$

Realizando-se as médias necessárias sobre a distribuição de equilíbrio, equação 5.23, pode-se mostrar que o feixe rotaciona rigidamente em torno de sua centróide $\mathbf{r}_0(s)$ com velocidade angular

$$\Omega_{b\delta}(s) = \frac{\omega_b \epsilon_T \beta_b c}{r_b^2(s)}, \quad (5.25)$$

o que nos mostra que ω_b está relacionado à rotação diferencial no referencial de Larmor. Além disso, a emitância rms calculada relativamente à posição da centróide é dada por

$$\epsilon_\chi \equiv 4\sqrt{[\langle \chi^2 \rangle \langle \chi'^2 \rangle - \langle \chi\chi' \rangle^2]}, \quad (5.26)$$

que é igual ao parâmetro de emitância efetiva ϵ_T . Na última equação, $\chi = x_\delta, y_\delta$, e os brackets indicam as médias sobre a distribuição do feixe. Assim, vê-se que a distribuição de equilíbrio de Vlasov pode ser obtida de forma que o envelope do feixe obedeça à equação 5.24 com constante de emitância uniforme quando a centróide se move do eixo x , $\mathbf{r}_0 \neq 0$, seguindo a dinâmica descrita pela equação 5.14. Referimo-nos a esse equilíbrio como um equilíbrio de Vlasov para uma focalização periódica fora do eixo. Dessa forma, nesse caso, devemos chamar à atenção para o interessante fato de que o movimento da centróide e a dinâmica do envelope são desacoplados. Em outras palavras, a dinâmica da centróide em nada afeta o conhecimento sobre a estabilidade resultante para a dinâmica do envelope [7, 35, 41, 46, 54], da mesma forma que a dinâmica do envelope também não é afetada pela dinâmica da centróide. Parece estar claro que um bom feixe confinado seja aquele no qual tanto a centróide quanto o envelope sejam estáveis.

5.4 Análise de estabilidade

5.4.1 Modelamento de baixa dimensão

Para auxiliar na realização da nossa meta definida na secção anterior faremos uso do algoritmo de estabilidade de Newton-Raphson em dois momentos: para localizar as soluções periódicas das equações 2.52 e 5.11, e para estabelecer os contornos de estabilidade para essas soluções periódicas. O caminho para encontrarmos os contornos de estabilidade fazem uso do método para obtermos as órbitas periódicas como uma subrotina. Na subrotina, as órbitas são caracterizadas pelo seu índice de estabilidade α , tais que $|\alpha| < 1$ para as órbitas estáveis. O principal caminho toma α como determinado por algum parâmetro p na forma $\alpha = F(p)$, que pode ser no mínimo numericamente obtido. Para um dado α escrevemos $p = \tilde{p} + \delta p$, onde \tilde{p} é uma solução teste e δp é pequeno. Assim finalmente obtemos $\delta p \sim \Delta\alpha / (\partial F / \partial p)_{\tilde{p}}$ com $\Delta\alpha \equiv \alpha - F(\tilde{p})$ e refina a solução com $\tilde{p}_{\text{novo}} = \tilde{p} + \delta p$. Essa é a essência do algoritmo e os contornos serão determinados quando tivermos $\alpha = \pm 1$. Tomaremos p como sendo um parâmetro que mede a intensidade do campo magnético focalizador, $p \rightarrow \sigma_0$, e buscaremos as regiões de estabilidade através de diagramas do tipo σ_0 versus Δ . Apesar de outras quantidades paramétricas poderem ser usadas para representar o presente cenário [35], decidimos apelar para essa forma mais direta de simulação para encontrar os contornos de estabilidade na presença do surgimento de não linearidades iniciadas a partir de efeitos de perveança.

Conforme já mencionado, várias regiões de estabilidade e de instabilidade para o envelope somente puderam ser encontradas com a variação de σ_0 . Para valores suficientemente pequenos do campo magnético, nos foi possível encontrar órbitas estáveis que vieram a tornar-se instáveis a partir da passagem pelo limiar de dobramento de período, penetrando numa região na qual $\alpha_{\text{envelope}} < -1$. A região de instabilidade é caracterizada como sendo aquela em que enquanto o campo magnético é aumentado o índice de estabilidade retorna aos valores $\alpha_{\text{envelope}} > -1$. À medida que o campo magnético for aumentando, um mecanismo denominado bifurcação de gap destrói a solução casada em $\alpha_{\text{envelope}} = +1$, a qual é recriada para valores superiores [51] e, assim, o ciclo é então repetido [46].

Como para o movimento da centróide, poderemos fazer algumas estimativas quando nos dermos conta que a equação governante 5.11 é uma equação do tipo de Mathieu [1]. Desde que $\kappa_z(s)$ possa ser uma função complicada devido ao perfil do campo, não conheceremos em detalhe o comportamento da equação 5.11, mas dadas as propriedades gerais das equações de Mathieu [1], podemos esperar soluções estáveis enquanto σ_0 permanecer suficientemente afastado de múltiplos de π ; instabilidades são esperadas enquanto ocorrer a aproximação $\sigma_0 \sim n\pi$.

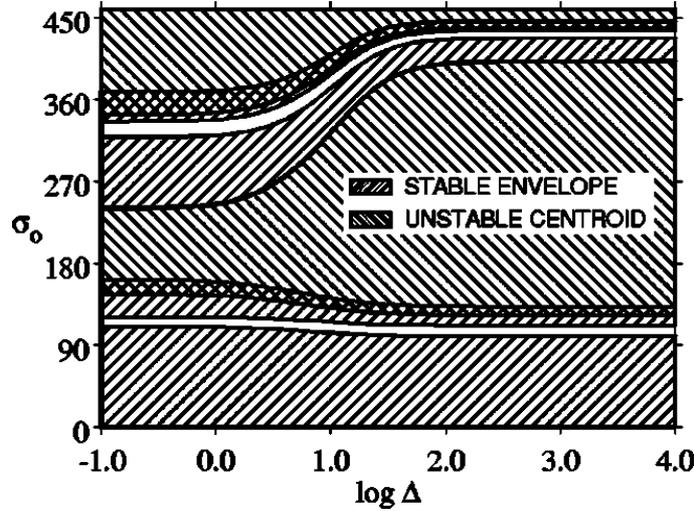


Figura 5.2: Diagrama de parâmetros indicando as regiões de envelope estável (linhas inclinadas para direita) e regiões de centróide instável (linhas inclinadas para esquerda), para $\eta = 0, 2$ e $K = 5, 0$.

Presentemente estendemos a técnica aplicada numa prévia análise realizada somente na estabilidade do envelope [41] e, conforme mencionado anteriormente, traçamos contornos de estabilidade $\alpha = \pm 1$ simultaneamente para as equações do envelope e da centróide, com o objetivo de mapear a abundância de regiões estáveis e instáveis do sistema completo envelope-centróide.

A correspondente distribuição de regiões estáveis e instáveis está exibida na figura 5.2 onde tomamos $\eta = 0, 2$, com Δ variando desde $\Delta = 0, 1$ até $\Delta = 10^4$.

Conforme o previsto, pequenos valores de Δ correspondem a quase redes harmônicas, enquanto grandes valores estão associados aos perfis tipo onda quadrada. O que constatamos aqui pode ser expressado conforme segue: dada uma completa independência entre os movimentos da centróide e do envelope, as regiões de estabilidade de r_b permanecem como calculadas anteriormente [41]. Regiões estáveis para a dinâmica do envelope são representadas aqui por linhas inclinadas para direita, e regiões instáveis para a centróide são representadas por linhas inclinadas para esquerda - a formação de regiões estáveis para o envelope, que têm sido desestabilizadas pela centróide é, então, representada pela sobreposição desses dois tipos de linhas. A primeira região de estabilidade para a dinâmica do envelope permanece bifurcada para o eixo $\sigma_0 = 0$ para todos os perfis periódicos enquanto que a centróide permanece estável. À medida que o campo magnético cresce, primeiramente encontramos uma região de dobramento de período na qual o envelope torna-se instável (apesar de ainda existir). Para maiores campos o envelope recupera a estabilidade e se encontra numa região de restabelecimento da estabilidade do envelope, para a qual a centróide torna-se

instável pela primeira vez. Essa é, então, uma região crítica para a nossa análise, onde apenas o envelope mantém-se estável enquanto que a centróide é instável; em consequência disso, a totalidade da dinâmica não é estável. Observe-se que as regiões desestabilizadas ocupam em torno de 50 % da região previamente estável. Enquanto a centróide é instável, o mecanismo é denominado de bifurcação de gap [51], destruindo órbitas de envelopes casados e reconstruindo-as para grandes campos, quando a centróide tem novamente restabelecida a sua dinâmica estável; vimos que as bifurcações de gap separam zonas adjacentes de existência de soluções casadas. A partir disso, o mesmo tipo de comportamento se repete, com a dinâmica da centróide instável ocupando até mais de 50% da próxima região estável. Isto pode nos levar a concluir que a dinâmica da centróide torna-se influente nas regiões paramétricas, onde o envelope sozinho seria uma condição operacional, o que é uma informação relevante à medida que estendemos o feixe focalizador além da instabilidade de dobramento do período do envelope em $\sigma_0 = 90^\circ$. Em algum caso, isso pode ser apropriado para enfatizar que regiões inteiras de estabilidade, de todas as zonas, permanecem intocáveis pelas instabilidades da centróide, notadamente as regiões imediatamente seguintes às bifurcações de gap e anteriores às seqüências de dobramento de período.

