UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL - UFRGS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Margareth Moraes Hofart

DESENHANDO RETÂNGULOS, PARALELOGRAMOS, TRIÂNGULOS E CÍRCULOS ATRAVÉS DA ÁLGEBRA: UMA POSSIBILIDADE DO *SOFTWARE GRAFEQ*

Porto Alegre

2013

Margareth Moraes Hofart

DESENHANDO RETÂNGULOS, PARALELOGRAMOS, TRIÂNGULOS E CÍRCULOS ATRAVÉS DA ÁLGEBRA: UMA POSSIBILIDADE DO *SOFTWARE GRAFEQ*

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Maria Alice Gravina

Porto Alegre

2013

Margareth Moraes Hofart

DESENHANDO RETÂNGULOS, PARALELOGRAMOS, TRIÂNGULOS E CÍRCULOS ATRAVÉS DA ÁLGEBRA: UMA POSSIBILIDADE DO *SOFTWARE GRAFEQ*

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Maria Alice Gravina

Aprovado em 03 de dezembro de 2013 com conceito A.

BANCA EXAMINADORA

Prof.ª Dra. Maria Alice Gravina

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof.ª Dr. Francisco Egger Moellwald

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof.ª Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por sempre me dar força e coragem na busca dos meus objetivos.

À minha mãe Marli e ao meu pai Salvador, por estarem sempre ao meu lado me apoiando e me incentivando.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, por esta grande oportunidade.

Aos professores da Graduação em Matemática pela excelente formação, empenho e dedicação ao longo de toda minha trajetória acadêmica.

Aos meus alunos das disciplinas de Laboratório e Estágio, que foram marcantes no início da minha prática docente e reafirmaram a minha vontade de querer ser professora de Matemática.

Ao Colégio Estadual Coronel Afonso Emílio Massot, que me recebeu de forma acolhedora, disponibilizando seu laboratório de Informática e permitindo a realização da minha experimentação.

A turma 104 do Colégio Estadual Coronel Afonso Emílio Massot pela cooperação, participação e dedicação na realização da sequência didática que compõe este trabalho.

À minha orientadora, Dra. Maria Alice Gravina, por ter me despertado o interesse na utilização da tecnologia no ensino de Matemática, por seu incentivo, sua dedicação e por suas sugestões sempre pertinentes que me levaram a conclusão deste trabalho.

"Bom mesmo é ir à luta com determinação,

abraçar a vida com paixão,

perder com classe e vencer com ousadia,

pois o mundo pertence a quem se atreve.

A vida é muito pra ser insignificante".

Charles Chaplin

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal promover uma sequência didática diferenciada para o ensino de equações e inequações no plano, em nível de Ensino Médio, explorando a construção de regiões no plano cartesiano por meio de relações de desigualdades, com a utilização do *software* matemático *GrafEq*. Para isso foi realizada uma experiência de ensino com alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública de Porto Alegre. A proposta é embasada na Engenharia Didática, um método de pesquisa que coloca em relação investigação e prática docente. A sequência didática, a que confere a experimentação desta pesquisa, foi aplicada no laboratório de Informática da escola ao longo de cinco encontros e as atividades propostas nestes encontros foram elaboradas segundo a Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval. No que se refere às conclusões, podemos dizer que houve significativa evolução das habilidades dos alunos quanto aos níveis de dificuldades apresentados na conversão de registros de representação, em especial na passagem do registro algébrico para o gráfico e vice-versa, mostrando-se válida a inserção de uma ferramenta tecnológica de ensino nesta proposta.

Palavras-chave: Ensino Médio. Conversão de registros de representação. *GrafEq*. Engenharia Didática. Inequações. Teoria das Representações Semióticas.

ABSTRACT

This work aims to promote an instructional sequence for teaching equations and inequalities at the level of secondary education. The design of the sequence took into account the theory of semiotics representation of Duval. The sequence explores the construction of regions through inequality relationships and makes use of the software GrafEq. It was tested with a group of students in their high school first year of a public school in Porto Alegre. Regarding the findings, it could be said that there was significant improvement of the students' skills to produce conversions of registers, especially from the geometric to the algebraic one.

Keywords: High school. Registers of representation. Software GrafEq. Algebra. Geometry.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Diferentemente de alguns anos atrás, hoje em dia a tecnologia vem ganhando cada vez mais espaço no nosso dia-a-dia; seja na troca de mensagens via celular ou internet, na elaboração de trabalhos acadêmicos, nas pesquisas escolares, nas reportagens das principais revistas e jornais ou nos telejornais televisivos; não importa, todo assunto acaba tendo a tecnologia embutida no contexto. E cada vez mais novos aparelhos superpotentes e com "mil e uma" utilidades chegam ao mercado para nos atrair.

No entanto, percebemos que tal evolução tecnológica ainda não se faz presente neste mesmo ritmo na prática de professores de Matemática e nos laboratórios escolares.

> Isto ocorre, em boa parte, porque uma quantidade considerável de professores fez sua formação antes da ampla divulgação dos recursos didáticos digitais. Assim, é compreensível que eles prefiram manter-se afastados das práticas que fazem uso de tais recursos. (GRAVINA & NOTARE, 2013, p.1)

Neste sentido, consideramos importante que os futuros professores de Matemática inspirem-se para trabalhar com seus alunos fazendo uso das tecnologias. Em particular, inúmeras são as opções de *softwares* que temos à disposição para trabalhar diferentes conteúdos da matemática escolar. Estes *softwares* são ferramentas que de forma dinâmica e interativa podem contribuir no aprendizado de conteúdos que, nas circunstâncias tradicionais de ensino, por vezes se apresentam como incompreensíveis e/ou desinteressantes para o aluno.

Neste trabalho apresentamos uma sequência didática para o ensino de equações e inequações no plano, em nível de Ensino Médio, que julgamos ser diferenciada no que diz respeito à integração e ao uso do *software* matemático *GrafEq*. Na organização da sequência levamos em conta o processo de conversão de registros – do algébrico para o geométrico e vice-versa – preconizado por Duval (2012) como uma condição necessária à consolidação de ideias e conceitos matemáticos. As conversões de registro acontecem no conjunto dos retângulos, paralelogramos, triângulos e círculos, transitando entre equações e inequações. Inicialmente, as atividades focam na conversão álgebra – geometria; e num segundo momento exploram a conversão inversa.

Para a realização desta investigação, nos embasamos nos pressupostos da Engenharia Didática, uma metodologia de pesquisa que relaciona pesquisa com experimentação em sala de aula. Utilizamos este método de pesquisa por acreditar que ele possibilita uma boa estruturação do trabalho, além de proporcionar uma verificação da pesquisa com a prática docente.

A sequência didática foi aplicada com uma turma do 1º ano do Ensino Médio, ao longo de cinco encontros, no Laboratório de Informática de uma escola pública localizada no município de Porto Alegre. Como referencial para à elaboração destas atividades utilizamos como embasamento teórico a Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval.

Organizamos este trabalho em quatro capítulos. No capítulo dois, abordamos a Teoria das Representações Semióticas, fundamentação teórica escolhida para a elaboração desta pesquisa, bem como as dificuldades apresentadas pelos alunos na conversão dos diferentes registros algébricos e geométricos e as possibilidades do *software* matemático *GrafEq* nesta compreensão. Exploramos ainda a fundamentação matemática dos conteúdos desenvolvidos ao longo da sequência didática, deduzindo as equações reduzidas da reta e da circunferência, definindo retas paralelas e as construindo de figuras planas básicas (retângulos, paralelogramos, triângulos e círculos).

O terceiro capítulo, apresenta a organização e realização de uma experiência didática com a utilização do *software GrafEq*, tendo como embasamento a proposta metodológica da Engenharia Didática. Neste capítulo tratamos ainda da análise *a priori* do tema proposto para esta pesquisa, apresentamos os sujeitos participantes da nossa experiência e a sequência didática, em que são detalhados os cinco encontros realizados.

No capítulo quatro relatamos a análise da experiência didática e os resultados obtidos com a sua aplicação em sala de aula. Ainda neste capítulo, realizamos uma análise *a posteriori* de cada um dos encontros, individualmente, como forma de avaliar a proposta de ensino, identificando suas contribuições ao grupo de alunos avaliados durante a experimentação.

O quinto e último capítulo apresenta as contribuições finais deste trabalho.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo abordamos primeiramente os conteúdos de matemática a serem utilizados na sequência didática, a qual consiste a prática deste trabalho. Como aporte matemático, serão requisitos indispensáveis para a nossa proposta, o sistema de coordenadas cartesianas, distância entre dois pontos, a equação da reta (reduzida e geral), identificação dos coeficientes angular e linear na equação da reta, posição relativa de duas retas no plano e equação da circunferência.

Na segunda seção deste capítulo, discorreremos sobre a Teoria das Representações Semióticas de Duval, aporte teórico que busca esclarecer a estruturação da sequência didática, na sua graduação de exigência de habilidades para fazer conversões entre representações algébricas e geométricas. São abordadas ainda as principais dificuldades apresentadas por alunos na passagem do registro algébrico para o geométrico e vice-versa, especificando como este trabalho pode vir a contribuir nestes percalços.

Encerrando este capítulo, a terceira seção apresenta o *software* matemático *GrafEq*, recurso tecnológico escolhido para a realização da nossa proposta metodológica no Ensino Médio. De forma concisa, abordamos o potencial semiótico deste *software* e suas possibilidades no ensino de equações e inequações no plano.

2.1 OS CONTEÚDOS DE MATEMÁTICA

Esta primeira seção do capítulo 2 tem como foco apresentar a fundamentação matemática que explica as construções das figuras planas básicas: retângulos, paralelogramos, triângulos e círculos, as quais abordamos neste trabalho. Como aporte teórico, foram utilizadas contribuições da Dissertação de Mestrado de Goulart (2009) para elaboração desta seção.

Com o objetivo de construir regiões retangulares, iniciamos a nossa fundamentação com uma explanação do sistema de coordenadas cartesianas e a noção de plano cartesiano. Em seguida deduzimos a equação da reta, trabalhando também a posição relativa de duas retas no plano: retas paralelas e retas concorrentes, conceitos essenciais para a construção de paralelogramos e triângulos.

Encerrando esta seção, visando à construção de círculos no plano cartesiano, deduzimos a equação da circunferência centrada na origem e, posteriormente, a equação da circunferência com centro em ponto arbitrário.

- O sistema de coordenadas cartesianas

Um sistema de eixos ortogonais é estabelecido por dois eixos perpendiculares entre si e de mesma origem, chamados de eixos coordenados O_x e O_y. Estes eixos dividem o plano cartesiano em quatro regiões, chamadas de quadrantes (Figura 1). Nomeamos como eixo das abscissas a reta orientada x e eixo das ordenadas a reta orientada y.

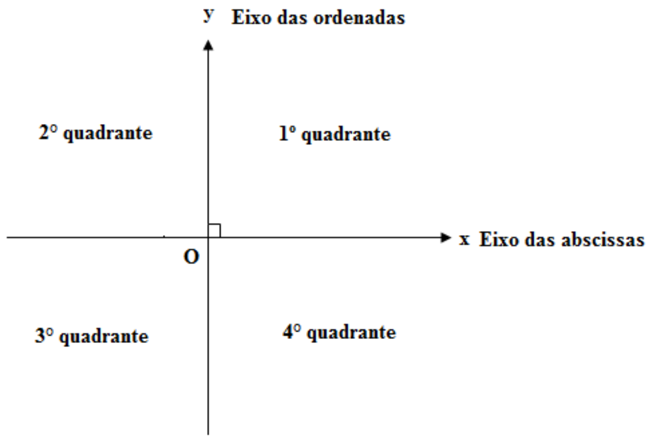


Figura 1 - Sistema de eixos ortogonais

Usamos sistemas de coordenadas quando queremos localizar pontos no plano. Assim, dado um ponto P qualquer do plano, podemos associar a esse ponto um par ordenado de números reais, P = (x’, y’). Dizemos que os números reais x’ e y’ são as coordenadas cartesianas do ponto P, onde x’ é a abscissa de P e y’ é a ordenada de P (ver Figura 2).

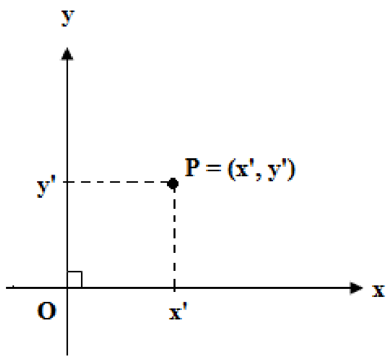


Figura 2 - Ponto P de coordenadas (x', y')

Para cada ponto do plano existe um único par ordenado de números reais correspondentes, do mesmo modo que para cada par ordenado de números reais dado localizamos um único ponto no plano. Essa correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares de números reais nos permite definir conceitos e propriedades geométricas na linguagem algébrica, bem como interpretar geometricamente relações entre números reais.

Visando a dedução de equações como, por exemplo, a equação geral do círculo, é fundamental estudarmos o conceito de distância entre dois pontos no plano.

- Distância entre dois pontos

Dados dois pontos $P_1 = (x_{1,}\ y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, obtemos a fórmula da distância d = $(P_{1,}\ P_2)$ em termos das coordenadas de P_1 e P_2, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo P_1QP_2, conforme observamos na Figura 3.

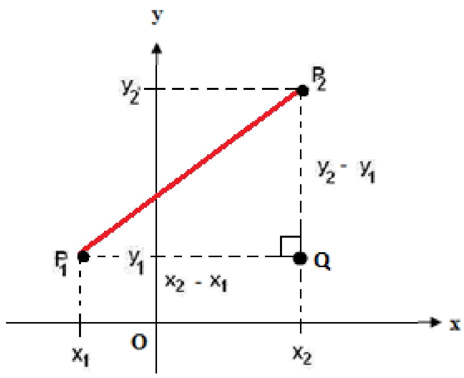


Figura 3 - Distância entre os pontos $\boldsymbol{P_1}$ e $\boldsymbol{P_2}$

Como o triângulo P_1QP_2 é retângulo em Q, com hipotenusa $\overline{P_1\,P_2}$ e catetos medindo $|(x_2 - x_1)|$e $|(y_2 - y_1)|$, tomados em valores absolutos, segue que:

d² = $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, ou seja,

d = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

- Equação da reta

Toda reta r do plano cartesiano pode ser representada por meio de uma equação. Esta equação, como veremos nos próximos parágrafos, possui a forma y = ax + b, com a e b números reais e x e y as coordenadas cartesianas de um ponto qualquer pertencente à r.

Primeiramente, tomemos uma reta r qualquer que passa pelo ponto O = (0, 0), origem do sistema de coordenadas cartesianas e P_1 = (1, a), um ponto pertencente a reta r (Figura 4). Se P = (x, y), também é um ponto da reta r, então usando a semelhança de triângulos, chegamos à seguinte relação:

$\frac{y}{x} = \frac{a}{1}$ e, portanto, y = ax.

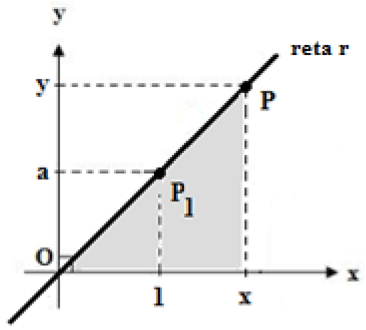


Figura 4 - Equação da reta r que passa pelo ponto (0, 0)

Tomemos agora r', reta paralela à reta r. Como já vimos, a reta que passa pela origem do sistema de coordenadas possui a forma y = ax, ou seja, o valor do termo independente b na equação é zero. Na Figura 5, a congruência dos lados opostos verticais do paralelogramo explica porque os pontos da reta r', paralela à reta r, possuem coordenadas na forma (x, ax + b), e então podemos representá-la pela equação y = ax + b. Portanto, a equação que representa a reta r' possui termo independente b diferente de zero. Com isso, obtemos as respectivas equações: y = ax e y = ax + b para representar as retas r e r'. Neste momento queremos explicitar que o ponto fundamental aqui é mostrar que ambas as retas (paralelas entre si) possuem o mesmo coeficiente angular, definição esta que trataremos no item seguinte.

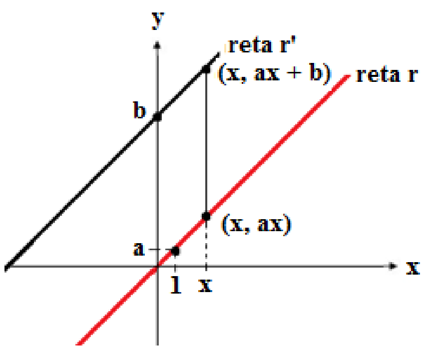


Figura 5 - Equação da reta r' que não passa pelo ponto (0, 0)

- Coeficiente angular de uma reta no plano

Cada reta não vertical do plano está associada a um número real a que especifica uma direção, denominado coeficiente angular ou declividade da reta. Podemos interpretar geometricamente o coeficiente angular como a declividade de uma reta quando marcamos as coordenadas dos eixos ortogonais no plano cartesiano, utilizando a mesma unidade de medida. Considere a reta r na Figura 6 e dois pontos quaisquer $P_1 = (x_{1,}\ y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ pertencentes a esta reta. Se considerarmos que o ângulo entre a reta r e o eixo das abscissas (O_x) tem medida α, segue que:

$$\text{tg}\ (\alpha) = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{a}{1} = \text{a} = \frac{|y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|}$$

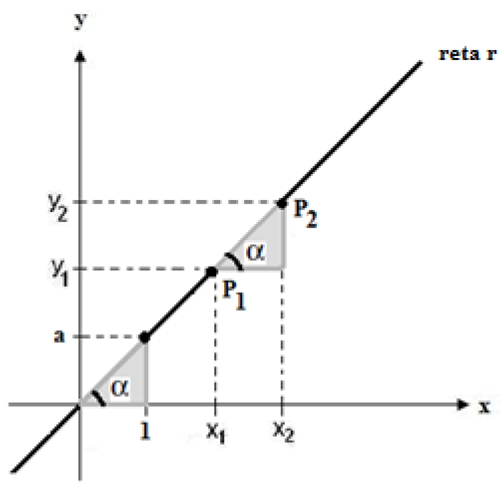


Figura 6 - Cálculo do coeficiente angular a

O coeficiente b, termo independente da equação da reta y = ax + b é denominado coeficiente linear. Este termo tem a propriedade de definir a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas (O_y).

- Equação Geral da reta

Toda reta possui uma equação da forma Ax + By + C = 0, chamada de equação geral da reta. De fato percebemos que:

- se B = 0 e A ≠ 0, temos que x = $-\frac{C}{A}$, que determina a equação de uma reta vertical;
- se A = 0 e B ≠ 0, temos que y = $-\frac{C}{B}$, que determina a equação de uma reta horizontal;
- se A e B são ambos não-nulos, temos que By = - Ax – C, ou seja,

  y = $-\frac{A}{B}x \; -\frac{C}{B}$, que determina a equação reduzida de uma reta com coeficiente angular a = $-\frac{A}{B}$ e coeficiente linear b = $-\frac{C}{B}$.

- Posições relativas de duas retas no plano

Duas retas coplanares distintas, r e s, podem apresentar duas possibilidades com respeito a suas posições relativas: serem paralelas ou concorrentes.

As retas r e s são paralelas quando não possuem ponto comum, ou seja, r é equidistante de s em toda a sua extensão. Notemos que para que duas retas r e s sejam paralelas, não é necessário que uma delas passe pela origem, como podemos observar na Figura 7.

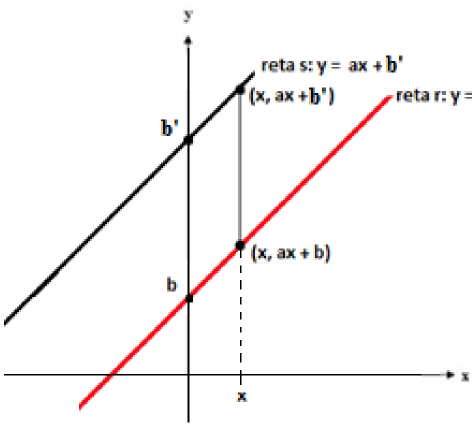


Figura 7 - Duas retas paralelas

Desta forma, podemos enunciar a seguinte propriedade: Duas retas quaisquer são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares forem iguais. Ou seja, duas retas coplanares de equações y = ax + b e y = a'x + b' são paralelas se, e somente se, temos os coeficientes a = a'.

Caso os coeficientes angulares de duas retas coplanares não sejam iguais, então obrigatoriamente essas duas retas são concorrentes, ou seja, possuem um único ponto em comum. Consideremos duas retas concorrentes r e s que se interceptam no ponto P_1 e possuem as respectivas equações y = ax + b e y = a’x + b’ (Figura 8).

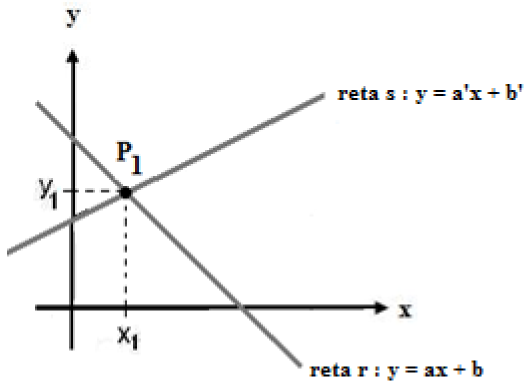


Figura 8 - Duas retas concorrentes

Observemos que as coordenadas do ponto $P_1 = (x_1, \ y_1)$ determinam o conjunto solução do sistema de duas equações abaixo:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases}$$

Duas retas concorrentes podem ainda ser perpendiculares, ou seja, se interceptar formando ângulos adjacentes congruentes (ângulos retos).

Primeiramente pensaremos em duas retas perpendiculares r e s que se interceptam na origem do sistema de coordenadas e possuem as respectivas equações: y = ax e y = a’x, sempre considerando a ≠ 0 (Figura 9).

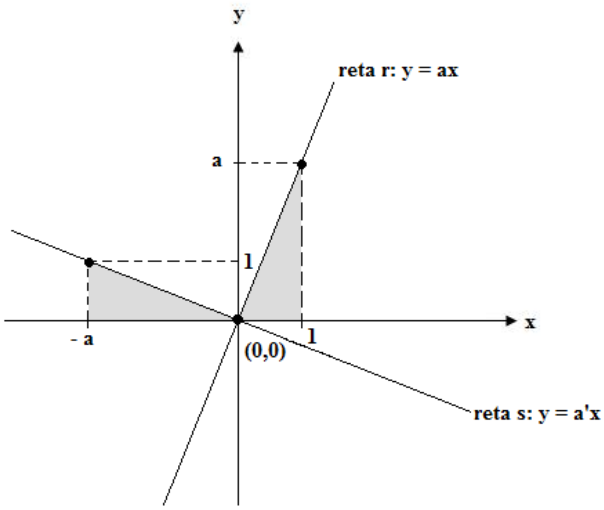


Figura 9 - r e s retas concorrentes e perpendiculares

Temos que os triângulos grifados na Figura 9 são congruentes, portanto tem catetos medindo a e 1. Logo triangulo grifado do segundo quadrante informa que o ponto (-a, 1) esta na reta de equação y = a'x ou seja temos que:

y = a'x

1 = a'(-a)

a' = $-\frac{1}{a}$

Assim, podemos concluir a seguinte propriedade: Duas retas r e s são perpendiculares se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares é igual a -1. Ou seja, se os coeficientes satisfazem a relação a' = $-\frac{1}{a}$.

Observamos que no raciocínio feito acima estamos tomando a > 0 na reta y = ax. O argumento para o caso em que a < 0 é similar, mas devemos considerar, com cuidado, as medidas dos lados dos catetos dos novos triângulos retângulos.

Analogamente, podemos obter a relação acima para duas retas concorrentes que não se interceptam na origem do sistema de coordenadas, considerando as retas paralelas às retas dadas passando pela origem.

- Equação da circunferência

A dedução da equação de uma circunferência no plano cartesiano utiliza diretamente o cálculo da distância entre dois pontos nesse mesmo plano.

Seja O um ponto e r um numero positivo. Uma circunferência de centro O e raio r é definida pelo conjunto de todos os pontos do plano que se mantem à distância r de O. Os segmentos com extremidade em O e medindo r são também chamados de raios da circunferência. Na Figura 10, $\overline{OP}$ é um raio da circunferência descrita.

Desse modo, usando a fórmula da distância entre dois pontos, podemos encontrar a equação da circunferência C = (O, r). Para isso, analisemos primeiramente uma circunferência centrada na origem, C = (0, 0), conforme a Figura 10.

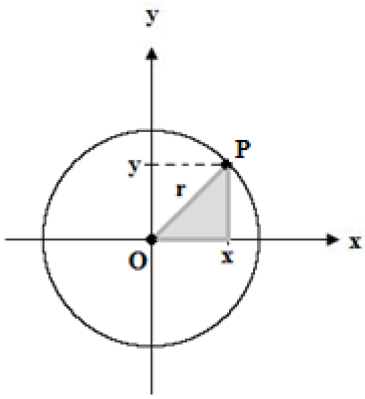


Figura 10 - Circunferência de centro C = (0, 0)

Considerando o triângulo OXP, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos:

$|x - 0|^2 + |y - 0|^2 = |r|^2$, ou seja,

$(x – 0)^2 + (y – 0)^2 = r^2$ e, portanto,

$x^2 + y^2 = r^2$ é a equação da circunferência centrada na origem.

Da mesma forma, podemos definir a equação de uma circunferência de centro arbitrário C = (x_c, y_c). De fato, um ponto P, de coordenadas (x, y) está na circunferência de centro (x_c, y_c) se, e somente se, a distância do ponto P ao centro dessa circunferência é igual ao raio r (Figura 11).

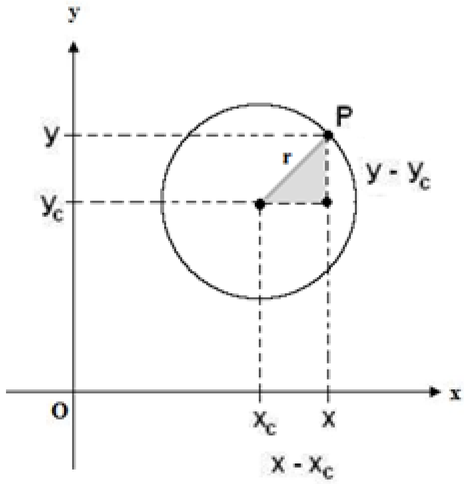


Figura 11 - Circunferência de centro C = $(\boldsymbol{x_c}, \boldsymbol{y_c})$

Então, $|x - x_c|^2 + |y - y_c|^2 = |r|^2$, logo $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$ é a equação reduzida da circunferência de centro (x_c, y_c).

2.2 A TEORIA DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Nesta seção, abordamos a Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval, aporte teórico utilizado na construção da sequência didática, a ser apresentada no capítulo 3.

Nas últimas décadas, diversos estudantes e pesquisadores em Educação Matemática vêm explorando as representações semióticas e em especial a teoria elaborada por Duval (2012). Muitos trabalhos já foram publicados visando uma maior compreensão e aplicação da teoria das representações semióticas, bem como sua contribuição no que diz respeito ao processo de aprendizagem da matemática. Dentre eles destacamos os trabalhos de Damm (1999), Gravina e Notare (2013) e Paula (2011), que serão usados como referência nas reflexões que faremos a seguir.

Para Damm (1999), não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma representação. Desta forma, segundo essa autora, seria impossível se adquirir qualquer conhecimento matemático sem recorrer a alguma forma de representação. Isto porque a matemática é uma ciência abstrata; grande parte dos objetos matemáticos não são perceptíveis, manipuláveis, necessitando então de uma representação que os defina.

Assim, qualquer forma de representação, seja ela em forma de símbolos, gráficos ou algoritmos, é de grande importância na busca de estabelecer uma comunicação entre o sujeito e as atividades cognitivas do seu pensamento. Esta interligação permite que um mesmo objeto matemático possa ser representado perante diferentes registros de representação.

Dentre os registros de representação que podem ser utilizados para representar um objeto matemático, podemos destacar

> [...] o registro algébrico com suas regras de funcionamento que, por exemplo, levam à resolução de uma equação; o registro geométrico com regras de tratamento que levam à identificação dos elementos pertinentes de uma figura, e dentro deste registro inclui-se o de natureza gráfica dado por sistema de coordenadas cartesianas e curvas que nele são desenhadas; o registro discursivo em linguagem natural, e também com símbolos, com suas regras convencionais de comunicação. (DUVAL apud GRAVINA & NOTARE, 2013, p. 3)

Entretanto, diversas pesquisas em Educação Matemática vêm constatando o quanto a passagem de uma forma de representação para outra é vista como uma dificuldade no ambiente escolar. Para Damm (1999), o aluno

> [...] consegue fazer tratamentos em diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, porém é incapaz de fazer as conversões necessárias para a apreensão deste objeto. Esta apreensão é significativa a partir do momento em que o aluno consegue realizar tratamentos em diferentes registros de representação e "passar" de um a outro o mais naturalmente possível. (p.136)

Duval (2012) define a noção de representação em dois grandes grupos: mentais ou semióticas. "As representações mentais recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as concepções que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhes está associado" (p. 269). Já as representações semióticas "[...] são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação que têm inconvenientes próprios de significação e de funcionamento" (p. 269).

Podemos entender como representações mentais as associações que realizamos no mundo abstrato de nossas ideias quando nos deparamos com determinado objeto matemático. São as representações produzidas com nosso pensamento, nossa imaginação e intuição sobre o objeto em questão. Por exemplo, quando falamos em função do 1° grau, é natural que mentalizemos em nosso pensamento o esboço de uma reta, assim como é automático imaginarmos uma parábola quando pensamos numa função do 2° grau.

Já nas representações semióticas empregamos símbolos para representar um determinado objeto matemático. Assim, uma fórmula algébrica, um gráfico e uma figura geométrica são todas formas de representação semiótica, exibidas através de sistemas semióticos distintos. Voltemos aos exemplos dados anteriormente: a função do 1° grau e a função do 2° grau, para compreender melhor em que consistem as representações semióticas.

Quando mentalizamos a reta, ao nos deparamos com a definição de função do 1° grau, estamos de certa forma elaborando a primeira etapa do pensamento, através de uma representação mental. A seguir, podemos "passar para o papel" o esboço desta reta (registro de representação gráfica) ou ainda escrevê-la algebricamente como $y = ax + b$ (registro de representação algébrica), sendo estas consideradas representações semióticas para o objeto matemático função do 1° grau. Analogamente para a função do 2° grau, podemos desenhar no papel a parábola anteriormente imaginada ou, por fim, representá-la algebricamente como $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Assim, as representações mentais e as representações semióticas podem ser consideradas como domínios do conhecimento que se complementam, pois o desenvolvimento das representações mentais constitui-se como a assimilação das representações semióticas. Voltemo-nos então agora ao estudo mais aprofundado da Teoria das Representações Semióticas, foco central desta seção.

A Teoria das Representações Semióticas, desenvolvida por Raymond Duval, surgiu como interesse de entender as dificuldades apresentadas por alunos na compreensão de conceitos matemáticos e em buscar investigar quais seriam as origens destas dificuldades. Tal teoria define que para estas razões sejam estudadas, muito além de restringir-se ao campo matemático ou à história, seria necessário ao pesquisador elaborar uma análise cognitiva do aluno, ou seja, investigar como o sujeito pensa (DUVAL apud PAULA, p. 34-35).

Neste sentido, as representações semióticas, caracterizadas por vezes erroneamente como apenas uma ponte para se estabelecer a comunicação das representações mentais, podem ser consideradas, segundo Duval (apud DAMM, 1999, p. 143), como "[...] igualmente essenciais para as atividades cognitivas de pensamento". De modo que, concordando com Duval, Damm (1999) afirma que, para que haja a aquisição de conhecimentos, é indispensável se transitar pelas várias representações de um mesmo objeto a fim de obter sua apreensão, ou seja, torna-se necessária uma coordenação entre os registros de representação semiótica deste objeto matemático.

Duval (in DAMM, 1999, p. 143) denomina “*semiósis* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e *noésis* a apreensão conceitual de um objeto”. Ele afirma que para que ocorra a apreensão de um objeto matemático é necessário que a *noésis* (conceitualização) ocorra através de significativas *semiósis* (representações) (DAMM, idem, ibidem).

A *semiósis* seria então inseparável das atividades cognitivas de pensamento, constituindo-se na formação de representações num registro semiótico específico e posteriormente na sua transformação perante outras representações em que se conserva parcial ou totalmente o registro de representação inicial do objeto matemático. Enquanto que a *noésis* se constituiria nos atos cognitivos que nos levam a aquisição conceitual de um objeto matemático, sua compreensão num todo, nos permitindo identificar um mesmo objeto matemático perante diferentes registros de representação.

Por isso, entendemos que a *noésis* não se constitui sem que ocorra a *semiósis,* de modo que não ocorre a aquisição conceitual de um objeto matemático sem que se dependa para isso de uma coordenação entre os diferentes modos de registros de representação semióticos.

Podemos exemplificar tais considerações da seguinte maneira: consideremos um sistema de inequações do 1° grau e formas de apresentar os seus diferentes registros de representação.

Registro algébrico: $\{x, y \in \Re \,/\, 1 \leq x \leq 6 \text{ e } 0 \leq y \leq 4\}$

Registro gráfico:

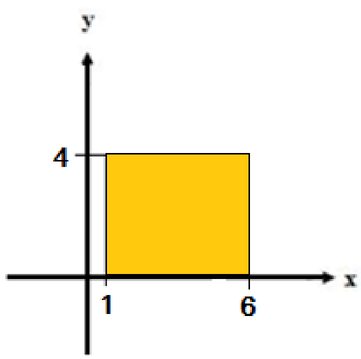


Figura 12 - Registro de representação gráfica

Registro discursivo em linguagem natural: conjunto dos pares ordenados (x, y), tais que x pertence ao intervalo fechado entre um e seis, e y pertence ao intervalo fechado entre zero e quatro.

Portanto, em um sistema de inequações do 1° grau podemos considerar três diferentes registros de representação: a representação algébrica, a representação por meio de gráfico e a representação na linguagem natural. Além destes registros citados, podemos ter um registro geométrico referindo-nos ao retângulo de 4 unidades de altura e 5 unidades de base.

Observemos que a representação gráfica desta relação de desigualdade (Figura 12) nos fornece o esboço de uma região plana. A saber, o sistema de inequações $\{1 \leq x \leq 6; 0 \leq y \leq 4\}$, quando representado geometricamente, define um retângulo de 5 unidades de medida de base e 4 unidades de medida de altura, delimitado no plano cartesiano pela ordenada y entre 0 e 4 e pela abcissa x entre 1 e 6.

Entretanto, muitas vezes o aluno consegue interpretar um determinado objeto matemático perante um registro de representação particular (definição de *semiósis*), porém não consegue associar este mesmo objeto quando apresentado perante outro registro de representação. Esta dificuldade demonstra que o aluno não apreendeu o conceito do objeto matemático em questão como um todo, não o contextualizou formalmente (definição de *noésis*). Segundo Damm (1999) isso ocorre porque

> A apreensão conceitual dos objetos matemáticos somente será possível com a coordenação, pelo sujeito que apreende, de vários registros de representação. Ou seja, quanto maior for a mobilidade com registros de representação diferentes do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão deste objeto. (p. 143-144)

Ou seja, é importante no processo de ensino-aprendizagem, que haja uma complementaridade entre os diferentes registros de representação, que avaliados individualmente fornecem apenas dados parciais de um objeto matemático, impedindo a compreensão do conteúdo como um todo. Bem como, é a coordenação entre os diferentes registros de representação que permite que ocorra a apreensão do objeto estudado e que sua conceitualização se estabeleça.

Conforme a Teoria de Duval, os registros de representação semiótica são caracterizados por dois tipos de transformações bem distintos entre si: o tratamento e a conversão. Segundo Damm (1999), a conversão de uma representação ocorre quando transformamos um registro em outro registro, preservando sua totalidade ou parte do objeto matemático que está sendo representado. Enquanto que o tratamento de uma representação permite transformar a representação do objeto matemático no próprio registro em que ele foi formado.

De um modo mais claro, quando efetuamos um cálculo matemático preservando o mesmo sistema de escrita, por exemplo, na adição dos números racionais 0,2 + 0,2 = 0,4 e 2/10 + 2/10 = 4/10 = 2/5, percebemos duas representações possíveis e distintas (decimal e fracionária) para um mesmo objeto matemático, realizando então um tratamento (transformação interna). Mantém-se o registro, neste caso, o registro algébrico. Ou seja, quando resolvemos cálculos deste tipo, estamos mudando a representação de um objeto matemático, porém sem alterar o seu registro inicial. Enquanto que, por exemplo, no estudo de funções, quando passamos de um registro algébrico para o gráfico, estamos alterando a representação do objeto matemático e também modificando o registro dado a este objeto inicialmente. Há uma migração do registro algébrico para outro registro, o gráfico.

No entanto, mudar a forma de representação de um objeto, estabelecendo sua conversão (mudança de registro), na maioria dos casos se apresenta como uma operação complicada ou quase impossível para muitos alunos nas diferentes etapas de ensino. Para Damm (1999) isso ocorre porque é "como se a compreensão que a grande maioria dos alunos têm de um conteúdo estivesse limitada à forma de representação utilizada" (p. 150). De modo que muitas vezes o aluno consegue identificar certo registro de representação e associá-lo a um determinado objeto matemático, porém é incapaz de identificar este mesmo objeto quando representado perante outro registro.

Visando esta dificuldade apresentada pelos alunos é que elaboramos este trabalho, com o propósito de explorar com alunos de Ensino Médio a conversão dos registros algébrico para o geométrico e vice-versa através da construção de figuras planas no plano cartesiano. Para isso faremos uso do *software* matemático *GrafEq* o qual passaremos a discorrer neste próximo parágrafo.

2.3 O *SOFTWARE GRAFEQ* E SUAS POSSIBILIDADES

Nossa proposta de ensino consiste em trabalhar com a construção de regiões no plano, dadas por inequações em duas variáveis. É nossa intenção elaborar uma sequência de atividades que proporcione aos alunos uma maior compreensão quanto à conversão do registro algébrico para o geométrico e vice-versa.

Para atingir nossas expectativas, escolhemos o *software* matemático *GrafEq* como ferramenta tecnológica de ensino. Este *software*, além de possuir uma interface muito simples, permite ao aluno explorar um objeto matemático visualizando simultaneamente sua forma algébrica e sua representação gráfica, esboçando desenhos e figuras geométricas coloridas de forma interativa e divertida.

Passamos, agora, a apresentar de maneira concisa o *software* escolhido para a elaboração deste trabalho, bem como seu potencial semiótico, o qual será muito útil na busca de nossos objetivos.

