

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Dinâmica de Lasers com realimentação atrasada*

Leandro Junges

Tese de doutorado realizada sob a orientação do
Prof. Dr. Jason Alfredo Carlson Gallas e apresentada
ao Instituto de Física.

Porto Alegre
Janeiro de 2014

* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Resumo

Nesta tese de doutorado apresentamos um conjunto de estudos em sistemas com atraso, especialmente no contexto de lasers realimentados. O paradigmático modelo fisiológico de Mackey-Glass nos introduz no contexto de sistemas atrasados por ser simples e já bastante estudado. Na sequência, um modelo de lasers de CO_2 com realimentação eletro-ótica e o modelo de Lang-Kobayashi para lasers de semicondutor são estudados em detalhes.

O espaço de parâmetros do modelo de Mackey-Glass apresenta fases regulares e caóticas, compondo um complexo mosaico de rotas para o caos. Cascatas de dobramento de período são observadas, além de um novo tipo de comportamento caracterizado pela adição de picos por deformação do perfil da solução. Além disso, percebemos que a implementação do atraso não implica em mudança instantânea na dinâmica, revelando uma “letargia” do sistema frente a influência do atraso. Também observamos a acumulação de *shrimps* no espaço de parâmetros, sendo que nestas estruturas podemos fracionar a solução em segmentos, de forma que ao passarmos de uma estrutura para outra, a solução apenas apresenta a adição de alguns destes segmentos na sua composição.

O espaço de parâmetros do modelo de laser de CO_2 com realimentação sem atraso apresenta dois tipos de descontinuidade no período das soluções associadas: uma divergência com o aumento da voltagem de bias (B), e um aumento abrupto com a variação conjunta da voltagem de bias e do ganho de realimentação (r). O efeito deste salto no espaço de fase $y \times z$ é discutido. A implementação do atraso ($\tau \neq 0$) e o incremento deste tempo de atraso revelou, inicialmente, uma contração das fases periódicas complexas no plano $r \times B$, até sua completa extinção. Após um intervalo de inatividade dinâmica, o contínuo aumento de τ revelou o ressurgimento de complexas fases de soluções periódicas e caóticas.

No modelo de Lang-Kobayashi, mostramos que as transições observadas no comportamento dinâmico da intensidade do laser quando o tempo de atraso é variado estão relacionadas com a criação e destruição dos chamados Modos de Cavity Externa (ECMs). Por outro lado, o incremento da corrente de bombeamento P mostrou uma gradual complexificação da solução, alternando soluções periódicas, levemente irregulares e caóticas. O plano $\tau \times P$ mostrou uma rica distribuição deste tipo de soluções, formando estruturas bem definidas no espaço de parâmetros. Multiestabilidade também foi observada neste modelo.

Abstract

In this thesis we present a series of studies in delayed systems, specially in the context of feedback lasers. The paradigmatic Mackey-Glass model introduces us in the context of delayed systems, for being both simple and largely studied. Additionally, a model for CO₂ lasers with electro-optical feedback, and the Lang-Kobayashi model for semiconductor lasers are studied in details.

The parameter space of the Mackey-Glass model presents phases of regular and chaotic behavior, composing a complex mosaic of routes to chaos. Period doubling cascades are observed, along with a new type of behavior, characterizing the peak adding by waveform deformation of the solution. In addition, we see that the implementation of the delay time does not instantaneously changes the dynamics, revealing a “lethargic” behavior of the system under the delay influence. We also observed the accumulation of shrimps in parameter space, and in these structures we can divide the solution in segments, in a way that when we jump from one of these structures to another, the solution is simply added by one of these segments in its composition.

The parameter space of the CO₂ laser model with feedback (without delay) presents two types of discontinuities in the period of the associated solutions: a divergence, with the increasing of the bias voltage (B), and a sharp increase with the joint variation of the bias voltage and the feedback gain (r). The effect of this jump in phase space $y \times z$ is discussed. The implementation of the delay ($\tau \neq 0$) revealed the existence of low complexity regimes in $r \times B$ plane under the variation of τ . The increasing of this delay time revealed, initially, a contraction of the complex periodic phases in $r \times B$ plane, until its complete disappearance. After a range of dynamical inactivity, the further increasing in τ revealed the reappearance of complex phases with periodic and chaotic solutions.

In the Lang-Kobayashi model, we showed that the transitions observed in the laser intensity dynamical behavior while the delay time is varied are related to the creation and destruction of the External Cavity Modes (ECM). On the other hand, the increasing of the pump current P showed a gradual complexification of the solution, alternating periodic, lightly irregular, and chaotic solution. The $\tau \times P$ plane showed a rich distribution of these types of solutions, composing well defined structures in parameter space. Multistability was also observed in this model.

SUMÁRIO

1. <i>Introdução</i>	1
2. <i>O modelo de Mackey-Glass</i>	5
2.1 Rotas para o caos em sistemas de Mackey-Glass	8
2.2 Deformações contínuas na forma de onda e ramos isolados	9
2.3 Mapas de retorno e a gênese dos ramos isolados	11
2.4 Impacto das deformações da solução nos diagramas de fase	13
2.5 Codificação de padrões oscilatórios	16
2.6 Sumário	19
3. <i>Modelo de laser de CO₂ com realimentação</i>	21
3.1 Laser de CO ₂ com realimentação	23
3.2 Adição de picos não mediados por caos	23
3.3 Deformações de pulsos e ramos isolados	25
3.4 Descontinuidade no período da solução	27
3.5 Sumário	31
4. <i>Laser de CO₂ com realimentação atrasada</i>	33
4.1 Modelo com realimentação atrasada	33
4.2 Impacto do atraso na realimentação	34
4.3 Bifurcações por deformação da solução	36
4.4 Sumário	41
5. <i>Lasers de semicondutor com realimentação atrasada</i>	42
5.1 O modelo de Lang-Kobayashi	43
5.2 Modos de cavidade externa	45
5.3 Regimes complexos	47
5.4 Diagramas de estabilidade	54
5.5 Sumário	56
6. <i>Conclusões e perspectivas</i>	58
A. <i>Método de steps</i>	1

<i>B. Análise de estabilidade linear em equações com atraso</i>	<i>4</i>
B.1 Exemplo: modelo de Mackey-Glass	5
<i>C. Método numérico</i>	<i>12</i>
C.1 Método de integração numérica	12
C.2 Passo de integração	13
C.3 Encontrando máximos locais e o período da solução	14
C.4 Computadores utilizados e tempos típicos de cálculo	15

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A discussão sobre a importância do conhecimento do passado de um sistema dinâmico para a descrição do seu futuro é bastante antiga. Em 1908, em seu discurso apresentado em uma conferência interacional de matemáticos realizada em Roma, E. Picard enfatizou a importância da consideração dos efeitos da hereditariedade na modelagem de sistemas físicos [1]. Em 1931, Volterra escreveu um livro revelando a importância do efeito da hereditariedade na modelagem da interação entre espécies [2]. No início da década de quarenta, este tema ganhou força, especialmente na antiga União Soviética, impulsionado pela necessidade de implementação de modelos fisicamente aplicáveis em engenharia e em sistemas de controle [3].

Após a primeira guerra mundial, o desenvolvimento e uso de sistemas automáticos de controle resultaram em um grande esforço teórico e experimental na direção do estudo de uma classe totalmente nova e diferente de equações diferenciais, as chamadas equações diferenciais com atraso (DDE, *delay differential equations*) [4, 5, 6]. Qualquer sistema que envolva algum tipo de controle realimentado, muito provavelmente apresentará um atraso temporal. Estes atrasos provêm do fato de que um tempo finito é necessário para que uma informação seja “percebida” e o sistema apresente algum tipo de reação a esta informação.

Um dos mais simples e ilustrativos exemplos de como sistemas com atraso aparecem e influenciam nossa vida cotidiana foi apresentado por S. Strogatz, no seu artigo publicado na Nature em 1998 [7], onde a possibilidade de ocorrência de instabilidades oscilatórias na temperatura da água em um chuveiro é considerada. De acordo com o autor (e com a nossa experiência diária), quando abrimos a torneira e o chuveiro é ligado, a água inicialmente está fria, induzindo-nos a fechar um pouco a torneira para reduzir o fluxo e, conseqüentemente, aumentar a temperatura da água. Porém, há um certo tempo de resposta, um atraso, entre o ato de fechar a torneira e o aquecimento da água. Se fecharmos a torneira muito rapidamente, passaremos do ponto onde a temperatura é ideal, e após transcorrido este tempo de resposta, a água ficará muito quente. Se tentarmos aumentar novamente o fluxo de água de forma enérgica, o atraso fará com que passemos do ponto ideal, deixando a água fria demais novamente. A repetição sistemática deste

comportamento nos leva a um estado oscilatório frenético em perseguição à temperatura desejada. Sem a implementação de um controle adequado neste clássico sistema com atraso, não conseguiremos tomar um bom banho, com a temperatura que consideramos ideal.

Do ponto de vista matemático, sistemas que apresentam algum tipo de dinâmica atrasada são representados por equações diferenciais com atraso, e podem ser classificados de acordo com a forma com que este atraso age no sistema. O caso mais simples é dado pela classe de sistemas com atraso único e constante, que pode ser descrito de forma genérica pela equação

$$\frac{dX}{dt} = F(X(t), X(t - \tau)), \quad (1.1)$$

onde X é o vetor das variáveis do sistema, F é uma função vetorial contínua e τ é o tempo de atraso constante. Uma infinidade de sistemas pode ser descrito por este tipo de equação, entre eles podemos citar modelos de dinâmica populacional [8], modelos de evolução de flutuações econômicas [9], descrição fenomenológica de lasers [10], modelagem de interação predador-presa [11], descrição de fenômenos fisiológicos, como dilatação e contração da pupila [12], produção de células sanguíneas [13], entre muitos outros. Todos os sistemas descritos nesta tese de doutorado se encaixam nesta classe de modelos. Adicionalmente, existem outras formas em que atrasos temporais podem aparecer em diferentes sistemas. Em alguns casos, múltiplos delays são observados, de forma que a função F na Eq. (1.1) passa a depender não apenas de $X(t - \tau)$, mas de $X(t - \tau_1)$, $X(t - \tau_2)$, $X(t - \tau_3)$, ..., $X(t - \tau_n)$. Em alguns casos, o atraso pode ser dependente do tempo ($\tau = \tau(t)$) ou dependente do estado ($\tau = \tau(t, X(t))$). Como exemplo de sistema com múltiplos atrasos podemos citar modelos de simulação de interação e atividade neuronal [14], já casos de atraso dependente do tempo e do estado podem ser encontrados em modelos de crescimento e desenvolvimento de espécies [15].

A propriedade mais interessante observada neste tipo de sistema é o fato de que a inserção de termos de atraso na descrição teórica de um sistema confere a este uma dimensão infinita. A solução de uma equação diferencial com atraso não pode ser obtida apenas com o conhecimento de uma condição inicial única, afinal, a solução da equação em $t_0 + \Delta t$ não depende apenas da solução em t_0 , como nas ODEs, mas também depende da solução em $t_0 - \tau$ (para o caso de um único atraso constante, que é o caso mais simples). Sendo assim, a obtenção da solução deste tipo de equação não exige apenas a condição inicial definida pelo valor da solução num ponto, mas sim uma *história inicial*, dada por uma função definida no intervalo $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$. Desta forma, este tipo de equação torna necessário o fornecimento da solução em infinitos pontos no intervalo temporal referido. Esta característica confere uma dimensão infinita ao espaço de fase deste tipo de equação. Outra forma de entender a dimensionalidade infinita deste tipo de sistema é considerando

a dimensão da base do espaço das funções. As coordenadas de um ponto podem ser representadas, em um espaço n -dimensional, pela superposição de n vetores da base. Diferentemente, não podemos representar uma função genérica utilizando um conjunto finito de funções base. No caso das DDEs, a configuração inicial é definida por uma função, cuja expansão requer uma base com um conjunto infinito de elementos, indicando assim a dimensionalidade infinita deste sistema [4]. Esta propriedade pode fazer com que sistemas dinâmicos simples apresentem comportamento altamente complexo, incluindo oscilações variadas e soluções caóticas. A estabilidade de soluções como órbitas periódicas e pontos fixos podem mudar sob a influência do atraso, resultando em instabilidades indesejadas (ou muitas vezes desejadas!) em diversas aplicações práticas. Dessa forma, as propriedades inerentes a sistemas com atraso nos levam a um campo de pesquisa relativamente novo e incontestavelmente fascinante: o controle de sistemas dinâmicos com realimentação atrasada.

Esta tese de doutorado tem como objetivo apresentar os resultados obtidos através do estudo numérico sistemático de modelos teóricos que representam sistemas dinâmicos com realimentação atrasada, principalmente no contexto de lasers. Nesta tese, serão apresentados os resultados de três modelos diferentes.

O primeiro modelo considerado, cujos resultados estão apresentados no Capítulo 2, é o modelo de Mackey-Glass [13]. Este modelo visa simular a produção de células sanguíneas em pacientes com um tipo específico de leucemia, onde o atraso é associado ao tempo necessário para que estas células amadureçam após iniciado seu processo de produção na medula óssea. Neste modelo, a concentração de células no sangue é a variável dinâmica. Este modelo foi um dos precursores na utilização de DDEs para descrição de sistemas com atraso, além disso, consiste em um sistema relativamente simples, de apenas uma equação, e que já foi bastante estudado na literatura. Todas estas características tornam este modelo ideal para introduzir-nos no contexto de sistemas com atraso, permitindo-nos aprender sobre as propriedades e peculiaridades das equações diferenciais com atraso.

Os Capítulos 3 e 4 apresentam os resultados obtidos no estudo do modelo que representa a dinâmica de um laser de CO_2 com realimentação via um modulador eletro-ótico, posicionado no interior da cavidade do laser. No Capítulo 3, o caso sem atraso é estudado em detalhes, de forma que o foco deste estudo é a dinâmica no plano de parâmetros de controle formado pelo ganho de realimentação e pela voltagem de bias. No Capítulo 4, o modelo apresentado no capítulo anterior é modificado de forma que um atraso temporal é implementado no laço de realimentação. A influência da duração deste tempo de atraso na dinâmica observada no plano de parâmetros de controle supracitado é estudada.

O Capítulo 5 apresenta os resultados obtidos no estudo do modelo de Lang-Kobayashi, que descreve lasers de semicondutor submetidos a realimentação por reflexão da luz em uma cavidade externa, de forma que o tempo de atraso está associado com o comprimento

desta cavidade externa. Para este sistema, os impactos da variação do tempo de atraso e da corrente de bombeamento são avaliados, tanto de forma independente quanto de forma conjunta. As estruturas formadas pelas fases periódicas no plano formado por estes dois parâmetros são estudadas.

Em todos os modelos considerados, nosso estudo tem como foco principal a investigação do espaço de parâmetros do sistema, visando descobrir padrões específicos na distribuição de fases regulares e caóticas nos diagramas de fases estudados. Mostraremos, no desenvolvimento deste trabalho, o interessante fenômeno de adição no número de picos (máximos locais) por período da solução, resultante de deformações na forma de onda da evolução temporal. Este fenômeno resulta em uma grande riqueza e complexidade dos diagramas de fase, e se mostrou presente nos três modelos estudados. A origem dinâmica deste fenômeno é investigada em detalhe no espaço de fase. Além disso, outros fenômenos são descritos em detalhes, como a decodificação das evoluções temporais em sub-segmentos, observada em acumulações de *shrimps*, e as variadas transições dinâmicas encontradas frente à variação de diferentes parâmetros em cada modelo.

A ordem utilizada na apresentação dos resultados respeita a sequência cronológica em que eles foram obtidos. Os resultados apresentados nos capítulos 2, 3 e 5 foram publicados em três artigos diferentes [16, 17, 18] (veja os artigos no Anexo). Os resultados referentes ao Capítulo 4 ainda não foram submetidos para publicação. O fato de o modelo de lasers de CO_2 ter originado dois artigos, um desconsiderando (publicado) e outro considerando (em preparação) o atraso, motivaram a divisão da descrição de tal modelo em dois capítulos diferentes.

Capítulo 2

O MODELO DE MACKEY-GLASS

Em 1977, Michael C. Mackey e Leon Glass publicaram um artigo propondo um modelo matemático com o objetivo de simular o processo de controle de produção de células sanguíneas, levando em conta o tempo de maturação das células tronco [13]. Este modelo, representado pela DDE não linear dada por

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta \frac{E(t - \tau)}{1 + E(t - \tau)^n} - \gamma E(t), \quad (2.1)$$

foi proposto com o intuito de reproduzir as oscilações erráticas observadas na densidade destas células em pacientes portadores de certos tipos de doenças sanguíneas. Os detalhes da construção e interpretação do modelo são apresentados a seguir.

Para construirmos uma equação de taxa que descreve a evolução temporal da densidade de células sanguíneas em circulação, devemos levar em conta a taxa de produção destas células na medula óssea, bem como sua taxa de perda. Matematicamente, este equilíbrio de taxas é expressado como [19]

$$\frac{dE(t)}{dt} = F(t) - G(t), \quad (2.2)$$

onde $E(t)$ é a densidade de células sanguíneas, $F(t)$ é a função que regula a entrada de células no sangue e $G(t)$ é a taxa de morte destas células. Neste modelo é considerado que a taxa de perda é proporcional a densidade celular $E(t)$, de forma que o termo de perda passa a ser $G(t) = \gamma E(t)$, onde o parâmetro γ está associado com a intensidade da taxa de morte. Quanto ao termo de realimentação destas células, o atraso aparece pelo fato de que, quando a densidade de células sanguíneas está baixa, a reposição não acontece instantaneamente, pois esta baixa densidade apenas inicia o processo de maturação de células tronco na medula óssea, de forma que esta maturação tem uma duração aproximadamente fixa, assim, a reposição apenas ocorrerá após concluído este estágio de maturação. Para um tempo de maturação τ , podemos dizer que a reposição celular num tempo t depende da densidade em um tempo anterior $t - \tau$, desse modo, a função que representa a reposição

$F(t)$ deve ser escrita como $F(t) = F(E(t - \tau))$. Sendo assim, a Eq. (2.2) fica

$$\frac{dE(t)}{dt} = F(E(t - \tau)) - \gamma E(t). \quad (2.3)$$

A escolha do termo referente a reposição celular é feita baseada em medições da taxa de produção de glóbulos vermelhos (eritrócitos) realizadas em ratos, humanos, e em outros mamíferos [19]. Estas medições indicam que a função de reposição cresce para valores pequenos da densidade de eritrócitos, e decresce para valores grandes. Uma função que satisfaz estes requisitos, além de ser flexível o suficiente para ajustar os dados experimentais, é a função dada por

$$F(E_\tau) = \beta \frac{\theta^n E_\tau}{\theta^n + E_\tau^n}, \quad (2.4)$$

onde a abreviação $E(t - \tau) = E_\tau$ é utilizada. Aqui, β é a taxa máxima de produção de células sanguíneas, n é um expoente positivo e θ é um parâmetro associado à densidade (é dado em unidades de células/Kg). Todos estes parâmetros são obtidos através da comparação com dados experimentais. Considerando a função de reposição proposta na Eq. (2.4), e inserindo esta em (2.3), o modelo final é dado por

$$\frac{dE}{dt} = \beta \frac{\theta^n E_\tau}{\theta^n + E_\tau^n} - \gamma E. \quad (2.5)$$

Por questão de simplicidade, escrevemos a densidade em termos do parâmetro θ , ou seja, definimos $x = E/\theta$, de onde obtemos, sem perda de generalidade,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, x_\tau) = \beta \frac{x_\tau}{1 + x_\tau^n} - \gamma x. \quad (2.6)$$

Como vimos no capítulo anterior, para resolver esta equação é necessário definir uma função no intervalo temporal associado ao atraso (história inicial)

$$x(t') = \phi(t'), \quad t_0 - \tau < t' < t_0. \quad (2.7)$$

Este modelo, apesar de simples, não pode ser resolvido analiticamente de maneira genérica e eficiente, tornando necessária a utilização de métodos numéricos para se obter soluções da equação proposta.

Em seu artigo precursor, Mackey e Glass [13] definiram os valores das constantes do modelo representado pela Eq. (2.6) baseados em comparações com dados experimentais, de forma que chegaram nos valores $\gamma = 0.1$, $\beta = 0.2$ e $n = 10$, além da história inicial $x(t) = 0.1$, $-\tau < t < 0$. Para este conjunto de parâmetros, os autores mostraram que, para o valor do atraso $\tau = 6$ (em unidade de dias), o sistema apresenta uma solução oscilatória regular, com pequena amplitude e período de aproximadamente $T = 20$. Aumentando

o valor do atraso para $\tau = 20$, o sistema entra em um regime de oscilações erráticas, com amplitudes bem maiores que no caso anterior e com a distância temporal entre os picos da solução variando entre 50 e 70 dias. No artigo, os autores argumentam que em adultos normais e saudáveis, a densidade de granulócitos (um tipo específico de célula sanguínea, responsável pela defesa do corpo) é constante ou apresenta suaves oscilações com período variando entre 14 e 24 dias, resultado este que está de acordo com a solução do modelo para $\tau = 6$, já pacientes com uma doença chamada leucemia mieloide crônica (*chronic myelogenous leukemia* ou *chronic granulocytic leukemia*), onde alguns pacientes apresentam um aumento significativo no tempo de geração celular, apresentam uma oscilação grande no número de granulócitos, com períodos variando entre 30 e 70 dias. Na Fig. 2.1 podemos ver as oscilações na solução numérica com $\tau = 6$, bem como a comparação entre a solução numérica com $\tau = 20$ e a contagem real da densidade de granulócitos em um paciente com leucemia mieloide crônica, mostrando uma razoável concordância qualitativa entre os dois resultados.

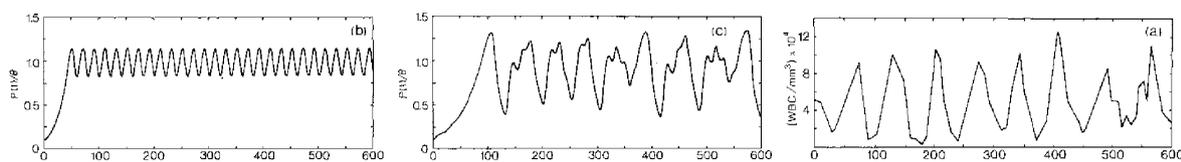


Fig. 2.1: (a) Solução numérica da Eq. (2.6) para $\tau = 6$. (b) Solução numérica da mesma equação, mas para $\tau = 20$. (c) Contagem de glóbulos brancos no sangue de um paciente com leucemia mieloide crônica. Em (a) e (b), os valores de parâmetros usados foram $\gamma = 0.1$, $\beta = 0.2$ e $n = 10$, e a história inicial usada foi $x(t) = 0.1$, $-\tau < t < 0$. Figura retirada da Ref. [13].

Ainda na Ref. [13], os autores citam a existência de bifurcações no modelo apresentado pela Eq. (2.6). Estas bifurcações podem ser observadas na Fig. 2.2, retirada da Ref. [20]. Nestas figuras podemos ver que, ao incrementar o valor do parâmetro τ , o sistema entra em uma sequência de bifurcações com períodos 1, 2, 3, 6, 7, 14,... até entrar em um regime aperiódico, dentro do qual aparecem janelas com período 6 e 9. Kazarinoff e van denDriessche [21] mostraram que, considerando os valores de parâmetros utilizados aqui, para $\tau < 4.71$, o sistema permanece em um estado estacionário, já para valores do atraso imediatamente acima deste valor, o sistema entra num regime oscilatório (onde inicia o diagrama em τ da Fig. 2.2). O diagrama calculado em função de γ também é apresentado na Fig. 2.2. Este diagrama também apresenta uma sequência de bifurcações, porém aqui a região aperiódica se limita a um pequeno conjunto de γ ($0.08 < \gamma < 0.12$), sendo que logo abaixo e logo acima destes valores, o sistema apresenta oscilações regulares. Ainda na Fig. 2.2, vemos o nascimento de ramos isolados nos diagramas. Este fato não é comentado na Ref. [20], porém terá importância central na pesquisa desenvolvida neste

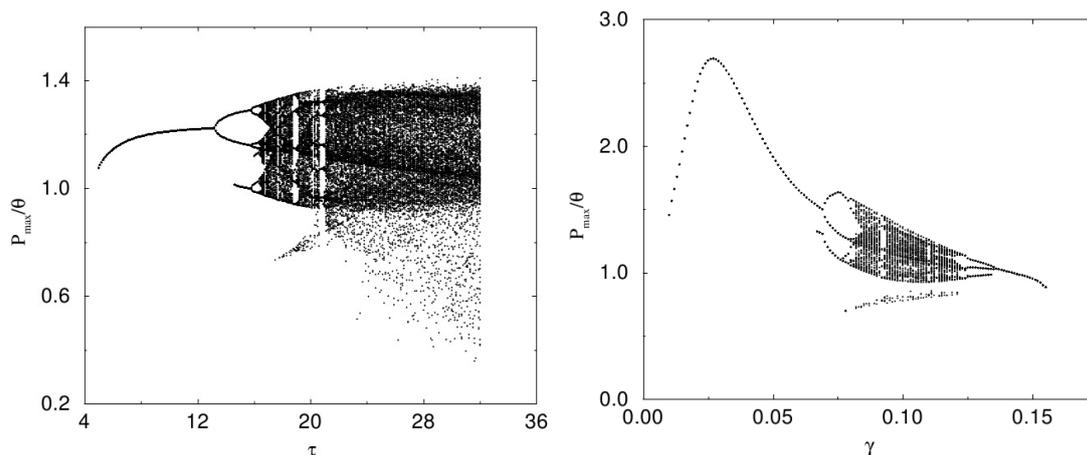


Fig. 2.2: Na esquerda, diagrama de bifurcação em τ , e na direita, diagrama de bifurcação em γ . Os valores de parâmetros usados são os mesmos da Fig. 2.1, com $\gamma = 0.1$ no primeiro diagrama e $\tau = 20$ no segundo. Figura retirada da Ref. [20].

trabalho, como ficará claro mais adiante.

Muitos outros trabalhos foram realizados considerando o modelo de Mackey-Glass como base, dentre estes podemos citar estudos de sincronização entre sistemas com múltiplos atrasos [22, 23], análise de sistema com parâmetros dependentes do tempo [24], estudo de osciladores eletrônicos que simulam a evolução da Eq. (2.6) [25], entre outros, além de muitas propriedades matemáticas deste modelo terem sido estudadas [26, 27, 28].

2.1 Rotas para o caos em sistemas de Mackey-Glass

Em nosso trabalho utilizando o modelo de Mackey-Glass, chamamos a atenção para complexas rotas para o caos presentes neste modelo, provenientes de deformações contínuas na solução do sistema, responsáveis pela criação e destruição de picos (máximos locais) isolados. Esta criação e destruição tem o interessante efeito de produzir diagramas de bifurcação extremamente ricos e, como será descrito a seguir, pode apresentar combinações de dobramentos e adição no número de picos, resultando em mosaicos altamente complexos, compostos por domínios de estabilidade no espaço de parâmetros.

Antes de prosseguir, é importante lembrar que apenas uma equação diferencial com atraso é equivalente a um sistema de infinitas ODEs. Isso significa que sistemas com atraso são muito mais complicados e possuem muito menos resultados analíticos do que as ODEs. De fato, resultados analíticos para DDEs não vão além de análises de estabilidade linear em torno de pontos fixos (veja o Apêndice B), ou análises que usualmente apresentam algum tipo de aproximação, como por exemplo expansões assintóticas. Além disso, DDEs são sistemas que exigem uma grande capacidade computacional, fato este que explica por que este tipo de equação é relativamente pouco estudada, mesmo numericamente.

Neste trabalho apresentamos fenômenos incomuns observados durante o estudo numérico do modelo de Mackey-Glass. Estes fenômenos são expostos de forma descritiva, devido a natureza complicada das DDEs e, como mencionado acima, devido a falta de métodos analíticos gerais para o estudo dos conjuntos de soluções com periodicidade arbitrária e caos. Apesar disso, nossos resultados numéricos revelam, como ficará claro mais adiante, uma série de regularidades e tendências, cuja descrição analítica vale a pena ser investigada.

Além de todos os resultados mencionados, mostramos que a implementação de um atraso, tornando a dimensionalidade do sistema infinita, pode não alterar a dinâmica do sistema instantaneamente, e pode inclusive não apresentar efeito qualitativo algum. Este resultado não pode ser obtido utilizando-se técnicas convencionais comumente usadas na análise de DDEs, como, por exemplo, teorias perturbativas [5, 29, 30, 31].

2.2 Deformações contínuas na forma de onda e ramos isolados

A linha superior da Fig. 2.3 mostra diagramas de bifurcações típicos, obtidos traçando os máximos locais (picos) de x , calculados numericamente, como função do atraso τ . Nestes diagramas é possível reconhecer a presença dos já conhecidos ramos provenientes de dobramento de período. Por outro lado, diferentemente do que é comumente observado para mapas ou fluxos, estas figuras mostram que diagramas deste tipo, calculados para DDEs, também apresentam ramos individuais isolados, que nascem ou morrem abruptamente para valores específicos do atraso. Exemplos de ramos que nascem abruptamente são os indicados pelas letras B, C e D no diagrama da esquerda, no topo da Fig. 2.3, já um exemplo de ramo que morre abruptamente é o ramo C' , indicado pela seta no painel da direita, na parte superior da mesma figura. Para entender a origem destas discontinuidades, estudamos a evolução temporal da solução antes e depois destas discontinuidades, mais especificamente, para valores de τ indicados pelos segmentos de reta verticais (a), (b), \dots , (f), mostrados nos dois diagramas no topo da Fig. 2.3.

A Fig. 2.3(a) mostra a evolução temporal de $x(t)$ para $\tau = 4$, valor este longe do início do ramo B. Neste caso, $x(t)$ é caracterizada por uma oscilação periódica e suave, com apenas um pico A por período. Para $\tau = 9$, imediatamente antes do nascimento do ramo B, a oscilação permanece periódica, mas começa a apresentar um ponto de inflexão que dará origem ao pico B, como mostra a Fig. 2.3(b). O fato da letra B ter sido escrita abaixo da curva indica o fato de este ponto ainda não representar um máximo local, mas simplesmente um “precursor” do que virá a se tornar um máximo com o incremento de τ , dando origem ao ramo B. Na Fig. 2.3(c), é ilustrada a situação onde B é um máximo local da solução (que agora apresenta dois picos por período, A e B) e, de forma similar a apresentada anteriormente, o ponto C abaixo da curva indica o precursor do pico (e

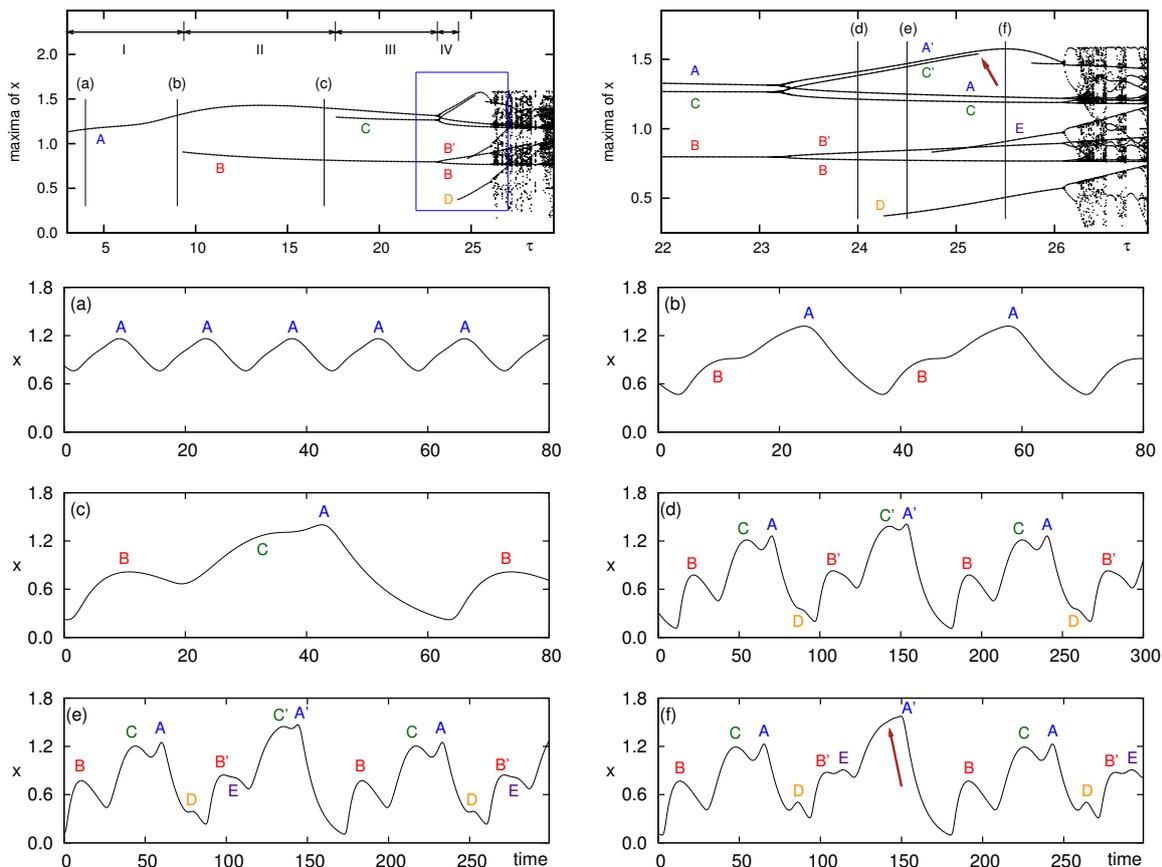


Fig. 2.3: Rota para o caos via deformação da solução, observada no modelo de Mackey-Glass. A linha superior mostra diagramas de bifurcação para $n = 21$ (linha horizontal branca na Fig. 2.6(a) abaixo). Os outros gráficos mostram a evolução temporal das oscilações para valores de τ selecionados: (a) $\tau = 4$, oscilações com apenas um pico, de amplitude A; (b) $\tau = 9$, precursor do pico B é visível; (c) $\tau = 17$, oscilações com dois picos, A e B, e precursor do pico C; (d) $\tau = 24$, dobramentos de período (A,A'), (B,B') e (C,C'); precursor de D é visível; (e) $\tau = 24.5$, precursor de E é visível; (f) $\tau = 25.5$, repentina morte do pico C', indicado pela seta.

portanto do ramo) C. A Fig. 2.3(d) mostra a evolução temporal para $\tau = 17$ (segmento vertical (d) no diagrama da direita, na linha mais acima nesta figura). Nesta figura podemos reconhecer facilmente os pares de picos associados ao dobramento de período, que são rotulados por (A,A'), (B,B'), e (C,C'). Ainda nesta figura, vemos a posição do precursor do pico D. Na sequência, a Fig. 2.3(e) mostra o pico D e o precursor do pico E. Deste desdobramento, podemos entender a razão por trás do aparecimento de ramos “extras” no diagrama de bifurcação: eles são resultado de deformações sofridas pela solução conforme o parâmetro de atraso τ varia.

