UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Emanuelle Regina Lopes

TRIGONOMETRIA E GEOMETRIA DINÂMICA:
UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO COM ENFOQUE NA ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Porto Alegre
2013

Emanuelle Regina Lopes

TRIGONOMETRIA E GEOMETRIA DINÂMICA: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO COM ENFOQUE NA ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Alice Gravina

Porto Alegre
2013

Emanuelle Regina Lopes

TRIGONOMETRIA E GEOMETRIA DINÂMICA: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO COM ENFOQUE NA ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Alice Gravina

Banca Examinadora

____

Prof.ª Dr.ª Maria Alice Gravina – Orientadora
Instituto de Matemática – UFRGS

____

Prof.ª Dr.ª Flávia Malta Branco
Instituto de Matemática – UFRGS

____

Prof.ª Dr.ª Luisa Rodriguez Doering
Instituto de Matemática – UFRGS

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Maria Alice, pela dedicação não só pela orientação neste trabalho, como também nas monitorias. Com a qual, meus aprendizados durante o período de monitorias em mais da metade do curso atribuíram outro sentido à minha graduação.

Aos meus pais e irmão, Sandra, Manoel e Gustavo, pelo apoio, confiança e compreensão.

Aos colegas de curso os quais fui monitora, em especial os que contribuíram para este trabalho com sua produção.

À professora Márcia Travi e a colega Samanta pela parceria no estágio.

Aos mestres que fizeram parte da minha formação acadêmica.

Aos amigos que fiz na UFRGS, especialmente aos que fazem parte do meu dia a dia.

Às professoras Luisa Rodrigues Doering e Flávia Malta Branco, por aceitarem participar da banca examinadora e contribuírem para minha formação.

RESUMO

Neste trabalho têm-se dois momentos. No primeiro momento, através da análise de testes aplicados aos alunos da disciplina de Geometria I, ingressantes em 2013/1 no curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, procuramos entender melhor como se dá, na geometria, a aprendizagem dos conceitos e a organização das argumentações dedutivas. Também tratamos de identificar o potencial da geometria dinâmica para o desenvolvimento das habilidades que se fazem necessárias nos raciocínios dedutivos, e aqui nos apoiamos na teoria dos registros de representação de Duval. O segundo momento trata da elaboração de uma sequência didática para trabalhar com a trigonometria escolar, e aqui levamos em consideração o nosso entendimento sobre a aprendizagem da geometria, tratado no primeiro momento do trabalho. A sequência faz uso de geometria dinâmica e enfatiza a apresentação de raciocínios dedutivos que explicam conceitos e propriedades. A sequência didática foi implementada em turma de segundo ano do ensino médio e os resultados também são apresentados neste trabalho.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana. Trigonometria. Geometria Dinâmica.

ABSTRACT

This work is organized in two parts. The first one presents an analysis of the tests applied to students following a first geometry course in a pre-service program for mathematic teachers at UFRGS Mathematics Institute. The aim of analysis was to understanding the learning process in geometry, its concepts and deductive argumentations. Using Duval's representation's registers theory, it was also intend to identify the potential of dynamic geometry to improve the abilities which are needed for deductive reasoning. The second part of the work is about the conception of a didactic sequence of activities to work with high school trigonometry. In the design of the sequence it is taken into account the analysis of students learning process presented in the first par of the work. The sequence makes use of dynamic geometry and emphasizes the deductive reasonings that explains geometric concepts and properties. The sequence was tested with a group of high school students and the results are also presented in this work.

Keywords: Euclidean Geometry, Trigonometry, Dynamic Geometry.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, no seu 1° semestre, tem como obrigatória a disciplina Geometria I que trata de demonstração de teoremas da geometria euclidiana plana. Ao acompanhar os alunos ingressantes em 2013/1, na função de monitora da disciplina, deparei-me com suas dificuldades, relacionadas ao entendimento dos conceitos e a necessidade das demonstrações. A docente da turma foi a Prof.ª Dr.ª Maria Alice Gravina, minha orientadora neste trabalho.

Para compreender melhor como os alunos ingressantes pensam em geometria, fiz uma análise das suas produções nos primeiros testes aplicados na disciplina. É disto que trata a primeira parte deste trabalho e o material se encontra no capítulo 2. Neste capítulo faço considerações teóricas sobre o processo de construção do pensamento em geometria. Como veremos, a matemática em sua *face oculta*, muito exigida na disciplina, é algo novo e estranho aos alunos ingressantes. A maneira de organizar os raciocínios, a estrutura lógica de uma demonstração, construir uma explicação coerente, são algumas das dificuldades que se apresentam no processo de aprendizagem da geometria.

Na escola, o conteúdo de geometria é abordado, mas no geral se restringe à aplicação de fórmulas e resolução de exercícios através da álgebra. A geometria trabalhada na disciplina do primeiro semestre do Curso de Licenciatura tem outras características, dentre elas, a exigência de raciocínios generalizadores e de natureza dedutiva. Na minha experiência como monitora foi possível observar a distância que existe entre as habilidades que são exigidas nesta disciplina e as habilidades que foram desenvolvidas durante o período de educação escolar. Foi com esta constatação que decidi realizar uma intervenção na escola, no Ensino Médio, para mostrar aos alunos os *hábitos de pensamento* que se fazem presentes quando se trabalha com matemática. O conteúdo escolhido, dentro da geometria, foi a trigonometria. Esta experiência de ensino, e sua análise, compõem o terceiro capítulo do trabalho.

Tinha, inicialmente, a ideia de implementar na escola uma atividade de caráter extraclasse, que envolvessem demonstrações em geometria e fazendo uso de geometria dinâmica. A necessidade de trabalhar com o conteúdo de trigonometria no período letivo da turma na qual realizei prática de estágio, me fez repensar a experiência de ensino. Assim, resolvi desenvolver uma proposta para o ensino da trigonometria com ênfase nas explicações de natureza dedutiva.

A abordagem metodológica é inspirada na Engenharia Didática, uma metodologia de pesquisa que contempla a investigação em experiências de ensino. Isto se reflete nas três etapas que organizam o trabalho, documentadas nos capítulos 2, 3 e 4:

- Considerei que a análise da produção dos alunos na disciplina de Geometria I, no primeiro semestre de 2013, constitui um momento de análise prévia do pensamento geométrico de alunos universitários recém egressos do Ensino Médio. Esta análise prévia foi uma fonte de motivação para nosso trabalho.
- A *concepção de uma experiência de ensino* de trigonometria que toma como principais referencias teóricos os trabalhos de Duval (1995; 2008), Goldenberg (1998; 1999) e Gravina (2001) justificam nossas escolhas quanto a forma de realizar a experiência. Como parte da concepção tem-se a elaboração de sequência de atividades que faz uso do software Geogebra.
- A *implementação da experiência* em turma do 2º ano do Ensino Médio e a *análise dos resultados* corresponde ao que seria à fase final da Engenharia Didática.

Reflexões sobre o que aprendemos, enquanto professora, ao longo da experiência, bem como reflexões mais gerais sobre o que aprendemos durante os quatro anos de formação recebidos no Curso de Licenciatura em Matemática são apresentadas nas Considerações Finais.

2 GEOMETRIA NA UNIVERSIDADE: ANÁLISE DE UMA DISCIPLINA

No primeiro semestre do ano de 2013, acompanhamos a disciplina de Geometria I. Como monitora da disciplina observamos atentamente as iniciativas e hesitações dos alunos nas suas primeiras argumentações, identificamos erros e dificuldades compartilhadas pelos alunos. Nos horários de monitoria o esclarecimento de dúvidas a cerca dos conteúdos era individual ou em grupo. Percebemos que muitos tinham dificuldades na resolução dos exercícios propostos, seja pela falta de domínio da linguagem ou conteúdo ou pela falta de visualização do que estava sendo colocado na questão; e também pela não diferenciação entre os fatos que eram tomados como verdade – as hipóteses – e aqueles que precisavam ser deduzidos – a tese.

Saber elaborar um argumento é uma habilidade que os alunos não trazem dentre as competências desenvolvidas na escola, e isto pode prejudicar o desempenho na disciplina. Agora a maneira de pensar matemática é diferente daquela em que os exercícios se resolvem com cálculos e em que as respostas são números. Agora as respostas não são um número, são deduções. E entender a necessidade de cada passo em uma demonstração matemática não é trivial para os alunos calouros. Quais verdades são assumidas e quais devem ser provadas, saber quando aplicar um teorema são algumas das habilidades desenvolvidas na disciplina de Geometria I.

2.1 A ORGANIZAÇÃO DA DISCIPLINA

A disciplina tem duração de um semestre letivo com carga horária de 60 horas. O livro escolhido pela professora da disciplina foi Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas, de Eliane Quelho Frota Rezende e Maria Lúcia Bontorim de Queiroz. As aulas, ministradas pela professora Maria Alice Gravina, consistiam de dois encontros semanais de duas horas cada. Nas sextas-feiras, a turma, dividida em dois grupos, trabalhava no laboratório de informática e, aqui, o software GeoGebra foi um recurso didático de fundamental importância; nas quartas-feiras, a aula acontecia em sala de aula com um computador e projetor multimídia. Como apoio fundamental à disciplina, tínhamos o ambiente Moodle. Nele todas as atividades realizadas na disciplina e conteúdos abordados eram organizados em semanas, também era feita a entrega dos trabalhos realizados no GeoGebra.

Nas aulas no laboratório, os alunos trabalhavam diretamente na construção e manipulação das figuras no GeoGebra. Já nas aulas na sala normal, aconteciam discussões para construir argumentos, usando-se o GeoGebra no telão – foi convencionado entre alunos e professora o uso das cores azul para o que sei (hipóteses) e vermelho o que preciso explicar (tese), os passos intermediários que precisavam ser mostrados para concluir a explicação eram destacados em verde. O livro utilizado serviu de apoio em todos os momentos de demonstrações e reproduções das construções no GeoGebra, muito estudo era feito direto no livro.

Nos momentos de discussão em grande grupo, propriedades e teoremas eram demonstrados de acordo com os passos do livro e com uma figura GeoGebra correspondente, no telão. Estas discussões aconteciam sempre nas quartas-feiras, após as explorações feitas pelos alunos no laboratório de informática, na sexta-feira anterior. Em duas tardes, os alunos tinham atendimento de monitoria.

2.2 O PENSAMENTO EM GEOMETRIA

Os alunos ingressantes têm pouca maturidade na forma de pensar geometria. O modelo dos Van Hiele, vai nos ajudar a entender as dificuldades dos alunos, pois ele classifica o pensamento geométrico em cinco níveis de compreensão:

Nível 0 – Visualização: reconhecem formas, mas não associam propriedades a estas.

Nível 1 – Análise: propriedades passam a ser atribuídas a figuras.

Nível 2 – Dedução informal: relacionam as mesmas propriedades em figuras diferentes.

Nível 3 – Dedução: o significado da dedução e sua estrutura, seus passos são compreendidos e as demonstrações são construídas e podem ser desenvolvidas de mais de uma forma.

Nível 4 – Rigor: deduções mais abstratas são compreendidas, assim como geometrias não euclidianas.

Na análise das produções dos alunos, as resoluções serão classificadas de acordo com os níveis dos Van Hiele.

Os Van Hiele consideram a instrução que o aluno recebe mais importante que a idade, para passar de um nível a outro superior. O aprendizado é dividido em cinco fases: interrogação/informação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração. Nessas fases, desenvolvem-se atividades nos níveis 0, 1 e 2 dos Van Hiele.

A disciplina de Geometria I iniciou com uma atividade que passa por todas as fases. É uma atividade do tipo caixa-preta, discutida em GRAVINA (2001). As construções do tipo caixa-preta não permitem que os elementos intermediários construídos sejam visualizados; nelas veem-se somente os objetos essenciais e o produto final. Entendamos as fases propostas pelos Van Hiele, analisando a atividade. A primeira caixa-preta apresentava três quadriláteros, que terem seus vértices manipulados assumiam comportamentos diferentes, conforme veremos a seguir.

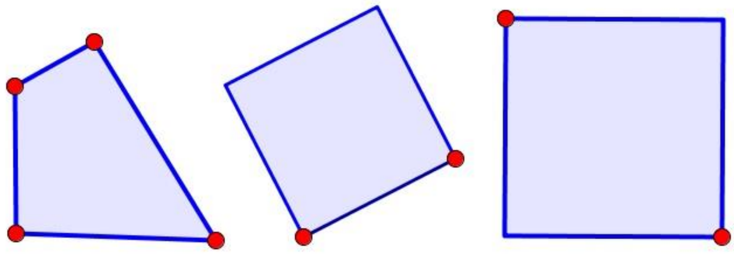


Figura 1 – Caixa-preta 1

A atividade caixa-preta 1 acontece no nível 1 nas duas primeiras fases e no nível 2 nas fases seguintes.

Na fase 1, da interrogação/informação, os alunos e a professora interrogam-se sobre as propriedades do quadrado e se as figuras na tela atendem as propriedades elencadas . Na fase 2, da orientação dirigida, os alunos buscam padrões nas figuras através da manipulação dos vértices em vermelho, os quais são denominados como objetos livres no GeoGebra. Na fase 3, da explicação, há uma troca entre os alunos sobre o que foi identificado como característica de cada quadrilátero. Os alunos observam que a primeira construção é um quadrilátero qualquer, os lados e ângulos podem ter qualquer tamanho, podendo inclusive ser um quadrilátero não convexo. Nas duas outras figuras, as propriedades de quadrado são preservadas. Na segunda o quadrado é construído a partir do lado e na terceira a partir da diagonal.

Na fase 4, da orientação livre, os alunos são convidados a fazer réplicas das três figuras. A primeira construção é mais simples já que é um quadrilátero qualquer. Na segunda, a partir do lado deve-se construir o quadrado, cuidando para que os quatro lados sejam congruentes entre si e os ângulos internos retos. Na terceira figura é preciso conhecer as propriedades das diagonais do quadrado: são congruentes, se bissecionam e são perpendiculares. Na última fase, a da integração, acontece a institucionalização do que foi aprendido, e aqui o professor tem um papel importante.

Esta atividade também serve para exemplificarmos os níveis de pensamento 0, 1 e 2 propostos por Van Hiele. Nas duas últimas figuras, a identificação do quadrado sem associar propriedades está no nível 0. A partir da manipulação na tela do GeoGebra, propriedades e padrões são observados, avançando ao nível 1: na segunda figura, os lados congruentes e paralelos e também os ângulos internos retos; na terceira figura, as propriedades identificadas referem-se às diagonais como observado anteriormente. Já no nível 2, observa-se que as propriedades estão presentes nas duas figuras, há a generalização para quadrado, definindo-o em termo de suas propriedades.

As dificuldades iniciais que observamos nos alunos estão documentadas na literatura e é disso que fala Duval (2013):

> Na geometria, por exemplo, a percepção de figuras quase sempre conduz a impasses, porque é preciso ter aprendido a “ver” contra a evidência perceptiva das formas reconhecidas de imediato para que elas desempenhem um papel heurístico, e não seja uma fonte de confusões. Do mesmo modo, o uso da linguagem para definir e provar é feito contrariando a fala espontânea e a forma de argumentação que ocorre fora da matemática. (Duval; RPEM 2013; p. 17)

Desenvolver as habilidades necessárias para uma demonstração é algo que os alunos da disciplina começaram a aprender, neste nível superior de ensino, pois esta forma de se fazer matemática não é enfatizada na escola básica. Ainda segundo Duval, a construção de conceitos geométricos está relacionada a três aspectos do processo cognitivo: visualização, construção de configurações e raciocínio. A visualização está relacionada não só à representação figural do objeto matemático, mas também a identificar o que está sendo proposto no exercício; na construção de configurações é necessário estar no nível 1 de compreensão definido por Van Hiele, pois é neste nível que são identificadas as propriedades geométricas; já o raciocínio usado nas etapas de uma demonstração, está ligado ao nível 2 dos Van Hiele.

No procedimento de construção de configurações, diferentes podem ser as apreensões geométricas: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial. Todas estas apreensões fazem parte das interpretações autônomas que os alunos de Geometria I devem ter na resolução dos exercícios.

Na caixa-preta 1, temos estes quatro tipos de apreensões geométricas definidos por Duval. A interpretação perceptiva é exigida para identificar as figuras quadrilátero qualquer e quadrados. Faz parte da interpretação discursiva, a identificação das propriedades da forma quadrado. A interpretação operatória se dá através da manipulação, das diferentes posições que o objeto com as mesmas características pode ter, está relacionada com as diferentes figuras que um mesmo enunciado pode ter. Por fim, a interpretação sequencial ocorre na construção de uma caixa-preta semelhante, exigindo a clareza na sequência de passos a serem seguidos.

Uma outra questão discutida por Duval é a representação do objeto matemático. Um objeto pode ser representado de diferentes maneiras e estas maneiras são denominadas *registros de representação.* A aprendizagem ocorre quando há conversão e coordenação de registros. O processo de construção de figuras geométricas privilegia a conversão de registros, pois o procedimento de produção da figura, aqui um registro geométrico, é controlado pelo registro discursivo, no caso os passos da construção.

É importante observar que o uso do GeoGebra , de forma regular na disciplina, muito ajudou os alunos no desenvolvimento das habilidades que se fazem presentes nos raciocínios de natureza geométrica. Na caixa-preta proposta aos alunos, discutida acima, tem-se um pouco do potencial deste software: o passo a passo que é exigido na construção dos dois últimos quadriláteros em questão se converte em clareza sobre os fatos que são tomados como hipótese – estes devem ser a base da construção da figura. Feita a construção tem-se fatos que nela estão e que não foram declarados – estes são os fatos a serem demonstrados. Na construção do terceiro quadrilátero tem-se, ao final, a propriedade “se um quadrilátero tem diagonais congruentes, que se bissecionam perpendicularmente, então ele é um quadrado”. Vale observar que no processo de construção tem-se uma constante conversão de registros – do discursivo para o geométrico e vice-versa.