O *GrafEq*, disponível para download em HTTP://www.peda.com/grafeq/, é um *software* dinâmico e de simples manipulação, voltado para o ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos, dentre eles, o estudo de inequações no plano, famílias de funções e equações da geometria analítica plana. A versatilidade das conversões do registro algébrico para o geométrico "é um aspecto do seu potencial semiótico que pode muito ajudar na aprendizagem das equações e relações envolvendo as coordenadas (x,y) no plano" (GRAVINA & NOTARE, 2013, p. 5), na medida em que

> O *software* coloca os estudantes em situações que permitam a exploração de acordo com a necessidade [...] e semelhança da escrita das equações com a escrita no caderno. O dinamismo encontrado no uso do *GrafEq* é notado quando o estudante altera parâmetros da relação algébrica e verifica diferenças na representação geométrica equivalente. (SANTOS et al apud STREMEL, 2012, p. 3)

Desta forma, este *software* permite que o aluno, de forma habitual, possa descrever a equação ou inequação de interesse e, em tempo real visualizá-la, podendo manipular a expressão descrita anteriormente em caso de não obter o resultado desejado. Basicamente, o aluno necessita tomar

> [...] como ponto de partida uma função [...] e aplicando operações algébricas sobre sua expressão, assim produzir diferentes transformações no seu gráfico – translações, reflexões, dilatações, contrações – de modo a obter a "forma" desejada. (BASSO et al, 2012, p. 23)

O *GrafEq* possui dois tipos de janelas em que são estabelecidas as conversões: as janelas para o registro algébrico e as janelas para o registro gráfico, além de uma janela para edição. Conforme ilustramos na Figura 13, temos à direita a janela com ferramentas para edição, que permite ao aluno escolher as cores de sua preferência e fazer mudanças de escala; já à esquerda estão as janelas para o registro algébrico que são criadas ao selecionarmos o item “Nova Relação” na barra de ferramentas opção “Gráfico”; e ao centro encontra-se a janela que apresenta o registro gráfico da equação. Para se estabelecer uma nova relação no *GrafEq*, basta que se digite na janela de relações (a esquerda) uma expressão algébrica, que por sua vez definirá uma figura geométrica ou uma região do plano que se pretende construir. Para que o *software* esboce a relação graficamente clica-se então em *enter*, neste momento o aluno tem ainda a opção de optar por coordenadas polares ou cartesianas, pelo tamanho da vista e as extremidades do eixo. Clicando novamente em *enter*, a representação gráfica referente à relação escolhida é desenhada e o aluno tem a oportunidade de esboçar diversos gráficos em uma mesma janela, repetindo este mesmo procedimento.

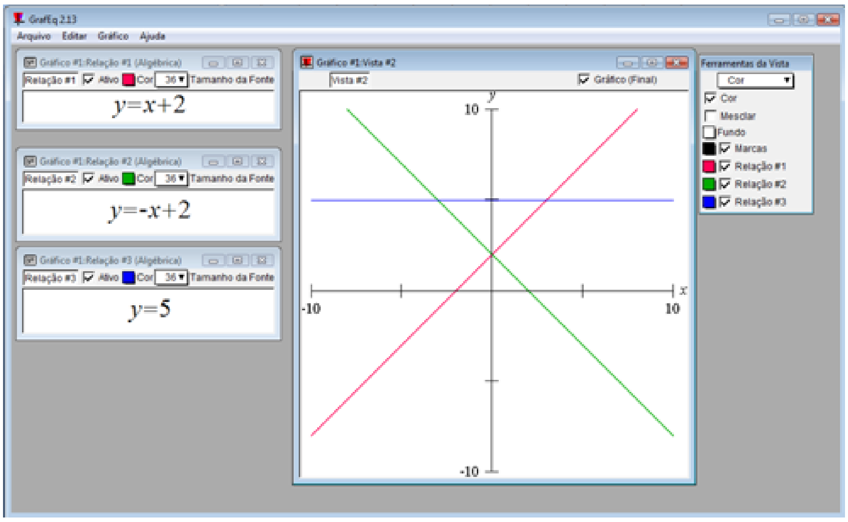


Figura 13 - Interface do *GrafEq*

A possibilidade que o aluno tem de, após escrever uma relação algébrica, verificar a sua representação gráfica de modo instantâneo é um dos principais benefícios do uso deste *software* no ambiente escolar. Deste modo, se não obtiver o resultado esperado, o aluno pode, ele mesmo, analisar as propriedades utilizadas e verificar quais modificações ele deve fazer na expressão algébrica inicial, editando-a na janela de relações.

O *software* permite que o aluno desenhe desde figuras geométricas simples como retângulos e círculos até outras mais complexas, como elipses e hipérboles. Para isto, basta que se digite na janela de relações a equação ou inequação que constrói a região desejada, prosseguindo conforme anteriormente. Fazendo uso do *software* é possível ainda colorir regiões, como podemos ver na Figura 14, em que são construídos um círculo de raio dois, um quadrado de lado quatro e um triângulo de altura seis e base medindo 12 unidades de comprimento.

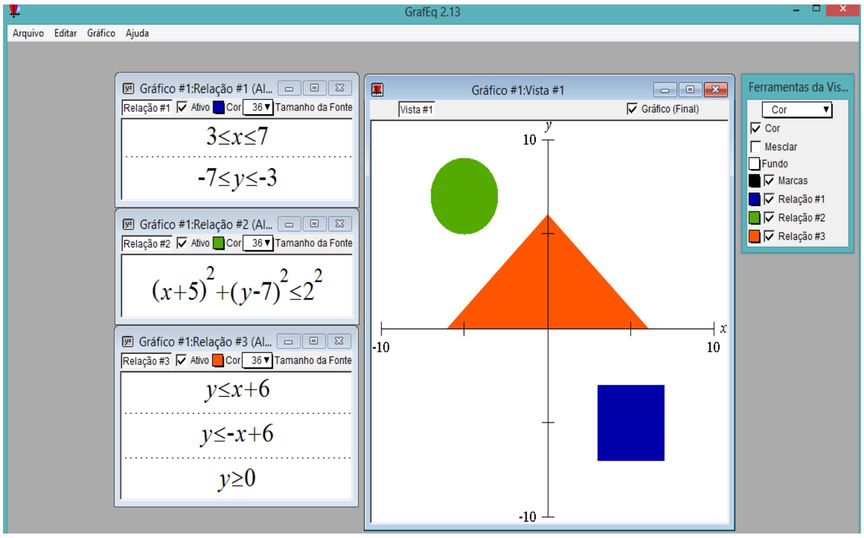


Figura 14 – Construção de regiões no plano cartesiano

Percebemos que nas janelas de relação #1 e #3 da Figura 14, que representam respectivamente a construção do quadrado e do triângulo, foi necessário estabelecer a intersecção de mais de uma região no plano, ou seja, elaboramos a inclusão de diferentes relações de desigualdade em uma mesma janela algébrica. Este recurso é possível utilizando-se a tecla “tab” do computador.

A intersecção de regiões planas é tida também como um potencial semiótico significante deste *software*, tendo em vista que muitas vezes o aluno fica relutante em associar certa intersecção de desigualdades ao desenho esboçado pelo *software*. De fato,

> Em experiências com alunos, muitas vezes, detectamos conflitos cognitivos frente à aparente não resposta do *software* ao desenho de forma resultante de intersecções de conjuntos – os alunos não entendem, de imediato, que a intersecção solicitada via desigualdades algébricas é um conjunto vazio e que, portanto, o *software* está respondendo de forma adequada. (GRAVINA & NOTARE, 2013, p. 7)

Escrever equações que fazem uso de parâmetros também se configura como possibilidade do *software* matemático *GrafEq*, como podemos visualizar na Figura 15, na qual as retas paralelas são constituídas com o emprego dos parâmetros *a* e *b*. Usando essa possibilidade, o aluno pode elaborar na janela de registro geométrico uma família de curvas através de uma expressão algébrica com parâmetros definidos, utilizando para isso apenas uma janela de relação algébrica.

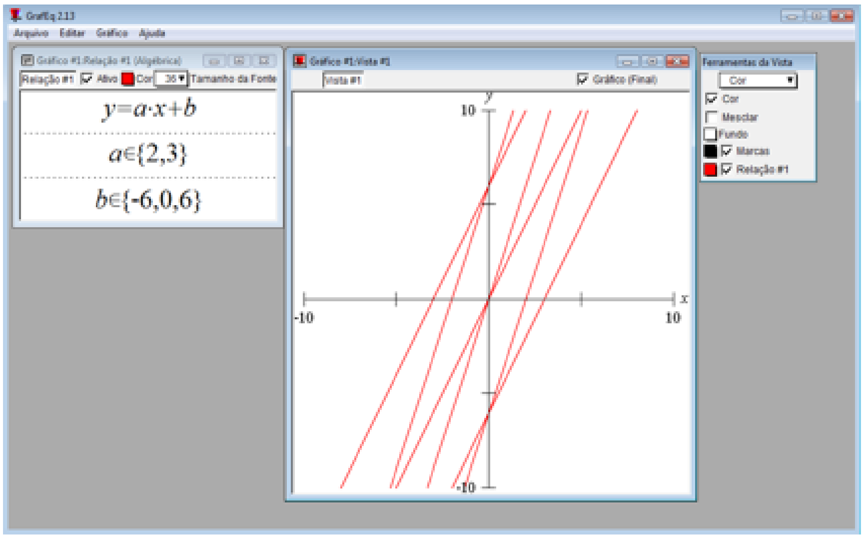


Figura 15 - Família de retas construídas utilizando-se os parâmetros a e b aplicados à reta y = x

Ainda visando à utilização de parâmetros, podemos elaborar a união de regiões em uma mesma janela de registro algébrico. “O potencial semiótico deste recurso está na possibilidade de desenvolvimento de raciocínio generalizador que dá identidade à coleção de figuras, via registro algébrico” (GRAVINA & NOTARE, 2013, p. 7-8). Na Figura 16 podemos visualizar uma coleção de quadrados de lado quatro unidades de medida, construídos com o emprego do parâmetro *a*.

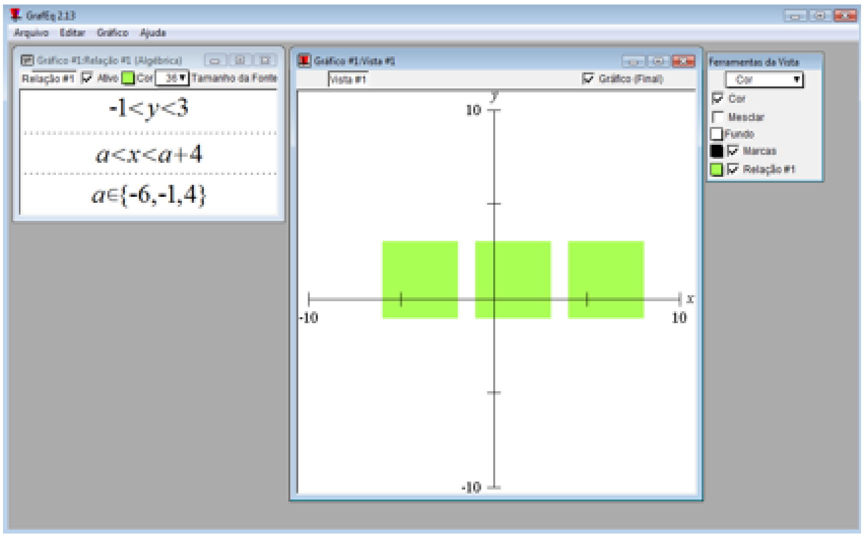


Figura 16 - Coleção de quadrados construída através da utilização de parâmetros

3. A ORGANIZAÇÃO E A REALIZAÇÃO DE UMA EXPERIÊNCIA: DESENHANDO FIGURAS COM O *GRAFEQ*

Neste capítulo apresentamos a metodologia de pesquisa que inspirou nossa experiência, os pressupostos iniciais que nos levaram à organização e à elaboração desta experiência didática fazendo uso do *software* matemático *GrafEq*, a realização da experiência, em que são detalhados os objetivos centrais de cada encontro, bem como a análise a *priori* das atividades propostas. Apresentamos ainda os sujeitos participantes da nossa pesquisa.

Nesta proposta, além de elaborarmos uma sequência didática diferenciada para o estudo de equações e inequações no Ensino Médio, utilizando a tecnologia como apoio metodológico, pretendemos trabalhar com os alunos os diferentes registros de representação para um mesmo objeto matemático, em especial a passagem do registro algébrico para o geométrico e vice-versa. Tal intenção se fundamenta na dificuldade que os alunos constantemente apresentam ao realizar tais conversões, conforme discutido no capítulo anterior.

Iniciamos o capítulo com os pressupostos iniciais da experiência, detalhando a escolha do tema de pesquisa, a metodologia adotada como fundamentação e os ensejos que nos induziram a esta escolha. Relatamos a concepção da proposta descrevendo as escolhas didáticas utilizadas na organização e na elaboração dessa sequência de atividades, bem como uma análise prévia dos resultados que almejamos obter ao final desta experiência didática.

3.1 A METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

O objetivo da nossa proposta didática é proporcionar ao grupo de alunos participantes desta experiência uma sequência de atividades diferenciada da metodologia tradicional de ensino em sala de aula, fazendo uso da tecnologia no ambiente de ensino. Através da elaboração desta sequência de atividades, os alunos têm a oportunidade de explorar a passagem do registro de representação algébrico para o geométrico construindo retângulos, paralelogramos, triângulos e círculos, uma possibilidade do *software GrafEq*.

Acredito que à medida que o professor se propõe a realizar com seus alunos uma aula de matemática diferente da tradicional, que requeira investigação e busca de estratégias, neste caso concomitantemente com a tecnologia embutida, ele abre-se à possibilidade de tornar a aula venha a ser um ambiente capaz de desenvolver a criatividade e as habilidades dos alunos. Quando o aluno questiona, discute, procura estratégias e investiga certo problema, ele pode desenvolver o seu raciocínio matemático e criar o seu próprio conhecimento acerca do problema abordado.

Nossa proposta está embasada na metodologia de pesquisa da Engenharia Didática. Segundo Artigue (1996), a Engenharia Didática teve origem na França no início da década de 1980, com o objetivo de dar à didática matemática uma característica mais investigativa, definindo um modelo de forma de trabalho didático. Este modelo teria como proposta a inovação e a busca da prática investigativa em sala de aula, dando ao professor o papel de pesquisador. Para Artigue (1996, p. 196), a Engenharia Didática consiste em "[...] um esquema experimental baseado em 'realizações didácticas' na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino".

São quatro as etapas que constituem a Engenharia Didática: a etapa inicial, considerada como uma análise prévia da proposta didática; a seguinte, caracterizada pela concepção da proposta didática e pela análise a *priori* das situações didáticas; a terceira, que se constitui na experimentação e, por último, a etapa da análise a *posteriori* e validação da engenharia.

A análise prévia da Engenharia Didática se constitui no momento em que o professor-pesquisador faz uma coleta de dados e informações já estudadas sobre o objeto matemático de pesquisa, como, por exemplo, realizando uma análise dos conteúdos abrangentes de ensino, uma investigação atual do ensino ou uma concepção que visa ter os alunos como foco, pesquisando as dificuldades apresentadas pelos mesmos no conteúdo abordado na pesquisa. Em nosso trabalho, essa análise preliminar concretizou-se na reflexão sobre a Teoria das Representações Semióticas de Duval.

3.2 A ORGANIZAÇÃO DA EXPERIÊNCIA

Nesta seção apresentamos a análise a *priori* da nossa experiência, explicitando os objetivos estabelecidos para cada uma das atividades aplicadas durante seus cinco encontros, bem como as expectativas previstas. A concepção e análise a *priori* da Engenharia Didática, segunda etapa da metodologia adotada, caracterizam o momento em que o professor-pesquisador se permite tomar decisões. Segundo Artigue (1996, p. 202), na análise a *priori*, "[...] o investigador toma a decisão de agir sobre um determinado número de variáveis do sistema não fixadas pelos constrangimentos: variáveis de comando, que ele supõe serem variáveis pertinentes para o problema estudado".

Neste sentido, esta etapa da engenharia tem por objetivo levantar hipóteses, considerações e expectativas a respeito do comportamento dos alunos frente à proposta metodológica a ser realizada pelo pesquisador. É o momento em que se formulam perspectivas sobre os objetivos que desejamos alcançar com a proposta didática que se está aplicando, prevendo o nível de evolução dos alunos no desenvolvimento da mesma.

Nossa sequência didática foi dividida em cinco encontros. Cada encontro tem um objetivo específico de aprendizagem, e as exigências aumentam de forma gradativa. Dessa maneira, cada aula torna-se desafiadora, na medida em que as dificuldades se apresentam, e ao mesmo tempo gerando curiosidade e interesse por parte dos alunos sobre como a figura proposta a cada encontro seria construída. O primeiro encontro envolveu a construção de regiões retangulares, com lados paralelos aos eixos coordenados. O segundo encontro trata da construção de paralelogramos, limitados por retas paralelas, seguido do terceiro encontro em que foi estudada a construção de triângulos, limitados por retas perpendiculares e restrições no eixo x. O quarto encontro tratou da construção de círculos, partindo-se da equação da circunferência.

O quinto e último encontro, teve como foco aguçar a imaginação e criatividade dos alunos, bem como identificar os conhecimentos adquiridos por eles nas quatro aulas anteriores. Neste encontro, os alunos elaboraram suas próprias obras, utilizando composições com as figuras trabalhadas ao longo da nossa sequência didática.

- **Análise a *priori* do Encontro 1**

A expectativa do primeiro encontro da nossa experiência era de que os alunos entendessem como podemos construir no plano cartesiano regiões retangulares, utilizando para isso sistemas de inequações. Os alunos deveriam valer-se de desigualdades algébricas para delimitar tais regiões no plano.

Na atividade 1 do primeiro encontro (Figura 17), itens a, b, c e d, os alunos deveriam digitar as desigualdades dadas no *software* e perceber as regiões que eram desenhadas, descrevendo-as. O objetivo desta primeira atividade era trabalhar com a turma a passagem do registro de representação algébrico para o gráfico, em que os alunos ao visualizar as regiões construídas, compreenderiam que o sistema de inequações dado representa um conjunto de pontos que limita as coordenadas x e y no plano cartesiano. Ou seja, ao verificar as regiões esboçadas no *software*, os alunos deveriam perceber que estavam determinando regiões no plano, formadas por um conjunto de pontos que respeitavam as restrições das duas coordenadas.

ENCONTRO 1: "Desenhando regiões retangulares"

ATIVIDADE 1: Utilizando o *software GrafEq*, digite as seguintes desigualdades e descreva as regiões obtidas.

a) $4 \leq x \leq 6$
$2 \leq y \leq 8$

____
____
____

b) $1 \leq x \leq 7$
$1 \leq y \leq 3$

____
____
____

c) $1 \leq x \leq 5$
$0 \leq y \leq 4$

____
____
____

d) $-8 \leq x \leq -3$
$2 \leq y \leq 6$

____
____
____

Figura 17 - Encontro 1: Atividade 1

Na segunda atividade proposta (Figura 18), os alunos deveriam ler a região descrita em linguagem natural e, inserindo desigualdades convenientes, esboçá-las no *GrafEq*. A seguir os alunos deveriam registrar na folha de atividades o sistema de inequações utilizado para delimitar tal região no plano cartesiano.

ATIVIDADE 2: Inserindo desigualdades convenientes no *GrafEq*, esboce as regiões descritas abaixo. Descreva o processo que o levou a esta construção.

a) Um quadrado de lado 3 contido no 3º quadrante do plano cartesiano;

b) Um retângulo com lados medindo 4 e 2 unidades, contido no 1º quadrante.

Figura 18 – Encontro 1: Atividade 2

Para isso, era necessário primeiramente que os alunos identificassem o quadrante onde cada figura deveria ser construída, a região que se pretendia esboçar (quadrado ou retângulo) com suas respectivas medidas e, finalmente, digitar na janela de relação algébrica do *software* as desigualdades necessárias para a construção dessas regiões no plano cartesiano. O objetivo desta atividade era que os alunos inicialmente visualizassem mentalmente a região a ser esboçada, pensassem então em quais desigualdades deveriam utilizar para delimitar estrategicamente as coordenadas x e y, respeitando o enunciado da atividade e, por fim, conferissem se as escolhas feitas estavam corretas ao verificá-las no *software.*

A atividade 3, início do segundo momento deste nosso primeiro encontro, trazia quatro figuras construídas no *GrafEq* e pedia para que os alunos as reproduzisse descrevendo as desigualdades algébricas utilizadas na construção das mesmas. O objetivo desta atividade era envolver os alunos na passagem do registro de representação gráfico para o algébrico, conversão inversa à realizada durante o primeiro momento do nosso encontro.

As duas primeiras regiões (Figura 19) traziam cada uma o esboço de um retângulo no 2º e 4º quadrantes, respectivamente. A construção destas duas regiões se dava de forma simples, apenas delimitando a abcissa x e a ordenada y de maneira conveniente, observada a localização das regiões no plano cartesiano. Para desenhar o primeiro retângulo, roxo, os alunos deveriam restringir a coordenada x ao intervalo entre 2 e 7, e a coordenada y entre -8 e -1. Já para obter o retângulo amarelo, deveriam restringir a coordenada x ao intervalo entre -8 e -3 e a coordenada y ao intervalo entre 4 e 6.

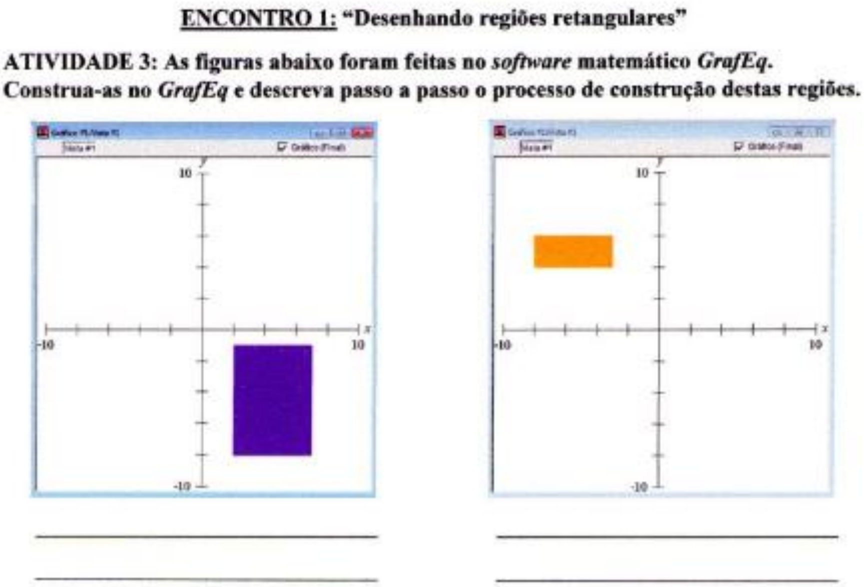


Figura 19 – Encontro 1: Atividade 3 (parte 1)

As outras duas regiões da atividade 3 (Figura 20) eram formadas por composições de retângulos. Para realizar tais construções, os alunos, além de definirem as desigualdades apropriadas para esboçá-las, deveriam abrir mais de uma janela de relação algébrica no *software*, visto que seria necessário construir cada região independentemente. A primeira região, formada pela composição de retângulos rosa empilhados, era construída abrindo-se três janelas de relação algébrica no *software* e digitando as restrições válidas para cada um dos retângulos. O retângulo maior era esboçado pelo sistema de inequações $-5 \leq x \leq 5$ e $-3 \leq y \leq 0$, o retângulo médio era desenhado inserindo-se o sistema $-3 \leq x \leq 3$ e $0 \leq y \leq 2$, e o menor pelo sistema $-2 \leq x \leq 2$ e $2 \leq y \leq 3$.

Já para esboçar a segunda região, formada pela composição de três quadrados verdes, assim como na região anterior, eram necessárias três janelas de restrições algébricas. O retângulo mais à direita na figura era esboçado pelo sistema de inequações $2 \leq x \leq 6$ e $-6 \leq y \leq$

-2, o retângulo central pelo sistema -2 ≤ x ≤ 2 e -2 ≤ y ≤ 2 e o retângulo à esquerda pelo sistema -6 ≤ x ≤ -2 e 2 ≤ y ≤ 6.

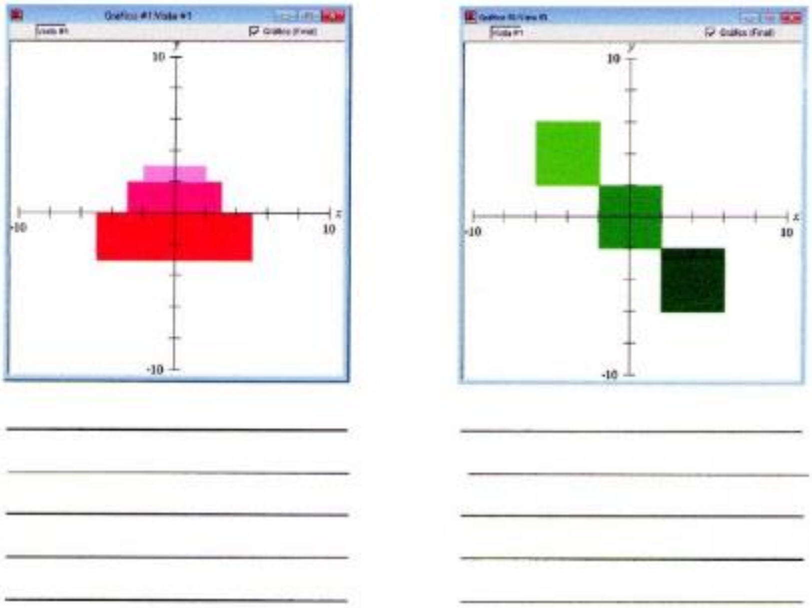


Figura 20 – Encontro 1: Atividade 3 (parte 2)

- **Análise a *priori* do Encontro 2**

A expectativa do segundo encontro era de que os alunos entendessem como podemos construir no plano cartesiano regiões compostas por paralelogramos, utilizando sistemas de inequações. Os alunos deveriam valer-se de desigualdades algébricas para delimitar regiões no plano, que viriam a determinar paralelogramos.

Na atividade 1 deste encontro (Figura 21), os alunos deveriam construir inicialmente no *GrafEq* a reta y = x. Em seguida era pedido que os alunos construíssem as retas y = x +3 e y = x – 4, explicando quais alterações eram percebidas no gráfico destas retas com relação à reta inicial. O objetivo desta atividade era trabalhar com os alunos a equação de retas do tipo y = x + b (com b real), fazendo com que eles percebessem o deslocamento ocorrido na reta inicial y = x (caso em que b = 0) para os casos dados no exemplo em que b = 3 e b = -4. Ou seja, os alunos deveriam notar que a reta y = x +3 é a reta y = x deslocada três unidades para cima no plano cartesiano, bem como a reta y = x – 4 é a reta y = x deslocada quatro unidades para baixo no plano cartesiano.

<u>ENCONTRO 2:</u> "Desenhando paralelogramos"

ATIVIDADE 1: Construa no *GrafEq* as retas de equações y = x, y = x + 3 e y = x – 4. A seguir comente as alterações ocorridas no gráfico com relação a equação inicial y = x.

Figura 21 – Encontro 2: Atividade 1

Na segunda atividade (Figura 22), semelhante à atividade anterior, os alunos deveriam construir primeiramente a reta y = -x no *GrafEq*. A seguir eles deveriam digitar as retas y = -x + 3 e y = -x – 4 em duas janelas de relações algébricas distintas. Feito isto, ao observarem a construção das três retas na tela do computador, os alunos iriam comparar as alterações ocorridas no gráfico quando as duas últimas retas tivessem sido construídas, relacionando-as à reta inicial. O objetivo desta atividade era trabalhar com os alunos retas decrescentes, do tipo y = -x + b (com b real), fazendo com que eles percebessem o deslocamento ocorrido na reta inicial y = -x (caso em que b = 0) para os casos dados no exemplo em que b = 3 e b = -4. Ou seja, os alunos deveriam notar que a reta y = -x +3 é a reta y = -x deslocada três unidades para cima no plano cartesiano, bem como a reta y = -x – 4 é a reta y = -x deslocada quatro unidades para baixo no plano cartesiano.

ATIVIDADE 2: Construa no *GrafEq* as retas de equações y = - x, y = - x + 3 e y = - x – 4. A seguir comente as alterações ocorridas no gráfico com relação a equação inicial y = - x.

Figura 22 – Encontro 2: Atividade 2

Na atividade 3 (Figura 23) ainda na primeira folha de atividades, itens a, b e c, os alunos deveriam digitar no *software* as desigualdades dadas e perceber as regiões que eram construídas, descrevendo-as. O objetivo desta terceira atividade era trabalhar com a turma a passagem do registro de representação algébrico para o gráfico. Desejamos que os alunos, ao visualizarem as regiões desenhadas no *GrafEq*, compreendessem que o sistema de inequações dado representa um conjunto de pontos limitados pelas coordenadas x e y no plano cartesiano.

Ou seja, ao verificarem as regiões esboçadas no *software*, os alunos deveriam perceber que estavam determinando regiões no plano, formadas por um conjunto de pontos que respeitavam as restrições das duas coordenadas.

ATIVIDADE 3: Utilizando o *software GrafEq*, digite as seguintes desigualdades e descreva as regiões obtidas.

a) $\begin{cases} x \leq y \leq x+3 \\ -5 \leq x \leq 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+1 \leq y \leq x+5 \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x+2 \leq y \leq -x+4 \\ -3 \leq y \leq 6 \end{cases}$

Figura 23 – Encontro 2: Atividade 3

A quarta atividade desta aula, segunda folha entregue aos alunos, trazia quatro figuras construídas no *GrafEq* e pedia aos alunos que as reproduzissem no *software.* A seguir, os alunos deveriam descrever as desigualdades algébricas utilizadas na construção de cada uma das regiões. O objetivo desta atividade era trabalhar com os alunos a passagem do registro de representação gráfico para o algébrico, conversão inversa à realizada durante o primeiro momento do nosso encontro.

As duas primeiras regiões (Figura 24) da atividade 4, traziam cada uma o esboço de um paralelogramo. Para construir estes paralelogramos, os alunos primeiramente deveriam observar quais retas do tipo y = x + b, estavam delimitando a região esboçada e, a seguir, ainda observando a região fornecida na folha de atividades, verificar se o paralelogramo estava limitado horizontalmente (pela coordenada y) ou verticalmente (pela coordenada x), descrevendo então o sistema de inequações que gerou cada figura.

Na primeira região, o paralelogramo em vermelho é delimitado pelas retas y = x – 1 e y = x – 5 e pela coordenada y entre 0 e 3. O segundo paralelogramo, em azul, é delimitado pelas retas de equação y = x + 5 e y = x + 2 e pela coordenada x entre -9 e -3.

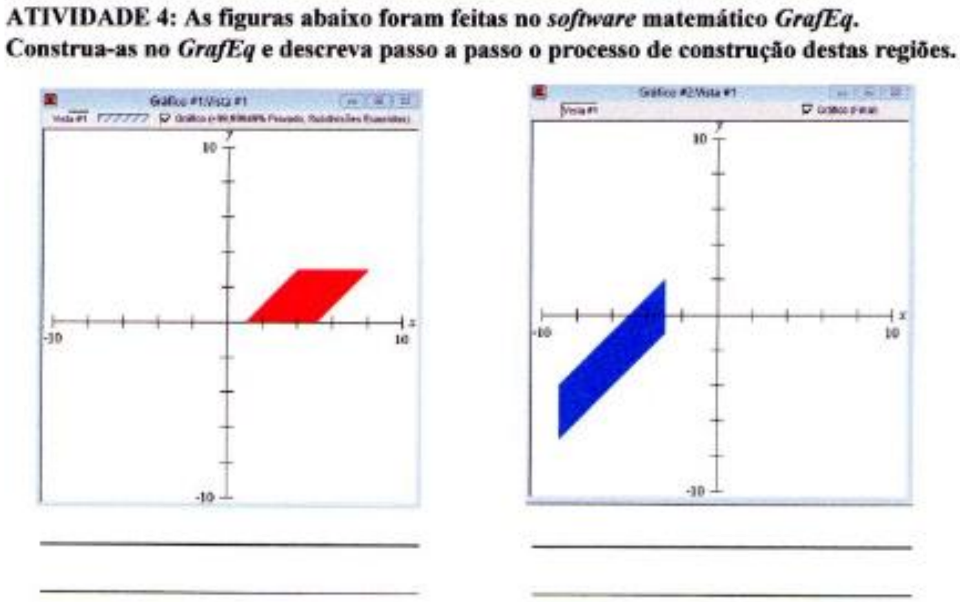


Figura 24 – Encontro 2: Atividade 4 (parte 1)

As outras duas regiões fornecidas na atividade 4 (Figura 25), são formadas por composições de paralelogramos. Para construir tais composições, os alunos deveriam construir cada paralelogramo em uma janela de relação algébrica distinta.

A terceira região é formada por dois paralelogramos sobrepostos que formam um “x”. O paralelogramo à direita é delimitado pelas retas y = x – 3 e y = x + 3 e pela coordenada y entre -6 e 6. Já o paralelogramo à esquerda, é delimitada pelas retas de equações y = -x – 3 e y = -x + 3 e pela coordenada y entre – 6 e 6.

Já a quarta região da atividade 4 é composta de três paralelogramos alinhados paralelamente. O paralelogramo à direita é delimitado pelas retas de equações y = -x + 4 e y = -x + 5 e pela coordenada y entre -2 e 2. O paralelogramo ao centro é delimitado pelas retas paralelas y = -x e y = -x + 3 e pela coordenada y entre -3 e 3, e o paralelogramo à esquerda é delimitado pelas retas de equações y = -x – 5 e y = -x – 1 e pela coordenada y entre -6 e 4.

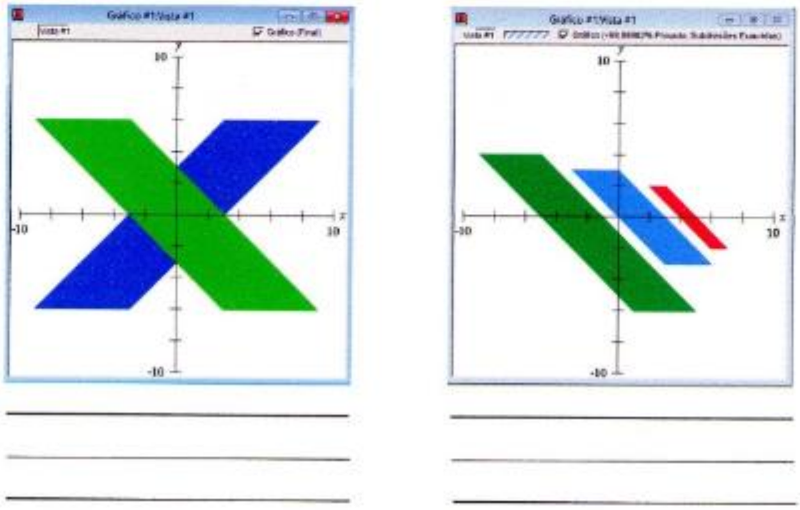


Figura 25 – Encontro 2: Atividade 4 (parte 2)

- **Análise a *priori* do Encontro 3**

A expectativa do terceiro encontro era que os alunos compreendessem como podemos construir no plano cartesiano regiões triangulares, fazendo uso de sistemas de inequações. Nas atividades propostas neste encontro, os alunos deveriam valer-se de desigualdades algébricas para delimitar regiões no plano, que viriam a determinar triângulos, bem como, observando regiões triangulares já construídas, definir os sistemas de inequações utilizados para esboçar tais construções.

Na primeira atividade deste encontro (Figura 26), os alunos deveriam construir inicialmente no *GrafEq* a reta y = x. Em seguida deveriam construir as retas y = 2x e y = 2x + 3, explicando quais alterações eram percebidas no gráfico destas duas retas com relação a reta inicial. O objetivo desta atividade era trabalhar com os alunos a equação reduzida da reta, y = ax + b (com b real), fazendo com que eles percebessem a inclinação sofrida pela reta quando alteramos o coeficiente angular a, bem como, na sequência, perceber o deslocamento da reta quando alteramos o valor do termo independente b. Ou seja, os alunos deveriam notar que a reta y = 2x têm inclinação igual ao dobro da inclinação da reta y = x e que a reta y = 2x +3 é a reta y = 2x deslocada três unidades para cima no plano cartesiano.

ATIVIDADE 1: Construa no *GrafEq* as retas de equações y = x, y = 2x e y = 2x +3. Descreva com suas palavras as alterações ocorridas no gráfico com relação a equação inicial y = x.

Figura 26 – Encontro 3: Atividade 1

Na atividade 2 (Figura 27), semelhante à primeira atividade, os alunos deveriam construir primeiramente a reta y = -x no *GrafEq*. A seguir eles deveriam digitar as retas y = -2x e y = -2x + 3 em duas janelas de relações algébricas distintas. Feito isto, os alunos, ao observarem a construção das três retas na tela do computador, iriam comparar as alterações ocorridas no gráfico quando as duas últimas retas tivessem sido construídas, relacionando-as à reta inicial. O objetivo desta atividade era continuar trabalhando com os alunos a equação reduzida da reta, porém agora com retas decrescentes (em que o coeficiente angular a é negativo), bem como, com as alterações ocorridas devido à mudança do valor do termo independente b na equação. Ou seja, os alunos deveriam notar que a reta y = -2x é a reta simétrica à reta y = 2x, possuindo inclinação negativa, e que a reta y = -2x +3 é a reta y = -2x deslocada três unidades para cima no plano cartesiano.

ATIVIDADE 2: Construa no *GrafEq* as retas de equações y = - x, y = - 2x e y = - 2x + 3. Descreva com suas palavras as alterações ocorridas no gráfico com relação a equação inicial y = - x.

Figura 27 – Encontro 3: Atividade 2

Na terceira atividade (Figura 28), itens a, b e c, os alunos deveriam digitar no *software* as desigualdades dadas e perceber as regiões que eram construídas, descrevendo-as. O objetivo desta atividade era trabalhar com a turma a passagem do registro de representação algébrico para o gráfico, fazendo com que os alunos, ao visualizarem as regiões triangulares desenhadas pelo *software*, percebessem que o sistema de inequações dado representa um conjunto de pontos limitados pelas coordenadas x e y no plano cartesiano. Ou seja, ao visualizarem as regiões esboçadas na tela do computador, os alunos deveriam perceber que estavam determinando regiões no plano cartesiano, formadas por um conjunto de pontos que respeitavam as restrições das coordenadas x e y.

ATIVIDADE 3: Utilizando o *software GrafEq*, digite as seguintes desigualdades e descreva as regiões obtidas.

a) $\begin{cases} y \leq x + 6 \\ y \leq -x + 6 \\ y \geq -4 \end{cases}$

____

____

____

b) $\begin{cases} y \leq x + 7 \\ y \leq -x + 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

____

____

____

c) $\begin{cases} y \leq 3x + 1 \\ y \leq -3x + 8 \\ y \geq 2 \end{cases}$

____

____

____

Figura 28 – Encontro 3: Atividade 3

A atividade 4, segunda folha entregue aos alunos, trazia quatro figuras construídas no *GrafEq* e pedia para que eles as reproduzissem no *software*, descrevendo quais desigualdades algébricas haviam utilizado na construção de cada uma das regiões. O objetivo desta atividade, segundo momento do nosso encontro, era trabalhar com os alunos a passagem do registro de representação gráfico para o algébrico, conversão inversa à realizada durante o primeiro momento.