E como ramos subitamente desaparecem no diagrama de bifurcação? Isso pode ser entendido comparando o ponto indicado pela seta na Fig. 2.3(f) com o pico C' na Fig. 2.3(e). Esta comparação mostra que o pico C' desaparece devido a uma deformação inversa

àquelas responsáveis pelo repentino aparecimento de novos picos. Nossas observações mostraram que estes desdobramentos ocorrem abundantemente na equação de Mackey-Glass, de forma que acreditamos que este padrão de deformação que induz criações e destruições de picos seja uma propriedade genérica, não apenas das DDEs, mas também das ODEs, pois este fenômeno também foi observado nos modelos de laser de CO₂ realimentado com e sem atraso, e no modelo de Lang-Kobayashi, como será mostrado mais adiante nesta tese.

Os ramos isolados descritos acima, que aparecem através de deformações da solução, não devem ser confundidos com os ramos descontínuos comumente encontrados em diagramas de bifurcação, resultantes de multiestabilidade. Este último envolve bacias de atração distintas, enquanto no caso que descrevemos aqui o atrator evolui continuamente dentro de uma mesma bacia de atração. Ramos isolados podem ser reconhecidos em diagramas mostrados anteriormente para sistemas com atraso, por exemplo na Ref. [20], contudo, não encontramos nenhuma referência citando tais fenômenos.

2.3 Mapas de retorno e a gênese dos ramos isolados

Como explicado na seção anterior, a assinatura do nascimento e morte de ramos isolados nos diagramas de bifurcação é a ocorrência de pontos de inflexão na solução conforme os parâmetros são variados. Pontos de inflexão ocorrem quando a primeira e a segunda derivadas se anulam simultaneamente (com a segunda derivada trocando de sinal):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \text{e} \quad \frac{d^3x}{dt^3} \neq 0. \quad (2.8)$$

A gênese detalhada dos ramos isolados nos diagramas de bifurcação pode ser entendida investigando-se como o mapa de retorno (RM, *Return Map*) $x(t) \times x(t - \tau)$ evolui como uma função de τ . A Fig. 2.4 mostra diversos exemplos destes mapas, plotados concomitantemente à solução $f(x, x_\tau) = 0$, onde $f(x, x_\tau)$ é a função definida na Eq. (2.6).

A Fig. 2.4(a) ilustra este par de curvas para $\tau = 4$. O mapa de retorno (indicado pelas letras RM) é a curva mais proeminente, representando a trajetória fechada que intersecta a outra curva de cor mais fraca ($f(x, x_\tau) = 0$) em dois lugares: um mínimo (na esquerda), e um máximo, indicado por A. O ponto A é o mesmo marcado nos diagramas de bifurcação da Fig. 2.3 e abaixo deles, na figura 2.3(a). Conforme τ cresce, a curva fechada cresce e se deforma continuamente, desenvolvendo uma região de forte curvatura, próximo ao ponto indicado com a letra B na Fig. 2.4(b). A seguir, na Fig. 2.4(c), mostramos a amplificação da região indicada pelo retângulo verde da Fig. 2.4(b), e resumimos o que acontece quando seguimos o acréscimo de τ : o mapa de retorno atravessa a curva $f(x, x_\tau) = 0$. Para $\tau_{\text{birth}} = 9.31 \dots$, o mapa de retorno mostra uma cúspide que encontra a solução de

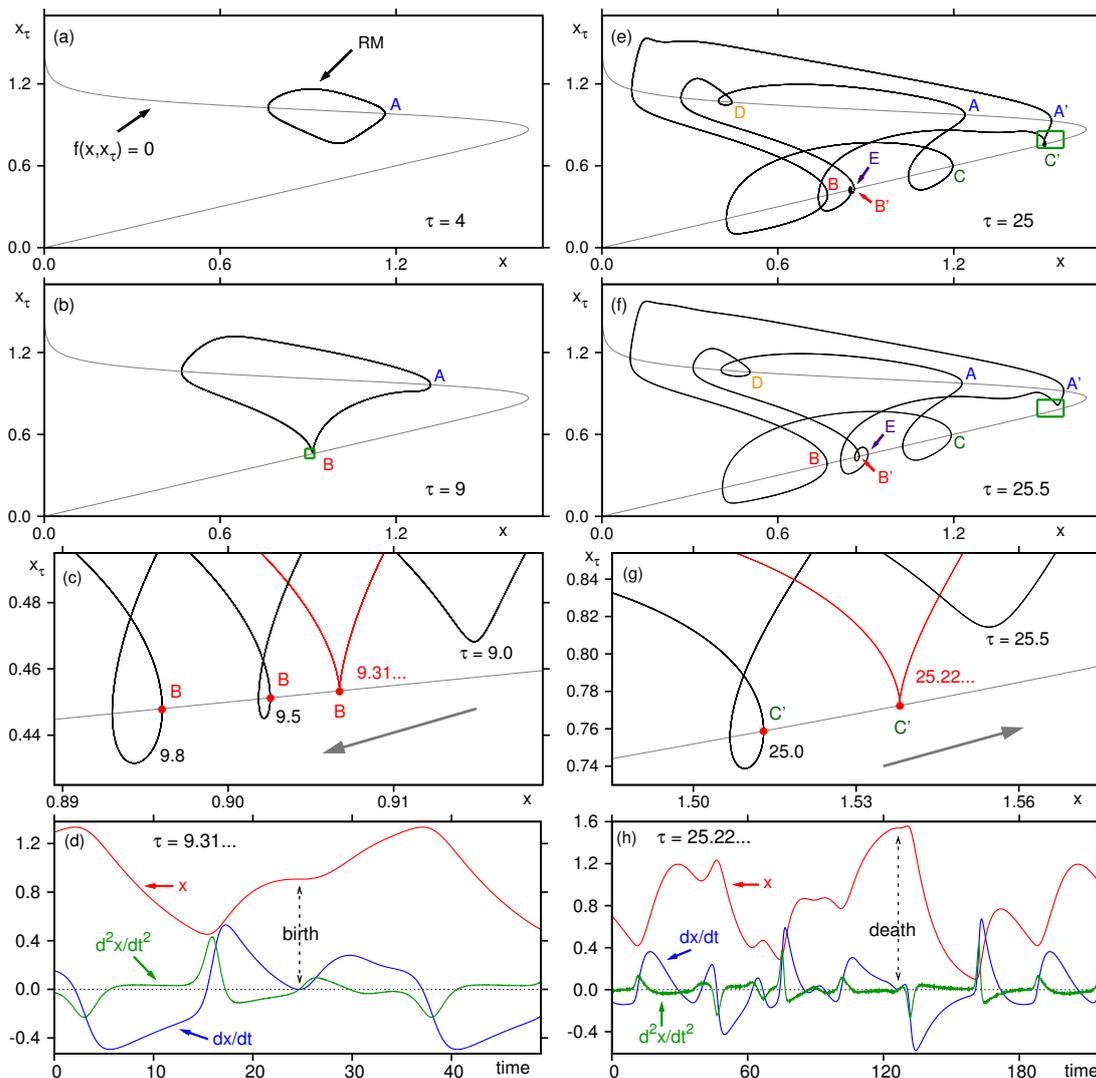


Fig. 2.4: Mapas de retorno ilustrando o nascimento e morte dos ramos isolados, mostrados nos diagramas de bifurcação da Fig. 2.3. A coluna da esquerda mostra o nascimento do ramo B, enquanto a coluna da direita mostra como o ramo C' desaparece. Os gráficos (a)-(c) e (e)-(g) mostram a formação de uma cúspide quando o mapa de retorno encontra a curva $f(x, x_\tau) = 0$, como indicado em (c) e (g). As três curvas no painel (d) e (h) mostram a evolução temporal de x , dx/dt e d^2x/dt^2 . Como indicado pelas setas pontilhadas, as cúspides ocorrem quando $dx/dt = d^2x/dt^2 = 0$. Aqui, $n = 21$. Veja o texto para uma descrição detalhada.

$f(x, x_\tau) = 0$. Ao incrementarmos τ ainda mais, a cúspide evolui para um laço, como pode ser visto para $\tau = 9.5$ e $\tau = 9.8$. A seta nesta figura indica a direção de deslocamento dos mapas de retorno conforme seguimos o aumento do atraso τ . A Fig. 2.4(d) fornece a evolução temporal de x , dx/dt , e d^2x/dt^2 , onde a seta tracejada marca o nascimento do pico B e, conseqüentemente, do aparecimento do ramo isolado B no diagrama de bifurcação.

Ao continuar incrementando τ , o mapa de retorno desenvolve laços adicionais e inter-

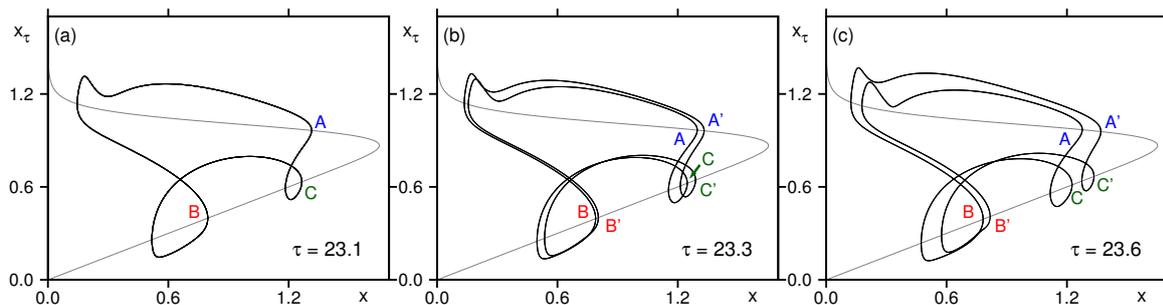


Fig. 2.5: Surgimento de um dobramento de período (A,A') , (B,B') e (C,C') , que acontece para valores de τ entre os apresentados nas figuras 2.3(c) e 2.3(d). O dobramento ocorre em $\tau \simeq 23.2$. Na parte superior esquerda de (c), podemos ver a iminência da intersecção da cúspide que originará o ramo isolado D, descrito na Fig. 2.3. Aqui, $n = 21$.

secções, como ilustrado nas figuras 2.4(e) e 2.4(f). Estes gráficos intermediários ajudam a entender o desenvolvimento das bifurcações vistas na Fig. 2.3 e, mais importante, a entender como ramos isolados desaparecem. Como indicado pela seta na Fig. 2.4(g), quando τ é incrementado podemos ver que a morte do pico C' ocorre devido a um processo inverso ao responsável pela criação dos picos isolados, mostrados na Fig. 2.4(c). Aqui, um laço já existente colapsa em uma cúspide para $\tau_{\text{death}} = 25.22\dots$, o ponto onde um aumento em τ faz com que a intersecção desapareça. As evoluções temporais correspondentes a x , dx/dt e d^2x/dt^2 para este caso são mostradas na Fig. 2.4(h).

Para concluir esta seção, a Fig. 2.5 ilustra como o dobramento de período se manifesta no mapa de retorno conforme τ aumenta. Neste caso podemos ver a bifurcação que leva aos picos A' , B' e C' , vistos na Fig. 2.3. É importante salientar aqui que o dobramento de período não envolve cúspides mas, como esperado, um suave dobramento do mapa de retorno. Dessa forma, é esperado que os diagramas de bifurcações genéricos para o modelo de Mackey-Glass apresentem combinações de ambos os tipos de ramos, isolados e por dobramento de período, com o nascimento/morte de ramos isolados sendo governado pela Eq. (2.8), a qual é genérica para sistemas com atraso.

2.4 Impacto das deformações da solução nos diagramas de fase

Qual é o impacto da criação e da destruição de picos por deformação da solução na organização geral observada no espaço de parâmetros? É grande. Isso pode ser constatado observando-se a Fig. 2.6, obtida seguindo-se o mesmo procedimento adotado na Ref. [32], que consiste em contar o número de máximos locais (picos) em um período de $x(t)$ e codificando este período em diferentes cores. Nesta figura, o número de picos é indicado utilizando-se 14 cores, como pode ser visto na barra de cores da figura. Pulsos com mais de 14 picos são plotados “reciclando-se as cores com mod 14”, onde o índice de cor é

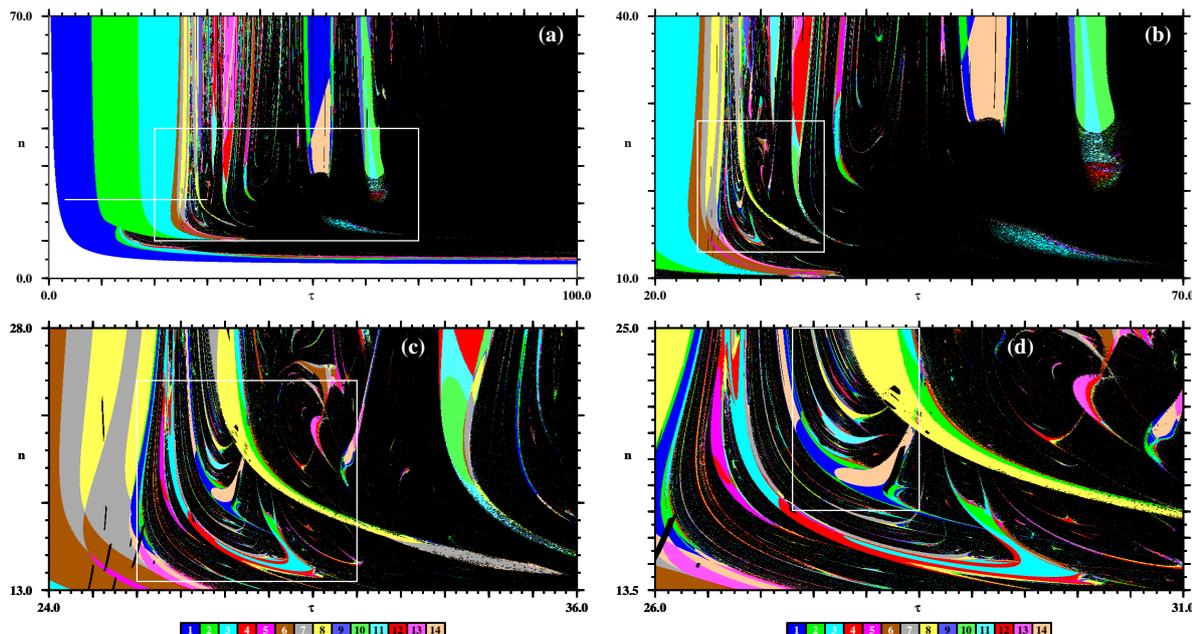


Fig. 2.6: Diagramas de fase mostrando um mosaico intrincado de regiões de periodicidade, caracterizadas individualmente pelo número de picos em um período de $x(t)$, como indicado pela barra de cores. Soluções não periódicas são mostradas em preto. (a) Visão global do espaço de parâmetros $\tau \times n$. A linha horizontal em $n = 21$ indica o intervalo considerado nas Figs. 2.3 e 2.4. O domínio branco na parte inferior esquerda da figura indica ponto fixo não nulo (soluções não oscilatórias). (b)-(d) Magnificação das caixas brancas. A caixa branca em (d) é ampliada na Fig. 2.7 abaixo. As cores são usadas em “mod 14” (veja o texto). Cada painel mostra a análise do espaço de fase em 1000×1000 conjuntos de parâmetros.

tomado como sendo o resto da divisão inteira do número de picos por 14 (soluções com 15 picos por período são indicadas com a mesma cor associada àquelas com 1 pico, soluções com 16 picos são indicadas com a mesma cor de 2 picos, e assim por diante). Múltiplos de 14 são indicados com o índice de 14 picos. Desta forma, todas as soluções periódicas podem ser descritas com as 14 cores disponíveis. Regiões em preto indicam soluções caóticas, e regiões em branco indicam soluções constantes (não nulas). Como podemos ver na Fig. 2.6, a forma e a distribuição dos diversos domínios de periodicidade formam um mosaico altamente intrincado, cuja descrição é bastante difícil de ser feita por meios que não sejam gráficos. É importante enfatizar que todos os diagramas apresentados aqui apresentam apenas fases estáveis, e não fronteiras de instabilidade que não podem ser medidas experimentalmente.

Relembrando que uma única equação diferencial com atraso já é equivalente a um conjunto de dimensão infinita de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem [5, 29, 30, 31], isso significa que sistemas com realimentação atrasada são muito mais complicados e ricos do que sistemas governados por ODEs, conseqüentemente, é natu-

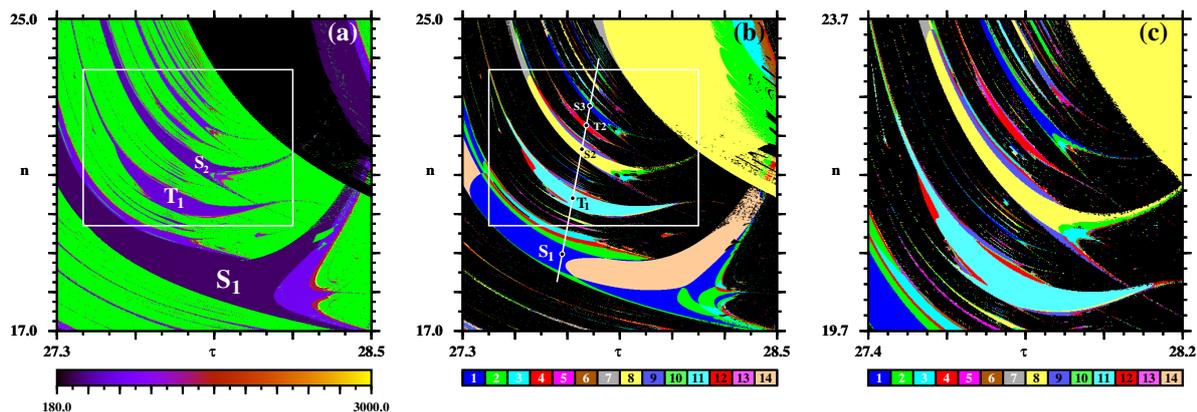


Fig. 2.7: Típica “alternação caos-periodicidade” observada entre as ilhas de periodicidade com três flancos de caos T_i e os *shrimps*, com dois flancos de caos, S_i [33]-[39]. (a) Distribuição do valor do período dentro de ilhas de periodicidade. Aqui, aperiodicidade é mostrada em verde. (b) Mesma região que (a), porém plotando o número de picos por período. (c) Magnificação da caixa branca em (a) e (b). Cada diagrama tem resolução de 600×600 pontos.

ral esperar que DDEs apresentem características que são comumente encontradas em ODEs. Por exemplo, a presença de *shrimps* [33]-[39] foi relatada recentemente em um modelo interessante de três equações com realimentação atrasada, proposto para descrever a dinâmica de uma população de gansos vermelhos [40]. Domínios de estabilidade do tipo shrimp também são abundantemente encontrados na equação de Mackey-Glass, como pode ser visto na caixa branca da Fig. 2.6(d), magnificada na Fig. 2.7(a).

Por outro lado, o espaço de parâmetros de sistemas com atraso apresenta uma grande quantidade de propriedades específicas, características de seu elevado grau de complexidade. Por exemplo, os domínios do tipo shrimp mencionados acima, nesse contexto apresentam uma rica distribuição interna de padrões de oscilação, como pode ser percebido pela distribuição de cores nos mosaicos de janelas periódicas da Fig. 2.6. Rotas generalizadas para o caos compostas pela composição de dobramentos de período e adição de picos são observadas em abundância no modelo de Mackey-Glass aqui explorado.

Neste ponto, voltamos nossa atenção para outro fato surpreendente, constatado ao observarmos o domínio mostrado em branco no canto inferior esquerdo do diagrama da Fig. 2.6(a): o impacto no sistema de um aumento repentino na dimensionalidade, passando de baixa para infinita, durante a passagem de $\tau = 0$ para $\tau \neq 0$. Como já é sabido, o atraso presente em sistemas realimentados requer um conjunto contínuo de condições iniciais para que a equação associada a este sistema seja integrada, fazendo com que o espaço de fase nestas condições tenha dimensão infinita. Uma questão importante, cuja resposta ainda é desconhecida, é qual o impacto desta súbita “explosão” no número de graus de liberdade quando o atraso é implementado em sistemas com dimensão finita.

A grande região que representa soluções de ponto fixo não nulo, abaixo da hipérbole no canto inferior esquerdo da figura 2.6(a) mostra claramente que o sistema apresenta uma certa “letargia” para reagir à passagem de um para infinitos graus de liberdade. Como pode ser visto na figura 2.6(a), até valores relativamente elevados de n , a presença de uma alta dimensionalidade não altera a dinâmica original instantaneamente. Ainda mais surpreendente é o fato de que, para valores pequenos de n , este aumento nos graus de liberdade não apresenta nenhum efeito na dinâmica, independentemente de quão grande seja o atraso. Será que esta letargia ou ausência de efeito na dinâmica do sistema pode ser antecipada analiticamente? Ainda não sabemos.

Depois de caracterizar, na Fig. 2.6, o impacto global das deformações da solução, vistas na Fig. 2.3, mostramos agora, na Fig. 2.7, uma notável nova classe de domínios periódicos observados nesta DDE e que, até onde sabemos, nunca havia sido vista anteriormente, nem em ODEs nem em mapas. Como já é sabido, *shrimps* contém dois flancos ao longo dos quais ocorrem cascatas de dobramento de período [33]-[39], contudo, como ilustrado na Fig. 2.7, oscilações periódicas em DDEs podem emergir formando ilhas de periodicidade com formas topológicas muito peculiares, caracterizadas por três flancos com cascatas de dobramento de período. As maiores ilhas deste tipo estão indicadas por T_i na figura 2.7, enquanto os *shrimps* estão indicados por S_i . Como podemos ver nesta figura, as DDEs não apenas apresentam domínios de periodicidade com três flancos de caos T_i , mas estes domínios emergem em sequência, e se alternando infinitamente com os *shrimps* S_i , de forma que seu número de picos por período cresce com o aumento de i , formando inesperadas rotas para o caos, e gerando acumulações em regiões específicas do espaço de parâmetros.

2.5 Codificação de padrões oscilatórios

Olhando para a regularidade observada na Fig. 2.7, podemos nos perguntar que tipo de modificações acontecem em $x(t)$ para que a alternância das estruturas S_i e T_i apareça, gerando a acumulação observada. O objetivo desta seção é mostrar que as soluções que caracterizam tal alternância pode ser codificada de forma relativamente simples, utilizando um número mínimo de sub-padrões que compõem a solução.

Para isso, investigamos a natureza das mudanças na dinâmica quando atravessamos as estruturas S_i e T_i ao longo de uma curva representativa, neste caso, a reta branca mostrada na figura 2.7(b), cuja equação é dada por

$$n = 35.86 \tau - 973.634 \quad (2.9)$$

considerando o atraso no intervalo $27.66 \lesssim \tau \lesssim 27.82$. Mais especificamente, construímos

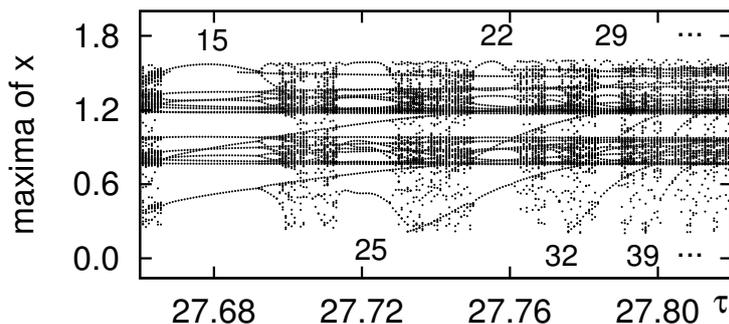


Fig. 2.8: Diagrama de bifurcação mostrando as janelas de periodicidade S_i (números superiores) e T_i (números inferiores), separados por janelas de caos. Este diagrama foi construído variando-se dois parâmetros simultaneamente ao longo da linha branca, dada pela Eq. (2.9) e vista na Fig. 2.7(b). Parâmetros representativos de diferentes janelas de periodicidade são dados na tabela 2.1.

um diagrama de bifurcação ao longo dessa reta, mostrado na Fig. 2.8. Este diagrama mostra uma complexa alternância de janelas de caos e periodicidade, sendo impossível discernir as janelas S_i das T_i . De alguns pontos representativos ao longo da reta branca mencionada, determinamos o número de picos em cada período. O número de picos é fornecido na Fig. 2.8 e, juntamente com suas coordenadas, na tabela 2.1. Observando a tabela, vemos que o número de picos N_i em ambas as estruturas, S_i e T_i , obedece uma relação simples, dada por

$$N_{i+1} = N_i + 7, \tag{2.10}$$

e que T_i contém dez picos a mais do que S_i .

Tab. 2.1: Coordenadas e número de picos das estruturas S_i e T_i mostradas na Fig. 2.7.

Estrutura	τ	n	# de picos N_i
S_1	27.6800	18.9710	15
T_1	27.7200	20.4050	25
S_2	27.7550	21.6600	22
T_2	27.7720	22.2700	32
S_3	27.7860	22.7720	29
T_3	27.7945	23.0760	39
S_4	27.8020	23.3460	36
T_4	27.8068	23.5180	46

Para ver como o aumento progressivo no número de picos altera a solução conforme os parâmetros são variados, a figura 2.9 compara as soluções de $x(t)$ para os conjuntos de parâmetros dados na tabela 2.1. A coluna da esquerda na Fig. 2.9 mostra as evoluções temporais de $x(t)$ para as estruturas S_i , enquanto a coluna da direita mostra as evoluções

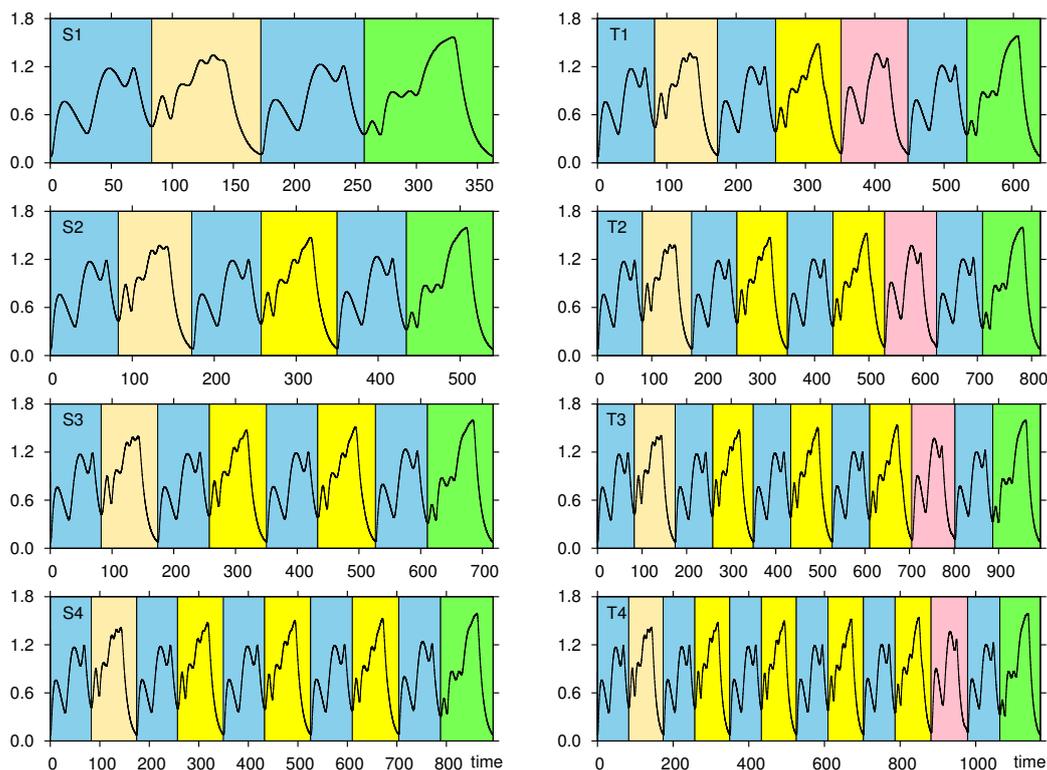


Fig. 2.9: Evolução temporal de $x(t)$ considerando parâmetros representativos dentro de cada estrutura periódica S_i e T_i , localizadas ao longo da linha branca na Fig. 2.7(b), e definidos na tabela 2.1. Todas as funções são periódicas e podem ser decompostas em um pequeno número de segmentos, indicados pelas cores, e codificadas em símbolos (veja o texto).

para as estruturas T_i .

Analisando a solução para S_1 , plotada no gráfico superior esquerdo da Fig. 2.9, não é difícil reconhecer que $x(t)$ pode ser subdividida de acordo com a distribuição interna dos picos. Dessa forma, S_1 é composta por (i) dois segmentos, cada um contendo três picos, mostrados com fundo azul, (ii) um segmento contendo cinco picos, mostrado com fundo bege, e (iii) um segmento com quatro picos, mostrado com fundo verde. Apesar dos dois segmentos que contém três picos serem muito parecidos, eles não são idênticos, de qualquer forma, por simplicidade nos focamos no número de picos de cada estrutura, e não na identidade exata entre os padrões.