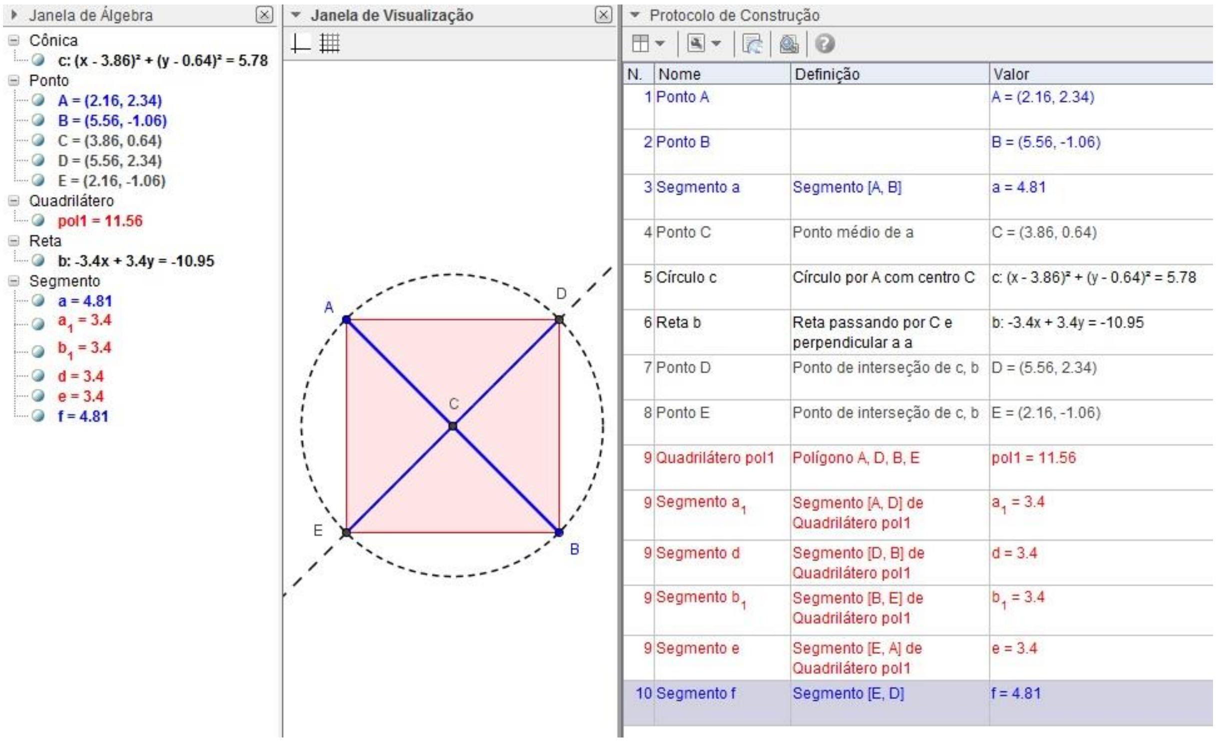


Figura 2 – Construção do quadrilátero a partir das diagonais

Na figura 2 temos uma tela do GeoGebra com os registros algébrico, geométrico e discursivo. Na janela de álgebra, como há uma malha cartesiana oculta na janela de visualização, têm valores para os pontos e equações da reta e circunferência que representam os objetos. Na janela de visualização tem-se a representação figural do objeto; e no protocolo de construção tem-se a sequência de passos.

Sobre os ambientes de geometria dinâmica GRAVINA (2001) afirma que “são micromundos que concretizam um domínio teórico, no caso a geometria euclidiana, pela construção de seus objetos e representações que podem ser manipuladas na tela do computador” (p. 82) e é por isso que se tornam grande aliados no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Na entrevista concedida à revista RPEM 2013, Duval fala do diferencial que se tem no processo de aprendizagem quando se faz uso de softwares:

> (...) Fascinante é *o poder de visualização* que eles oferecem em todas as áreas. (...) Eles (os softwares) constituem um meio de transformações de todas as representações produzidas na tela. Em outras palavras, eles não são somente um instrumento de cálculo (...) mas eles cumprem *uma função de simulação e de modelagem* que ultrapassa tudo o que podemos imaginar “mentalmente” ou realizar de modo gráfico-manual.

Utilizaremos, na análise da produção dos alunos, o referencial teórico tratado nesta seção. Buscamos entender como se dão, a aprendizagem dos conceitos e a organização das argumentações dedutivas.

2.3 A PRODUÇÃO DOS ALUNOS

Nesta seção, analisaremos a produção dos alunos, tomada em questões dos três primeiros testes da disciplina. A cada três semanas, acontecia um teste. No total, foram realizados cinco teste no decorrer do semestre. Selecionamos os três primeiros, pois foram mais relevantes em relação à aquisição das habilidades de argumentação em geometria.

As questões dos testes eram, na sua maioria, muito próximas daquelas que haviam sido discutidas em sala de aula e nos momentos de monitoria. Pequenas alterações de enunciado, de figura e de letras nomeando os seus elementos sempre estiveram presentes na redação das questões. O enunciado era fortemente ligado à figura, a qual dava dicas para avanço no raciocínio. Uma forma dos alunos associarem com a resolução feita em aula.

2.3.1 Perfil dos alunos e critérios de seleção

Os alunos selecionados para análise de suas produções foram exclusivamente egressos do Ensino Médio. Eles foram assim escolhidos, pois queríamos um perfil de aluno muito próximo daquele que ainda está na escola, no que diz respeito à formação matemática. Esta condição nos ajudou na elaboração da experiência de ensino que é apresentada no capítulo 3. Assim, a análise nos disse sobre o pensamento dedutivo dos alunos que ingressam na universidade, no caso na disciplina de Geometria. Ressaltamos que, como são alunos que ingressaram no curso de Licenciatura em Matemática, eles gostam de matemática e estão interessados em aprendê-la.

Outros dois critérios observados na seleção dos alunos foram: a assiduidade, tanto nas aulas quanto nos momentos de monitoria; a frequência na realização de todos os testes e ter apresentado resolução nas questões que foram selecionadas para análise. Ficamos com um total de 9 alunos.

2.3.2 A escolha das questões usadas na avaliação da produção dos alunos

Selecionamos para análise as resoluções produzidas em questões dos três primeiros testes da disciplina. Nestas resoluções acompanhamos o desenvolvimento do raciocínio dedutivo dos alunos. Observamos que os três primeiros testes foram os mais importantes para acompanharmos este desenvolvimento, pois nos demais houve estabilidade em relação ao nível de pensamento dos alunos. As questões dos testes foram selecionadas de acordo com a sua relevância para o nosso objetivo de entender como o aluno ingressante pensa em geometria.

A seguir apresentamos as questões escolhidas e as resoluções esperadas. E também fazemos comentários sobre as exigências que se fazem presente na resolução, levando em considerações os aspectos teóricos discutido na seção 2.2. Todas as resoluções exigem um nível 2 de pensamento proposto pelos Van Hiele.

1. Na figura ao lado tem-se que :

XY = XZ e YQ = PZ.

Demonstre que o triângulo XPQ é isósceles

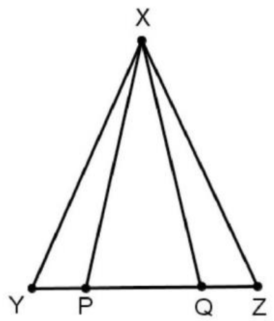


Figura 3 – Questão escolhida do teste 1

Demonstração esperada:

ΔXYZ é isósceles pois $XY \cong XZ$, logo $X\hat{Y}Q \cong X\hat{Z}P$.

$\Delta XYQ \cong \Delta XZP$ por LAL $\begin{cases} XY \cong XZ \\ X\hat{Y}Q \cong X\hat{Z}P \\ YQ \cong PZ \end{cases}$

Portanto, se ganha a congruência dos lados XQ e XP, ou seja, ΔXPQ é isósceles. ■

Abaixo o exercício no formato como foi trabalhado anteriormente ao teste.

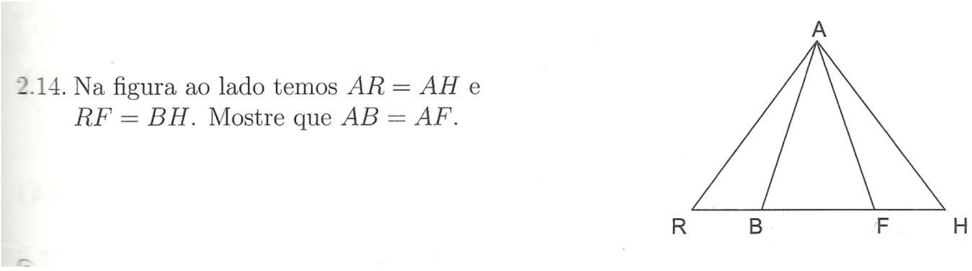
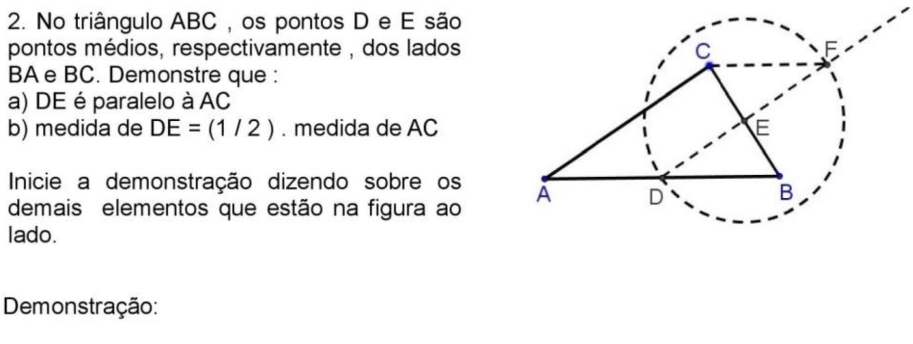

2.14. Na figura ao lado temos $AR = AH$ e $RF = BH$. Mostre que $AB = AF$.

Figura 4 – Livro questão 1 página 41

Os elementos da figura foram renomeados para o teste. A definição de triângulo isósceles também foi exigida no teste, pois a questão do livro pede diretamente o que deve ser mostrado. A estratégia de resolução é a mesma, a habilidade exigida é que eles conseguissem transpor a solução para os elementos das componentes figural e discursiva apresentadas no teste.

Na questão 2, foram realizadas modificações na figura que exigia a mesma estratégia para demonstração, mas os alunos deveriam reinterpretar e fazer a conversão entre a maneira como foi aprendido o objeto e a forma como este foi proposto no teste. Modificações mereológica e posicional foram feitas na figura.


2. No triângulo ABC , os pontos D e E são pontos médios, respectivamente , dos lados BA e BC. Demonstre que :

a) DE é paralelo à AC

b) medida de DE = (1 / 2) . medida de AC

Inicie a demonstração dizendo sobre os demais elementos que estão na figura ao lado.

Demonstração:

Os elementos construídos são:

Figura 5 – Questão escolhida do teste 2

Demonstração esperada:

Os elementos construídos são: Círculo de centro E passando por D, semi-reta DE, ponto F interseção do círculo com a semi-reta.

1. $\Delta DEB \cong \Delta FEC$ *por LAL:* $\overline{DE} \cong \overline{FE}$ *(raios do círculo),* $D\hat{E}B \cong F\hat{E}C$ *(opostos pelo vértice) e* $\overline{BE} \cong \overline{CE}$ *(E ponto médio).*

Com isto, $B\hat{D}E \cong C\hat{F}E$ *tem-se a situação de alternos internos em relação à transversal* DF *com* $DB//FC$ *. E também,* $\overline{DB} \cong \overline{FC}$ *. Como* $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ *temos*

$\overline{FC} \cong \overline{AD}$.

Como $DB//FC$ *e* $\overline{FC} \cong \overline{AD} \Rightarrow ADFC$ *é paralelogramo* $\Rightarrow DF//AC$, *ou seja,* $DE//AC$

2. $\overline{DF} \cong \overline{AC}$ *(ADFC paralelogramo) e* $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{DF} \Rightarrow \overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. ■

A resolução da questão exige os quatro tipos de apreensões cognitivas, identificadas por Duval (ano 1995). Inicia com a *sequencial*, solicitando que o aluno explicite, na ordem correta, os demais elementos que compõem a figura. A *apreensão operatória* está na associação da figura proposta no teste à figura trabalhada em aula para demonstrar o resultado. Na *perceptiva*, cabe a identificação empírica dos objetos: o paralelogramo $ACFD$, os triângulos ECF e EBD. A articulação da figura com o enunciado, identificando as hipóteses, para resolução do exercício faz parte da apreensão *discursiva*.

O exercício de identificar quais elementos que não estão no enunciado da atividade e estão na figura evidencia a interpretação e clareza na identificação da hipótese do exercício. Esse formato de "passo a passo" da construção dos elementos da figura que o Geogebra proporciona é uma maneira lógica de estruturar os elementos necessários para demonstração.

Este exercício foi um teorema demonstrado em aula. Modificações na posição da figura foram feitas e também a interpretação a cerca dos passos de construção. Os objetos também foram renomeados, evitando assim uma cópia.

4.18 Teorema. O segmento com extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem a metade de seu comprimento.

Demonstração. Consideremos o triângulo ABC com D e E sendo os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.

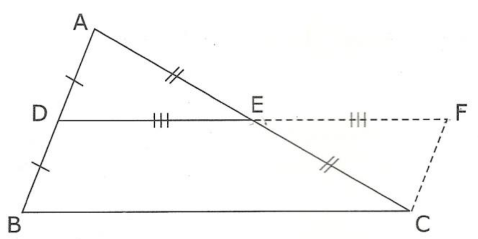
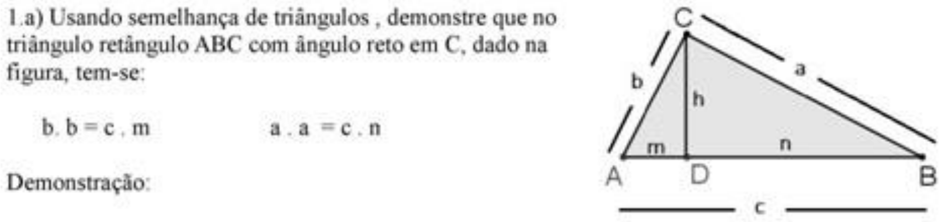


Figura 6 – Livro questão 2 página 61

Nessa última questão selecionada, o conteúdo abordado foi semelhança de triângulos, o objetivo era que os alunos fizessem modificações na figura a fim de identificar corretamente as razões.


1.a) Usando semelhança de triângulos , demonstre que no triângulo retângulo ABC com ângulo reto em C, dado na figura, tem-se:

b. b = c . m   a . a = c . n

Demonstração:

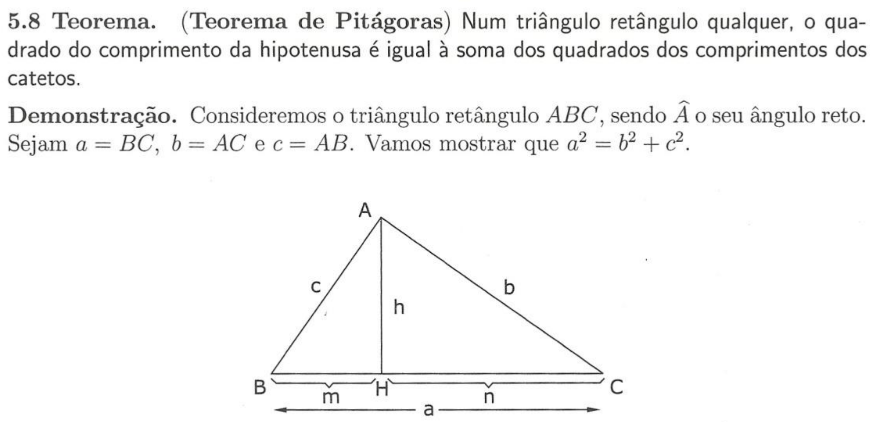
Figura 7 – Questão escolhida do teste 3

Demonstração esperada:

$\Delta ABC \sim \Delta ACD$ por AA $\Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = cm$

$\Delta ABC \sim \Delta CBD$ por AA$\Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{a}{n} \Rightarrow a^2 = cn$ ∎

As modificações para o teste foram apenas em relação ao nome das componentes da figura, o que também altera a componente discursiva. Uma parte específica da demonstração do Teorema de Pitágoras foi exigida.


5.8 Teorema. (**Teorema de Pitágoras**) Num triângulo retângulo qualquer, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Demonstração. Consideremos o triângulo retângulo ABC, sendo $\widehat{A}$ o seu ângulo reto. Sejam $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$. Vamos mostrar que $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 8 – Livro questão 3 página 78

A questão 3 avalia a capacidade de conversão e associação entre os registros de representação.

2.3.3 Análise da produção dos alunos

Na análise da produção vamos retomar aspectos teóricos tratadas na seção 2.2, especialmente os níveis de Van Hiele e os registros de representação de Duval. Através desta análise, queremos entender sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem da geometria. Para isto:

- Classificamos as resoluções usando os níveis de pensamento geométrico de Van Hiele
- Criamos critérios que organizam os erros recorrentes dos alunos.

Quanto à classificação segundo os níveis de Van Hiele, destacamos o nível 1 da análise e o nível 2 da dedução informal, já que os níveis 3 e 4 não são atingidos na disciplina e os alunos já avançaram do nível 0.

Em relação ao tratamento da componente figural, GRAVINA (2001 p. 91) observa que: “As dificuldades acentuam-se quando a *extensão do componente figural* envolve *reinterpretações* ou *reconstruções* de objetos geométricos em posição não familiar aos alunos, isto é, diferentes das prototípicas”.

Para classificar os tipos de erros levamos em conta a interpretação do desenho, a organização do pensamento nas demonstrações, analisar se os alunos distinguem as componentes conceitual e figural, se seus argumentos são empíricos ou dedutivos, e se diferenciam hipótese e tese.

Quanto à análise dos erros, trazemos uma manifestação de Duval:

> As dificuldades que surgem como obstáculos à progressão na aprendizagem se manifestam por meio de erros ou, ainda pior, por bloqueios. A análise de dificuldades é, obviamente, um dos pontos metodologicamente e teoricamente cruciais de pesquisas sobre o ensino da matemática. (Entrevista Duval RPEM, 2013)

As resoluções das questões selecionadas dos testes feitas pelos 9 alunos também serão analisadas de acordo com os critérios:

- Tipo 1 : interpretação errônea da figura.
- Tipo 2: não distinguir a componente conceitual da componente figural.
- Tipo 3: argumentação empírica.
- Tipo 4: não diferenciação entre hipótese e tese.

- Tipo 5: desconsideram a hipótese.
- Tipo 6: justificativa incompleta.

São critérios de erros, então adiantamos que quanto menos erros nas resoluções, menos “x” são marcados nas tabelas apresentadas na análise.

Para que fique mais clara a tabulação feita para cada uma das três questões, usando-se os critérios de análise elencados acima, para cada questão, de início apresentamos pelo menos duas resoluções de alunos e a correspondente indicação de critérios.