5.4.2 Simulações completas de multipartículas

A fim de validar o nosso modelamento de baixa dimensão, fizemos simulações numéricas envolvendo um grande número $N_b = 8000$ filetes de macropartículas carregadas interagindo via interação eletromagnética [47]. A escolha $\sigma_0 = 155^\circ$, $\Delta = 10^{-1}$ nos leva a uma região na qual o envelope é estável, mas a centróide não. Por conseguinte, partimos de valores muito pequenos de $|\mathbf{r}_0|$ e $|\mathbf{r}'_0|$ e, de acordo com a figura 5.3(a), fica revelado que o movimento da centróide desenvolve um típico crescimento exponencial da dinâmica instável e a figura 5.3(b) mostra que todo o tempo o envelope é precisamente descrito pela dinâmica estável que resulta da equação 5.11. Também a figura 5.3(c) indica que a emitância é bem conservada enquanto o tempo evolui, sendo um indicativo de que a dinâmica do envelope se comporta conforme o esperado. A emitância é calculada a partir da expressão

$$\epsilon_\chi = 4\sqrt{\langle \chi^2 \rangle \langle \chi'^2 \rangle - \langle \chi\chi' \rangle^2}, \chi = x - x_0, y - y_0 \quad (5.27)$$

e o envelope de

$$r_b = \sqrt{2 \langle (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \rangle}, \quad (5.28)$$

onde os *brackets* indicam a média sobre as macropartículas. Em geral, a dinâmica resultante indica um desacoplamento entre a dinâmica estável do envelope e a instabilidade da dinâmica da centróide.

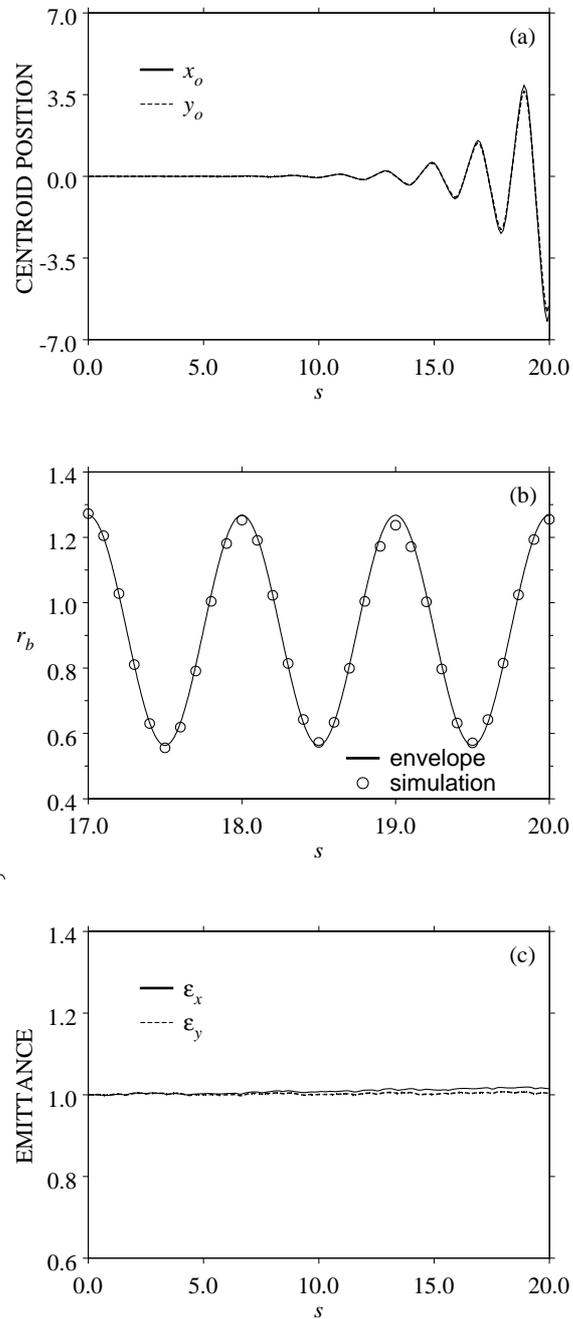


Figura 5.3: Simulação de multipartículas que validam os resultados de baixa dimensão. $N_b = 8000$, $\eta = 0,2$, $\sigma_0 = 155^\circ$, $\Delta = 10^{-1}$ e $K = 5,0$. (a) A dinâmica da centróide; (b) comparação da equação 5.11 do envelope e a simulação de multipartículas; (c) emitância obtida através das simulações de multipartículas.

5.5 Influência do cilindro condutor

Passaremos agora a investigar a influência do cilindro condutor que envolve o feixe de partículas focalizado. O cilindro condutor se encontra isolado do feixe, sendo que sua ação sobre o transporte do feixe é devida às cargas induzidas em sua superfície. Sabemos que a influência sobre a dinâmica do envelope é em geral pequena [49]; nos casos com geometria solenoidal tal influência é virtualmente nula. Por outro lado, a influência dos cilindros condutores sobre a dinâmica da centróide foi analisada em perfis suaves, nos quais a rede é aproximadamente descrita como uma média de uma variável contínua [22, 23]. Nesse caso particular mostrou-se que o cilindro condutor introduz um efeito não linear capaz de desestabilizar o equilíbrio da centróide somente para um intervalo restrito de pequenos valores de σ_0 . Agora passaremos a analisar situações em que o perfil do campo focalizador não seja suave e, assim, analisaremos o que acontecerá quando o perfil do campo focalizador for periódico, mas não suave, até chegarmos ao caso extremo da configuração do tipo onda quadrada. À medida que Δ for aumentando, espera-se visualizar alguns graus de dinâmica não integrável, desde que nosso sistema torne-se não-linear com um e meio grau de liberdade. A questão central é compreender como a presença de trajetórias não-integráveis poderá afetar substancialmente o correspondente espaço de fase.

Na ausência de cilindros condutores, a dinâmica da centróide é simplesmente governada pela equação linear 5.11. Quando o cilindro estiver presente, as cargas induzidas sobre a sua superfície poderão ser representadas como cargas imagem dispostas além das paredes do cilindro. Assumindo novamente que o feixe seja um fino filamento localizado ao longo do eixo x , a utilização da técnica das cargas imagem nos leva a concluir que cada imagem esteja localizada em $x_{\text{imagem}}(s) = a^2/x(s)$, onde a é o raio do cilindro condutor, e cada carga imagem tenha sinal oposto ao de sua correspondente carga no feixe [25]. Assim sendo, concluímos a construção do modelo usando cargas imagem. O potencial de um filete cilíndrico localizado em x_0 é proporcional a $\log(x - x_0)$, donde podemos obter a força que atua sobre o feixe devido às suas cargas imagem como $+Kx/(a^2 - x^2)$, onde lembramos que K é a perveância. A equação que governa o movimento da centróide é, portanto, modificada para a seguinte forma,

$$x_0'' = -\kappa_z(s)x_0 + \frac{Kx_0}{a^2 - x_0^2}. \quad (5.29)$$

Analisamos numericamente a equação 5.29 usando plots de Poincaré e, para facilitar, omitimos a variável dinâmica quantitativamente similar y_0 . Na figura 5.4(a) representamos um típico plot de fase para o feixe centrado em x_0' versus x_0 , para $\Delta = 0,1$ e $\sigma_0 = 140^\circ$, com o raio do cilindro condutor, a , escolhido como sendo aproximadamente cinco vezes maior do que o valor máximo do raio do feixe, r_0 , ou seja $a/(r_b)_{\text{max}} \approx 5,0$, de modo que fique explicitada a condição usual de o cilindro

ser razoavelmente maior do que o feixe de partículas por ele envolvido. Observamos que apesar da região mais central $x_0 \rightarrow 0$ estar livre de órbitas caóticas, ela se mostra densamente rodeada por órbitas não integráveis que se estendem até as paredes do cilindro. Para comparação, também visualizamos situações nas quais aproximações foram feitas: no painel (b) as paredes do cilindro foram removidas, enquanto que no painel (c) foi usada a aproximação do feixe suave $\kappa_z = \text{constante}$. Em ambos os casos (painéis (b) e (c)) a dinâmica torna-se regular, de modo que podemos ter uma boa noção sobre o comportamento do movimento caótico do sistema. A conclusão é clara: devemos tomar o cuidado para que o feixe mantenha-se alinhado e próximo ao eixo central, caso contrário partículas podem ser perdidas devido à difusão caótica. É claro que estando o feixe localizado próximo ao eixo do sistema, mesmo assim deve-se observar os critérios analisados nas secções precedentes para assegurar a estabilidade. Certamente a análise feita até aqui merece uma abordagem mais completa que será realizada em trabalhos que darão continuidade a este.