A subdivisão da solução de $x(t)$ para S_1 em segmentos coloridos pode ser ainda mais simplificada se associarmos uma letra A, B, \dots a cada cor. Com isso, a subdivisão de $x(t)$ para S_1 pode ser representada por $ABAC$. Agora, olhando para S_2 na figura 2.9 percebemos que esta solução também pode ser decomposta seguindo a regra acima, porém neste caso, adicionalmente aos segmentos A, B e C em comum com S_1 , a solução contém um novo segmento, pintado em amarelo e rotulado por D . Este segmento contém quatro

picos, assim como o segmento B , mas rotularemos este de forma diferente devido a uma visível diferença morfológica. Este padrão pode ser abreviado da forma $AB\overline{AD}AC$, onde as letras sublinhadas representam os dois trechos com $3 + 4$ picos que são adicionados a solução quando passamos de S_1 para S_2 . As soluções das estruturas T_i podem ser decompostas de forma similar. A tabela 2.2 sumariza a subdivisão razoavelmente regular da solução conforme o número de picos cresce, sendo que as letras dentro das caixas indicam onde os novos $3 + 4$ picos são inseridos quando passamos da estrutura i , para a $i + 1$. Note que as estruturas T_i apresentam dez picos a mais do que as S_i pois apresentam a mesma estrutura de S_{i+1} , com a adição de um segmento E , com três picos e mostrado em fundo rosa, ou seja, T_i tem $3 + 4 + 3$ picos do que S_i . Relembramos nesse ponto o fato de que as letras aqui utilizadas sumarizam uma identidade em número de picos, mas apenas uma similaridade (e não identidade) no formato dos segmentos correspondentes. Em outras palavras, as letras não inferem que os segmentos permanecem invariantes e/ou são perfeitamente idênticos.

Tab. 2.2: Subdivisão das soluções nas estruturas S_i e T_i da Fig. 2.7. As caixas indicam a posição dos novos segmentos que aparecem quando passamos de i para $i + 1$.

i	S_i	T_i
1	ABAC	ABADEAC
2	AB \overline{AD} AC	ABAD \overline{AD} EAC
3	ABAD \overline{AD} AC	ABADAD \overline{AD} EAC
4	ABADAD \overline{AD} AC	ABADADAD \overline{AD} EAC

É interessante observar que as deformações dos segmentos correspondentes as letras A, B, C e E variam muito pouco quando passamos de um shrimp S_i para outro, ou de um T_i para outro, porém isso não é verdade para o segmento D , cujo formato se modifica consideravelmente mais. Comparando, para T_4 , os segmentos D mais a esquerda e mais a direita, vemos que eles não são tão similares, e se parecem cada vez mais com o segmento C . É realmente interessante o fato de que, conforme i cresce, as soluções dentro de S_i e T_i são incrementadas por um padrão invariante AD , que é “inserido” sempre na mesma posição (a esquerda de AC para S_i , e de EAC para T_i). Este padrão está indicado na tabela 2.2.

2.6 Sumário

Neste capítulo reportamos interessantes fenômenos observado nos diagramas de fase obtidos através de uma investigação numérica sistemática do modelo de Mackey-Glass. Soluções periódicas desta DDE mostraram deformações contínuas de sua forma de onda conforme

os parâmetros variam. Estas deformações criam e destroem picos nos padrões de oscilação, sendo que esta criação e destruição de picos resulta no aparecimento e desaparecimento de ramos isolados nas cascatas de bifurcação. Como resultado desta flexibilidade em incorporar números ímpares de ramos, sequências de ramos aparecem nos diagramas de bifurcações como combinação dos fenômenos de dobramento de período e adição de picos. Estas cascatas de ramos produzem mosaicos de periodicidade bastante ricos no espaço de parâmetros. Além disso, percebemos que as soluções em algumas estruturas de periodicidade neste mosaico podem ser descritas sistematicamente em termos de um número relativamente pequeno de segmentos que se combinam de uma forma relativamente simples para compor estas soluções.

Outra característica interessante observada neste sistema é o fato de a inserção de alta dimensionalidade não alterar a dinâmica instantaneamente, e inclusive não mostrar efeito algum em certos intervalos de parâmetros. Além disso, esta letargia não é um efeito peculiar do modelo de Mackey-Glass, mas também uma propriedade observada em modelos de lasers bem conhecidos, como será discutido mais adiante nesta tese [18].

Capítulo 3

MODELO DE LASER DE CO₂ COM REALIMENTAÇÃO

O estudo de lasers no contexto de sistemas dinâmicos complexos teve como principal ponto de partida o trabalho de H. Haken [41], publicado em 1975, que revelou o isomorfismo matemático entre o clássico modelo hidrodinâmico de Lorenz [42], e o conjunto de equações óticas de Maxwell-Bloch, que modelam o campo e a polarização de um laser monomodo [43]. Desde então, uma série de trabalhos foram desenvolvidos utilizando-se equações de taxas para descrever o campo elétrico, a inversão de população, a polarização e outras grandezas dos mais diversos tipos de lasers.

Entre outros motivos, este tipo de descrição teórica tem como objetivo ajudar a desenvolver e aprimorar os lasers, já que uma análise sistemática do seu comportamento é mais rápida e menos custosa de ser realizada através de métodos numéricos do que experimentalmente, especialmente quando o objetivo é verificar a influência dos parâmetros do laser no seu regime de operação.

Do ponto de vista experimental, o método padrão utilizado para estabilizar e controlar a frequência de saída, o comprimento de onda, e a potência de um laser é implementar o uso de realimentação, seja ótica, eletrônica ou eletro-ótica [44]. Um esquema eficiente de laços de realimentação requer uma boa compreensão dos parâmetros que influenciam o sistema. De fato, a falta de informação sobre estes parâmetros torna difícil tomar decisões referentes ao caminho a ser seguido para desenvolver ainda mais a eletrônica quântica, e para aumentar e otimizar as aplicações de lasers. Enquanto os possíveis comportamentos dinâmicos de lasers tem sido estudados em detalhe para diversas situações de interesse [45, 46], os parâmetros são geralmente restritos a valores específicos ou intervalos pequenos. A maioria dos lasers ainda necessita de uma análise mais detalhada e abrangente de seus respectivos espaços de parâmetros, onde uma classificação das soluções pulsantes estáveis se faz necessária.

O objetivo deste capítulo é descrever diagramas de estabilidade, caracterizando a natureza e a distribuição global de soluções auto-pulsantes em um laser de classe-B com realimentação ótica (sem atraso), quando mais de um parâmetro é variado simultaneamente. O sistema considerado aqui é um modelo de laser de CO₂ de dois níveis, representando lasers de operação monomodo onde uma eliminação adiabática da variável de polarização

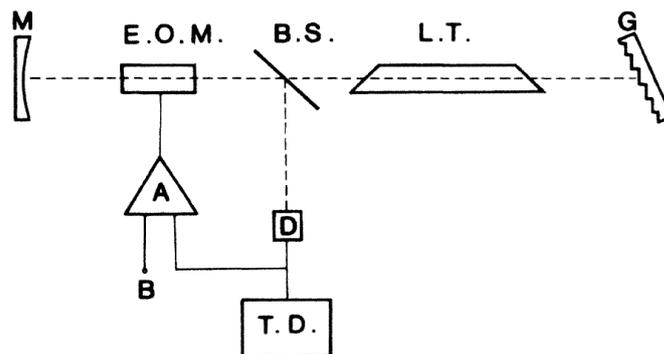


Fig. 3.1: Representação esquemática do laser de CO₂ de classe B com realimentação, descrito no texto. Aqui, a região entre M e G representa a cavidade do laser. L.T. - tubo de CO₂; E.O.M. - modulador eletro-ótico; B.S. - divisor de feixe; D - detector; T.D. - digitalizador transiente; B - tensão de bias; A - amplificador de alta tensão. Figura retirada da Ref. [47].

reduz o sistema a dois graus de liberdade acoplados (laser classe B): a amplitude do campo e a inversão de população. Um terceiro grau de liberdade é obtido aqui através da implementação de um laço de realimentação, fazendo com que a amplitude de saída do laser seja realimentada por um modulador eletro-ótico localizado dentro da cavidade [47, 48]. A representação esquemática deste dispositivo é mostrada na Fig. 3.1.

O espaço de parâmetros deste sistema foi estudado primeiramente por Yang et al. [49] com um nível de detalhes muito mais alto do que o usual para lasers. Os autores desenvolveram uma análise de estabilidade linear e identificaram as fronteiras entre soluções de ponto fixo estáveis e instáveis, além disso, calcularam numericamente o período e o número de picos da intensidade do laser como função de dois parâmetros, r (ganho de realimentação) e B (voltagem de bias), definidos abaixo nas equações (3.1)-(3.3). Eles observaram que um aumento no ganho de realimentação r resulta em um aumento no número de picos na intensidade do laser, enquanto que um aumento nas voltagens de bias B induz um aumento no período do sinal. Eles também observaram uma divergência no período enquanto aumentavam B , mantendo r constante, para um valor específico de r ($r = 0.21593$).

Neste capítulo mostraremos nosso trabalho onde complementamos e ampliamos os seus resultados pioneiros, mostrando que, de fato, soluções auto-pulsantes exibem grande complexidade e apresentam descontinuidades, tanto na amplitude quanto no período do sistema. Diagramas de estabilidade de alta resolução no plano $r \times B$ revelam que estas descontinuidades produzem efeitos interessantes no espaço de parâmetros, e também mostram soluções oscilatórias auto-pulsantes cujo número de picos aumenta abruptamente conforme os parâmetros são variados (veja a Fig. 3.2). Ainda, revelamos que o laser contém uma fase caótica relativamente pequena. Mostramos que o número de pi-

cos aumenta através de certas deformações dos pulsos das soluções oscilatórias, as quais são explicadas em detalhes. Diagramas de bifurcação da intensidade do laser mostram uma característica muito importante: a intensidade sofre aumento no número de picos mediante deformação do pulso, e não intercalada por janelas de caos, como usualmente acontece. Este trabalho tem o propósito adicional de fornecer diagramas de estabilidade de referência, visando a comparação com a situação consideravelmente mais complexa envolvendo uma realimentação atrasada no sistema, um problema clássico [50, 51] e cuja aplicação desperta muitos interesses tecnológicos, como por exemplo, na área de comunicação segura [52, 53]. O caso com atraso será discutido no próximo capítulo.

3.1 Laser de CO₂ com realimentação

O modelo de laser de CO₂ realimentado que nos interessa é descrito por três equações diferenciais autônomas acopladas, que envolvem três variáveis e sete parâmetros. Chamando de $x(t)$ a intensidade do laser normalizada pelo valor de saturação, $y(t)$ a inversão de população normalizada pelo valor do limiar do laser, e $z(t)$ a voltagem de realimentação normalizada por $1/\pi$ vezes a voltagem do modulador eletro-ótico, as equações que governam este sistema são dadas por [47, 48, 49]:

$$\dot{x} = kx(y - 1 - \alpha \sin^2 z), \quad (3.1)$$

$$\dot{y} = \gamma(A - y - xy), \quad (3.2)$$

$$\dot{z} = \beta(B - rx - z). \quad (3.3)$$

Neste modelo, k representa a perda não modulada da cavidade, γ é a taxa de decaimento da população, β é a taxa de amortecimento do laço de realimentação, r é o ganho de realimentação, B é a voltagem de bias aplicada ao modulador eletro-ótico, A é a corrente de bombeamento normalizada, e α é a amplitude da modulação [48]. Seguindo Yang et al. [49], nos focamos no plano de parâmetros $r \times B$ e fixamos $A = 1.66$, $\alpha = 5.8$, $k = 9.6(\mu s)^{-1}$, $\gamma = 0.03(\mu s)^{-1}$, $\beta = 0.5(\mu s)^{-1}$. As condições iniciais usadas aqui foram $x(0) = y(0) = z(0) = 1.0$, mas a utilização de condições iniciais escolhidas aleatoriamente no intervalo $[0, 0.1]$ mostraram praticamente os mesmos resultados.

3.2 Adição de picos não mediadas por caos

As figuras 3.2(a) e 3.2(b) mostram diagramas de estabilidade obtidos numericamente através da resolução das equações (3.1)-(3.3), utilizando um algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem de passo fixo, em uma rede de $1200 \times 1200 = 1.44 \times 10^6$ pontos (r, B) igualmente espaçados. O cálculo deste diagrama é uma tarefa numericamente pesada,

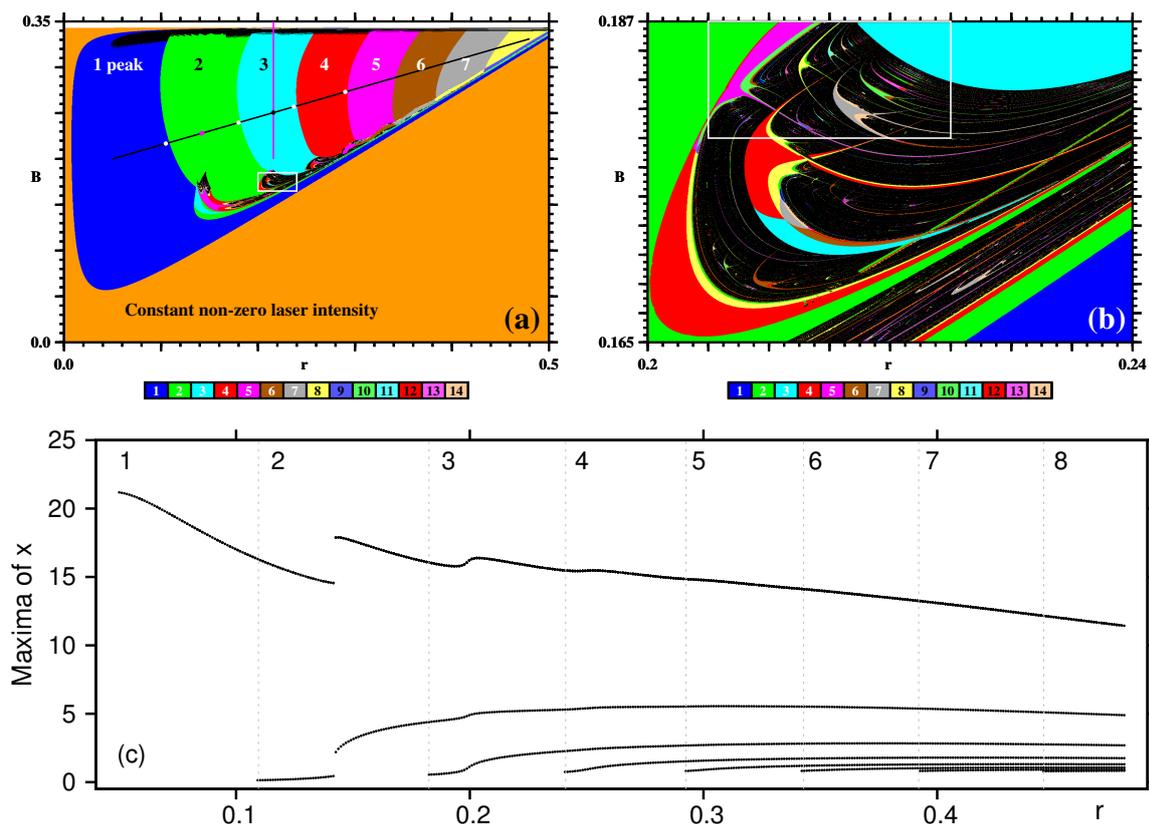


Fig. 3.2: (a) Diagrama de estabilidade, classificando oscilações auto-pulsantes de acordo com o número de picos da intensidade do laser $x(t)$, na Eq. (3.1), de acordo com a indicação dos números. Preto indica regiões de oscilações caóticas. A estreita faixa branca na parte superior indica soluções de intensidade nula ($x(t) < 0.005$). (b) Magnificação do retângulo branco em (a), mostrando acumulações de *shrimps*. O retângulo desta figura é mostrado magnificado na Fig. 3.6. (c) Diagrama de bifurcação mostrando a adição de picos de $x(t)$ ao longo da linha preta em (a), dada pela Eq. (3.4). Aqui, a intensidade do laser apresenta adição de picos devido a deformações da solução (veja o texto).

e foi desenvolvida num cluster de 700 processadores de alta performance. Para cada solução, contamos o número de picos na amplitude do laser $x(t)$ e verificamos se os pulsos se repetem ou não. Pulsos periódicos são representados usando 14 cores, como indicado pela barra de cores nas figuras e descrito em detalhes em [32], para indicar o número de picos por período. Pulsos com mais de 14 picos são plotados “reciclando-se as cores com mod 14”, procedimento idêntico ao detalhado no capítulo anterior para a construção das Figs. 2.6 e 2.7. A diferença neste caso é que a cor branca aqui é utilizada para indicar regiões de solução nula ($x = 0$), já pontos fixos não nulos são indicados pela cor alaranjada, mostrada no grande domínio indicado por “constant non-zero laser intensity” (intensidade do laser constante e diferente de zero) na Fig. 3.2(a). A região onde a amplitude é nula aparece em uma faixa estreita na parte superior da Fig. 3.2(a).

Os diagramas de estabilidade das figuras 3.2(a) e 3.2(b) mostram como as auto-pulsações se organizam no espaço de parâmetros de controle. A Fig. 3.2(a) mostra uma sequência de regiões adjacentes contendo números que denotam o número de picos da amplitude do laser. A organização observada aqui está em bom acordo com a figura 3 de Yang et al. [49], porém aqui apresentamos o diagrama com uma precisão muito maior, além de indicarmos claramente a localização da pequena fase caótica observada, mostrando claramente sua estrutura interna. A Fig. 3.2(b) mostra uma sequência familiar de *shrimps* [50]–[55] e a fronteira específica onde estes se acumulam.

A organização peculiar de soluções de mesmo número de picos vista na Fig. 3.2(a) mostra um comportamento interessante, denotado por uma cascata de adição de picos, onde o número de picos cresce aritmeticamente, e não geometricamente como no caso mais comumente observado das cascatas de dobramento de período. Mais importante, as diversas janelas não são separadas por regiões de caos, que representam os casos mais comuns para adição de picos (veja a Fig. 3.6 abaixo) mas, pelo contrário, aqui o número de picos cresce abruptamente de janela para janela, de maneira descontínua sem qualquer traço de caos entre elas.

A Fig. 3.2(a) contém uma reta preta cuja equação, definida arbitrariamente para definir um caminho que siga a cascata de adição de picos observada no diagrama, é dada por:

$$B = 0.184756 + 0.304878 r, \quad 0.05 < r < 0.48. \quad (3.4)$$

Ao longo desta reta, calculamos o diagrama de bifurcação mostrado na Fig. 3.2(c), que ilustra em mais detalhes como o número de picos varia quando dois parâmetros são modificados simultaneamente. Como fica claro na Fig. 3.2(a), o diagrama de bifurcação apresentado é representativo da maioria dos diagramas obtidos considerando B constante.

3.3 Deformações de pulsos e ramos isolados

O diagrama de bifurcação da Fig. 3.2(c) contém diversos ramos isolados que iniciam abruptamente para valores específicos de r , e resultam em cascatas de adição de picos atípicas, não intercaladas por regiões de caos. Aqui, mostramos que estes ramos isolados resultam de deformações dos pulsos quando os parâmetros evoluem. Propomos também um critério específico, dado pela Eq. (3.6), que permite determinar o conjunto de parâmetros onde novos picos emergem nas soluções de $x(t)$.

As figuras 3.3(a)-3.3(d) mostram exemplos de soluções para $r = 0.105$, $r = 0.180$, $r = 0.237$, $r = 0.290$; e B definido pela Eq. (3.4). Estes quatro pontos estão indicados por pontos brancos sobre a reta preta na Fig. 3.2(a). Eles estão localizados imediatamente antes das fronteiras que marcam a mudança no número de picos da intensidade do

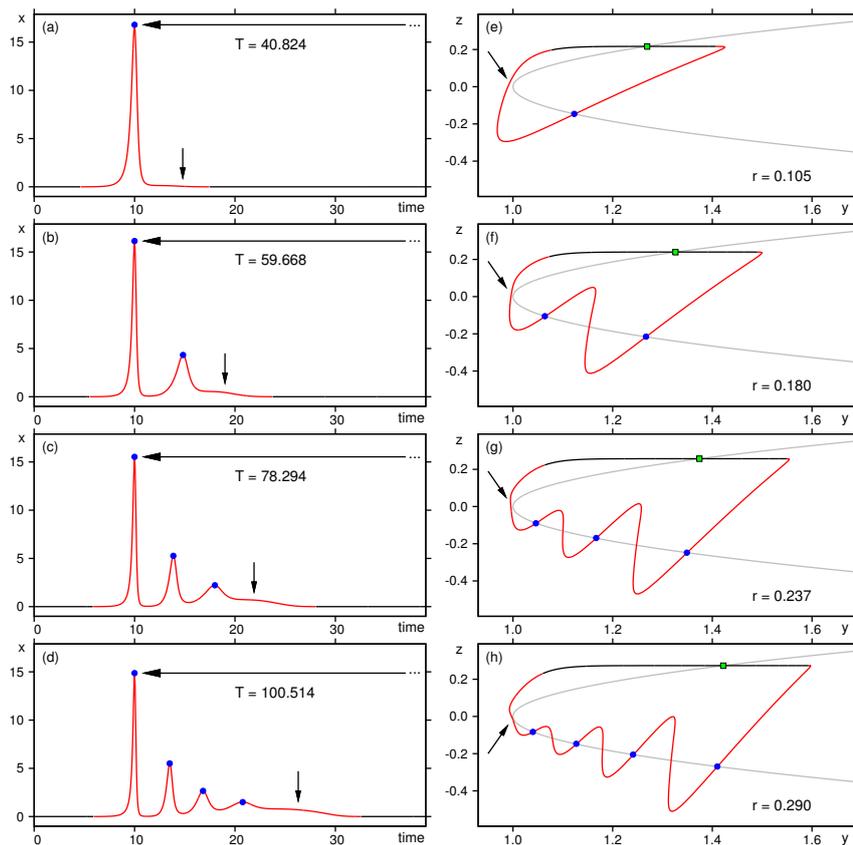


Fig. 3.3: (a)-(d) Pulsos da intensidade, mostrando o aumento no número de picos conforme r cresce de $r = 0.105$ (superior) até $r = 0.290$ (inferior), como indicado pelos pontos brancos sobre a reta preta na Fig. 3.2(a). (e)-(h) Intersecções de $y \times z$ com $f(y, z) = 0$ (veja o texto). Segmentos em preto indicam laser com amplitude nula ($x < 0.005$). Setas pequenas indicam onde o próximo pico vai aparecer (coluna da esquerda), e a intersecção que origina este pico (coluna da direita). Intersecções marcadas por pontos azuis representam máximos da intensidade. Intersecções entre os pontos azuis indicam mínimos. Quadrados verdes mostram a intersecção do segmento da trajetória sem emissão com a curva $f(y, z) = 0$. Esta intersecção não tem influência em dx/dt (veja a Eq. (3.1)).

laser. As Figs. 3.3(a)-3.3(d) também contém setas verticais que indicam a localização de um “precursor” de um pico, ou seja, a posição onde um novo pico vai aparecer quando aumentarmos um pouco o valor de r . A criação sucessiva de picos pode ser entendida analisando-se as Figs. 3.3(e)-3.3(h), na coluna da direita.

As Figs. 3.3(e)-3.3(h) mostram duas curvas no plano $y \times z$. A primeira, representada por um arco parabólico de cor suave, indica valores de y e z onde temos $f(y, z) = 0$ (*nullcline*), sendo

$$f(y, z) = y - 1 - \alpha \sin^2 z. \quad (3.5)$$

Esta função é um dos dois fatores que aparecem em dx/dt (veja a Eq. (3.1)). A outra curva mostra o locus (y, z) , obtido integrando-se as Eqs. (3.1)-(3.3).

A assinatura característica do nascimento de um novo ramo isolado no diagrama de bifurcação é a ocorrência de pontos de intersecção entre estas duas curvas conforme os valores dos parâmetros são modificados. As setas nas figuras 3.3(e)-3.3(h) mostram onde novas intersecções estão prestes a acontecer com o incremento de r . Estas intersecções são responsáveis pelo aparecimento dos ramos isolados que aparecem na parte de baixo do diagrama de bifurcação da Fig. 3.2(c). Assim, a condição para a gênese dos novos ramos isolados no diagrama de bifurcação, ou seja, para o aparecimento de novos picos nas soluções, é:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0. \quad (3.6)$$

De acordo com a Eq. (3.1), isso implica em

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k \left[\frac{dx}{dt} f(y, z) + x \frac{df(y, z)}{dt} \right] = 0, \quad (3.7)$$

onde $f(y, z)$ é dada pela Eq. (3.5). Esta condição é de fato obedecida e pode ser verificada numericamente com facilidade. A condição da Eq. (3.6) deve ser usada para encontrar pontos de inflexão na solução do laser.

Em suma, das cascatas de adição de picos na Fig. 3.3 vemos que a razão por trás do surgimento de novos picos na intensidade do laser, ou de forma equivalente, do surgimento de novos ramos isolados no diagrama de bifurcação, é o fato de os pulsos sofrerem deformações contínuas conforme os parâmetros variam.

Aqui, assim como no modelo de Mackey-Glass apresentado no capítulo anterior, o aparecimento de ramos isolados por deformação dos pulsos não deve ser confundido com descontinuidades similares, observadas nos ramos de diagramas de bifurcação onde há multiestabilidade. Quando há multiestabilidade o sistema visita diferentes bacias de atração, por outro lado, aqui estamos tratando de sistemas que evoluem continuamente dentro da mesma bacia de atração.

3.4 Descontinuidade no período da solução

A seção anterior descreveu cascatas de adição de picos onde o número de picos da intensidade do laser cresce aritmeticamente e sem o intermédio de fases caóticas quando os parâmetros são variados ao longo da direção representada pela reta em preto na Fig. 3.2(a). O objetivo desta seção é destacar e descrever dois tipos diferentes de descontinuidades apresentadas no período da intensidade do laser.

A Fig. 3.4(a) apresenta um diagrama de fase mostrando como o período T varia como função do ganho de realimentação r e da voltagem de bias B . Nesta figura é fácil reconhecer duas regiões de soluções sem periodicidade definida, indicadas em verde: uma

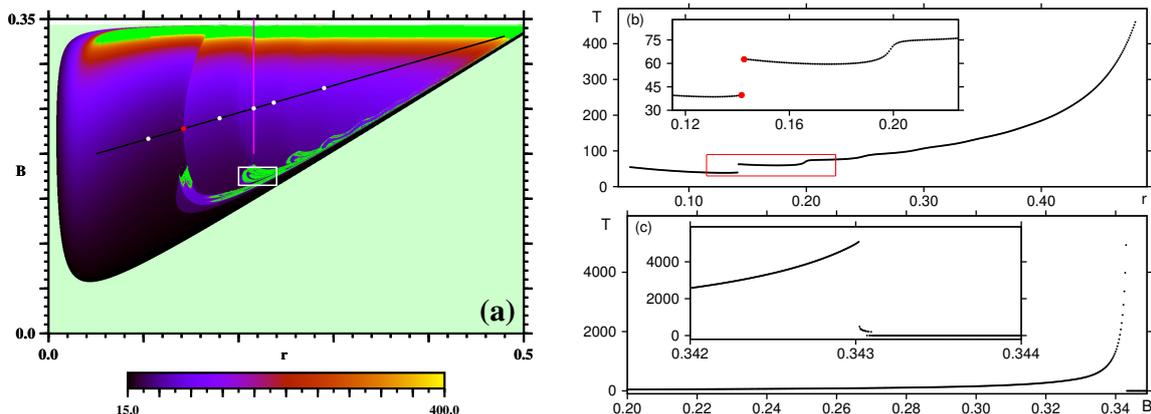


Fig. 3.4: (a) Diagrama de estabilidade ilustrando como o período T de $x(t)$ varia como função de r e B . Algumas mudanças bruscas ocorrem no período T ao longo da linha preta, a mais significativa é indicada por dois pontos vermelhos (sobrepostos e indistinguíveis). (b) Variação de T ao longo da linha preta, mostrando um salto repentino do período em torno de 0.14 e outro mais suave próximo de 0.20. (c) Variação de T ao longo da reta vertical vermelha em $r = 0.21593$ mostrando a descontinuidade responsável pela faixa verde na parte superior de (a).

horizontal, localizada na parte superior do diagrama, e outra praticamente paralela à linha em preto, logo abaixo desta. Veremos na sequência que estas regiões representam comportamentos bem diferentes da solução, de forma que a faixa superior reflete uma divergência no período das soluções e a faixa mais abaixo representa uma fase caótica repleta de *shrimps*. Os dois tipos diferentes de descontinuidades observadas neste diagrama são reveladas quando variamos os parâmetros ao longo das duas retas mostradas nesta figura.

A primeira descontinuidade é mostrada na Fig. 3.4(b), onde acompanhamos a evolução do período da intensidade ao longo da linha em preto na Fig. 3.4(a). Dentro do gráfico maior está a magnificação do retângulo vermelho, mostrando que a descontinuidade no período acontece em um intervalo muito estreito, entre $r = 0.1416$ e $r = 0.1426$. Estes valores são plotados com pontos vermelhos na Fig. 3.4(a), porém, por estarem muito próximos, aparecem indistinguíveis (um sobre o outro). Entre estes pontos há uma fronteira de descontinuidade, que pode ser percebida como uma mudança abrupta nas cores da figura, formando um arco vertical no espaço de parâmetros, indicando o salto descontínuo em T . Como podemos perceber, outros saltos no período são observados, porém são muito menos pronunciados do que o primeiro e sua amplitude decai muito rapidamente.

A segunda descontinuidade ocorre ao longo de retas verticais na Fig. 3.4(a), como a indicada em rosa, localizada em $r = 0.21593$. Esta reta vertical particular foi considerada previamente por Yang et al. [49] que notou uma divergência no período T conforme B crescia. A natureza desta divergência pode ser vista na figura 3.4(c). Apesar de

podemos calcular o período para valores bastante altos, introduzimos na Fig. 3.4(a) um limite superior em $T = 400$, considerando todos os períodos maiores que isso como sendo divergência no período, ou seja, falta de periodicidade. Isso foi feito para tornar mais visível o domínio horizontal no topo da figura. A divergência real ocorre próximo da fronteira superior deste domínio. Insistimos aqui que o par de regiões verdes na Fig. 3.4(a) representam pulsos aperiódicos de natureza distinta. Enquanto a faixa horizontal verde no topo da figura indica divergência no período do pulso, a outra região, com estrutura mais complexa, marca a existência de oscilações caóticas.

Comparando as figuras 3.4(b) e 3.4(c), podemos ver que a natureza da descontinuidade ao longo da reta preta mostra uma complexidade maior do que a observada na reta vertical. Comparações entre as figuras 3.2(a) e 3.4(a) mostram que a descontinuidade no número de picos não coincide com a descontinuidade no período, fato este que fica claro ao observarmos a janela de dois picos do diagrama de bifurcação da Fig. 3.2(c): o salto abrupto no período coincide com o salto abrupto na amplitude, que aparece no centro da janela de soluções com dois picos por período.

A Fig. 3.5 utiliza o mesmo tipo de abordagem usada na Fig. 3.3 para ilustrar o que acontece com a evolução temporal da intensidade e com a trajetória no plano $y \times z$, quando passamos de $r = 0.1416$ para $r = 0.1426$ e o salto no período acontece. Antes do salto, para $r = 0.1416$, vemos que a intensidade apresenta dois picos por período, um grande e um pequeno (Fig. 3.5(a)), e a respectiva trajetória no plano $y \times z$ percorre um caminho fechado aproximadamente triangular (Fig. 3.5(c)). Ao incrementarmos o ganho de realimentação para $r = 0.1426$ observamos, além do incremento no período, um aumento na amplitude dos dois picos, observados na evolução temporal da Fig. 3.5(b). No espaço de fase, mostrado na Fig. 3.5(d), vemos que a região de intensidade não nula da trajetória (trecho da trajetória mostrado em vermelho) passa a realizar um zigue-zague, “costurando” a *nullcline*. Este ziguezaguear da trajetória inicia o processo mostrado na Fig. 3.3, onde cada volta feita pela trajetória faz com que esta intersecte a *nullcline* novamente, dando origem a um novo pico. Quanto ao aumento no período, vemos que este se dá por um aumento no tempo em que a trajetória permanece com intensidade nula neste processo. Ao compararmos os trechos em vermelho nas Figs. 3.5(a) e 3.5(b), vemos que os pares de pulsos, apesar de apresentarem amplitudes diferentes, acontecem em intervalos temporais praticamente idênticos, porém, na evolução temporal da Fig. 3.5(b), a intensidade permanece muito mais tempo com amplitude nula (trecho em preto), gerando assim um aumento no tempo entre os pares de pulsos, e conseqüentemente, um aumento no período.