As duas primeiras regiões (Figura 29) da quarta atividade, traziam cada uma o esboço de um triângulo. O primeiro triângulo (em vermelho), era limitado por retas concorrentes, respectivamente, de coeficientes angulares a igual a 1 (reta crescente) e -1 (reta decrescente) e pela restrição $y \geq 0$, e o segundo triângulo (em verde), limitado por duas retas concorrentes de coeficiente angulares 2 (reta crescente) e -2 (reta decrescente), e pela restrição $y \geq 2,5$. Para construir estes dois triângulos, os alunos primeiramente deveriam observar quais retas do tipo $y = ax + b$ estavam delimitando a região esboçada e, a seguir, ainda observando a região fornecida na folha de atividades, descrever o sistema de inequações que havia gerado cada figura.

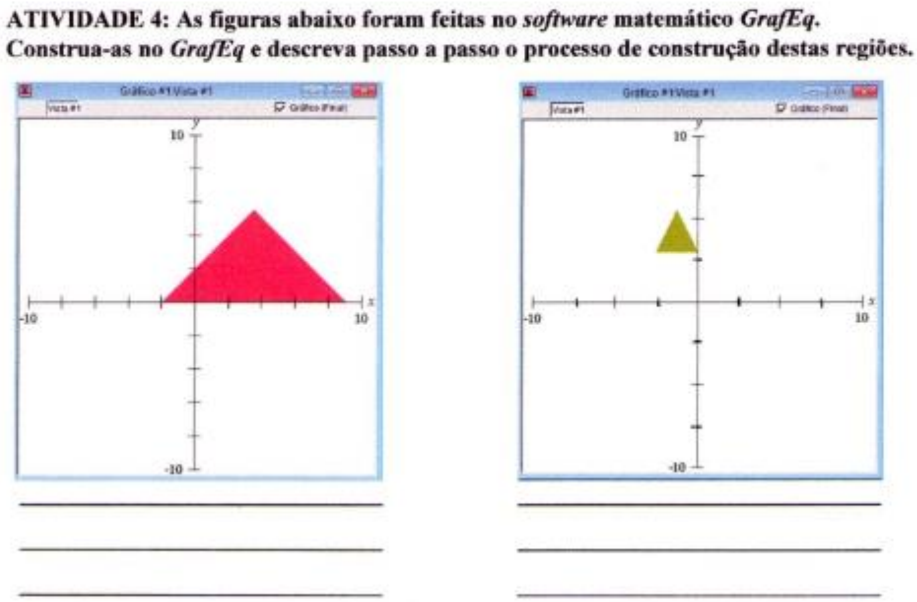


Figura 29 – Encontro 3: Atividade 4 (parte 1)

As outras duas regiões da atividade 4 (Figura 30), eram formadas por composições de triângulos. Para desenhar tais composições, os alunos deveriam construir cada triângulo em uma janela de relação algébrica distinta.

A terceira região é formada por dois triângulos, um empilhado em cima do outro. O triângulo menor é delimitado pelas retas concorrentes $y = x + 4$ e $y = -x + 4$ e pela restrição $y \geq 2$. Já o triângulo maior é delimitado pelas retas concorrentes de equações $y = x + 2$ e $y = -x + 2$ e pela restrição $y \geq -4$.

Já a quarta região da atividade 4 é composta de três triângulos dispostos paralelamente. O triângulo amarelo é delimitado pelas retas de equações $y = x - 2$ e $y = -x + 9$ e pela restrição $y \geq 2$. O triângulo laranja ao centro é delimitado pelas retas $y = x + 2$ e $y = -x + 3$ e pela restrição $y \geq 0$, e o triângulo marrom é delimitado pelas de equações $y = x + 6$ e $y = -x – 6$ e pela restrição $y \geq -3$.

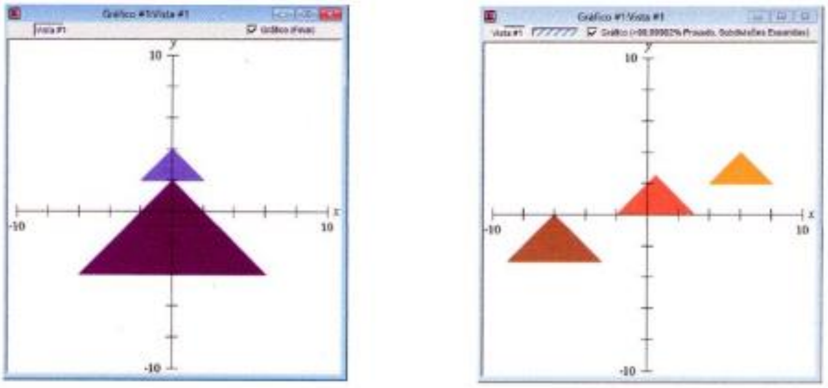


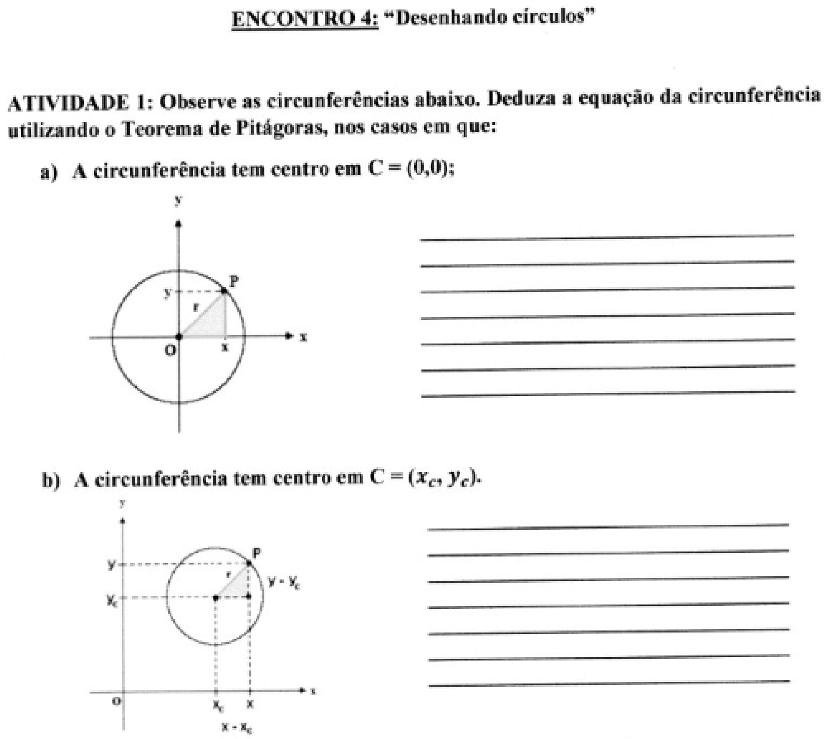
Figura 30 – Encontro 3: Atividade 4 (parte 2)

- **Análise a *priori* do Encontro 4**

A expectativa do quarto encontro era de que os alunos entendessem como podemos esboçar círculos no sistema cartesiano, fazendo uso de inequações. Nas atividades propostas para esta aula, os alunos deveriam valer-se de desigualdades algébricas para delimitar regiões no plano, que viriam a determinar círculos centrados na origem e de centro arbitrário C = ($x_{c,}$, y_c), bem como, observando figuras com composições de círculos construídas no *GrafEq*, definir qual inequação foi utilizada para esboçar tais construções.

Na primeira atividade (Figura 31), itens a e b, os alunos deveriam utilizar o Teorema de Pitágoras para definir a equação da circunferência centrada na origem e de raio r e a equação do circunferência de centro arbitrário C = ($x_{c,}$, y_c) e raio r. O objetivo desta atividade era o estudo da equação reduzida da circunferência, propondo que os alunos deduzissem esta equação valendo-se do Teorema de Pitágoras aplicado em um triângulo retângulo. Ao obter a equação que define a circunferência, pretendíamos facilitar a compreensão dos alunos relativa ao significado desta equação, entendendo-a como um conjunto de pontos cujas coordenadas atendem a certas condições algébricas.

Esta atividade visava introduzir aos alunos a noção de como podemos desenhar uma circunferência, para que na atividade seguinte fosse trabalhado o desenho de círculos no plano cartesiano. Para a realização desta primeira atividade os alunos não precisavam utilizar o *software*.


ENCONTRO 4: **"Desenhando círculos"**

ATIVIDADE 1: Observe as circunferências abaixo. Deduza a equação da circunferência utilizando o Teorema de Pitágoras, nos casos em que:

a) A circunferência tem centro em C = (0,0);

b) A circunferência tem centro em C = (x_c, y_c).

Figura 31 – Encontro 4: Atividade 1

Na segunda atividade (Figura 32) proposta neste encontro, itens a, b e c, os alunos deveriam valer-se da atividade 1, em que foi obtida a equação do círculo, para identificar a região que estava sendo pedida em cada um dos itens e, inserindo desigualdades convenientes, esboçá-la no *GrafEq*. A seguir, os alunos deveriam registrar na folha de atividades a inequação utilizada para delimitar cada uma das regiões no plano cartesiano.

ATIVIDADE 2: Inserindo desigualdades convenientes no *GrafEq*, esboce as regiões descritas abaixo. Descreva o processo que o levou a esta construção.

a) Um círculo de centro na origem e raio medindo 4 unidades de medida;

b) Um círculo de centro em C = (-2, 3) e raio medindo 3 unidades de medida;

c) Um círculo de raio medindo 2 unidades de medida e pertencente ao 4º quadrante.

Figura 32 – Encontro 4: Atividade 2

Para realizar tal atividade, era necessário primeiramente que os alunos identificassem a medida do raio do círculo e as coordenadas do centro, fornecidas no enunciado de cada item, bem como em qual quadrante o círculo deveria ser construído, para então digitar na janela de relação algébrica do *software* as desigualdades necessárias para a construção destas regiões no plano cartesiano. O objetivo desta atividade era propor que os alunos visualizassem mentalmente a região a ser esboçada, pensassem então em quais desigualdades deveriam utilizar para construí-la, respeitando o enunciado da atividade e, por fim, conferir suas escolhas no esboço realizado pelo *GrafEq*. Também era de suma importância verificar nesta atividade se a dedução da equação do círculo na atividade anterior se fez válida na compreensão desta segunda etapa deste encontro.

A atividade 3, início do segundo momento do quarto encontro, trazia quatro figuras construídas no *GrafEq*, formadas por composições de círculos, e pedia para que os alunos as reproduzissem, descrevendo as desigualdades algébricas utilizadas na construção das mesmas. O objetivo desta atividade era trabalhar com os alunos a passagem do registro de representação gráfico para o algébrico, conversão inversa à realizada durante o primeiro momento do nosso encontro, verificando se as propriedades do círculo ficaram claras para os alunos.

As duas primeiras regiões (Figura 33) traziam cada uma o esboço de um círculo no 1º e 3º quadrantes, respectivamente. A construção destas duas regiões no plano cartesiano se dava de forma simples: os alunos deveriam identificar as coordenadas do centro do círculo e a medida do raio, para obter a desigualdade que geraria tais construções. O primeiro círculo possuía centro C = (3, 6) e raio medindo 2 unidades de comprimento, já o segundo círculo possuía centro em C = (-5, -4) e raio medindo 4 unidades de comprimento.

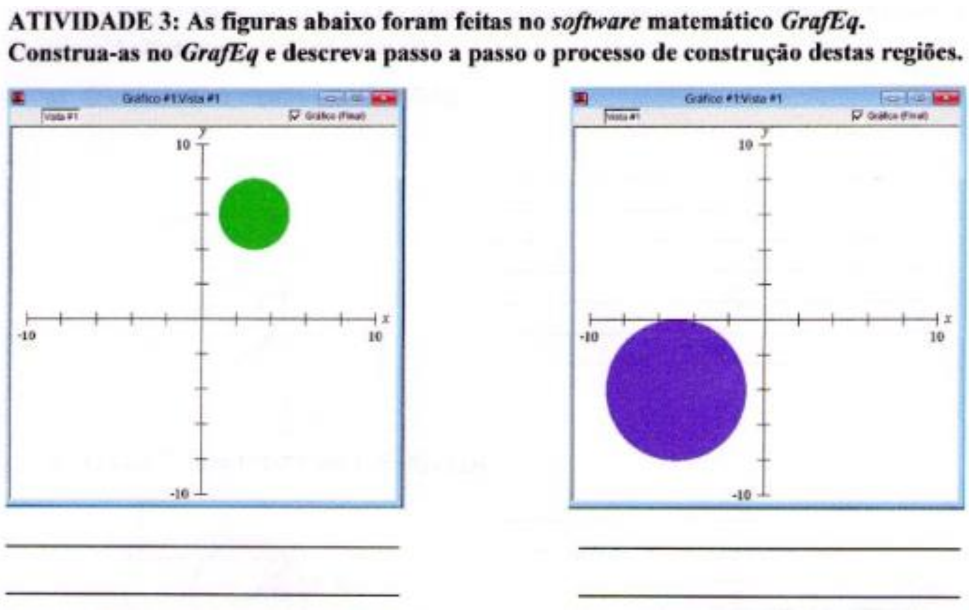


Figura 33 – Encontro 4: Atividade 3 (parte 1)

As outras duas regiões da atividade 4 (Figura 34), eram formadas por composições de círculos. Para reproduzir tais composições, os alunos deveriam construir cada um dos círculos em uma janela de relação algébrica distinta do *software*.

A terceira região é formada por dois círculos sobrepostos. Para realizar tal construção os alunos deveriam notar que o círculo maior deveria ser construído anteriormente ao menor, para que a sobreposição se tornasse visível. O primeiro círculo (círculo de maior raio) possuía centro em C = (-5, 5) e raio medindo 5 unidades de comprimento, e o segundo círculo (círculo de raio menor) possuía as mesmas coordenadas do centro, C = (-5, 5), e raio medindo 2 unidades de comprimento. As inequações que representam estes dois círculos são respectivamente: $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 \leq 5^2$ e $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 \leq 2^2$.

Já a quarta região é composta por três círculos dispostos de maneira crescente. O menor círculo possui centro em C = (4, 5) e raio igual a 2, o círculo de tamanho médio, possui centro em C = (0, 1) e raio igual a 3 e o círculo maior possui centro em C = (-6, -4) e raio igual a 4 unidades de medida. As inequações que construíam estes três círculos são respectivamente: $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 \leq 2^2$, $x^2 + (y - 1)^2 \leq 3^2$ e $(x + 6)^2 + (y + 4)^2 \leq 4^2$.

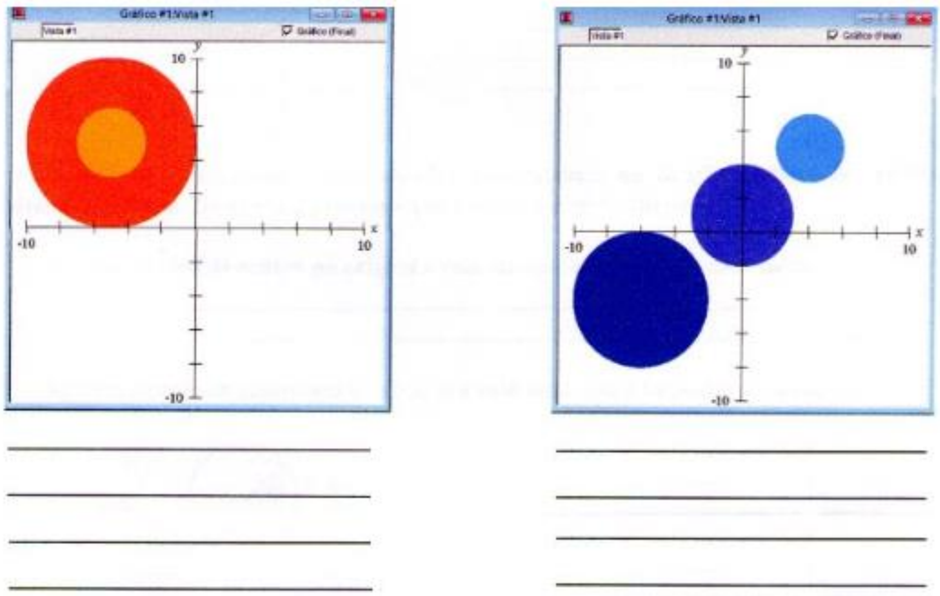


Figura 34 – Encontro 4: Atividade 3 (parte 2)

- **Análise a *priori* do Encontro 5**

O objetivo do último encontro da nossa experiência era propor uma revisão dos conteúdos estudados ao longo da nossa sequência didática, bem como explorar a criatividade e imaginação dos alunos, ao deixá-los criarem suas próprias obras. Nesta aula os alunos demonstrariam os conhecimentos adquiridos ao longo dos encontros, esboçando retângulos, paralelogramos, triângulos e círculos no plano cartesiano, fazendo uso de inequações, conforme visualizamos no enunciado da atividade proposta (Figura 35).

<u>ENCONTRO 5:</u> "Composição com figuras"

ATIVIDADE: Utilizando as figuras geométricas que trabalhamos nos encontros anteriores (retângulos, quadrados, paralelogramos, triângulos e círculos), construa um desenho no *software GrafEq*. O desenho é livre, pode ser um objeto, uma paisagem, enfim, o que você desejar, desde que sejam empregados sistemas de inequações na construção das figuras.

Figura 35 – Encontro 5: Atividade

Na próxima seção, apresentamos os sujeitos participantes da nossa experiência.

3.3 OS SUJEITOS DA PESQUISA

Realizamos a experimentação da nossa proposta metodológica com uma turma do primeiro ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Coronel Afonso Emílio Massot, localizada no município de Porto Alegre, durante a realização de um de meus estágios de docência. A turma era composta de 22 alunos, com idades variando entre quinze e dezessete anos.

No período em que ocorreu a realização do estágio com a turma, os alunos estavam terminando o conteúdo de funções do 1º grau e começando a trabalhar com funções do 2º grau. Desta forma, a localização de pontos no plano cartesiano e os gráficos de retas e de parábolas, já eram conhecimentos adquiridos pelos alunos anteriormente a esta experiência.

A turma se mostrava sempre bastante participativa durante as aulas habituais de matemática, e mostrou-se ainda mais interessada quando começamos a frequentar o laboratório de informática. Tal interesse, acreditamos, foi despertado pelo fato dos professores da turma não terem o hábito de frequentar o laboratório da escola e também pelos alunos nunca terem tido uma experiência que utilizasse um *software* matemático.

Vale ressaltar que a turma não possuía qualquer conhecimento sobre desigualdades e sistemas de inequações, conteúdos presentes ao longo de nossa proposta metodológica. Tais conhecimentos foram sendo adquiridos pelos alunos durante os encontros e com o auxílio do *software* utilizado.

Na seção seguinte, apresentamos as resoluções exibidas pelos alunos a cada uma das atividades realizadas nos cinco encontros.

3.4 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA: OS ENCONTROS

Os cinco encontros que compõem a nossa sequência didática foram realizados no período de 1º de outubro a 5 de novembro de 2013, sempre às terças feiras. Todos os nossos encontros foram realizados no laboratório de informática da escola, nos períodos habituais de matemática, no turno da manhã, totalizando dez horas-aulas. A turma continha vinte e dois alunos, dentre os quais apenas vinte participaram de todas as atividades de nossa proposta didática.

Todas as aulas de nossa experimentação eram divididas em dois momentos. No primeiro momento, os alunos realizavam atividades que visavam trabalhar a passagem do registro algébrico para o gráfico e, no segundo momento, a passagem do registro gráfico para o algébrico, sempre utilizando o *software* matemático *GrafEq* na resolução dessas atividades.

Nos parágrafos que seguem, descrevemos o tema principal de cada encontro, bem como, incluímos registros fotográficos das soluções apresentadas pelos alunos a cada uma das atividades trabalhadas.

- **Encontro 1**

O primeiro encontro da nossa sequência didática ocorreu na manhã do dia 1º de outubro de 2013, no quarto e no quinto períodos da disciplina de matemática (10h10min às 11h40min). Nesta aula estavam presentes vinte alunos, que formaram dez duplas para a realização das atividades. Para organizarmos esses grupos, de maneira a facilitar as análises feitas ao longo deste trabalho, nomeamos as duplas com as letras: A, B, C, D, E, F, G, H, I e J.

Este primeiro encontro caracterizou-se pela fase de familiarização dos alunos com o *software* matemático que seria utilizado como ferramenta tecnológica de ensino na nossa sequência didática, bem como marcou o início das construções de figuras geométricas planas, trabalhando a construção de regiões retangulares no plano cartesiano. Para isso, iniciei a aula apresentando aos alunos algumas ferramentas, recursos e possibilidades que o *software GrafEq* oferece com relação a conceitos matemáticos, porém sem propor uma atividade aos alunos, apenas visando que eles mesmos procurassem explorar o *software* livremente (Figura 36).

Figura 36 – Alunos explorando livremente o *software*

Após este breve momento de investigação no *software GrafEq*, entreguei aos alunos a primeira folha de atividades, para que as realizassem em duplas. Na primeira atividade os alunos deveriam inserir as desigualdades dadas no *software* e verificar as regiões esboçadas, descrevendo-as. Na segunda atividade deste encontro os alunos deveriam ler a região retangular que estava sendo pedida e, inserindo desigualdades convenientes, esboçá-las no *GrafEq*.

Na Figura 37 podemos visualizar a realização da segunda atividade pela dupla A.

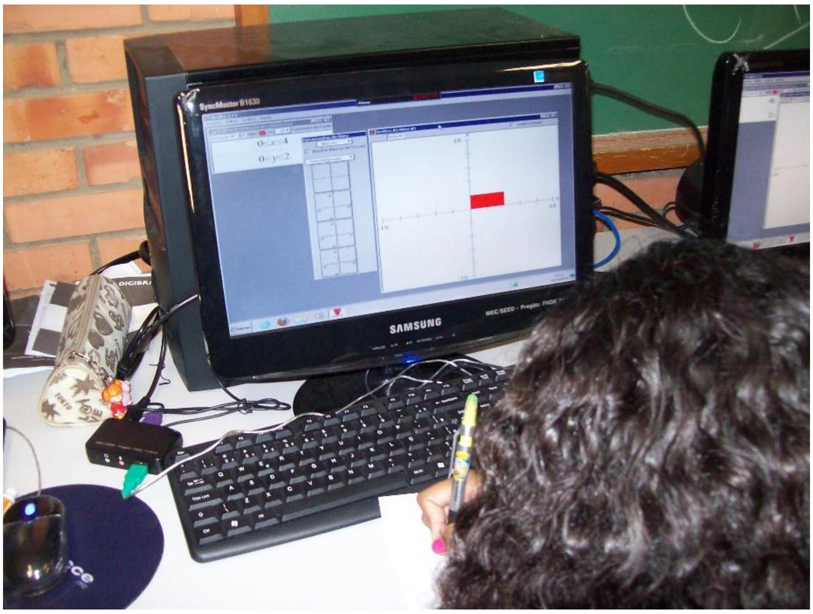


Figura 37 – Encontro 1: Realização da atividade 2b pela dupla A

A atividade 3 trazia quatro figuras construídas no *GrafEq* e pedia para que os alunos as reproduzissem, descrevendo as desigualdades algébricas utilizadas na construção das mesmas. O objetivo desta atividade era trabalhar com os alunos a passagem do registro de representação gráfico para o algébrico, conversão inversa à realizada durante o primeiro momento do nosso encontro.

Na Figura 38 podemos visualizar a reprodução impecável da primeira região da atividade 3, realizada pela dupla I.

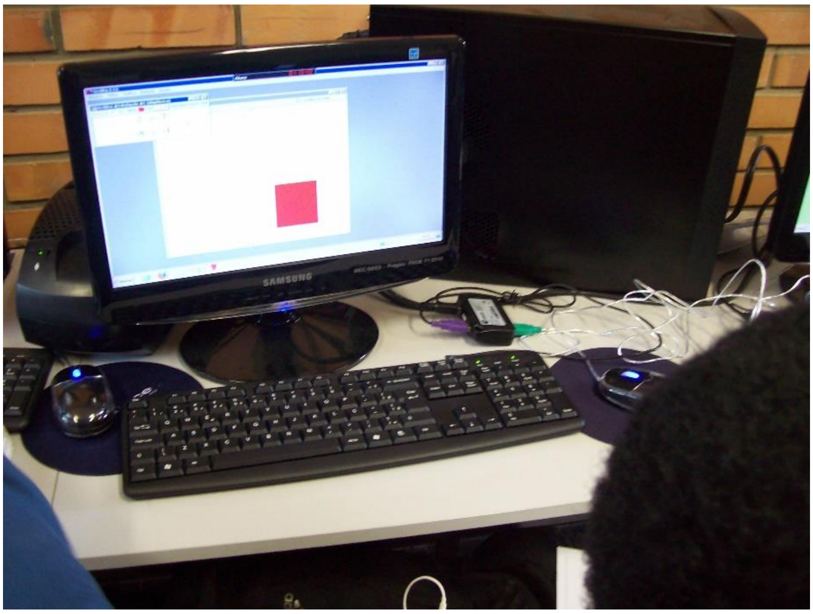


Figura 38 – Encontro 1: Realização da Atividade 3 (região 1) pela dupla I

Já nas Figuras 39 a 42 podemos verificar a realização das duas últimas regiões da atividade 3, em que é necessária a presença de três janelas de relações algébricas, para a construção de cada um dos retângulos. Ao abrir uma nova janela de relação, o aluno consegue esboçar no mesmo plano cartesiano diferentes figuras, visualizando posteriormente a sua composição.

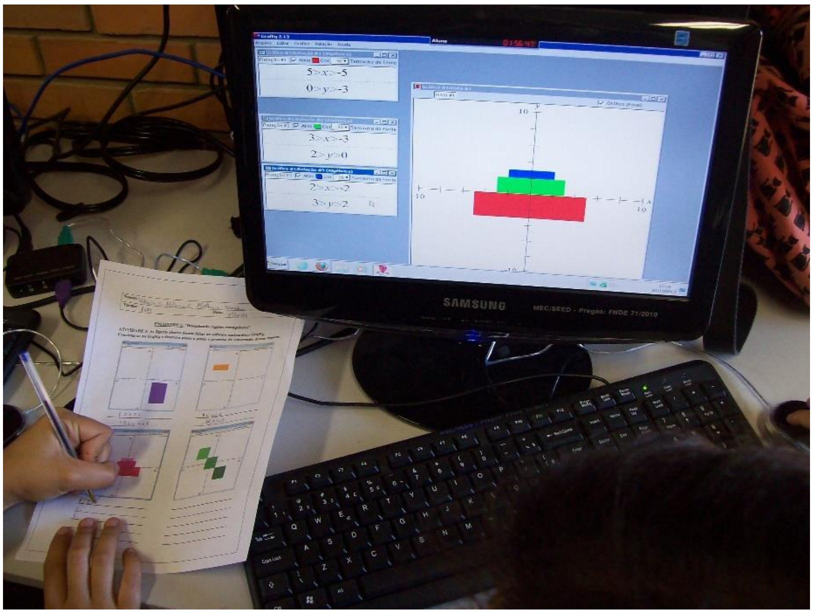


Figura 39 – Encontro 1: Realização da Atividade 3 (região 3) pela dupla D

Figura 40 – Encontro 1: Realização da Atividade 3 (região 3) pela dupla A

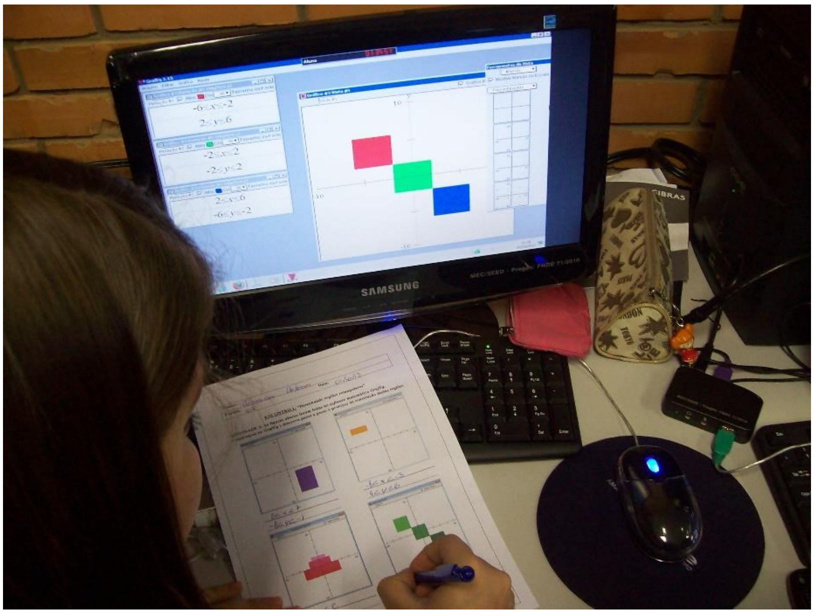


Figura 41 – Encontro 1: Realização da Atividade 3 (região 4) pela dupla J

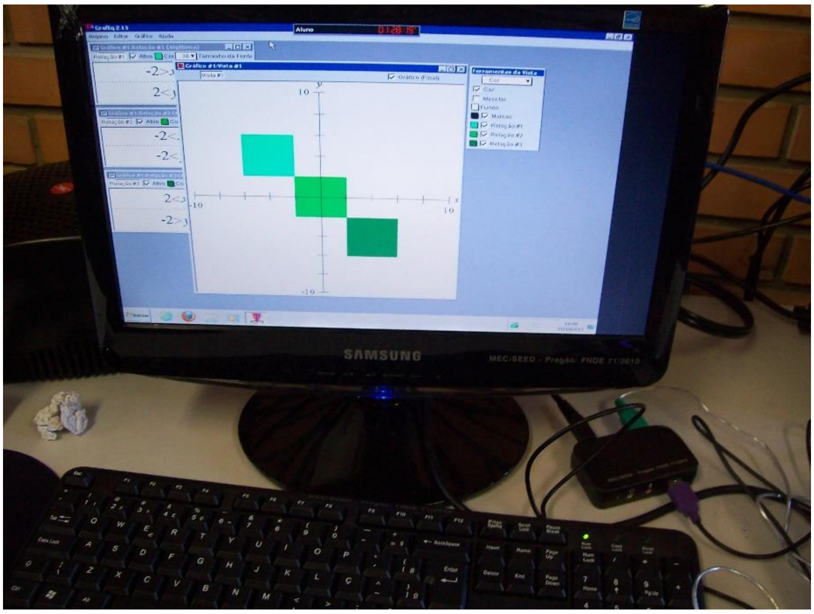


Figura 42 – Encontro 1: Realização da Atividade 3 (região 4) pela dupla B

Ao terminarem as atividades propostas para este primeiro encontro, alguns alunos aproveitaram o tempo restante para fazer explorações no *software* e construir outras figuras, utilizando os conhecimentos adquiridos nesta aula. Na Figura 43, podemos verificar a construção de uma “obra de arte”, assim designada pela dupla que a elaborou.

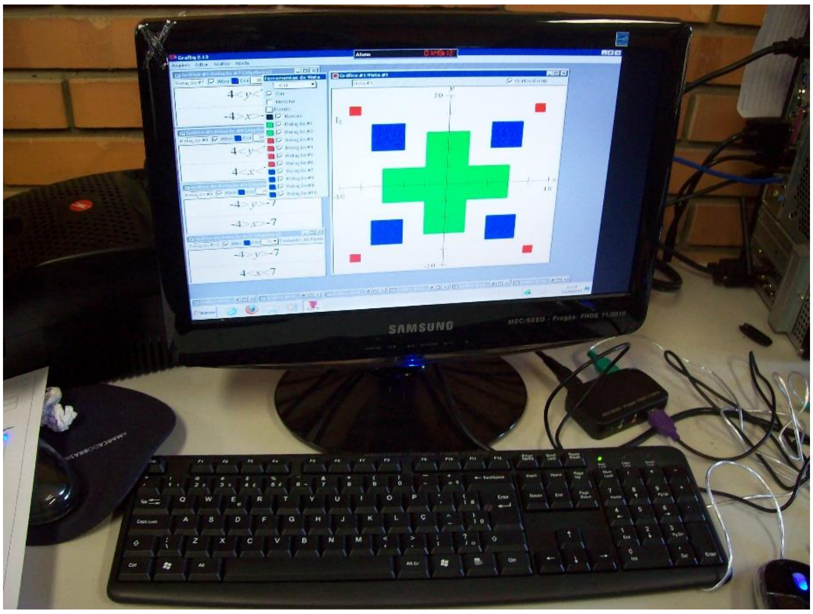


Figura 43 – Encontro 1: “Obra de arte” construída pela dupla J

- **Encontro 2**

O segundo encontro da nossa sequência didática ocorreu na manhã do dia 8 de outubro de 2013, no quarto e quinto períodos da disciplina de matemática (10h10min às 11h40min). Nesta aula estavam presentes vinte e dois alunos, dois a mais que na semana anterior, formando onze duplas para a realização das atividades. Para organizarmos esses grupos, de maneira a facilitar as análises feitas ao longo deste trabalho, nomeamos as duplas com as letras: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e K. As duplas de A à J correspondem as mesmas duplas do primeiro encontro e a dupla K representa a dupla formada com os dois alunos que não vieram na aula anterior.

Seguindo a nossa proposta didática, neste encontro trabalhamos a construção de paralelogramos. Para isso, após um primeiro momento em que os conteúdos matemáticos envolvidos neste encontro foram debatidos: posições relativas de retas (retas paralelas) e equações de retas do tipo y = x + b (com b real), entreguei aos alunos a primeira folha de atividades.

Este segundo encontro visava trabalhar a construção de regiões compostas por paralelogramos através da álgebra. As duas primeiras atividades procuravam apresentar aos alunos os conceitos de retas paralelas e de coeficiente angular.

Na Figura 44 podemos visualizar a realização da primeira atividade pela dupla F, em que três retas paralelas crescentes são esboçadas na tela do computador.

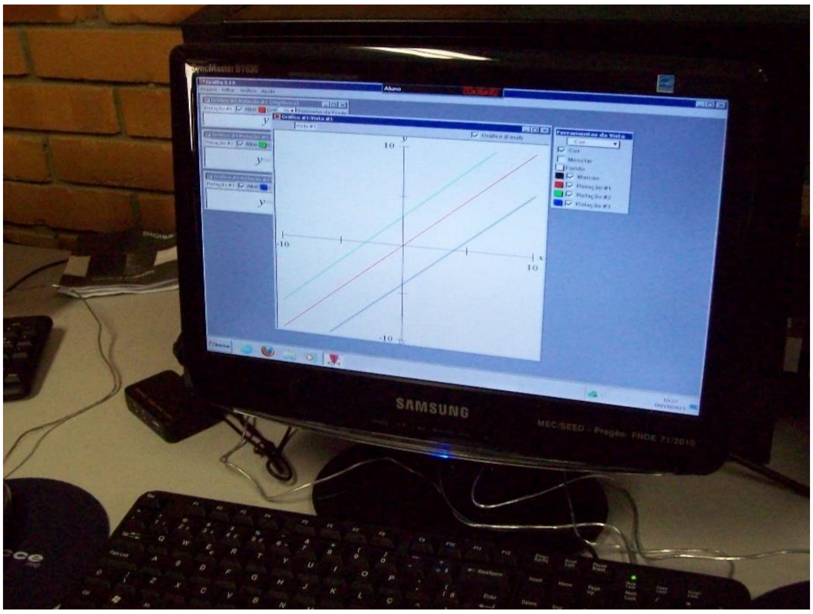


Figura 44 – Encontro 2: Realização da atividade 1 pela dupla F

Já na Figura 45 verificamos a realização da atividade 2 pela dupla E. Nesta atividade os alunos estudaram a construção de retas paralelas decrescentes no plano cartesiano.

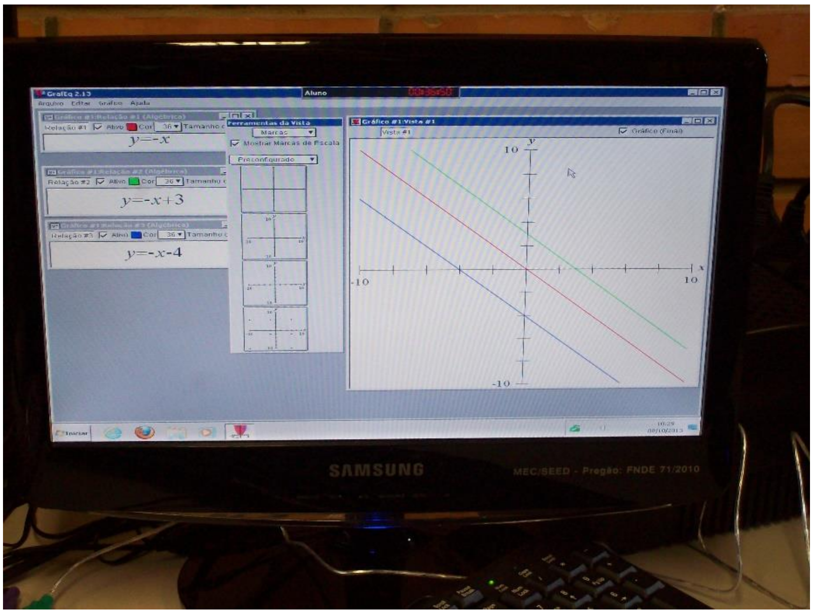


Figura 45 – Encontro 2: Realização da atividade 2 pela dupla E

A terceira atividade deste encontro trabalhava a passagem do registro de representação algébrico para o gráfico, apresentando regiões desenhadas pelo *GrafEq* e questionando quais inequações foram utilizadas nesta construção.

Nas Figuras 46, 47 e 48 podemos visualizar as regiões da atividade 3, construídas pelos alunos no *software*.