- Análise da Questão 1

Na resolução do aluno A, ele atribui propriedades à figura, baseado na componente figural. Há incoerência ao mostrar a congruência, pois ele utiliza o fato a ser mostrado como justificativa e também, desconsidera a componente discursiva, não levando em consideração a hipótese do exercício. Exemplifica os erros dos tipos 2, 3, 4 e 5 de acordo com os critérios de análise.

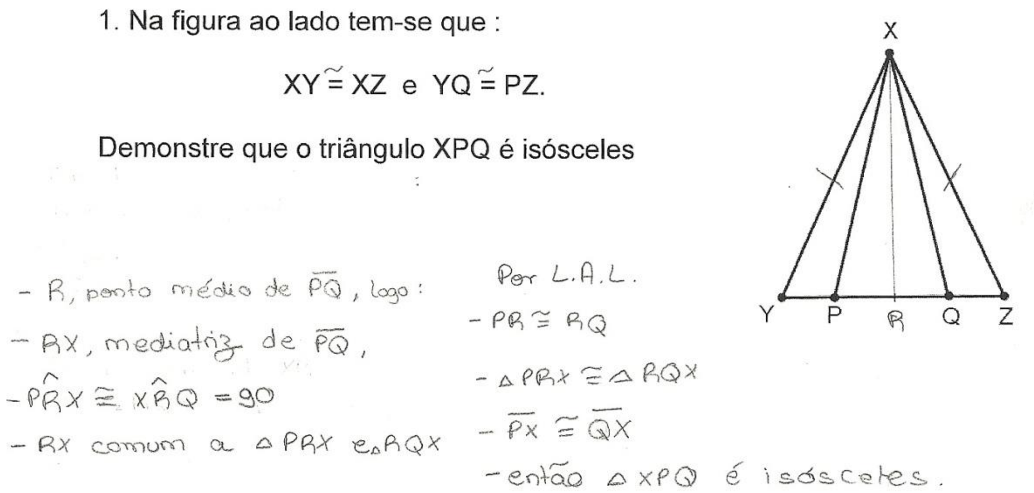


Figura 9 – Resolução questão 1 aluno A

Já a resolução do aluno F demonstra falta de justificativa nos argumentos, não entendendo a necessidade de se argumentar com teoremas para validar os fatos que precisam ser demonstrados até concluir a tese. Exemplifica o critério 6.

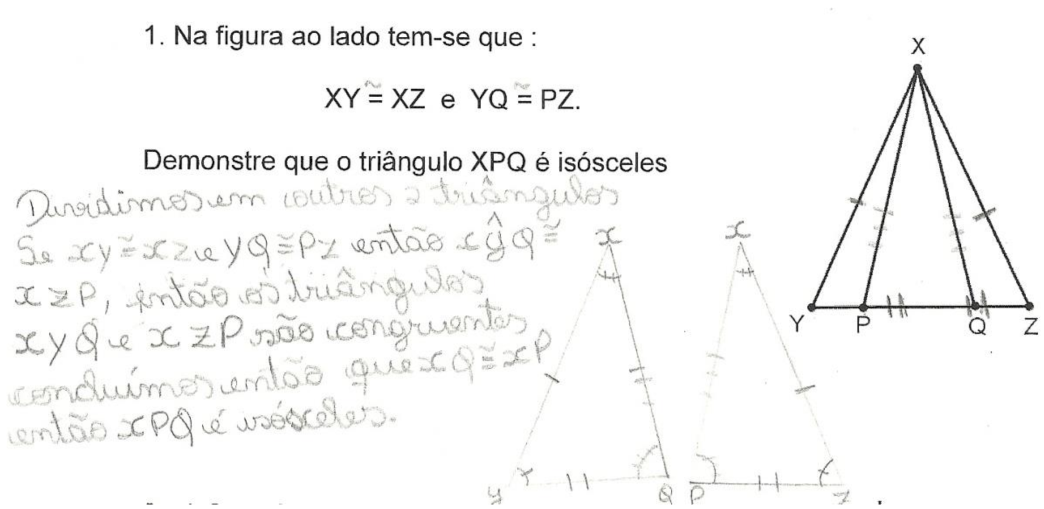


Figura 10 – Resolução questão 1 aluno F

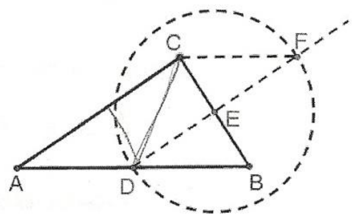
Tabela 1 – Questão1: tabulação do nível de Van Hiele e tipo de erros

Aluno	Nível de Van Hiele	Tipos de erros					
		1	2	3	4	5	6
A	1		x	x	x	x	
B	2						
C	1			x			
D	1			x			
E	2						
F	1						x
G	1		x	x		x	
H	2						
I	2						

- Análise da Questão 2

A resolução do aluno C exemplifica os erros dos tipos 1, 2, 4 e 5. O passo a passo elaborado pelo aluno não respeita a ordem correta para completar a construção, hipóteses necessárias à demonstração surgem na componente figural. Como argumento, o aluno utiliza o fato a ser provado. A proposta do exercício é demonstrar o teorema da base média, o que não foi compreendido pelo aluno. Ele nem sequer utiliza os outros elementos construídos na componente figural ou a hipótese da componente discursiva do exercício.

2. No triângulo ABC , os pontos D e E são pontos médios, respectivamente , dos lados BA e BC. Demonstre que :
a) DE é paralelo à AC
b) medida de DE = (1 / 2) . medida de AC



Inicie a demonstração dizendo sobre os demais elementos que estão na figura ao lado.

Demonstração:

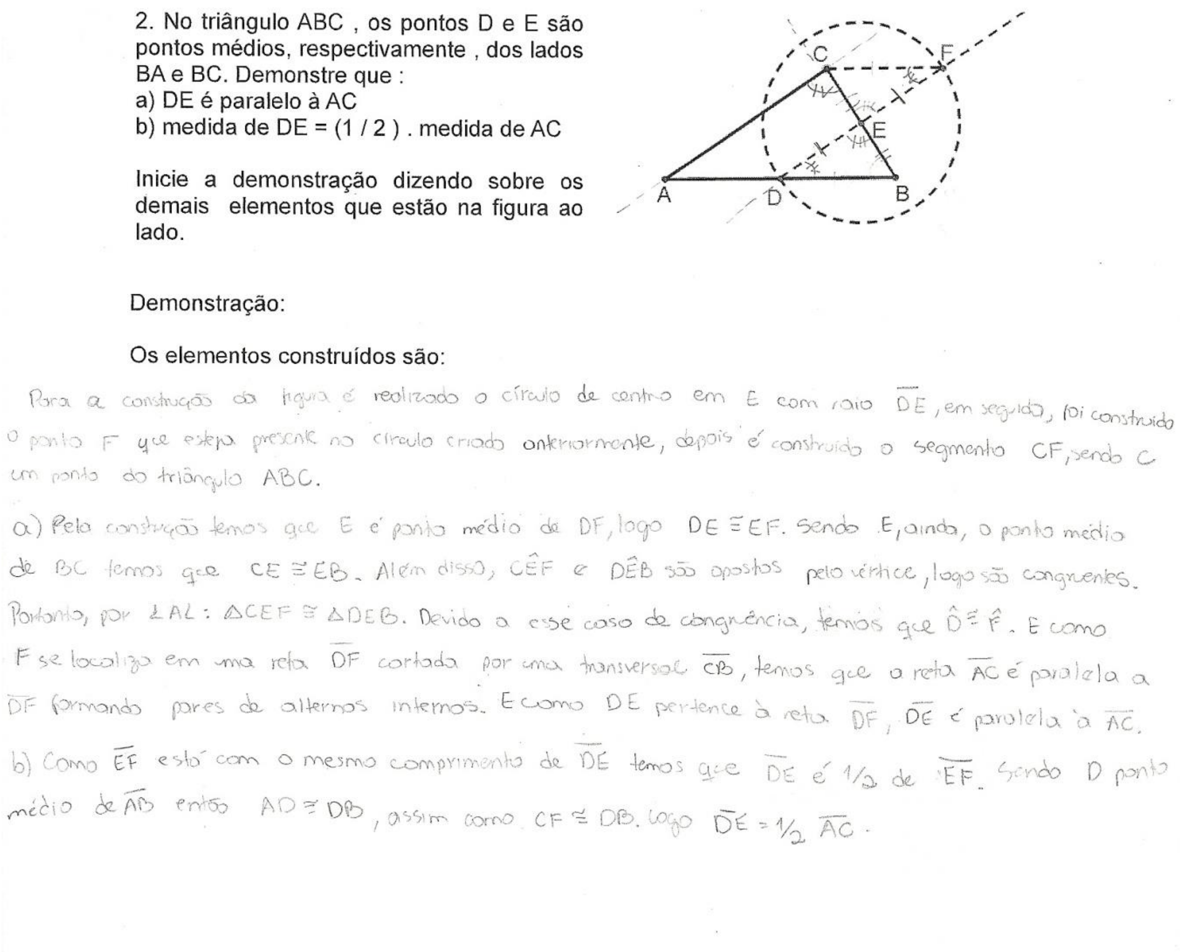
Os elementos construídos são:
Compasso (círculo) de raio DE com centro em E
Segmento EF; Segmento CF

(a) DE é paralelo a AC pois ele corta nos ponto médios dos lados AB e CD. E os pontos ACFD formam um paralelo-gramo logo DE é paralelo a AC.

(b) Pelo teorema 3.18 sabemos que DE é metade de AC pois ACFD forma um paralelogramo, onde AD ≅ CF e paralelo e AC ≅ DF e paralelos também logo se E é o centro do círculo de diâmetro AC então DE é metade de AC.

Figura 11 – Resolução questão 2 aluno C

A argumentação do aluno D é baseada em fatos não demonstrados e a justificativa está incompleta, pois pula etapas, não respeitando a sequência lógica da demonstração.


2. No triângulo ABC , os pontos D e E são pontos médios, respectivamente , dos lados BA e BC. Demonstre que :
a) DE é paralelo à AC
b) medida de DE = (1 / 2) . medida de AC

Inicie a demonstração dizendo sobre os demais elementos que estão na figura ao lado.

Demonstração:

Os elementos construídos são:

Para a construção da figura é realizado o círculo de centro em E com raio $\overline{DE}$, em seguida, foi construído o ponto F que esteja presente no círculo criado anteriormente, depois é construído o segmento CF, sendo C um ponto do triângulo ABC.

a) Pela construção temos que E é ponto médio de DF, logo DE ≅ EF. Sendo E, ainda, o ponto médio de BC temos que CE ≅ EB. Além disso, $C\hat{E}F$ e $D\hat{E}B$ são opostos pelo vértice, logo são congruentes. Portanto, por LAL: $\triangle CEF \cong \triangle DEB$. Devido a esse caso de congruência, temos que $\hat{D} \cong \hat{F}$. E como F se localiza em uma reta $\overline{DF}$ cortada por uma transversal $\overline{CB}$, temos que a reta $\overline{AC}$ é paralela a $\overline{DF}$ formando pares de alternos internos. E como DE pertence à reta $\overline{DF}$, $\overline{DE}$ é paralela à $\overline{AC}$.

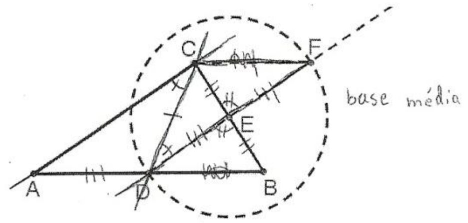
b) Como $\overline{EF}$ está com o mesmo comprimento de $\overline{DE}$ temos que $\overline{DE}$ é 1/2 de $\overline{EF}$. Sendo D ponto médio de $\overline{AB}$ então AD ≅ DB, assim como CF ≅ DB. Logo $\overline{DE} = 1/2\ \overline{AC}$.

Figura 12 – Resolução questão 2 aluno D

Já o aluno I, acrescenta elementos na figura, tentando deixá-la semelhante à do livro, que foi discutida. Ele utiliza a tese como hipótese, desconsiderando os outros elementos. Baseado em fatos presentes na figura empiricamente, não considerados hipótese.

2. No triângulo ABC , os pontos D e E são pontos médios, respectivamente , dos lados BA e BC. Demonstre que :
a) DE é paralelo à AC
b) medida de DE = (1 / 2) . medida de AC

Inicie a demonstração dizendo sobre os demais elementos que estão na figura ao lado.



Demonstração:

Os elementos construídos são:
1) semirreta com origem em D, passando por E;
2) círculo com centro em E passando por D;
3) F ponto de intersecção da semirreta com o círculo;
4) segmento $\overline{CF}$.

a) DE // AC

$D\hat{C}A \cong C\hat{D}F$, logo DE // AC. Como é paralelogramo ACFD. AD ≅ CF.

b) $\Delta ECF \cong \Delta EBD$ por LAL $\begin{cases} CE \cong BE \\ C\hat{E}F \cong D\hat{E}B \\ DE \cong EF \end{cases}$

Logo . . .

Figura 13 – Resolução questão 2 aluno I

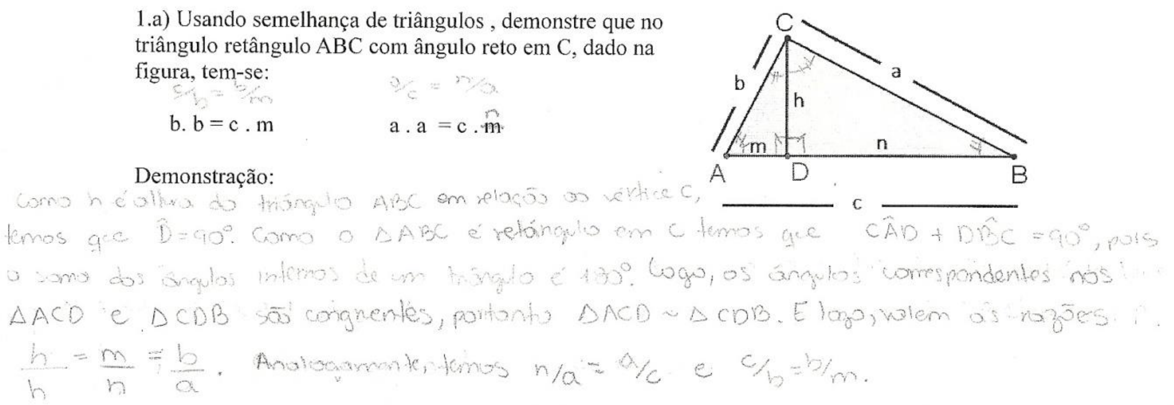
Nesta questão, ocorreram bastantes erros. Ela exigia um pensamento do nível 2, de acordo com Van Hiele. Observamos que, do exercício anterior para esse, alguns alunos apresentam a resolução classificada em um nível dos Van Hiele inferior. Isto devido à dificuldade maior em relação ao que foi exigido no problema.

Tabela 2 – Questão2: tabulação do nível de Van Hiele e tipo de erros

Aluno	Nível de Van Hiele	Tipos de erros					
		1	2	3	4	5	6
A	2						x
B	2						
C	1	x	x		x	x	
D	1	x		x			x
E	1	x	x		x	x	
F	1		x		x	x	
G	2						x
H	1	x	x		x	x	
I	1		x	x	x	x	x

- Análise da Questão 3

Novamente o aluno D pula etapas da demonstração, não há inverdades na justificativa, mas baseia-se em fatos empíricos.


1.a) Usando semelhança de triângulos , demonstre que no triângulo retângulo ABC com ângulo reto em C, dado na figura, tem-se:

$c/b = b/m$ $\quad$ $a/c = n/a$

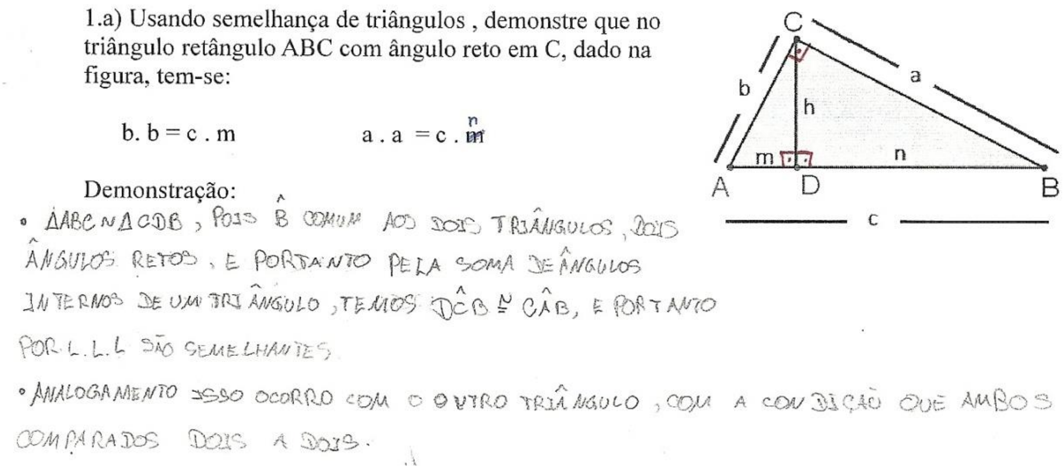
$b.\ b = c\ .\ m$ $\qquad$ $a\ .\ a\ = c\ .\ \cancel{m}\ n$

Demonstração:

Como h é altura do triângulo ABC em relação ao vértice C, temos que $\hat{D} = 90°$. Como o ΔABC é retângulo em C temos que $C\hat{A}D + D\hat{B}C = 90°$, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Logo, os ângulos correspondentes nos ΔACD e ΔCDB são congruentes, portanto $\Delta ACD \sim \Delta CDB$. E logo, valem as razões $\frac{h}{h} = \frac{m}{h} = \frac{b}{a}$. Analogamente, temos $n/a = a/c$ e $c/b = b/m$.

Figura 14 – Resolução questão 3 aluno D

O aluno E ainda não tinha um domínio discursivo do novo conteúdo, o critério para justificativa da semelhança é incoerente com os argumentos apresentados anteriormente. O aluno também não conclui a tese.