Finalmente, a Fig. 3.6 mostra em detalhes a região do espaço de parâmetros dominada por soluções caóticas. A Fig. 3.6(a) mostra um diagrama com 1200×1200 expoentes de Lyapunov usados para discriminar soluções caóticas (expoentes positivos, mostrados numa

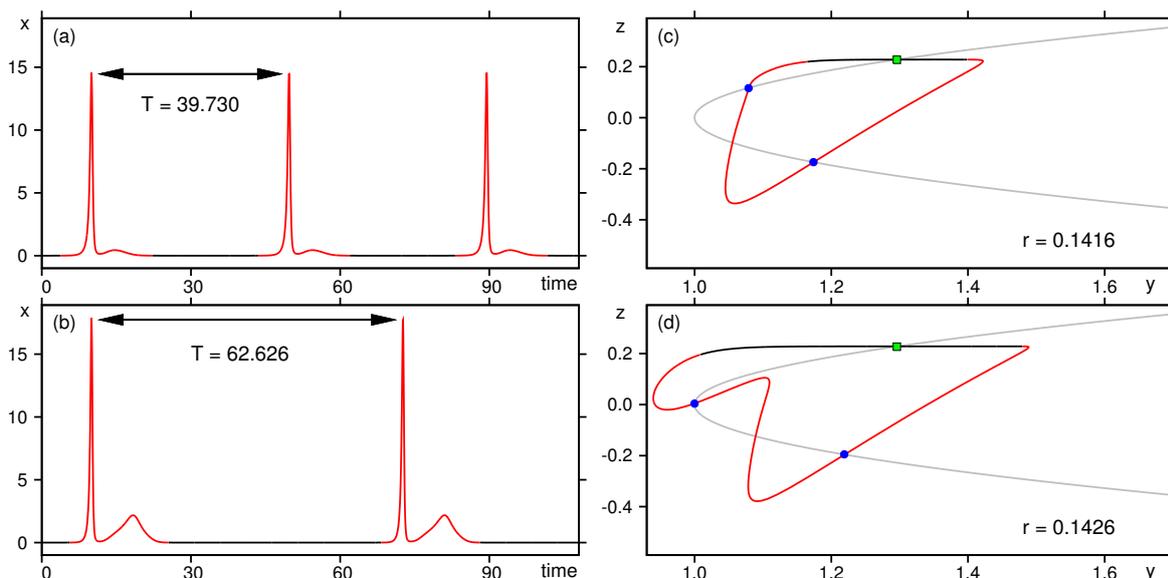


Fig. 3.5: Grande salto no período T e na amplitude da solução, observado com um leve incremento em r , de $r = 0.1416$ ((a) e (c)) para $r = 0.1426$ ((b) e (d)). Esta transição ilustra o que ocorre no salto descrito na Fig. 3.4(b). Em ambos os casos, antes e depois dos saltos, a intensidade do laser tem 2 picos por período. Segmento em preto indica laser sem emissão ($x < 0.005$). Quadrados verdes indicam intersecção do segmento da trajetória do laser sem emissão com a curva $f(y, z) = 0$.

escala de cores), de soluções periódicas (expoentes negativos, mostrados numa escala de cinza). A distribuição de expoentes de Lyapunov concorda muito bem com os diagramas baseados no número de picos mostrados na Fig. 3.6(b), onde as cores são usadas para enfatizar soluções periódicas. Esta figura contém três segmentos de reta ao longo dos quais calculamos diagramas de bifurcações, mostrados na coluna da direita. Como podemos ver no diagrama de bifurcação da figura 3.6(c), há uma descontinuidade no número de picos ao longo do segmento de reta mais à esquerda da Fig. 3.6(b), similar às descritas acima. Por outro lado, a sequência de bifurcações ao longo das outras duas retas mostra cascatas de adição de picos do tipo mais comum, mediadas por janelas de caos, já observadas anteriormente em outros sistemas [56]. Note que ambas as cascatas de adição de picos convergem para um “horizonte de acumulação”, caracterizado por uma região de soluções com três picos por período, o mesmo número de picos incrementados de um shrimp para outro. Esta organização regular foi observada anteriormente em um laser de semiconductor com injeção ótica [54]. Assim, enquanto em algumas regiões do espaço de parâmetros observamos fenômenos de descontinuidade associados a deformações de pulsos, em outras encontramos regiões onde a organização é do tipo mais comumente encontrada nestes tipos de sistema. O aparecimento de cascatas de adição de picos por deformação da solução mostra que, enquanto fases estáveis podem mostrar formatos idênticos no espaço de parâmetros, a distribuição interna dos pulsos pode ser bastante distinta.

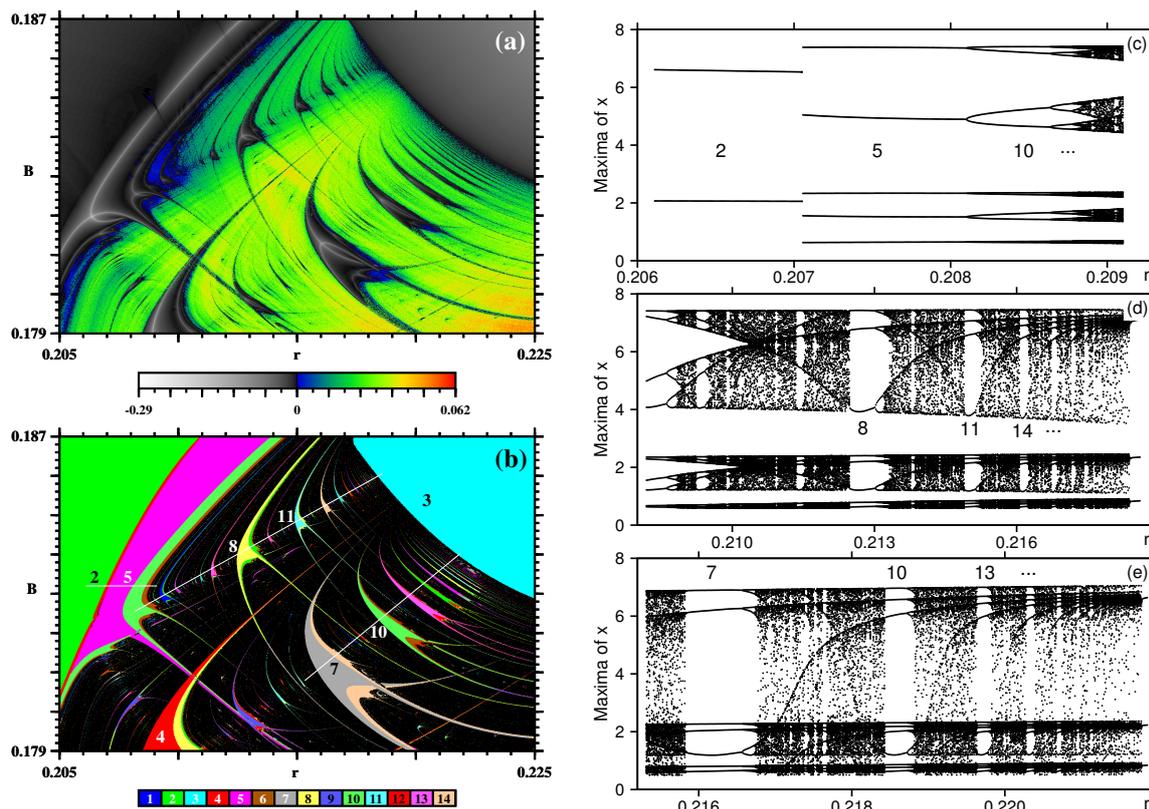


Fig. 3.6: Organização regular de pulsos estáveis no espaço de parâmetros. (a) Diagrama de fase dos expoentes de Lyapunov, com as cores indicando a extensão das fases caóticas; (b) Diagramas de fase com o número de picos da amplitude do laser, com as cores indicando as ilhas de periodicidade. Ao longo do par de retas não horizontais, podemos encontrar cascatas de *shrimps* com adição de picos, separados por janelas de caos. Os números estão associados com o número de picos da amplitude do laser. (c)-(e) Diagramas de bifurcação calculados ao longo das três retas apresentadas em (b). Note que o par de cascatas de *shrimps* com adição de picos mediadas por caos ocorrem ao longo de direções muito particulares [33], e convergem na direção de um grande “horizonte de acumulação” com três picos por período [54].

3.5 Sumário

Nesta seção descrevemos em detalhes muitas características de soluções auto-pulsantes obtidas através de uma investigação numérica sistemática de um modelo de laser de CO₂ com realimentação. As auto-pulsações apresentaram deformações contínuas de suas formas de onda conforme os parâmetros do sistema são variados, criando picos nos padrões de oscilação. Estes novos picos resultam em ricos e complexos ramos isolados que aparecem nos diagramas de bifurcação. Como resultado desta flexibilidade em incorporar um número ímpar de ramos, sequências de cascatas para este laser podem surgir em combinações muito ricas de adição e dobramento no número de picos, algo que, até onde sabemos, não havia sido investigado até agora. Estas cascatas de adição e dobramento

de picos produzem um complexo mosaico de domínios de periodicidade no espaço de parâmetros de controle, como exemplificado nas figuras 3.2 e 3.6. Além disso, descontinuidades no período e amplitude da intensidade foram observadas ao longo do espaço de parâmetros estudado, de forma que o comportamento da evolução temporal de $x(t)$ e a trajetória no espaço $y \times z$ foram detalhadas nas regiões destas descontinuidades. Esperamos que as cascatas de adição de picos não intercaladas por janelas aperiódicas, assim como as descontinuidades no período e intensidade do pulso do laser, motivem a sua verificação experimental num futuro próximo.

Uma questão interessante que surge após realizarmos o estudo deste modelo de laser de CO_2 com realimentação, é o que aconteceria se o laço de realimentação descrito aqui apresentasse um atraso temporal. Quais seriam os efeitos dinâmicos da alteração da dimensionalidade deste sistema de três para infinito? A duração temporal deste atraso teria algum efeito relevante? A abordagem do modelo com atraso, que nos permite responder a estas questões, será exposta no próximo capítulo.

Capítulo 4

LASER DE CO₂ COM REALIMENTAÇÃO ATRASADA

No capítulo anterior, desenvolvemos uma análise bastante detalhada do espaço de parâmetros de controle $r \times B$, no modelo que descreve a dinâmica de um laser de CO₂ com um laço de realimentação que utiliza um modulador eletro-ótico (Veja Fig. 3.1). Naquele modelo, o tempo de resposta associado ao laço de realimentação é constante e da mesma ordem de grandeza dos tempos associados às outras variáveis do sistema [47]. Neste capítulo, consideraremos o efeito da implementação e variação de um atraso temporal na resposta do laço de realimentação. O impacto da variação deste novo parâmetro de atraso (τ) é considerado em conjunto com os parâmetros de controle r e B , previamente considerados.

De um ponto de vista mais fundamental, a realimentação atrasada normalmente implica em um efeito de atraso no campo, que se manifesta através da criação de infinitos graus de liberdade, fazendo com que o espaço de fase do sistema se torne infinito. No regime de pequeno atraso, o impacto do aumento da dimensionalidade foi analisado para um laser de CO₂ por Arecchi et al. [57], que mostraram evidências de caos de baixa dimensão sob condições específicas. Mas o impacto geral da realimentação atrasada neste tipo de laser permanece inexplorado. Este fato, aliado ao grande número de estudos realizados recentemente no contexto de lasers de CO₂ [58, 59, 60], motiva nosso estudo de laser de CO₂ com realimentação atrasada, não apenas no regime de pequeno atraso, mas em regimes de duração temporal arbitrária.

4.1 Modelo com realimentação atrasada

Para estudar o impacto deste atraso na realimentação, utilizamos o clássico modelo de Arecchi et al. [57], definido pelas variáveis: $x(t)$, a intensidade do laser normalizado pelo valor de saturação, $y(t)$, a inversão de população normalizada pelo valor do limiar, e $z(t)$, a voltagem de realimentação normalizada por $1/\pi$ vezes a voltagem do modulador

eletro-ótico. Com essas três variáveis, o modelo é definido por [57]:

$$\dot{x} = kx(y - 1 - \alpha \sin^2(z(t - \tau))), \quad (4.1)$$

$$\dot{y} = \gamma(A - y - xy), \quad (4.2)$$

$$\dot{z} = \beta(B - rx - z). \quad (4.3)$$

Onde τ caracteriza o tempo associado com o atraso na realimentação. Este modelo é análogo ao apresentado no Capítulo 3, representado pelo conjunto de Eqs. (3.1)-(3.3), de forma que a interpretação das variáveis e dos parâmetros é rigorosamente a mesma. A única, porém muito significativa, diferença apresentada no modelo considerado pelas Eqs. (4.1)-(4.3), é o fato da resposta associada ao laço de realimentação apresentar um tempo de atraso τ . Essa diferença faz com que a variação temporal da amplitude $x(t)$ não dependa mais de $z(t)$, como é visto no modelo sem atraso (Eq. (3.1)), mas sim de $z(t - \tau)$, como visto na Eq. (4.1).

Seguindo a análise feita no Capítulo 3, mantemos o foco no plano $r \times B$ do espaço de parâmetros de controle, analisando como o tempo de atraso τ influencia a dinâmica do laser. Os valores fixados para os outros parâmetros do sistema também seguem os valores definidos no Capítulo 3: $A = 1.66$, $\alpha = 5.8$, $k = 9.6 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$, $\gamma = 0.03 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$, $\beta = 0.5 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$.

Para $\tau = 0$, como mencionado, o conjunto de Eqs. (4.1)-(4.3) se reduz às Eqs. (3.1)-(3.3), já estudadas em detalhe no Capítulo 3. Os diagramas apresentados no caso sem atraso mostraram uma complexa e intrincada organização das diferentes fases periódicas presentes no espaço de parâmetros de controle deste sistema. Estes diagramas servem como base de referência para compararmos os efeitos das alterações resultantes da inclusão de tempos de atraso, tanto nos regimes de atraso curto quanto longo.

4.2 Impacto do atraso na realimentação

Para obter o perfil das soluções auto-pulsantes do laser, seguimos a metodologia utilizada no Capítulo 3. Resolvemos numericamente as Eqs. (4.1)-(4.3), utilizando um algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem de passo fixo, em uma rede de pontos homogeneamente distribuídos no espaço de parâmetros. Para cada par de parâmetros, iniciamos a integração numérica utilizando sempre a mesma configuração inicial: $x(0) = y(0) = 1.0$, e $z(t) = 1.0$ para $-\tau \leq t \leq 0$. Para cada solução, analisamos se $x(t)$ se repete no tempo e, em caso afirmativo, contamos o número de máximos locais (picos) por período.

Como ilustrado na Fig. 4.1, representamos os pulsos periódicos utilizando exatamente a mesma metodologia utilizada na construção dos diagramas das Figs. 2.6 e 2.7 no Capítulo 2, e a Fig. 3.2 no Capítulo 3 (ver texto), porém agora utilizando 17 cores, e não 14,

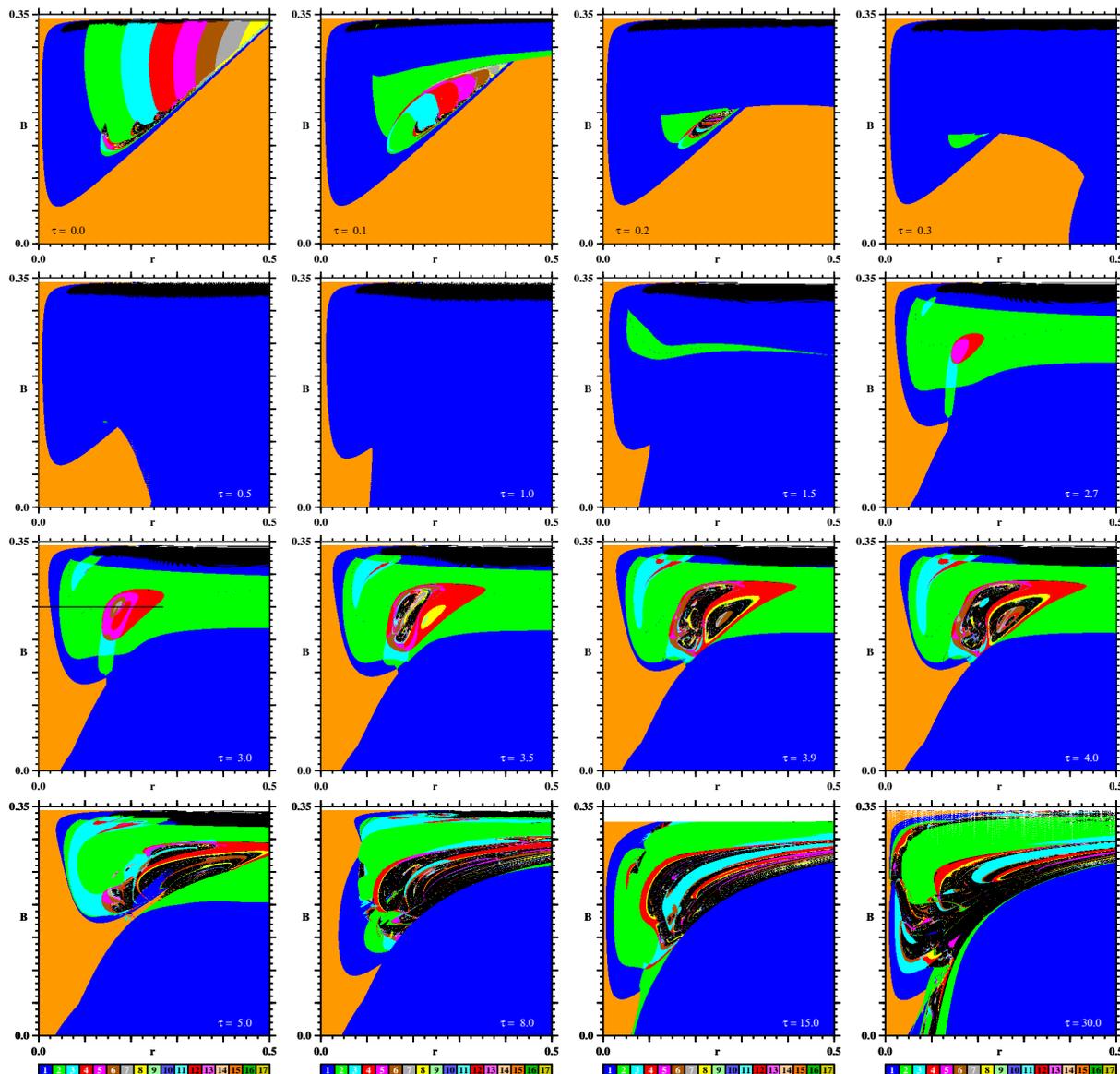


Fig. 4.1: Visão global do espaço de parâmetros de controle $r \times B$ do laser de CO₂, para diferentes valores do tempo de atraso τ . Note que, inicialmente, a fase periódica complexa sofre uma contração até $\tau \approx 0.5$ e permanece dinamicamente invariante até $\tau \approx 1.5$, quando novas ilhas de periodicidade passam a surgir. Fases caóticas com acumulações de *shrimps* são vistas para $\tau \gtrsim 5$.

para representar o número de picos. A Fig. 4.1 apresenta uma seqüência de diagramas de estabilidade, onde a evolução do espaço de parâmetros de controle $r \times B$ é analisada quando o tempo de atraso na realimentação é aumentado desde $\tau = 0$ até $\tau = 30$. Aqui, o tempo é calculado em unidades de $10^{-6}s$. De acordo com Arecchi et al. [57], o regime de atraso pequeno é caracterizado por $\tau \lesssim 1/\beta$. Como estamos fixando a taxa de amortecimento do laço de realimentação em $\beta = 0.5 \times 10^6$, pequenos atrasos são representados por $\tau \lesssim 2$. Sendo assim, o intervalo de valores considerados para o atraso nesse trabalho superam

largamente este limite, de forma que aproximações para pequenos valores de atraso não se aplicam, em geral, aos resultados aqui apresentados.

O caso sem atraso (Fig. 4.1, com $\tau = 0$) mostra uma região aproximadamente triangular caracterizada por auto-pulsações periódicas, rodeada por soluções constantes. Este caso é analisado em detalhes no Capítulo 3. Aumentando o tempo de atraso, vemos que a referida região de soluções oscilatórias com mais de um pico por período se contrai rapidamente até $\tau \approx 0.5$, quando desaparece completamente. A partir daí, o sistema permanece dinamicamente invariante até $\tau \approx 1.5$, quando uma região verde de dois picos por período aparece. Conforme continuamos aumentando o tempo de atraso, vemos que essa região de dois picos cresce e, dentro dela, algumas “ilhas” de soluções com diferentes números de picos começam a aparecer. O aumento de τ leva a um aumento no tamanho destas ilhas e, conforme elas crescem, outras ilhas nascem dentro delas, revelando uma série de cascatas de dobramentos de período e adições de picos, que resultam em uma região de soluções caóticas na região central destas ilhas concêntricas. Aumentando ainda mais o tempo de atraso, estas regiões caóticas crescem e uma acumulação de *shrimps* se revela. Neste ponto, a dinâmica no espaço de parâmetros é extremamente complicada e rica, como pode ser visto nos diagramas de $\tau = 5$ em diante. Para valores do atraso acima de $\tau = 30$, o diagrama $r \times B$ não apresenta nenhuma alteração dinâmica significativa para os valores verificados (até $\tau = 100$).

Um ponto importante a ser frisado aqui é a inatividade dinâmica observada no intervalo $0.5 \lesssim \tau \lesssim 1.0$, que separa dois intervalos onde fases dinâmicas muito ricas são observadas, como descrito acima. As diferenças observadas no comportamento qualitativo do sistema nestes dois intervalos onde a dinâmica é rica e intrincada ($\tau \lesssim 0.5$ e $1.0 \lesssim \tau \lesssim 30$) reforçam a importância da análise numérica apresentada neste trabalho. A imensa maioria dos cálculos analíticos feitos no contexto de equações diferenciais com atraso requerem aproximações de atraso pequeno. Aqui, podemos ver claramente dois tipos bastante distintos de comportamentos, separados pelo período de inatividade dinâmica, um encontrado no regime de atraso pequeno, e outro no regime de atraso longo, fazendo com que qualquer restrição imposta à magnitude do atraso implique em perda de informação importante sobre a dinâmica do sistema.

4.3 Bifurcações por deformação da solução

Vimos na seção anterior que, quando incrementamos o tempo de atraso τ nos diagramas da Fig. 4.1, algumas ilhas com um número específico de picos por período emergem, seja dentro de grandes regiões de periodicidade definida ou mesmo dentro de fases com comportamento caótico. O comportamento dinâmico observado nas evoluções temporais dentro destas ilhas fica mais complexo conforme τ evolui. Para termos uma ideia do que está

acontecendo dentro destas estruturas, analisamos o comportamento da solução quando atravessamos as ilhas concêntricas localizadas dentro da região verde (2 picos) no diagrama com $\tau = 3$, na Fig. 4.1. Um diagrama de bifurcação é calculado ao longo da linha horizontal preta mostrada neste diagrama, atravessando a estrutura em questão. Este diagrama de bifurcação é mostrado no topo da Fig. 4.2. Neste diagrama reconhecemos as já bem conhecidas bifurcações por dobramento de período, assim como o aparecimento e desaparecimento de ramos isolados, caracterizando o fenômeno de adição de picos, descrito em detalhes nos capítulos anteriores [16, 17]. Nas Figs. 4.2(a-h), vemos a evolução temporal da intensidade x para valores significativos de r , associados às linhas verticais mostradas no diagrama de bifurcação. Na Fig. 4.2(a) vemos o pico correspondente ao ramo A no diagrama de bifurcação, assim como a deformação associada a um novo pico, indicada pela seta. Incrementando o valor de r , vemos o nascimento deste novo pico, associado ao ramo B do diagrama. O pico B nasce com amplitude menor do que A, mas o incremento de r faz com que ele cresça mais rapidamente e logo o ultrapasse, como pode ser visto nas Figs. 4.2(b-d). Depois da bifurcação, que ocorre em $r \approx 0.146$, os picos A e B bifurcam em (A,A') e (B,B'), como pode ser visto na Fig. 4.2(e), de forma que o aumento no valor de r faz com que o pico A' (nascido com amplitude menor que a de B) cresça mais rapidamente que B, ultrapassando este em $r = 0.179$, e permanecendo maior até $r = 0.199$, quando o pico B se torna maior novamente. O fato curioso observado aqui é que no intervalo de r onde A' permanece com amplitude maior do que B, o pico A desaparece, voltando a aparecer apenas quando B se torna maior do que A novamente. Este fenômeno fica evidente quando observamos as Figs. 4.2(f-h) e quando acompanhamos a evolução dos ramos B, A' e A no diagrama de bifurcação. Note que o pico A desaparece menor e reaparece maior do que B'.

Adicionalmente à dinâmica observada para picos grandes, descrita em detalhes acima, a Fig. 4.2 também apresenta uma série de picos bem menores, mostrados na parte inferior do diagrama de bifurcação e não rotulados por nenhuma letra. Estes picos podem ser observados nas evoluções temporais das Figs. 4.2(e-g), imediatamente ao lado do pico B', e são descritos com detalhes na Fig. 4.3. No topo desta figura, indicamos com um retângulo verde e magnificamos a região dos ramos associados a estes picos pequenos no diagrama de bifurcação. Inicialmente, nas Figs. 4.3(a) e 4.3(b), mostramos o pico C e a deformação associada com o pico D, e os picos C e D e a deformação associada ao pico E, respectivamente. Nas Figs. 4.3(c) e 4.3(d), os três picos C, D e E são mostrados, e suas amplitudes começam a diminuir. O completo desaparecimento dos picos E e D é mostrado nas Figs. 4.3(e) e 4.3(f), respectivamente. Esta sequência evidencia o efeito do fenômeno de adição de picos se manifestando em uma menor escala no sistema.

Para complementar a informação dada pelas evoluções temporais da intensidade x , utilizamos o mesmo ferramental usado no Capítulo 3 e analisamos como as trajetórias do

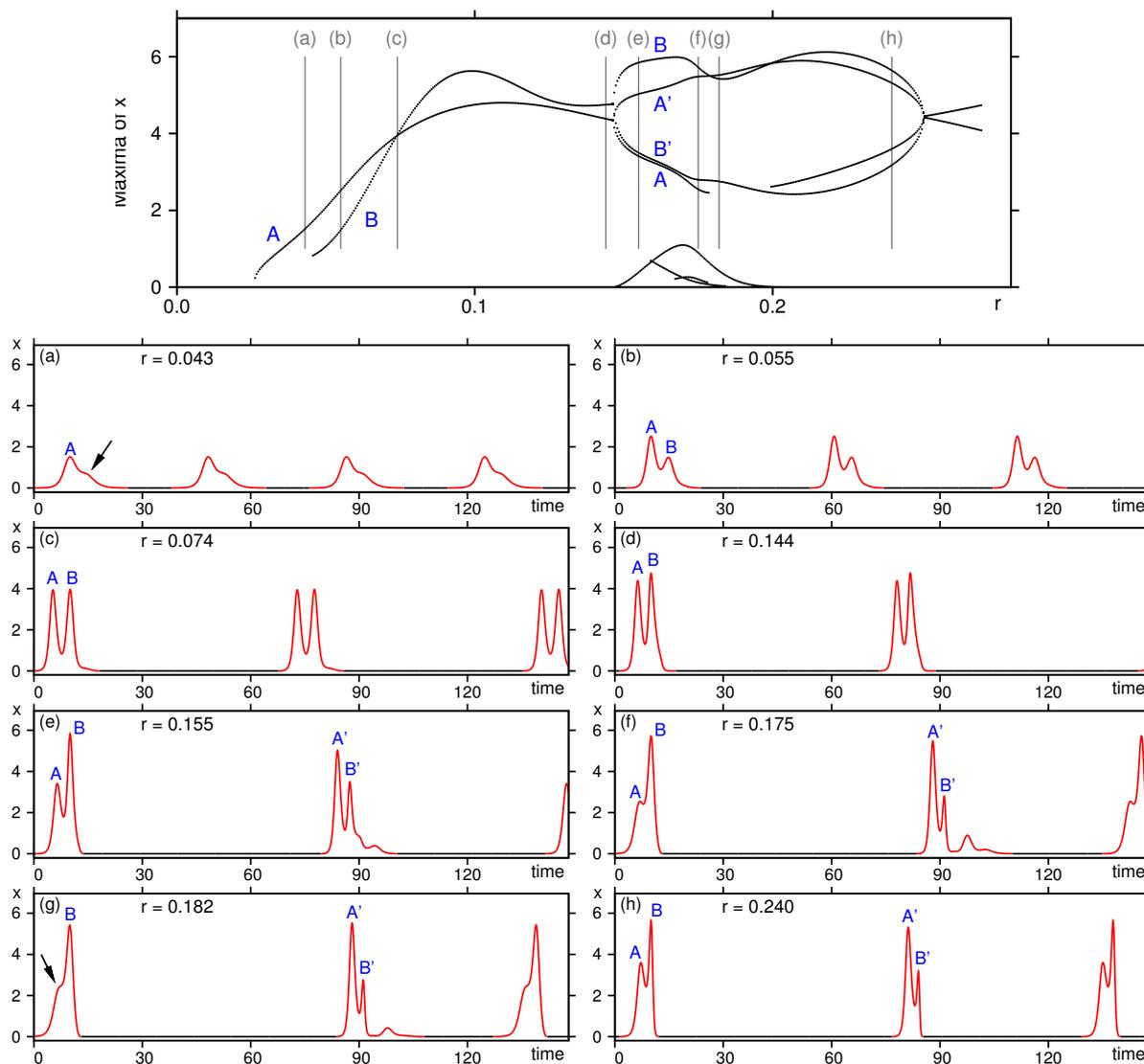


Fig. 4.2: **Topo**: Diagrama de bifurcação com $B = 0.249882$, calculado sobre a linha preta no diagrama com $\tau = 3.0$ da Fig. 4.1. **(a-h)**: Evolução temporal para valores representativos de r , indicados pelas linhas verticais sobre o diagrama de bifurcação. Segmentos em preto indicam amplitude nula ($x < 0.005$).

sistema se comportam no plano $y \times z_\tau$. Diferentemente do que foi feito no Capítulo 3, aqui consideramos z_τ ao invés de z , pois agora, como pode ser visto na Eq. (4.1), a derivada temporal da intensidade depende do valor atrasado da voltagem de realimentação, i. e.,

$$\frac{dx}{dt} = kx(f(y, z_\tau)) = kx(y - 1 - \alpha \sin^2(z_\tau)). \tag{4.4}$$

Na Fig. 4.4 mostramos duas curvas no plano $y \times z_\tau$: a primeira, representada por um arco parabólico cinza, indica os pontos com solução $f(y, z_\tau) = 0$ (*nullcline*). A outra curva, com trechos em preto e em vermelho, indica a trajetória (y, z_τ) da solução (locus)

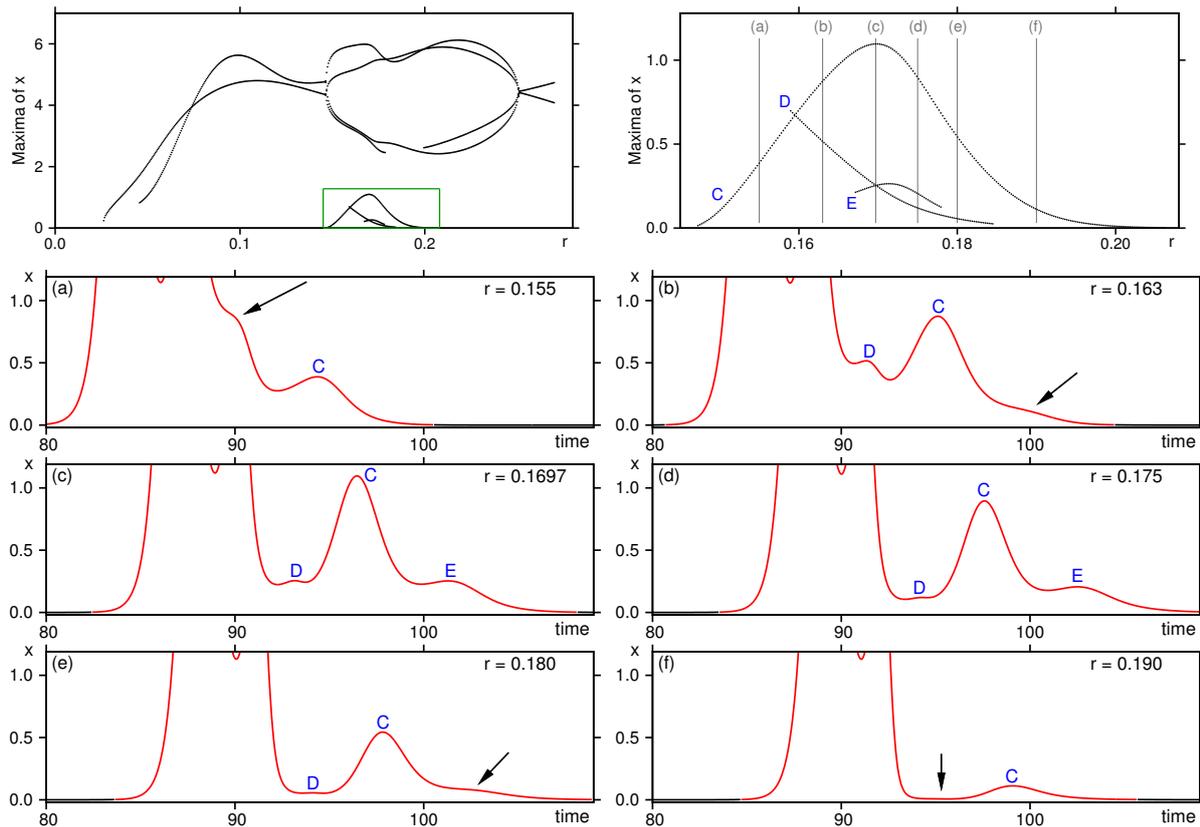


Fig. 4.3: **Topo:** Diagrama de bifurcação da Fig. 4.2 com magnificação da caixa verde, mostrando a dinâmica observada em tal região. **(a-f):** Segmentos da evolução temporal para valores significativos de r , indicados pelas linhas verticais na magnificação do diagrama de bifurcação.

obtida através da integração numérica das Eqs. (4.1)-(4.3), onde os segmentos em preto representam os trechos da trajetória onde $x = 0$, e os segmentos em vermelho representam $x \neq 0$. O fato que caracteriza o nascimento de um novo pico na evolução temporal, e portanto de um novo ramo isolado no diagrama de bifurcação, é a ocorrência de pontos de intersecção entre a *nullcline* e a parte vermelha do locus.