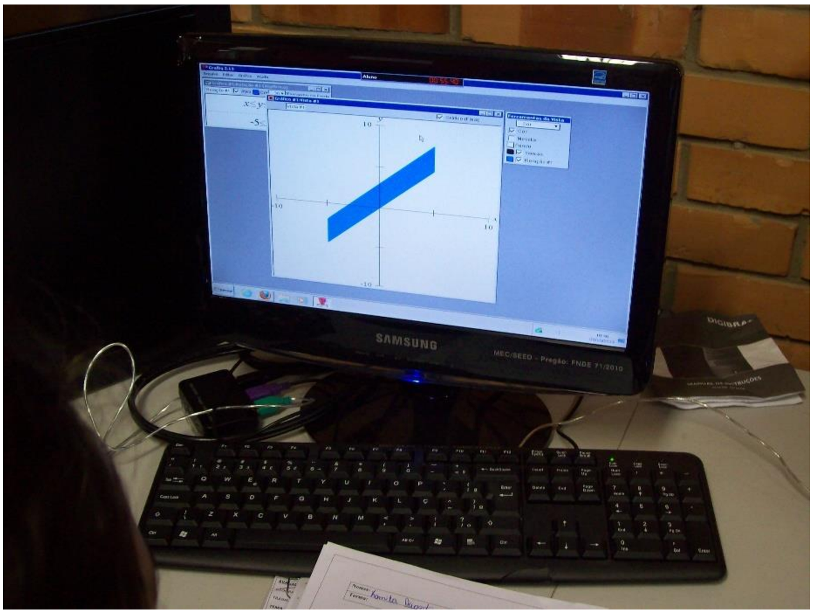


Figura 46 – Encontro 2: Realização da atividade 3a pela dupla A

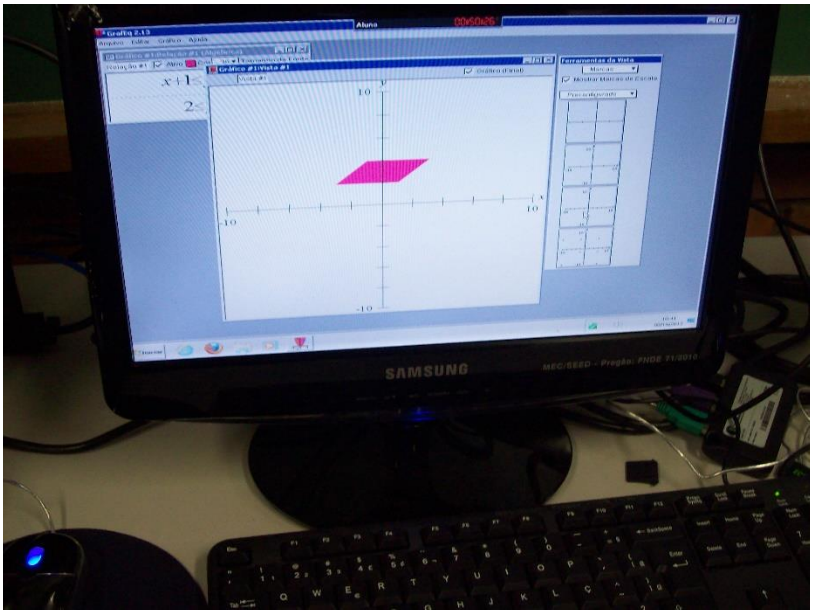


Figura 47 – Encontro 2: Realização da atividade 3b pela dupla I

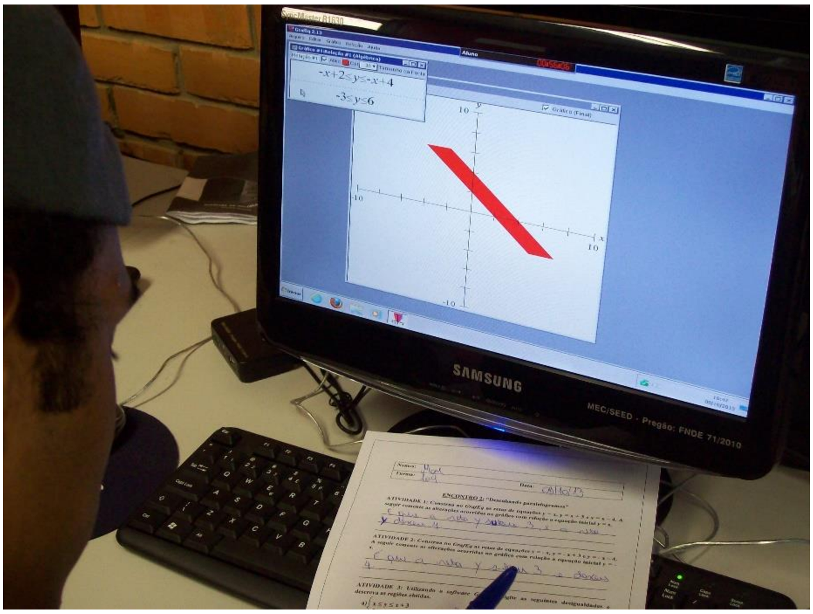


Figura 48 – Encontro 2: Realização da atividade 3c pela dupla H

A quarta atividade desta aula, trazia quatro figuras construídas via *GrafEq* e pedia para que os alunos as reproduzissem no *software*, descrevendo quais desigualdades algébricas foram utilizadas na construção de cada uma das regiões. Neste momento, estávamos trabalhando a passagem do registro de representação geométrico para o algébrico.

Nas Figuras 49 e 50 apresentamos as reproduções das duas primeiras regiões da atividade 4, realizadas por duas duplas.

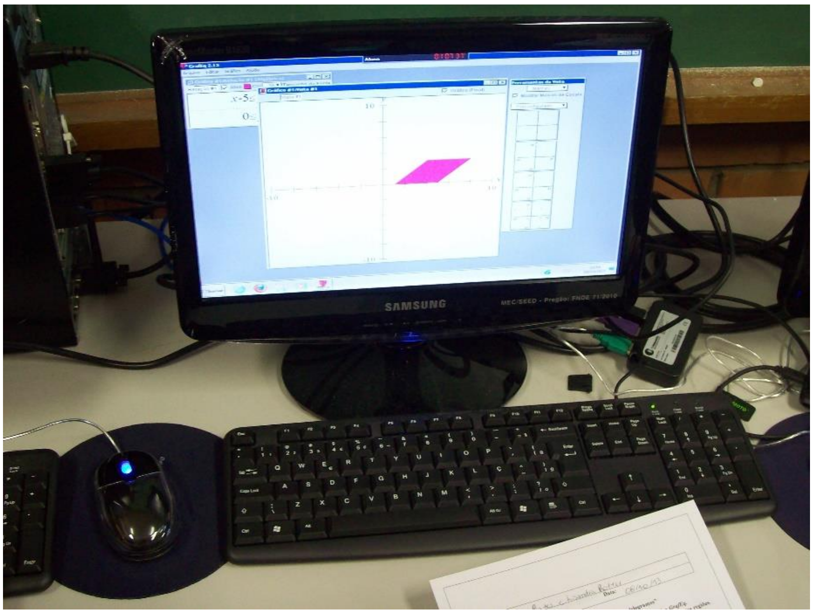


Figura 49 – Encontro 2: Realização da atividade 4 (região 1) pela dupla J

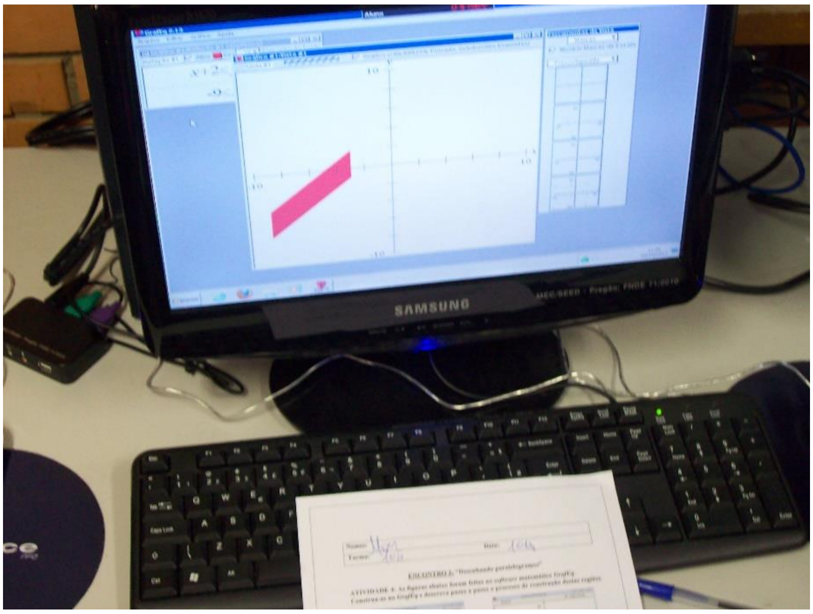


Figura 50 – Encontro 2: Realização da atividade 4 (região 2) pela dupla H

Já nas figuras 51, 52 e 53 observamos as reproduções das duas últimas regiões da atividade 4. Um pouco mais complexas que as anteriores, estas figuras eram formadas por composições de paralelogramos.

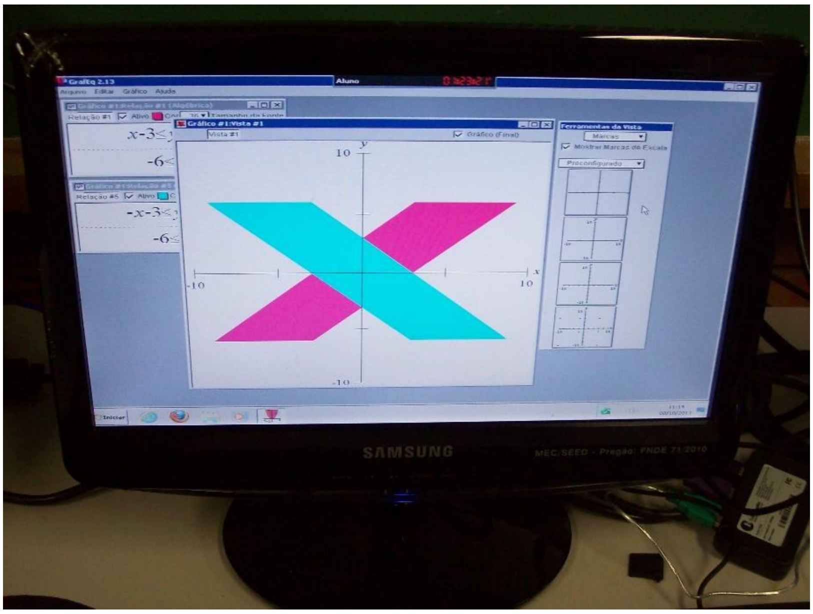


Figura 51 – Encontro 2: Realização da atividade 4 (região 3) pela dupla C

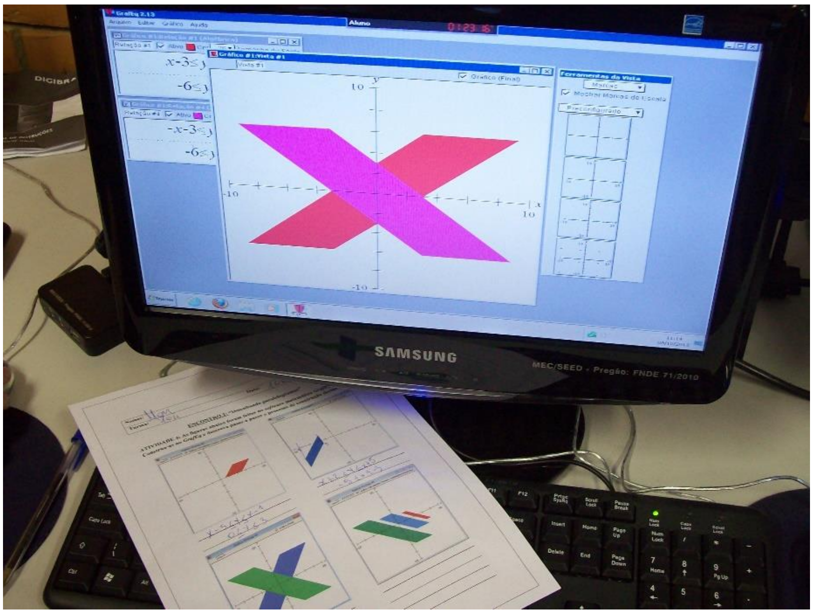


Figura 52 – Encontro 2: Realização da atividade 4 (região 3) pela dupla H

Figura 53 – Encontro 2: Realização da atividade 4 (região 4) pela dupla K

- **Encontro 3**

O terceiro encontro da nossa sequência didática ocorreu na manhã do dia 22 de outubro de 2013, no 1º (das 7h40min às 8h25min) e 4º períodos (das 10h10min às 10h55min) da disciplina de matemática. Essa mudança nos nossos horários habituais do projeto ocorreu devido à ocupação do laboratório de informática no 5º período deste dia. Nesta aula estavam presentes vinte e dois alunos, formando onze duplas para a realização das atividades. Para organizarmos esses grupos, de maneira a facilitar as análises feitas ao longo deste trabalho, assim como nos encontros anteriores, nomeamos as mesmas duplas com as letras: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e K.

Dando sequência a nossa proposta didática, neste encontro trabalhamos a construção de triângulos no plano cartesiano através da álgebra. Para isso, após um breve momento em que os conteúdos matemáticos envolvidos no encontro foram debatidos: posições relativas de retas (retas concorrentes), equação reduzida da reta y = ax + b (b real) e definição de coeficiente angular, entreguei aos alunos a primeira folha de atividades.

Este terceiro encontro trabalhava a construção de regiões triangulares no plano cartesiano, fazendo uso de sistemas de inequações. Nas atividades propostas, os alunos deveriam valer-se de desigualdades algébricas para delimitar regiões no plano, que viriam a determinar triângulos, bem como, observando regiões triangulares já construídas, definir o sistema de inequações utilizado para esboçar tais construções.

As retas y = x, y = 2x e y = 2x + 3, construídas no *software GrafEq* pela dupla A, podem ser visualizadas na Figura 54.

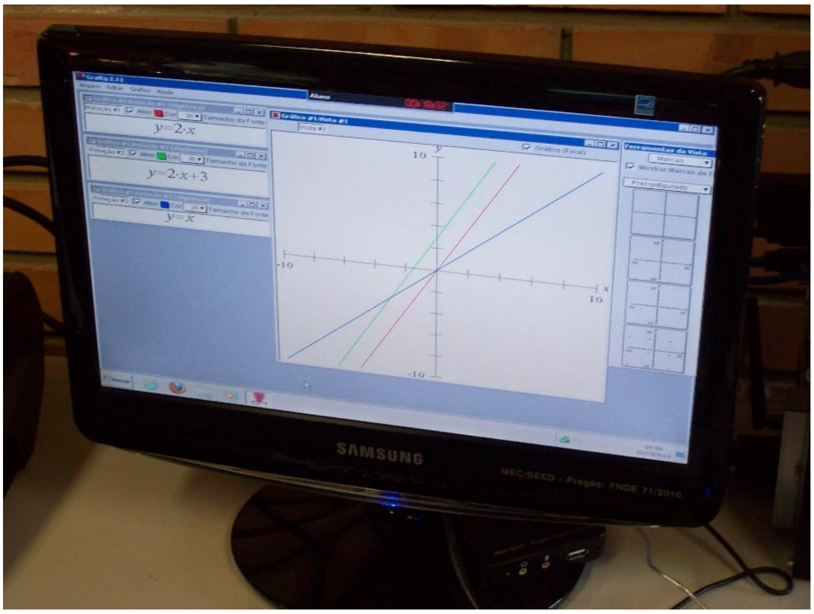


Figura 54 – Encontro 3: Realização da atividade 1 pela dupla A

Na Figura 55, podemos observar a dupla D realizando a atividade 2. Podemos perceber que a dupla construiu as retas y = -x e y = -2x +3, e provavelmente na sequência construirá a reta y = -2x. Verificamos ainda que a dupla optou por utilizar outro recurso presente no *software*, proporcionando a mudança na cor de fundo de seu plano cartesiano.

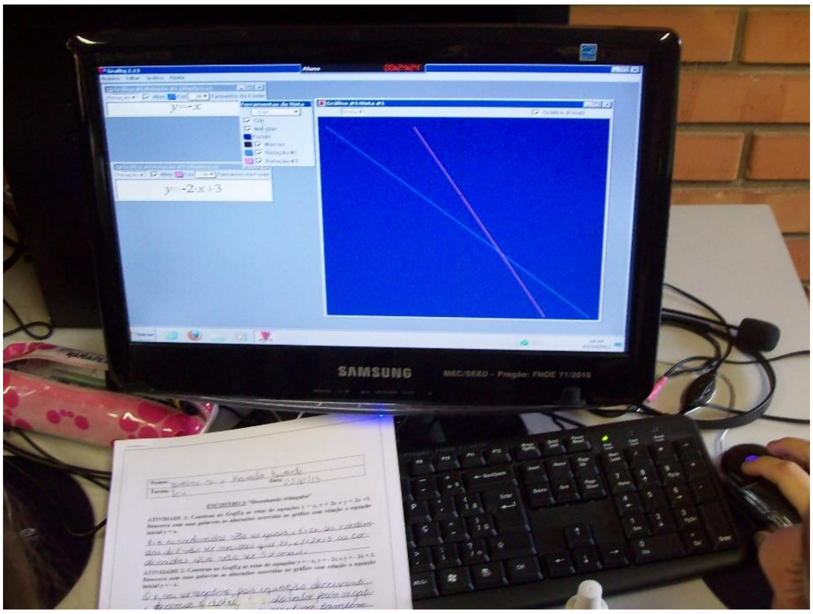


Figura 55 – Encontro 3: Realização da atividade 2 pela dupla D

Nas Figuras 56, 57 e 58 podemos visualizar as regiões esboçadas pelo *software* ao serem inseridas as inequações fornecidas na atividade 3.

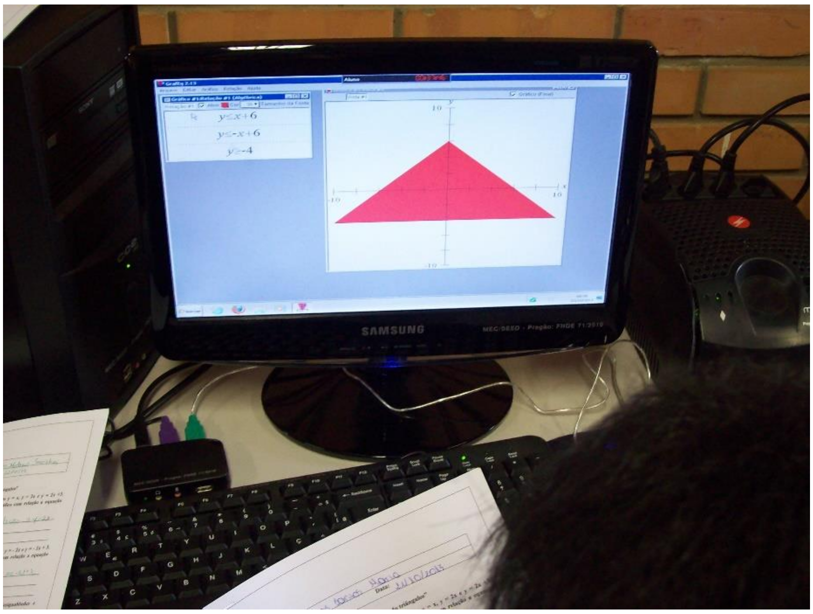


Figura 56 – Encontro 3: Realização da atividade 3a pela dupla J

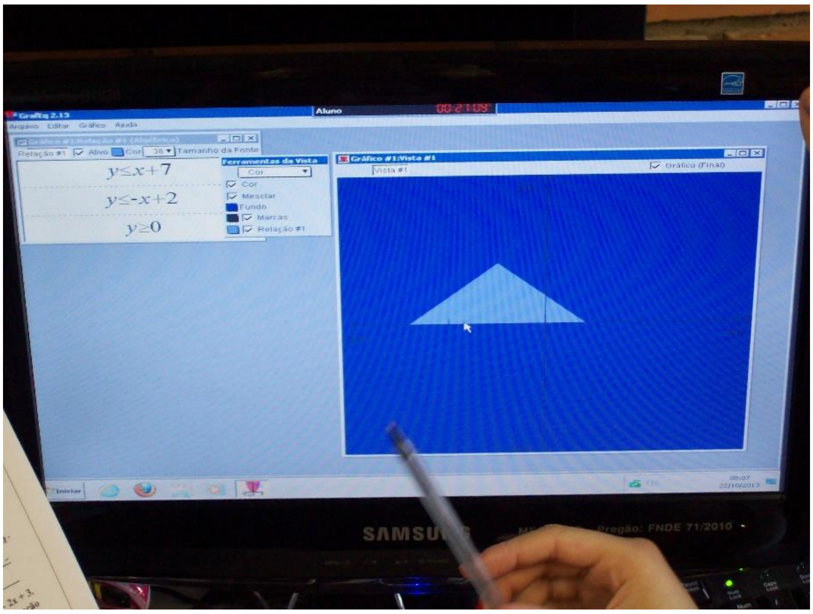


Figura 57 – Encontro 3: Realização da atividade 3b pela dupla D

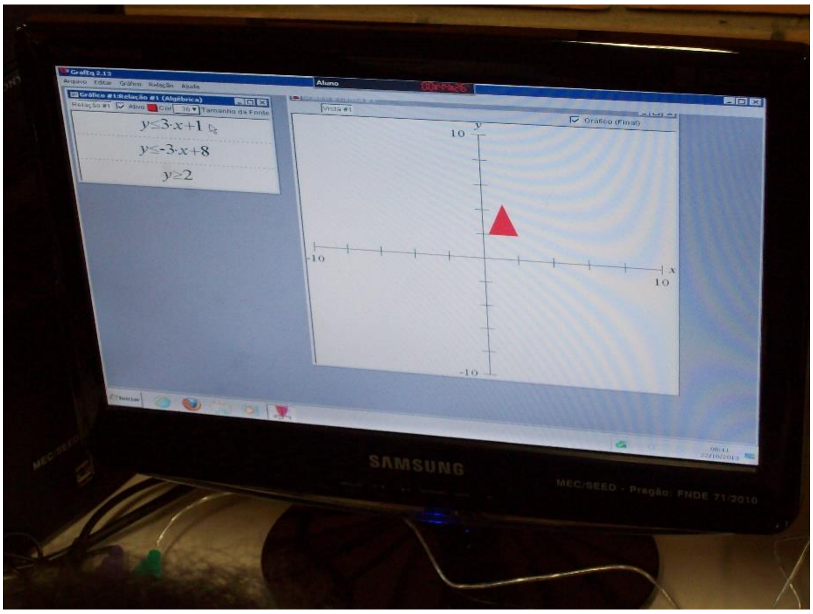


Figura 58 – Realização da atividade 3c pela dupla K

Na Figura 59 podemos visualizar a reprodução correta da segunda região da atividade 4. Observamos que a dupla fez as escolhas de forma minuciosa, delimitando o triângulo pelas retas concorrentes de equações $y = 2x + 6$ e $y = -2x + 2,5$ e pela restrição $y \geq 2,5$.

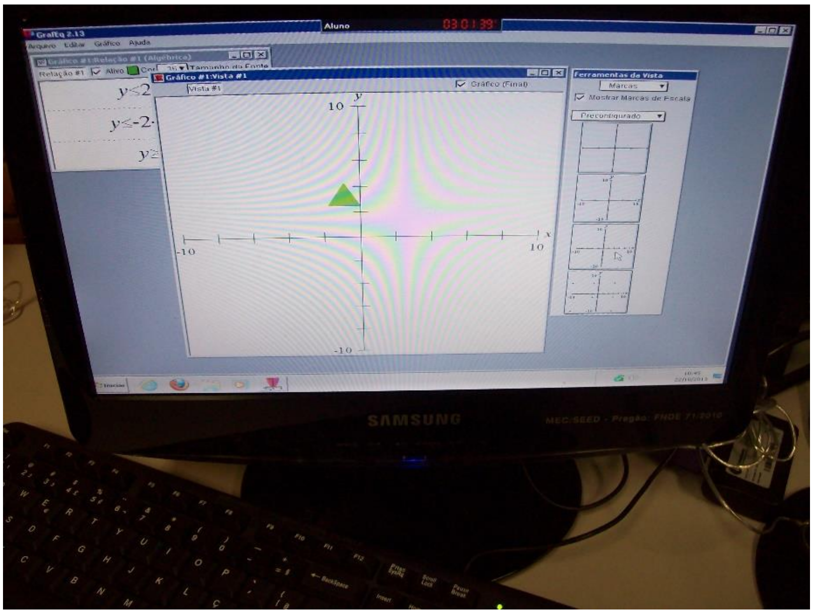


Figura 59 – Encontro 3: Realização da atividade 4 (região 2) pela dupla C

Observamos a reprodução da terceira figura da atividade 4 pela dupla B, na Figura 60. Notemos que a dupla, além de fazer a escolha correta do sistema de inequações que gerou a figura, optou por manter as cores originais fornecidas na folha de atividades.

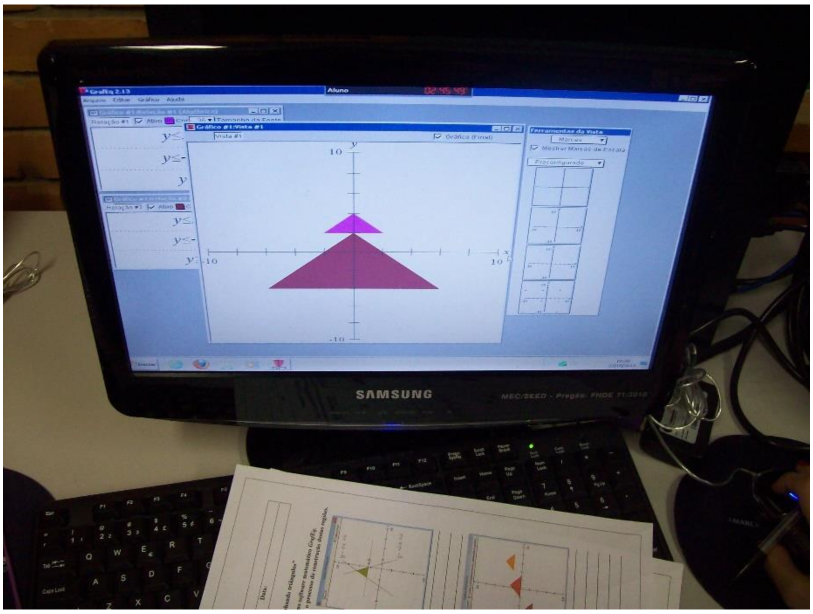


Figura 60 – Encontro 3: Realização da atividade 4 (região 3) pela dupla B

Nas Figuras 61 e 62, percebemos a reprodução da última região da segunda folha de atividades por duas duplas distintas.

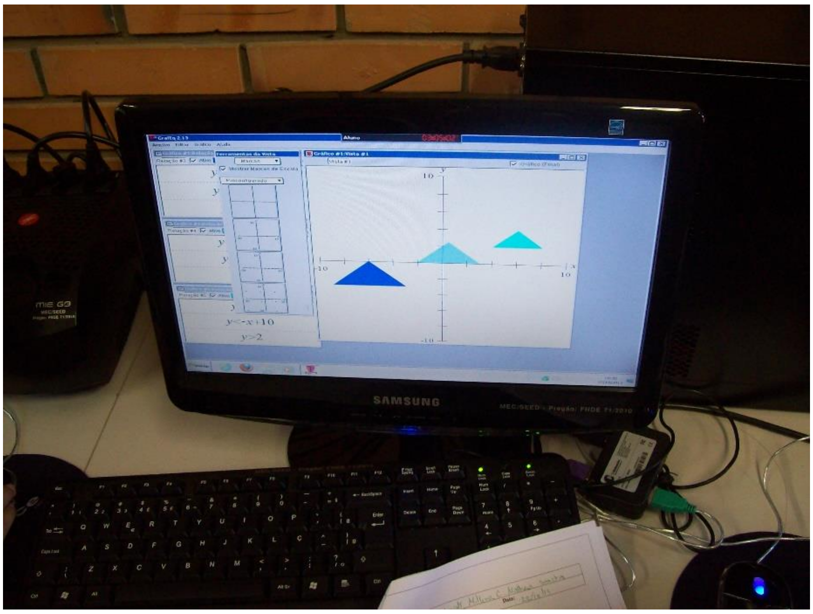


Figura 61 – Encontro 3: Realização da atividade 4 (região 4) pela dupla J

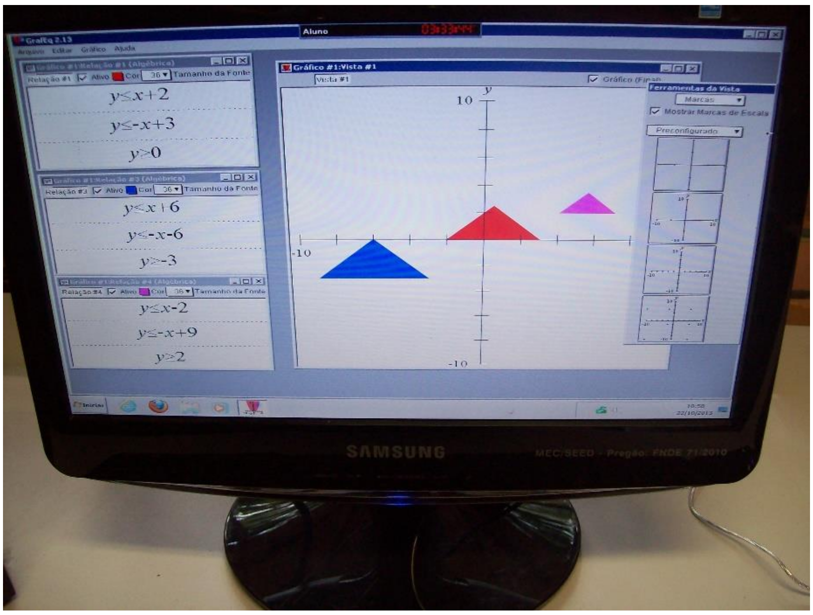


Figura 62 – Encontro 3: Realização da atividade 4 (região 4) pela dupla H

- **Encontro 4**

O quarto encontro da nossa sequência didática ocorreu na manhã do dia 29 de outubro de 2013, no 1º (das 7h40min às 8h25min) e no 4º período (das 10h10min às 10h55min) da disciplina de matemática. Assim como na semana anterior, realizamos o nosso projeto neste horário devido à ocupação do laboratório de informática no 5º período deste dia. Nesta aula estavam presentes vinte alunos, formando dez duplas para a realização das atividades. As duplas que estavam presentes neste encontro eram A, B, C, D, E, F, G, H, I e J.

Dando continuidade à nossa proposta didática, neste encontro trabalhamos a construção de círculos no plano cartesiano através da álgebra. Para isso, entreguei aos alunos a primeira folha de atividades.

A atividade 1 visava introduzir o estudo da equação da circunferência, requisito essencial para a construção de círculos no plano cartesiano. Já a segunda atividade trazia no enunciado determinadas regiões a serem esboçadas no *software*, valendo-se de sistemas de inequações convenientes.

Nas figuras 63, 64 e 65, podemos visualizar a inserção correta das desigualdades que desenhavam as figuras pedidas na atividade 2.

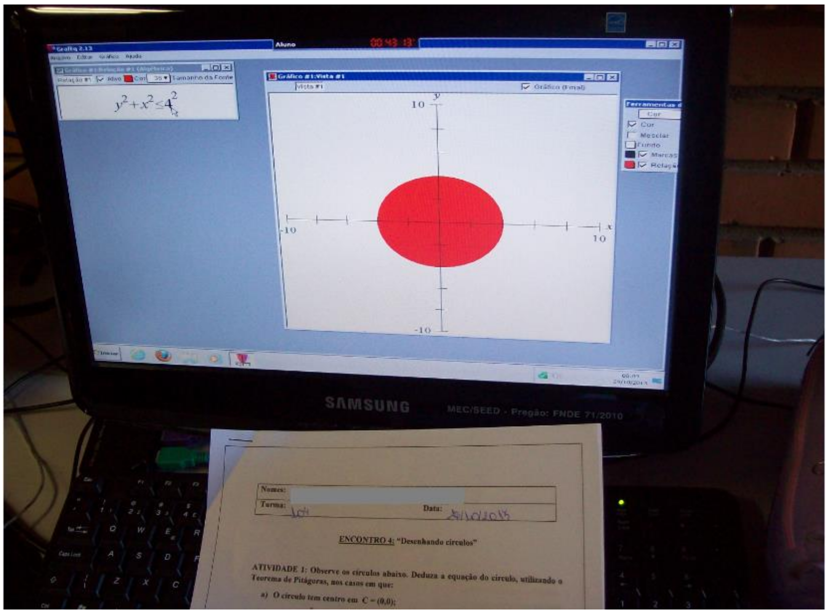


Figura 63 – Encontro 4: Realização da atividade 2a pela dupla I

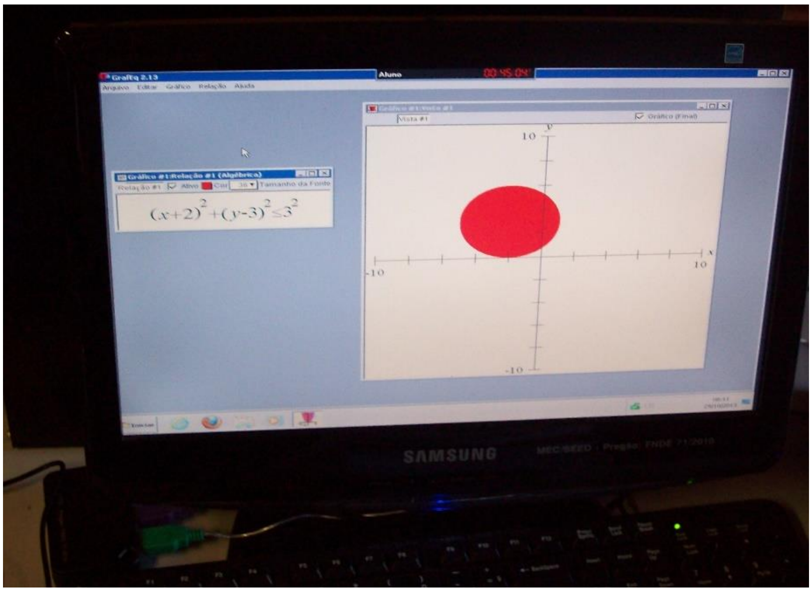


Figura 64 – Encontro 4: Realização da atividade 2b pela dupla D

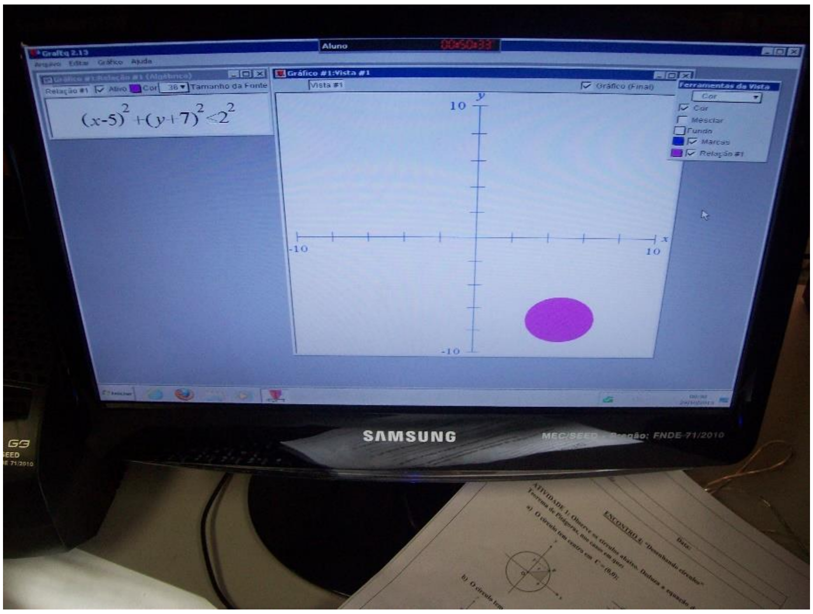


Figura 65 – Encontro 4: Realização da atividade 2c pela dupla B

A terceira atividade visava trabalhar a passagem do registro geométrico para o algébrico, trazendo figuras formadas por composições de círculos a serem reproduzidas no *GrafEq*.

Podemos visualizar as reproduções das duas primeiras regiões da atividade 3, realizadas pelas duplas A e F, nas Figuras 66 e 67.

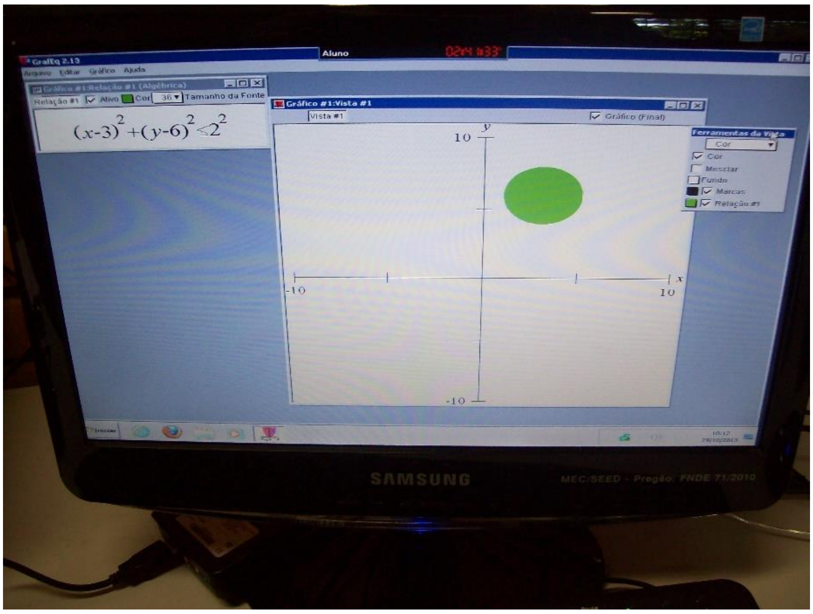


Figura 66 – Encontro 4: Realização da atividade 3 (região 1) pela dupla A

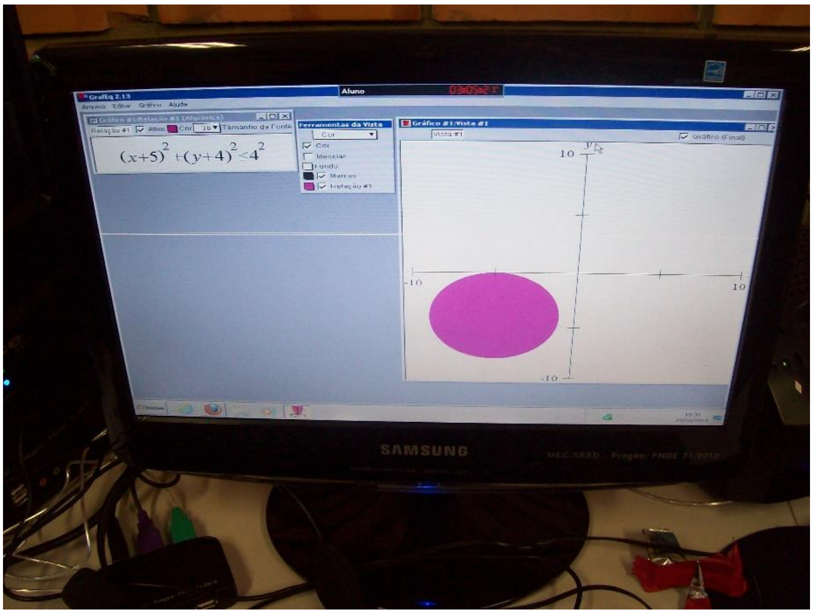


Figura 67 – Encontro 4: Realização da atividade 3 (região 2) pela dupla F

Nas figuras 68 e 69, podemos visualizar a reprodução correta da terceira região, formada pela composição de dois círculos.