1.a) Usando semelhança de triângulos , demonstre que no triângulo retângulo ABC com ângulo reto em C, dado na figura, tem-se:

$b.\ b = c\ .\ m$ $\qquad$ $a\ .\ a\ = c\ .\ \cancel{m}\ n$

Demonstração:

- $\Delta ABC \sim \Delta CDB$, POIS $\hat{B}$ COMUM AOS DOIS TRIÂNGULOS, DOIS ÂNGULOS RETOS, E PORTANTO PELA SOMA DE ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO, TEMOS $D\hat{C}B \cong C\hat{A}B$, E PORTANTO POR L.L.L SÃO SEMELHANTES
- ANALOGAMENTO ISSO OCORRO COM O OUTRO TRIÂNGULO, COM A CONDIÇÃO QUE AMBOS COMPARADOS DOIS A DOIS.

Figura 15 – Resolução questão 3 aluno E

Nesta questão, apenas os dois alunos tiveram erros na resolução.

Tabela 3 – Questão3: tabulação do nível de Van Hiele e tipo de erros

Aluno	Nível de Van Hiele	Tipos de erros					
		1	2	3	4	5	6
A	2						
B	2						
C	2						
D	1			x			x
E	1		x			x	
F	2						
G	2						
H	2						
I	2						

Observamos que, depois de passadas mais de 11 semanas de aulas até o teste 3, a aprendizagem dos alunos sobre a natureza do pensamento geométrico estava bem mais desenvolvida e eles tinham mais clareza nos seus argumentos e suas interpretações autônomas desenvolvidas. Realizavam a conversão de registros de representação com mais naturalidade.

Os primeiros testes aplicados na disciplina foram destacados, pois neles entendemos melhor como os alunos egressos do ensino médio aprendem geometria. Ressaltamos que os alunos têm, em outras disciplinas, bastante contato com uma matemática dedutiva, amadurecem seus pensamentos durante o período não só em Geometria I.

Este estudo nos serviu de motivação para levar aos alunos do ensino médio uma maneira diferente de pensar matemática.

3 TRIGONOMETRIA NA ESCOLA: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Após o acompanhamento da disciplina de Geometria I e identificação dos principais erros e dificuldades presentados pelos alunos egressos do Ensino Médio, sentimos a necessidade de trabalhar a matemática com os alunos da escola de maneira argumentativa, na sua *face oculta*. Duval explica o que ele caracteriza como *face exposta* da matemática e *face oculta* da matemática:

> Existe aquela que eu chamaria de *face exposta*. Ela corresponde aos objetos matemáticos (números, funções, equações, polígonos, poliedros, etc.), às suas propriedades, às fórmulas e algoritmos aos quais eles dão origem, às demonstrações. (...) A outra face é a *face oculta*. Ela corresponde aos gestos intelectuais que constituem o caráter cognitivo e epistemológico específicos da matemática. Eu a chamo de face “oculta” porque ela não é direta e imediatamente perceptível em relação ao que observamos do trabalho dos alunos (...) (RPEM; 2013; p. 17)

A prática compõe parte fundamental da disciplina Estágio em Educação Matemática III, obrigatória no último semestre do curso de Licenciatura em Matemática. Inicialmente, um projeto do tipo oficina extraclasse seria elaborado e os alunos de qualquer um dos três anos do Ensino Médio seriam convidados a participar. O conteúdo abordado seria Geometria, trabalhando com definições e conceitos básicos através do uso da Geometria Dinâmica com atividades do tipo caixa-preta.

Ao definir a escola para realizar o estágio, assim como a turma, teríamos que trabalhar o conteúdo de Trigonometria com alunos do 2º ano do Ensino Médio. Decidimos que a concepção dessa experiência abordaria o conteúdo de Trigonometria explorando conceitos de Geometria, trazendo os conteúdos de maneira argumentativa e dedutiva, mostrando este tipo de raciocínio lógico aos alunos.

Optamos pela mudança com o intuito de otimizar as atividades a serem realizadas no semestre e também para evitar alguns possíveis problemas como falta de alunos para realização de uma oficina no contraturno de aula. Elaborar a sequência de atividades no formato de aula, ensinando um conteúdo novo aos alunos, é mais desafiador.

A maneira como a Geometria vem sendo trabalhada na escola envolve cálculos e contas, não trabalhando com os raciocínios presentes sem ao menos contextualizar com a realidade. Muitas vezes este conteúdo não é considerado fundamental e é abordado muito rapidamente, quando sobra tempo.

O livro didático adotado na escola apresenta o conteúdo de Trigonometria iniciando pelo círculo trigonométrico, escolhemos fazer um estudo de trigonometria em triângulos retângulos.

3.1 OS OBJETIVOS E A ORGANIZAÇÃO

Nosso objetivo é trabalhar com a matemática na escola, de forma a desenvolver a *matemática oculta* do conteúdo de trigonometria.

> Formas de demonstração apropriadas ao desenvolvimento dos alunos – capacidades e estratégias para construir e apresentar demonstrações e a *propensão* para procurar uma demonstração – podem e *devem* ser introduzidas ao longo dos anos que antecedem os cursos especializados. (GOLDENBERG; 1998a)

O autor defende um currículo para matemática escolar baseado no que ele chama de *"hábitos de pensamento"* ele afirma que: "a matemática não *são* os conteúdos, mas o *raciocínio* que descobre, reúne e dá sentido a estes conteúdos; a matemática é (em parte) um modo de pensar, um conjunto de "hábitos de pensamento"". (GOLDENBERG; 1998a)

Escolhemos trabalhar com o conteúdo de trigonometria com ênfase na argumentação, diferentemente do que propõem os currículos de matemática que são baseados nos conteúdos. Pretendemos mostrar na sequência didática, que aumentando o nível de dificuldade das questões o conteúdo de trigonometria da conta de resolvê-las.

Segundo HERSHKOWITZ 1992 p.3:

> Existem dois aspectos principais clássicos do ensino e aprendizagem da Geometria: a visão da Geometria como a ciência do espaço e a visão da Geometria como uma estrutura lógica, onde a Geometria é o ambiente no qual o aprendiz pode desenvolver suas impressões sobre a estrutura matemática (Freudenthal, 1973). Num estágio mais avançado, este ambiente geométrico adquire um significado mais amplo, sem a necessidade de um ambiente real (concreto) que o fundamente.

Este estágio avançado, é o nível que se trabalha na disciplina de Geometria I, entendemos que os dois aspectos principais destacados inicialmente devem ser abordados na Escola Básica.

Trigonometria é um conteúdo com o qual conseguimos trabalhar com um *modo de pensar* diferenciado, buscando nos conceitos de geometria a resolução de problemas. A maneira como propomos as atividades busca compreensão das definições e conceitos de Trigonometria e também o desenvolvimento de “hábitos de pensamento” pelos alunos.

De encontro com a teoria de Duval (RPEM, 2013, p.23)

> O controle dos gestos intelectuais específicos da atividade matemática deveria ser um objetivo global de aquisição, e até mesmo o principal, pois, sem ele, é impossível aplicar conhecimentos matemáticos em situações totalmente diferentes daquelas vistas em sala de aula. E no trabalho em sala, ou seja, durante um ano escolar, a consciência desses gestos intelectuais também deveria ser um dos objetivos locais de aquisição, e até mesmo *um objetivo prioritário, pois são propedêuticos a toda atividade de resolução de problema*.

O que o autor chama de gestos intelectuais (matemática oculta) são os hábitos de pensamento propostos por Goldenberg. Ambos defendem que se trabalhe matemática com enfoque na argumentação, na justificativa. Desenvolver estas habilidades é também importante pra situações cotidianas da vida do aluno.

3.2 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nessa seção a sequência de atividades será apresentada e está dividida em encontros, os quais estão agrupados de acordo com o conteúdo a ser desenvolvido. Cada período de aula teve 50 minutos. Em todas as aulas o uso do GeoGebra pela professora é essencial, com o uso de um projetor multimídia na sala de aula. Os arquivos GeoGebra previamente criados para utilização em aula serão mostrados e explicados na seção seguinte. O software será utilizado pela professora como uma ferramenta auxiliar fundamental na modelagem das situações problema.

As intervenções da professora estão na maneira de conduzir as atividades. Para resolução das atividades, é exigido conhecimento de Geometria plana e empiricamente de Geometria Projetiva. Buscamos os argumentos para as justificativas das soluções nesses conhecimentos de geometria. O objetivo principal da proposta é a aprendizagem de Trigonometria, o foco não está nos conteúdos de Geometria. A abordagem destes tópicos é fundamental para explicar as resoluções dos problemas motivadores. Como tratado no capítulo anterior, é importante que os alunos saibam justificar matematicamente suas soluções, quase que demonstrações sem formalidade. Por trás deste pensamento matemático existem as ideias de coerência e coesão, mostrando clareza nos argumentos.

3.2.1 Encontros 1, 2 e 3

Tempo de aula: 5 períodos.

Objetivos: motivar e introduzir o conteúdo de Trigonometria através da Geometria utilizando semelhança de triângulos e a proporcionalidade entre as medidas dos lados.

Metodologia:

A abordagem ao conteúdo de Trigonometria será através da resolução de um problema motivador que exige modelagem da situação. As resoluções serão justificadas através de definições e conceitos de Geometria. Nesse primeiro encontro de dois períodos, a resolução será conduzida pela professora, utilizando projetor multimídia e construções feitas no GeoGebra modelando a situação. Duas versões de solução serão apresentadas aos alunos.

Problema motivador: Como medir a altura de um poste?

Solução 1: Utilizando um instrumento de medida de distância e outro de ângulo de visada.

Conhecendo a distância do observador ao poste, o qual visualiza a extremidade a um ângulo de visada especial.

Inicialmente, desenhamos o poste em um lugar plano, para visualizar a situação. Observamos que entre o poste e o chão há um ângulo de 90°, ou seja, são perpendiculares.

Num arquivo GeoGebra, através de um ponto móvel que aumenta/diminui a distância do observador ao poste é possível analisar a situação. Um recurso interessante que o GeoGebra traz para esta resolução é mostrar a amplitude do ângulo em graus. O dinamismo que o software proporciona permite uma análise e um melhor entendimento do problema.

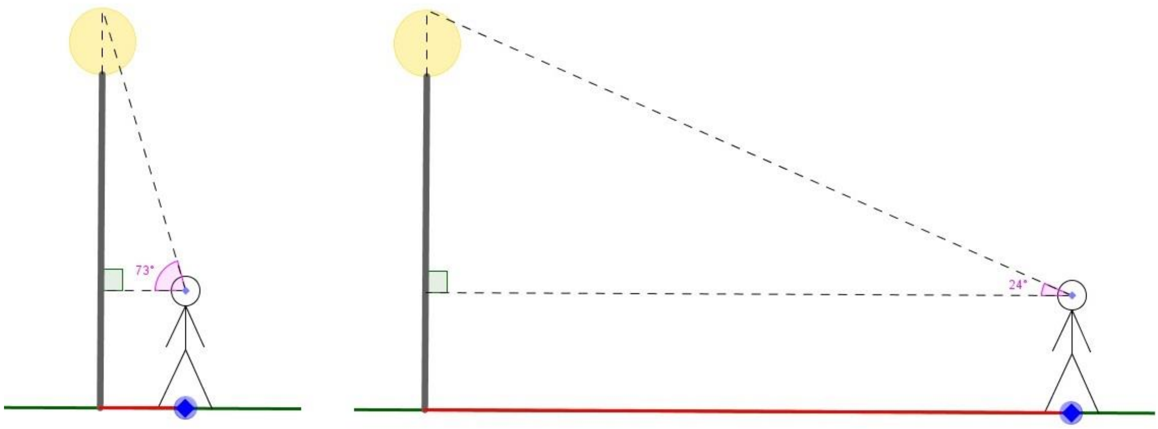


Figura 16 – Variação do ângulo de visada

Partindo do poste, caminhamos, contando os passos, até encontrar um ângulo de visada de 45° em relação à extremidade do poste. Assim, obtemos um triângulo retângulo e isósceles. Somando a distância caminhada e a altura da pessoa, temos a altura do poste.

Assim, ao encontrarmos um ângulo de visada de 45°, conseguimos a primeira versão de solução.

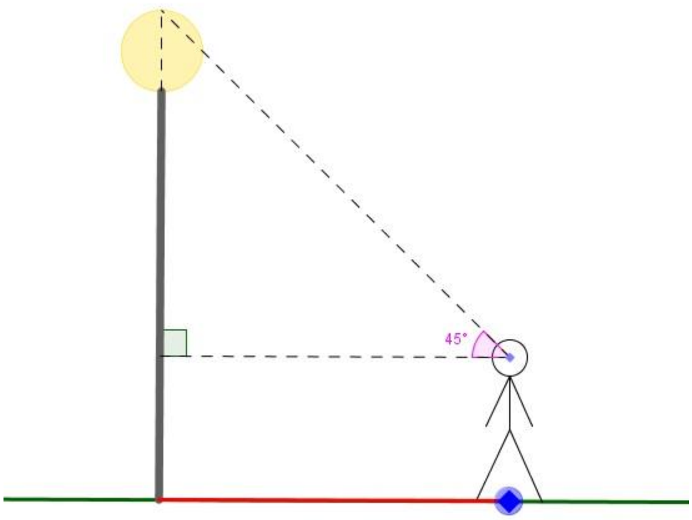


Figura 17 – Modelagem ângulo de visada de 45°

Os conhecimentos de Geometria necessários nesta solução são: a) a definição de ângulo: duas semi-retas com mesma origem; b) perpendicularidade entre retas ou segmentos; c) medida de ângulo, em graus, utilizando um transferidor ou um teodolito: é a abertura entre duas semi-retas; d) ângulo de visada; e) quadrado: polígono de 4 lados que possui os ângulos internos retos e os lados congruentes; f) triângulo isósceles: possui dois lados congruentes, e consequentemente, os ângulos opostos a estes lados têm a mesma medida; g) soma dos ângulos internos de um triângulo: é um ângulo raso (180°).

Aplicativos para tablets ou celulares também calculam a amplitude de ângulos, realizando a função do transferidor ou teodolito.

Esta atividade será conduzida pela professora de acordo com as fases de aprendizado proposta pelos Van Hiele, a maior intervenção da professora será a cerca dos conteúdos de geometria tomados como pré-requisitos. A solução seguinte também está enquadrada nessas fases, criando em sala de aula um ambiente de investigação.

Solução 2: Utilizando apenas um instrumento de medida de comprimento.

Com a medida da sombra, constrói-se uma maquete. Assim, teremos dois triângulos semelhantes, conhecendo a razão de semelhança obtida através da medida dos comprimentos dos lados.

Para a segunda solução, a modelagem no GeoGebra traz, além da precisão na identificação dos triângulos semelhantes, a análise de acordo com diferentes posições do sol, criando diferentes tamanhos de sombra. Isto mostra que o tamanho do poste independe dos tamanhos dos triângulos identificados, e sim da razão de semelhança escolhida. No arquivo, o observador não foi construído, propositalmente, pois assim enfatizamos que o observador era quem estava fazendo as medições.

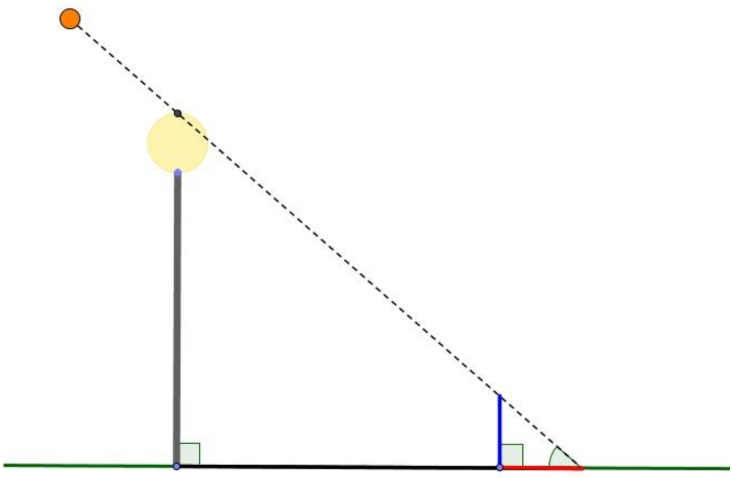


Figura 18 – Maquete

Os conhecimentos sobre Geometria exigidos na resolução são: a) triângulo retângulo; b) semelhança de triângulos (Dois triângulos são semelhantes se seus lados estão em proporção ou se os ângulos internos têm a mesma amplitude); c) Teorema de Tales (versão para triângulos): Uma reta r é paralela a um dos lados de um triângulo qualquer se, e somente se, r divide os outros dois lados em partes proporcionais.

Observamos que, em triângulos retângulos semelhantes, as razões entre os lados não mudam. E também, que em triângulos retângulos com ângulos diferentes, as razões se alteram, dependendo dos ângulos.

Os encontros 2 e 3 dedicam-se à lista de exercícios e resolução. Problemas que exijam raciocínio semelhante aos apresentados pela professora serão propostos aos alunos. Também, exercícios introdutórios envolvendo a tangente serão discutidos.

Colégio Estadual Marechal Floriano Peixoto
Matemática e suas Tecnologias – 2º ano Ensino Médio
Professoras estagiárias: Emanuelle e Samanta

Nome: ____ Turma: _______ Data: ___/10/2013

Lista de Exercícios

1. Você está na margem de um rio e quer calcular a largura deste. Crie duas versões de resolução inspiradas nas anteriores. Considere um rio com as margens paralelas. Faça as escolhas convenientes e escreva seus raciocínios detalhadamente.

2. Uma rampa A provoca um deslocamento horizontal de 4 metros e deslocamento vertical de 3 metros. Outra rampa B provoca deslocamentos horizontal e vertical de 7 metros e 5 metros, respectivamente.
Como saber qual das duas rampas é a mais íngreme? Escreva seu raciocínio.

3. Você tem as seguintes informações sobre uma determinada rampa:

Ponto	Deslocamento Horizontal	Deslocamento Vertical
A	8 m	4 m
B	4 m	
C		1 m
D	6 m	
E		5 m
F		10 m

a) Como você entende a tabela?

b) Complete a tabela.

c) Desenhe a rampa e faça as demarcações das posições dos pontos.

d) Observe o comportamento da razão entre o deslocamento vertical e o deslocamento horizontal. Esta razão é chamada de inclinação da rampa. Usando transferidor estime o ângulo de inclinação da rampa. Calcule a inclinação da rampa.

4. Desenhe uma rampa de inclinação $\frac{1}{4}$. Descreva os deslocamentos horizontais e verticais desta rampa.

5. Segundo as normas da ABNT para acessibilidade de cadeirantes, rampas curvas devem ter inclinação máxima de 8, 33 %. Dê um exemplo de medidas possíveis para uma rampa destas.