As Figs. 4.4(a-c) mostram as complicadas trajetórias no espaço $y \times z_\tau$, associadas às evoluções temporais apresentadas nas Figs. 4.2(f-h), e as regiões indicadas pelos retângulos verdes estão magnificadas nas Figs. 4.4(d-f). Na Fig. 4.4(d), todas as intersecções associadas a máximos locais estão indicadas por pontos azuis e rotuladas pela letra associada ao respectivo pico. Quando aumentamos o parâmetro de bifurcação para $r = 0.182$ vemos, na Fig. 4.4(e), que a trajetória é modificada de forma que as intersecções relacionadas aos picos A e E desaparecem, nos locais indicados pelas setas. Aumentando ainda mais o parâmetro r , a intersecção associada ao ponto A retorna, como mostrado na Fig. 4.4(f), e um novo tipo de comportamento é observado no espaço de fase, fazendo com que o pico C desapareça. Em todas as análises de espaço de fase que apresentamos neste capítulo e nos

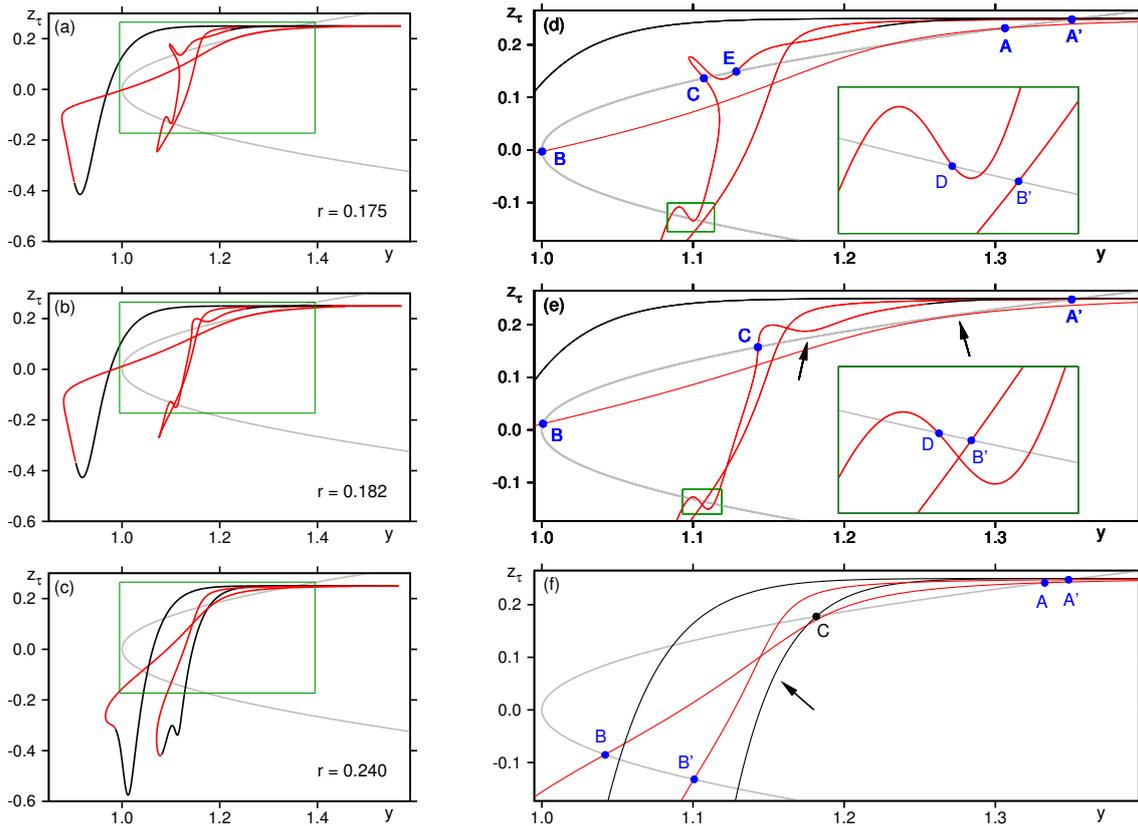


Fig. 4.4: **(a-c)**: Curvas em vermelho/preto indicam a trajetória em (y, z_τ) obtida via integração das Eqs. (4.1)-(4.3), e o arco cinza caracteriza pontos onde $f(y, z_\tau) = 0$. Intersecções indicam extremos de x (veja o texto). **(d-f)**: Magnificações dos retângulos verdes de (a-c). Intersecções associadas a máximos locais são indicadas em azul.

anteriores, o desaparecimento de um pico sempre esteve associado a uma deformação da trajetória de tal forma que a intersecção desta trajetória com a *nullcline* deixe de existir. Porém, olhando para a Eq. (4.4), podemos ver que existe outra maneira de “desfazer” um pico: a solução pode se deformar de tal forma que x simplesmente se anule naquele segmento. Neste caso, a intersecção entre a trajetória e a *nullcline* ainda existe, mas isso deixa de ser importante, pois $x = 0$ naquele segmento. É exatamente isso que acontece com o pico C! O aumento de r deforma o perfil da evolução temporal de tal forma que o pico some e a solução se torna nula naquele instante de tempo, não levando a um desaparecimento na intersecção no espaço de fase, mas em uma troca de cor no segmento da curva onde a intersecção ocorre (de vermelho (intensidade não nula) para preto (intensidade nula)), como pode ser observado no segmento da trajetória indicado pela seta na Fig. 4.4(f). A intersecção relacionada ao pico C ainda está lá, mas a intensidade é zero naquele segmento.

4.4 Sumário

Neste capítulo apresentamos diagramas de estabilidade detalhados, mostrando como o tempo de atraso altera o plano $r \times B$ no espaço de parâmetros de controle. A fase de oscilações periódicas observada em $\tau = 0$ apresentou uma contração contínua com o aumento do atraso até $\tau \approx 0.5$, quando desaparece completamente. O sistema permanece dinamicamente invariante até $\tau \approx 1.5$. O incremento de τ a partir daí revela o aparecimento de ilhas de periodicidade no espaço de parâmetros. O comportamento da solução através destas ilhas foi estudado em detalhes e mostramos que estas ilhas resultam de cascatas de dobramento de período e adição de picos.

Capítulo 5

LASERS DE SEMICONDUTOR COM REALIMENTAÇÃO ATRASADA

Os primeiros lasers de semicondutor, também conhecidos como lasers de diodo, tiveram origem no início da década de 60, e desde então tem recebido enorme e crescente atenção tanto do ponto de vista científico quanto industrial [61, 62]. Esse tipo de laser se diferencia dos lasers de gás, de corante e de estado sólido [63] por terem seu meio de ganho composto por um diodo semicondutor, formando uma junção p-n. Em geral, neste tipo de laser, o bombeamento é feito por uma corrente elétrica aplicada na região onde os materiais dopados p e n se encontram [64].

Dentre as vantagens apresentadas pelos lasers de semicondutor, comparados com outros tipos de laser, podemos citar suas dimensões, já que este tipo de dispositivo geralmente apresenta tamanhos muito pequenos ($\sim 250\mu\text{m}$ para *edge-emitting semiconductor lasers* e $\sim 1\mu\text{m}$ para *vertical cavity surface emitting laser diodes*) comparados com outros lasers (algumas dezenas de centímetros para alguns lasers de gás, por exemplo) [65]. Além disso, lasers de semicondutor são simples de serem construídos e apresentam custos de produção relativamente baixos. Para se ter uma ideia da importância comercial deste tipo de dispositivo, no ano de 2011 as vendas de lasers em todo mundo representaram ~ 7.46 bilhões de dólares, sendo que a metade deste valor correspondeu apenas a vendas de lasers de diodo [66]. Dentre as áreas de atuação onde estes dispositivos são frequentemente utilizados podemos citar os setores de comunicações, processamento de materiais, médica e estética, científica, militar, entre outras.

Outra característica muito significativa dos lasers de semicondutor é sua relativa sensibilidade a perturbações externas, especialmente devido ao alto ganho por unidade de comprimento e a baixa reflectividade na face de saída do laser [65, 67]. Uma das principais fontes de instabilidade neste tipo de laser é a realimentação externa resultante de reflexões que acabam por reinjetar parte da luz emitida de volta para o interior da cavidade do laser. Do ponto de vista da engenharia, este tipo de perturbação é geralmente evitada através de diferentes técnicas de estabilização ou isolamento da cavidade. Por outro lado, do ponto de vista físico, a sensibilidade deste sistema revela uma enorme gama de comportamentos dinâmicos muito ricos. Se, adicionalmente, considerarmos o fato de a realimentação por

reflexão externa não ser instantânea, mas apresentar um tempo de atraso associado ao tempo de viagem da luz fora da cavidade, a complexidade deste sistema cresce enormemente, e fenômenos ainda mais variados são observados na dinâmica do laser, que vão de oscilações periódicas simples a complexas fases caóticas e multiestabilidade [18].

A importância prática e enorme riqueza dinâmica dos lasers de semicondutor com realimentação atrasada, e o pequeno número de trabalhos encontrados na literatura que apresentam uma análise teórica-computacional abrangente do espaço de parâmetros associados a este tipo de sistema, serviram como forte motivação para o estudo que realizamos neste campo e que será apresentado a seguir.

5.1 O modelo de Lang-Kobayashi

Com o intuito de caracterizar teoricamente a dinâmica observada em lasers de semicondutor sujeitos a realimentação óptica externa, ou seja, com o retorno de uma parte da luz emitida pelo laser através de uma reflexão externa à cavidade do laser, em 1980, R. Lang e K. Kobayashi propuseram um conjunto de equações que descrevem as evoluções temporais do campo elétrico dentro da cavidade do laser $E(t)$, e da densidade de portadores na cavidade $N(t)$ [68]. Este modelo visa simular o comportamento do campo elétrico dentro da cavidade do laser, na posição correspondente a $z = 0$ na representação esquemática apresentada na Fig. 5.1. As equações propostas neste modelo, reescritas aqui na sua versão adimensionalizada, são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= (1 + i\alpha)N(t)E(t) + \eta E(t - \tau)e^{-i\omega\tau}, \\ T \frac{dN(t)}{dt} &= P - N(t) - (1 + 2N(t)) |E(t)|^2. \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde α representa o acoplamento entre flutuações na amplitude e na fase do campo elétrico, η é o parâmetro associado com a quantidade de luz que será reinjetada na cavidade, $\omega\tau$ é a fase da realimentação do laser, P é o parâmetro associado a corrente de bombeamento, e T é a razão entre o tempo de vida dos portadores e o tempo de vida dos fótons dentro da cavidade. As deduções, hipóteses e os argumentos que levam à construção deste conjunto de equações de taxa podem ser encontrados nas Refs. [65, 69, 70, 71, 72, 73, 74].

O modelo de Lang-Kobayashi (LK), apresentado no formato da Eq. (5.1), tem sido o modelo paradigmático para o estudo de lasers de semicondutor com realimentação atrasada [4, 5, 30]. Para escolhas específicas de parâmetros e regimes de operação do laser, este modelo mostrou grande concordância com resultados obtidos experimentalmente [71, 72, 75]. Apesar do grande número de trabalhos presentes na literatura que utilizam o modelo de LK para simular efeitos de realimentação óptica com atraso, apenas alguns deles consideram o efeito da variação dos parâmetros do modelo na dinâmica do

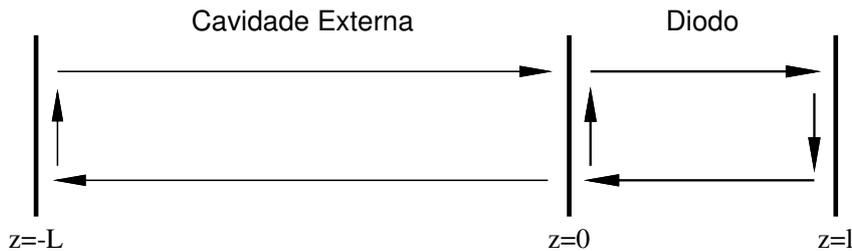


Fig. 5.1: Representação esquemática da cavidade do laser de diodo, de comprimento l , e da cavidade externa, de comprimento L . As barras verticais representam os espelhos e as setas indicam a propagação do campo.

sistema. Comportamentos dinâmicos muito interessantes foram encontrados utilizando-se o modelo de LK, como os Pacotes de Pulsos Regulares (RPPs, *Regular Pulse Packages*), onde a intensidade do laser apresenta uma solução periódica, composta pela repetição de pacotes de pulsos com amplitude decrescente [71], e as Flutuações de Baixa Frequência (LFFs, *Low Frequency Fluctuations*), onde a intensidade do laser apresenta uma pulsação caótica onde o valor médio da intensidade sofre quedas bruscas e aperiódicas [76, 77]. Apesar deste tipo de fenômeno ser bem conhecido para alguns valores de parâmetros do laser, pouco se sabe sobre a forma e o alcance das regiões no espaço de parâmetros onde este tipo de comportamento pode ser observado. Sciamanna et al. [78] mostraram como a forma das RPPs é alterada conforme o tempo de atraso τ é incrementado, mantendo-se os outros parâmetros fixos. Heil et al. [75] apresentaram alguns diagramas de bifurcação, utilizando η e $\omega\tau$ como parâmetros de controle, a fim de elucidar que tipo de bifurcações levam aos RPPs (em seu artigo, os autores consideram a fase $\omega\tau = C_p$, um parâmetro independente de τ). Eles também observaram que um aumento na corrente de bombeamento P leva a um aumento quase linear no período dos RPPs, dado o conjunto de parâmetros fixos tomado por eles. Tabaka et al. [79] analisaram como a taxa de realimentação η e o tempo de atraso τ influenciam no aparecimento dos RPPs, apresentando um diagrama $\tau \times \eta$ mostrando as regiões onde estas soluções são observadas. Mais recentemente, Behnia et al. [80] apresentaram uma série de diagramas de bifurcação em η , $\omega\tau$ e P , descrevendo o comportamento da intensidade quando cada um destes parâmetros é variado individualmente.

Um ponto comum observado nos trabalhos supracitados é o fato de que para todos os parâmetros, com a exceção de P , a dinâmica do laser depende fortemente da criação e destruição dos chamados Modos de Cavidade Externa (ECMs, *External Cavity Modes*), uma solução específica da Eq. (5.1) que será discutida em detalhes na próxima seção. Como será mostrado a seguir, diferentemente do que acontece quando variamos os outros parâmetros do laser, variações na corrente de bombeamento P não alteram o número de ECMs, fazendo deste um parâmetro especial.

A condição especial da corrente P frente aos ECMs e a riqueza dinâmica fornecida pela dimensionalidade infinita associada ao tempo de atraso τ , além de sua fácil acessibilidade experimental, motivam o estudo e a caracterização das fases de estabilidade e multiestabilidade do laser, sob a variação conjunta destes parâmetros. Diferentemente do que é usualmente apresentado em trabalhos nesta área, onde a variação de parâmetros é restrita a intervalos específicos, neste trabalho apresentamos diagramas de estabilidade detalhados, fornecendo informações com alta resolução e num vasto intervalo do espaço de parâmetros de controle $\tau \times P$. Desta forma, descobrimos intrincadas distribuições dos diferentes regimes de operação do laser e fases de estabilidade bastante complexas ao longo do espaço de parâmetros analisado. O cálculo de diagramas de estabilidade para diferentes configurações iniciais também revelou alguns detalhes sobre a existência, e relativa abundância, de multiestabilidade no sistema.

5.2 Modos de cavidade externa

Dentre as diferentes possíveis soluções para a Eq. (5.1), há um conjunto específico onde o laser apresenta uma solução estacionária, operando em um regime constante (CW, *constant wave*). Neste caso, as expressões para o número de portadores $N(t)$ e para a função complexa referente ao campo elétrico $E(t) = A(t)e^{i\varphi(t)}$ são dadas por

$$E(t) = A_s e^{i\omega_s t}, \quad N(t) = N_s, \quad (5.2)$$

onde A_s , ω_s e N_s são constantes. Para obter os valores destas constantes, inserimos (5.2) em (5.1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_s e^{i\omega_s t}) &= (1 + i\alpha)N_s A_s e^{i\omega_s t} + \eta A_s e^{i\omega_s(t-\tau)} e^{-i\omega\tau}, \\ T \frac{dN_s}{dt} &= P - N_s - (1 + 2N_s) A_s^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} i\omega_s &= (1 + i\alpha)N_s + \eta(\cos(\omega_s + \omega)\tau - i \sin(\omega_s + \omega)\tau), \\ 0 &= P - N_s - (1 + 2N_s) A_s^2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

o que nos leva ao conjunto de três equações

$$N_s = -\eta \cos((\omega_s + \omega)\tau), \quad (5.5)$$

$$N_s = \frac{\omega_s}{\alpha} + \frac{\eta}{\alpha} \sin((\omega_s + \omega)\tau), \quad (5.6)$$

$$A_s = \sqrt{\frac{P - N_s}{2N_s + 1}}. \quad (5.7)$$

Das equações (5.5) e (5.6), obtemos a igualdade

$$\omega_s = -\eta(\alpha \cos((\omega_s + \omega)\tau) + \sin((\omega_s + \omega)\tau)). \quad (5.8)$$

Esta equação é transcendental, mas os valores de ω_s podem ser obtidos através de recursos gráficos. Na Fig. 5.2, os dois lados da Eq. (5.8) são plotados, de modo que as intersecções das duas curvas determinam os valores de ω_s que são soluções desta equação. Se isolarmos o seno e o cosseno nas expressões (5.5) e (5.6), respectivamente, elevarmos ao quadrado os dois lados das igualdades, somarmos as duas equações e multiplicarmos os dois lados da igualdade resultante por τ^2 , obtemos a expressão

$$(N_s\tau)^2 + (N_s\alpha\tau - \omega_s\tau)^2 = (\eta\tau)^2. \quad (5.9)$$

Esta expressão corresponde a equação da elipse observada quando projetamos as soluções da Eq. (5.8) no espaço $\Delta\phi \times N$, onde $\Delta\phi(t) = \varphi(t) - \varphi(t - \tau)$. A elipse resultante pode ser vista na Fig. 5.2 (note que, para os pontos fixos, $\Delta\phi_s = \omega_s t - \omega_s(t - \tau) = \omega_s\tau$).

As soluções definidas pelos pontos $(N_s, \Delta\phi_s, A_s)$ são os chamados Modos de Cavidade Externa (ECMs). Conforme variamos os parâmetros de controle presentes na Eq. (5.8), os ECMs são criados em pares e, através de uma análise de estabilidade linear em torno destas soluções [81], pode-se mostrar que os pontos localizados na parte superior da elipse definida pela Eq. (5.9) (modos), nascem como nós estáveis e perdem sua estabilidade através de uma bifurcação de Hopf, conforme algum dos parâmetros de controle é incrementado. Já os pontos localizados na parte inferior da elipse (antimodos) são pontos de sela. O ponto preto na extremidade inferior esquerda da elipse indica o modo de ganho máximo (MGM, *Maximum Gain Mode*), que representa o modo de cavidade com maior amplitude associada [82].

Os ECMs já provaram formar a espinha dorsal de toda dinâmica observada em lasers de semicondutor [81, 83, 84]. Todas as soluções observadas neste sistema revelam trajetórias no espaço $N \times \Delta\phi \times A$ que percorrem a vizinhança dos pontos $(N_s, \Delta\phi_s, A_s)$. Além disso, as transições entre os mais diversos regimes de operação observados no laser se mostraram ligadas a alterações no número, na estabilidade e na localização destes ECMs no espaço de fase supracitado. Por estas razões, as propriedades dos ECMs se mostram centrais

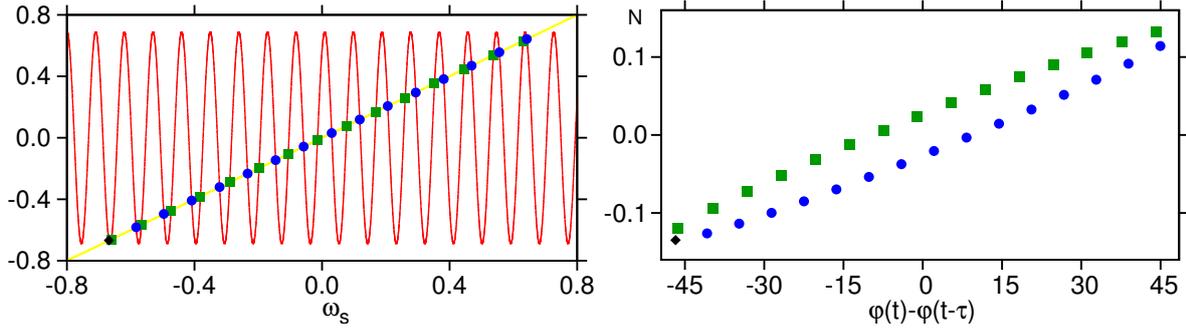


Fig. 5.2: **Esquerda:** Plot do lado direito (amarelo) e do lado esquerdo (vermelho) da Eq. (5.8). As intersecções das duas curvas, indicadas pelos pontos azuis, verdes e preto mostram os valores de ω_s que são solução desta equação. **Direita:** Disposição elipsoidal dos modos (círculos azuis, e losango preto, referente ao modo de máximo ganho) e dos antimodos (quadrados verdes), no espaço de fase $\varphi(t) - \varphi(t - \tau) \times N$. Valores de parâmetros retirados da Ref. [75].

para a caracterização da dinâmica dos lasers de semicondutor.

Como pode ser visto na Eq. (5.8), a variação dos parâmetros α , η , ω ou τ , altera o número e/ou a localização dos ECMs no plano $\Delta\phi \times N$. Como mencionado anteriormente, trabalhos anteriores mostraram que as propriedades dinâmicas do modelo de laser de LK são altamente dependentes da configuração dos ECMs, e a variação destes parâmetros revelou grande similaridade na estrutura dos seus respectivos diagramas de bifurcação, devido ao aparecimento e desaparecimento destes novos ECMs [75, 79]. Por outro lado, a variação da corrente de bombeamento P não tem nenhum efeito na disposição dos ECMs no plano $\Delta\phi \times N$ (apenas na amplitude do laser) e nenhum ECM é criado ou destruído. Assim, apesar de terem sido estudados em alguns trabalhos [75, 79, 80], os reais efeitos do aumento de P no sistema ainda são desconhecidos. Essa é uma questão que abordaremos a partir de agora neste capítulo.

5.3 Regimes complexos

Para analisar como o atraso τ e a corrente de bombeamento P afetam a dinâmica do sistema, resolvemos numericamente as Eqs. (5.1) usando um algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem de passo fixo. Seguindo Heil et al. [71], fixamos os seguintes valores realísticos para os parâmetros do laser:

$$\begin{aligned} T &= 1710, & \alpha &= 5, \\ \omega &= -1.962 \times 10^{-2}, & \eta &= 0.135. \end{aligned} \quad (5.10)$$

A importante escolha da história inicial do laser, em geral, não é mencionada na literatura, tornando difícil qualquer tipo de comparação. Aqui, escolhemos arbitrariamente a configuração inicial padrão como tendo $N(0) = 1$, $E_r(t) = E_i(t) = 1$ para $t \in [-\tau, 0]$, onde $E(t) = E_r(t) + iE_i(t)$, a menos que alguma configuração diferente seja explicitada.

Iniciamos por analisar as influências da variação de τ e P individualmente, usando diagramas de bifurcação padrões. A Fig. 5.3A mostra os máximos locais da intensidade do laser como função de τ , enquanto as Figs. 5.3B-5.3D mostram como os máximos da intensidade do laser variam como função de P . As linhas verticais vistas nestas figuras marcam valores representativos dos parâmetros de bifurcação, usados para calcular a evolução temporal e a trajetória no espaço de fase (no entorno dos respectivos ECMs), mostrado nas Figs. 5.4, 5.5 e 5.6.

O impacto do atraso temporal na intensidade do laser quando a corrente de bombeamento é mantida fixa em $P = 0.6$ é mostrado na Fig. 5.3A. Neste caso, vemos o aparecimento de uma série de diferentes regimes no laser. Da esquerda para a direita, vemos: CW (alaranjado), oscilações de um pico (azul), quasiperiodicidade (vermelho), oscilações não periódicas (verde escuro), RPPs (verde claro), e novamente saída CW (alaranjado). Esta sequência está fortemente correlacionada com a mudança no número e na estabilidade dos ECMs, como será mostrado em detalhes a seguir, na Fig. 5.4.

Neste ponto, a pergunta que naturalmente surge é o que acontece quando a corrente de bombeamento P também é variada? A Eq. (5.8) não depende de P , desta forma, diferentemente do que acontece com os outros parâmetros (τ , η , α , ω), a corrente não altera nem o número de ECMs, nem suas coordenadas ($\Delta\phi_s, N_s$) no espaço de fase, mas apenas a sua amplitude A_s (veja a Eq. (5.7)). Para entender os efeitos da variação da corrente no sistema, calculamos diagramas de bifurcação tendo P como parâmetro de bifurcação, para alguns valores representativos de τ , como pode ser visto nas Figs. 5.3B e 5.3C. O diagrama de bifurcação da Fig. 5.3B foi calculado para um tempo de atraso fixo $\tau = 62$. Neste caso, o sistema inicia em um regime quasiperiódico, mostrado em vermelho no lado esquerdo da figura, passando a seguir por regimes de aperiodicidade (verde escuro), RPPs (verde claro), e soluções caóticas (violeta). As soluções explícitas de cada um destes regimes são mostradas na Fig. 5.5 e descritas em detalhes na sequência.

Aumentando o tempo de atraso para $\tau = 67$, vemos no diagrama de bifurcação da Fig. 5.3C que o laser apresenta um comportamento que é aparentemente uma combinação das transições observadas nas Figs. 5.3A e 5.3B. Assim como na Fig. 5.3A, o sistema inicia, a esquerda, com uma saída constante (alaranjado) e, conforme incrementamos o valor de P , passa por uma bifurcação de Hopf, que da origem a uma oscilação com um pico por período (azul). Aumentando ainda mais a corrente, em $P \simeq 1.09$, um intervalo de RPPs aparece (verde claro), seguido de um intervalo de soluções aperiódicas (violeta), exatamente como na Fig. 5.3B. Se repetirmos o cálculo da Fig. 5.3C ($\tau = 67$) usando uma

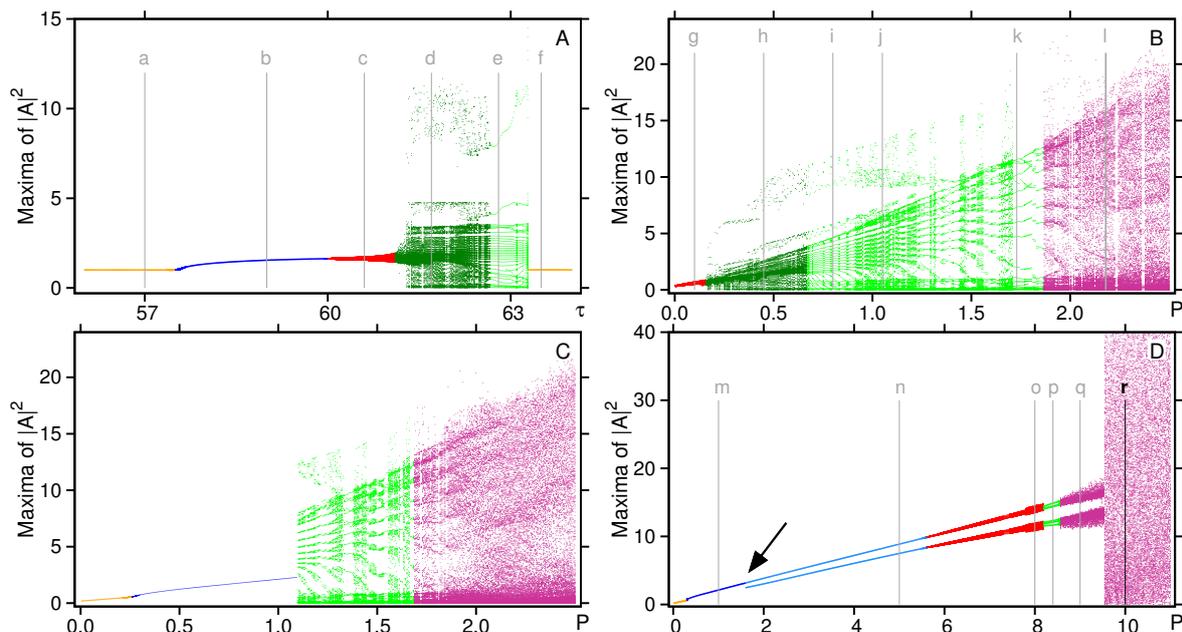


Fig. 5.3: Diagramas de bifurcação da intensidade do laser, comparando (A) o efeito da variação do parâmetro τ para $P = 0.6$; e o efeito da variação de P quando (B) $\tau = 62$; (C) $\tau = 67$; (D) $\tau = 67$, mas usando uma forma de definir a configuração inicial diferente daquela usada em A, B e C, como especificado no texto. As diferentes cores representam os diferentes comportamentos do laser: alaranjado denota CW, azul corresponde a oscilações regulares, vermelho a oscilações quasiperiódicas, verde escuro indica soluções aperiódicas, com estreitas janelas de RPPs, verde claro indica RPPs, com estreitas janelas de soluções aperiódicas, e violeta indica apenas soluções aperiódicas. A seta indica o aparecimento de um novo ramo, nascido por deformação *contínua* da intensidade do laser (veja o texto).

configuração inicial diferente, o sistema revela uma sequência consideravelmente diferente de soluções, devido a multiestabilidade. O diagrama da Fig. 5.3D foi construído usando a configuração inicial $N(0) = 1$, $E_r(t) = E_i(t) = 1$ para $t \in [-\tau, 0]$, para $P = 0$ e, ao incrementar o parâmetro de bifurcação (a corrente P , neste caso), a solução obtida com o valor do parâmetro anterior é utilizada como a nova configuração inicial. Este procedimento é comumente chamado de “seguindo o atrator” (“following the attractor”).

Para entender como ocorrem as transições na Fig. 5.3 e o que está acontecendo com o sistema para cada um dos regimes de operação do laser descritos acima, calculamos a evolução temporal e a trajetória destas soluções no espaço $\Delta\phi \times N \times A$, considerando alguns valores representativos dos parâmetros, indicados pelas linhas verticais nos diagramas de bifurcação. A descrição detalhada das soluções indicadas por estas linhas nas Figs. 5.3A, 5.3B e 5.3D, é mostrada nas Figs. 5.4, 5.5 e 5.6, respectivamente.