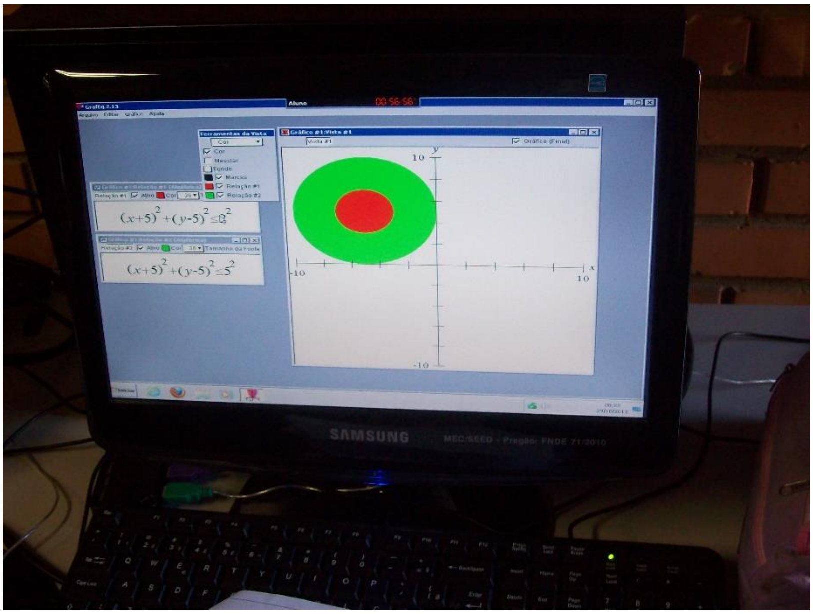


Figura 68 – Encontro 4: Realização da atividade 3 (região 3) pela dupla I

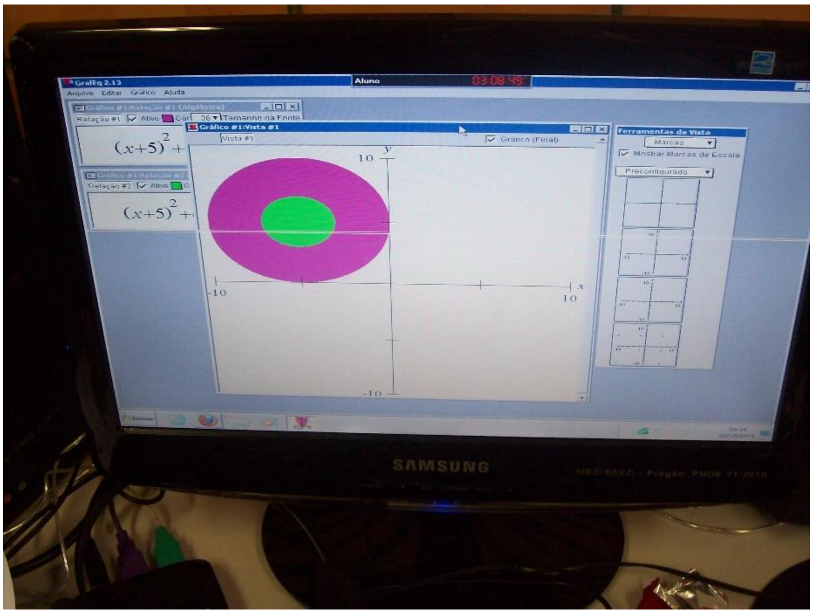


Figura 69 – Encontro 4: Realização da atividade 3 (região 3) pela dupla B

Nas figuras 70 e 71, observamos a reprodução perfeita da última figura da atividade 3, formada pela composição de três círculos. Percebemos que a primeira dupla preocupou-se apenas em distinguir por cores os círculos desenhados, enquanto que a segunda dupla mudou ainda a cor de fundo do plano cartesiano.

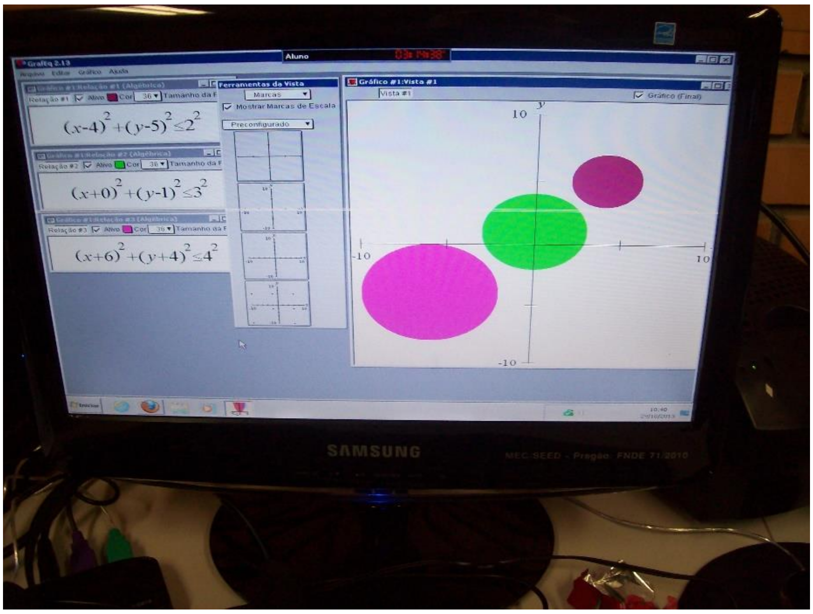


Figura 70 – Encontro 4: Realização da atividade 3 (região 4) pela dupla B

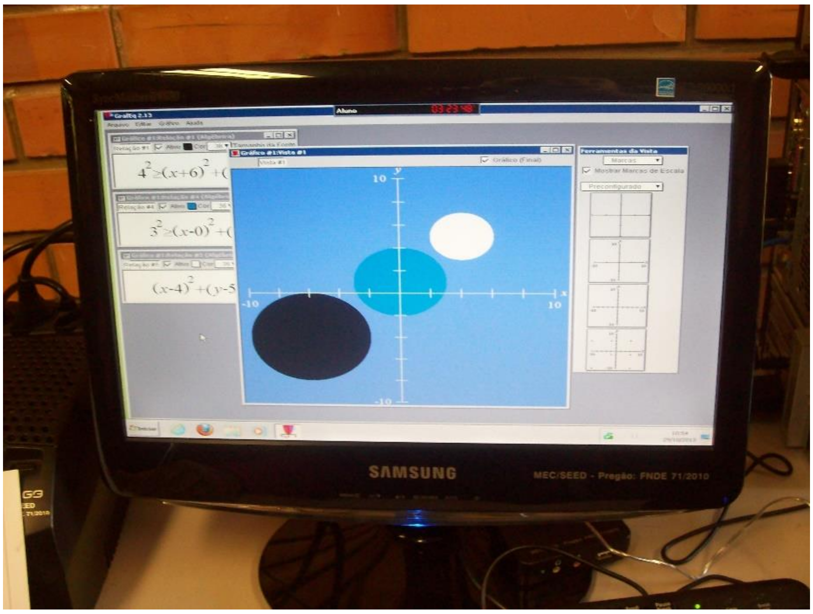


Figura 71 – Encontro 4: Realização da atividade 3 (região 4) pela dupla E

Houve uma dupla que, ao se equivocar na inserção da inequação que esboçaria um círculo de centro C = (-2, 3) e raio 3, acabou criando uma região diferenciada e que lhe despertou a atenção. Esta dupla ficou impressionada ao perceber as alterações que ocorreram no gráfico ao mudar o sinal de adição para o de multiplicação na inequação, bem como inserir o sinal de desigualdade ≥ na mesma. Podemos observar esta região na Figura 72.

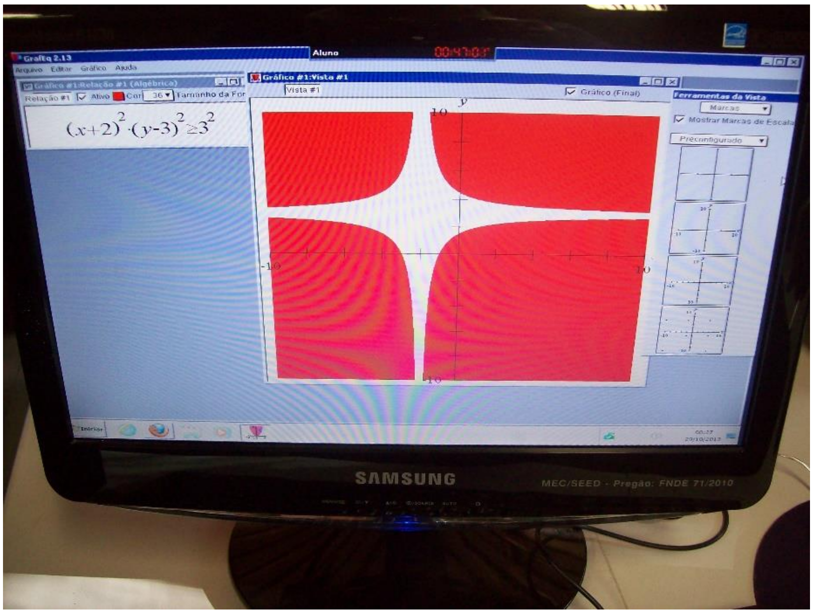


Figura 72 – Encontro 4: Região construída pela dupla F

- **Encontro 5**

O quinto e último encontro da nossa sequência didática ocorreu na manhã do dia 05 de novembro de 2013, no 1º (das 7h40min às 8h25min) e 4º períodos (das 10h10min às 10h55min) da disciplina de matemática. Nesta aula estavam presentes vinte e dois alunos, que formaram onze duplas para a realização das atividades. Todas as duplas estavam presentes neste encontro. São elas nomeadas por A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e K.

Dando encerramento a nossa proposta didática, neste encontro os alunos realizaram suas próprias construções no *GrafEq*, utilizando as figuras geométricas trabalhadas nos encontros anteriores como inspiração. Este quinto encontro visava realizar uma revisão dos conteúdos estudados ao longo da sequência didática, bem como verificar os conhecimentos adquiridos pelos alunos ao final da experiência.

Diversos foram os desenhos esboçados pelas duplas, alguns alunos optaram por esboçar paisagens, outros preferiram desenhar personagens de desenhos e houve duplas que fizeram obras abstratas. Em todos os desenhos construídos, percebeu-se a utilização de no mínimo duas figuras geométricas diferentes, bem como a preocupação na escolha das cores que dariam realidade às obras e ao colorido do fundo do plano cartesiano.

Nas Figuras 73, 74 e 75, podemos visualizar a reprodução de paisagens pelas duplas, entre as preferências, podemos visualizar o esboço de casas e plantas.

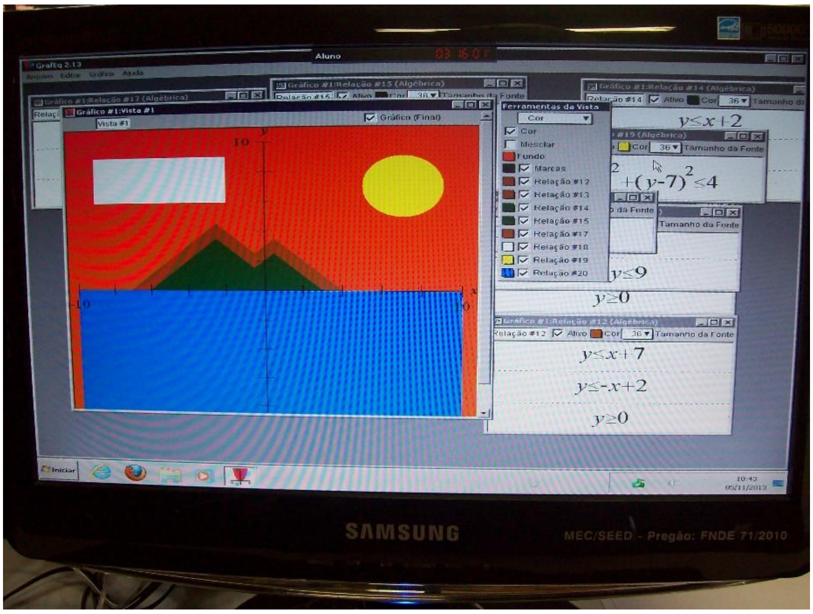


Figura 73 – Encontro 5: Paisagem desenhada pela dupla F

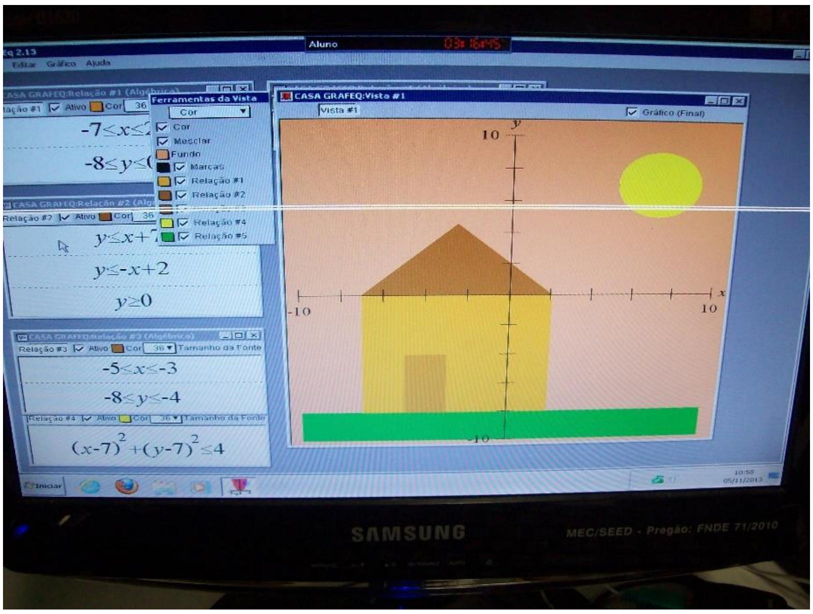


Figura 74 – Encontro 5: Paisagem desenhada pela dupla G

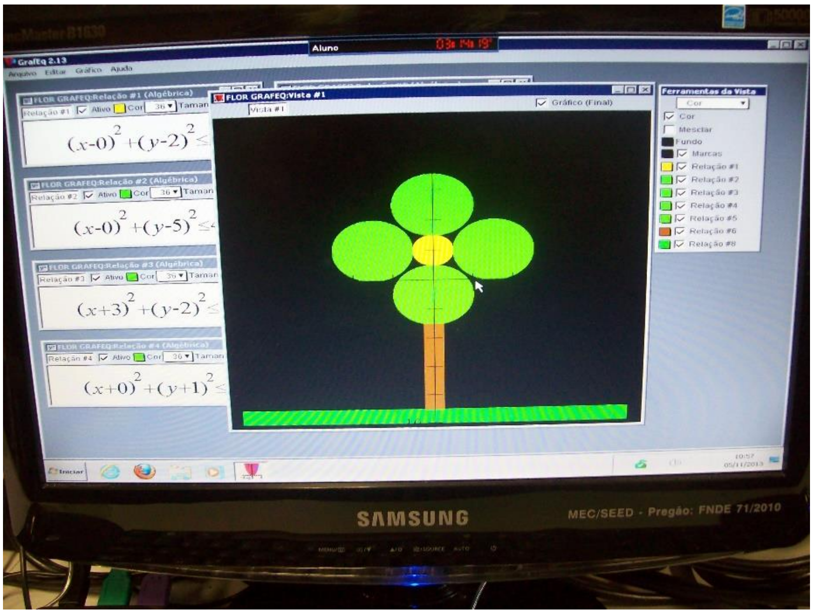


Figura 75 – Encontro 5: Paisagem desenhada pela dupla H

Ainda reproduzindo paisagens, algumas duplas valeram-se de inequações que esboçavam regiões que não foram trabalhadas em aula durante os encontros no laboratório de informática. Tais alunos procuraram testar outros tipos de inequações para perceber as construções realizadas pelo *software*. As descobertas alcançadas por estas duplas, geraram obras bem distintas.

A dupla D esboçou uma obra que procurava retratar um deserto (Figura 76), enquanto que a dupla J desenhou uma árvore (Figura 77). Observando as obras construídas por estas duplas, verificamos que a inequação $(x + 1)^2 + (y – 3) \leq -2^2$, utilizada na construção de parte das dunas do deserto, bem como a inequação $(x + 4)^{(y-4)^2} \leq 7$, um pouco mais ousada que a anterior, utilizada para esboçar uma árvore de longo galho, representam regiões diferentes das trabalhadas ao longo da nossa sequência didática.

Embora notemos que estas inequações utilizadas pelos alunos foram apenas fruto de tentativas inusitadas no *software*, sem que tais conteúdos matemáticos se fizessem conhecidos por eles, considerei esta proposta muito bem vinda, uma vez que a exploração das ferramentas do *GrafEq* e suas possibilidades também foram práticas que procurei trabalhar ao longo dos encontros desta sequência de atividades.

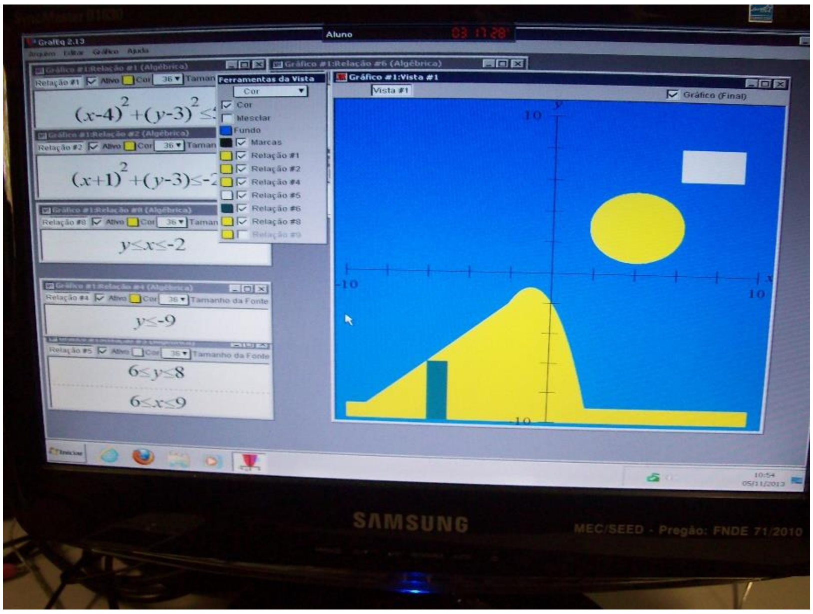


Figura 76 – Encontro 5: Deserto desenhado pela dupla D

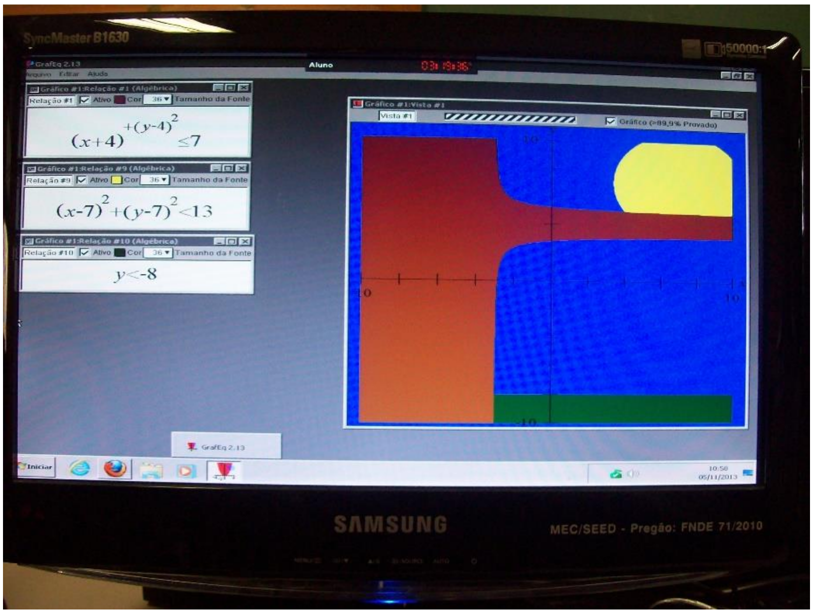


Figura 77 – Encontro 5: Árvore desenhada pela dupla J

Com a intenção de desenhar personagens de desenhos conhecidos pela turma, as duplas E, B e A optaram por este tema na realização da suas obras. A dupla E nomeou a obra construída como “Mickey Mouse pirata” (Figura 78), enquanto que as duplas B e A procuraram desenhar bonecos de neve. Na Figura 79 percebemos a réplica de um boneco de neve tradicional, enquanto a Figura 80 demonstra o esboço de um boneco de neve diferenciado.

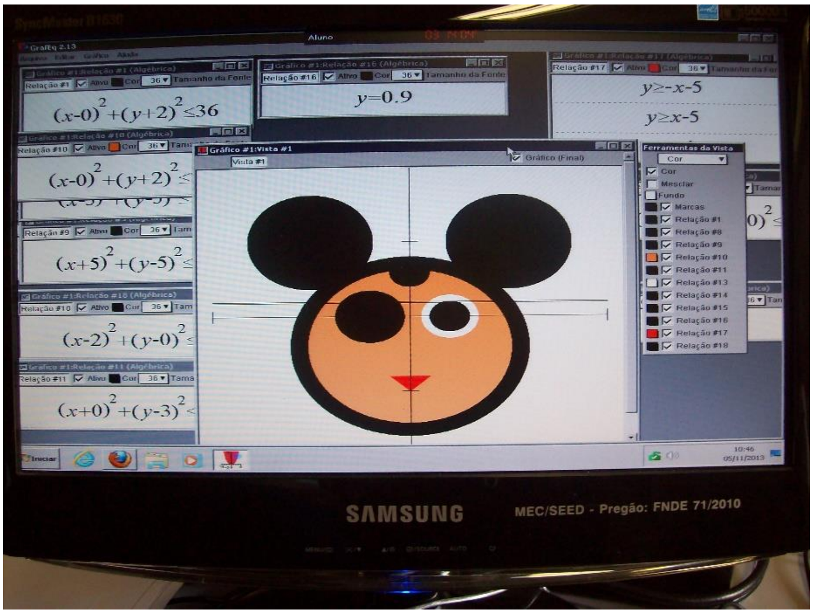


Figura 78 – Encontro 5: “Mickey Mouse pirata” desenhado pela dupla E

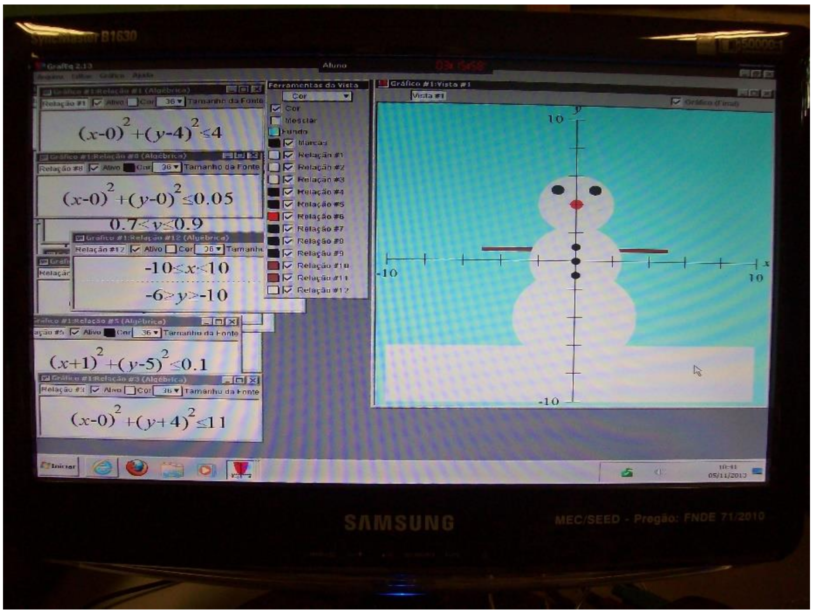


Figura 79 – Encontro 5: Boneco de neve desenhado pela dupla B

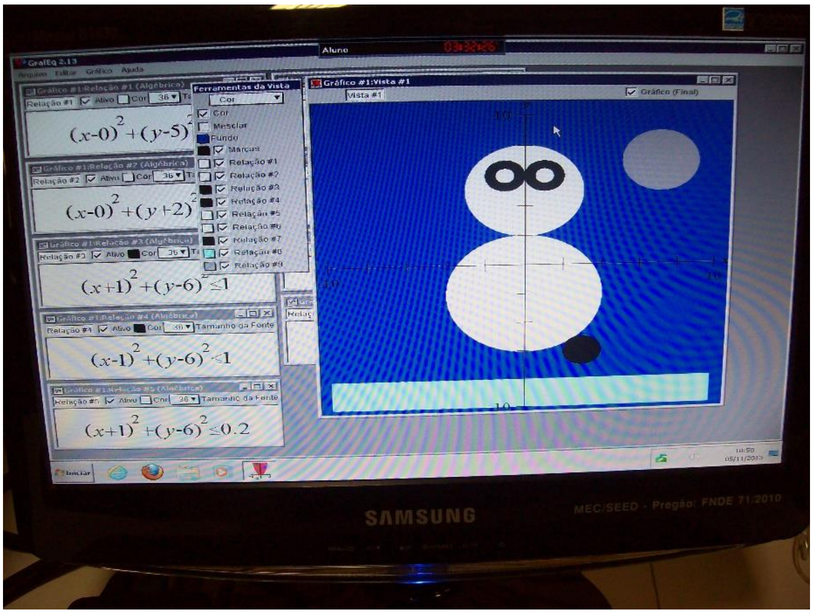


Figura 80 – Encontro 5: Boneco de neve desenhado pela dupla A

Optando por elaborar obras abstratas, as duplas K, C e I realizaram construções bastante chamativas, com cores impactantes e formas geométricas variadas, como podemos observar nas Figuras 81, 82 e 83. A dupla K utilizou triângulos, retângulos e círculos na sua composição, enquanto que as duplas C e I elaboraram desenhos abstratos compostos apenas de triângulos e círculos.

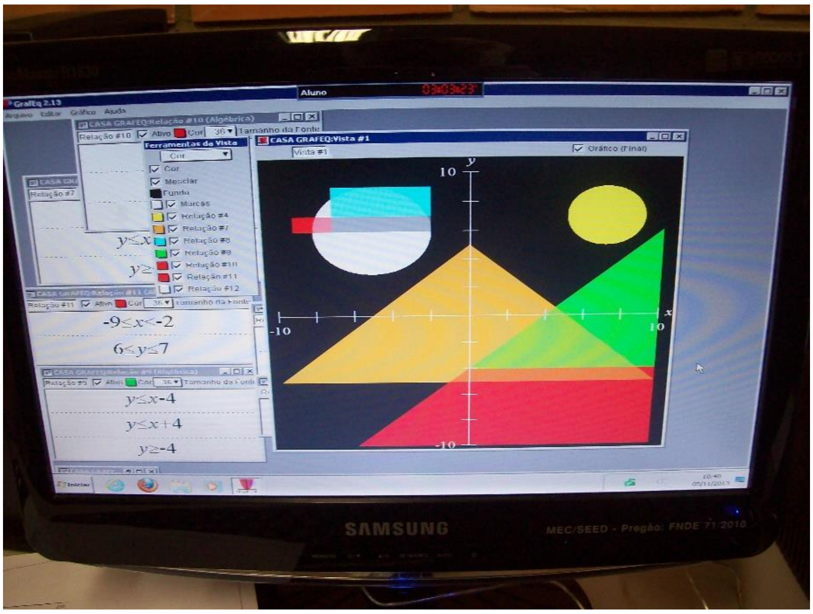


Figura 81 – Encontro 5: Figura abstrata desenhada pela dupla K

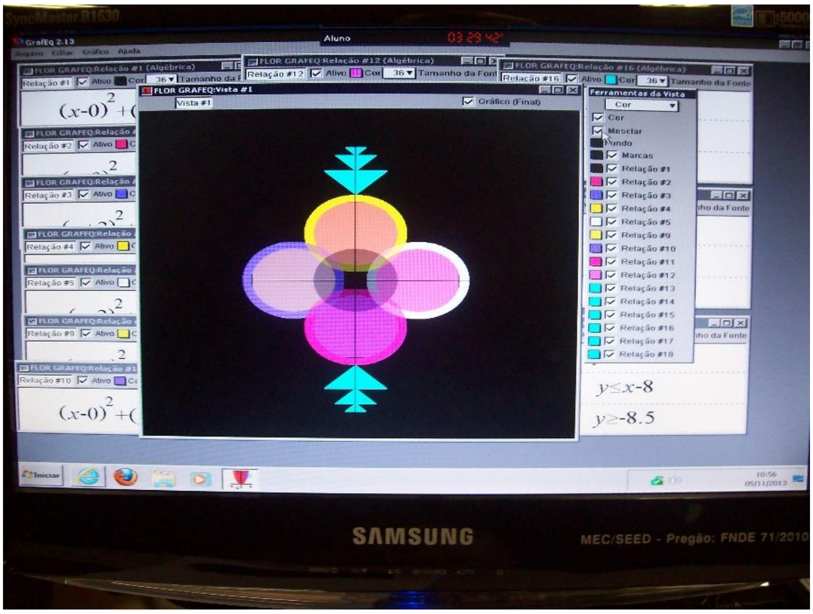


Figura 82 – Encontro 5: Figura abstrata desenhada pela dupla C

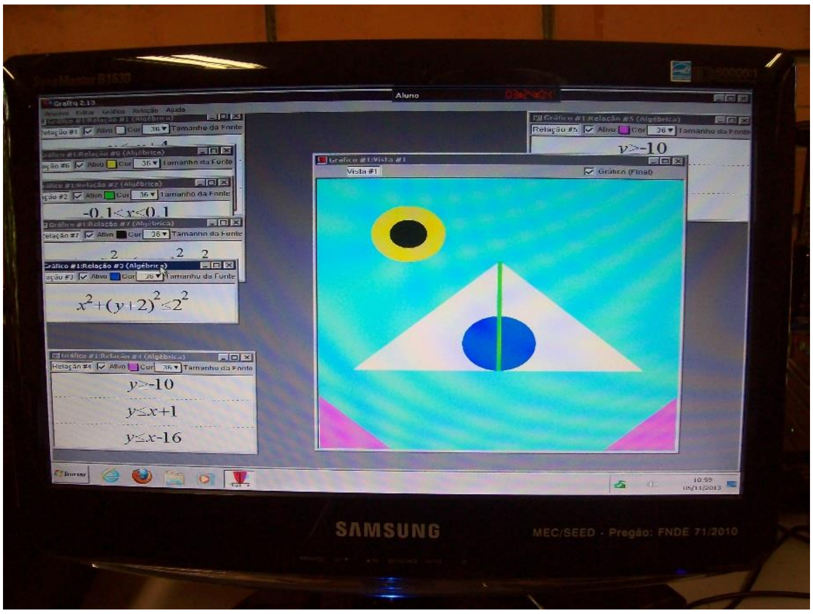


Figura 83 – Encontro 5: Figura abstrata desenhada pela dupla I

Após a apresentação do que foi realizado na nossa sequência didática, no próximo capítulo apresentamos a análise a *posteriori* da nossa experiência.

4. ANÁLISE E RESULTADOS DA EXPERIÊNCIA

Este capítulo tem como finalidade desenvolver a quarta etapa da nossa metodologia de ensino da Engenharia Didática: a análise a *posteriori*. Na análise a *posteriori*, o professor realizador da pesquisa e experimentação relata suas análises apoiando-se na coleta de dados realizada ao longo da sequência didática, como, por exemplo, observações descritas durante as aulas e as produções realizadas pelos alunos. É confrontando as análises feitas anteriormente e posteriormente à experimentação da pesquisa que se obtém a validação da nossa sequência de atividades.

Para a realização desta etapa da Engenharia Didática, descrevemos nesta seção as análises individuais de cada encontro, as dificuldades e progressos apresentados pelos alunos à cada atividade realizada. Avaliando as resoluções feitas pelos alunos nas atividades, estamos não só compreendendo quais dificuldades o aluno exibiu e determinada situação, mas também observando ao longo dos encontros se aquela dificuldade persistiu ou se houve uma evolução, por parte do aluno, na compreensão dos conceitos matemáticos trabalhados. Na explanação destas análises, apresentamos as respostas obtidas por algumas duplas em cada uma das atividades que constituíram a nossa sequência didática, verificando se cada encontro cumpriu com seus objetivos previamente determinados.

Ainda neste capítulo, comentamos as constatações feitas pelos próprios sujeitos da pesquisa, com relação à proposta didática da qual participaram, mostrando os relatos de algumas duplas ao final do último encontro. Estes relatos, concomitantes com a evolução perceptível dos alunos ao nível de conhecimentos matemáticos e o aprimoramento da passagem dos registros de representação algébrico para o geométrico e vice-versa, são fatores que culminarão na validação da nossa experiência.

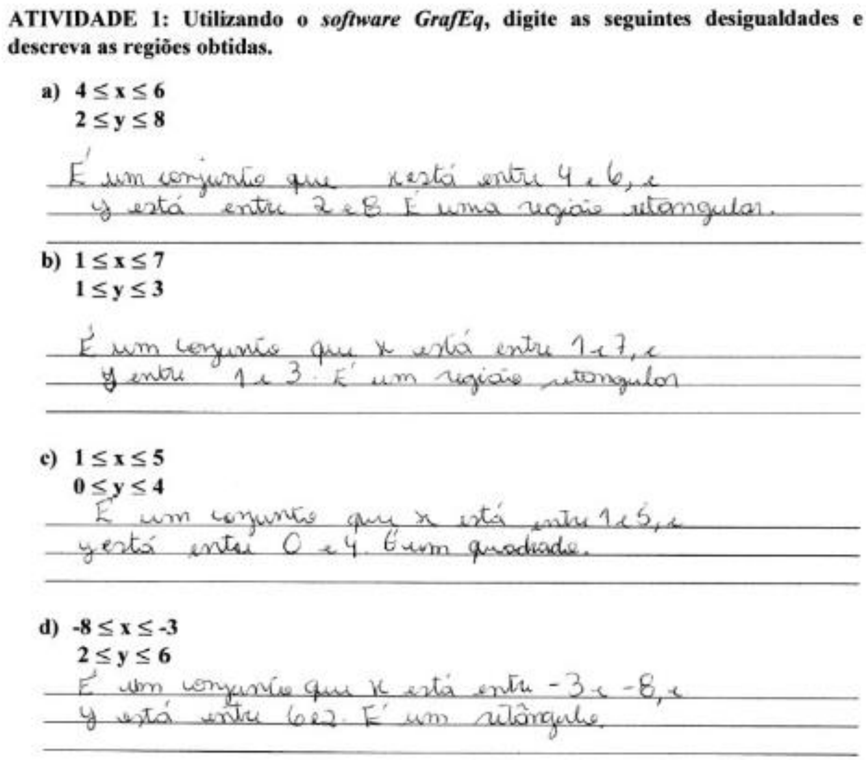
- **Análise a *posteriori* do Encontro 1**

Neste primeiro encontro, os alunos não apresentaram dificuldades na manipulação do *software* e seus recursos, com muita facilidade todos conseguiram manusear as ferramentas disponíveis, realizando eles mesmos suas descobertas. Durante o momento inicial desta aula, procurei deixar que eles explorassem o *software* livremente, para que depois eu mostrasse a eles quais recursos usaríamos posteriormente neste encontro.

Na atividade 1 desta aula, os alunos ficaram um pouco duvidosos sobre o que deveriam responder em cada um dos itens, evidenciando a dificuldade que normalmente os alunos têm em visualizar uma região (representação gráfica) e expressar o que estão vendo, a forma como esta região foi construída. Procuramos orientá-los, indicando que eles deveriam observar a região desenhada na tela do computador e descrevê-la, procurando visualizar qual a relação entre a desigualdade digitada na janela de relação algébrica do *GrafEq* e a representação gráfica construída posteriormente.

Inicialmente alguns alunos responderam que a região esboçada era um retângulo. Respondi a eles que estava correto, entretanto gostaria que eles detalhassem melhor as características deste retângulo, qual era a localização dele no plano cartesiano e como ele estava sendo delimitado pelas coordenadas x e y no gráfico.

Nas Figuras 84 e 85 podemos perceber a dificuldade dos alunos na interpretação da figura esboçada no *software*.



ATIVIDADE 1: Utilizando o *software GrafEq*, digite as seguintes desigualdades e descreva as regiões obtidas.

a) $4 \leq x \leq 6$
$2 \leq y \leq 8$

É um conjunto que x está entre 4 e 6, e y está entre 2 e 8. É uma região retangular.

b) $1 \leq x \leq 7$
$1 \leq y \leq 3$

É um conjunto que x está entre 1 e 7, e y entre 1 e 3. É um região retangular

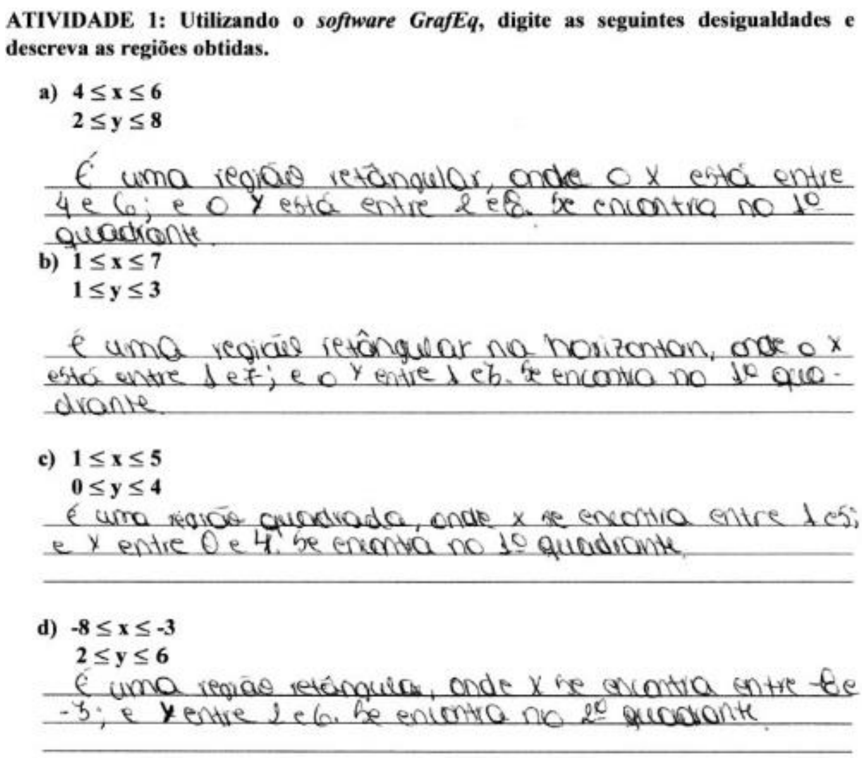
c) $1 \leq x \leq 5$
$0 \leq y \leq 4$

É um conjunto que x está entre 1 e 5, e y está entre 0 e 4. É um quadrado.

d) $-8 \leq x \leq -3$
$2 \leq y \leq 6$

É um conjunto que x está entre -3 e -8, e y está entre 6 e 2. É um retângulo

Figura 84 – Encontro 1: Resolução da atividade 1 pela dupla C



ATIVIDADE 1: Utilizando o *software GrafEq*, digite as seguintes desigualdades e descreva as regiões obtidas.

a) $4 \leq x \leq 6$
$2 \leq y \leq 8$

É uma região retângular, onde o x está entre 4 e 6; e o y está entre 2 e 8. Se encontra no 1º quadrante.

b) $1 \leq x \leq 7$
$1 \leq y \leq 3$

É uma região retângular na horizontan, onde o x está entre 1 e 7; e o y entre 1 e 3. Se encontra no 1º quadrante.

c) $1 \leq x \leq 5$
$0 \leq y \leq 4$

É uma região quadrada, onde x se encontra entre 1 e 5; e y entre 0 e 4. Se encontra no 1º quadrante.

d) $-8 \leq x \leq -3$
$2 \leq y \leq 6$

É uma região retângular, onde x se encontra entre -8 e -3; e y entre 2 e 6. Se encontra no 2º quadrante.