Figura 19 – Lista 1 de exercícios

Após os alunos realizarem a lista, os exercícios serão resolvidos com o auxílio do GeoGebra.

O exercício 1 da lista: “Como medir a largura de um rio?” Pedia aos alunos que realizassem duas versões de solução inspirados nas do Encontro 1, um desenho era necessário para que eles identificassem a mesma estratégia de solução nos diferentes contextos. O exercício trazia a hipótese das margens serem paralelas e algumas escolhas deveriam ser feitas, como por exemplo, um ponto fixo para construção do triângulo retângulo.

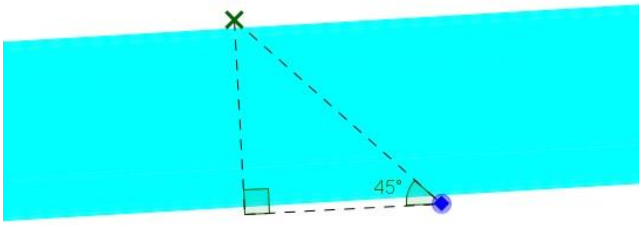


Figura 20 – Modelagem largura do rio

No exercício 5, vários exemplos podem aparecer, já que encontramos várias rampas de acessibilidade para cadeirantes no nosso cotidiano. Podemos também, discutir a necessidade de curvas na rampa, devido ao espaço disponível para construção.

3.2.2 Encontros 4 e 5

Tempo de aula: 3 períodos.

Objetivos: definir as razões seno, cosseno e tangente.

Metodologia:

Os encontros 4 e 5 dedicam-se às definições. Uma terceira resolução do problema utilizando a tangente servirá de motivação para a definição das razões especiais. O objetivo principal é que os alunos entendam que as razões no triângulo retângulo estão relacionadas com o ângulo.

Solução 3:

Conhecendo a distância do observador ao poste e um ângulo de visada qualquer?

Para resolução deste exercício, precisamos definir algumas razões importantes.

Razões importantes

Consideremos um ângulo agudo α, formado a partir das semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, com origem em O. Sejam os pontos A_1, A_2 pertencentes à semi-reta $\overrightarrow{OA}$ e os pontos B_1, B_2 pertencentes à semi-reta $\overrightarrow{OB}$ tais que os segmentos A_1B_1, A_2B_2 sejam perpendiculares à $\overrightarrow{OB}$ e o segmento A_1B_2 perpendicular a $\overrightarrow{OA}$. Observamos que os triângulos retângulos formados, OA_1B_1, OB_2A_1 e OA_2B_2 são semelhantes, pois têm os mesmos ângulos internos. Assim, as razões entre seus lados correspondentes se mantém, dependendo apenas do ângulo α, e não dos comprimentos. Estas razões recebem nomes especiais, são elas:

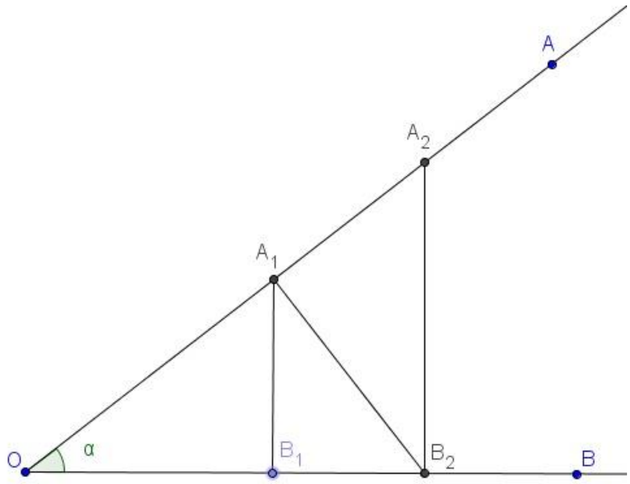


Figura 21 – Construção triângulos semelhantes

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_1B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = sen\ \alpha$$

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = cos\ \alpha$$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_1B_2}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = tg\ \alpha$$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos \alpha}$$

Voltando à resolução do item da solução 3, temos que através da tangente do ângulo encontramos a medida da altura do poste, os elementos conhecidos estão destacados em azul.

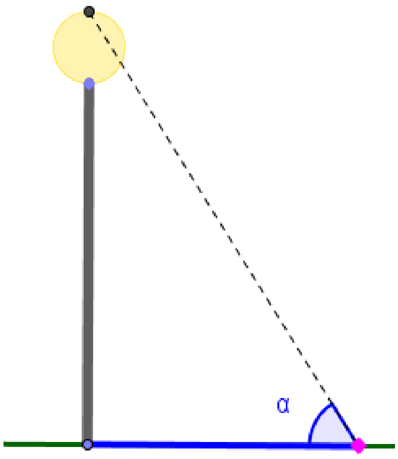


Figura 22 – Triângulo retângulo

3.2.3 Encontros 6, 7 e 8

Tempo de aula: 4 períodos.

Objetivos: resolver problemas usando as razões trigonométricas e cálculo das razões trigonométricas correspondentes aos ângulos de 30°, 45° e 60°.

Metodologia:

Selecionamos um problema para resolver em conjunto com os alunos para mostrar a importância de se conhecer alguns valores das razões trigonométricas. No primeiro encontro, de um período, foi resolvido um problema, nos dois encontros seguintes nos dedicamos ao cálculo das razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 60° e 45°.

Um exemplo mostrando a importância de se conhecer alguns valores das razões especiais será calcular o raio da Terra. Este problema será discutido em conjunto com a turma.

Quais as vantagens de se conhecer os valores de seno, cosseno e tangente de alguns ângulos?

Exercício:

Do alto de um prédio de 10 andares, um observador mede um ângulo de 88° entre o prédio e a linha do horizonte. Sabe-se que cada andar tem 3 metros de altura. Inspirado na figura, você consegue uma estratégia para calcular o raio da Terra? Explique seu raciocínio.

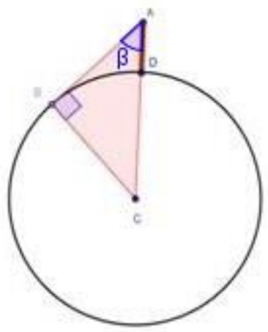


Figura 23 – Modelagem cálculo raio da Terra

Solução para um caso geral:

Inicialmente, chamamos atenção para a falta de proporção entre o prédio e a Terra na figura.

Para medir o raio R da Terra, sobe-se em um prédio de altura conhecida h e mede-se o ângulo β do prédio com a linha do horizonte.

$$\frac{R}{R+h} = sen\,\beta$$

Se conhecermos as medidas de h e β, que são acessíveis, e o valor do sen β consegue-se aproximar a medida do raio da Terra. Isolando R:

$$R = \frac{sen\,\beta}{1 - sen\,\beta} \cdot h$$

Com as informações do enunciado, e utilizando que $sen\,88° = 0{,}999$ chegamos que $R = 29{,}970\ km$. Em uma pesquisa rápida na internet, encontramos a medida aproximada do raio da Terra de $6378{,}1\ km$. Ou seja, o erro foi muito expressivo. Para obtermos precisão maior na resposta, o ângulo deve ser de aproximadamente $89{,}82°$, com $sen\,89{,}82° = 0{,}999995065201$.

A proposta é que os alunos se sintam intrigados e motivados a investigar qual seria o ângulo correto para que o erro na resposta seja menor e compreendam que quando se tratam de medidas muito grandes, as precisões nas casas decimais diminuem o erro cometido nos cálculos.

Nos encontros 7 e 8 será feito o cálculo para valores das razões trigonométricas de ângulos especiais.

Por que alguns ângulos em especial?

Os ângulos de 30°, 45° e 60° são considerados especiais, pois conseguimos calcular precisamente os valores de seno, cosseno e tangente através de construções do triângulo equilátero ou quadrado. Observamos que com outras relações trigonométricas e um pouco mais de cálculo se pode ampliar esta tabela de valores.

Construção para cálculo dos valores das razões trigonométricas para o ângulo de 30°:

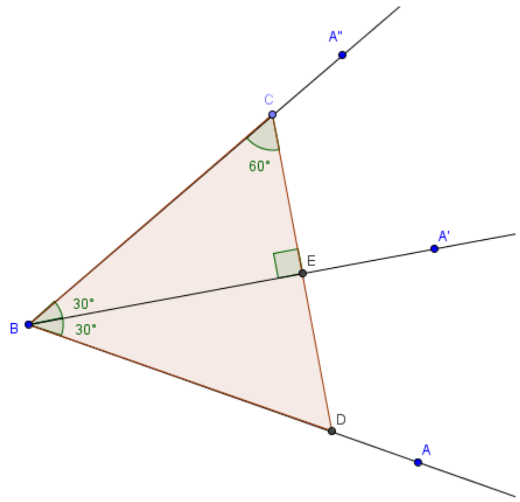


Figura 24 – Construção dos ângulos de 30° e 60°

Construímos primeiro um ângulo de 30°, reflete-o em torno de uma das semirretas e obtém-se um ângulo de 60°. Nesta mesma semirreta, construímos uma reta perpendicular e marcamos os pontos de interseção com as outras semirretas. Assim, obtemos dois triângulos retângulos que formam um triângulo equilátero. Observe que o cateto menor de cada triângulo retângulo mede metade da hipotenusa. Se a hipotenusa mede x, o cateto oposto ao ângulo de 30° mede $\frac{x}{2}$. Assim,

$$sen\ 30° = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

Para cálculo do cosseno de 30°, precisamos da medida do cateto maior c. Aplicamos o Teorema de Pitágoras e obtemos:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + c^2$$

$$c = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Com isto,

$$\cos 30° = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para a tangente de 30°:

$$tg\ 30° = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Agora, para um ângulo de 60°, como já temos um triângulo retângulo com um ângulo de 60° na construção anterior, deduzimos os valores de seno, cosseno e tangente para 60°.

$$sen\ 60° = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$tg\ 60° = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$

E o ângulo de 45°, como construir?

Partimos da construção de um quadrado, e traçamos uma das diagonais, dividindo o quadrado em dois triângulos que são retângulos e isósceles simultaneamente.

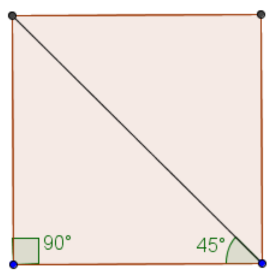


Figura 25 – Construção do ângulo de 45°

Com o lado do quadrado medindo a, a diagonal d mede:

$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$d = a\sqrt{2}$$

Dedução dos valores de seno, cosseno e tangente para o ângulo de 45°:

$$sen\ 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$$

$$tg\ 45° = \frac{a}{a} = 1$$

Assim, completaremos uma tabela com os valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30°, 45° e 60°.

3.2.4 Encontros 9, 10, 11

Tempo de aula: 3 encontros totalizando 5 períodos.

Metodologia: resolução da lista de exercícios.

Quanto aos exercícios da lista, propomos atividades parecidas com as trabalhadas em aula e alguns problemas que precisam ser resolvidos com as razões trigonométricas. Os encontros 9 e 10 serão dedicados à resolução da lista pelos alunos com auxílio da professora. No encontro 11 serão resolvidos os exercícios elencados pelos alunos como os mais difíceis, esta correção será a preparação para um teste.

COLÉGIO ESTADUAL MARECHAL FLORIANO PEIXOTO – Profª Márcia Travi – Estagiárias Emanuelle e Samanta

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – 2º ANO/ EM

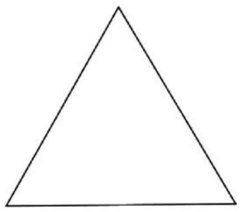
Nome:________________________________Turma:________Data:__________

Lista de exercícios trigonometria

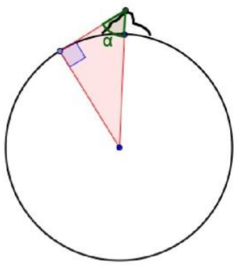
	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

1. Descreva uma solução para calcular a altura de uma árvore.

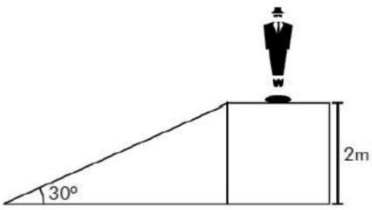
2. Encontre o valor que falta na tabela utilizando o triângulo equilátero abaixo.



3. Sabe-se que a colina mais alta de Marte mede 100 metros. Do alto desta colina, um astronauta mede o ângulo de 89,56° indicado na figura. Calcule uma estimativa do raio de Marte.



4. Para permitir o aceso a um monumento que está em um pedestal de 2m de altura, vai ser construída uma rampa com inclinação de 30° com o solo, conforme a ilustração. O comprimento da rampa será igual a:



a) $\sqrt{2}$ m

b) $\sqrt{3}$ m

c) 2 m

d) 4 m

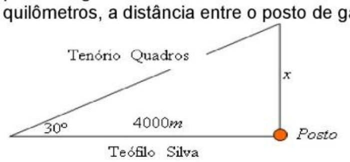
e) $4\sqrt{2}$ m

5. (UFPI) Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo, um ângulo de 30º (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1 000 metros, qual a altura atingida pelo avião?

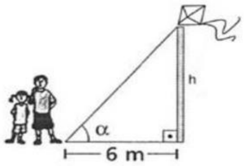
Figura 26 – Lista sobre trigonometria do triângulo retângulo página 1

6. (Unisinos – RS) Um avião levanta voo sob um ângulo constante de 20º. Após percorrer 2000 metros em linha reta, qual será a altura atingida pelo avião, aproximadamente? (Utilize: sen 20º = 0,342; cos 20º = 0,94 e tg 20º = 0,364)

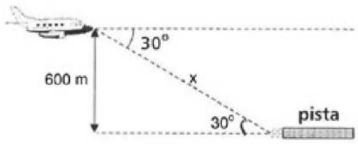
7. (Cefet – PR) A rua Tenório Quadros e a avenida Teófilo Silva, ambas retilíneas, cruzam-se conforme um ângulo de 30º. O posto de gasolina Estrela do Sul encontra-se na avenida Teófilo Silva a 4 000 m do citado cruzamento. Portanto, determine em quilômetros, a distância entre o posto de gasolina Estrela do Sul e a rua Tenório Quadros?



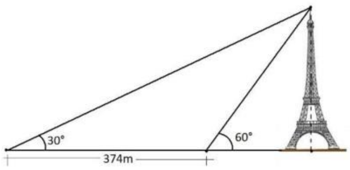
8. Ao empinar uma pipa, João percebeu que estava a uma distância de 6m do poste onde a pipa engatou. Renata notou que o ângulo α formado entre a linha da pipa e a rua era 60°, como mostra a figura. Calcule a altura do poste.



9. Um avião está a 600m de altura quando se vê a cabeceira da pista sob um ângulo de declive de 30°. A que distância o avião está da cabeceira da pista?



10. Um turista vê o topo de uma torre construída em um terreno plano, sob um ângulo de 30°. Aproximando-se da torre mais 374 m, passa a vê-la sob um ângulo de 60°. Considerando que a base da torre está no mesmo nível do olho do turista, calcule a altura da torre.



11. Uma pessoa encontra-se num ponto A, localizado na base de um prédio, conforme mostra a figura 1. Se ela caminhar 120 m em linha reta, chegará num ponto B, de onde poderá ver o topo C do prédio, sob um ângulo de 60º. Quantos metros ela deverá se afastar do ponto A, andando em linha reta no sentido de A para B (figura 2), para que possa enxergar o topo de prédio sob um ângulo de 30°?

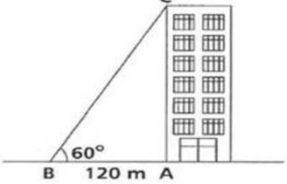


Figura 1

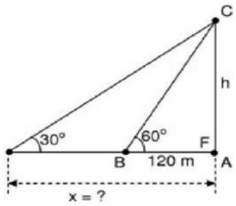


Figura 2

Figura 27 – Lista de trigonometria do triângulo retângulo página 2

De uma forma geral ao longo dos encontros pretendemos, além de ensinar trigonometria, mostrar aos alunos formas diferentes de pensar matemática através do uso da geometria dinâmica e das intervenções da professora na forma de conduzir as atividades, buscando levar os “hábitos de pensamento” em matemática para a sala de aula.

3.3 NÍVEIS DE DIFICULDADES DAS ATIVIDADES

As primeiras resoluções dos problemas que apresentamos aos alunos têm um nível de dificuldade menor, devido a diferentes estratégias de solução que podem ser utilizadas. A ideia é que os alunos percebam que saber trigonometria é importante para resolução dos problemas com menos informações, sendo assim, de dificuldade maior. Entendendo a necessidade do conteúdo.

Com as sequências de atividades, pretendemos que os alunos consigam resolver os problemas propostos de acordo com o raciocínio trabalhado em aula na abordagem do conteúdo. Esperamos que, usando pensamento lógico, desenvolvam o raciocínio argumentativo e produzam soluções para as questões, desenvolvendo “hábitos de pensamento”.

Esperamos, com essas atividades, que os alunos tenham clareza no raciocínio, no passo a passo ser utilizado, que identifiquem qual razão trigonométrica adequada de acordo com as informações dadas, ou que utilizem o teorema de Pitágoras, relacionando as medidas dos lados do triângulo retângulo.

4 RELATO DA EXPERIÊNCIA E ANÁLISE DA PRODUÇÃO DOS ALUNOS

A prática da experiência aconteceu no Colégio Estadual Marechal Floriano Peixoto com a turma 221B do 2º ano do Ensino Médio no período entre 26 de setembro e 13 de novembro. A professora da disciplina de Estágio em Educação Matemática III, Lisete Bampi como orientadora do estágio, e a professora regente da turma 221B, Márcia Travi acompanharam os planejamentos. A colega Samanta utilizou planejamento semelhante na turma 221C, mas não teve envolvimento com este trabalho. A professora da turma estava presente nas aulas e acompanhou a realização das atividades pela estagiária. Nessa seção serão relatados os encontros de acordo com o conteúdo trabalhado, conforme dividido na seção anterior, e proposto um teste através do qual as resoluções dos alunos serão analisadas.