Agora, consideremos em detalhes a variação de τ , mostrada na Fig. 5.3A. As soluções correspondentes aos parâmetros indicados pelas linhas verticais (a-f) são apresentadas na Fig. 5.4. Como pode ser visto na Fig. 5.4(a1), inicialmente o laser apresenta uma

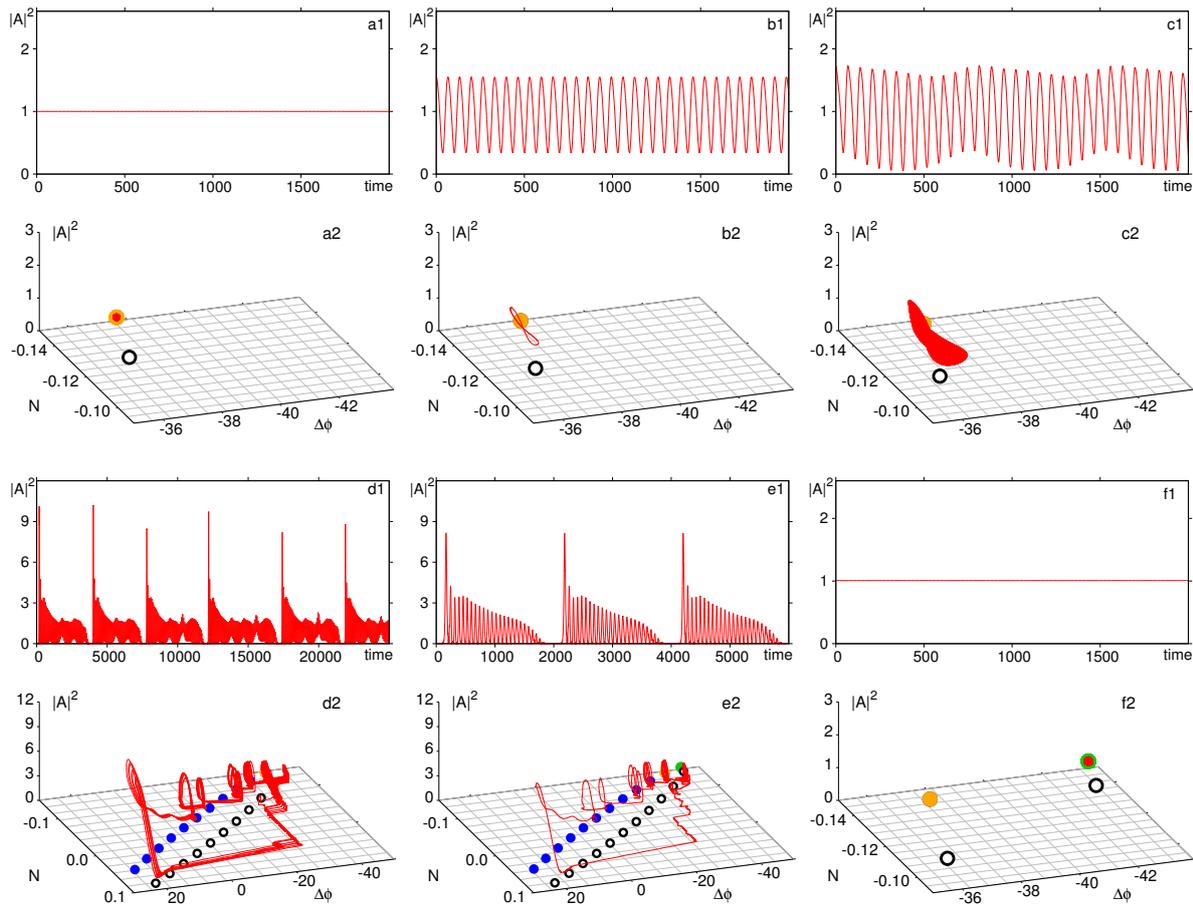


Fig. 5.4: Evolução temporal e trajetória no espaço de fase para seis valores representativos do atraso τ , indicados pelas linhas verticais no diagrama de bifurcação da Fig. 5.3A. Os ECMs são indicados como pontos azuis e círculos pretos, que representam modos e anti-modos, respectivamente. O ponto amarelo/verde corresponde ao MGM (veja o texto). Aqui, $P = 0.6$ e (a) $\tau = 57$, (b) $\tau = 59$, (c) $\tau = 60.6$, (d) $\tau = 61.7$, (e) $\tau = 62.8$, (f) $\tau = 63.5$.

saída constante indicada em alaranjado no lado esquerdo do diagrama de bifurcação da Fig. 5.3A. Neste intervalo de τ o laser opera no MGM, indicado por um ponto amarelo na Fig. 5.4(a2). Quando incrementamos o atraso, o laser sofre uma bifurcação de Hopf e a solução passa a ser uma oscilação periódica (Fig. 5.4(b1)), mostrada em azul na Fig. 5.3A. No espaço de fase, essa trajetória forma um ciclo fechado no entorno do MGM, mostrado na Fig. 5.4(b2). Aumentando τ , o intervalo mostrado em vermelho indica que a solução se tornou quasiperiódica através de uma bifurcação de toro (veja as Figs. 5.4(c1) e 5.4(c2)). Após isso, as soluções quasiperiódicas parecem começar a desestabilizar-se, e o tamanho das trajetórias no espaço de fase cresce rapidamente. Este processo caracteriza o aparecimento dos RPPs [71]. Primeiramente surge uma região composta principalmente por soluções não periódicas, mas com estreitas janelas de RPPs. As soluções não periódicas vistas aqui, apesar da irregularidade e falta de período definido, são bastante parecidas

com os RPPs, como podemos ver na comparação das Figs. 5.4(d) e 5.4(e). Na região verde claro da Fig. 5.3A, encontramos o contrário: uma larga região de RPPs, entremeada por faixas estreitas de soluções não periódicas. Uma típica solução do tipo RPP é mostrada nas Figs. 5.4(e1) e 5.4(e2). Note que o período dos RPPs nas regiões indicadas em verde claro é menor do que o correspondente as soluções na região verde escuro. Isso pode ser visto na comparação das evoluções temporais mostradas nas Figs. 5.4(e1) e 5.4(d1). Apesar da solução apresentada na Fig. 5.4(d1) não ser periódica, podemos ver que os pacotes de pulsos são maiores no tempo do que as RPPs da Fig. 5.4(e1).

Conforme o tempo de atraso τ aumenta, novos ECMs nascem e um novo MGM surge em $\tau = 62.63$. Este novo MGM é mostrado como um ponto verde nas Figs. 5.4(e2) e 5.4(f2) (o MGM antigo, que agora é um ECM, é mantido em amarelo por um melhor entendimento da figura). O que podemos ver ao aumentar ainda mais o atraso é que, em algum ponto depois do surgimento do novo MGM, neste caso em $\tau = 63.28$, o laser passa a operar neste novo MGM (Figs. 5.4(f1) e 5.4(f2)), e a sequência de transições descrita acima inicia novamente. A sequência descrita aqui, sob a variação de τ , é muito similar à sequência obtida em outros artigos com a variação de η e $C_p = \omega\tau$ (frequentemente aproximado como sendo um parâmetro independente de τ) [71, 75, 79], indicando que o que controla a dinâmica aqui é, de fato, o aparecimento e mudança na estabilidade dos novos ECMs, pois todos estes parâmetros influenciam na criação de novos ECMs (veja a Eq. (5.8)).

As evoluções temporais e no espaço de fase, relacionadas aos valores de P indicados pelas linhas verticais (g-1) na Fig. 5.3B, são mostrados na Fig. 5.5. Para pequenos valores de P , o sistema apresenta soluções quasiperiódicas (Fig. 5.5(g1)), oscilando entre o MGM, mostrado em amarelo, e o ECM mais próximo dele, como pode ser visto na Fig. 5.5(g2). Aumentando a corrente, encontramos um intervalo de soluções não periódicas similares a RPPs, entremeado por estreitas janelas de RPPs, mostrado em verde escuro na Fig. 5.3B. Uma solução representativa deste regime é mostrada nas Figs. 5.5(h1) e 5.5(h2). Comparando esta solução com aquela mostrada na Fig. 5.4(d), representando o intervalo verde escuro da Fig. 5.3A, vemos que o mesmo tipo de regime de operação do laser é obtido, porém com um valor menor da corrente (compare os valores dos parâmetros nas legendas das figuras). Para valores maiores de P encontramos um intervalo rico em RPPs, correspondente a região verde claro na Fig. 5.3B. Neste ponto, encontramos RPPs “clássicas”, mostradas nas Figs. 5.5(i1) e 5.5(i2), onde os pacotes são compostos por um pulso grande, seguido de pulsos com amplitude decrescente, exatamente como observado na Fig. 5.4(e). Nesta região também encontramos algumas janelas estreitas de soluções não periódicas “quasi-RPPs”. Este tipo de solução é mostrada nas Figs. 5.5(j1) e 5.5(j2). Note que as soluções “quasi-RPPs” observadas aqui, nas janelas de não-periodicidade localizadas dentro da região marcada em verde claro da Fig. 5.3B, são levemente diferentes daquelas

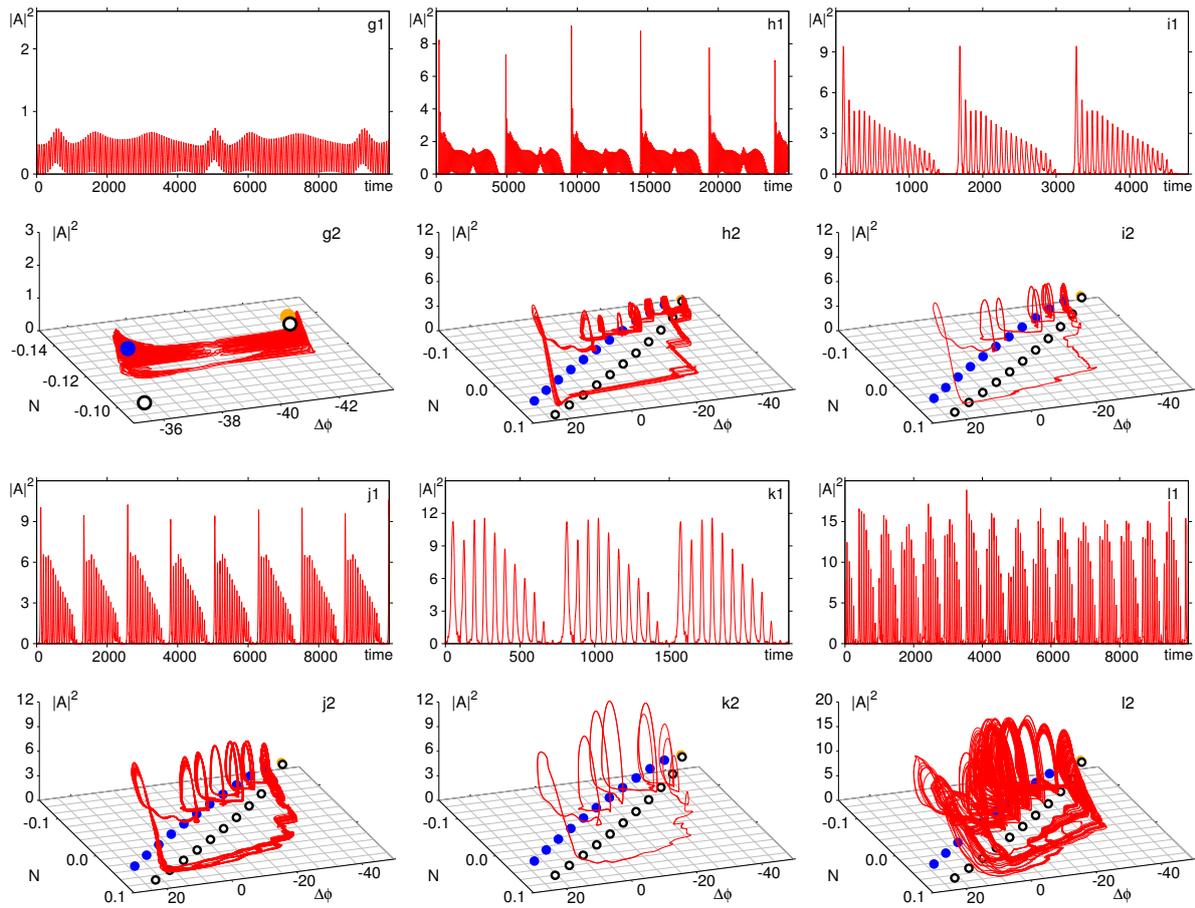


Fig. 5.5: Evolução temporal e trajetória no espaço de fase para seis valores representativos da corrente de bombeamento P , indicados pelas linhas verticais na Fig. 5.3B. ECMs são indicados por pontos azuis (modos), e círculos pretos (antimodos), e o ponto amarelo corresponde ao MGM. Aqui, $\tau = 62$ e (g) $P = 0.1$, (h) $P = 0.45$, (i) $P = 0.8$, (j) $P = 1.05$, (k) $P = 1.73$, (l) $P = 2.18$.

mostradas na Fig. 5.5(h), correspondente a região verde escuro. Aqui o primeiro pulso do pacote é maior do que os que o seguem, mas não tão maior quanto visto na Fig. 5.5(h1), e a duração temporal dos pacotes aqui é menor. Esse comportamento parece ser uma propriedade do aumento da corrente, pois se aumentamos P ainda mais, os RPPs observados (Figs. 5.5(k1) e 5.5(k2)) tem sua forma modificada, quando comparados aqueles vistos na Fig. 5.5(i), de modo que o primeiro pulso de cada pacote reduz consideravelmente sua amplitude comparado com os pulsos que vem a seguir, enquanto que o período da solução fica menor. Um efeito similar foi observado por Sciamanna et al. [78]. Finalmente, na Fig. 5.5(l) os pacotes são aperiódicos e apresentam inicialmente um aumento e depois um decréscimo na intensidade, de pulso para pulso. É importante enfatizar que, diferente da situação onde o atraso τ é variado, o incremento da corrente de bombeamento P aumenta *continuamente* a amplitude média dos pulsos do laser.

As evoluções temporais e no espaço de fase para pontos representativos ao longo da

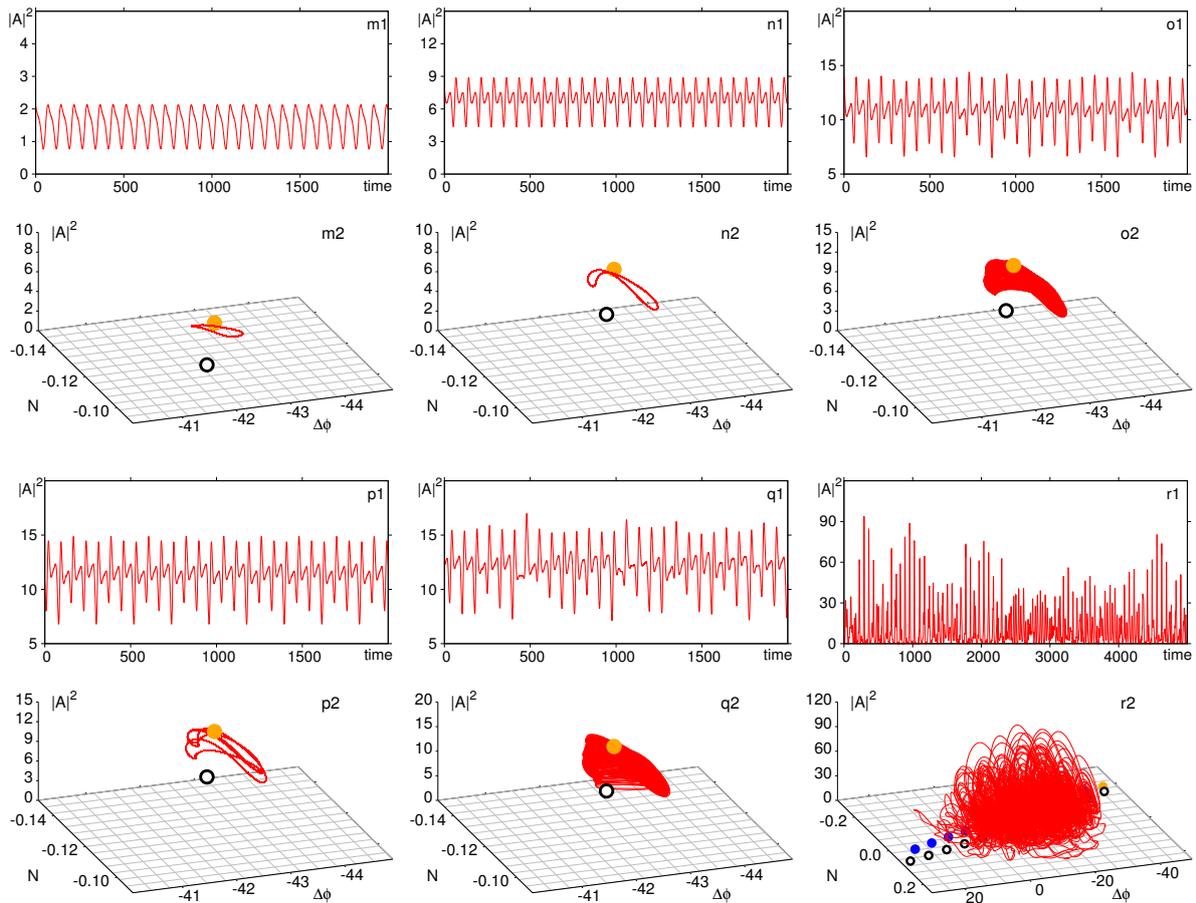


Fig. 5.6: Evolução temporal e trajetória no espaço de fase para seis valores representativos da corrente de bombeamento P , indicadas por linhas verticais na Fig. 5.3D. ECMs são indicados por pontos azuis (modos) e círculos pretos (antimodos), e o ponto amarelo corresponde ao MGM. Aqui $\tau = 67$ e (m) $P = 1$, (n) $P = 5$, (o) $P = 8$, (p) $P = 8.4$, (q) $P = 9$, (r) $P = 10$.

Fig. 5.3D são mostrados na Fig. 5.6. Neste caso vemos que, como no diagrama 5.3C, o sistema também inicia com saída constante (alaranjado), seguindo com oscilações de um pico por período (azul), caracterizadas por um laço fechado próximo do MGM, como é mostrado na Fig. 5.6(m). Conforme incrementamos a corrente, a solução sofre uma deformação *contínua* [16, 17] até que um pico adicional é criado e um segundo ramo aparece no diagrama de bifurcação (azul claro). O ponto onde este segundo ramo aparece é indicado na Fig. 5.3D por uma seta. A oscilação com dois picos e a respectiva trajetória no entorno do MGM podem ser vistas na Fig. 5.6(n). Para maiores valores de P o sistema entra num regime de oscilações quasiperiódicas, mostradas em vermelho, e exemplificadas na Fig. 5.6(o). Após isso, uma pequena janela de soluções periódicas aparece. Esta solução, mostrada na Fig. 5.6(p), mantém sua trajetória próxima do MGM. Aumentando ainda mais o valor da corrente, a solução se torna aperiódica, mas com a trajetória no espaço de fase ainda próxima do MGM, como mostrado na Fig. 5.6(q). Em $P \approx 9.54$,

o atrator sofre um brusca “expansão” e o comportamento caótico passa a dominar. Um exemplo de uma solução típica desta região é mostrada na Fig. 5.6(r). Note que, para as escolhas do tempo de atraso ($\tau = 67$) e configuração inicial usadas para calcular o diagrama da Fig. 5.3D e suas soluções representativas mostradas na Fig. 5.6, não observamos a presença de soluções do tipo RPPs no sistema! As soluções relacionadas à região verde claro na Fig. 5.3D, apesar de serem periódicas, não são RPPs, como está evidenciado na Fig. 5.6(p).

5.4 Diagramas de estabilidade

Até aqui, descrevemos a evolução da dinâmica do laser de modo tradicional, ou seja, considerando como as oscilações do laser variam ao longo de alguns caminhos específicos no espaço de parâmetros. O próximo passo é verificar qual a extensão relativa das fases do laser no espaço de parâmetros de controle. Como as soluções de interesse observadas são alteradas quando mais de um parâmetro é variado simultaneamente? Que tipo de mosaico de estabilidade é formado no espaço de controle pelas diversas fases oscilatórias do laser? Estas fases apresentam alguma variação sistemática? Para responder a estas questões, realizamos uma análise numérica detalhada, gerando diagramas de estabilidade de alta resolução, através do procedimento padrão que viemos utilizando em todos os capítulos anteriores [16, 17, 37, 85]: para determinadas janelas no espaço de parâmetros, verificamos se as oscilações do laser são periódicas ou não periódicas, e contamos o número de picos (máximos locais) de todas as oscilações periódicas, classificando o número de picos por cores.

A Fig. 5.7 revela a complexa alternância de fases periódicas e não periódicas observadas no espaço de parâmetros. O cálculo destes diagramas foi realizado em um cluster SGI Altix com processadores de alta performance, por um período de diversas semanas. Nesta figura, além de utilizarmos nosso padrão de 14 cores para identificar o número de picos, pontos fixos não nulos, representando saída constante (CW), são plotados em alaranjado, e ausência de periodicidade é plotada em preto. O diagrama (a) (e a sua magnificação (c)) foi calculado utilizando-se a configuração inicial $N(0) = 1$, $E_r(t) = E_i(t) = 1$ para $t \in [-\tau, 0]$, onde $E(t) = E_r(t) + iE_i(t)$, para todos os pontos (τ, P) . Por outro lado, o diagrama (b) (e sua magnificação (d)) foi calculado utilizando-se a configuração inicial descrita acima para pontos com $P = 0$, e então, para cada incremento em P , a solução anterior é tomada como nova condição inicial. Este procedimento é o mesmo que o utilizado na construção do diagrama de bifurcação da Fig. 5.3D (“seguindo o atrator”).

Os diagramas de bifurcação mostrados nas Figs. 5.3A-5.3D representam a dinâmica observada ao longo dos caminhos de parâmetros individuais A, B, C e D, indicados nas Figs. 5.7(c)-5.7(d). Comparando estas figuras, podemos reconhecer facilmente a ver-

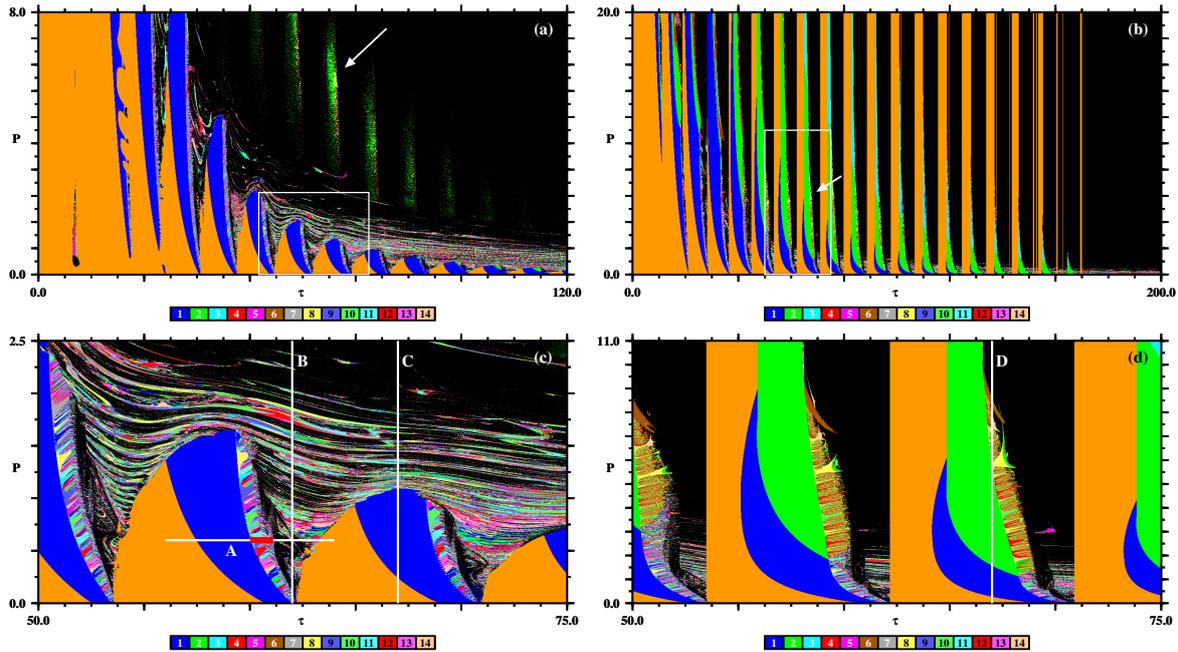


Fig. 5.7: Diagramas de estabilidade do laser resumindo as diversas fases e suas fronteiras, classificadas de acordo com o número de picos por período da amplitude $A(t)$, para duas configurações iniciais diferentes: (a) usando $E_r(-\tau, 0) = E_i(-\tau, 0) = N(0) = 1$ para todos os pontos do diagrama, e (b) usando $E_r(-\tau, 0) = E_i(-\tau, 0) = N(0) = 1$ para todos os valores de τ com $P = 0$, e “seguindo o atrator” (veja o texto). A seta em (a) indica a “sombra” de uma solução diferente (verde), revelando multiestabilidade. Esta solução é evidenciada em (b) (ambas as setas indicam o mesmo ponto do diagrama). Magnificações das caixas em (a) e (b) são mostradas em (c) e (d), respectivamente.

dadeira extensão das fases dinâmicas descritas em detalhes acima. As faixas coloridas, localizadas imediatamente ao lado direito da região em azul de cada uma das estruturas em forma de “morros” apresentadas neste diagrama, correspondem a regiões de soluções quasiperiódicas. Na Fig. 5.7(c), a região onde uma destas faixas é cruzada pela linha A é indicada por uma linha mais grossa em vermelho. Estas regiões de quasiperiodicidade estão relacionadas aos intervalos de parâmetros mostrados em vermelho no diagrama de bifurcação da Fig. 5.3.

Os dois tipos diferentes de configurações iniciais utilizadas aqui revelaram grandes domínios de multiestabilidade no laser. Na Fig. 5.7(a), vemos uma série de “morros” de altura decrescente com o aumento de τ . Afora as mencionadas faixas de quasiperiodicidade, cada morro é subdividido em dois grandes domínios de comportamento “simples”: uma região onde o laser opera com uma amplitude constante (em alaranjado), e uma região de oscilações com um pico por período (em azul). A Fig. 5.7(b), obtida utilizando-se condições iniciais diferentes, apresenta uma sequência similar de morros, mas i) existindo para valores muito maiores de τ (note a mudança de escala), e ii) com altura que parece

se manter constante (i.e. não decai) com o aumento do atraso. É possível também reconhecer traços de multiestabilidade na Fig. 5.7(a), na “sombra” indicada pela seta. Entre e sobre os morros, podemos ver faixas de soluções periódicas formando estrias, estruturas parecidas com “redemoinhos”, localizadas entre os morros, as quais podem ser melhor visualizadas na magnificação mostrada na Fig. 5.7(c). As soluções associadas às faixas dos redemoinhos são os RPPs, mostrados anteriormente pela região em verde claro no diagrama de bifurcação da Fig. 5.3B, o qual foi calculado sobre a linha B na Fig. 5.7(c), atravessando o redemoinho de baixo para cima. Dessa forma, a Fig. 5.7(c) mostra como as RPPs evoluem quando os dois parâmetros do laser, τ e P , são variados simultaneamente.

Das Figs. 5.7(a) e 5.7(c), podemos notar que a sequência de transições mostrada no diagrama da Fig. 5.3A, a qual já havia sido observada em trabalhos anteriores (para outros parâmetros que, como τ , também afetam o número de ECMs) [71, 75, 79], apenas é observada para pequenos valores da corrente de bombeamento P , e quanto maior for o atraso, menores são os valores de corrente onde esta sequência é observada. Isso é evidenciado pela diminuição da altura dos morros conforme aumentamos o valor de τ , e a referida sequência ocorre justamente quando estes morros são cruzados sequencialmente. Por outro lado, se considerarmos a configuração inicial diferente (“seguindo o atrator”, utilizada para calcular os diagramas das Figs. 5.7(b) e 5.7(d)), vemos que a sequência de transições observadas no diagrama da 5.3A é observada para valores muito maiores da corrente, dado que os morros da Figs. 5.7(b) são muito mais altos e não tem sua altura reduzida com o incremento do atraso. Isso mostra que, para manter e seguir ECMs e RPPs específicos, precisamos ajustar apropriadamente as condições iniciais do sistema.

5.5 Sumário

Neste capítulo estudamos numericamente a estabilidade de um laser de semicondutor com atraso, considerado do ponto de vista do modelo de Lang-Kobayashi, sob a influência da variação ampla e simultânea de dois importantes parâmetros do sistema: o tempo de atraso τ e a corrente de bombeamento P . Os diagramas de estabilidade $\tau \times P$ apresentados mostraram como os diversos regimes de operação do laser (CW, quasiperiodicidade, RPPs, aperiodicidade,...) aparecem e indicaram os intervalos de parâmetros onde estes tipos de soluções podem ser encontradas. Os diagramas mostraram estruturas em forma de redemoinhos, formados por faixas horizontais onduladas de RPPs, intercalados com soluções não periódicas. Estas estruturas (redemoinhos) alternam ao longo da direção de τ , sendo separadas por regiões de soluções CW/oscilações de um pico (morros). Esta repetição se dá devido a criação e desestabilização sequencial de novos ECMs conforme incrementamos o valor do tempo de atraso. A compreensão deste cenário é corroborada pelos diagramas de bifurcação apresentados na Fig. 5.3A, e pelas respectivas evoluções

temporais e no espaço de fase, mostradas nas Figs. 5.4(a-f).

Como mencionado, efeitos análogos foram observados anteriormente considerando a variação de η e ω , dado que ambos os parâmetros sabidamente influenciam na criação e desestabilização dos ECMs [75, 79]. Por outro lado, de forma diferente, o incremento da corrente de bombeamento não altera o número de ECMs, apenas a sua amplitude, levando a um aumento contínuo na amplitude média da solução com o incremento de P . O laser também apresentou regiões de multiestabilidade, levando a diferentes regimes de operação conforme P era aumentado. Esse efeito ficou evidente na comparação dos dois diagramas de bifurcação com $\tau = 67$, calculados considerando-se duas configurações iniciais diferentes (Figs. 5.3C e 5.3D).

A análise da rica variedade dinâmica observada nos diagramas de estabilidade do laser não foi finalizada neste trabalho. Como exemplo, citamos o fato de os diagramas apresentarem uma variada gama de domínios onde complexos regimes do laser coexistem e precisam ser caracterizados e ainda mais profundamente explorados. Esta superposição de regimes complexos é interessantes, por exemplo, quando consideradas como condições iniciais em problemas de sincronização em lasers mutuamente acoplados [86, 87, 88]. Finalmente, além do tempo de atraso τ e da corrente de bombeamento P , a descrição do laser via modelo de Lang-Kobayashi ainda apresenta uma série de parâmetros de controle cujo impacto global ainda necessita ser investigado.

Capítulo 6

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho realizamos uma análise numérica sistemática de três diferentes modelos com atraso: o modelo de Mackey-Glass, que simula a variação da densidade de certos tipos de células no sangue e utiliza um termo atrasado para representar o tempo de maturação destas células na medula óssea; o modelo de laser de CO_2 com realimentação, que consiste em um modelo de três equações que simula um laser cuja intensidade do campo é controlada por um modulador eletro-ótico posicionado no interior da cavidade, de forma que o atraso é associado ao tempo de resposta deste modulador; e o modelo de Lang-Kobayashi, que simula um laser de semicondutor realimentado pela própria luz refletida de volta para dentro da cavidade após viajar por uma cavidade externa, sendo o tempo de viagem nesta cavidade externa o que caracteriza o atraso temporal deste sistema.

O foco principal de nosso estudo foi a investigação do comportamento das soluções no espaço de parâmetros, ou seja, analisar como as soluções variam qualitativamente quando os parâmetros dos sistemas referidos eram variados. Nossa análise foi baseada principalmente na contagem do número de máximos locais (picos) por período da solução de cada sistema. Esta característica nos permitiu separar as fases periódicas das caóticas, e verificar como as fases periódicas se distribuem no espaço de parâmetros. Nesta análise vimos que os três modelos considerados apresentam distribuições extremamente ricas e complexas de soluções regulares e caóticas no espaço de parâmetros.