Figura 85 – Encontro 1: Resolução da atividade 1 pela dupla I

Na atividade 2, os alunos apresentaram um pouco menos de dificuldade do que na atividade anterior, pois rapidamente perceberam como deveriam realizá-la. Entretanto o principal equívoco dos alunos na realização da atividade foi a constante incidência de desigualdades do tipo $-1 \leq x \leq -3$, não percebendo que -1 é maior do que -3. Este equívoco, ao ser interpretado pelo *software*, respondeu com o não esboço da região pretendida pelo aluno, evidenciando que tal solução constitui-se num conjunto vazio.

Outros alunos tiveram dificuldade em escolher valores para delimitar as coordenadas x e y no plano cartesiano, com o intuito de respeitar as condições estabelecidas no enunciado de cada um dos itens. Na Figura 86, podemos perceber que a dupla não elaborou um sistema de inequações que esboçasse um quadrado de lado 3 no item 1, bem como não identificou corretamente o quadrante da região retangular pedida no item b, e também cometeu o mencionado equívoco ao escrever $5 \leq y \leq 2$ neste mesmo item.

ATIVIDADE 2: Inserindo desigualdades convenientes no *GrafEq*, esboce as regiões descritas abaixo. Descreva o processo que o levou a esta construção.

a) Um quadrado de lado 3 contido no 3º quadrante do plano cartesiano;

$-6 \leq x \leq -2$

$-5 \leq y \leq -1$

b) Um retângulo com lados medindo 4 e 2 unidades, contido no 1º quadrante.

$-7 \leq x \leq -3$

$5 \leq y \leq 2$

Figura 86 – Encontro 1: Resolução da atividade 2 pela dupla E

No entanto, outras duplas procuraram estratégias para não errar na resolução. Podemos perceber na Figura 87 que a dupla preferiu utilizar o zero como uma referência na elaboração das desigualdades e na interpretação correta dos valores a serem escolhidos para x e y, de forma que as figuras desenhadas fossem fiéis às medidas de comprimento dadas no enunciado da atividade.

ATIVIDADE 2: Inserindo desigualdades convenientes no *GrafEq*, esboce as regiões descritas abaixo. Descreva o processo que o levou a esta construção.

a) Um quadrado de lado 3 contido no 3º quadrante do plano cartesiano;

$-3 < x < 0$

$-3 < y < 0$

b) Um retângulo com lados medindo 4 e 2 unidades, contido no 1º quadrante.

$0 < x < 4$

$0 < y < 2$

Figura 87 – Encontro 1: Resolução da atividade 2 pela dupla B

A atividade 3, que buscava trabalhar com os alunos a passagem do registro de representação geométrico para o algébrico, dificuldade constante por parte dos alunos em sala de aula, surpreendentemente se mostrou mais simples aos alunos. Acredito que esta maior facilidade ocorreu porque os alunos de certa forma já haviam feito tal conversão de registros na atividade anterior. Embora as regiões não estivessem desenhadas na atividade 2, os alunos tinham que visualizá-las mentalmente ou no *software* para conseguir digitar as desigualdades convenientes para a construção das mesmas.

Embora considerasse interessante que os alunos reproduzissem no *GrafEq* as regiões esboçadas na atividade 3, alguns alunos perceberam que, para desenhar as regiões, bastava observar o gráfico dado para definir os valores corretos que delimitavam as coordenadas x e y no plano cartesiano. Nas figuras 88 e 89 podemos perceber a realização desta atividade pelas duplas C e F.

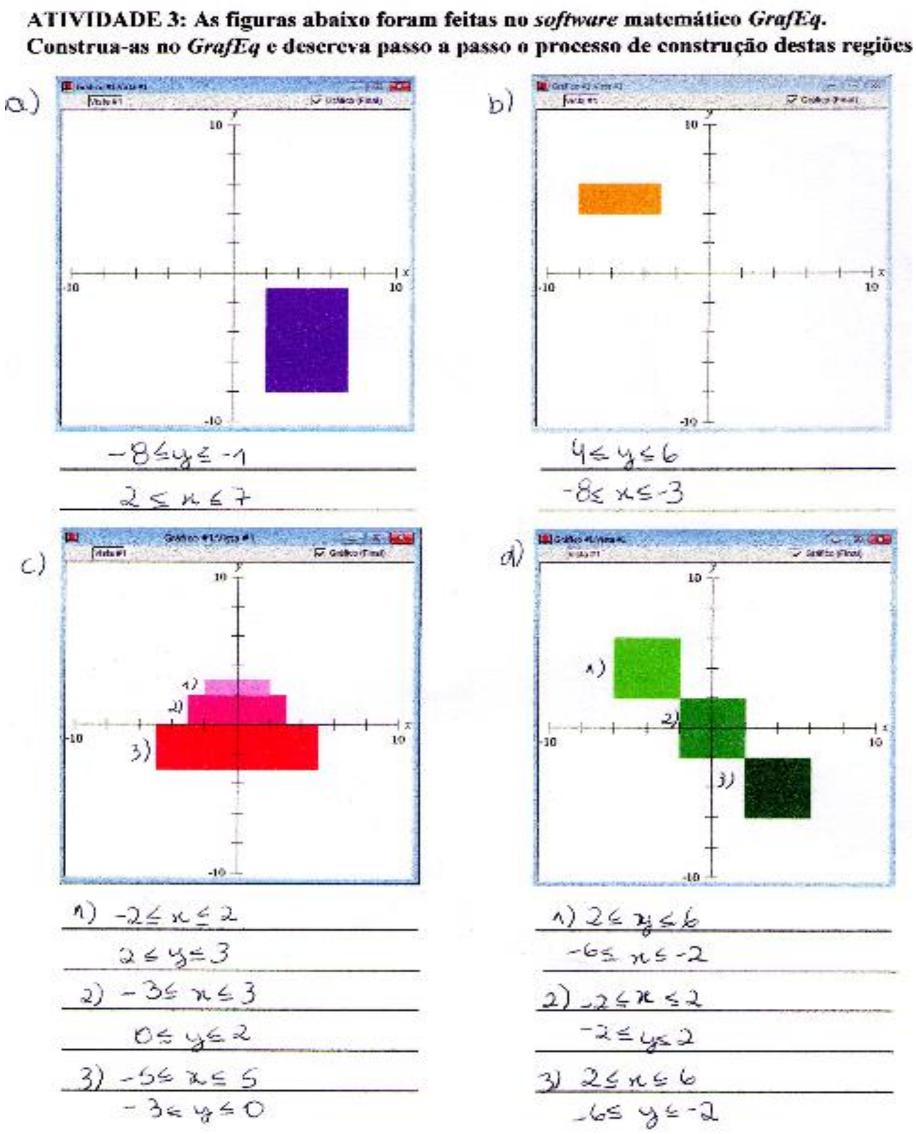


Figura 88 – Encontro 1: Resolução da atividade 3 pela dupla C

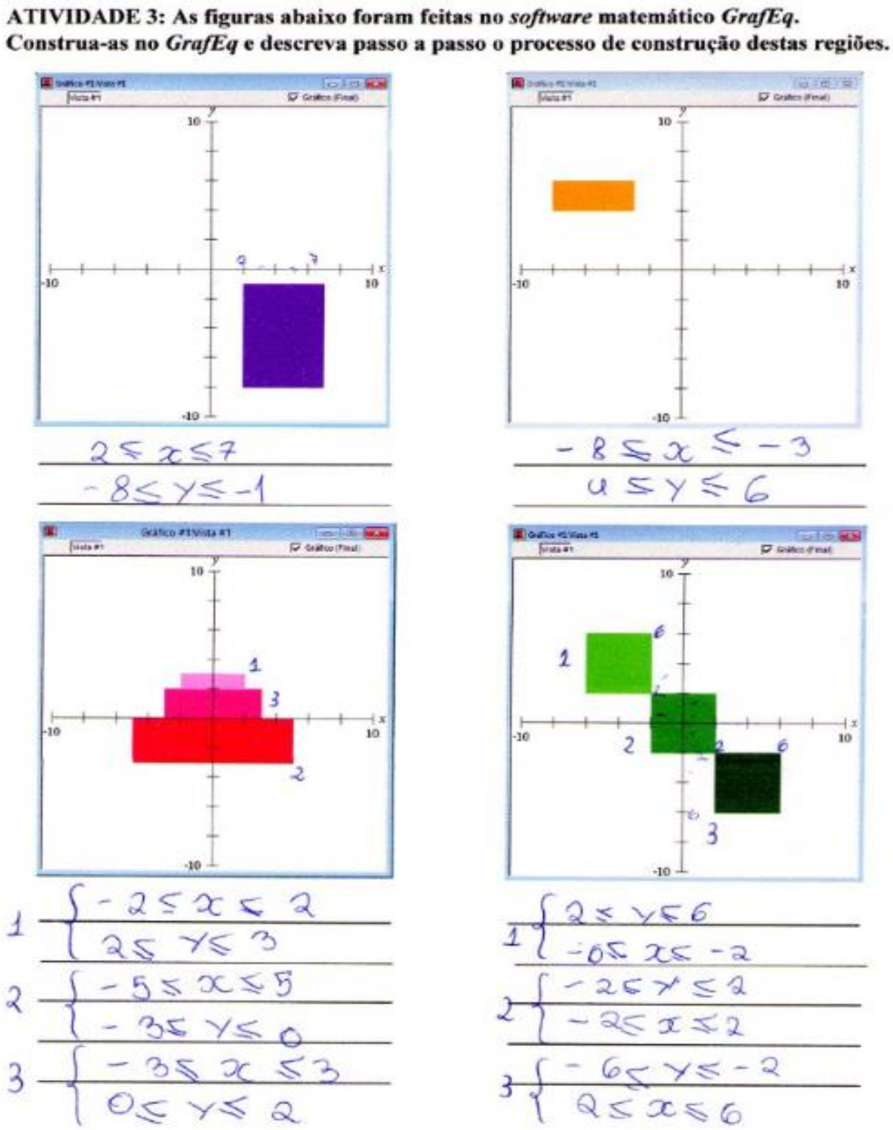


Figura 89 – Encontro 1: Resolução da atividade 3 pela dupla F

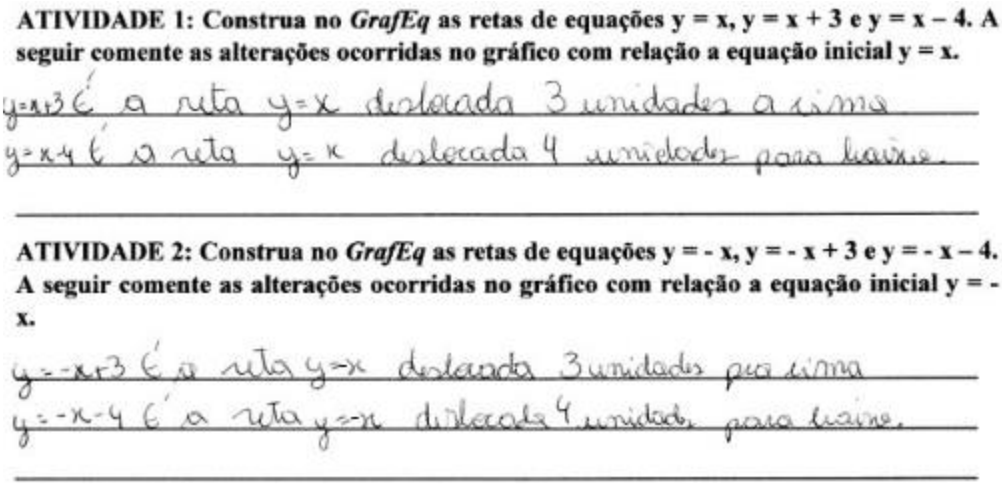
Em suma, podemos concluir que este primeiro encontro respondeu aos objetivos que se propunha, pois podemos perceber uma considerável evolução dos alunos ao longo das três atividades propostas. A participação e o interesse dos alunos ao realizarem as atividades também foi de grande importância para os resultados positivos obtidos neste primeiro encontro.

Todos os alunos participaram das atividades e conseguiram concluí-las. Houve o caso de algumas duplas, que apresentaram maior facilidade na realização das tarefas, acabarem auxiliando outros alunos que possuíam maiores dificuldades.

- **Análise a *posteriori* do Encontro 2**

Nas duas primeiras atividades deste encontro, os alunos tiveram facilidade em compreender as modificações ocorridas nos gráficos quando construíam no *software* a reta y = x e depois as retas y = x + 3 e y = x – 4, paralelas à reta inicial. Do mesmo modo, perceberam rapidamente às modificações que ocorriam no gráfico das retas y = -x + 3 e y = -x – 4 com relação ao gráfico da reta y = -x.

Nas figuras 90 e 91, podemos verificar as explicações com a clareza das constatações feitas pelas duplas C e E ao realizarem as atividades 1 e 2.

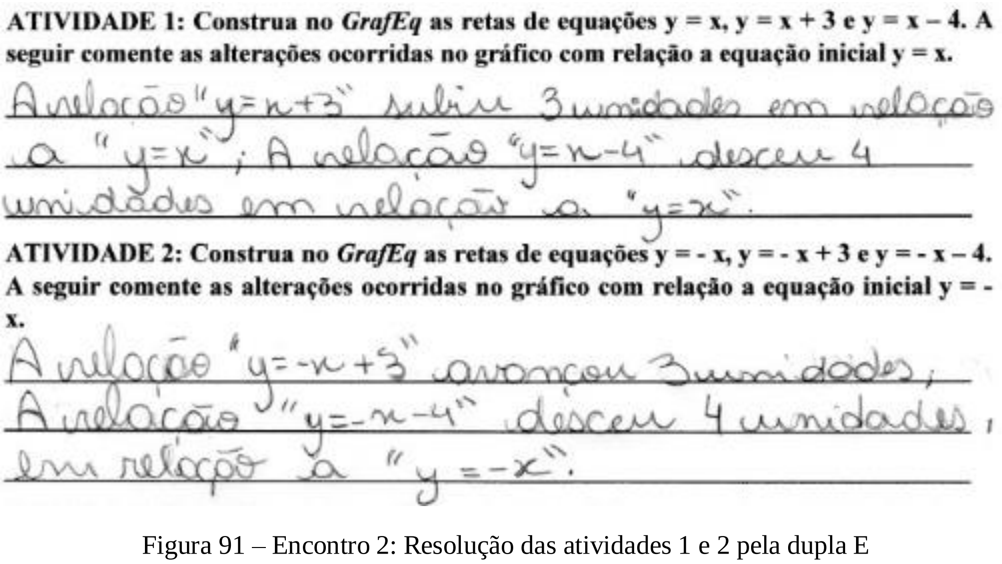

ATIVIDADE 1: Construa no *GrafEq* as retas de equações y = x, y = x + 3 e y = x – 4. A seguir comente as alterações ocorridas no gráfico com relação a equação inicial y = x.

y=x+3 É a reta y=x deslocada 3 unidades a cima
y=x-4 É a reta y=x deslocada 4 unidades para baixo.

ATIVIDADE 2: Construa no *GrafEq* as retas de equações y = - x, y = - x + 3 e y = - x – 4. A seguir comente as alterações ocorridas no gráfico com relação a equação inicial y = - x.

y=-x+3 É a reta y=x deslocada 3 unidades pra cima
y=-x-4 É a reta y=x deslocada 4 unidades para baixo.

Figura 90 – Encontro 2: Resolução das atividades 1 e 2 pela dupla C


ATIVIDADE 1: Construa no *GrafEq* as retas de equações y = x, y = x + 3 e y = x – 4. A seguir comente as alterações ocorridas no gráfico com relação a equação inicial y = x.

A relação "y=x+3" subiu 3 unidades em relação a "y=x"; A relação "y=x-4" desceu 4 unidades em relação a "y=x".

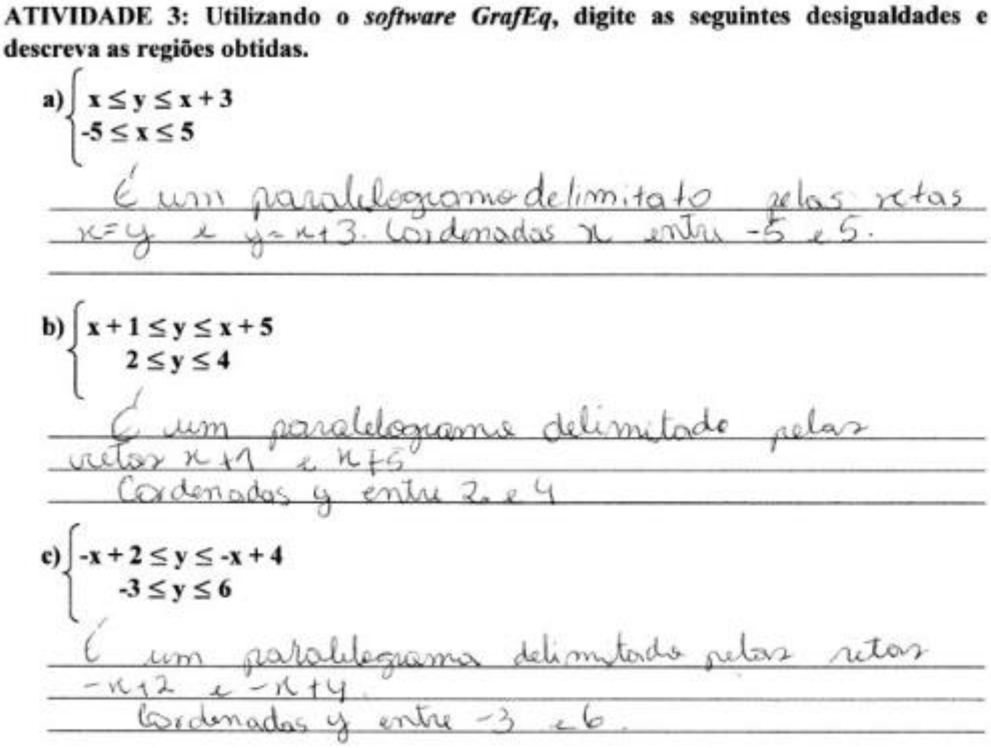
ATIVIDADE 2: Construa no *GrafEq* as retas de equações y = - x, y = - x + 3 e y = - x – 4. A seguir comente as alterações ocorridas no gráfico com relação a equação inicial y = - x.

A relação "y=-x+3" avançou 3 unidades; A relação "y=-x-4" desceu 4 unidades, em relação a "y=-x".

Figura 91 – Encontro 2: Resolução das atividades 1 e 2 pela dupla E

Na atividade 3, semelhante a atividade 1 do nosso primeiro encontro, percebi que a dificuldade dos alunos em descrever as regiões construídas pelo *software* ao digitarem os sistemas de inequações dados, persistiu. Embora grande parte dos alunos identificasse a relação entre as desigualdades inseridas e o paralelogramo desenhado na tela do computador - passagem do registro de representação algébrico para o geométrico - eles não conseguiam expressar em palavras por quais retas paralelas a região era delimitada.

Na Figura 92 podemos verificar a resolução da atividade 3 pela dupla C, que interpretou com maior facilidade as regiões esboçadas no *GrafEq*, em contraponto com a dupla D (Figura 93), que não conseguiu interpretar de maneira clara as mesmas regiões.



ATIVIDADE 3: Utilizando o *software GrafEq*, digite as seguintes desigualdades e descreva as regiões obtidas.

a) $\begin{cases} x \leq y \leq x+3 \\ -5 \leq x \leq 5 \end{cases}$

É um paralelogramo delimitato pelas retas x=y e y=x+3. Cordenadas x entre -5 e 5.

b) $\begin{cases} x+1 \leq y \leq x+5 \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases}$

É um paralelogramo delimitado pelas retas x+1 e x+5
Cordenadas y entre 2 e 4

c) $\begin{cases} -x+2 \leq y \leq -x+4 \\ -3 \leq y \leq 6 \end{cases}$

É um paralelogramo delimtado pelas retas -x+2 e -x+4.
Cordenadas y entre -3 e 6.

Figura 92 – Encontro 2: Resolução da atividade 3 pela dupla C

ATIVIDADE 3: Utilizando o *software GrafEq*, digite as seguintes desigualdades e descreva as regiões obtidas.

a) $\begin{cases} x \leq y \leq x+3 \\ -5 \leq x \leq 5 \end{cases}$

Tivemos uma região paralelograma em que as retas estão limitadas em $y=x+3$, e que tem as coordenadas de 5 maior e 5 menor que x.

b) $\begin{cases} x+1 \leq y \leq x+5 \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases}$

É uma região paralelograma em que as retas estão limitadas em $y=x$ e $x+1$ e $x+5$ e $y=2$ maior que 4.

c) $\begin{cases} -x+2 \leq y \leq -x+4 \\ -3 \leq y \leq 6 \end{cases}$

É uma região paralelograma em que as retas $y=x$ estão limitadas em $-x+2$ e $-x+4$ e $y=-3$ maior que 6.

Figura 93 – Encontro 2: Resolução da atividade 3 pela dupla D

A atividade 4, que propunha aos alunos o estudo da passagem do registro de representação gráfico para o algébrico, demostrou que eles tiveram maior dificuldade de realização. Lembremos que no encontro anterior a atividade que tinha por objetivo a execução desta mesma conversão de registros, embora com regiões retangulares, foi realizada rapidamente pelos alunos e sem apresentar dificuldades.

A principal dificuldade apresentada pelos alunos nesta atividade, foi a identificação das retas que delimitavam os paralelogramos desenhados. Grande parte dos alunos não percebeu que deveria prolongar os lados dos paralelogramos a fim de identificar em quais pontos a reta que delimitava certo lado interceptava os eixos x e y, para então identificar qual era a equação desta reta. Obtida esta percepção, a realização da atividade se tornou mais simples para esse grupo.

Na Figura 94 podemos visualizar que os alunos rabiscaram a folha de atividade, realizando prolongamentos das retas que delimitavam as laterais do paralelogramo. A intenção dos alunos era identificar em que ponto cada reta interceptava o eixo das abcissas ou o das ordenadas, para então, com as coordenadas destes pontos, definir o sistema de inequações utilizado na construção destas regiões. Entretanto, percebemos que na quarta figura fornecida na folha de atividades, a dupla E se equivocou ao escolher retas crescentes como delimitação aos paralelogramos azul e vermelho. Acredito que tal ação não passou de um descuido por parte dos alunos, na medida em que, as retas que delimitavam o paralelogramo verde foram identificadas corretamente.

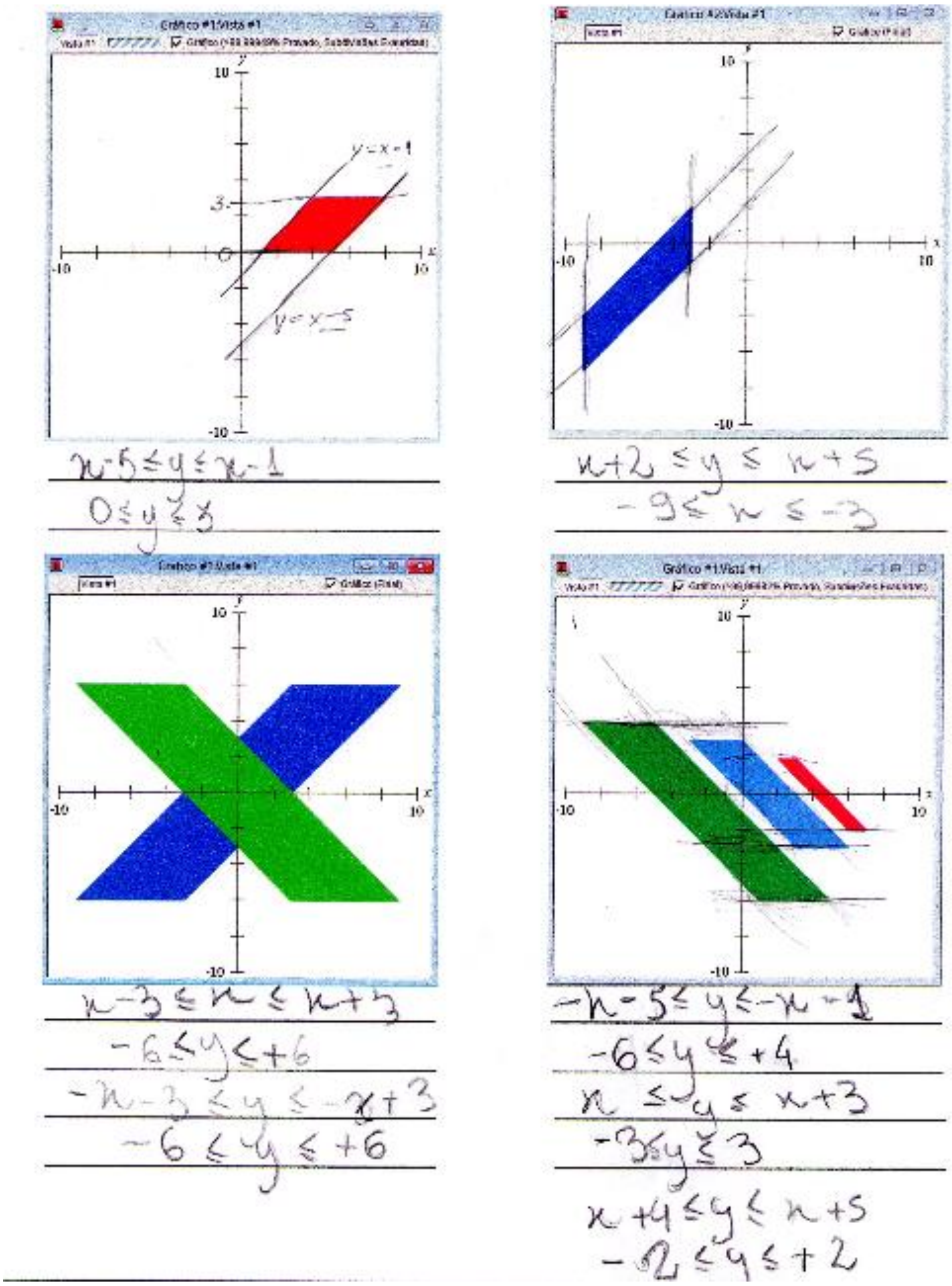


Figura 94 – Encontro 2: Resolução da atividade 4 pela dupla E

Na figura 95, visualizamos que a dupla G optou por não realizar prolongamentos nas retas que delimitavam os paralelogramos fornecidos na atividade. Provavelmente, os alunos escolheram a realização de tentativas e erro, possibilidade do *software*, como tática para encontrar as retas convenientes. Também na resolução desta dupla, identificamos um equívoco quanto a escolha correta das retas que determinavam as delimitações dos paralelogramos, como podemos observar na segunda figura, em que os alunos escolheram a reta y = x + 4 de maneira incorreta.

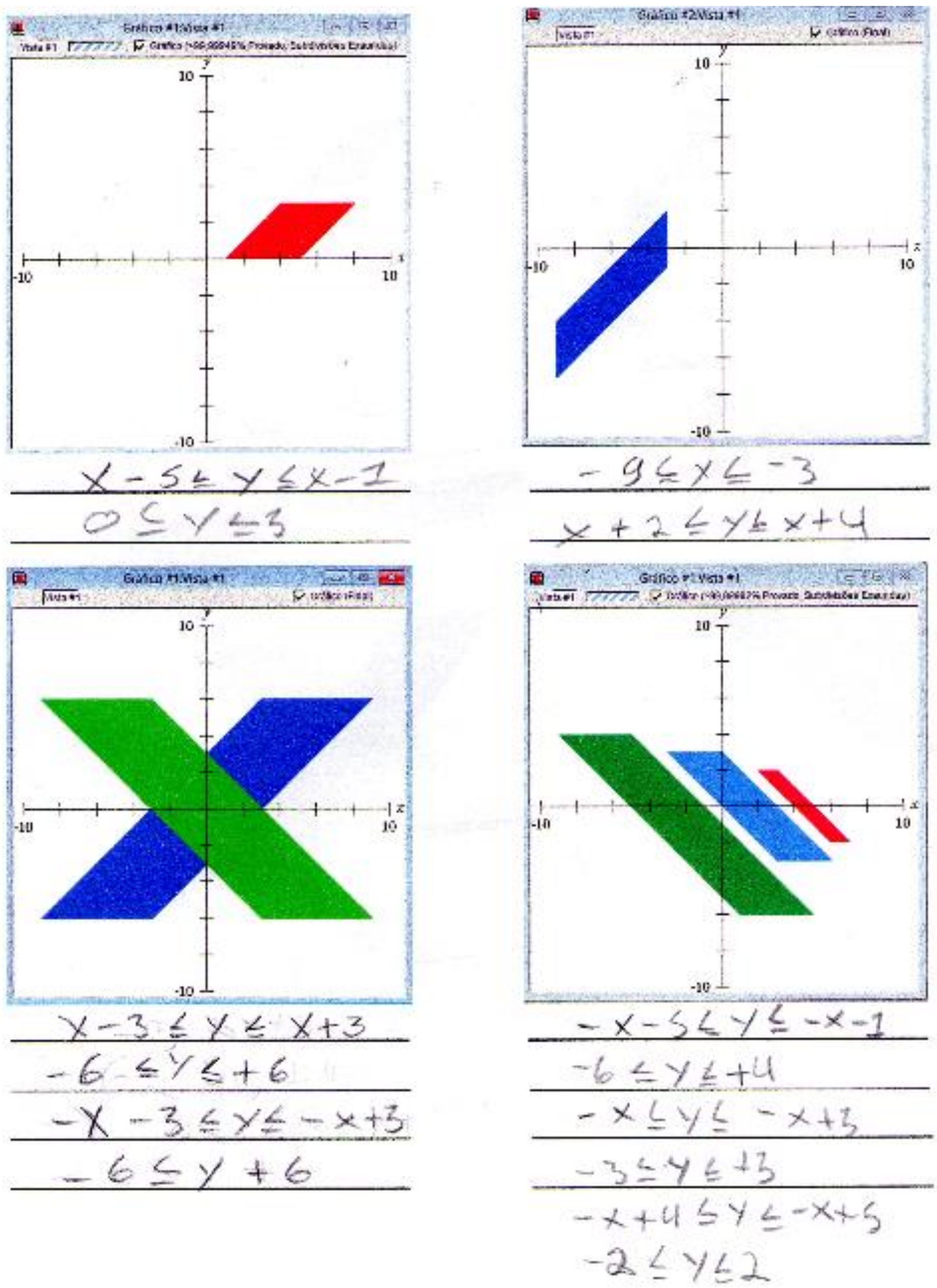


Figura 95 – Encontro 2: Resolução da atividade 4 pela dupla G

Ao final deste segundo encontro, concluo que os objetivos previamente estabelecidos para esta aula foram alcançados. Os alunos, digo isso com exceção de apenas duas duplas, conseguiram realizar todas as atividades com êxito. Embora algumas atividades se caracterizassem por apresentarem maior dificuldade aos alunos, em especial a atividade 4, percebeu-se uma evolução na capacidade de visualização das regiões esboçadas pelo *software* e na interpretação das desigualdades que as constroem.

- **Análise a *posteriori* do Encontro 3**

Nas duas primeiras atividades deste terceiro encontro, percebi que os alunos tiveram facilidade em compreender as modificações ocorridas nos gráficos quando construíam no *GrafEq* a reta $y = x$ e depois as retas $y = 2x$ e $y = 2x + 3$. Os alunos identificaram que a reta $y = 2x$ possuía inclinação diferente da reta $y = x$, observando que tal reta crescente é formada pelo conjunto de pontos tais que a coordenada y é sempre o dobro da coordenada x. E que a reta $y = 2x + 3$, era a mesma reta $y = 2x$ deslocada três unidades para cima no plano cartesiano.

Utilizando o mesmo raciocínio, foram perceptíveis entre os alunos as modificações que ocorriam no gráfico das retas $y = -2x$ e $y = -2x + 3$ com relação ao gráfico da reta $y = -x$. Os alunos identificaram que as retas esboçadas eram decrescentes e que a reta $y = -2x + 3$ era a reta $y = -2x$ deslocada três unidades para cima no plano cartesiano.

Na Figura 96 e 97, podemos verificar as explicações distintas realizadas por duas duplas, com relação às atividades 1 e 2. A dupla G preocupou-se em identificar a mudança de inclinação entre as retas crescentes $y = x$ e $y = 2x$ na primeira atividade, bem como entre as retas decrescentes $y = -x$ e $y = -2x$ na segunda atividade, diferentemente da dupla B que respondeu apenas às modificações ocorridas entre as retas $y = 2x$ e $y = 2x + 3$, bem como entre as retas $y = -2x$ e $y = -2x + 3$.

ATIVIDADE 1: Construa no *GrafEq* as retas de equações y = x, y = 2x e y = 2x +3. Descreva com suas palavras as alterações ocorridas no gráfico com relação a equação inicial y = x.

A reta y= 2x possui inclinação diferente de y= x.
A reta y= 2x + 3 subiu três unidades no plano cartesiano com relação a reta y=2x ; crescentes.

ATIVIDADE 2: Construa no *GrafEq* as retas de equações y = - x, y = - 2x e y = - 2x + 3. Descreva com suas palavras as alterações ocorridas no gráfico com relação a equação inicial y = - x.

A reta y= -2x possuiinclinação diferente de y= -x.
A reta y= -2x+3 subiu três unidades no plano cartesiano com relação a reta y= -2x ; decrescentes.

Figura 96 – Encontro 3: Resolução das atividades 1 e 2 pela dupla G

ATIVIDADE 1: Construa no *GrafEq* as retas de equações y = x, y = 2x e y = 2x +3. Descreva com suas palavras as alterações ocorridas no gráfico com relação a equação inicial y = x.

crescente
Nós vemos 2 retas paralelas sendo
que o y =2x+3 subiu 3 unidades

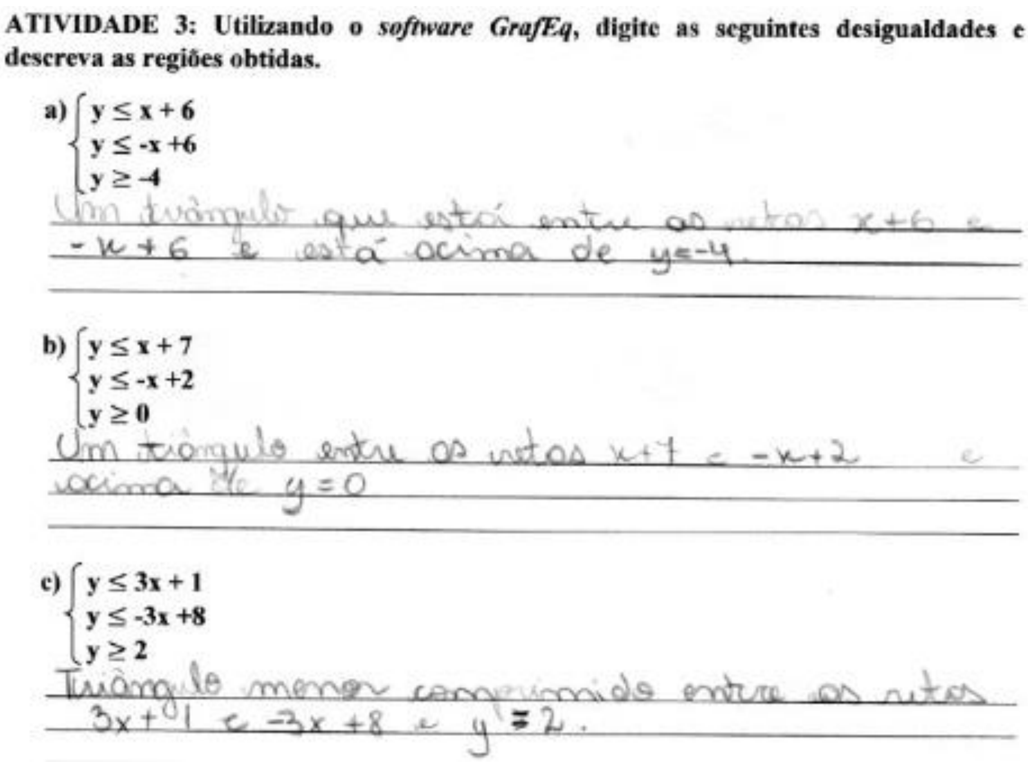
ATIVIDADE 2: Construa no *GrafEq* as retas de equações y = - x, y = - 2x e y = - 2x + 3. Descreva com suas palavras as alterações ocorridas no gráfico com relação a equação inicial y = - x.

Nós vemos 2 retas paralelas decrescentes
sendo que o y = -2x+3 subiu 3
unidades

Figura 97 – Encontro 3: Resolução das atividades 1 e 2 pela dupla B

Na atividade 3, percebi que a dificuldade de certos pares de alunos em descrever as regiões construídas pelo *software*, ao digitarem os sistemas de inequações dados, melhorou em relação ao encontro anterior. Grande parte dos alunos conseguiu identificar a relação entre as desigualdades inseridas e o triângulo desenhado na tela do computador (passagem do registro de representação algébrico para o gráfico). Diferentemente do segundo encontro, nesta aula os alunos mostraram compreender a distinção entre equações e inequações, verificando que as equações constroem retas no plano, enquanto que as inequações esboçam regiões.

Nas figuras 98 e 99 podemos verificar a resolução da atividade 3 pelas duplas E e K.


ATIVIDADE 3: Utilizando o *software GrafEq*, digite as seguintes desigualdades e descreva as regiões obtidas.

a) $\begin{cases} y \leq x + 6 \\ y \leq -x + 6 \\ y \geq -4 \end{cases}$

Um triângulo que está entre as retas x+6 e -x+6 e está acima de y=-4.