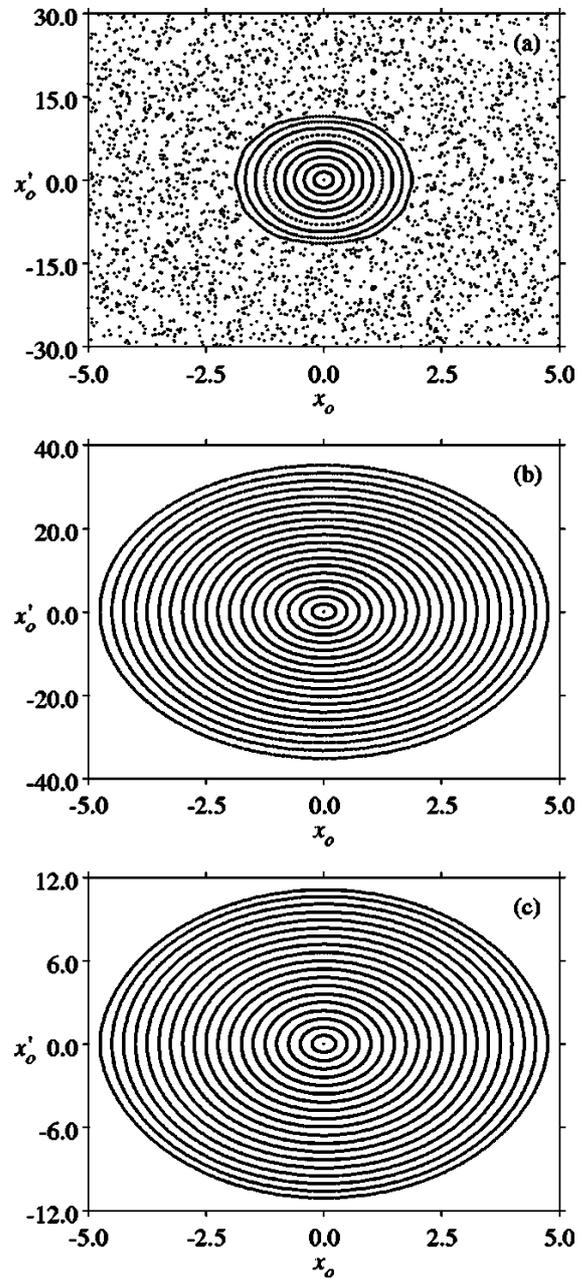


Figura 5.4: Plots de Poincaré de x'_0 versus x_0 obtidos da equação 5.29. Em (a), $\eta = 0, 2$, $\sigma_0 = 140^\circ$, $\Delta = 10^{-1}$, $K = 5, 0$, e $a = 5, 0$. Em (b), o cilindro condutor é removido ($a \rightarrow \infty$) e, em (c) a aproximação do feixe suave $\kappa_z = \text{const.}$ é usada. Os demais parâmetros são os mesmos usados em (a).

Capítulo 6

Conclusões

De acordo com o capítulo 3 deste trabalho, o primeiro fato que passamos a investigar foi a influência do perfil do campo magnético focalizador sobre a dinâmica do feixe, especialmente nas novas regiões de estabilidade. Realizamos uma detalhada análise do comportamento da estabilidade do feixe de partículas focalizado quando o perfil do campo magnético focalizador é variado e, assim, descrevemos mais detalhadamente um conjunto mais amplo de configurações realísticas desse sistema. Demos uma especial atenção ao transporte do feixe, onde as novas regiões de estabilidade recentemente encontradas caracterizam-se por terem avanços de fase superiores a 90° [46, 47]. Particularmente consideramos um feixe com alta densidade de corrente, sendo focalizado por um campo magnético externo solenoidal cujo perfil varia continuamente desde a forma suave senoidal até a forma mais abrupta do tipo onda quadrada, através da variação contínua de um parâmetro.

Mostramos que as novas regiões de estabilidade sempre estão presentes para cada perfil específico do campo focalizador, embora separadas umas das outras por *gaps*. Entretanto, em contraste com a região original de estabilidade, que de uma forma geral não é grandemente afetada pelo perfil do campo externo focalizador, as novas regiões já dependem da particular configuração do campo. Especificamente, as novas regiões de estabilidade tornam-se mais estreitas e ocorrem para maiores valores do avanço do espaço de fase no vácuo à medida que o campo magnético focalizador torna-se mais localizado. Esse comportamento pode ser explicado levando-se em conta o aumento do número de componentes do espectro de Fourier no perfil do campo, à medida que este se aproxima do tipo onda quadrada; dessa maneira, o espaço de fase do envelope também é afetado e levando a um grande número de ressonâncias não-lineares e caos. Embora em todos os casos analisados verificamos a existência de uma camada relativamente larga de trajetórias regulares em torno da solução casada, isoladas da região caótica, as simulações auto-consistentes mostraram que o espaço de fase do envelope pode afetar a dinâmica do feixe, conduzindo a um pequeno crescimento da emitância.

No capítulo 4 a nossa preocupação básica foi a de investigar a importância de instabilidades sem simetria axial no transporte do feixe, instabilidades essas que tendem a fazer com que a secção transversal do feixe deixe de ser circular para tornar-se elíptica. Usando o método de Newton-Raphson investigamos a estabilidade de feixes de partículas periodicamente focalizados sob o efeito de perturbações sem simetria axial e do tipo quadrupólo. Concluímos que instabilidades do tipo quadrupólo aparecem de forma análoga, tanto na região usual ($\sigma_0 < 180^\circ$), quanto nas novas regiões de estabilidade ($\sigma_0 > 180^\circ$), e que tais instabilidades ocorrem em uma região no parâmetro espaço-carga não usual para o confinamento do feixe, de modo que em sua totalidade as propriedades de estabilidade são as mesmas descritas na análise realizada com simetria axial.

No capítulo 5, primeiramente investigamos como a dinâmica da centróide afeta a estabilidade de um feixe de partículas carregadas, transportadas ao longo de um canal periódico focalizador. Tal análise foi realizada para um feixe KV, para o qual mostrou-se que as dinâmicas da centróide e do envelope são completamente desacopladas, desde que as forças focalizadoras sejam lineares nas coordenadas.

À medida que a intensidade e o perfil do campo magnético focalizador são variados, mostramos que as regiões de instabilidade da centróide no parâmetro espacial apropriado podem superpor-se parcialmente com as regiões de estabilidade do envelope. Isso indica que em sua totalidade as regiões estáveis são certamente menores do que aquelas descritas em análises exclusivas da dinâmica do envelope, realizadas anteriormente [41].

Um outro resultado que obtivemos indica que a dinâmica instável da centróide desenvolve em regiões paramétricas, onde a dinâmica pura do envelope readquire seu movimento estável após um dobramento de período, seqüências diretas e inversas. Análises anteriores da dinâmica pura do envelope já apontam para o fato de que, nessas regiões, o envelope pode tornar-se instável, apesar da quebra de simetria devido às perturbações do tipo quadrupólo, não incluídas na aproximação com simetria axial usada aqui [40]. Completando esta parte usando simulações com multipartículas, mostramos que um pequeno crescimento de emitância pode também estar presente nessas mesmas pequenas regiões [47]. O crescimento da emitância é muito pequeno e as perturbações do tipo quadrupólo estão confinadas a regiões relativamente estreitas, de modo que essas instabilidades não são de imediato solicitadas a operar em casos como esses. Entretanto, a dinâmica da centróide ocupa substancialmente uma grande parte dessas regiões, donde concluímos que devemos ter cautela para evitar as instabilidades da centróide em geral. Todos os resultados devidos às análises de baixa dimensão baseados nas equações do envelope e da centróide foram amplamente corroborados através de simulações de multipartículas.