Dentre os fenômenos observados nas diferentes seções dos espaços de parâmetros analisados, podemos citar as já conhecidas cascatas de dobramento de período e bifurcações de toro. Porém, o fenômeno que mais nos chamou a atenção, e que até onde sabemos nunca antes havia sido reportado e descrito em detalhes na literatura, foi a adição de picos por deformação da forma de onda da solução, fenômeno este observado nos três modelos estudados. A gênese destas deformações foi estudada observando-se o comportamento das soluções em mapas de retorno no modelo de Mackey-Glass, e no espaço de fases no modelo de laser de CO_2 . Nesta análise percebemos que as trajetórias associadas às respectivas soluções em ambos os casos são deformadas de tal maneira que intersecções destas trajetórias com a *nullcline* passam a acontecer, originando novos picos. De maneira

análoga, a variação do parâmetro de bifurcação em determinados intervalos provoca deformações que fazem com que uma (ou algumas) destas intersecções deixe de acontecer, fazendo com que o pico associado desapareça. No caso do modelo de laser de CO₂ com atraso, também se observou o desaparecimento de picos sem que se perca a intersecção da trajetória com a *nullcline* na região do pico associado. Neste caso, o desaparecimento do pico se dá pelo fato de a intensidade tornar-se nula na região temporal onde o pico se localizava, previamente à variação do parâmetro de bifurcação.

No modelo de Mackey-Glass, percebemos também que algumas soluções, associadas a certas estruturas de periodicidade, podem ser decompostas em um conjunto relativamente pequeno de segmentos, de forma que ao passarmos de uma estrutura para outra no espaço de parâmetros, apenas adicionamos alguns destes segmentos nas soluções correspondentes à próxima estrutura, permitindo-nos entender de maneira simples de que forma as soluções variam no espaço de parâmetros. Ainda neste modelo, percebemos que ao introduzirmos o atraso no sistema, passando de $\tau = 0$ para $\tau \neq 0$ nos diagramas de fase, a dinâmica não se altera de forma instantânea, mostrando uma certa “letargia” do sistema em responder a presença do atraso, e inclusive não mostrando efeito qualitativo nenhum, para certos conjuntos de parâmetros.

No modelo de laser de CO₂, inicialmente estudado na versão sem atraso, percebemos a presença de dois tipos diferentes de discontinuidades no período T no espaço de parâmetros avaliado: uma divergência associada ao incremento do parâmetro referente à voltagem de bias (B), já reportado na literatura, e o salto abrupto no período e na amplitude da intensidade do laser, mostrado nas figuras 3.4(a) e 3.4(b), associado à variação concomitante dos parâmetros referentes ao ganho de realimentação (r) e a voltagem de bias (B). As mudanças dinâmicas associadas a este salto no período foram estudadas e mostraram que nesta região, o sistema apresenta uma alteração abrupta na sua trajetória no espaço de fases, resultando em um prolongamento no tempo interpulsos e, portanto, gerando um aumento no período da solução.

Na sequência, quando alteramos o modelo de laser de CO₂ de forma a considerar o atraso temporal no laço de realimentação, avaliamos o impacto da inserção e variação deste tempo de atraso na dinâmica observada no plano $r \times B$ no espaço de parâmetros. O incremento no tempo de atraso inicialmente mostrou um encolhimento nas fases periódicas observadas no caso sem atraso, até que estas desaparecem completamente. Após um intervalo onde o sistema permanece dinamicamente invariante, ilhas de periodicidade começam a aparecer, dando origem a fases caóticas com acumulações de *shrimps*.

Ao estudarmos o modelo de Lang-Kobayashi, observamos que a variação do parâmetro de atraso altera o número e a estabilidade dos modos de cavidade externa (ECMs), definindo uma sequência de transições de soluções do tipo: CW \Rightarrow Oscilações de um pico por período \Rightarrow oscilações quasiperiódicas \Rightarrow soluções aperiódicas + pacote de pulsos

regulares (RPPs) \Rightarrow CW. Esta sequência se repete conforme τ aumenta e novos ECMs são criados e perdem estabilidade. Já para a corrente de bombeamento P , cuja variação não altera o número de ECMs, os mesmos tipos de soluções foram observadas, porém neste caso o incremento de P aumenta gradativamente a amplitude das oscilações e leva o sistema a uma fase caótica que persiste para valores grandes da corrente. Diversas evoluções temporais e suas respectivas trajetórias no espaço de fase também foram calculadas em regiões representativas dos diferentes regimes observados, tanto frente a variação de τ quanto de P . Diagramas de fase mostrando o número de picos no plano $\tau \times P$ do espaço de parâmetros também foram explorados, mostrando uma plêiade de fases exóticas, como “morros” de soluções periódicas e “redemoinhos” com faixas alternando soluções aperiódicas e RPPs. Regiões de multiestabilidade também foram estudadas, através do uso de duas configurações iniciais diferentes no sistema.

A partir dos resultados apresentados nesta tese, uma série de possibilidades surgem como perspectivas para futuros trabalhos. A finalização do estudo do espaço de parâmetros de todos os modelos analisados, considerando o efeito da variação dos parâmetros que aqui foram mantidos com valor fixo, surge como perspectiva imediata. Além disso, a reconfiguração dos sistemas visando o aumento da complexidade dinâmica, especialmente no contexto de lasers, também se mostra interessante. Como exemplo, citamos o acoplamento mútuo de lasers de semicondutor, onde dois lasers são realimentados, um pela luz do outro [71, 89]. Esse sistema se revela interessante do ponto de vista dinâmico e muito importante do ponto de vista das aplicações, especialmente no contexto de encriptação caótica [90]. As alterações provocadas por esta montagem no conjunto de equações de Lang-Kobayashi faz com que passemos de três para seis equações (três para cada laser), de forma que a realimentação não se dá mais pela reflexão da própria luz numa cavidade externa, mas pela luz do outro laser. Os modos de cavidade externa (ECMs) são substituídos pelos modos de lasers combinados (CLMs, *Compound Laser Modes*) e a complexidade do sistema é aumentada grandemente. O comportamento dinâmico no espaço de parâmetros deste tipo de sistema é pouco conhecido, e um estudo nessa direção traria luz a este sistema dinâmico tão importante e interessante.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] E. PICARD, *La mathématique dans ses rapports avec la physique*, Actes du IV congrès international des Mathématiciens, Rome (1908).
- [2] V. VOLTERRA, *Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*, (Gauthier-Villars, Paris, 1931).
- [3] J.K. HALE, *Delay Differential Equations and Applications*, (Springer, New York, 2006), Chapter 1.
- [4] M. LAKSHMANAN, D. V. SENTHILKUMAR, *Dynamics of nonlinear time-delay systems*, (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2010).
- [5] T. ERNEUX, *Applied Delay Differential Equations*, (Springer, New York, 2009).
- [6] O. ARINO (Editor), *Delay Differential Equations and Applications*, (Springer, New York, 2006).
- [7] S.H. STROGATZ, *Death by delay*, Nature **394**, 316 (1998).
- [8] W.S.C. GURNEY, S.P. BLYTHE, R.M. NISBET, *Nicholson's blowflies revisited*, Nature **287**, 17 (1980).
- [9] M. SZYDLOWSKI, A. KRAWIEC, *The Kaldor-Kalecki model of business cycle as a two-dimensional dynamical system*, J. Nonlinear Math. Phys. **8**, 266 (2001).
- [10] K. IKEDA, H. DAIDO, O. AKIMOTO, *Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity*, Phys. Rev. Lett. **45**, 709 (1980).
- [11] R. GERAMI, M.R. EJTEHADI, *A history-dependent stochastic predator-prey model: chaos and its elimination*, Eur. Phys. J. B **13**, 601 (2000).
- [12] J.G. MILTON, A. LONGTIN, A. BEUTER, M.C. MACKEY, L. GLASS, *Complex dynamics and bifurcations in neurology*, J. Theor. Biol. **138**, 129 (1989).
- [13] M.C. MACKEY, L. GLASS, *Oscillations and chaos in physiological control system*, Science **197**, 4300 (1977).

-
- [14] E.W. SAAD, D.V. PROKHOROV, D.C. WUNSCH, *Comparative study of stock trend prediction using time delay, recurrent and probabilistic neural networks*, IEEE Trans. Neural Networks **9**, 1456 (1998).
- [15] Y. LI, Y. KUANG, *Periodic solutions in periodic state-dependent delay equations and population models*, Proc. Am. Math. Soc. **130**, 1345 (2001).
- [16] L. JUNGES, J.A.C. GALLAS, *Intricate routes to chaos in the Mackey-Glass delayed feedback system*, Phys. Lett. A **376**, 2109 (2012).
- [17] L. JUNGES, J.A.C. GALLAS, *Frequency and peak discontinuities in self-pulsations of a CO₂ laser with feedback* Opt. Commun. **285**, 4500 (2012).
- [18] L. JUNGES, T. PÖSCHEL J.A.C. GALLAS, *Characterization of the stability of semiconductor lasers with delayed feedback according to the Lang-Kobayashi model*, Eur. Phys. J. D **67**, 149 (2013).
- [19] M.C. MACKEY, *Case studies in mathematical modeling - ecology, physiology and cell biology*, (Prentice-Hall, New Jersey, 1997), Chapter 8.
- [20] M.A. MENEZES, R.M.Z. SANTOS, *The onset of Mackey-Glass leukemia at the edge of chaos*, Int. J. Mod. Phys. C **11**, 1545 (2000).
- [21] N.D. KAZARINOFF, P. VAN DENDRIESCHE, *Control of oscillations in hematopoiesis*, Science **203**, 1348 (1979).
- [22] E.M. SHAHVERDIEV, R.A. NURIEV, L.H. HASHIMOVA, E.M. HUSEINOVA, R.H. HASHIMOV, *Chaos synchronization in the multifeedback Mackey-Glass model*, Int. J. Mod. Phys. B **29**, 3613 (2005).
- [23] E.M. SHAHVERDIEV, R.A. NURIEV, R.H. HASHIMOV, K.A. SHORE, *Chaos synchronization between the Mackey-Glass systems with multiple time delays*, Chaos Solitons Fractals **29**, 854 (2006).
- [24] L. BEREZANSKY, E. BRAVERMAN, *Mackey-Glass equation with variable coefficients*, computers and mathematics with applications **51**, 1 (2006).
- [25] A. NAMAJUNAS, K. PYRAGAS, A. TAMASEVICIUS, *An electronic analog of the Mackey-Glass system*, Phys. Lett. A **201**, 42 (1995).
- [26] J.D. FARMER, *Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system*, Physica D **4**, 366 (1982).

-
- [27] L. GLASS, A. BEUTER, D. LAROCQUE, *Time delays, oscillations and chaos in physiological control systems*, *Math. Biosci.* **90**, 111 (1988).
- [28] A. NAMAJUNAS, K. PYRAGAS, A. TAMASEVICIUS, *Stabilization of an unstable steady-state in a Mackey-Glass system*, *Phys. Lett. A* **204**, 255 (1995).
- [29] H. SMITH, *An introduction to delay-differential equations with applications*, (Springer, New York, 2011).
- [30] F.M. ATAY (Editor), *Complex time-delay systems*, (Springer, Berlin, 2010).
- [31] W. JUST, A. PELSTER, M. SCHANZ, E. SCHÖLL (Editors), *Delayed complex systems*, Theme Issue, *Phil. Trans. R. Soc. A*, **368**, 301 (2010).
- [32] J.G. FREIRE, J.A.C. GALLAS, *Stern-Brocot trees in the periodicity of mixed-mode oscillations*, *Phys. Chem. Chem. Phys.* **13**, 12191 (2011). *Stern-Brocot trees in cascades of mixed-mode oscillations and canards in the extended Bonhoeffer-van der Pol and the FitzHugh-Nagumo models of excitable systems*, *Phys. Lett. A* **375**, 1097-1103, (2011).
- [33] J.A.C. GALLAS, *Structure of the parameter space of the Hénon map*, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2714 (1993), *Dissecting shrimps: results for some one-dimensional physical systems*, *Physica A* **202**, 196 (1994), *Structure of the parameter space of a ring cavity*, *Appl. Phys. B* **60**, S203 (1995); B.R. HUNT, J.A.C. GALLAS, C. GREBOGI, J.A. YORKE, H. KOCCAK, *Bifurcation rigidity*, *Physica D* **129**, 35 (1999); Para resultados mais recentes veja as referências [35, 36, 37, 38, 39].
- [34] E.N. LORENZ, *Compound windows of the Hénon map*, *Physica D* **237**, 1689 (2008).
- [35] Y.C. LAI, T. TÉL, *Transient chaos*, (Springer, New York, 2011).
- [36] J. ARGYRIS, G. FAUST, M. HAASE, R. FRIEDERICH, *Die erforschung des chaos*, (Springer, Berlin, 2010).
- [37] J.A.C. GALLAS, *The structure of infinite periodic and chaotic hub cascades in phase diagrams of simple autonomous flows*, *Int. J. Bifurcation Chaos* **20**, 197 (2010).
- [38] R. VITOLO, P. GLENDINNING, J.A.C. GALLAS, *Global structure of periodicity hubs in Lyapunov phase diagrams of dissipative flows*, *Phys. Rev. E* **84**, 016216 (2011).
- [39] R. BARRIO, F. BLESA, S. SERRANO, A. SHILNIKOV, *Global organization of spiral structures in biparameter space of dissipative systems with Shilnikov saddle-foci*, *Phys. Rev. E* **84**, 035201(R) (2011).

-
- [40] J. SLIPANTCHUK, E. ULLNER, M.S. BAPTISTA, M. ZEINEDDINE, M. THIEL, *Abundance of stable periodic behavior in a Red Grouse population model with delay: A consequence of homoclinicity*, *Chaos* **20**, 045117 (2010).
- [41] H. HAKEN, *Analogy between higher instabilities in fluids and lasers*, *Phys. Lett.* **53**, 77 (1975).
- [42] E.N. LORENZ, *Deterministic nonperiodic flow*, *J. Atm. Sci.* **20**, 130 (1963).
- [43] G.H.M. VAN TARTWIJK, G.P. AGRAWAL, *Laser instabilities: a modern perspective*, *Prog. Quant. Electron.* **22**, 43 (1998).
- [44] R.W. FOX, C.W. OATES, L. HOLLBERG, *Stabilizing Diode Lasers to High Finesse Cavities*, in “Experimental Methods in the Physical Sciences”, Vol. 40, chapter 1 (Elsevier, Amsterdam, 2001).
- [45] J. OHTSUBO, *Semiconductor Lasers: Stability, Instability and Chaos*, (Springer, New York, 2005).
- [46] D.M. KANE, K.A. SHORE, *Unlocking Dynamical Diversity: Optical Feedback Effects on Semiconductor Lasers*, (Wiley, New York, 2005).
- [47] F.T. ARECCHI, W. GADOMSKI, R. MEUCCI, *Generation of chaotic dynamics by feedback on a laser*, *Phys. Rev. A* **34**, 1617 (1986).
- [48] P.Y. WANG, A. LAPUCCI, R. MEUCCI, F.T. ARECCHI, *Onset of subcritical bifurcation in a CO₂ laser with feedback*, *Opt. Commun.* **80**, 42 (1990).
- [49] Q.S. YANG, P.Y. WANG, H.W. YIN, J.H. DAI, H.J. ZHANG, *Global stability and oscillation properties of a two-level model for a class-B laser with feedback*, *Opt. Commun.* **138**, 325 (1997).
- [50] Y. CHO, T. UMEDA, *Observation of chaos in a semiconductor laser with delayed feedback*, *Opt. Commun.* **59**, 131 (1986).
- [51] J.L. CHERN, K. OTSUKA, F. ISHIYAMA, *Coexistence of two attractors in lasers with delayed incoherent optical feedback* *Opt. Commun.* **96**, 259 (1993).
- [52] J.P. GOEDGEBUER, L. LARGER, H. PORTE, *Optical cryptosystem based on synchronization of hyperchaos generated by a delayed feedback tunable laser diode*, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2249 (1998).
- [53] R.E. FRANKE, T. PÖSCHEL, J.A.C. GALLAS, *Observation infinite hub hierarchies and spirals in self-excited oscillations of a tunnel diode*, in “Studies in Computational Intelligence”, (Springer, Berlin, 2012) in print.

- [54] C. BONATTO, J.C. GARREAU, J.A.C. GALLAS, *Self-similarities in the frequency-amplitude space of a loss-modulated CO₂ laser*, Phys. Rev. Lett. **95**, 143905 (2005), *Accumulation horizons and period adding cascades in optically injected semiconductor lasers*, Phys. Rev. E **75**, 055204(R) (2007), *Accumulations boundaries: Codimension-two accumulation of accumulations in phase diagrams of semiconductor lasers*, Phil. Trans. Royal Soc. London **366A**, 505 (2008). V. KOVANIS, A. GAVRIELIDES, J.A.C. GALLAS, *Labyrinth bifurcations in optically injected diode lasers*, Eur. Phys. J. D **58**, 181 (2010).
- [55] D.F.M. OLIVEIRA, M. ROBNIK, E.D. LEONEL, *Shrimp-shaped domains in a dissipative kicked rotator*, Chaos **21**, 043122 (2011), *Parameter-space for a dissipative Fermi-Ulam model*, New J. Phys. **13**, 123012 (2011).
- [56] C. BONATTO, J.C. GARREAU, J.A.C. GALLAS, *Self-similarities in the frequency-amplitude space of a loss-modulated CO₂ laser*, Phys. Rev. Lett. **95**, 143905 (2005). *Periodicity hub and nested spirals in the phase diagram of a simple resistive circuit*, Phys. Rev. Lett. **101**, 054101 (2008).
- [57] F.T. ARECCHI, G. GIACOMELLI, A. LAPUCCI, R. MEUCCI, *Dynamics of a CO₂ laser with delayed feedback: The short-delay regime*, Phys. Rev. A **43**, 4997 (1991).
- [58] E.J. DOEDEL, C.L. PANDO L., *Isolas of periodic passive Q-switching self-pulsations in the three-level:two-level model for a laser with a saturable absorber*, Phys. Rev. E **84**, 056207 (2011).
- [59] E.J. DOEDEL, B.E. OLDEMAN, C.L. PANDO L., *Bifurcation structures in a model of a CO₂ laser with a fast saturable absorber*, Int. J. Bifurcation Chaos **21**, 305 (2011).
- [60] W. VANDERMEIREN, J. STIENS, G. SHKERDIN, R. VOUNCKX, *Theoretical analysis of partial-spatial Q-switching dynamics using a two-level CO₂ laser model*, IEEE J. Quantum Electron. **48**, 447 (2012).
- [61] R.N. HALL, G.E. FENNER, J.D. KINGSLEY, T.J. SOLTYS, R.O. CARLSON, *Coherent light emission from GaAs junctions*, Phys. Rev. Lett. **9**, 366 (1962).
- [62] M.I. NATAN, W.P. DUMKE, G. BURNS, F.H. DILL, G. LASHER, *Stimulated emission of radiation from GaAs p-n junctions*, App. Phys. Lett. **1**, 62 (1962).
- [63] R.L. BYER, *Diode laser-pumped solid-state laser*, Science **239**, 742 (1988).
- [64] F. TRÄGER (Editor), *Springer handbook of lasers and optics*, (Springer, New York, 2007).

-
- [65] F. ROGISTER, *Nonlinear dynamics of semiconductor lasers subject to optical feedback*, Tese de Doutorado, Faculte Polytechnique de Mons, (2001).
- [66] G. OVERTON, T. HAUSKEN, D.A. BELFORTE, C. HOLTON, *Annual review and forecast: economic aftershocks keep laser markets unsettled*, Laser Focus World **41**, 1 (2012).
- [67] T. ERNEUX, G. HEK, M. YOUSEFI, D. LENSTRA, *The injection laser limit of lasers subject to optical feedback*, Proceedings of SPIE **5452**, 303 (2004).
- [68] R. LANG, K. KOBAYASHI, *External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties*, IEEE J. Quantum Electron. **16**, 347 (1980).
- [69] G.H.M. VAN TARTWIJK, D. LENSTRA, *Semiconductor lasers with optical injection and feedback*, Quantum Semiclass. Opt. **7**, 87-143 (1995).
- [70] C. MASOLLER, *Implications of how the linewidth enhancement factor is introduced on the Lang and Kobayashi model*, IEEE J. Quantum Electron. **33**, 796 (1997).
- [71] T. HEIL, I. FISCHER, W. ELSÄSSER, A. GAVRIELIDES, *Dynamics of semiconductor lasers subject to delayed optical feedback: the short cavity regime*, Phys. Rev. Lett. **87**, 243901 (2001).
- [72] A. GAVRIELIDES, T.C. NEWELL, V. KOVANIS, R.G. HARRISON, N. SWANSTON, D. YU, W. LU *Synchronous Sisyphus effect in diode lasers subject to optical feedback*, Phys. Rev. A **60**, 1577 (1999).
- [73] C. MASOLLER, *Comparison of the effects of nonlinear gain and weak optical feedback on the dynamics of semiconductor lasers*, IEEE J. Quantum Electron. **33**, 804 (1997).
- [74] P.M. ALSING, V. KOVANIS, A. GAVRIELIDES, T. ERNEUX, *Lang and Kobayashi phase equation*, Phys. Rev. A **53**, 4429 (1996).
- [75] T. HEIL, I. FISCHER, W. ELSÄSSER, B. KRAUSKOPF, K. GREEN, A. GAVRIELIDES, *Delay dynamics of semiconductor lasers with short external cavities: Bifurcation scenarios and mechanisms*, Phys. Rev. E **67**, 066214 (2003).
- [76] J. MORK, B. TROMBORG, P. CHRISTIANSEN, *Bistability and low-frequency fluctuations in semiconductor lasers with optical feedback: a theoretical analysis*, IEEE J. Quantum Electron. **24**, 123 (1988).

-
- [77] T. HEIL, I. FISHER, W. ELSÄSSER, J. MULET, C.R. MIRASSO, *Statistical properties of low-frequency fluctuations during single-mode operation in distributed-feedback lasers: experiments and modeling*, Opt. Lett. **24**, 1275 (1999).
- [78] M. SCIAMANNA, A. TABAKA, H. THIENPONT, K. PANAJOTOV, *Intensity behavior underlying pulse packages in semiconductor lasers that are subject to optical feedback*, J. Opt. Soc. Am. B **22**, 777 (2005).
- [79] A. TABAKA, K. PANAJOTOV, I. VERETENNICOFF, M. SCIAMANNA, *Bifurcation study of regular pulse packages in laser diodes subject to optical feedback*, Phys. Rev. E **70**, 036211 (2004).
- [80] S. BEHNIA, K.H. MABHOUTI, A. JAFARI, A. AKHSHANI, *Observations on the dynamics of external cavity semiconductor lasers*, Optik **123**, 1555 (2012).
- [81] V. ROTTSCHÄFER, B. KRAUSKOPF, *The ECM-backbone of the Lang-Kobayashi equations: a geometric picture*, Int. J. Bifurcation Chaos **17**, 1575 (2007).
- [82] A.M. LEVINE, G.H.M. VAN TARTWIJK, D. LENSTRA, T. ERNEUX, *Diode lasers with optical feedback: stability of the maximum gain mode*, Phys. Rev. A **52**, R3436 (1995).
- [83] S. YANCHUK, M. WOLFRUM, *A multiple time scale approach to the stability of external cavity modes in the Lang-Kobayashi system using the limit of large delay*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **9**, 519 (2010).
- [84] K. GREEN, *Stability near threshold in a semiconductor laser subject to optical feedback: a bifurcation analysis of the Lang-Kobayashi equations*, Phys. Rev. E **79**, 036210 (2009).
- [85] V. KOVANIS, A. GAVRIELIDES, J.A.C. GALLAS, *Labyrinth bifurcations in optically injected diode lasers*, Eur. Phys. J. D **58**, 181 (2010).
- [86] J.R. TERRY, K.S. THORNBURG, D.J. DESHAZER, G.D. VANWIGGEREN, S. ZHU, P. ASHWIN, R. ROY, *Synchronization of chaos in an array of three lasers*, Phys. Rev. E **59**, 4036 (1999).
- [87] F. ROGISTER, R. ROY, *Localized excitations in arrays of synchronized laser oscillators*, Phys. Rev. Lett. **98**, 104101 (2007).
- [88] R. VICENTE, I. FISCHER, C.R. MIRASSO, *Synchronization properties of three delay-coupled semiconductor lasers*, Phys. Rev. E **78**, 066202 (2008).

-
- [89] F. ROGISTER, M. BLONDEL, *Dynamics of two mutually delay-coupled semiconductor lasers*, Opt. Commun. **239**, 173 (2004).
- [90] T. DENG, G.-Q. XIA, Z.-M. WU, X.-D. LIN, J.-G. WU, *Chaos synchronization in mutually coupled semiconductor lasers with asymmetrical bias currents*, Opt. Express **19**, 8762 (2011).

Apêndice A

MÉTODO DE STEPS

Pouco se consegue fazer no que diz respeito a encontrar soluções analíticas para equações diferenciais com atraso. Porém, dentre os (limitados) métodos analíticos disponíveis, o mais simples e popular é o mapeamento sistemático conhecido como *método de steps*. Para ilustrarmos o funcionamento desta ferramenta, utilizaremos como exemplo a DDE dada por

$$\frac{dx}{dt} = ax(t - \tau), \quad (\text{A.1})$$

onde a e τ são constantes. Consideremos que a história inicial desta equação seja dada por

$$x(t) = x_0(t) = 1, \quad (\text{A.2})$$

para $t \in [-\tau, 0]$. No método de steps, utilizamos o conhecimento da solução $x(t) = x_0(t)$ no intervalo $[-\tau, 0]$ para encontrarmos a solução $x(t) = x_1(t)$ no intervalo $[0, \tau]$. Na sequência, $x_1(t)$ é utilizada para obtermos a solução $x(t) = x_2(t)$, definida no intervalo $[\tau, 2\tau]$, e assim sucessivamente. Analisando a Eq. (A.1) vemos que, para t no intervalo $[0, \tau]$, o valor de $(t - \tau)$ cai no intervalo $[-\tau, 0]$, e nesse intervalo a solução é conhecida e dada por $x_0(t)$, portanto, para $t \in [0, \tau]$, temos $x(t - \tau) = x_0(t - \tau)$. Com isso, nesse intervalo temporal temos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax_0(t - \tau) = a, \\ \int_{x_0(0)}^{x(t)} dx' &= a \int_0^t dt', \\ x(t) = x_1(t) &= x_0(0) + a \int_0^t dt' = 1 + at. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Em posse da solução $x(t)$ no intervalo $[0, \tau]$, dado por $x_1(t)$, podemos calcular a solução no intervalo $[\tau, 2\tau]$. Neste intervalo, $x(t - \tau) = x_1(t - \tau)$, e a Eq. (A.1) fica

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax_1(t - \tau) = a + a^2(t - \tau) \\ \int_{x_1(\tau)}^{x(t)} dx' &= \int_{\tau}^t (a + a^2(t' - \tau)) dt' \\ x(t) = x_2(t) &= 1 + at + a^2 \left(\frac{1}{2}(t^2 - \tau^2) - \tau(t - \tau) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Utilizando o valor de $x(t) = x_2(t)$ no intervalo $[\tau, 2\tau]$, podemos calcular a solução no intervalo $[2\tau, 3\tau]$, onde temos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax_2(t - \tau) = a \left(1 + a(t - \tau) + a^2 \left(\frac{1}{2}((t - \tau)^2 - \tau^2) - \tau((t - \tau) - \tau) \right) \right) \\ \int_{x_2(2\tau)}^{x(t)} dx' &= \int_{2\tau}^t \left(a + a^2 t' - a^2 \tau + a^3 \left(\frac{t'^2}{2} - 2t'\tau + 2\tau^2 \right) \right) dt' \\ x(t) = x_3(t) &= \frac{a^3 t^3}{6} + t^2 \left(\frac{a^2}{2} - a^3 \tau \right) + t(a - a^2 \tau + 2a^3 \tau^2) - \frac{8a^3 \tau^3}{6} + \frac{a^2 \tau^2}{2} + 1. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Este processo pode ser implementado sucessivamente para encontrarmos a expressão de $x(t)$ nos intervalos $[3\tau, 4\tau]$, $[4\tau, 5\tau]$, $[5\tau, 6\tau]$, e assim por diante. De forma genérica, quando temos uma DDE dada por

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), x(t - \tau)) \quad (\text{A.6})$$

com história inicial $x(t) = x_0(t)$ para $t \in [-\tau, 0]$, a solução $x(t) = x_n(t)$ no intervalo $[n\tau, (n + 1)\tau]$ é obtida através da resolução da ODE dada por

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = f(x_n(t), x_{n-1}(t - \tau)), \quad (\text{A.7})$$

de forma que os $x_{n-1}(t)$ são obtidos de forma iterativa, partindo da função previamente conhecida x_0 .

Para exemplificar, substituímos os valores $\tau = 1$ e $a = -1$ nas Eqs. (A.1)-(A.5), de onde obtemos a DDE

$$\frac{dx}{dt} = -x(t - 1), \quad (\text{A.8})$$

e as respectivas soluções:

$$\begin{aligned}
 x(t) = x_0(t) &= 1, & t \in [-\tau, 0], \\
 x(t) = x_1(t) &= 1 - t, & t \in [0, \tau], \\
 x(t) = x_2(t) &= \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2}, & t \in [\tau, 2\tau], \\
 x(t) = x_3(t) &= -\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{2} - 4t + \frac{17}{6}, & t \in [2\tau, 3\tau].
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Estas soluções são plotadas na Fig. A.1, em seus respectivos intervalos temporais, compondo a solução total $x(t)$ em $t \in [-1, 3]$. Para fins comparativos, na mesma figura mostramos a solução obtida através da integração numérica da Eq. A.1, até $t = 15$.

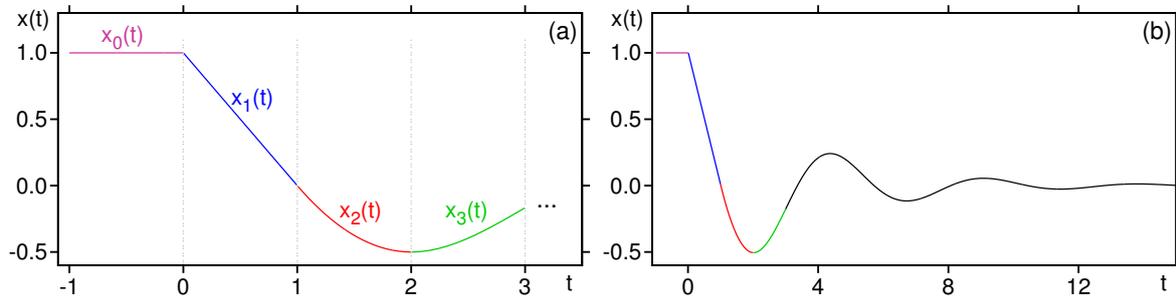


Fig. A.1: Soluções da Eq. (A.1), com $\tau = 1$ e $a = -1$, calculadas utilizando-se: **(a)**: o método de steps, onde estão plotadas as soluções dadas na Eq. (A.9), nos seus respectivos intervalos, e **(b)**: a solução numérica obtida via método de Runge-Kutta de quarta ordem (calculada para tempos maiores, a fim de esclarecer o comportamento da função). Intervalos iguais são plotados com cores iguais.

Apesar de se mostrar uma importante ferramenta analítica, a ineficiência deste método fica clara quando observamos que, para cada iteração, é necessário que resolvamos uma equação diferencial ordinária e, conforme avançamos na iteração deste método, a complexidade das soluções $x_n(t)$ fica cada vez maior, tornando inviável encontrar soluções para tempos grandes através deste método. Em geral, equações diferenciais com atraso apresentam soluções transientes por tempos muito longos, demorando para atingir um regime estável [4]. Sendo assim, qualquer tipo de análise que visa classificar soluções pós-transiente, como as apresentadas neste trabalho, tornam-se impraticáveis através do método de steps.