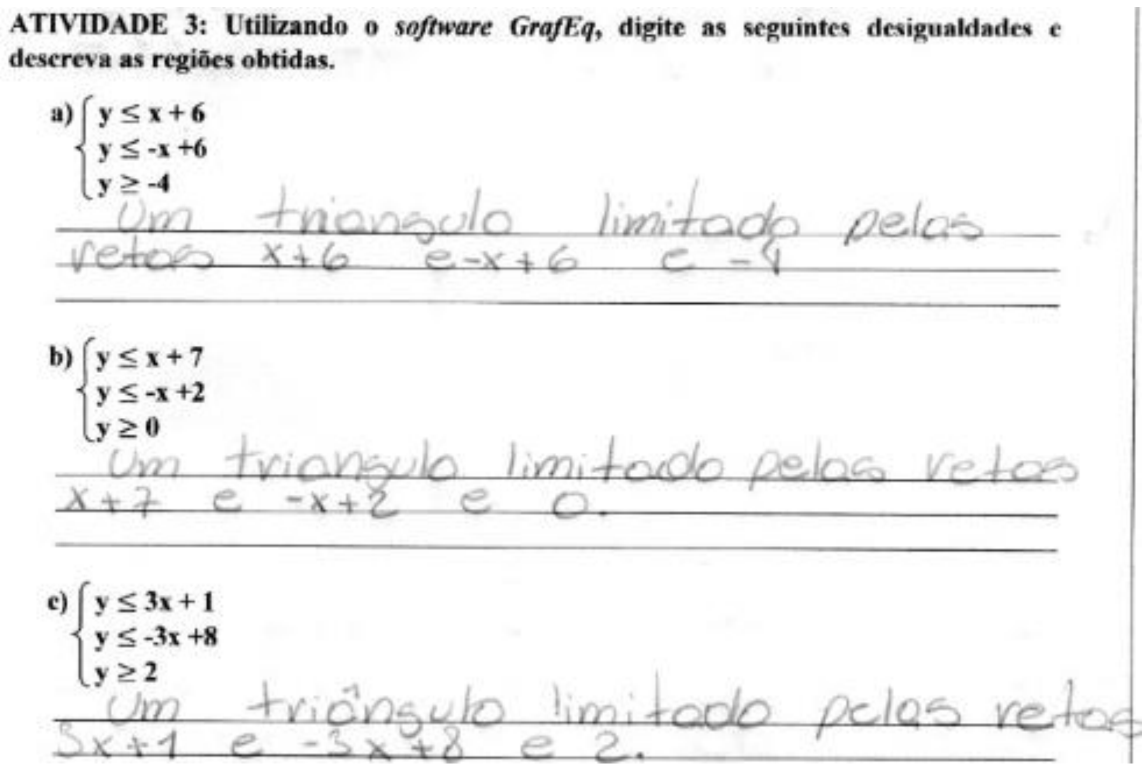
b) $\begin{cases} y \leq x + 7 \\ y \leq -x + 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Um triângulo entre as retas x+7 e -x+2 e acima de y=0

c) $\begin{cases} y \leq 3x + 1 \\ y \leq -3x + 8 \\ y \geq 2 \end{cases}$

Triângulo menor comprimido entre as retas 3x+1 e -3x+8 e y=2.

Figura 98 – Encontro 3: Resolução da atividade 3 pela dupla E


ATIVIDADE 3: Utilizando o *software GrafEq*, digite as seguintes desigualdades e descreva as regiões obtidas.

a) $\begin{cases} y \leq x + 6 \\ y \leq -x + 6 \\ y \geq -4 \end{cases}$

Um triangulo limitado pelas retas x+6 e -x+6 e -4

b) $\begin{cases} y \leq x + 7 \\ y \leq -x + 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Um triangulo limitado pelas retas x+7 e -x+2 e 0.

c) $\begin{cases} y \leq 3x + 1 \\ y \leq -3x + 8 \\ y \geq 2 \end{cases}$

Um triângulo limitado pelas retas 3x+1 e -3x+8 e 2.

Figura 99 – Encontro 3: Resolução da atividade 3 pela dupla K

A atividade 4 deste encontro, que visava envolver os alunos com a passagem do registro de representação gráfico para o algébrico, também demonstrou ser mais simples para eles que no encontro anterior. Nesta aula, a maioria dos alunos verificou rapidamente que deveria prolongar as retas que delimitavam as regiões esboçadas para então identificá-las.

A única região que apresentou maior dificuldade de reprodução entre os alunos foi o triângulo verde (região 2), devido à não identificação das retas que delimitavam esta figura. A maioria dos alunos presentes neste encontro não percebeu que as retas que delimitavam este triângulo possuíam coeficiente angular diferente de um. Após constatarem a declividade das retas, a reprodução desta figura se deu tranquilamente.

Nas figuras 100 e 101 podemos visualizar os prolongamentos das retas que delimitavam os triângulos, rabiscadas pelos alunos na folha de atividades. Tal ação facilitou os alunos a definir em que ponto cada reta interceptava o eixo das ordenadas, para então definir a equação reduzida das retas e escolher corretamente o sistema de inequações que gerou tais construções no plano cartesiano. Após realizarem estes rascunhos, os alunos testavam as escolhas feitas no *software*, a fim de perceber se haviam reproduzido corretamente as regiões fornecidas.

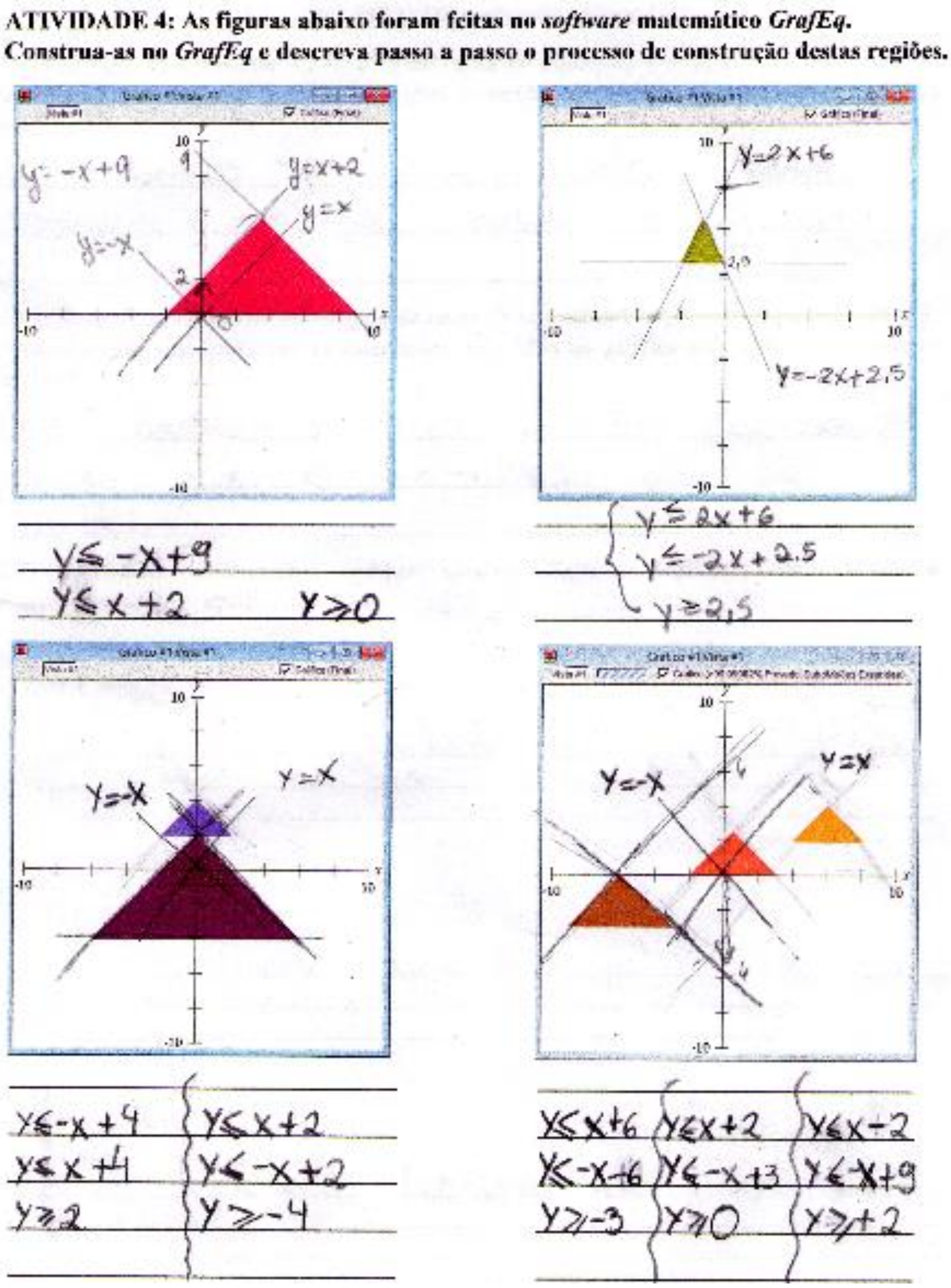


Figura 100 – Encontro 3: Resolução da atividade 4 pela dupla B

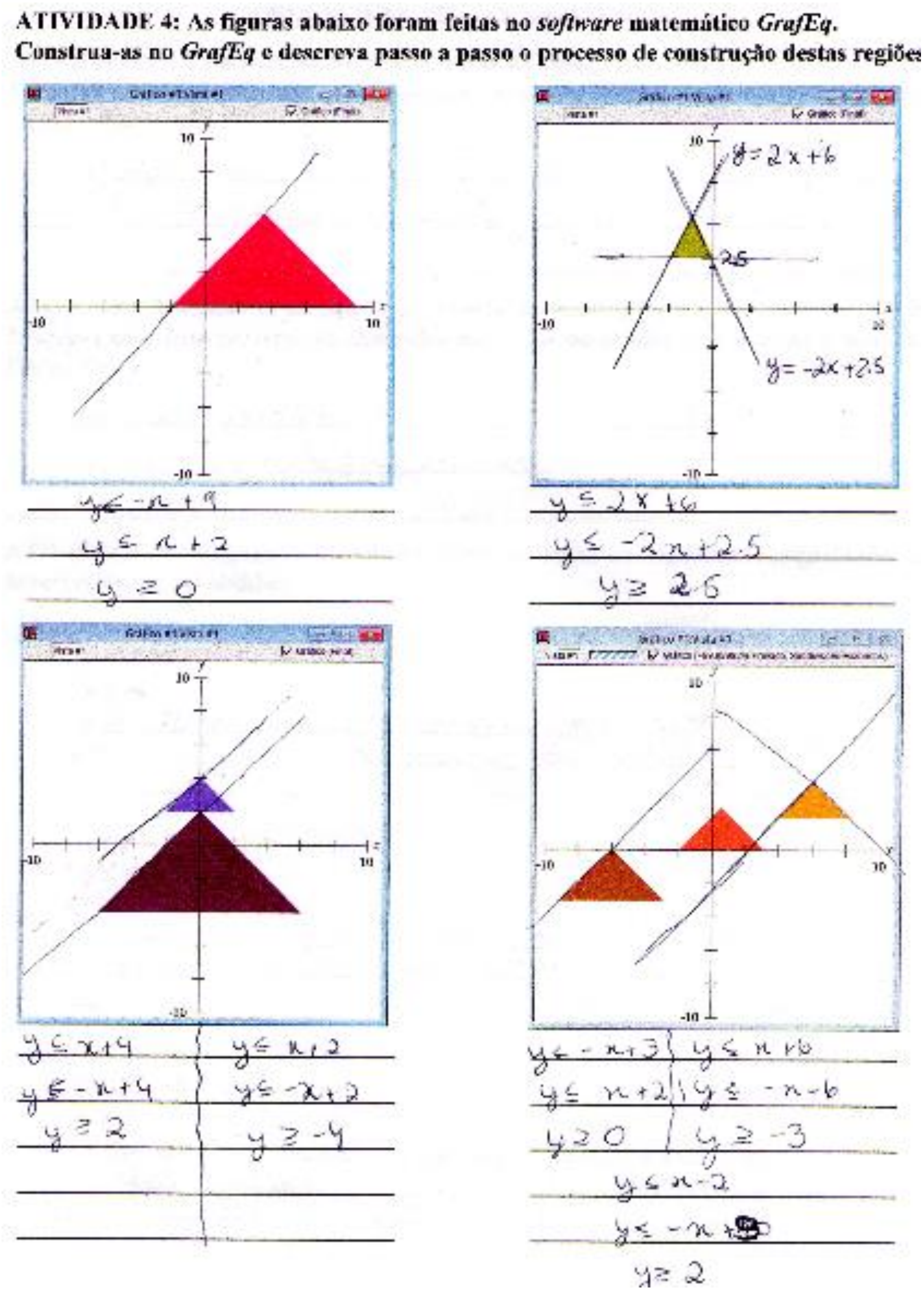


Figura 101 – Encontro 3: Resolução da atividade 4 pela dupla C

Ao término deste terceiro encontro, concluo que os objetivos previamente definidos para esta aula foram alcançados. Os alunos, sem exceções, conseguiram realizar todas as atividades com êxito, mesmo que alguns tenham apresentado maior facilidade e agilidade na resolução do que outros. Percebi que a definição de coeficiente angular e as retas com inclinações diferentes não se mostraram tão claras aos olhos dos alunos na primeira atividade, sendo melhor interpretadas na atividade 4.

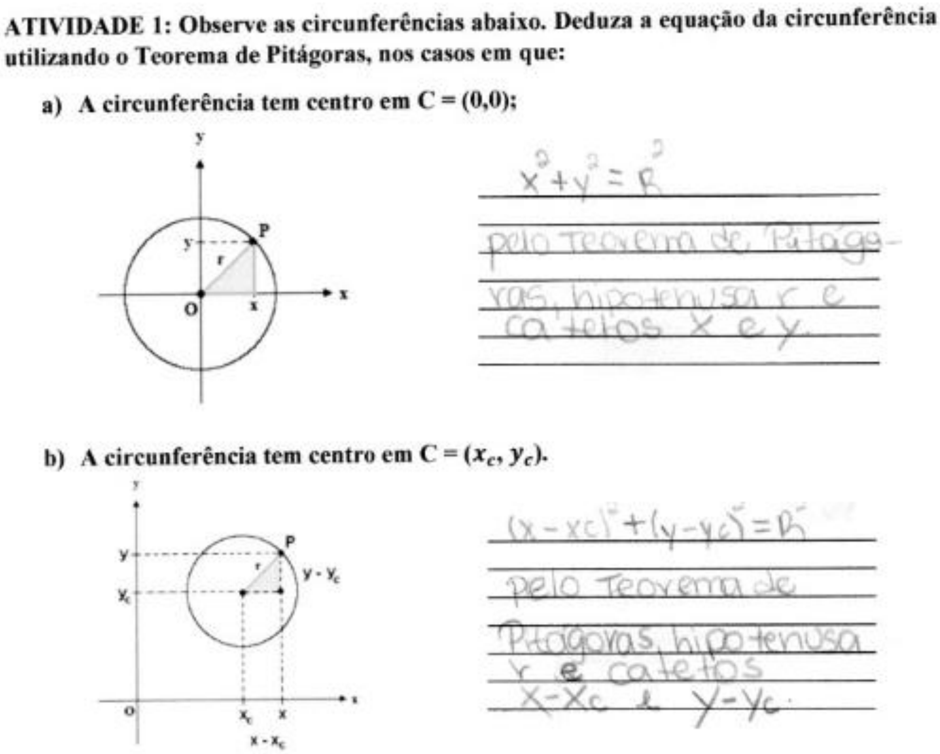
Mais uma vez, constatei a empolgação dos alunos ao resolverem as atividades com o auxílio do *software*. Percebia-se sua animação quando conseguiam reproduzir corretamente as regiões dadas, bem como a persistência e a concentração em mudar as escolhas iniciais, quando o sistema de inequações adotado não correspondia à região a ser esboçada.

- **Análise a *posteriori* do Encontro 4**

Na primeira atividade deste encontro, que envolvia o estudo da equação reduzida da circunferência, percebi em todos os trabalhos entregues que a equação foi obtida corretamente, sem dificuldades. Acredito que esta facilidade em obter as equações das circunferências, tanto centradas na origem, como com o centro de coordenadas quaisquer, se deve ao fato da simples aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de hipotenusa igual ao raio da circunferência.

Nas Figuras 102 e 103, podemos verificar a resolução da atividade 1, itens a e b pelas duplas B e G. Em ambas as duplas percebemos as escolhas corretas dos catetos do triângulo retângulo construído interiormente à circunferência, bem como da hipotenusa representada pelo raio da circunferência, e a seguir a estruturação das equações das circunferências de centro C = (0, 0) e centro em C = (x_c, y_c).

A dupla B após deduzir a equação da circunferência, demarcou a hipotenusa e os catetos do triângulo retângulo que foram utilizados na aplicação do teorema de Pitágoras. Já a dupla G, optou por demarcar o raio e as coordenadas do centro das circunferências representadas pelas equações.



ATIVIDADE 1: Observe as circunferências abaixo. Deduza a equação da circunferência utilizando o Teorema de Pitágoras, nos casos em que:

a) A circunferência tem centro em C = (0,0);

$x^2+y^2=R^2$

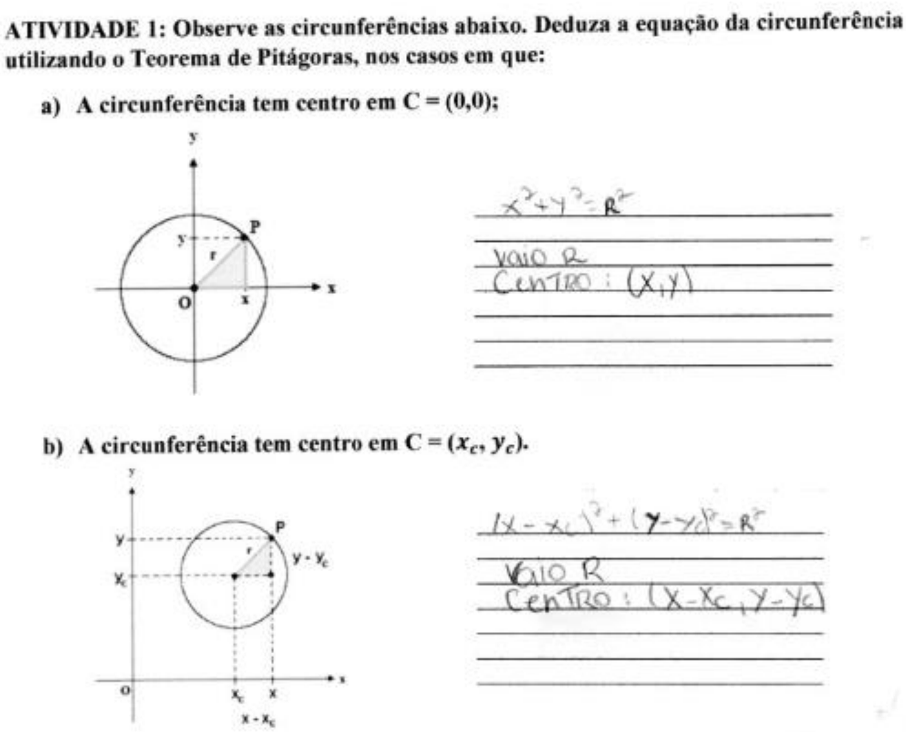
pelo Teorema de Pitágoras, hipotenusa r e catetos x e y.

b) A circunferência tem centro em C = (x_c, y_c).

$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=R^2$

pelo Teorema de Pitágoras hipotenusa r e catetos $x-x_c$ e $y-y_c$.

Figura 102 – Encontro 4: Resolução da atividade 1 pela dupla B



ATIVIDADE 1: Observe as circunferências abaixo. Deduza a equação da circunferência utilizando o Teorema de Pitágoras, nos casos em que:

a) A circunferência tem centro em C = (0,0);

$x^2+y^2=R^2$

raio R

Centro: (x,y)

b) A circunferência tem centro em C = (x_c, y_c).

$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=R^2$

raio R

Centro: $(x-x_c, y-y_c)$

Figura 103 – Encontro 4: Resolução da atividade 1 pela dupla G

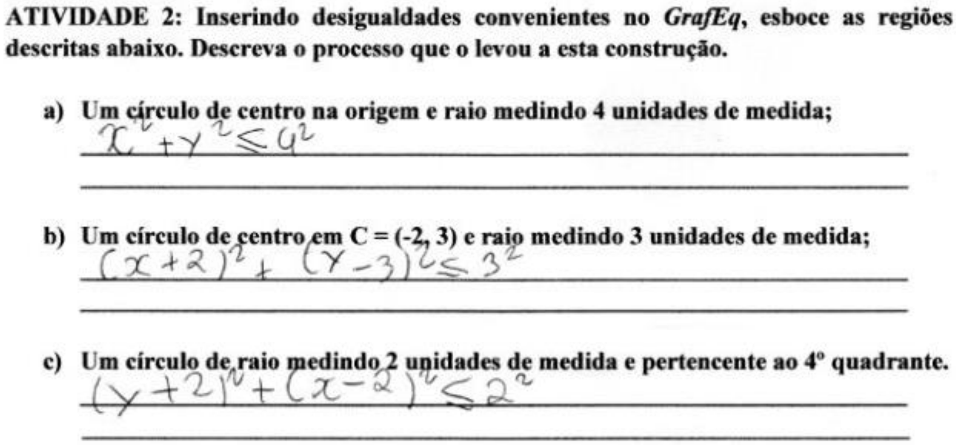
A atividade 2 visava utilizar a equação reduzida da circunferência, obtida na atividade anterior pelos alunos, porém de maneira a construir discos. Ou seja, os alunos deveriam agora pensar em como esboçar regiões formadas por círculos de raios e coordenadas de centros quaisquer através da inserção de desigualdades. Nesta etapa do nosso encontro estaríamos passando de uma equação que desenha um aro de círculo, para uma inequação que constrói uma região circular.

Percebi que apesar de não haver dificuldades na resolução da atividade 1, nesta atividade os alunos demoraram a perceber que na equação $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$, x_c representava a coordenada x do centro do círculo e que y_c representava a coordenada y do centro do círculo. Esta dificuldade, apresentada inicialmente, levou alguns alunos a muitas dúvidas e questionamentos na escolha das inequações que desenhariam as regiões pedidas nos três itens da atividade 2.

Diferentemente do que havia imaginado que causaria dificuldade nesta atividade, quanto à escolha correta da desigualdade $\geq$ ou $\leq$ na inequação, esta etapa se mostrou bastante tranquila. Aproveitando as possibilidades apresentadas pelo *software*, de verificar em tempo real as mudanças realizadas no gráfico desenhado conforme as alterações feitas nas expressões algébricas, alguns alunos realizaram a escolha da desigualdade por tentativa e erro.

Os alunos que fizeram essas tentativas constataram que quando inseriam a Inequação $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 \geq r^2$, o *GrafEq* coloria toda a região exterior ao círculo e então passaram a inverter a desigualdade a ser inserida nesta inequação.

Nas Figuras 104 e 105, podemos visualizar as inequações inseridas pelas duplas para desenhar as regiões pedidas na atividade 2. Percebemos que como o item c desta atividade solicitava a construção de um círculo com raio 2, contido no 4º quadrante do plano cartesiano, a escolha do centro deste círculo ficava ao critério do aluno, desde que estas duas características fossem mantidas. A dupla F escolheu como centro deste círculo o ponto C = (2, -2), enquanto que a dupla I optou pelo centro de coordenadas C = (5, -7).



ATIVIDADE 2: Inserindo desigualdades convenientes no *GrafEq*, esboce as regiões descritas abaixo. Descreva o processo que o levou a esta construção.

a) Um círculo de centro na origem e raio medindo 4 unidades de medida;

$x^2+y^2 \leq 4^2$

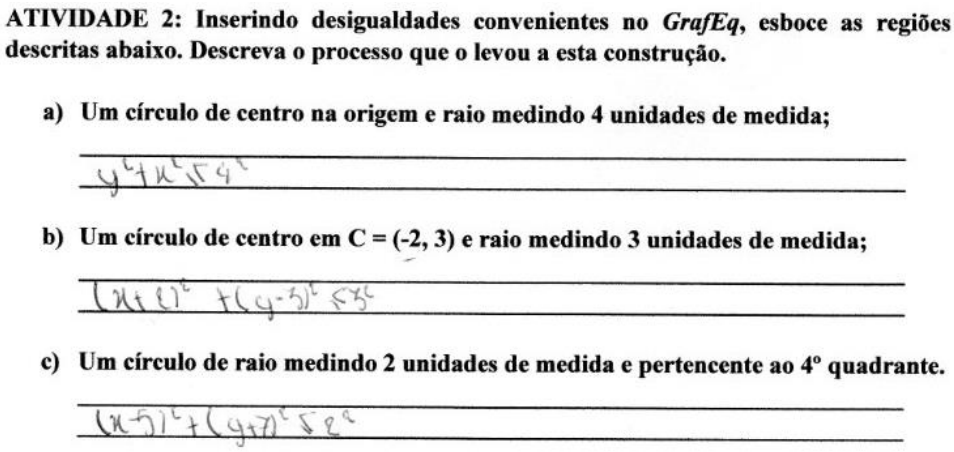
b) Um círculo de centro em C = (-2, 3) e raio medindo 3 unidades de medida;

$(x+2)^2+(y-3)^2 \leq 3^2$

c) Um círculo de raio medindo 2 unidades de medida e pertencente ao 4º quadrante.

$(y+2)^2+(x-2)^2 \leq 2^2$

Figura 104 – Encontro 4: Resolução da atividade 2 pela dupla F



ATIVIDADE 2: Inserindo desigualdades convenientes no *GrafEq*, esboce as regiões descritas abaixo. Descreva o processo que o levou a esta construção.

a) Um círculo de centro na origem e raio medindo 4 unidades de medida;

$y^2+x^2 \leq 4^2$

b) Um círculo de centro em C = (-2, 3) e raio medindo 3 unidades de medida;

$(x+2)^2+(y-3)^2 \leq 3^2$

c) Um círculo de raio medindo 2 unidades de medida e pertencente ao 4º quadrante.

$(x-5)^2+(y+7)^2 \leq 2^2$

Figura 105 – Encontro 4: Resolução da atividade 2 pela dupla I

A atividade 3 demonstrou-se de fácil realização por grande parte dos alunos presentes neste encontro. Acredito que a agilidade apresentada por algumas duplas na escolha das inequações que esboçariam as regiões dadas na atividade deu-se devido à compreensão das duas atividades anteriores. O entendimento da equação reduzida da circunferência na atividade 1 e sobre como encontrar as coordenadas que compõem o centro do círculo, montando uma inequação que realiza tal esboço no plano cartesiano, envolvido na atividade 2, foi de grande importância para resolução da atividade 3.

Na realização desta atividade, três duplas entre as dez que participaram deste encontro exibiram dificuldade em encontrar o valor do raio, observando apenas a figura desenhada no plano cartesiano. Percebi que essas duplas não haviam compreendido a definição de raio como sendo a distância do centro do círculo a qualquer ponto de sua extremidade, e que por isso não estavam conseguindo visualizar esta medida nos círculos dados. Após uma explicação individual com estas duplas, visualizando com eles as figuras construídas na atividade anterior, elas prosseguiram a atividade sem que novas intervenções fossem precisas.

Nas Figuras 106 e 107, apresentamos as resoluções da atividade 3 pelas duplas H e I.

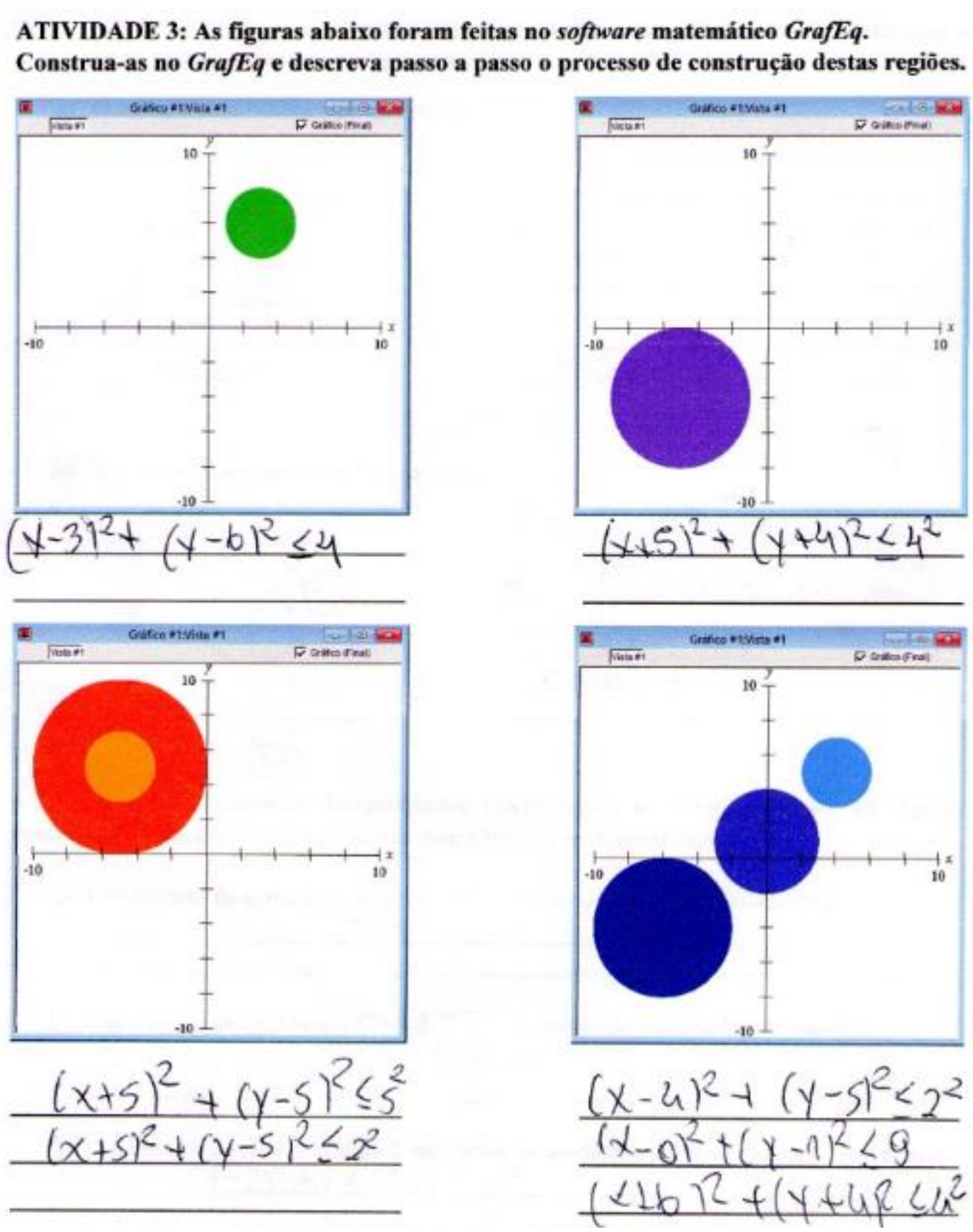


Figura 106 – Encontro 4: Resolução da atividade 3 pela dupla H

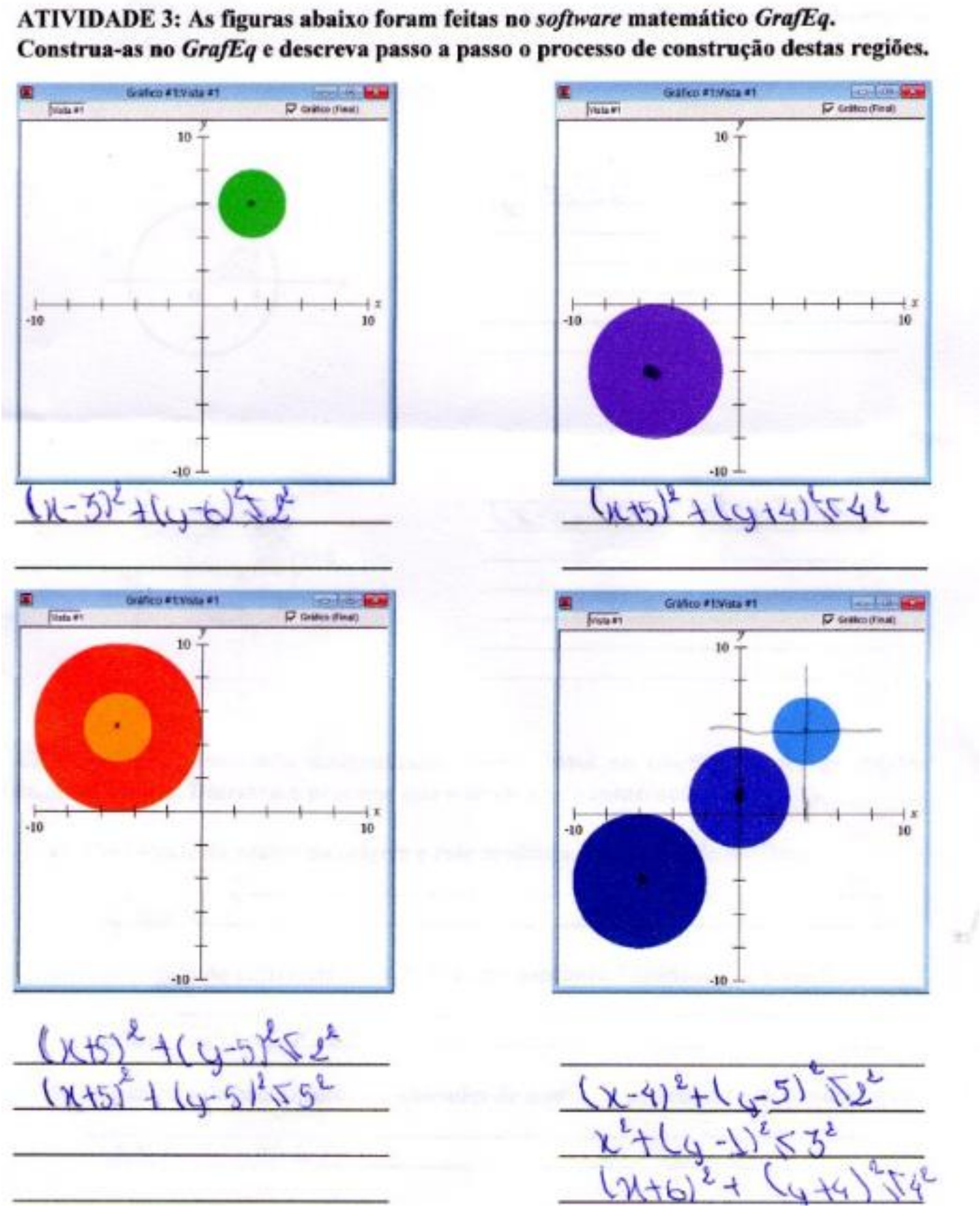


Figura 107 – Encontro 4: Resolução da atividade 3 pela dupla I

Ao final deste quarto encontro, posso concluir que os objetivos propostos para esta aula foram todos alcançados. Todas as duplas presentes conseguiram realizar as atividades nos dois períodos em que permanecemos no laboratório de Informática, sendo que apenas três duplas demonstraram um pouco mais de dificuldade, em especial na terceira atividade proposta.

Em suma, percebeu-se que ao término das atividades os alunos demonstravam ter entendido como obtemos a equação de uma circunferência e como podemos desenhar regiões circulares no plano cartesiano através de inequações. Os alunos consideraram o esboço destas regiões mais simples, por precisarem de apenas uma Inequação para desenhar um círculo, diferentemente das figuras geométricas estudadas nos encontros anteriores em que precisávamos apresentar restrições para as coordenadas x e y, individualmente, necessitando então de duas ou três inequações para esboçar uma única região.

Assim, como nos outros encontros, os alunos se mostraram bastante animados ao longo da realização das atividades. Alguns alunos afirmaram ter considerado o círculo como a região mais interessante que construíram nestes encontros no laboratório, pois, segundo eles, desconheciam a equação que constrói uma circunferência no plano cartesiano e nunca imaginaram desenhar círculos utilizando desigualdades algébricas.

- **Análise a *posteriori* do Encontro 5**

Este último encontro constituiu o momento de avaliar os conhecimentos adquiridos pelos alunos ao longo dos quatro encontros anteriores, interpretando a facilidade ou dificuldade apresentada por eles nesta aula. Através da elaboração de obras de arte produzidas por eles no *software GrafEq*, foi possível identificar quais construções geométricas no plano cartesiano foram melhor compreendidas pelas duplas.

Verificando as obras construídas pelos alunos podemos perceber que, assim como constatado na análise a *posteriori* do encontro 2, a figura geométrica paralelogramo não ficou tão clara na concepção da turma, fato esse que se comprova pela ausência desta região nas elaborações produzidas pelas duplas neste encontro.

Acredito que a conceitualização desta figura geométrica não ocorreu com grande parte da turma porque não houve a coordenação dos registros de representação algébrico e geométrico da mesma, perceptível nas dificuldades apresentadas pelos alunos nas atividades 2 e 3 do encontro, em que a construção de paralelogramos no plano cartesiano se fez preente. Conforme Duval (2012), "a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão" (p. 282).

Deste modo, como a conversão dos registros de representação algébrico para o gráfico e vice-versa, com relação ao estudo de paralelogramos, não se realizar com facilidade pela turma no encontro 2, confirmou-se esta dificuldade neste quinto encontro.

Em contraponto à construção de paralelogramos, as demais figuras geométricas trabalhadas ao longo da nossa experimentação (retângulos, triângulos e círculos) se demonstraram ter sido bem compreendidas entre os alunos, identificando a conceitualização destes objetos matemáticos pela turma. Ou seja, percebemos que a coordenação entre os registros de representação que configuram estas regiõesse fez presente.

Desta maneira, podemos constatar que a escolha em trabalhar os registros de representação gráfico e algébrico destes objetos matemáticos se mostrou de grande valia, uma vez que, quando "[...] o registro de representação é bem escolhido, as representações deste registro são suficientes para permitir a compreensão do conteúdo conceitual representado" (DUVAL, 2012, p. 280).

Ao demonstrarem facilidade em associar a figura desenhada no *software* e a relação algébrica que esboça tal região, os alunos confirmam a apreensão do objeto matemático estudado em sua totalidade, considerando que "as figuras permitem representar a totalidade de relações entre os elementos que constituem o objeto ou a situação" (DUVAL, idem, ibidem).

Podemos verificar a compreensão dos alunos quanto à álgebra que constrói as regiões formadas por retângulos, triângulos e círculos no plano cartesiano, observando as obras elaboradas pelas duplas no quinto encontro. A região se demonstrou ser a melhor apreendida pelos alunos foi o círculo, visto que sua construção pode ser verificada em todas as onze obras realizadas pelos vinte e dois alunos presentes neste encontro. Os alunos realizaram desenhos de círculos nos diferentes quadrantes do plano cartesiano, bem como em diversos tamanhos, apresentando entendimento nas escolhas das coordenadas do centro, bem como na medida do raio em seus esboços e interpretações da equação reduzida da circunferência.