4.1 ENCONTROS 1, 2 e 3

Ao introduzir o conteúdo de trigonometria através da resolução do problema “como medir a altura de um poste?” os alunos entenderam a proposta de abordagem. Alguns responderam: “por Tales”, “medindo com os olhos”, “por Pitágoras”, respostas aleatórias de conteúdos relacionados a geometria que possivelmente foram trabalhados em anos anteriores. Como estabelecemos uma estratégia para obtermos a solução através dos passos a serem seguidos, trabalhando com a ideia matemática de explicar os passos, após o término da resolução os alunos quiseram uma resposta em número, uma medida em metros. Apesar das soluções terem sido explicadas com cuidado e concordância deles com as justificativas, solicitaram um exemplo com medidas. Os seguinte exemplos foram realizados:

a) Um observador de 1,7 m de altura observa a extremidade de um poste a um ângulo de visada de 45°. A distância do observador ao poste é de 2,8 m. Qual a altura do poste?
b) Em certa hora do dia, a medida da sombra de um poste até determinado ponto é de 5 m. Construindo uma maquete, tem-se um triângulo retângulo com as medidas 1m e 0,6 m, conforme indicado na figura. Qual a medida do poste?

Observei que a ideia de que a Matemática envolve apenas números é bastante presente na turma. Muitos alunos não tinham os conhecimentos necessários para estas resoluções, uma explicação adicional e exemplos básicos, como os anteriores, foram mostrados.

O GeoGebra foi apresentado aos alunos, pois eles não conheciam o software. Um pouco da interface e comandos básicos foram mostrados. Trabalhamos com o GeoGebra, de uma forma diferente do hábito dos alunos. A maneira como o programa permitiu que fizéssemos as discussões agradou aos alunos.

Neste encontro, poucos alunos estavam em aula para realização da lista de exercícios.

Continuamos o trabalho na lista no encontro seguinte, com uma maior presença de alunos. Após este momento, foi feita a correção de todos os exercícios em conjunto, houve bastante participação da turma.

4.2 ENCONTROS 4 e 5

A terceira resolução do problema motivador foi apresentada após a definição das razões importantes seno, cosseno e tangente. Novamente, poucos alunos estavam presentes e o conteúdo precisou ser retomado no encontro seguinte.

A ideia principal, de mostrar que conhecendo os valores de seno, cosseno e tangente, associados aos ângulos em questão, a resolução do problema era otimizada não foi bem entendida pelos alunos. No momento da aula, construímos um arquivo GeoGebra que mostrou a ideia. Detalhes do arquivo encontram-se na seção 4.5.

4.3 ENCONTROS 6, 7 e 8

O exercício de calcular o raio da Terra foi considerado complexo pelos alunos. Resolvemos em conjunto. Com o ângulo inicialmente escolhido, de 88°, o cálculo teve um erro muito grande. Os alunos ficaram desconfortáveis com o resultado, apesar de estarem convencidos que o procedimento realizado para cálculo era correto. Para ter mais precisão na resposta, o ângulo deveria ser de 89,42°, e este valor não constava na tabela deles. Com o recurso da calculadora, e utilizando o máximo de casas decimais possíveis no cálculo, encontramos um resultado mais preciso. Expliquei que como estávamos trabalhando com medidas muito grandes, no caso do raio da Terra, era importante esta precisão. Embora o objetivo fosse mostrar uma aplicação do conteúdo de Trigonometria, o erro na resposta não agradou. Eles solicitaram exemplos mais básicos.

A ideia de provocar os alunos com uma resposta incorreta, embora o raciocínio matemático e o cálculo estivessem corretos, deixou-os desconfortáveis. Esperávamos que eles buscassem o motivo do erro, mas esta manifestação não ocorreu.

No cálculo das razões para ângulos importantes, a parte da demonstração informal realizada com os alunos foi bem entendida. Os passos foram cuidadosamente explicados. Neste encontro realizamos os cálculos para os ângulos de 30° e 60°.

Para o cálculo das razões do ângulo de 45° foi necessária outra construção. Quando questionamos os alunos sobre como calcular, após mostrar o desenho do quadrado eles encaminharam em voz alta a solução.

4.4 ENCONTROS 9, 10, 11

Nos últimos encontros a proposta foi que os alunos trabalhassem na lista de exercícios em aula com o auxílio da professora e esclarecessem suas dúvidas. Poucos alunos estavam presentes nesses encontros, os quais mostravam pouco interesse na realização da lista. Alguns exercícios, escolhidos pelos alunos por serem considerados os mais difíceis, foram resolvidos pela professora no quadro.

4.5 O TESTE

Para os últimos encontros preparamos um teste. Nele procuramos avaliar a aprendizagem, validar nossa sequência de atividades. O teste precisou ser dividido em duas partes, devido à impossibilidade de dois períodos no mesmo dia. Após a realização da primeira parte, os erros foram apontados e mais alguns exercícios da lista foram resolvidos no encontro que seria para realização da segunda parte do teste, e num encontro extra a segunda parte do teste foi realizada. Com o objetivo de não repetição dos mesmos erros na segunda parte do teste.

A primeira parte do teste foi proposta com exercícios semelhantes aos desenvolvidos nos primeiros encontros. Já a segunda parte, no exercício 5 é exigido que os alunos visualizem em perspectiva a situação como a figura do exercício 3, e estamos considerando que o triângulo é isósceles. Uma conversão diferente das que trabalhamos em aula, com o objetivo de avaliar se eles eram capazes de resolver exercícios com grau maior de dificuldade. Os demais exercícios foram propostos de forma semelhante aos trabalhados na última lista.

COLÉGIO ESTADUAL MARECHAL FLORIANO PEIXOTO – Prof.ª Márcia Travi – Estagiária Emanuelle Lopes

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – 2º ANO/EM – Teste 1 – 3° Trimestre

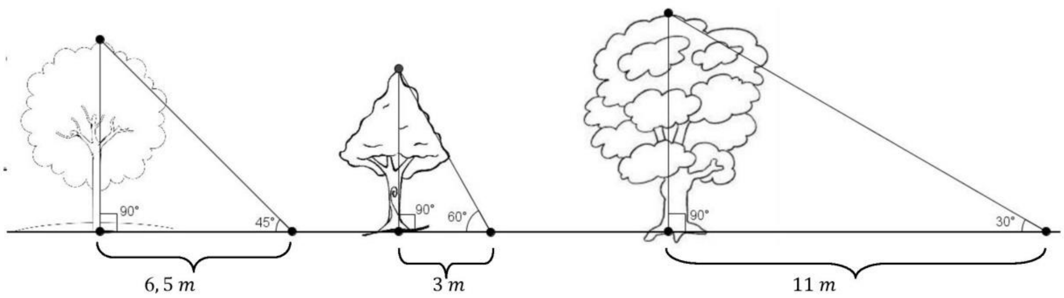
Nome: ______________________________ Nº: ____ Turma: ______ Data: ____/11/2013

*Para os ângulos de 30°, 45° e 60° utilize a tabela ao lado.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

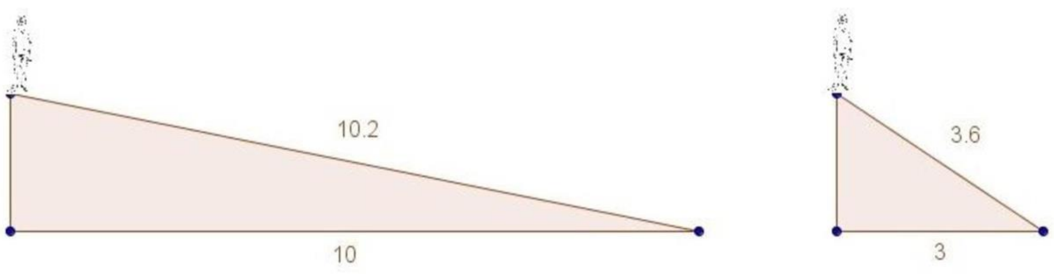
1. Um observador deseja medir 3 árvores de um parque, para isto ele tem um instrumento de medida de distância e um teodolito. As seguintes medições foram feitas. Qual a árvore mais alta? Justifique.

(a) (b) (c)



2. Sabemos que quanto maior o ângulo, menor é o valor do cosseno deste. Por exemplo, $30° < 60°$ e $cos\ 30° > \cos 60°$ conforme podemos verificar na tabela. Duas rampas foram medidas e as informações foram anotadas conforme a figura. Responda:

(1) (2)



a) Qual delas é a mais íngreme?

b) Em qual das rampas o menino está a uma altura maior em relação à base da rampa?

c) Qual das rampas provoca maior deslocamento vertical?

Figura 28 – Teste parte 1

COLÉGIO ESTADUAL MARECHAL FLORIANO PEIXOTO – Prof.ª Márcia Travi – Estagiária Emanuelle Lopes

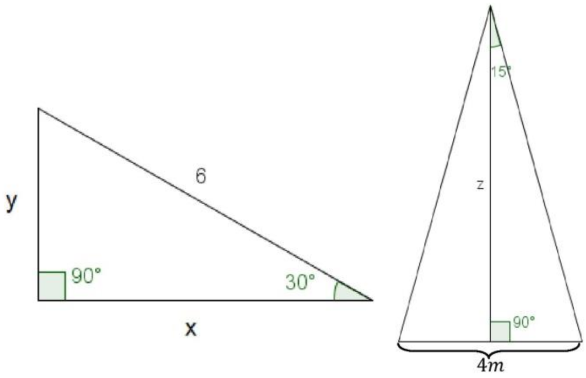
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS – 2º ANO/EM – Teste 1 – 3° Trimestre

Nome: ______________________________ Nº: ____ Turma: ______ Data: ____/11/2013

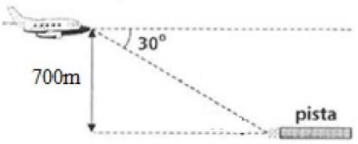
*Para os ângulos de 30°, 45° e 60° utilize a tabela ao lado.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

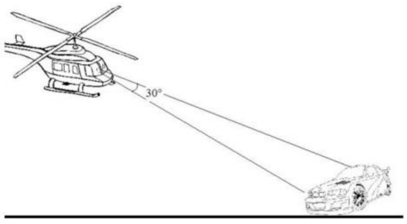
3. Encontre as medidas de x, y e z nos triângulos abaixo. (Utilize: $sen\ 15° = 0{,}2588$, $\cos 15° = 0{,}9659$ ou $tg\ 15° = 0{,}2679$).



4. Um avião está a 700m de altura quando se vê a cabeceira da pista sob um ângulo de declive de 30°. A que distância o avião está da cabeceira da pista?



5. Um turista sobrevoando uma cidade de helicóptero enxerga um carro sob de um ângulo de $30°$, conforme a figura. Sabe-se que um carro tem em média $4\ m$ de comprimento. Estime a distância d do helicóptero ao carro.



6. Um alpinista de 1,8 m de altura, em um terreno plano, vê o topo de uma montanha sob um ângulo de 30°. Aproximando-se da montanha mais $230\ m$, passa a vê-la sob um ângulo de 45°. Calcule a altura da montanha.

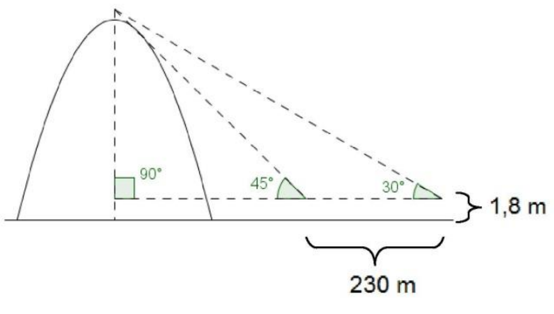


Figura 29 – Teste parte 2

4.5.1 Análise das resoluções do teste

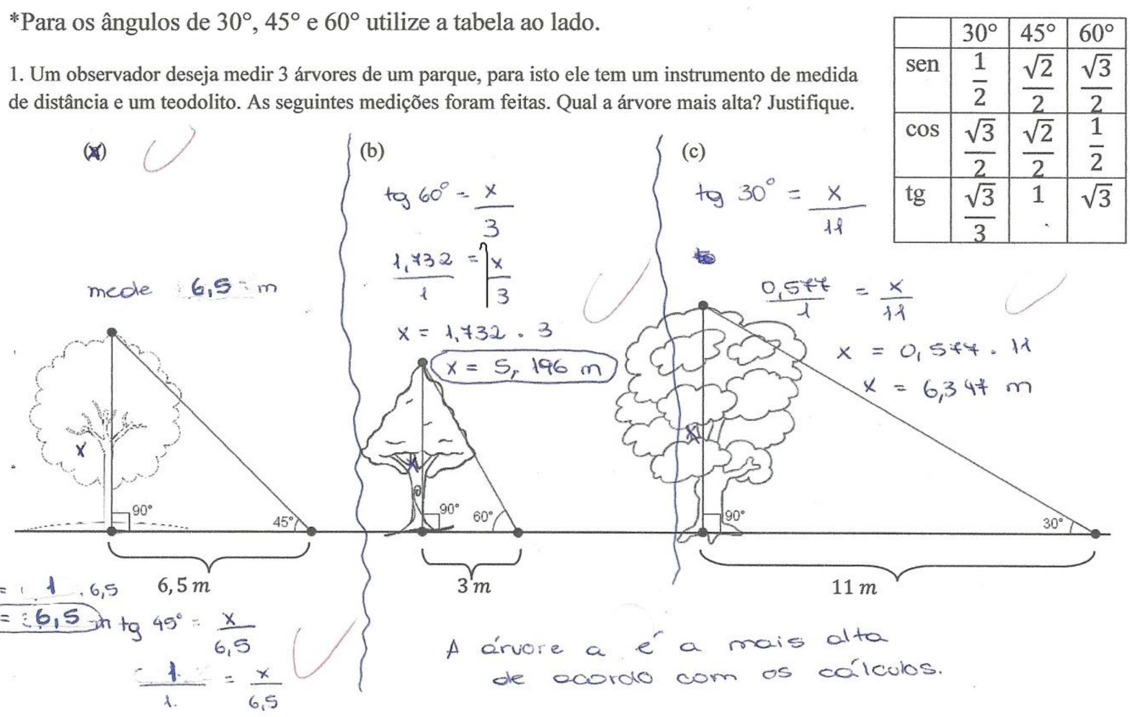
Um total de 19 alunos realizou o teste, para identificação eles estão numerados de 1 a 19 em ordem aleatória. Na primeira parte do teste (questões 1 e 2), 17 alunos estavam presentes (o aluno 16 e o 19 ausentes). Na segunda parte, também17 presentes, mas os ausentes foram os alunos 15 e 18. Abaixo comentários a cerca das resoluções separadas por questão e uma tabela com acertos (✓) e erros (✗). As questões deixadas em branco foram marcadas com (-). Nos alunos faltantes em algumas das partes não há preenchimento.

Tabela 4 – Acertos e erros dos alunos no teste

Aluno	Questões									
	1			2			3	4	5	6
	a)	b)	c)	a)	b)	c)				
1	✓	✗	✗	-	-	-	✓	✓	✓	-
2	✗	✗	✗	-	-	-	✓	✓	✓	-
3	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✓	✓	✓
4	✓	✓	✗	✓	-	-	✓	✓	✓	-
5	✗	-	-	-	-	-	✓	✓	✓	-
6	✓	✓	✓	-	-	-	✓	✓	✓	✓
7	-	-	-	-	-	-	-	✓	✗	-
8	-	-	-	-	-	-	✓	✓	✓	✗
9	✗	✗	✗	✗	-	-	✗	✓	✗	✗
10	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✓	✓	✓
11	✗	✗	✗	-	-	-	✓	✓	✓	✗
12	✓	✗	✗	-	-	-	✓	✓	✓	-
13	✓	✓	✓	-	-	-	✓	✓	✓	
14	✓	✓	✓	-	-	-	✓	✓	✓	-
15	✓	✓	✓	✓	-	-				
16							✓	✓	✓	✓
17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
18	✓	✓	✓	-	-	-				
19							✓	✓	-	-

- Questão 1

Cinco alunos (6, 13, 14, 15, 18) responderam corretamente toda a questão. Identificaram a razão trigonométrica a ser utilizada e calcularam corretamente o valor. Abaixo algumas resoluções com os erros que apareceram.



	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Figura 30 – Resolução questão 1 aluno 15

Um aluno (4) utilizou corretamente a tangente, mas não acertou as contas.

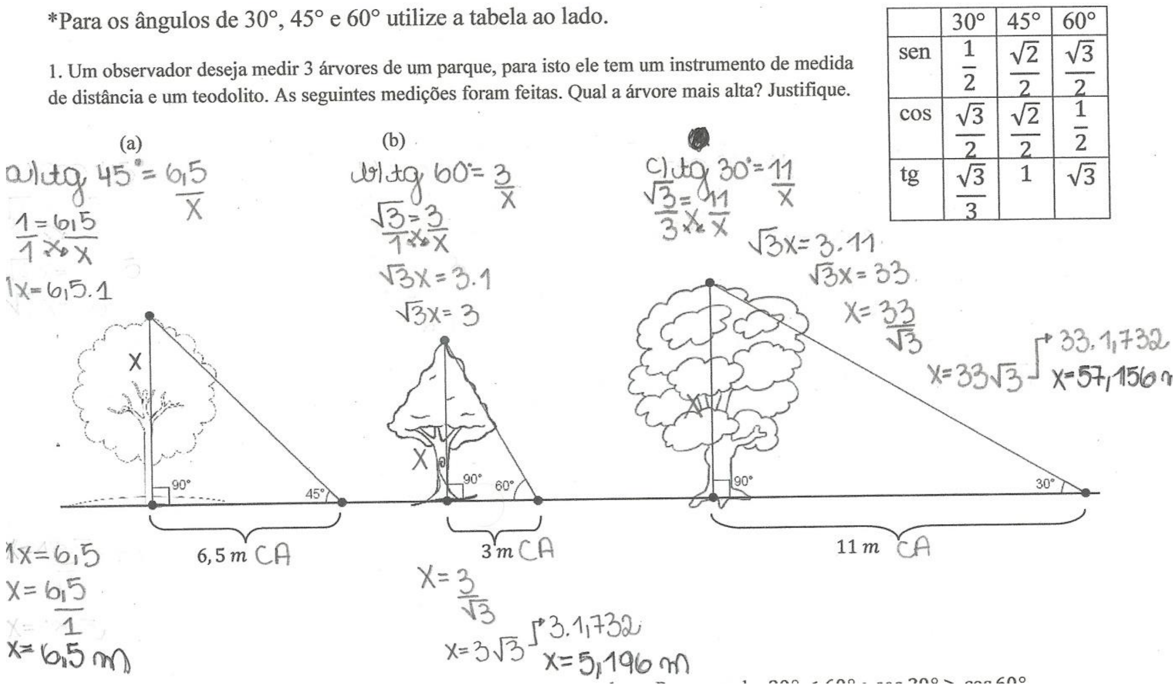


Figura 31 – Resolução questão 1 aluno 5

Cinco alunos (1, 3, 5, 10, 12) resolveram utilizando o seno, sendo que quatro deles (exceção do 5) observaram o triângulo isósceles com os ângulos de 45°, conforme trabalhado em aula.