Apêndice B

ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR EM EQUAÇÕES COM ATRASO

Sistemas descritos por equações diferenciais com atraso, em geral, apresentam uma grande complexidade intrínseca, principalmente devido à dimensão infinita do espaço de fase associado a tal sistema, sendo assim, uma análise numérica é indispensável. Apesar disso, uma análise teórica da estabilidade linear no entorno dos pontos de equilíbrio do sistema pode ser desenvolvida. O procedimento para a realização de tal análise em sistemas com atraso é semelhante, porém um pouco mais complicado, do que o método tradicional utilizado em equações diferenciais ordinárias (ODEs).

Suponha que uma equação diferencial com atraso é dada por

$$\dot{X} = F(X, X_\tau), \quad (\text{B.1})$$

onde F é uma função vetorial e X e X_τ são vetores cujas componentes compreendem as n variáveis do sistema, sendo $X = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t))$ e $X_\tau = (x_1(t - \tau), x_2(t - \tau), x_3(t - \tau), \dots, x_n(t - \tau))$.

Os pontos de equilíbrio deste sistema são aqueles com coordenadas $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*)$, de forma que os x_i^* não variam no tempo. Desta definição, fica óbvio que

$$\dot{X}|_{X=X^*} = F(X^*, X_\tau^*) = 0 \quad , \quad X_\tau^* = X^*. \quad (\text{B.2})$$

Para identificarmos a natureza da estabilidade no entorno de um ponto de equilíbrio, consideramos o comportamento de uma solução composta por uma perturbação infinitesimal no valor de equilíbrio, definida por

$$X = X^* + \delta X \quad , \quad X_\tau = X^* + \delta X_\tau. \quad (\text{B.3})$$

Substituindo estes valores na Eq. (B.2), vemos que a equação para os deslocamentos infinitesimais com relação ao ponto de equilíbrio (δX) é dada por

$$\delta \dot{X} = F(X^* + \delta X, X^* + \delta X_\tau). \quad (\text{B.4})$$

Como os deslocamentos são infinitesimais, podemos utilizar uma expansão de Taylor para linearizar a função F em torno do ponto de equilíbrio. Desta forma, a Eq. (B.4) fica escrita na forma

$$\delta\dot{X} = J_0\delta X + J_\tau\delta X_\tau, \quad (\text{B.5})$$

$$(J_0)_{i,j} = \left. \left(\frac{dF_i}{dx_j} \right) \right|_{x_j=x_j^*}, \quad (J_\tau)_{i,j} = \left. \left(\frac{dF_i}{dx_{\tau j}} \right) \right|_{x_{\tau j}=x_j^*}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (\text{B.6})$$

onde J_0 e J_τ são os Jacobianos relacionados a X e X_τ , respectivamente, ambos calculados no ponto de equilíbrio. Seguindo o método utilizado para análise de estabilidade linear em ODEs, sugerimos como solução para os deslocamentos infinitesimais $\delta X(t)$ uma função exponencial do tipo

$$\delta X = Ae^{\lambda t}, \quad (\text{B.7})$$

sendo A um vetor constante. Substituindo (B.7) em (B.5) obtemos

$$\lambda A = (J_0 + J_\tau e^{-\lambda\tau})A. \quad (\text{B.8})$$

Para deslocamentos infinitesimais com amplitudes A não nulas, a Eq. (B.8) só pode ser satisfeita se

$$|J_0 + J_\tau e^{-\lambda\tau} - \lambda I| = 0, \quad (\text{B.9})$$

onde I é a matriz identidade. Analogamente à análise feita para ODEs, aqui a natureza de λ também nos oferece informação sobre a estabilidade dos pontos fixos. Se todos os autovalores λ tiverem sua parte real negativa, então o ponto de equilíbrio em questão é dito estável, por outro lado, se pelo menos um autovalor tiver parte real positiva, então o ponto de equilíbrio é instável. A Eq. (B.9), intrinsecamente transcendental, determina a equação característica referente ao ponto de equilíbrio associado. Esta equação se assemelha à equação de autovalores observada nas análises de estabilidade linear em torno de pontos de equilíbrio de ODEs, exceto pelo termo exponencial dependente do tempo de atraso. Equações características associadas a ODEs n -dimensionais são constituídas de polinômios de grau n , que resultam em n raízes. Por outro lado, DDEs apresentam equações características transcendentais, usualmente apresentando um número infinito de raízes, reflexo do fato de estes sistemas apresentarem uma dimensão infinita no espaço de fase [4].

B.1 Exemplo: modelo de Mackey-Glass

Para ilustrar o desenvolvimento do cálculo de estabilidade linear dos pontos de equilíbrio em um sistema dinâmico com atraso, utilizaremos como exemplo o modelo de Mackey-

Glass, estudado no Capítulo 2, dado por

$$\dot{x} = f(x, x_\tau) = \beta \frac{x_\tau}{1 + x_\tau^n} - \gamma x. \quad (\text{B.10})$$

Inicialmente, para encontrarmos os pontos fixos x^* deste sistema, fazemos $f(x^*, x^*) = 0$ na Eq. (B.10). Com isso, encontramos dois pontos fixos dados por

$$x_1^* = 0 \quad , \quad x_2^* = \left(\frac{\beta}{\gamma} - 1 \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (\text{B.11})$$

Para classificarmos a estabilidade linear em torno destes pontos fixos, precisamos calcular as expressões dos Jacobianos J_0 e J_τ . Substituindo a expressão para $f(x, x_\tau)$ da Eq. (B.10) nas expressões dos Jacobianos da Eq. (B.6), obtemos

$$J_0 = -\gamma \quad , \quad J_\tau = \beta \left(\frac{1 + (1 - n)(x^*)^n}{(1 + (x^*)^n)^2} \right). \quad (\text{B.12})$$

Inserindo estas expressões na equação característica que determina os autovalores associados a cada ponto fixo (B.9), obtemos

$$\lambda = -\gamma + \beta \left(\frac{1 + (1 - n)(x^*)^n}{(1 + (x^*)^n)^2} \right) e^{-\lambda\tau}. \quad (\text{B.13})$$

Para facilitar a análise da estabilidade linear no entorno dos dois pontos fixos considerados, utilizaremos os mesmos valores de parâmetros utilizados no Capítulo 2:

$$\beta = 0.2 \quad , \quad \gamma = 0.1 \quad \text{e} \quad n = 21. \quad (\text{B.14})$$

Para o primeiro ponto fixo, substituímos $x^* = 0$ na Eq. (B.13), de onde obtemos

$$\lambda_1 = -\gamma + \beta e^{-\lambda_1\tau}. \quad (\text{B.15})$$

Considerando o caráter complexo dos autovalores, substituímos $\lambda_1 = a + bi$ na equação acima, onde a e b são reais. Com isso, obtemos o sistema de equações

$$a = -\gamma + \beta e^{-a\tau} \cos b\tau, \quad (\text{B.16})$$

$$b = -\beta e^{-a\tau} \sin b\tau. \quad (\text{B.17})$$

Isolando o cosseno em (B.16), o seno em (B.17), e somando os seus quadrados, obtemos a expressão para a parte imaginária de λ_1 :

$$b = \pm \sqrt{\beta^2 e^{-2a\tau} - (a + \gamma)^2}. \quad (\text{B.18})$$

Contudo, o que nos interessa realmente é o valor de a , a parte real de λ_1 , cujo sinal vai determinar a estabilidade do ponto fixo em questão. Como os valores de λ_1 são complexo conjugados, podemos utilizar a expressão positiva de (B.18) para o cálculo de a , sem perda de generalidade. Substituindo (B.18) em (B.16) obtemos

$$g_1(a) \equiv -(a + \gamma) + \beta e^{-a\tau} \cos(\sqrt{\beta^2 e^{-2a\tau} - (a + \gamma)^2} \tau) = 0. \quad (\text{B.19})$$

Esta equação é transcendental e os valores de a que a satisfazem não podem ser obtidos analiticamente. Antes de partir para a análise gráfica de (B.19), precisamos definir o intervalo de valores possíveis de a . Como b é, por definição, um valor real, a Eq. (B.18) restringe os valores de a para aqueles onde a inequação

$$f_1(a) \equiv \beta^2 e^{-2a\tau} - (a + \gamma)^2 \geq 0 \quad (\text{B.20})$$

é respeitada. Esta inequação também é transcendental, necessitando igualmente de uma análise gráfica. A Fig. B.1(a) mostra o gráfico da função $f_1(a)$ (para $\tau = 2.0$) e, nos intervalos onde a inequação (B.20) é respeitada, ou seja, onde $f_1(a) \geq 0$, a função $g_1(a)$ também foi plotada. Os valores de a que são soluções do sistema (B.16)-(B.17) são aqueles onde $g_1(a) = 0$ (Eq. (B.19)). Analisando o gráfico da Fig. B.1(a), vemos que, para valores negativos de a , existem infinitas intersecções entre $g_1(a)$ e o eixo das abscissas, revelando infinitos autovalores λ_1 com parte real a negativa. Por outro lado, o intervalo permitido para a com $a \geq 0$ é pequeno e $g_1(a)$ passa apenas uma vez por zero, justamente na fronteira deste intervalo. As fronteiras dos intervalos permitidos são definidas pelos valores de a onde $f_1(a) = 0$ em (B.20). Suponha que $a^* > 0$ seja tal que $f_1(a^*) = 0$. Usando esta condição em (B.20), obtemos

$$f_1(a^*) = \beta^2 e^{-2a^*\tau} - (a^* + \gamma)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta e^{-a^*\tau} = (a^* + \gamma), \quad (\text{B.21})$$

já que $\beta, \gamma > 0$. Utilizando (B.21) em (B.19) temos que

$$g_1(a^*) = -(a^* + \gamma) + \beta e^{-a^*\tau} = -(a^* + \gamma) + (a^* + \gamma) = 0. \quad (\text{B.22})$$

Com isso, mostramos que, para $a > 0$, se $f_1(a) = 0$, então $g_1(a) = 0$, e este valor de a é solução do sistema (B.16)-(B.17), sendo o ponto fixo em questão instável. A magnificação mostrada no interior da Fig. B.1(a) mostra que $f_1(a)$ e $g_1(a)$ cruzam o eixo das abscissas no mesmo ponto, confirmando este resultado. Sendo assim, por conveniência, usaremos $f_1(a)$ ao invés de $g_1(a)$ para encontrar possíveis soluções de (B.16)-(B.17) com $a > 0$. A pergunta importante que surge aqui é: $f_1(a) = 0$ sempre tem pelo menos uma solução com $a \geq 0$, independentemente do valor do atraso τ ?

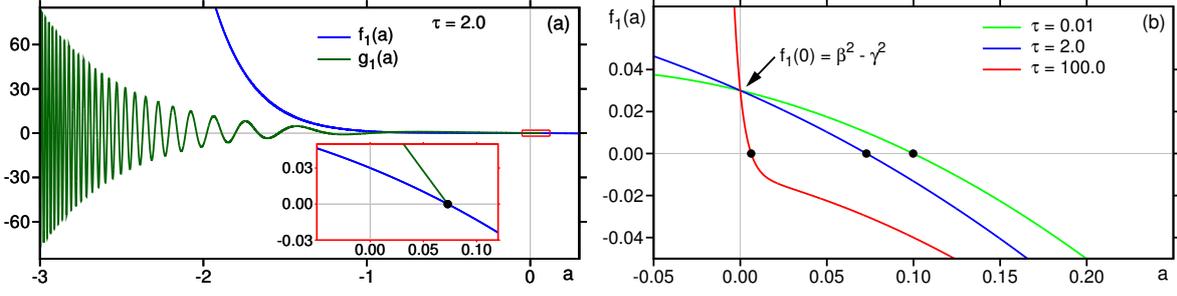


Fig. B.1: **(a)**: Gráfico de $f_1(a)$ e $g_1(a)$, para $\tau = 2.0$. Intersecções de $g_1(a)$ com o eixo das abscissas dão os valores de a que são soluções de (B.16)-(B.17). O gráfico interno mostra a magnificação da região do retângulo vermelho. Ali vemos que $f_1(a) = 0$ e $g_1(a) = 0$ tem mesma solução. **(b)**: Gráfico de $f_1(a)$ para diferentes valores do tempo de atraso, mostrando que, para valores pequenos ($\tau = 0.01$) ou grandes ($\tau = 100$) do atraso, a equação $f_1(a) = 0$ tem solução na região de $a > 0$ (pontos pretos), mostrando que o ponto fixo x_1^* é instável para todo τ .

Para responder esta pergunta, iniciamos com a análise de valores pequenos do atraso. No limite de τ pequeno temos

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} f_1(a) = f_1'(a) = \beta^2 - (a + \gamma)^2. \quad (\text{B.23})$$

Fazendo $f_1'(a) = 0$ obtemos $a = -\gamma \pm \beta$. Assim, no limite de pequeno atraso, a função $f_1(a) = 0$ tem uma solução negativa ($a = -\gamma - \beta$) e outra positiva ($a = -\gamma + \beta$, lembre-se que estamos considerando $\beta > \gamma$). Conforme vamos incrementando o valor do atraso τ , a intersecção de $f_1(a)$ com o eixo das abscissas, na região com $a > 0$, vai se aproximando gradativamente de $a = 0$, mas nunca cruza este valor, afinal, quando $a = 0$ temos $f_1(0) = \beta^2 - \gamma^2 > 0$. O comportamento da função $f_1(a)$ para diferentes valores de τ é ilustrado na Fig. B.1(b). Note que, para valores pequenos do atraso (nesta figura, $\tau = 0.01$), a intersecção acontece para valores próximos de $a = -\gamma + \beta = 0.1$, e para valores grandes do atraso (nesta figura, $\tau = 100$), a intersecção se aproxima de $a = 0$. Com esta análise concluímos que, independentemente da magnitude do valor do atraso τ , $f_1(a) = 0$ sempre terá uma solução com $a > 0$ e, portanto, sempre haverá pelo menos um dos infinitos autovalores associado ao ponto fixo em questão ($x_1^* = 0$) com parte real a positiva, mostrando que este ponto fixo é instável para todo τ .

Consideremos agora o segundo ponto fixo. Substituindo $x^* = (\beta/\gamma - 1)^{\frac{1}{n}}$ em (B.13) obtemos

$$\lambda_2 = -\gamma + \gamma \left(1 - n + \frac{\gamma n}{\beta} \right) e^{-\lambda_2 \tau}. \quad (\text{B.24})$$

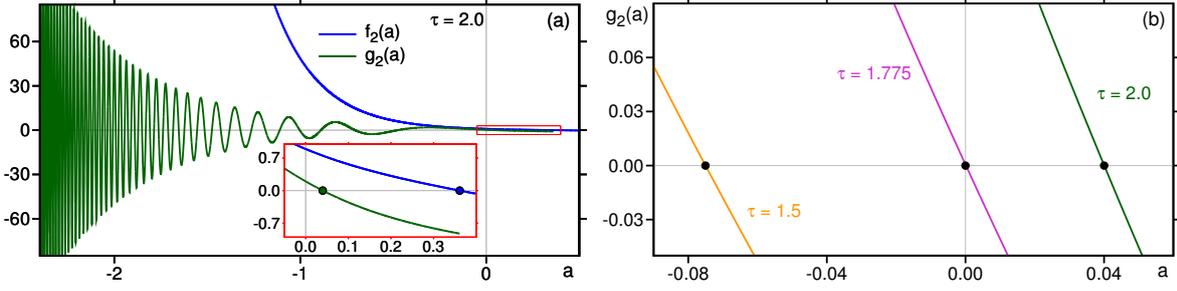


Fig. B.2: **(a)**: Gráfico de $f_2(a)$ e $g_2(a)$ para $\tau = 2.0$. Intersecções de $g_2(a)$ com o eixo das abscissas indicam os valores de a que são soluções de (B.26)-(B.27). O gráfico interno mostra a magnificação da região do retângulo vermelho. Ali vemos que $f_2(a) = 0$ e $g_2(a) = 0$ tem soluções diferentes na região $a > 0$. **(b)**: Gráfico de $g_2(a)$ para diferentes valores do tempo de atraso, mostrando a intersecção mais a direita (com maior valor de a) de $g_2(a)$ com o eixo das abscissas. A partir de $\tau \approx 1.775$, $g_2(a) = 0$ passa a ter solução com $a > 0$, e o ponto fixo x_2^* , antes estável, passa a ser instável.

Definindo uma nova constante $k \equiv \gamma \left(1 - n + \frac{\gamma n}{\beta}\right)$, reescrevemos (B.24) como

$$\lambda_2 = -\gamma + ke^{-\lambda_2 \tau}. \quad (\text{B.25})$$

Esta equação é isomórfica à Eq. (B.15), apenas apresentando k , que com a definição de parâmetros feitas em (B.14) tem valor $k = -0.95$, no lugar de β . Consequentemente, as equações que determinam as partes real e imaginária de λ_2 são dadas por

$$a = -\gamma + ke^{-a\tau} \cos b\tau, \quad (\text{B.26})$$

$$b = -ke^{-a\tau} \sin b\tau, \quad (\text{B.27})$$

de onde tiramos que

$$b = \pm \sqrt{k^2 e^{-2a\tau} - (a + \gamma)^2}. \quad (\text{B.28})$$

Substituindo (B.28) em (B.26) obtemos a equação que fornece a parte real de λ_2 :

$$g_2(a) \equiv -(a + \gamma) + ke^{-a\tau} \cos(\sqrt{k^2 e^{-2a\tau} - (a + \gamma)^2} \tau) = 0. \quad (\text{B.29})$$

De forma análoga ao que foi encontrado anteriormente, a Eq. (B.28) exige que os valores de a estejam no intervalo definido por

$$f_2(a) \equiv k^2 e^{-2a\tau} - (a + \gamma)^2 \geq 0. \quad (\text{B.30})$$

Analisando a Fig. B.2(a), novamente vemos que a função $g_2(a)$ tem infinitas soluções para $a < 0$. Precisamos saber, porém, se há alguma solução com $a > 0$. Ao fazermos

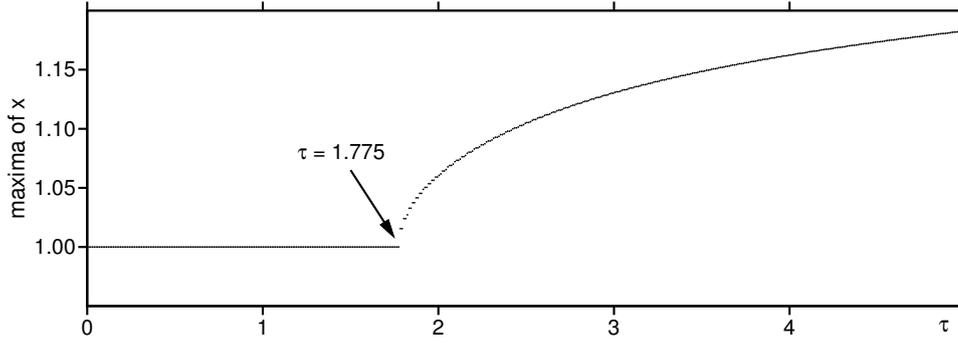


Fig. B.3: Diagrama de bifurcação mostrando os máximos locais da função x , definida em (B.10). Note que o ponto fixo $x_2^* = 1.0$ é estável para valores do atraso menores que $\tau \approx 1.775$, perdendo estabilidade neste ponto através de uma bifurcação de Hopf, dando origem a soluções oscilantes.

novamente $f(a^*) = 0$, para $a^* > 0$ obtemos

$$f_2(a^*) = k^2 e^{-2a^* \tau} - (a^* + \gamma)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k e^{-a^* \tau} = -(a^* + \gamma), \quad (\text{B.31})$$

pois $k < 0$. Com isso, diferentemente do que encontramos no cálculo referente ao ponto fixo anterior, temos

$$g_2(a^*) = -(a^* + \gamma) + k e^{-a^* \tau} = -(a^* + \gamma) - (a^* + \gamma) = -2(a^* + \gamma) \neq 0. \quad (\text{B.32})$$

Ou seja, neste caso, $f_2(a)$ e $g_2(a)$ não se anulam, em geral, para o mesmo valor de $a > 0$. Esse resultado fica evidente quando analisamos a magnificação mostrada no interior do gráfico da Fig. B.2(a), que mostra as intersecções de $f_2(a)$ e $g_2(a)$ com o eixo das abscissas ocorrendo em pontos diferentes. Sendo assim, para encontrarmos o valor de a que é solução de (B.26)-(B.27), devemos analisar a própria função $g_2(a)$.

No limite de pequeno atraso temos

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} g_2(a) = g_2'(a) = -(a + \gamma) + k. \quad (\text{B.33})$$

Fazendo $g_2'(a) = 0$ obtemos $a = k - \gamma$. Como $\gamma > 0$ e $k < 0$, temos que, no limite de pequeno atraso, $a < 0$ e o ponto fixo em questão é estável. Na Fig. B.2(b), vemos que, conforme aumentamos o valor do atraso, a intersecção de $g_2(a)$ com o eixo das abscissas vai se aproximando de $a = 0$, cruzando este ponto em $\tau \approx 1.775$, ou seja, à partir deste valor do tempo de atraso, a equação $g_2(a) = 0$ passa a ter solução com $a > 0$, e o ponto fixo associado perde sua estabilidade.

Em suma, o ponto fixo $x_1^* = 0$ é instável para todo valor do tempo de atraso τ , por outro lado, o ponto fixo $x_2^* = (\beta/\gamma - 1)^{1/n}$ é estável para pequenos valores do atraso, e,

conforme este é incrementado, perde estabilidade em $\tau \approx 1.775$. A Fig. B.3 mostra o mesmo diagrama de bifurcação apresentado na Fig. (2.3) do Capítulo 2, que foi calculado com os mesmos valores de parâmetros dados em (B.14), porém agora apresentando valores do tempo de atraso no intervalo $0 < \tau < 5$. Ali vemos que em $\tau \approx 1.775$, de fato, o ponto fixo estável $x_2^* = (\beta/\gamma - 1)^{\frac{1}{n}} = 1.0$ perde estabilidade através de uma bifurcação de Hopf, dando origem a soluções oscilantes.

Apêndice C

MÉTODO NUMÉRICO

Neste apêndice descrevo brevemente o método numérico utilizado para integrar as equações diferenciais, com e sem atraso, utilizadas para simular matematicamente os modelos descritos nos capítulos desta tese. Descrevo também alguns detalhes sobre a escolha do tamanho do passo de integração, assim como o método numérico que utilizamos para encontrar tanto os máximos locais da solução quanto o seu período. Por fim, as características básicas dos computadores utilizados são apresentadas, e os tempos de cálculo para a obtenção dos principais resultados desta tese são revelados.

C.1 Método de integração numérica

Certamente, um dos métodos numéricos mais utilizados na literatura para integrar equações diferenciais com atraso é o método Runge-Kutta de quarta ordem (RK4). Este método tem se mostrado extremamente robusto e eficaz na solução desta classe de equações, repetindo neste contexto seu indelével sucesso demonstrado na integração de equações diferenciais ordinárias.

Considere a equação diferencial com atraso

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t), y(t - \tau)). \quad (\text{C.1})$$

Para resolver esta equação, devemos definir uma história inicial $y(t') = \Phi(t')$, onde $t_0 - \tau < t' < t_0$. Para calcular o valor da função em $y(t+h) = y_{n+1}$ a partir dos valores de $y(t) = y_n$ e $y(t - \tau) = y_\tau$, o método RK4 utiliza uma média ponderada das inclinações nos pontos inicial, médio e final do passo de integração h . Dessa forma, definindo $t_n = t$, $t_{n+1} = t + h$

e $y_{\tau+h} = y(t - \tau + h)$, as equações que nos levam de y_n para y_{n+1} são dadas por:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t, y_n, y_\tau) \\
 k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, y_\tau\right) \\
 k_3 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, y_\tau\right) \\
 k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_3, y_{\tau+h}) \\
 y_{n+1} &= y_n + \left(\frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}\right)
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Este método foi utilizado para a obtenção de todos os resultados apresentados nesta tese e mostrou boa concordância na comparação que fizemos ao reproduzir diferentes resultados obtidos na literatura, para todos os modelos apresentados. Além disso, considerando o modelo de Lang-Kobayashi, comparamos os resultados obtidos usando este modelo, com os resultados de um modelo preditor-corretor de Adams-Bashforth-Moulton, e os mesmos resultados foram obtidos para ambos os modelos, considerando cálculos realizados em uma região representativa do espaço de parâmetros.

C.2 Passo de integração

A escolha do passo de integração fixo h , definido no método RK4 descrito acima, é uma tarefa de crucial importância e depende do modelo que está sendo considerado. A redução do valor do passo faz com que tenhamos uma precisão maior no cálculo da solução, porém, quanto menor for o valor deste passo, maior é o tempo de cálculo para a construção dos diagramas de bifurcação e de fase, apresentados nesta tese. Sendo assim, é necessário que busquemos um valor intermediário para o passo, de forma que ele seja pequeno o suficiente para termos uma solução precisa, mas ao mesmo tempo seja grande o suficiente para que o tempo de cálculo associado seja o menor possível.

Tendo em vista esta análise, reduzimos sistematicamente o valor do passo para todos os modelos analisados, até que a solução apresentou uma convergência suficientemente satisfatória. Em todos os casos, utilizamos o valor do passo levemente menor do que o maior valor do passo que obteve convergência satisfatória da solução. Estes valores de base são $h' \approx 0.01$ para os modelos de Mackey-Glass e de Lang-Kobayashi, e $h' \approx 0.005$ para os modelos de laser de CO₂ com e sem atraso.

Além disso, outro detalhe deve ser levado em consideração. Nas equações com atraso, temos que guardar todos os valores da solução entre $x(t)$ e $x(t - \tau)$. Para isso, definimos um vetor solução cujas componentes apresentam os valores de $x(t)$, $x(t - h)$, $x(t - 2h)$, ..., $x(t - mh)$, ..., $x(t - (n - 1)h)$, $x(t - nh)$, onde $nh = \tau$. Ou seja, h deve ser um múltiplo de

τ . Nos diagramas de bifurcação e nos diagramas de fase, definimos intervalos do valor do atraso onde a solução é analisada considerando-se a variação de τ . Digamos que os valores inicial e final do atraso nestes diagramas sejam τ_1 e τ_2 , respectivamente. Se a precisão do diagrama for de j pontos, o intervalo entre dois valores adjacentes de τ considerados neste diagrama é $\Delta\tau = (\tau_2 - \tau_1)/j$. Dessa forma, quando construimos um diagrama, de bifurcação ou de fase, iniciamos com o valor $\tau = \tau_1$, e os próximos valores do atraso serão $\tau_1 + \Delta\tau, \tau_1 + 2\Delta\tau, \dots, \tau_1 + j\Delta\tau$. O valor de $\Delta\tau$, assim como os valores de τ_1 e τ_2 , precisa ser um múltiplo do passo h . Além disso, se o diagrama tem uma precisão muito grande, ou seja, se j é muito grande, ou se a janela de valores de atraso é muito estreita, ou seja, se $\tau_2 - \tau_1$ é muito pequeno, os valores de $\Delta\tau$ se tornam muito pequenos. Para lidar com estes problemas, nossa rotina calcula o valor de $\Delta\tau$ e escolhe um valor para o passo h tal que ele seja o múltiplo de $\Delta\tau$ que mais se aproxima (por baixo, ou seja, com valor menor do que h') dos valores de base para o passo em cada modelo ($h' = 0.01$ para MG e LK, e $h' = 0.005$ para CO₂, como descrito acima). Caso o valor de $\Delta\tau$ seja menor do que o respectivo valor de base h' , o programa toma $h = \Delta\tau$.

C.3 Encontrando máximos locais e o período da solução

A maioria dos resultados apresentados nesta tese estão baseados na contagem do número de máximos locais por período da solução analisada. Mas como se mede o período ou se localiza os máximos locais da solução numericamente? Para isso, utilizamos métodos extremamente simples e que se mostraram bastante eficientes.

Todos os regimes de soluções mostrados e analisados nesta tese são regimes pós-transiente, ou seja, as soluções são consideradas após o sistema evoluir por um tempo transiente e se estabelecer em um regime definitivo de operação. Estes tempos foram determinados através de testes sistemáticos realizados em todos os modelos, onde os tempos transientes t_{trans} eram escolhidos de forma que fossem suficientemente grandes para que soluções definitivas fossem alcançadas, mas pequenos o suficiente para otimizar o tempo de cálculo. O valor para o tempo transiente que se mostrou ideal para todos os modelos foi $t_{trans} \approx 100.000$, nas unidades de tempo respectivas de cada modelo. Ou seja, os primeiros $100.000/h$ passos do processo de integração são ignorados na análise da solução.

Como dito acima, conforme evoluímos no cálculo da solução através do método RK4, guardamos os valores da solução em $x(t), x(t - h), x(t - 2h), \dots, x(t - nh)$ num vetor de $n + 1$ componentes. Após decorrido o tempo transiente, nossa rotina detectora de período começa a analisar a solução, comparando as soluções nos tempos $t, t - h$ e $t - 2h$. Se o valor da solução y em $t - h$ for maior do que os valores em t e $t - 2h$, dizemos que a solução tem um máximo em $t - h$, com amplitude $y(t - h)$. Em muitos casos, fizemos testes comparando os valores da solução nos tempos $t, t - 3h$ e $t - 6h$; e $t, t - 5h$ e

$t - 10h$, e este método se mostrou eficiente em todos os casos, para valores suficientemente pequenos do passo h . Além da amplitude, o valor dos tempos em que os máximos locais ocorrem também é guardado. Calculamos também o menor e o maior valor da solução, no intervalo temporal analisado, que é da ordem de $\Delta t = 50.000$ em todos os modelos. Se a diferença entre os valores máximo e mínimo da solução no intervalo analisado é menor do que um valor pequeno pré estabelecido, definimos a solução como sendo constante. Do contrário, a amplitude dos picos encontrados é analisada durante a evolução temporal. Se os valores da amplitude dos picos começa a se repetir sequencialmente, a rotina calcula a distância temporal entre os máximos com amplitudes iguais. Estes valores são iguais e correspondem ao período da solução. Na sequência, dado o período da solução, o número de máximos locais pode ser contado dentro deste intervalo temporal. Diversas verificações foram feitas durante a realização deste trabalho, através da análise direta do perfil da solução, e este método se mostrou extremamente eficiente na detecção tanto do período quanto do número de máximos locais por período da solução.

C.4 Computadores utilizados e tempos típicos de cálculo

Os programas que realizam os cálculos dos perfis da evolução temporal da solução e dos diagramas de bifurcação apresentados, que são programas seriais escritos em linguagem FORTRAN, foram desenvolvidos em um computador pessoal, com processador AMD Phenon II Triple-Core N850 de três núcleos com frequência de 2.2 Ghz. As evoluções temporais são obtidas em poucos segundos (a menos de testes para valores de passo pequenos ou de transientes grandes, quando alguns minutos são necessários). O cálculo dos diagramas de bifurcação exigem um tempo de aproximadamente 1.5h para serem calculados, considerando uma precisão $j = 500$. Diagramas que consideram a variação de τ demoram algo em torno de 10% mais tempo para serem calculados, na comparação com diagramas que consideram a variação de outros parâmetros, já que a variação do atraso exige que um novo vetor solução seja redefinido para cada novo valor de τ .

Os programas que calculam os diagramas de fase, que consideram a variação de dois parâmetros simultaneamente, são escritos utilizando-se o sistema MPI (*Message Passing Interface*) para computação paralela. Estes programas foram rodados nos clusters disponíveis no Centro Nacional de Supercomputação (Cesup-UFRGS). O Cluster Sun Fire (Newton) possui 45 nós de processamento (cada um com dois processadores Quad-Core AMD Opteron de 2.2 GHz de frequência), 1296 GB de memória RAM, 188 TB de capacidade de armazenamento, e possui uma performance teórica de pico de 12.94 Tflops. O Cluster SGI Altix (Gauss) possui 64 blades de processamento (cada um com dois processadores dodeca-core AMD Opteron de 2.3 GHz de frequência, totalizando 1536 núcleos de processamento), 4 TB de memória RAM, 174 TB de capacidade de armazena-

mento, e performance teórica de pico de 15.97 Tflops. O tempo de cálculo deste tipo de diagrama depende fortemente da precisão do diagrama e do número de processadores utilizados para realização do cálculo. Por exemplo, os diagramas observados na Fig. 4.1, que apresentam uma precisão de 400×400 pontos, foram calculados no cluster Newton, utilizando-se 20 processadores, e levaram ~ 5 h para serem calculados. Por outro lado, o diagrama da Fig. 5.7(a), que apresenta uma precisão de 1200×1200 pontos, foi calculado no cluster Gauss, com 100 processadores, e levou 7.7h para ser calculado.