As regiões constituídas de retângulos puderam ser visualizadas em oito das onze obras, seguidas da construção de triângulos, verificada em sete das composições. Verificamos ainda que, em todas as obras, as duplas procuraram utilizar mais de uma figura geométrica na sua elaboração, havendo quatro duplas que utilizaram a composição de retângulos, triângulos e círculos nas suas obras.

Em suma, podemos concluir deste último encontro que os objetivos previamente estabelecidos foram alcançados; todos os alunos presentes realizaram suas obras sem dificuldade. Houve alunos que esboçaram obras mais simples, com poucas relações algébricas. Contudo, podemos visualizar a elaboração de paisagens, personagens de desenhos e figuras abstratas bastante elaboradas, que necessitaram de diversas relações algébricas em suas construções, bem como mais de duas regiões geométricas desenhadas nestas obras.

Além das figuras geométricas trabalhadas nos encontros da nossa sequência didática, duas duplas optaram por testar novas inequações no *software* e visualizar os gráficos construídos. Esta intenção demonstrou que os alunos apresentaram interesse e curiosidade em relação aos recursos que o *GrafEq* oferece, experimentando novas relações no último encontro.

Mais uma vez os alunos demonstraram entusiasmo na realização da atividade deste encontro, podia se perceber a concentração das duplas ao tentarem retratar no *software* a obra escolhida. Assim como nos encontros anteriores, os alunos comprovaram motivação nas elaborações construídas em aula. Eles ficaram satisfeitos com as contribuições desta experimentação, justificando terem aprendido muitas coisas novas, divertidas e diferenciadas das aulas de matemática convencionais. A visualização dos diferentes gráficos (regiões) que são construídos através da inserção de relações algébricas, bem como a manipulação possível destas relações no *GrafEq* e suas novas representações gráficas esboçadas na tela do computador foram de grande valia no êxito deste projeto.

Nas Figuras 108 à 112, podemos visualizar os recados deixados por algumas duplas na folha de atividades entregue no quinto encontro. Nestas mensagens, identificamos as considerações que os próprios sujeitos da nossa experimentação fizeram com relação à nossa proposta metodológica.

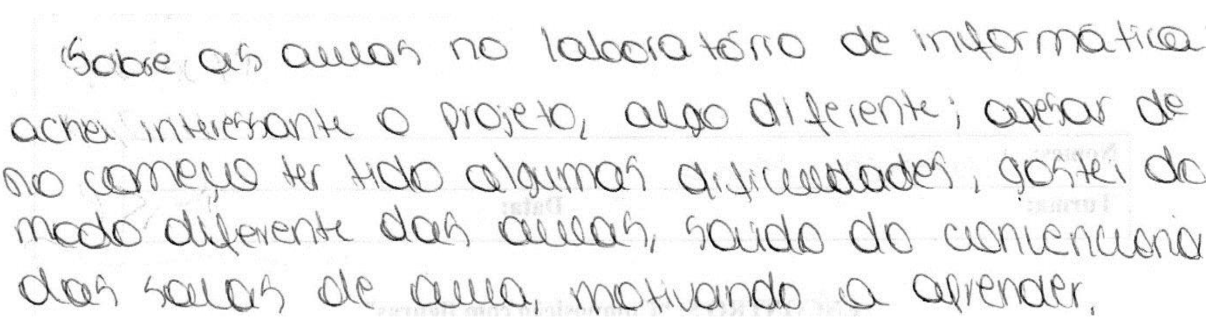
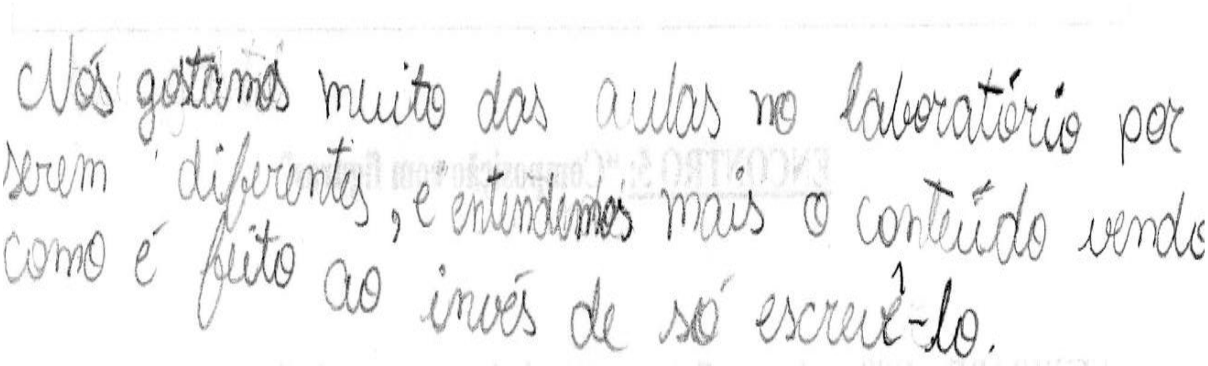
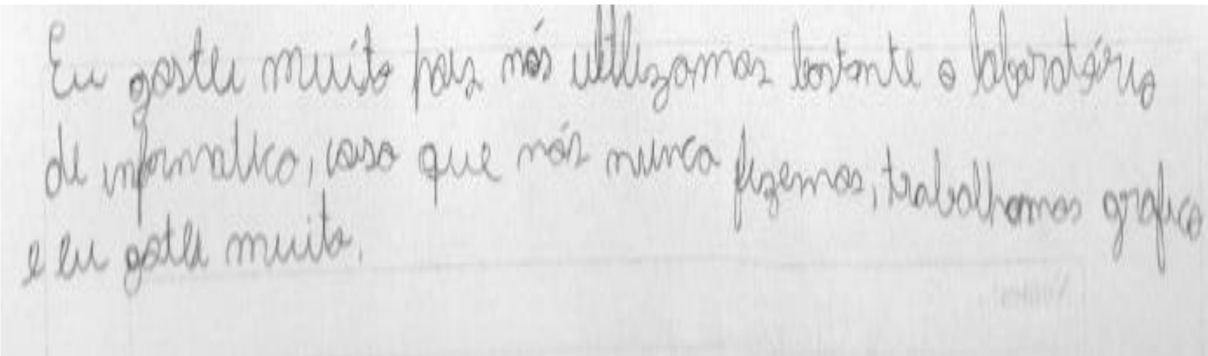

Sobre as aulas no laboratório de informática: achei interessante o projeto, algo diferente; apesar de no começo ter tido algumas dificuldades, gostei do modo diferente das aulas, saindo do convencional das salas de aula, motivando a aprender.

Figura 108 – Encontro 5: Considerações da dupla I



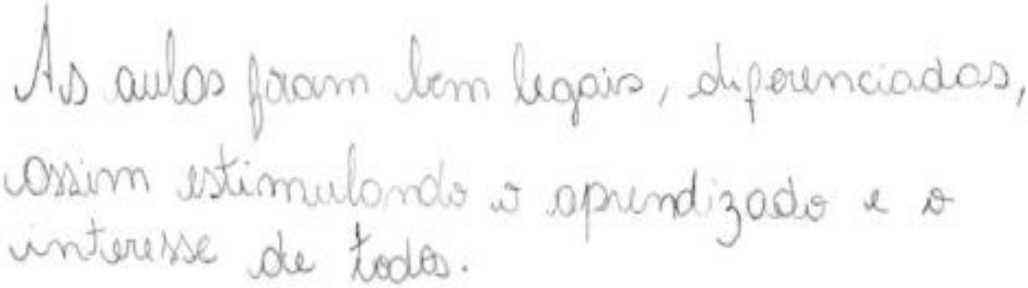
Nós gostamos muito das aulas no laboratório por serem diferentes, e entendemos mais o conteúdo vendo como é feito ao invés de só escrevê-lo.

Figura 109 – Encontro 5: Considerações da dupla B



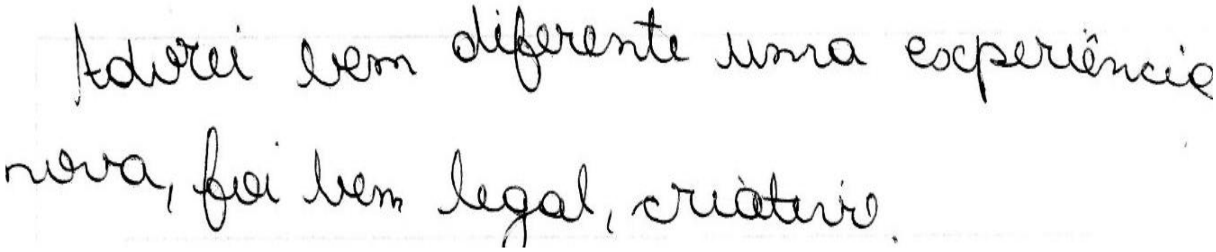
Eu gostei muito pois nós utilizamos bastante o laboratório de informática, coisa que nós nunca fizemos, trabalhamos gráfico e eu gostei muito.

Figura 110 – Encontro 5: Considerações da dupla F



As aulas foram bem legais, diferenciadas, assim estimulando o aprendizado e o interesse de todos.

Figura 111 – Encontro 5: Considerações da dupla E



Achei bem diferente uma experiência nova, foi bem legal, criativo.

Figura 112 – Encontro 5: Considerações da dupla C

Ao final dos cinco encontros vale destacar que foi bastante significativa a evolução apresentada pelos alunos ao longo da sequência de atividades, com relação à conversão dos registros de representação algébrico para o geométrico e vice-versa. Ao iniciar a nossa experiência, grande parte dos alunos, embora conhecesse a equação da reta, por já terem trabalhado funções do 1º grau, não conseguiam identificar qual equação representava uma determinada reta esboçada no plano cartesiano, ou seja, a passagem do registro geométrico para o algébrico não se fazia clara para os alunos.

Percebemos esta evolução quando observamos que, nos últimos encontros da nossa sequência, a atividade que explorava a passagem da geometria para a álgebra apresentou-se mais acessível e as resoluções dos alunos mais completas. Fato esse que comprovamos na última aula, em que os alunos elaboraram suas próprias produções, valendo-se desses conhecimentos adquiridos.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos a concepção e a implementação de uma sequência didática que tratou do ensino de equações e inequações no plano cartesiano. Na elaboração do material, levamos em consideração as dificuldades de aprendizagem registradas por Duval (2012), no que diz respeito à conversão de registros de representação. Como estratégia didática escolhemos desenvolver um trabalho que faz uso do *software GrafEq*, isto porque este *software*, além de possuir uma interface muito simples, permite ao aluno explorar um objeto matemático visualizando simultaneamente sua forma algébrica e a correspondente representação gráfica, ao desenhar figuras geométricas planas. Inspiramos nossa metodologia de investigação nos pressupostos da Engenharia Didática.

Ao longo da nossa sequência de atividades, constatamos que a aplicação desta proposta de ensino se tornou válida, percebendo-se uma significativa melhora dos alunos com relação a compreensão dos conteúdos trabalhados. Durante os cinco encontros em que se desenvolveu a nossa sequência de atividades, ficou visível a melhoria no desempenho dos alunos ao realizarem as conversões entre os registros de representação semiótica. Essa evolução foi verificada no primeiro momento dos nossos encontros, ao focarmos a passagem do registro de representação algébrico para o gráfico, situação trabalhada frequentemente com os alunos nas aulas tradicionais de matemática, no estudo de funções. E também apurada no segundo momento, quando focamos a conversão inversa, trabalhando a passagem do registro gráfico para o algébrico, situação raramente proposta aos alunos nas aulas de matemática das escolas, e que se mostrou facilitada quando aliada a um recurso tecnológico.

Embora as dificuldades de alguns alunos tenham persistido ao final desta nossa proposta, percebemos que a maioria das duplas que participaram dos cinco encontros conseguiu realizar todas as atividades propostas, demonstrando boa aquisição de conhecimentos. Tais resultados foram verificados em especial no último encontro da nossa sequência didática, no qual os alunos apresentaram suas próprias obras, elaboradas com os conhecimentos matemáticos adquiridos nos encontros anteriores.

Acreditamos que conseguimos atingir nossos objetivos, proporcionando à turma uma sequência de atividades diferenciadas para a disciplina de matemática. O uso do *software GrafEq* no estudo de inequações se mostrou essencial para o êxito desta proposta, fugindo das aulas tradicionais e fazendo com que os alunos se interessassem pelos conteúdos trabalhados, interagindo em sala de aula e participando ativamente das atividades realizadas.

Em todos os encontros a turma demonstrou motivação em trabalhar a matemática de uma maneira não tão abstrata, como muitas vezes se apresenta na aula tradicional. As aulas no laboratório de informática apresentaram aos alunos uma forma divertida e prazerosa de estudar matemática, que nos proporciona descobrir, refletir, criar e produzir, ao invés de apenas exercitar fórmulas e teoremas fixados.

A cada nova produção elaborada pelos alunos, percebia-se a conquista pessoal que esta concretização representava. As duplas se empenhavam em resolver as atividades propostas nos encontros, pois gostavam de mostrar a conclusão de suas produções para os outros colegas da turma, bem como para a professora, para que as registrasse com fotos.

Ao final deste trabalho, podemos refletir sobre como a inserção da tecnologia nas aulas de matemática pode ser de grande benefício para a superação de dificuldades apresentadas pelos alunos nos conteúdos curriculares. Acredito que nós, como professores recém formados, temos que levar essas iniciativas diferenciadas para as nossas aulas, objetivando utilizar os recursos tecnológicos existentes atualmente como potentes instrumentos no ensino de matemática.

Esperamos que os resultados obtidos nesta proposta possam motivar outros professores de matemática a planejar aulas diferenciadas e convidativas aos seus alunos, propondo, por exemplo, a utilização de *softwares* no ensino dos conteúdos tradicionais vistos em sala de aula. No entanto, devemos destacar que é de suma importância o professor ter clareza quanto a suas intenções ao realizar uma atividade inovadora como esta. Para uma prática ser bem sucedida é indispensável que o professor tenha conhecimento prévio do instrumento tecnológico com o qual pretende trabalhar, explorando os recursos disponíveis e utilizando-os em seu planejamento.

Nestes casos, o professor deve ter o papel de orientador, conduzindo os alunos na realização dos trabalhos e levando-os à obtenção gradativa dos conhecimentos matemáticos. Na experiência proposta neste trabalho, a professora teve o cuidado de, a cada encontro, propor aos alunos, primeiramente, atividades de simples resolução, que visassem o estudo da passagem do registro de representação algébrico para o gráfico, comumente realizadas em sala de aula. Em um segundo momento realizava-se a conversão inversa, requerendo maior cuidado por parte dos alunos.

A organização dada aos encontros, quanto ao ordenamento das quatro figuras geométricas trabalhadas, também colaboram para o êxito da proposta de ensino, uma vez que os alunos partiram de simples restrições das coordenadas x e y, ao desenharem retângulos, passando pelas definições dos coeficientes angular e linear da equação da reta e o estudo de posições relativas entre retas (paralelas e concorrentes) na construção de paralelogramos e triângulos, e por último trabalhando a equação da circunferência ao desenharem círculos no plano cartesiano.

Finalizando este trabalho, podemos dizer que estamos contentes com os resultados obtidos nesta pesquisa. Esperamos que a motivação apresentada pelos alunos ao longo da nossa sequência de atividades possa ser sentida pelos próximos leitores deste Trabalho de Conclusão de Curso e servir de inspiração nas suas futuras experiências com o uso de *softwares* na disciplina de matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

ARTIGUE, Michele. Engenharia Didáctica. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 193 – 217.

BASSO, M. V; BÚRIGO, E. Z.; GARCIA V. C & GRAVINA, M. A. V. **Matemática Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática**. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

DAMM, Regina Flemming. **Registros de Representação.** In: MACHADO, S., D. A. Educação Matemática, 1999, p. 135 – 153.

DUVAL, Raymond. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** Tradução de MORETTI, M. T. Revemat, Florianópolis, SC, Brasil, 2012, p. 266 – 297. Título original: Registres de représentation sémiotique et fonctionement cognitif de la pensée.

GOULART, Juliana Bender. **O Estudo da Equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$. Utilizando o *GrafEq* – Uma proposta para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

GRAVINA, Maria Alice; NOTARE, Márcia Rodrigues. **A formação continuada de professores de matemática e a inserção das mídias digitais na escola**. In: VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, UFSCar, São Carlos, SP, Brasil, 2013, 14 p.

PAULA, A. F. **Mobilização e articulação de conceitos de Geometria Plana e de Álgebra em estudos da Geometria Analítica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Porto Alegre, 2011.

STREMEL, J. D.; HASELEIN, W. M.; FIOREZE, L. A. **Estudo da Equação da reta utilizando o *software GrafEq***. Trabalho apresentado no III EIEMAT – 1º Encontro Nacional PIBID - Matemática, 2012.

APÊNDICE A – ATIVIDADES DO ENCONTRO 1 DA PROPOSTA DIDÁTICA

Nomes:	
Turma:	**Data:**

ENCONTRO 1: "Desenhando regiões retangulares"

ATIVIDADE 1: Utilizando o *software GrafEq*, digite as seguintes desigualdades e descreva as regiões obtidas.

a) $4 \leq x \leq 6$
$2 \leq y \leq 8$

b) $1 \leq x \leq 7$
$1 \leq y \leq 3$

c) $1 \leq x \leq 5$
$0 \leq y \leq 4$

d) $-8 \leq x \leq -3$
$2 \leq y \leq 6$

ATIVIDADE 2: Inserindo desigualdades convenientes no *GrafEq*, esboce as regiões descritas abaixo. Descreva o processo que o levou a esta construção.

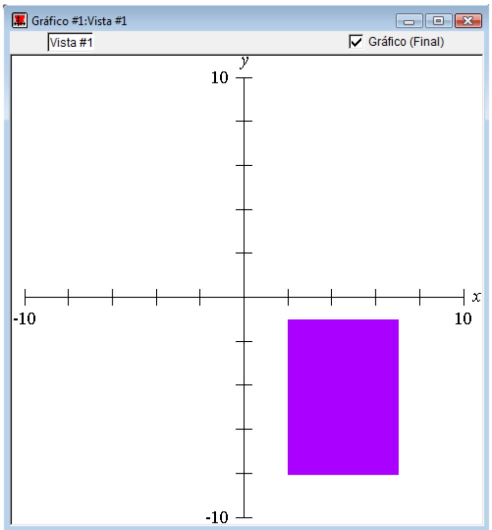
a) **Um quadrado de lado 3 contido no 3º quadrante do plano cartesiano;**

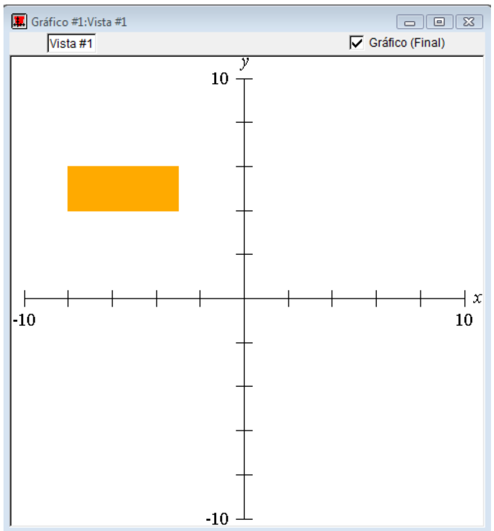
b) **Um retângulo com lados medindo 4 e 2 unidades, contido no 1º quadrante.**

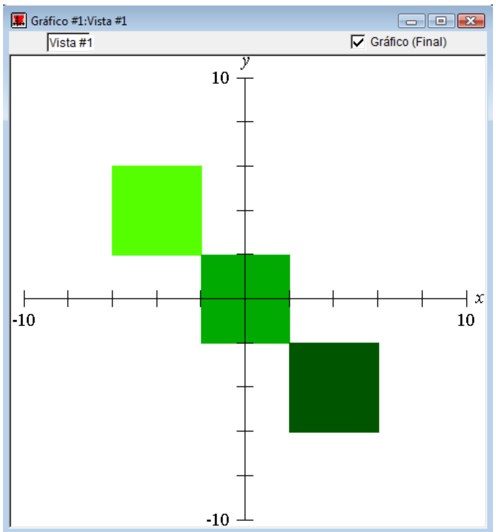
Nomes:	
Turma:	Data:

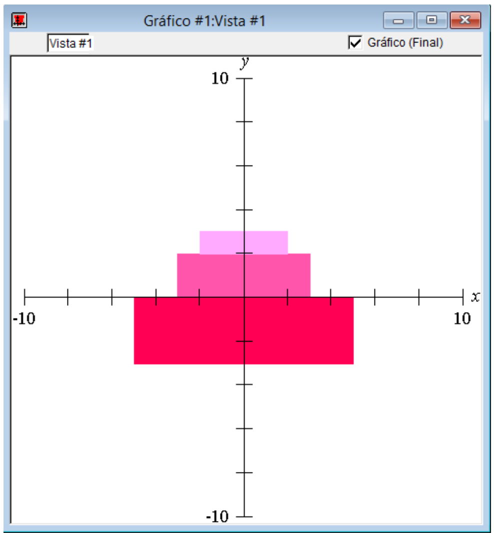
<u>ENCONTRO 1:</u> “Desenhando regiões retangulares”

ATIVIDADE 3: As figuras abaixo foram feitas no *software* matemático *GrafEq*. Construa-as no *GrafEq* e descreva passo a passo o processo de construção destas regiões.









APÊNDICE B – ATIVIDADES DO ENCONTRO 2 DA PROPOSTA DIDÁTICA

Nomes:	
Turma:	**Data:**

<u>ENCONTRO 2:</u> "Desenhando paralelogramos"

ATIVIDADE 1: Construa no *GrafEq* as retas de equações y = x, y = x + 3 e y = x – 4. A seguir comente as alterações ocorridas no gráfico com relação à equação inicial y = x.

____

____

____

ATIVIDADE 2: Construa no *GrafEq* as retas de equações y = - x, y = - x + 3 e y = - x – 4. A seguir comente as alterações ocorridas no gráfico com relação à equação inicial y = - x.

____

____

____

ATIVIDADE 3: Utilizando o *software GrafEq*, digite as seguintes desigualdades e descreva as regiões obtidas.

a) $\begin{cases} x \leq y \leq x + 3 \\ -5 \leq x \leq 5 \end{cases}$

____

____

____

b) $\begin{cases} x + 1 \leq y \leq x + 5 \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases}$

____

____

____

c) $\begin{cases} -x + 2 \leq y \leq -x + 4 \\ -3 \leq y \leq 6 \end{cases}$

____

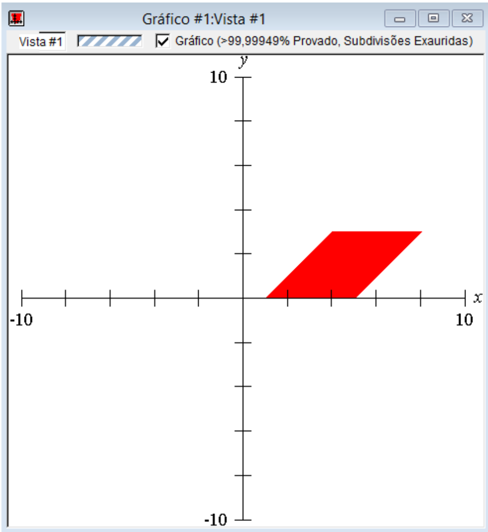
____

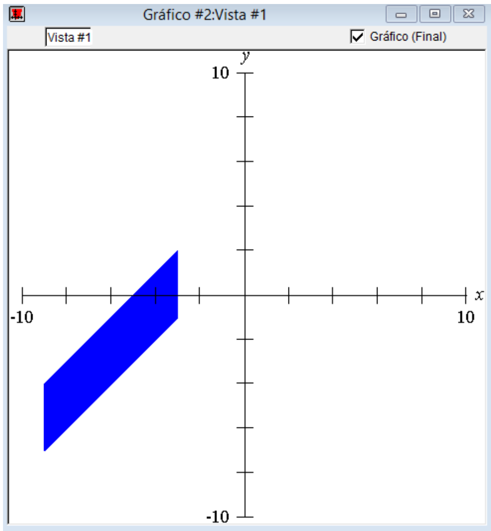
____

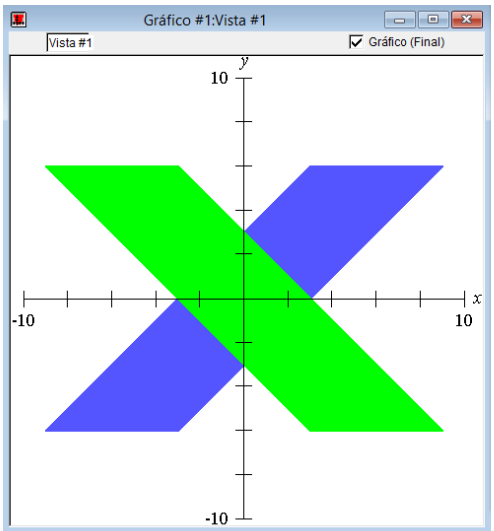
Nomes:	
Turma:	**Data:**

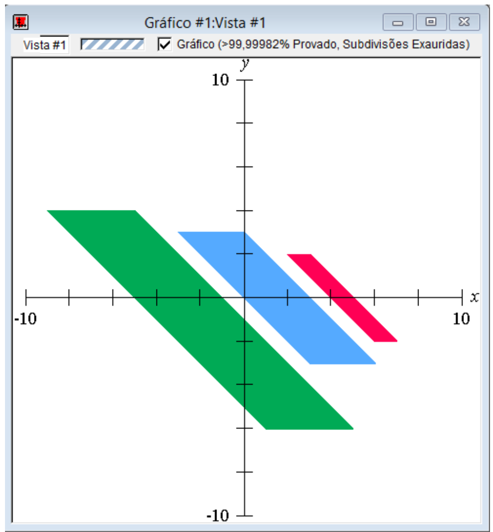
<u>ENCONTRO 2:</u> "Desenhando paralelogramos"

ATIVIDADE 4: As figuras abaixo foram feitas no *software* matemático *GrafEq*. Construa-as no *GrafEq* e descreva passo a passo o processo de construção destas regiões.









APÊNDICE C - ATIVIDADES DO ENCONTRO 3 DA PROPOSTA DIDÁTICA

Nomes:	
Turma:	**Data:**

<u>ENCONTRO 3:</u> "Desenhando triângulos"

ATIVIDADE 1: Construa no *GrafEq* as retas de equações y = x, y = 2x e y = 2x +3. Descreva com suas palavras as alterações ocorridas no gráfico com relação à equação inicial y = x.

____

____

____

ATIVIDADE 2: Construa no *GrafEq* as retas de equações y = - x, y = - 2x e y = - 2x + 3. Descreva com suas palavras as alterações ocorridas no gráfico com relação à equação inicial y = - x.

____

____

____

ATIVIDADE 3: Utilizando o *software GrafEq*, digite as seguintes desigualdades e descreva as regiões obtidas.

a) $\begin{cases} y \leq x + 6 \\ y \leq -x + 6 \\ y \geq -4 \end{cases}$

____

____

____

b) $\begin{cases} y \leq x + 7 \\ y \leq -x + 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

____

____

____

c) $\begin{cases} y \leq 3x + 1 \\ y \leq -3x + 8 \\ y \geq 2 \end{cases}$

____

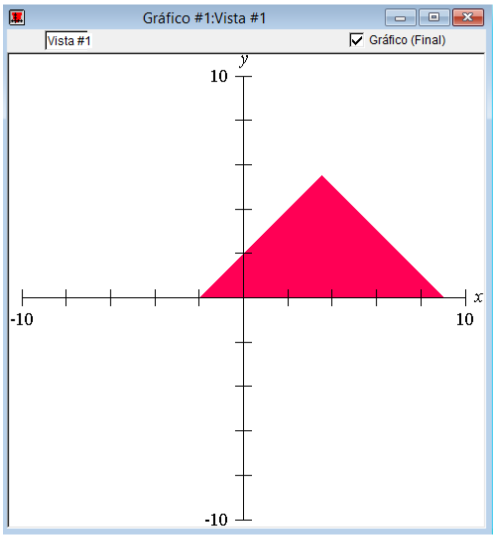
____

____

Nomes:	
Turma:	**Data:**

<u>ENCONTRO 3:</u> “Desenhando triângulos”

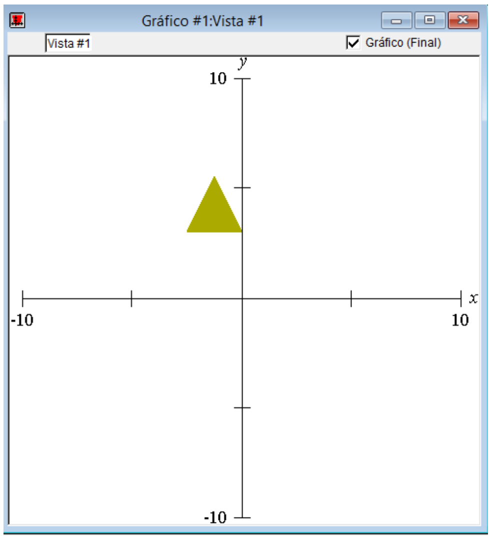
ATIVIDADE 4: As figuras abaixo foram feitas no *software* matemático *GrafEq*. Construa-as no *GrafEq* e descreva passo a passo o processo de construção destas regiões.



____

____

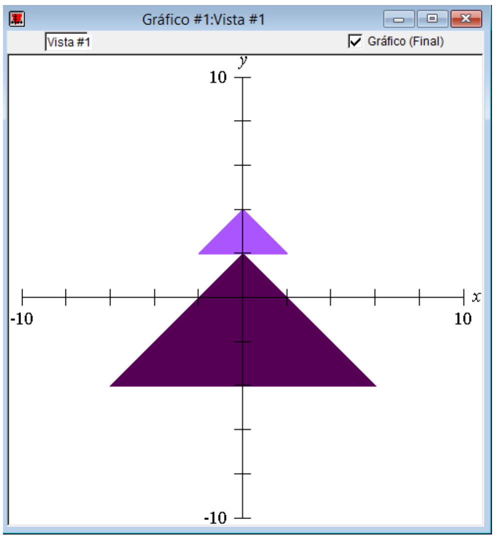
____



____

____

____

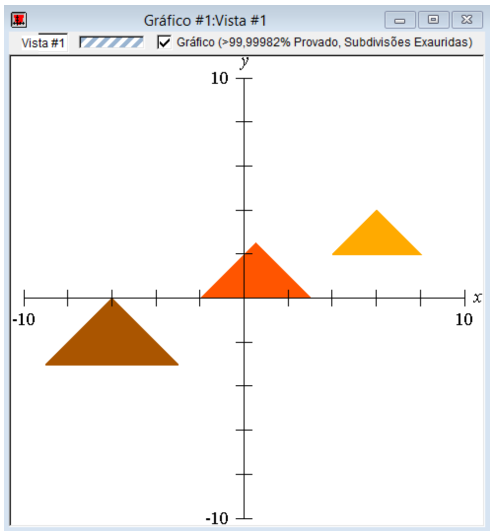


____

____

____

____



____

____

____

____

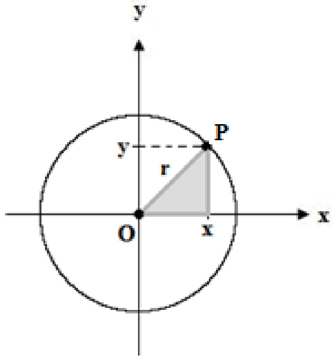
APÊNDICE D - ATIVIDADES DO ENCONTRO 4 DA PROPOSTA DIDÁTICA

Nomes:	
Turma:	**Data:**

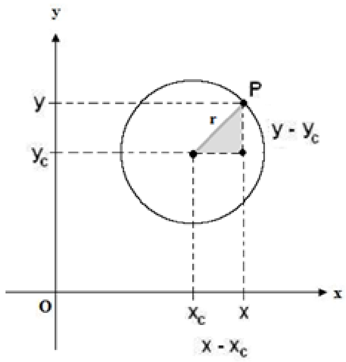
<u>ENCONTRO 4:</u> "Desenhando círculos"

ATIVIDADE 1: Observe as circunferências abaixo. Deduza a equação da circunferência utilizando o teorema de Pitágoras, nos casos em que:

a) A circunferência tem centro em C = (0,0);



b) A circunferência tem centro em C = (x_c, y_c).



ATIVIDADE 2: Inserindo desigualdades convenientes no *GrafEq*, esboce as regiões descritas abaixo. Descreva o processo que o levou a esta construção.

a) Um círculo de centro na origem e raio medindo 4 unidades de medida;

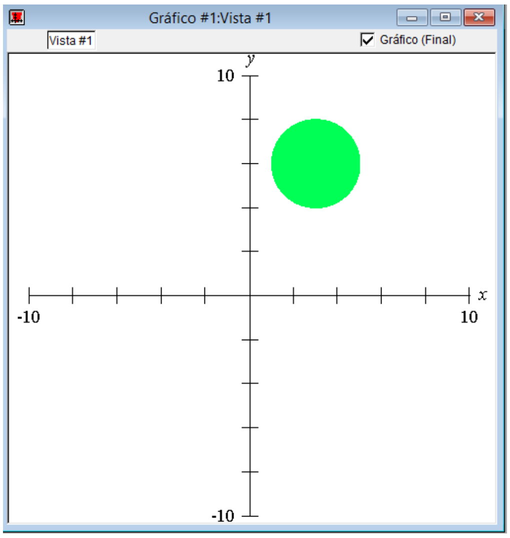
b) Um círculo de centro em C = (-2, 3) e raio medindo 3 unidades de medida;

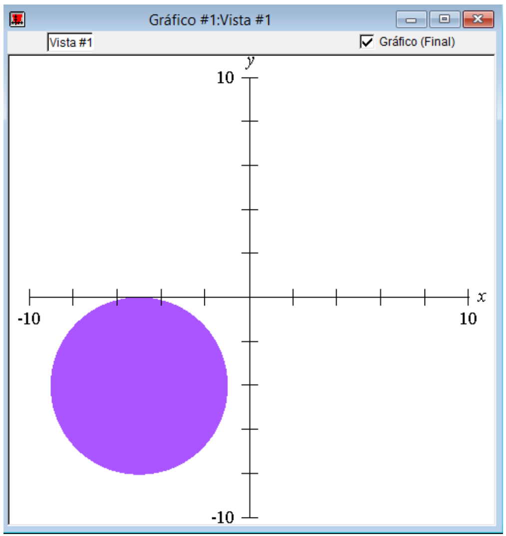
c) Um círculo de raio medindo 2 unidades de medida e pertencente ao 4º quadrante.

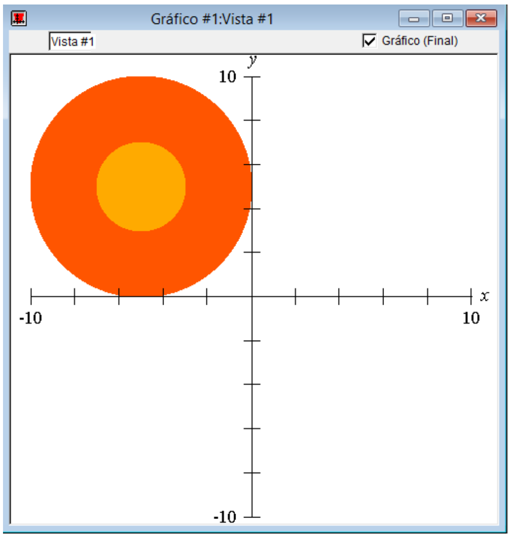
Nomes:	
Turma:	**Data:**

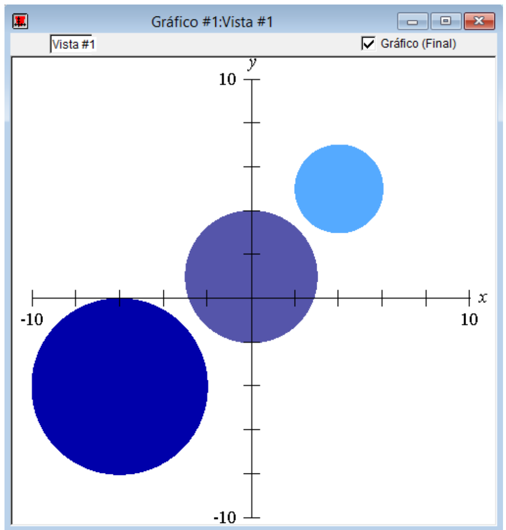
<u>ENCONTRO 4:</u> "Desenhando círculos"

ATIVIDADE 3: As figuras abaixo foram feitas no *software* matemático *GrafEq*. Construa-as no *GrafEq* e descreva passo a passo o processo de construção destas regiões.









APÊNDICE E - ATIVIDADES DO ENCONTRO 5 DA PROPOSTA DIDÁTICA

Nomes:	
Turma:	**Data:**

ENCONTRO 5: "Composição com figuras"

ATIVIDADE: Utilizando as figuras geométricas que trabalhamos nos encontros anteriores (retângulos, quadrados, paralelogramos, triângulos e círculos), construa um desenho no *software GrafEq*. O desenho é livre, pode ser um objeto, uma paisagem, enfim, o que você desejar, desde que sejam empregados sistemas de inequações na construção das figuras.

ANEXO A – DECLARAÇÃO DE PRÁTICA DE PROJETO

DECLARAÇÃO DE PRÁTICA DE PROJETO

Declaro para os devidos fins, a pedido da parte interessada, que **Margareth Moraes Hofart**, aluna do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, realizou o projeto de pesquisa intitulado **"Desenhando retângulos, paralelogramos, triângulos e círculos através da álgebra: Uma possibilidade do *software GrafEq*"** no laboratório de informática do Colégio Estadual Coronel Afonso Emílio Massot, com a turma 104 do 1º ano do Ensino Médio, na disciplina de matemática, no período de 1º de outubro de 2013 a 5 de novembro de 2013, cumprindo carga horária total de 10 horas/aula.

SECRETÁRIA DA EDUCAÇÃO
COLÉGIO ESTADUAL CEL. AFONSO EMÍLIO MASSOT
Decreto de Criação nº 7164 Data: 11-03-1938 D.O.: 11-03-1938
Portaria de Unificação nº 5580 Data: 02-03-1983 D.O.: 04-03-1983
Portaria de Alteração de Designação nº 00307 de 11/12/00 D.O. 12/12/00

M Carmo L. Balado
(Supervisora de Estágios)
Maria do Carmo L. Balado
Coord. Pedagógica
Id. 2483769

Aline Lyra Lemos
Aline Lyra Lemos
(Professora titular de matemática)

Margareth Moraes Hofart
Margareth Moraes Hofart
(Professora Estagiária da matemática)

Porto Alegre, 05 de novembro de 2013.