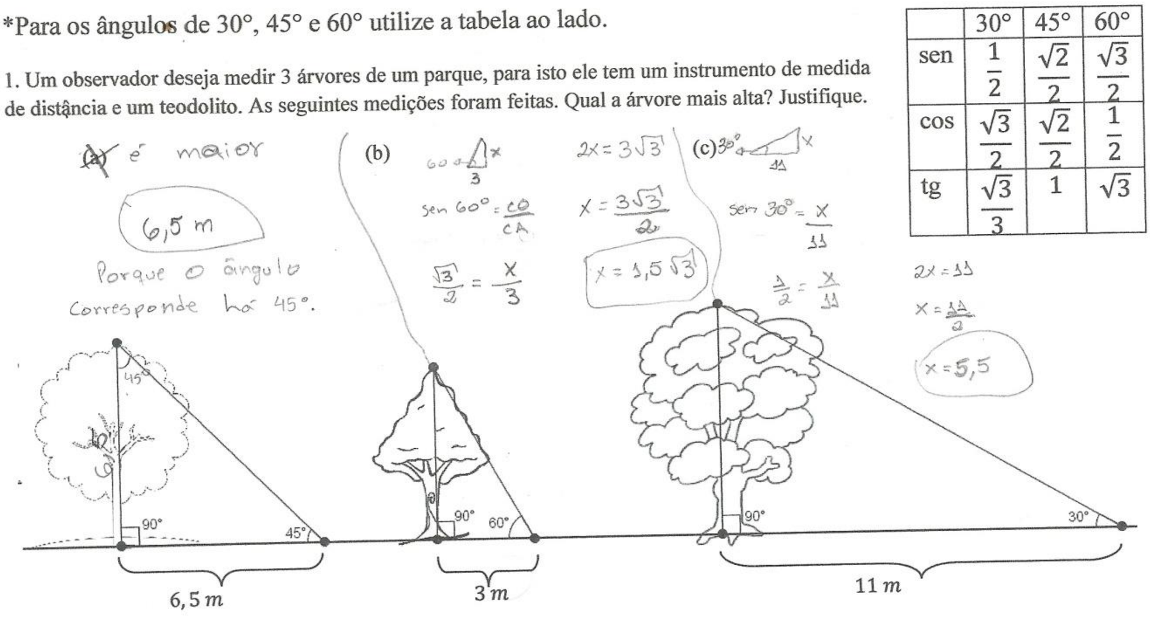


Figura 32 – Resolução questão 1 aluno 3

Os alunos que visualizaram o primeiro triângulo como isósceles e não precisaram fazer as contas para encontrar a altura da árvore estão no nível 1 de classificação do pensamento de Van Hiele, pois analisam a figura e atribuem propriedades a ela. A primeira solução de como calcular a altura de uma árvore apresentada no primeiro encontro usou a estratégia de construir um triângulo isósceles e retângulo.

Três alunos (5, 9, 11) utilizaram o cosseno, como a resolução abaixo.

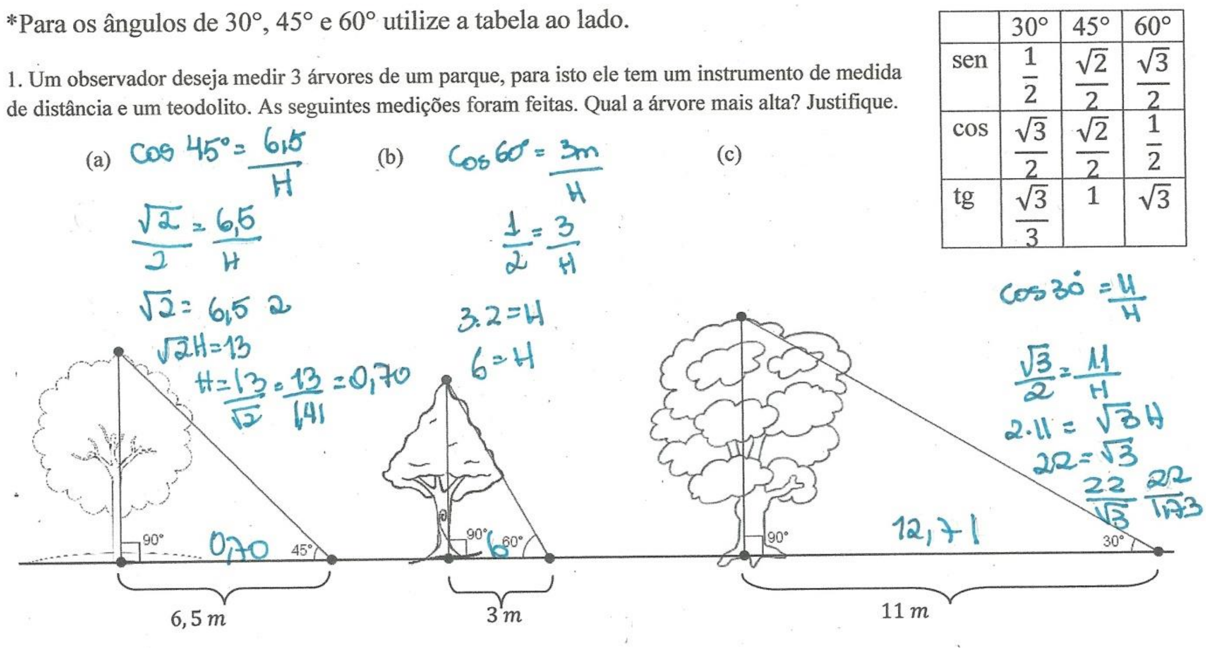


Figura 33 – Resolução questão 1 aluno 11

O uso do cosseno para resolver a questão 1 mostra a falta de conversão entre os registros figural e algébrico. Exercícios para calcular a altura de uma árvore foram resolvidos em diferentes versões, inclusive com o uso da tangente.

Três alunos (7, 8, 17) não responderam.

- Questão 2

Quatro alunos (3, 4, 10, 15) responderam corretamente o item (a), mas nos itens (b) e (c) tentaram responder e não utilizaram corretamente o Teorema de Pitágoras e também, não resolveram corretamente a equação de primeiro grau.

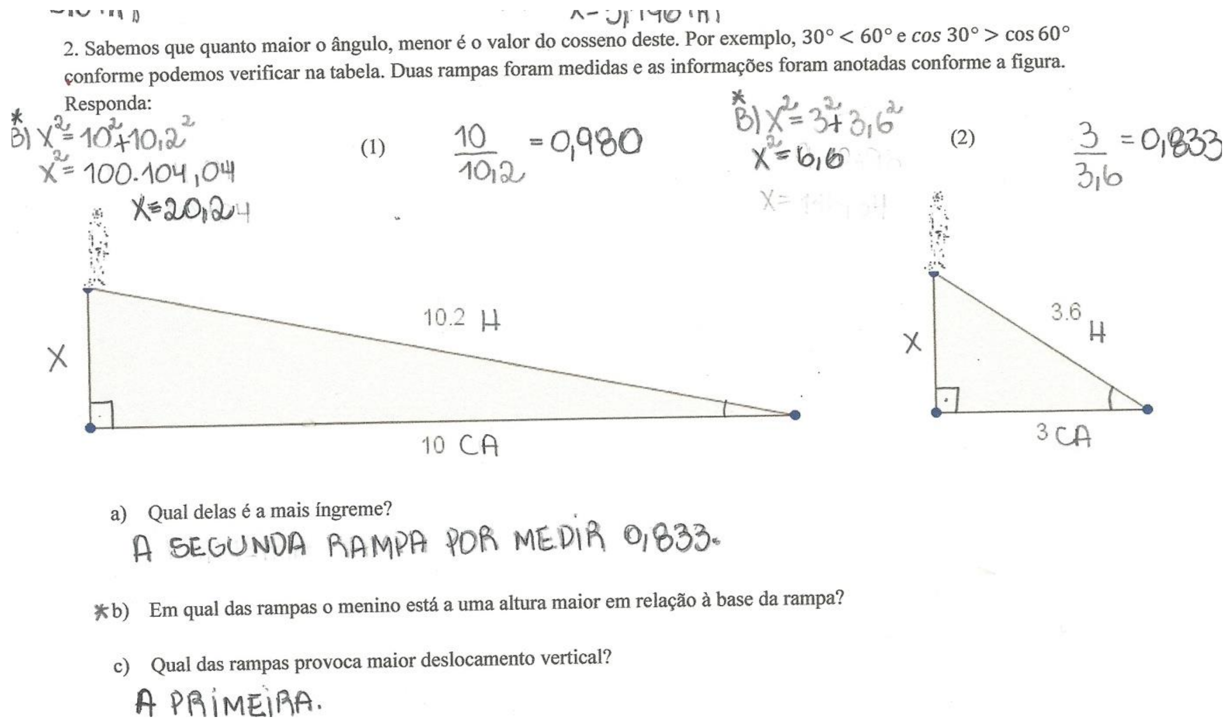


Figura 34 – Resolução questão 2 aluno 4

Em aula, fizemos exercícios de olhar o valor do decimal correspondente a alguma das razões trigonométricas na tabela e identificar o ângulo. No teste, foi exigido que eles compreendessem a componente discursiva do exercício. Poucos alunos fizeram esta primeira tarefa. Em relação à componente figural, alguns alunos questionaram em voz alta durante o teste a falta de um ângulo para saber o valor do cosseno. A conversão entre os registros figural, discursivo e algébrico foi realizada por poucos.

Os outros treze alunos não tiveram uma resposta coerente ou não responderam.

- Questão 3

Cinco alunos (2, 5, 6, 13, 14) identificaram as razões a serem utilizadas e resolveram as corretamente as contas. Nove identificaram as razões e não resolveram corretamente a equação de primeiro grau ou inverteram os lados na razão. Vejamos alguns exemplos:

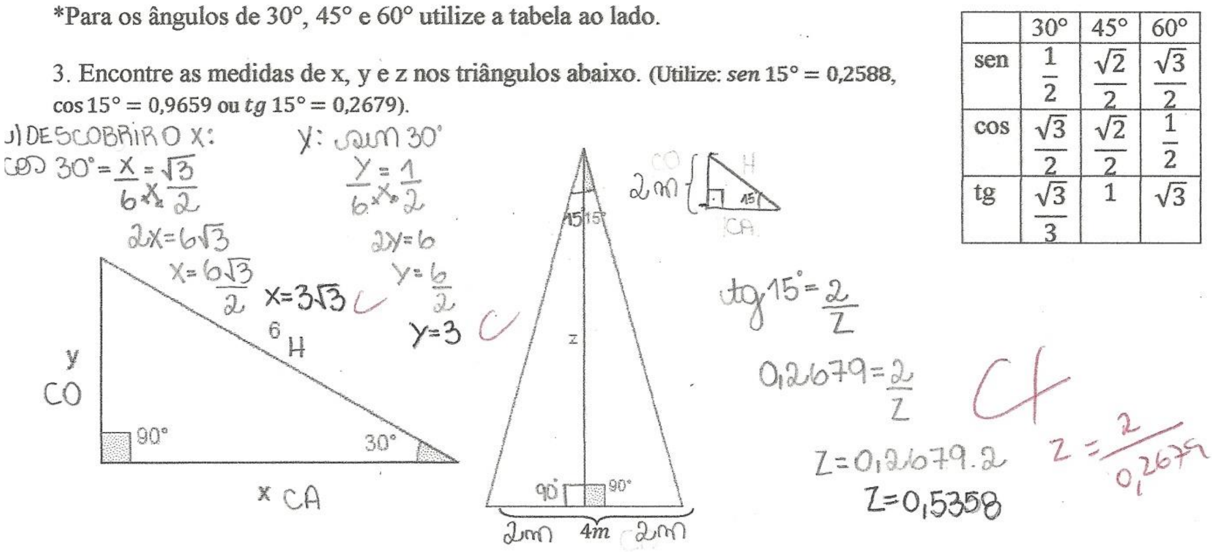


Figura 35 – Resolução questão 3 aluno 4

O aluno 4 precisou desenhar o triângulo retângulo em uma posição diferente para identificar corretamente os catetos oposto e adjacente ao ângulo de 15°. Ele associa os elementos àquela posição, mostrando falta de entendimento do objeto matemático que está sendo trabalhado, a conversão dos registros, do figural ao algébrico se dá de acordo com um padrão criado pelo aluno.

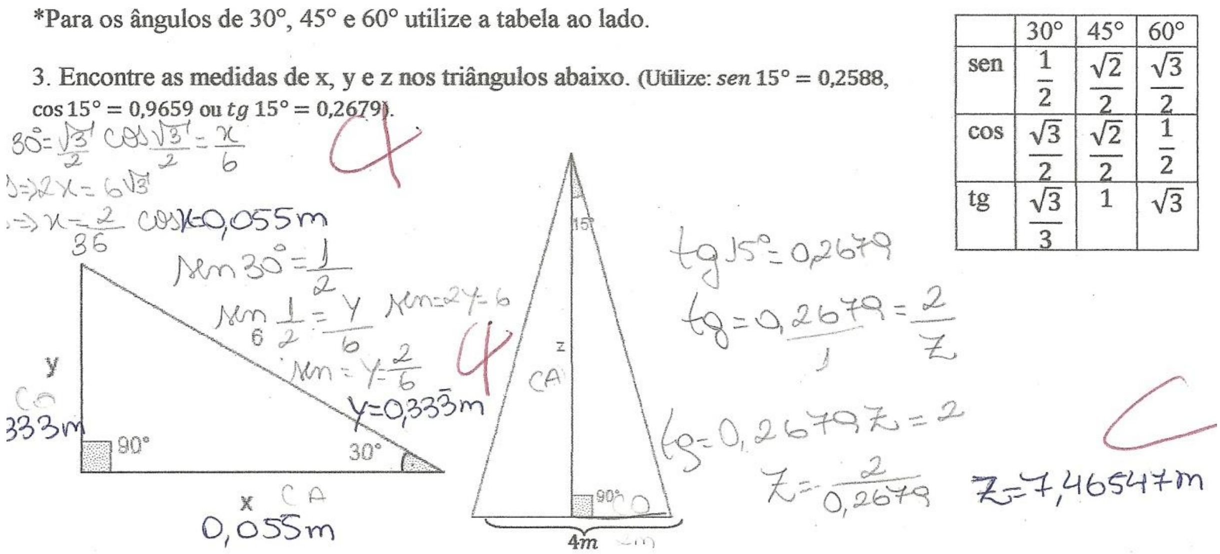


Figura 36 – Resolução questão 3 aluno 16

Alguns alunos não dividiram a medida da base do triângulo isósceles para obter a medida do cateto.

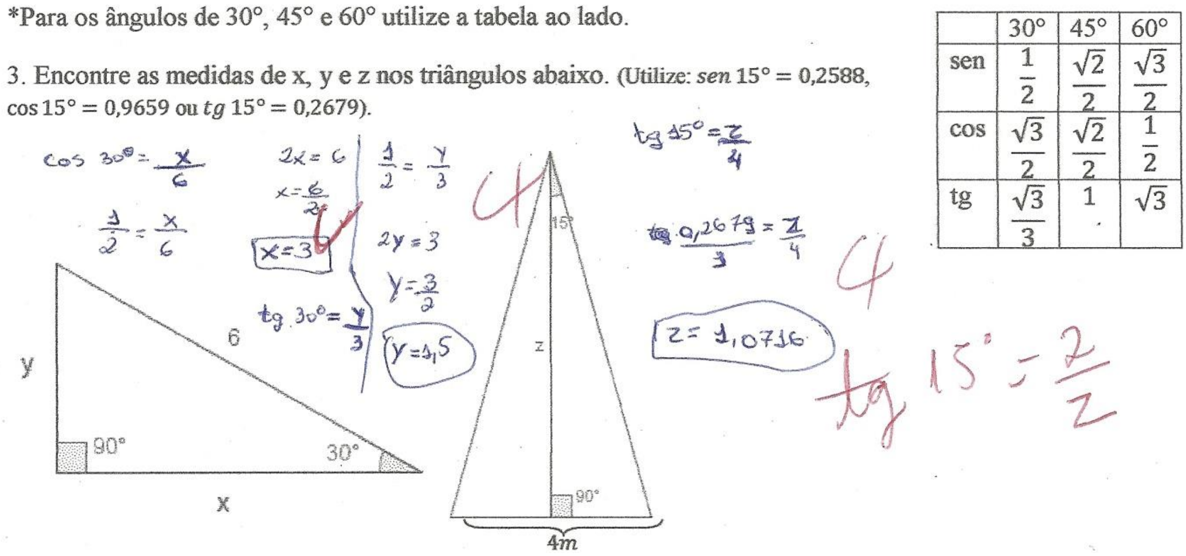


Figura 37 – Resolução questão 3 aluno 3

Este erro, cometido por mais alunos, de inverter a ordem dos catetos do triângulo retângulo no cálculo da tangente mostra que, com pouca variação na componente figural, há confusão entre os elementos.

Três alunos (7, 9, 17) não responderam à questão 3.

- Questão 4

Nesta questão, dez alunos acertaram. Um não resolveu e outros seis utilizaram o seno ou cosseno.