A inclusão dos efeitos das cargas imagem devidas à presença do cilindro condutor que envolve o feixe também foi considerada. Mostramos que apesar de as cargas imagem não afetarem a estabilidade da centróide, no equilíbrio central, uma grande atividade caótica é gerada nas proximidades da parede do condutor devido aos termos não-lineares associados com o potencial eletromagnético imagem. Para as aproximações onde o campo focalizador tem um perfil suave, a atividade caótica não se faz presente, iniciando a partir dos batimentos não-lineares entre a periodicidade do campo focalizador e a frequência natural de oscilação da centróide. Posto isto, conclui-se que a fim de se evitar a difusão devido aos efeitos de não-integrabilidade, o feixe deve ser injetado com suficiente proximidade do eixo de simetria do sistema.

Apêndice A

Equação para o campo magnético focalizador

No capítulo 2 mencionamos que o feixe de partículas fica sujeito a um campo magnético focalizador dado pela equação 2.1, sem nos preocuparmos com a origem dessa equação. Neste apêndice vamos mostrar como se obtém a equação 2.1.

Consideremos que o campo magnético focalizador seja dado pela expressão geral

$$\mathbf{B}(r, z) = B_r(r, z)\mathbf{e}_r + B_\phi(r, z)\mathbf{e}_\phi + B_z(r, z)\mathbf{e}_z, \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\begin{aligned} B_r(r, z) &= a_1(z)r + a_2(z)r^2 + a_3(z)r^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z)r^k, \\ B_\phi(r, z) &= b_1(z)r + b_2(z)r^2 + b_3(z)r^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z)r^k, \\ B_z(r, z) &= c_0(z) + c_1(z)r + c_2(z)r^2 + c_3(z)r^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z)r^k. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Sabemos que qualquer campo magnético satisfaz à equação $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (uma das equações de Maxwell) [25] e, assim temos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)a_k(z)r^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c'_k(z)r^k = 0, \quad (\text{A.3})$$

onde $c'(z) \equiv dc/dz$.

Escrevendo alguns termos das somas na equação A.3 resulta

$$\begin{aligned}
 & 2a_1(z) + c'_0(z) \\
 & + [3a_2(z) + c'_1(z)]r \\
 & + [4a_3(z) + c'_2(z)]r^2 \\
 & + [5a_4(z) + c'_3(z)]r^3 \\
 & + [6a_5(z) + c'_4(z)]r^4 + \dots = 0.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Para que esta igualdade seja satisfeita faz-se necessário que cada coeficiente de r^k seja nulo, o que implica em

$$\begin{aligned}
 a_1(z) &= -\frac{1}{2}c'_0(z) = -\frac{1}{2}B'_0(z), \\
 a_2(z) &= -\frac{1}{3}c'_1(z), \\
 a_3(z) &= -\frac{1}{4}c'_2(z), \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 a_l(z) &= -\frac{1}{l+1}c'_{l-1}(z).
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Como estamos analisando um problema de magnetostática, de acordo com as equações de Maxwell [25] devemos ter $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{B} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rB_\phi) - \frac{\partial B_r}{\partial \phi} \right] \mathbf{e}_z \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} b'_k(z)r^k \mathbf{e}_r + \left[\sum_{k=1}^{\infty} a'_k(z)r^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z)kr^{k-1} \right] \mathbf{e}_\phi \\
 & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)r^{k-1}b_k(z)\mathbf{e}_z = 0.
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

A equação A.6 será satisfeita se cada componente de $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ for nula, donde

$$-\sum_{k=1}^{\infty} b'_k r^k = 0 \longrightarrow b'_k(z) = 0 \longleftrightarrow b_k(z) = \text{constante}, \tag{A.7}$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k(z)r^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z)kr^{k-1} = 0. \tag{A.8}$$

Agrupando-se os termos correspondentes à mesma potência de r na equação A.8 obtém-se

$$\begin{aligned}
 & c_1(z) \\
 & +[a'_1(z) - 2c_2(z)]r \\
 & +[a'_2(z) - 3c_3(z)]r^2 \\
 & +[a'_3(z) - 4c_4(z)]r^3 \\
 & +[a'_4(z) - 5c_5(z)]r^4 + \\
 & \quad \cdot \\
 & \quad \cdot \\
 & \quad \cdot \\
 & +[a'_l(z) - (l+1)c_{l+1}(z)]r^{l-1} = 0,
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

ou seja,

$$a'_l(z) = (l+1)c_{l+1}(z), \tag{A.10}$$

e ainda

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)r^{k-1}b_k(z) = 0, \tag{A.11}$$

de modo que

$$(l+1)b_l(z)r^{l-1} = 0 \iff b_l(z) = 0. \tag{A.12}$$

O resultado expresso pela equação A.12 nos leva a concluir que $B_\phi(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z)r^k = 0$, ou seja, o campo \mathbf{B} não possui dependência azimutal. Assim sendo,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(r, z) &= B_r(r, z)\mathbf{e}_r + B_z(r, z)\mathbf{e}_z = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z)r^k\mathbf{e}_r + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z)r^k\mathbf{e}_z \\
 &= [a_1(z)r + a_2(z)r^2 + a_3(z)r^3 + \dots]\mathbf{e}_r + [c_0(z) + c_1(z)r + c_2(z)r^2 + \dots]\mathbf{e}_z.
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

Como estamos interessados apenas nos termos até primeira ordem em r , resulta

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(r, z) &\approx [a_1(z)r]\mathbf{e}_r + [c_0(z) + c_1(z)r]\mathbf{e}_z = -\frac{1}{2}c'_0(z)r\mathbf{e}_r + [c_0(z) + 0]\mathbf{e}_z \\
 &= B_0(z)\mathbf{e}_z - \frac{1}{2}B'_0(z)r\mathbf{e}_r,
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

e lembrando que $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ e $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$, obtém-se a equação 2.1, como queríamos demonstrar. Aqui, cabe ressaltar que a condição

$$\frac{1}{B_z}r_b^n \frac{d^n B}{ds^n} \ll 1 \iff \frac{d^n B}{ds^n} \ll \frac{B_z}{r_b^n} \tag{A.15}$$

nos exige que a validade da equação $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ esteja condicionada ao fato de que a componente radial do feixe, $B_r(r, z)$, seja muito menor do que a variação da componente axial, $B_z(r, z)$, numa faixa de comprimento típica do campo externo focalizador, ou seja, o comprimento de periodicidade “ S ”, e que termos de ordem $n \geq 2$ sejam negligenciados. Esta condição pode ser obtida através da análise das convergências das séries de potências que expressam as componentes $B_r(r, z)\mathbf{e}_r$ e $B_z(r, z)\mathbf{e}_z$ do campo focalizador. Em termos de linhas de campo magnético, tais linhas podem apenas sofrer variações suaves, isto é, a densidade dessas linhas não pode aumentar ou diminuir bruscamente. Evidentemente, a citada validade de $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ torna-se cada vez menos plausível à medida que as derivadas $d^n B_z/ds^n \equiv B_z^{(n)}$ assumam valores cada vez maiores, ou seja, quando o perfil de B_z tende à forma de uma onda quadrada. De acordo com o que vimos na figura 3.1 (Cap. 3), tal validade mantém-se até que o parâmetro Δ (que define o perfil do campo focalizador) não ultrapasse aproximadamente a 10^3 .

Apêndice B

Superfícies de secção de Poincaré

B.1 Diagrama de fase

Quando se analisa o movimento de um oscilador unidimensional, podemos especificar completamente como funções do tempo, duas quantidades: a posição $x(t)$ e o momentum $p(t)$. Essas duas quantidades poderão ser encontradas através da solução da equação diferencial de segunda ordem para o movimento. As quantidades $x(t)$ e $p(t)$ podem ser consideradas como sendo as coordenadas de um ponto num espaço bidimensional, denominado de espaço de fase. Em duas dimensões, o espaço de fase é evidentemente um plano de fase, mas para um oscilador geral com N graus de liberdade, o espaço de fase é um espaço $2N$ -dimensional. À medida que o tempo evolui, o ponto $P(x(t), p(t))$ que descreve o estado da partícula oscilante, deslocar-se-á determinando um caminho (trajetória) de fase sobre o plano de fase. É claro que para diferentes condições iniciais do oscilador, o movimento será descrito por diferentes caminhos de fase! Cada um desses caminhos representa a história completa no tempo do oscilador, para um conjunto de condições iniciais dadas. A totalidade de todos os caminhos de fase constitui o diagrama de fase do oscilador.

Convém ressaltar que as considerações feitas até aqui não se restringem unicamente a sistemas de partículas oscilantes; os conceitos de espaço de fase e dos diagramas de fase são extensivamente aplicados em muitas áreas da Física [19, 56]. Podemos generalizar o que comentamos até aqui, considerando um sistema com n partículas, de modo que a cada partícula corresponda um grau de liberdade, sendo a dinâmica do mesmo descrita por um par de equações de Hamilton,

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned} \tag{B.1}$$

com $n = 1, 2, 3, \dots, N$. Dessa forma, existirão $2N$ equações de Hamilton, as quais estarão associadas $2N$ constantes de movimento, correspondendo às coordenadas e momenta iniciais; o movimento subsequente desse sistema, bem como as trajetórias (caminhos) de fase que constituirão o diagrama de fase do sistema, serão unicamente determinados a partir dessas condições iniciais.

Supondo-se que tenhamos resolvido as equações de Hamilton para \mathbf{p} e \mathbf{q} como funções do tempo, no espaço $2N$ -dimensional com coordenadas (componentes dos vetores N dimensionais \mathbf{p} e \mathbf{q}),

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_N) \quad (\text{B.2})$$

e

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_N), \quad (\text{B.3})$$

podemos então seguir as trajetórias desde um instante inicial t_1 correspondendo às coordenadas iniciais

$$\mathbf{p}(t_1) = (p_1(t_1), p_2(t_1), p_3(t_1), \dots, p_N(t_1)) \quad (\text{B.4})$$

e

$$\mathbf{q}(t_1) = (q_1(t_1), q_2(t_1), q_3(t_1), \dots, q_N(t_1)), \quad (\text{B.5})$$

até algum instante posterior t_2 , correspondendo às coordenadas

$$\mathbf{p}(t_2) = (p_1(t_2), p_2(t_2), p_3(t_2), \dots, p_N(t_2)) \quad (\text{B.6})$$

e

$$\mathbf{q}(t_2) = (q_1(t_2), q_2(t_2), q_3(t_2), \dots, q_N(t_2)), \quad (\text{B.7})$$

obtendo assim o espaço de fase $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ do sistema. Para ilustrar, representamos na figura B.1 as trajetórias no instante t_1 (que representam as condições iniciais) e num instante posterior, t_2 , no espaço de fase em duas dimensões, com os N momenta \mathbf{p} ao longo das ordenadas e as N posições \mathbf{q} ao longo das abscissas. Em um espaço de fase as seguintes propriedades sempre são obedecidas:

1 - As trajetórias no espaço de fase não se interceptam no mesmo dado instante de tempo.

2 - Um contorno C_1 no espaço de fase, o qual engloba um grupo de condições iniciais no instante t_1 se transformará em um outro contorno, C_2 , no instante de tempo t_2 , que engloba o mesmo grupo de condições iniciais nesse instante.

3 - Consideremos um *ensemble* de condições iniciais, cada uma representando um possível estado do sistema. Expressando-se a probabilidade de um dado ensemble (\equiv densidade de distribuição do sistema de pontos no espaço de fase) com $\tau = \tau(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ e normalizando

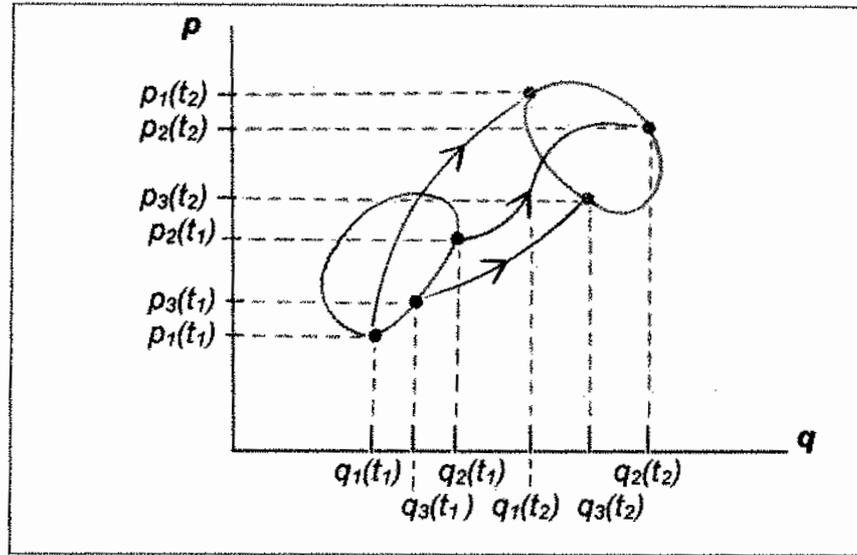


Figura B.1: Trajetórias no espaço de fase em duas dimensões.

τ tal que

$$\int \tau \Pi_i dp_i dq_i = 1, \quad (\text{B.8})$$

então

$$\sum_i \left(\dot{p}_i \frac{\partial \tau}{\partial p_i} + \dot{q}_i \frac{\partial \tau}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0, \quad (\text{B.9})$$

o que representa a incompressibilidade do fluxo do espaço de fase, resultado conhecido como o *Teorema de Liouville*. Maiores detalhes acerca destas propriedades poderão ser encontradas nas referências [33, 44].

B.2 Superfície de secção ou plot de Poincaré

No tratamento do fluxo hamiltoniano, um importante conceito é o de superfície de secção de Poincaré [33]. Conforme vimos na secção anterior, para um sistema autônomo com dois graus de liberdade, o espaço de fase é quadridimensional. Para ilustrar, consideremos a figura B.2 onde se representa as intersecções de uma trajetória com a superfície de secção. Escolhemos uma superfície bidimensional (plano α) no espaço de fase e rotulamos suas duas faces, por exemplo por face direita e face esquerda, respectivamente. A partir disso, então, estudaremos as sucessivas intersecções de uma trajetória com o plano α , de modo que a seqüência de pontos gerada por essas intersecções definem uma trajetória, vista a partir de uma dessas faces escolhidas (na figura, escolhemos a face esquerda).

Na figura B.3, representamos um sistema com dois graus de liberdade, onde se destaca em (a) o espaço de fase quadridimensional com a trajetória tridimensional de

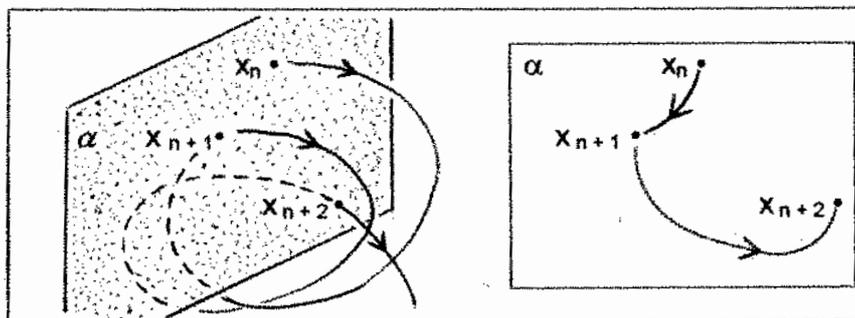


Figura B.2: Movimento no espaço de fase e definição da superfície de secção de Poincaré.

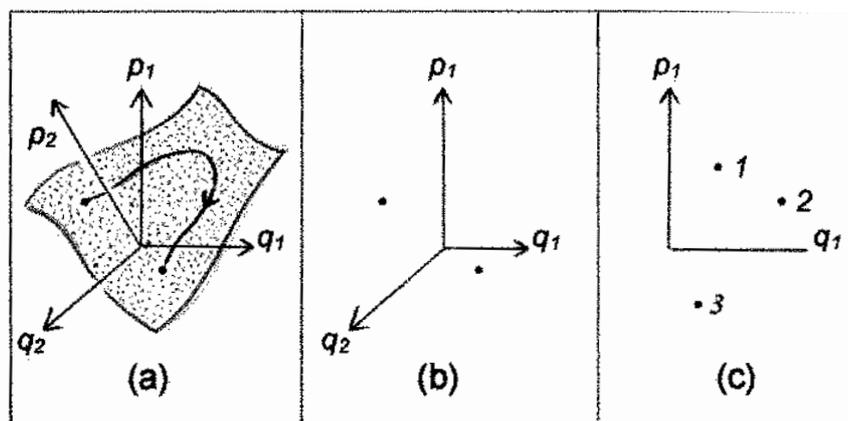


Figura B.3: Representação para o caso de dois graus de liberdade.

energia; (b) projeção da trajetória de energia sobre o volume (p_1, q_1, q_2) e (c) as intersecções sucessivas da trajetória representada em (b) com a superfície bidimensional de secção $q_2 = \text{const.}$.

Na figura B.4, representamos um sistema com três graus de liberdade, onde mostramos, (a) um espaço de fase hexadimensional com a trajetória sobre uma superfície de energia pentadimensional; (b) três intersecções sucessivas dessa trajetória com a superfície quadridimensional de secção $q_3 = \text{const.}$ e (c) projeções dessas intersecções da superfície de secção sobre os planos (p_1, q_1) e (p_2, q_2) .

No estudo da dinâmica de sistemas com vários graus de liberdade, é muito comum usar-se as superfícies de secção (plots de Poincaré). Nesse estudo, podemos destacar resumidamente:

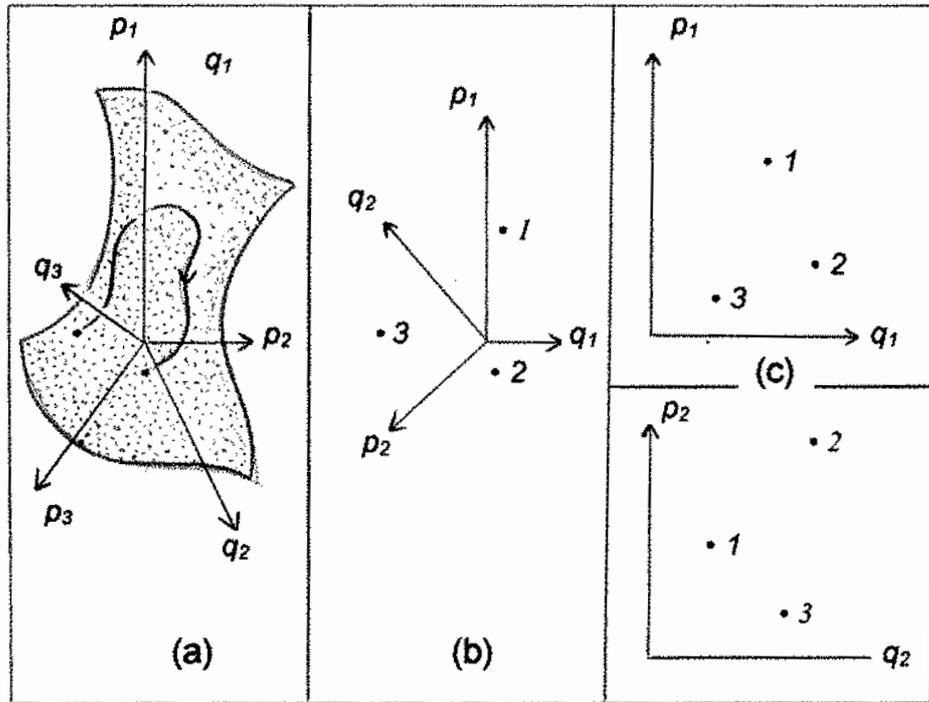


Figura B.4: Representação para o caso de três graus de liberdade.

a - *Trajetórias regulares*

Dependem descontinuamente da escolha das condições iniciais e sua presença não implica na existência de uma integral isolada (invariante global) ou simetria do sistema. Entretanto, trajetórias regulares, onde existirem, representarão invariantes exatos de movimento. Essas trajetórias são continuamente periódicas nas variáveis de ângulo, cobrindo densamente uma superfície toroidal de ação constante, na qual as variáveis de ângulo envolvem (circunscvem) as duas orientações (faces) da superfície com frequências incomensuráveis (caso genérico), ou são curvas periódicas fechadas, enrolando-se sobre o torus num número inteiro de voltas. As trajetórias regulares são mais convenientemente estudadas usando teoria de perturbação e visualizadas numa superfície de secção (plot de Poincaré). Vários tipos de trajetórias regulares e suas intersecções com a superfície de secção $\theta_1 = \text{constante}$ estão ilustradas na figura B.5. Na figura B.5(a) representa-se uma trajetória genérica que está sobre a superfície do torus. Nesse caso, o movimento em torno do eixo maior do torus é periódico em θ_1 com período igual a 2π . As sucessivas intersecções da trajetória com a superfície de secção correspondente a $\theta_2 = \theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23}, \dots$ conduzem a uma curva invariante fechada e densamente recoberta de curvas sobre longos períodos de tempo. O caso (b) é um exemplo de uma ressonância

$$k\omega_1(\mathbf{J}) + l\omega_2(\mathbf{J}) = 0, \tag{B.10}$$

com $\omega_1 = \dot{\theta}_1$, $\omega_2 = \dot{\theta}_2$, onde k e l são inteiros. A trajetória ressonante é fechada, periódica em θ_1 e θ_2 . Em (b), também se mostra que para $k = 5$, $l = 2$, as sucessivas interações dessa trajetória com a superfície de secção conduzem a cinco pontos discretos denominados de pontos fixos ou pontos periódicos do movimento. Referimo-nos a esse movimento como uma ressonância primária, desde que seja uma trajetória periódica fechada de um hamiltoniano não perturbado H_0 . A ressonância é um caso especial de uma curva invariante, para a qual a razão k/l é um número racional. Ressonâncias e suas interações desempenham um papel crucial para o surgimento de movimento caótico em sistemas aproximadamente integráveis. Em (c) representa-se a superfície de secção de uma trajetória genérica na vizinhança de uma ressonância primária correspondente à figura (b). As sucessivas intersecções da trajetória com a superfície de secção conduzem a um conjunto de cinco curvas suaves e fechadas, denominadas de ilhas primárias, que circundam os pontos fixos do caso (b). Para ilustrar-se a complexidade dos movimentos possíveis, em (d) mostra-se a superfície de secção para uma trajetória periódica fechada que envolve três tempos correspondentes à ressonância primária $k = 5$, $l = 2$ em 15 ciclos correspondentes a θ_1 . Esse, constitui-se num exemplo de ressonância secundária, acoplando o movimento em torno de uma ilha primária ao movimento periódico não perturbado. Uma estrutura muito complicada das trajetórias regulares torna-se agora clara; as ressonâncias primárias dão origem às ilhas primárias, que por sua vez originam as ressonâncias secundárias e suas ilhas, e assim, sucessivamente!

b - Regiões de caos

São conhecidas por preencher uma porção finita de uma superfície de energia num espaço de fase. As sucessivas intersecções de uma trajetória caótica com a superfície de secção, preenchem uma área finita. Duas trajetórias caóticas estão ilustradas na figura B.5, que mostra, em coordenadas polares, a superfície J_1, θ_2 para dois graus de liberdade.

Na figura B.5, o caso (e) mostra uma camada de caos preenchida por uma trajetória única entre duas curvas invariantes. Trajetórias periódicas existem nessa região, mas as trajetórias próximas dessas, tanto podem, como não moverem-se em ilhas de estabilidade em torno de pontos fixos, ou as ilhas são muito pequenas para serem visíveis. No caso (f), mostra-se uma camada de caos preenchida por uma trajetória única próxima das ilhas do caso (c). O movimento caótico muitas vezes ocorre nas proximidades das separatrizes que separam curvas invariantes de suas ilhas. Próximo a uma separatriz, a frequência da ilha de oscilação, ω , aproxima-se de zero! A condição de ressonância com a oscilação não perturbada numa frequência ω_0 ,

$$k\omega - \omega_0 = 0, \quad (\text{B.11})$$

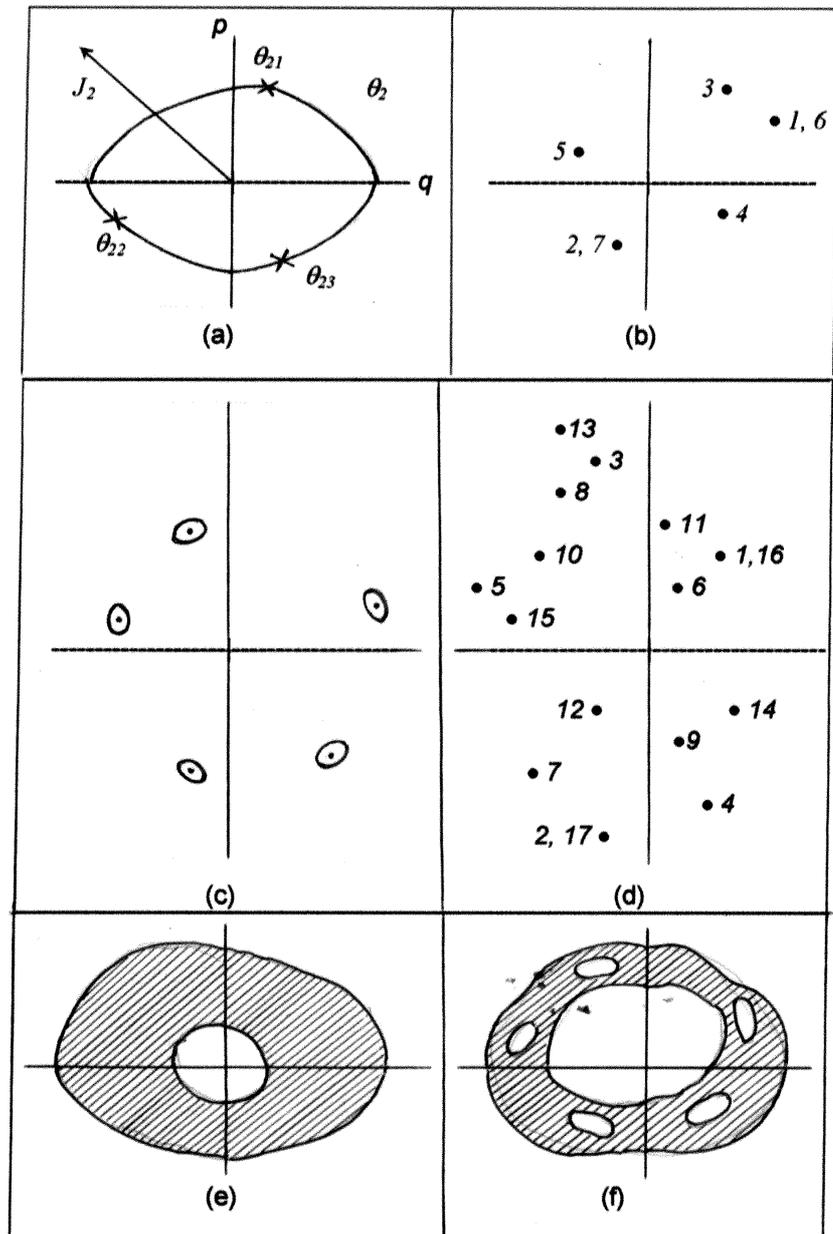


Figura B.5: Intersecção de uma trajetória sobre a superfície de energia com a superfície de secção α definida por $\theta_1 = \text{constante}$. (a) Curva invariante gerada pelas sucessivas intersecções da trajetória com α . (b) Ressonância primária $k = 5, l = 2$ mostrando as primeiras sete intersecções da trajetória com α . (c) Ilhas primárias em torno dos pontos fixos correspondentes a $k = 5, l = 2$ gerados pelas intersecções da trajetória com α . (d) Ressonância secundária com três saltos em torno da ressonância primária $k = 5, l = 2$. As primeiras 17 intersecções com α são mostradas. (e) Camada anular de caos gerada pelas intersecções de uma trajetória única com α , entre duas curvas invariantes. (f) Camada de caos contornada pelas curvas invariantes primária e secundária.

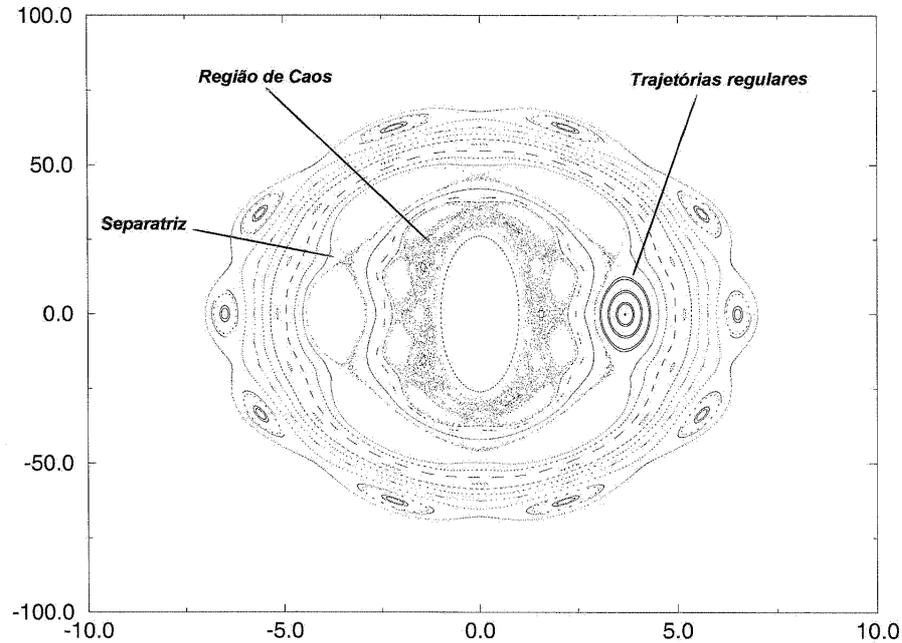


Figura B.6: Trajetórias regulares, regiões de caos e separatriz.

nos conduz a uma separação entre as ações de ressonâncias vizinhas (k e $k + 1$), as quais tendem a zero à medida que a separatriz é aproximada. Dessa forma, é comum referir-se à região de caos que forma próxima à separatriz como uma camada de ressonância. Para uma pequena perturbação ϵ , com dois graus de liberdade, as camadas são finas e separadas entre si por curvas invariantes. As camadas são isoladas umas das outras, e o movimento de uma camada para outra é proibido. À medida que ϵ aumenta, as curvas invariantes que separam cadeias de ilhas próximas com suas camadas de ressonância são fortemente perturbadas e finalmente destruídas. As camadas fundem quando a última curva invariante que separa cadeias de camadas de ilhas circundantes adjacentes é destruída. Os caos fortes ou globais de movimento surgirão quando houver a fusão de camadas de ressonâncias primárias.

Um exemplo de secção de Poincaré obtida para o espaço de fases (r_b, r'_b) do envelope do feixe é apresentada na figura B.6. Na figura, estão ressaltadas as estruturas do espaço de fases descritas acima.

Apêndice C

Método de Newton-Raphson

A evolução do envelope no espaço de fase (r_b, r'_b) é determinado através da equação de envelope normalizada 2.52, a qual pode ser escrita como

$$\frac{d\mathbf{X}}{ds} = F(\mathbf{X}, s), \quad (\text{C.1})$$

onde $\mathbf{X} \equiv (r_b, r'_b)$ é o vetor posição no espaço de fase e

$$F(\mathbf{X}, s) = \left(r'_b, -\kappa_z(s)r_b + \frac{K}{r_b} + \frac{1}{r^3} \right). \quad (\text{C.2})$$

Para aplicar o método de Newton-Raphson a fim de se encontrar e verificar a estabilidade das soluções casadas do envelope, vamos considerar a função Φ que mapeia o espaço de fase do envelope sobre si mesmo a cada período do campo focalizador. Formalmente, tal mapeamento pode ser expresso como

$$\mathbf{X}(s_0 + 1) = \Phi[\mathbf{X}(s_0)], \quad (\text{C.3})$$

onde s_0 é uma posição inicial e \mathbf{X}_m corresponde a um ponto fixo do mapeamento que satisfaça

$$\mathbf{X}_m = \Phi[\mathbf{X}_m]. \quad (\text{C.4})$$

Suponhamos que seja conhecida uma solução \mathbf{X}_j , sendo esta relativamente próxima à solução casada tal que

$$\mathbf{X}_m = \mathbf{X}_j - \delta\mathbf{X}, \quad (\text{C.5})$$

com $\delta\mathbf{X}$ pequeno. Substituindo a equação C.5 na equação C.4 e realizando a expansão de Taylor até termos lineares em $\delta\mathbf{X}$, obtemos

$$\delta\Phi[\mathbf{X}_j] - \mathbf{I}\delta\mathbf{X} = \mathbf{X}_j(s_0 + 1) - \mathbf{X}_j(s_0), \quad (\text{C.6})$$

onde

$$\delta\Phi = \begin{bmatrix} \partial r_b(s_0 + 1)/\partial r_b(s_0) & \partial r_b(s_0 + 1)/\partial r'_b(s_0) \\ \partial r'_b(s_0 + 1)/\partial r_b(s_0) & \partial r'_b(s_0 + 1)/\partial r'_b(s_0) \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

é a matriz dos mapeamentos das tangentes e \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem 2 (ou seja, 2×2). O método de Newton-Raphson basicamente consiste no seguinte: dada uma solução próxima à casada \mathbf{X}_j e integrando as apropriadas equações diferenciais sobre um período do campo focalizador, resolvemos para $\delta\mathbf{X}$ na equação C.6 e usamos esse resultado na equação C.5 para obter uma nova aproximação para a solução casada \mathbf{X}_m . Após realizar esse processo iterativo muitas vezes, a solução poderá convergir para uma dada solução casada do sistema. Uma vez que a convergência esteja garantida, $\delta\Phi$ torna-se a matriz que delinea a evolução das perturbações infinitesimais em torno da solução casada, e portanto, tem informação sobre a estabilidade da solução casada. Particularmente, se o traço da matriz $\delta\Phi$ for superior a 2 ($\text{Tr}[\delta\Phi] > 2$), os autovalores serão reais e a solução casada será um ponto de sela instável - observe-se nesse caso que a equação de envelope C.1 é conservativa, portanto o determinante da matriz $\delta\Phi$ é igual à unidade ($\det\delta\Phi = 1$) - por outro lado, se o traço da matriz $\delta\Phi$ for inferior a 2 ($\text{Tr}[\delta\Phi] < 2$) os autovalores serão complexos e da forma $\exp(ik_{fix})$ e $\exp(-ik_{fix})$, e as órbitas circundantes rotarão com número de onda k_{fix} em torno da solução estável casada. O índice de estabilidade é convenientemente definido como $\alpha = (1/2)\text{Tr}[\delta\Phi]$.

A princípio, a matriz $\delta\Phi$, pode ser calculada diretamente por aproximações numéricas computacionais das derivadas do lado direito da equação C.7. Entretanto, um método mais preciso derivado da equação C.1, foi usado neste trabalho. A saber, após alguns cálculos simples podemos mostrar que $\delta\Phi = \mathbf{A}(s_0 + 1)$, onde $\mathbf{A}(s)$ é uma matriz cujos elementos são funções contínuas de s , obtidas pela integração juntamente com a equação C.1, da equação

$$\frac{d\mathbf{A}}{ds} = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{X}} \cdot \mathbf{A}, \quad (\text{C.8})$$

usando uma condição inicial $\mathbf{A}(s_0) = \mathbf{I}$. Na equação C.8, $d\mathbf{F}/d\mathbf{X}$ é a matriz jacobiana de $\mathbf{F}(\mathbf{X}, s)$.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Abramowitz and A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55, 1972.
- [2] D. Artsimovich and L. Lukianov. *Movimiento de Partículas Cargadas en Campos Eléctricos y Magnéticos*. Mir, 1974.
- [3] R. A. Bosch and C. S. Hsue. *Chin. J. Phys.*, 31:313, 1993.
- [4] I. Brilloin. *Phys. Rev.*, 67:260, 1945.
- [5] G. J. Budker. *Proceedings of the Symposium on High-Energy Accelerators and Pion Physics (CERN)*, 1:68, 1956.
- [6] A. W. Chao. *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*. John Wiley, 1993.
- [7] C. Chen and R. C. Davidson. *Phys. Rev. Lett.*, 72:2195, 1994.
- [8] C. Chen and R. C. Davidson. *Phys. Rev. E*, 49:5679, 1994.
- [9] C. Chen, R. Pakter, and R. C. Davidson. *Phys. Rev. Lett.*, 79:225, 1997.
- [10] C. Chen, R. Pakter, and R. C. Davidson. *Phys. Plasmas*, 6:3647, 1999.
- [11] C. D. Child. *Phys. Rev.*, 32:492, 1911.
- [12] E. D. Courant and H. S. Snyder. *Annals of Physics*, 3:1, 1958.
- [13] R. C. Davidson. *Physics of Non-Neutral Plasma*. Addison-Wesley, Reading, 1990.
- [14] R. C. Davidson. *Phys. Rev. Lett.*, 81:991, 1998.
- [15] R. C. Davidson. *Phys. Plasmas*, 5:3459, 1998.
- [16] R. C. Davidson and H. Qin. *Physics of intense Charged Particle Beams in High Energy Accelerators*. World Scientific, 2001.

- [17] N. Dikansky and D. Petrikov. *The Physics of intense Beams and Storage Rings*. Springer-Verlag, 1995.
- [18] R. L. Gluckstern, W. H. Cheng, and H. Ye. *Phys. Rev. Lett.*, 75:2835, 1995.
- [19] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 1975.
- [20] R. J. Goldston and P. H. Rutherford. *Introduction to Plasma Physics*. Institute of Publishing - Bristol, 1995.
- [21] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vectors Fields*. Springer-Verlag, 1990.
- [22] M. Hess and C. Chen. *Phys. Plasmas*, 2000.
- [23] M. Hess and C. Chen. *Phys. Lett. A*, 295:305, 2002.
- [24] I. Hofmann, L. J. Laslett, L. Smith, and I. Haber. *Part. Accel.*, 13:145, 1983.
- [25] J. D. Jackson. *Classical Eledrodynamics*. John Wiley, 1975.
- [26] I. M. Kapchinskij and V. V. Vladimirskij. *Proceedings of the International Conference on High Energy Accelerators (CERN, Geneva, 1959)*, page 274, 1959.
- [27] Y. L. Klimontovich. *The Statistical Theory of Non-Equilibrium Processes in Plasma*. Pergamon, 1967.
- [28] R. L. Kyhl and H. F. Webster. *IRE Trans. Electron Devices ED-3*, page 172, 1956.
- [29] I. Langmuir. *Phys. Rev.*, 21:419, 1923.
- [30] P. M. Lapostolle. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, NS-18:1101, 1971.
- [31] J. D. Lawson. *The Physics of Charged Particle Beams*. Oxford Science, 1988.
- [32] S. Y. Lee. *AIP Conf. Proc. No. 377(AIP)*, 1996.
- [33] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman. *Regular and Stochastic Motion*. Springer-Verlag, 1992.
- [34] J. J. Livingood. *Principles of Ciclic Particle Accelerators*. Van Lostrund, 1961.
- [35] S. M. Lund and B. Bukh. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, 7:024801, 2004.
- [36] S. M. Lund and R. C. Davidson. *Phys. Plasmas*, 5:3028, 1998.
- [37] R. B. Miller. *Intense Charged Particle Beams*. Plenum, 1982.

- [38] J. S. Moraes, R. Pakter, and F. B. Rizzato. *Phys. Rev. Lett.*, 93:244801, 2004.
- [39] J. S. Moraes, R. Pakter, and F. B. Rizzato. *Phys. of Plasmas*, 10:4811, 2004.
- [40] J. S. Moraes, R. Pakter, F. B. Rizzato, and C. Chen. *Phys. Scripta*, T107:145, 2004.
- [41] J. S. Moraes, F. B. Rizzato, and R. Pakter. *Phys. Plasmas*, 10:4811, 2003.
- [42] D. R. Nicholson. *Introduction to Plasma Theory*. John Wiley, 1983.
- [43] T. M. O'Neil. *Phys. Rev. Lett.*, 55:943, 1985.
- [44] Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1993.
- [45] R. Pakter and C. Chen. *Phys. Rev. E*, 62:2789, 2000.
- [46] R. Pakter and F. B. Rizzato. *Phys. Rev. Lett.*, 87:044801, 2001.
- [47] R. Pakter and F. B. Rizzato. *Phys. Rev. E*, 65:056503, 2002.
- [48] J. R. Pierce. *IRE Trans. Electron Devices*, ED-3:183, 1956.
- [49] B. L. Qian, J. Zhou, and C. Chen. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, page 014201, 2003.
- [50] M. Reiser. *Theory and Design of Charged Particle Beams*. John Wiley, 1994.
- [51] F. B. Rizzato and R. Pakter. *Phys. Rev. Lett.*, 89:184102, 2002.
- [52] F. J. Sacherer. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, NS-18:1105, 1971.
- [53] A. Sitenko and V. Malnev. *Plasma Physics Theory*. Chapman and Hall, 1995.
- [54] C. J. Struckmeier and M. Reiser. *Part. Accel.*, 14:227, 1984.
- [55] A. A. Vlasov. *J. Phys. (URSS)*, 9:25, 1945.
- [56] E. T. Whittaker. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. Cambridge University Press, 1964.
- [57] H. Wiedmann. *Particle Accelerator Physics II: Nonlinear and Higher-Order Beam Dynamics*. Springer-Verlag, 1998.
- [58] H. Wiedmann. *Particle Accelerator Physics I: Basic Principles and Linear Beam Dynamics*. Springer-Verlag, 1999.