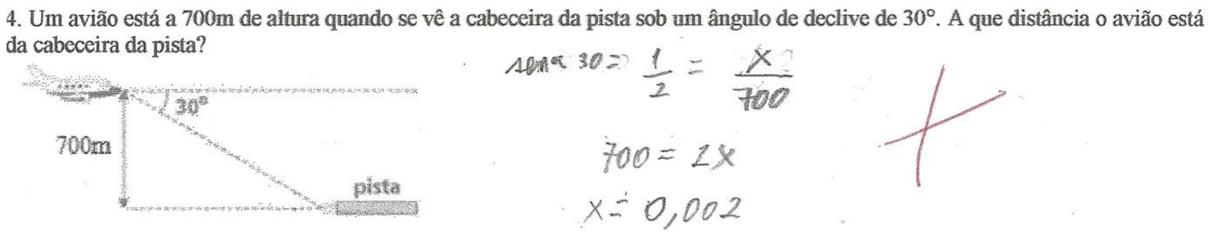


Figura 38 – Resolução questão 4 aluno 9

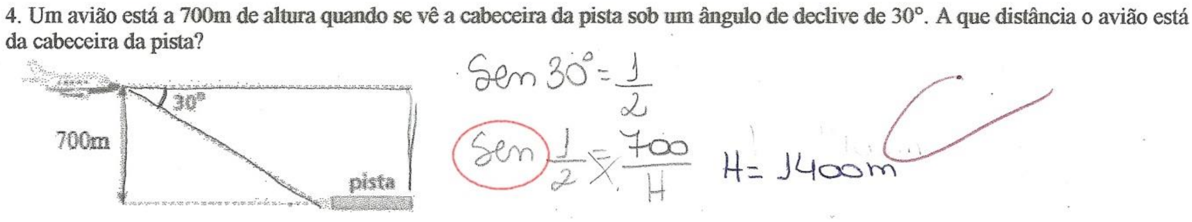


Figura 39 – Resolução questão 4 aluno 16

O aluno 16 cometeu erros relacionados à interpretação relacionados à definição de seno de um ângulo e seu valor.

- Questão 5

Dois alunos deixaram a questão 5 em branco. Os seis alunos que resolveram corretamente, tinham acertado anteriormente na questão 3 os cálculos no triângulo isósceles.

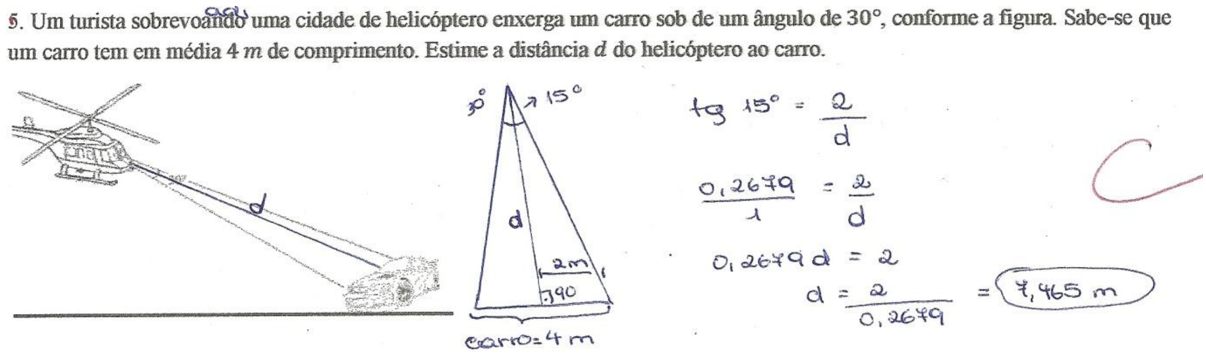


Figura 40 – Resolução questão 5 aluno 14

A resolução do aluno 14 mostra que ele fez uma conversão entre os registros de representação da figura triângulo isósceles, que inicialmente estava em perspectiva, propriedades foram atribuídas à figura empiricamente devido à figura da questão 3.

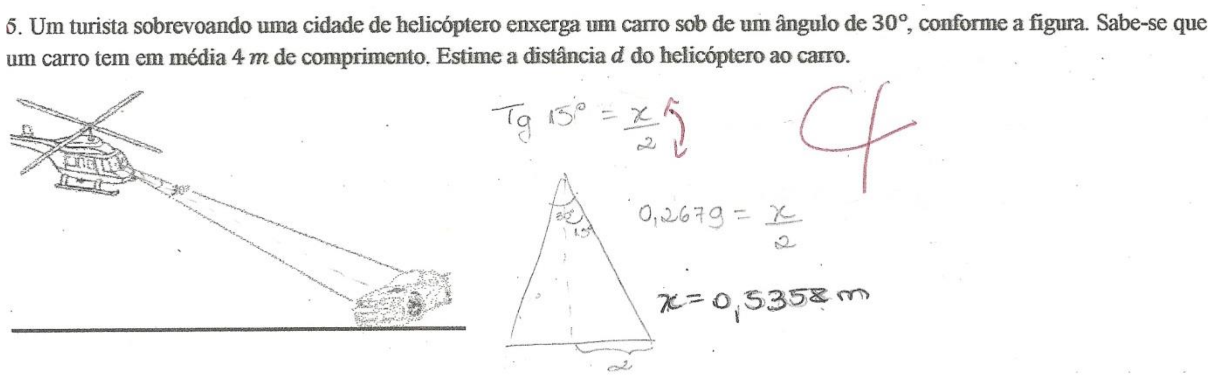


Figura 41 – Resolução questão 5 aluno 12

- Questão 6

Onze não tentaram responder, por não saberem resolver um sistema, sabiam que a solução exigiria e nem tentaram.

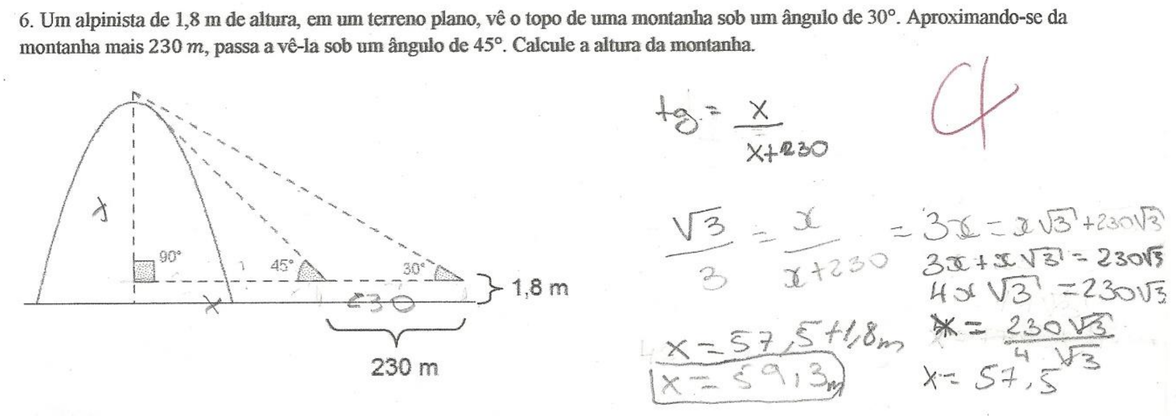


Figura 42 – Resolução questão 6 aluno 10

O aluno 10 identificou propriedades na figura que o ajudaram no cálculo, os erros cometidos foram algébricos. Ele visualizar o triângulo isósceles atribuindo propriedades à figura, está classificado no nível 1 de Van Hiele.

4.6 REFLEXÕES SOBRE A EXPERIÊNCIA E ALTERAÇÕES NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

No decorrer das 7 semanas que foram necessárias para realização da prática, os encontros não foram frequentes devido à atividades extraclasse realizada pelos alunos como: ida ao cinema, museu, palestras, torneio de futebol e vôlei, e também reunião dos professores, etc. Alguns encontros ficaram com intervalos de uma semana, o que quebra a continuidade das atividades. Outro aspecto relevante é a falta de frequência dos alunos.

Inicialmente, os arquivos GeoGebra utilizados na sequência didática já estavam prontos. Elaborávamo-los com antecedência. No decorrer das atividades, os alunos começaram a questionar para saber mais como funcionava o software, e os arquivos passaram a ser construídos no momento da aula.

No Encontro 4 a construção feita para definição das razões não foi uma boa escolha pois os alunos tiveram dificuldade em identificar os triângulos retângulos em posições não habituais. Um pouco complexa para entendimento dos alunos, e a ideia principal de que as razões estão relacionadas ao ângulo α não foi bem compreendida com os triângulos semelhantes selecionados.

No Encontro 5, foi necessário criar um arquivo Geogebra sobre as razões trigonométricas.

Construímos um triângulo retângulo e destacamos um ângulo, utilizando um recurso do programa para exibir sua medida. Também, construímos segmentos com comprimento fixo, definindo assim as razões seno, cosseno e tangente. Movendo o ponto A, as razões não se alteravam, pois os ângulos se preservaram. O conceito matemático que está por trás é o de semelhança de triângulos, mais diretamente por congruência dos ângulos, ou também, já que o programa informa a medida de cada segmento, a razão entre os lados se preserva.

Escolhemos construir desse tipo propositalmente, pois a construção é semelhante à do primeiro problema de cálculo da altura do poste. Podíamos ter feito a construção através do primeiro quadrante do círculo trigonométrico.

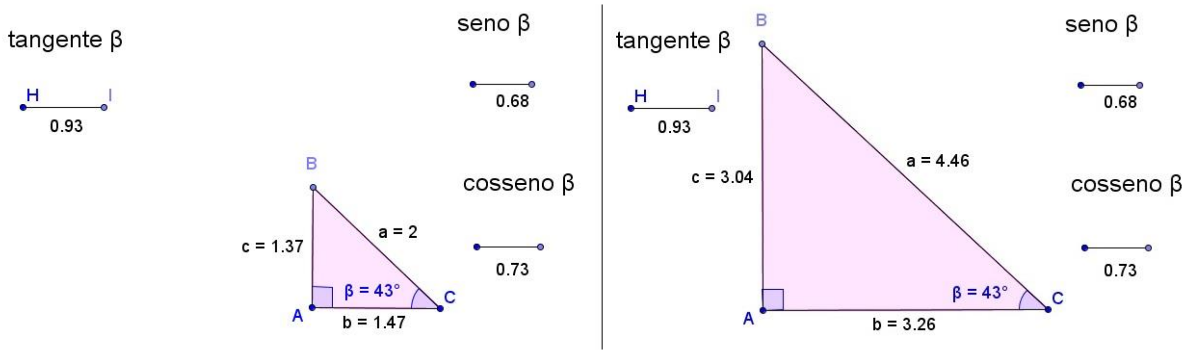


Figura 43 – Movimento de triângulos semelhantes

Também, movendo o ponto B, o ângulo β varia. Mostrando assim outras razões.

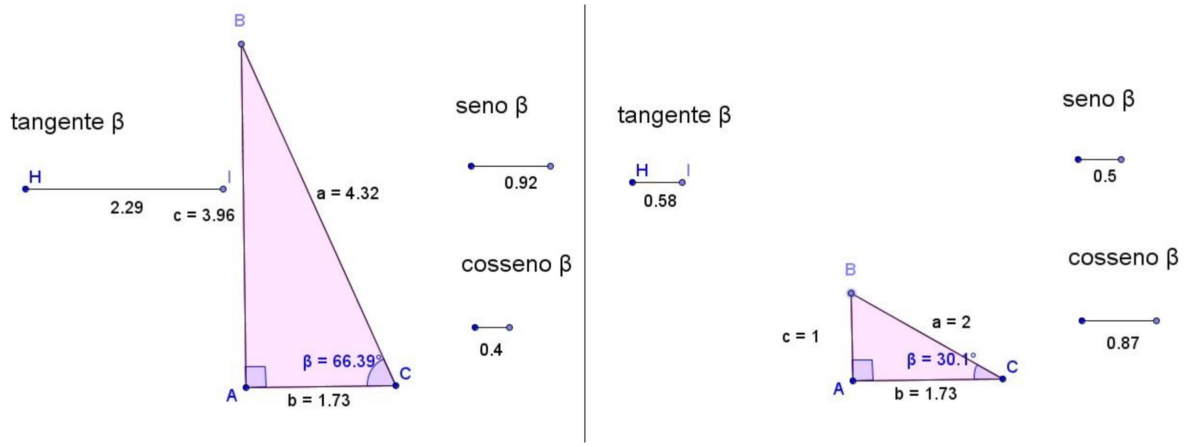


Figura 44 – Efeitos da variação do ângulo

Também foi possível observar no arquivo que os valores de seno e cosseno do ângulo β, que está entre 0° e 90°, são menores que 1 e que quando o ângulo é de 45° os valores são iguais.

Os problemas propostos nos primeiro encontro não apresentavam números como resposta, e sim uma estratégia para resolução. Os alunos tiveram dificuldade de compreender que a resposta não precisava ser um valor numérico. Eles tinham a necessidade de exemplos com valores nas medidas para cálculo e um número na resposta.

Nas aulas com o uso do GeoGebra, a concentração dos alunos era maior. A professora regente da turma, que nos acompanhou em aula, gostava bastante do material e da maneira diferente de abordar o conteúdo. A investigação e o levantamento de hipóteses a cerca dos exercícios que o software proporcionou gerava debates em aula.

O material elaborado com as animações permitiu uma interação entre professora e alunos diferente do que eles estavam acostumados.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O acompanhamento da disciplina de Geometria I me fez entender como os alunos universitários, recém egressos do Ensino Médio, foram superando dificuldades e evoluíram nos níveis de pensamento em geometria, e assim desenvolveram habilidades que são necessárias em uma demonstração matemática. Durante o período questionei-me sobre a forma como a geometria é trabalhada na escola, sem ênfase na argumentação, baseada em aplicação de fórmulas e cálculos sem contextualização com a realidade. Tinha a ideia inicial de desenvolver uma oficina extraclasse, na qual os alunos trabalhariam diretamente no GeoGebra com atividade do tipo caixa-preta (apresentada no seção 2.2). A necessidade de ensinar trigonometria aos alunos da turma na qual realizei o estágio docente obrigatório me fez rever a ideia da oficina. Decidi que seria mais produtivo concentrar em uma única experiência de ensino, e foi assim que escolhi a trigonometria como tema deste trabalho de conclusão de curso. Esta escolha me colocou um desafio maior, pois se tratava de ensinar um conteúdo novo aos alunos, tendo como pré-requisito conhecimento básico de geometria.

O GeoGebra foi utilizado como um recurso pela professora, já que o laboratório de informática da escola não comportava todos os alunos da turma. No decorrer das aulas, os alunos demonstraram bastante interesse em entender as construções geométricas que estavam sendo utilizadas através de arquivos preparados previamente pela professora. O interesse dos alunos provocou na forma de utilização dos arquivos: a professora passou a fazer as construções geométricas na frente dos alunos explicando um pouco sobre o funcionamento do software. Trabalhar com o GeoGebra nas aulas foi diferente para os alunos. Discussões diferenciadas sobre o conteúdo foram propiciadas com o uso do GeoGebra, favorecendo o diálogo entre professora e alunos.

Vi que a falta de conhecimentos básicos de matemática do ensino fundamental, que não só em geometria, prejudicou o rendimento da turma. Observei que os alunos não sabiam resolver equações de primeiro grau e segundo grau com uma variável; com relação ao teorema de Pitágoras, alguns declararam nunca ter visto. Elementos básicos de geometria, como a nomenclatura, não eram de domínio dos alunos. Pretendia desenvolver um estudo completo de trigonometria em um triângulo qualquer, chegando às leis dos senos e do cosseno. Optei por trabalhar apenas com a trigonometria do triângulo retângulo, respeitando as dificuldades e o ritmo de aprendizagem dos alunos. A falta de continuidade dos encontros, em função de atividades extraclasse, também prejudicou um pouco o decorrer da prática. Dos quatro períodos semanais programados, em algumas semanas apenas um foi realizado. Isto implicou que a realização da experiência tomou um maior número de semanas, para além daquilo que havia sido previsto inicialmente. Sabemos que estas adversidades encontradas não são particularidades da escola em que realizamos o estágio.

Ao introduzir o conteúdo de trigonometria, observei que os alunos não tinham os conhecimentos de geometria necessários para a resolução do problema proposto. Foi de forma concomitante que ensinei os conteúdos de trigonometria e as definições e teoremas básicos de geometria que seriam os pré-requisitos. Assim, consegui desenvolver um estudo completo de trigonometria no triângulo retângulo de acordo com o planejamento.

No momento de elaboração da sequência de atividades apostei que seria interessante trabalhar com raciocínio geométrico de natureza dedutiva, mesmo sem conhecer as condições de conhecimento dos alunos com os quais realizaria a experiência. Diria que processo de elaboração deste trabalho de conclusão de curso me colocou no papel de professor investigador e pesquisador – uma atitude que julgo fundamental quando se quer, independentemente das adversidades que se apresentem, o progresso dos alunos no aprendizado da matemática. As análises da produção dos alunos que participaram da experiência confirmou que é possível caminhar, com eles, na direção deste progresso.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos. In: ALCÂNTARA, S. D. **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2ª Ed. 2005 (Coleção Papirus Educação).

CROWLEY, Mary L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e Ensinando Geometria.** São Paulo: Atual, 1994. 1-20.

FREITAS, J. L. M. de, REZENDE, V. **Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.** RPEM, Campo Mourão, Pr, v.2, n.3, jul-dez. 2013, 10-34.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. ISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

GOLDENBERG, E. P. (1998 a). **"Hábitos de pensamento" um princípio organizador para o currículo (I)**. Educação e Matemática, 47, 31-35.

GOLDENBERG, E. P. (1998 b). **"Hábitos de pensamento" um princípio organizador para o currículo (I)**. Educação e Matemática, 48, 37-44.

GOLDENBERG, E. P. (Eds.) 1999. **Quatro Funções da Investigação na Aula de Matemática.** Lisboa: APM e Projeto MPT.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.** Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001. 214 p.

HERSHKOWITZ, R. **Aspectos Psicológicos da Aprendizagem da Geometria.** Boletim GEPEM, n. 32, Rio de Janeiro, 1994.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia Didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999. P.197-208.

CARMO, M. P., MORGADO, A. C., WAGNER, E. **Trigonometria e Números complexos**. 3ª edição. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2005.

REZENDE, Eliane Q. F., QUEIROZ, Maria L. B de, **Geometria Euclidiana plana e construções geométricas**. 2ª edição. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.

ANEXO

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, aluno(a) da disciplina Geometria I – 2013/1, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada Aspectos cognitivos na aprendizagem da geometria e geometria dinâmica, desenvolvida pela pesquisadora Emanuelle Regina Lopes. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é orientada por Maria Alice Gravina, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone (51)3308 6212 ou e-mail gravina@mat.ufrgs.br.

Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) do objetivo estritamente acadêmico do estudo, que, em linhas gerais, é:

- Entender melhor como se dá a aprendizagem dos conceitos de geometria e a organização dos argumentos das demonstrações.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas por mim será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), sem indentificação.

Minha colaboração se fará por meio de análise da resolução de testes, bem como da participação em aula, em que serei observado(a) e minha produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. Minha colaboração se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar a pesquisadora responsável no telefone (51)3308 6212/e-mail emanuelle.lopes@ufrgs.br.

Fui ainda informado(a) de que poderei me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Aluno(a):

Assinatura da Pesquisadora:

Assinatura da Orientadora da pesquisa: