UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Carolina Chiarelli Berger

EXPLORANDO O CONCEITO DE ÁREA COM O TANGRAM

Porto Alegre
2013

Carolina Chiarelli Berger

EXPLORANDO O CONCEITO DE ÁREA COM O TANGRAM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao curso de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso

Porto Alegre
2013

Carolina Chiarelli Berger

EXPLORANDO O CONCEITO DE ÁREA COM O TANGRAM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao curso de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso

Comissão examinadora:

____

Prof.ª Fernanda Wanderer

FACULDADE DE EDUCAÇÃO – UFRGS

____

Prof.ª Leandra Anversa Fioreze

INSTITUTO DE MATEMÁTICA - UFRGS

Porto Alegre
2013

RESUMO

Neste trabalho investigou-se o Tangram como auxilio no ensino-aprendizagem do conceito e do cálculo de áreas e identificou-se indícios de aprendizagem. Para responder a essa questão, foi desenvolvida uma sequência didática foi aplicada em duas turmas do 1º ano do Ensino Médio Normal de uma escola pública de Porto Alegre no segundo semestre de 2013. Nessa proposta os alunos tiveram a oportunidade de rever o trabalho com área sob outro enfoque. Através da manipulação das peças do quebra-cabeça, que foram objeto de estudo, os estudantes puderam determinar e comparar as áreas de variadas peças e figuras construídas com estas partes, através da sobreposição, composição e decomposição. Desta forma, os alunos não precisaram trabalhar com figuras estáticas no papel ou no quadro, mas puderam movimentá-las, sobrepô-las e compara-las livremente, pois o material estava disponível para ser manuseado. A teoria base utilizada é a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, a qual foi um auxílio na interpretação das respostas dos alunos. A análise dos dados mostrou que o Tangram pode ser sim um facilitador na compreensão do conceito e do cálculo de áreas.

Palavras-chave: Área; Tangram; aprendizagem matemática; Campos conceituais.

ABSTRACT

This work investigated the Tangram as an aid in teaching - learning concept and calculation of areas and have identified evidence of learning. To answer this question, we developed an instructional sequence that was applied in two classes in the 1st year of high school in a normal public school in Porto Alegre in the second half of 2013. In this proposal the students had the opportunity to review the work with an area under another approach. Through manipulation of the parts of the game that were object of study , students were able to determine and compare the areas of varied parts and figures built with these parts , by overlapping, composition and decomposition . Thus, students did not need to work with static on paper or board figures, but could move them, superimpose them and compares them freely, as the material was available to be handled. The theory base used is the Vergnaud's Theory of Conceptual Fields, which was an aid in the interpretation of student responses. Data analysis showed that Tangram can be rather a facilitator in understanding the concept and calculation of areas.

Keywords: Area; Tangram; learning mathematics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

1.1 PROBLEMA

Através das minhas observações às aulas de Matemática do Ensino Fundamental e Médio decorrentes das disciplinas de Estágio em Educação Matemática I, II e III, minhas atuações como professora estagiária nestas mesmas disciplinas, relatos de colegas de curso, professores e alunos pude perceber que os recursos didáticos mais utilizados por estes professores são o quadro, o giz e o livro didático. Diante desta realidade, decidi abordar neste trabalho uma nova forma prática de ensino sobre o conceito e o cálculo de áreas utilizando como recurso didático o Tangram.

O ensino de Matemática permite diferentes e criativas abordagens. Muitos trabalhos têm sido publicados sobre atividades de aprendizagem em Matemática com o uso de diferentes recursos didáticos como a internet, vídeos, programas, brincadeiras e jogos, dinâmicas, materiais manipulativos entre outros recursos, entre eles o software Geogebra que pode se tornar um recurso muito útil no ensino-aprendizagem de funções e o Frac-Soma 235, um material manipulativo que pode ser utilizado nas aulas sobre de frações. Muitas são as opções que o professor pode acessar, adaptar e aplicar nas suas aulas.

Neste trabalho apresento uma alternativa criativa no ensino de Geometria, mais especificamente no ensino de áreas: o Tangram. O Tangram é um quebra-cabeça de origem chinesa constituído por 7 peças: 5 triângulos (2 triângulos grandes, 1 triângulo médio e 2 triângulos pequenos), 1 quadrado e 1 paralelogramo. Com essas sete peças é possível formar várias figuras, através da utilização das sete peças sem sobreposição. O Tangram pode ser um aliado nas aulas de matemática, pois é um recurso que facilita o estudo das formas geométricas. O Tangram também pode ser utilizado em diversos conteúdos, como área, perímetro, ângulos, frações, entre outros que o próprio professor pode descobrir. Basta somente se deixar levar pela criatividade.

Neste trabalho, investigo se o Tangram pode auxiliar no ensino-aprendizagem do conceito e do cálculo de áreas e identificar indícios de aprendizagem. Para tal, será feita uma prática de ensino em duas turmas do Ensino Médio baseada na Proposta Didática desenvolvida sobre o conceito e o cálculo de áreas utilizando as peças do Tangram como auxilio no processo de aprendizagem. Nessa proposta os alunos terão a oportunidade de rever o trabalho com área sob outro enfoque. Através da manipulação das peças do Tangram os estudantes poderão determinar e comparar as áreas de variadas peças e figuras construídas com estas peças, através da sobreposição. Sobre a escolha da utilização de um material concreto na sequência didática em vez de trabalhar com desenhos, destaco as palavras de Léa Fagundes: “(...) a vantagem que um material [manipulativo] oferece em relação ao desenho, é a mobilidade de seus elementos.” (1977, p.7). Desta forma os alunos não precisam trabalhar com figuras estáticas no papel ou no quadro, mas podem movimentá-las, sobrepô-las e compará-las livremente, pois o material está disponível para ser manuseado.

O presente trabalho também pretende mostrar que as aulas de Matemática podem ultrapassar a barreira do tradicional quadro-negro e giz e se tornarem divertidos momentos de aprendizagem.

1.2 OBJETIVOS

A utilização do Tangram nas aulas de Matemática não acarreta em custo algum para o professor, pois se faz com recursos presentes em todas as escolas e que muitos alunos têm: papel, régua e tesoura. Além de não custar nada, pode trazer muitos lucros no aprendizado de Matemática. Por se tratar de um quebra-cabeças, faz com que os alunos experimentem novas formas de aprender e de pensar.

A meu ver, a utilização de jogos e materiais manipulativos em sala de aula oferece ao aluno a oportunidade de experimentar novas formas de aprendizado. Eles podem manipular o material, desenvolver estratégias e raciocínios que este tipo de recurso pode proporcionar, trabalhar em grupo etc.

A área é um conceito que em Matemática pode ser definido como quantidade de superfície. Essa superfície é medida através de uma unidade de área. A unidade de área mais utilizada é o metro quadrado e seus múltiplos e submúltiplos, embora existam outras unidades.

Este trabalho com área permite também resgatar o ensino de Geometria nas escolas que há muito foi esquecido por alguns professores que enfatizam o ensino da Aritmética e da Álgebra.

Foi desenvolvida uma sequência didática para o ensino de área utilizando o Tangram como principal recurso. Esta sequência foi posta em prática em duas turmas do 1º ano Normal do Ensino Médio de uma escola pública de Porto Alegre. Por se tratarem de futuros professores da Educação Infantil e Séries Iniciais, estes alunos entram em contato com um material que pode servir como instrumento de aprendizagem também para as crianças.

N capítulo 2, discorro sobre a importância do ensino de Geometria nas escolas, as contribuições e as motivações para seu estudo. As habilidades que esta área da Matemática desenvolve nos alunos são essenciais para o desenvolvimento de formas de pensamento e raciocínio típicos da Geometria.

Na seção 22. o assunto abordado é a ausência do ensino de Geometria nas escolas. Nesta seção, através dos trabalhos de diversos autores como Pereira, Pavanello e Carlovich, busco as causas para esse abandono.

O capítulo 3 abrange a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, base teórica na análise das respostas dos alunos às atividades propostas.

No quarto capítulo falo sobre a Matemática do Tangram e analiso alguns trabalhos correlatos sobre o uso do Tangram no ensino de Geometria.

A metodologia e a sequência didática encontram-se no quinto capítulo.

O capítulo seis foi reservado à análise da aplicação das atividades. Algumas respostas dos alunos são analisadas através da Teoria dos Campos Conceituais.

Por fim no sétimo capítulo encontram-se as considerações finais.

2. SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA

2.1 SOBRE A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DE GEOMETRIA

A maioria dos professores já se deparou com uma pergunta comum dos alunos ao trabalhar algum conteúdo de matemática: "Mas qual a utilidade disso em minha vida?" A resposta não é óbvia. Muitos podem pensar que o ensino dos conteúdos presentes nos currículos escolares se faz necessário para um encadeamento entre os conteúdos. "Esse encadeamento é concebido como evoluindo do mais simples para o mais complexo – o "simples" e o "complexo" estabelecidos anteriormente ou externamente no processo de aprendizagem." (BURIGO, 2005 p.243).

Temos que entender que os conteúdos de Matemática trabalhados na escola não visam apenas uma aplicação prática destes saberes no dia-a-dia dos estudantes, mas também ajudam a desenvolver formas de pensar e raciocinar.

> [ensinar Matemática] não é fazê-las conhecer a sequência dos números primos ou uma coleção de teoremas sobre bissetrizes do triângulo, sem utilização alguma. É antes ensiná-las a ordenar e encadear seus pensamentos segundo o método de que servem os matemáticos. (DIEDONNÉ, 1955 apud FAGUNDES, 1977 p. 9).

O objetivo do professor ao trabalhar determinados conteúdos de Matemática não é simplesmente ensinar métodos ou fórmulas para resolver problemas, mas despertar no aluno a lógica e as formas de raciocínio e pensamento que são característicos da Matemática. Nas palavras de Fagundes "os tópicos ensinados devem se constituir em ilustrações bem escolhidas, se o que se deseja formar são cidadãos autônomos, envolvidos num processo de educação permanente." (1977, p.9).

Então um dos aspectos importantes no processo de ensino-aprendizagem são as formas de pensar a serem desenvolvidas em sala de aula. A Matemática torna-se mais uma área do conhecimento que pode contribuir para novas formas de pensar e raciocinar.

> O desafio que se apresenta é o de identificar (...) quais conhecimentos, competências, hábitos e valores são socialmente relevantes; em que medida contribuem para o desenvolvimento intelectual do aluno, ou seja, na construção e coordenação do pensamento lógico-matemático, da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de crítica, que constituem esquemas lógicos de referência para interpretar fatos e fenômenos. (BRASIL, 1997 p.34).

Nesse sentido quais são as contribuições da Geometria e quais as motivações para seu estudo?

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1998 p.34).

Encontramos em Burigo (2005) e em Usiskin (1994) respostas para esta última questão.

1. A Geometria como representação e estudo do mundo físico

Uma das motivações para o estudo da Geometria é a habilidade, por ela desenvolvida, de representar e analisar o mundo físico. Ao observar o nosso mundo é possível encontrar padrões, proporções e regularidades na natureza. Encontramos, por exemplo, um padrão hexagonal nos favos de uma colmeia, simetria em animais e plantas, as formas elípticas nas órbitas dos planetas, a sequencia de Fibonacci na espiral da concha de um caracol etc.

A Geometria euclidiana é somente uma das formas existentes de representação do mundo físico, no entanto "o modo como nos utilizamos dela na escola e no cotidiano suscita entre os alunos a indiferenciação entre a Geometria e aquilo que ela pretende representar." (BURIGO, 2005 p.245). A incapacidade de associar a Geometria estudada nas escolas ao mundo real faz com que os alunos não compreendam um importante papel desempenhado pela Geometria que é o de representar o espaço físico.

> Embora a Geometria derive do mundo físico, suas ligações com este mundo são ignoradas na grande maioria dos textos escolares elementares. E, mesmo quando encontradas nestes livros, as ligações da Geometria com o mundo real parecem não ter uma ligação muito precisa. (USISKIN, 1994 p.33).

Essa associação entre Geometria e mundo real é um dos aspectos a serem trabalhados nas aulas de Matemática, mas como essa associação muitas vezes não ocorrer, essa forma de pensar e analisar o nosso mundo acaba por não ser desenvolvida pelos nossos alunos.

2. A Geometria como forma de representar conceitos matemáticos de origem não visual ou física

Existem representações geométricas de conceitos que não estão relacionados à Geometria. A reta numerada é uma forma geométrica de representar os números reais. Através dos gráficos é possível apontar informações numéricas. O uso do Frac-Soma 235 ajuda na compreensão das frações. Diversas são as formas em que a representação geométrica está relacionada com tópicos como Aritmética ou Álgebra.

> Ás vezes usa-se a Geometria de objetos físicos para compreensão de conceitos matemáticos. Podem-se usar geoplanos para representar figuras geométricas ou o plano coordenado, blocos de Dienes para descrever a numeração e barras de Cuisenaire para ajudar a visualizar a adição e a subtração. (USISKIN, 1994 p.34).

Percebemos o quanto a Geometria pode auxiliar no aprendizado de outras áreas da Matemática. Utilizar a Geometria como forma de representação de conceitos não matemáticos auxilia na visualização dos aspectos e propriedades que estão em estudo.

3. A Geometria como forma de desenvolver o pensamento dedutivo

Conforme afirma Usiskin (1994, p.34) "dentre todas as áreas da Matemática, só a Geometria tem como objetivos principais justificar, discutir lógica e dedução e escrever demonstrações." Para Burigo (2005) o desenvolvimento do pensamento dedutivo e da argumentação são motivações para a inserção e valorização da Geometria no currículo do Ensino Fundamental.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais propõem aos professores um trabalho com Geometria que evidencie a exploração do espaço e da capacidade de representá-lo matematicamente. Este documento também destaca a importância de desenvolver nos alunos o pensamento indutivo e dedutivo e de se trabalhar explicações, argumentações e demonstrações.

Privar os estudantes do estudo de Geometria é privá-los das formas de pensar e estudar o mundo características desta área. Não trabalhar Geometria pode acarretar em uma formação escolar deficitária, pois os conhecimentos e habilidades geométricas não foram plenamente desenvolvidos.

2.2 A AUSÊNCIA DO ENSINO DE GEOMETRIA NAS ESCOLAS

Eu não tenho muitas lembranças de ter estudado Geometria nos Ensinos Fundamental e Médio. Por exemplo, trigonometria e sólidos geométricos foram assuntos que estudei apenas na faculdade. Já ouvi relatos de colegas de curso que também afirmam não ter visto na escola diversos tópicos de Geometria. Então por que a Geometria está omitida nos planos de aula dos professores de Matemática?

Neste capítulo, tratarei de buscar as causas do abandono do ensino de Geometria que ainda hoje é uma realidade em muitas escolas brasileiras.

> A Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações. (BRASIL, 1998 p.122).

A meu ver, o primeiro passo nessa busca está no estudo do conteúdo publicado sobre Geometria e a forma como ela é abordada nos livros didáticos, já que os professores elaboram as suas aulas consultando esse material.

> Muitas vezes o livro didático é a única referência para o trabalho do professor, passando a assumir até mesmo o papel de currículo e de definidor das estratégias de ensino. O livro torna-se assim um importante suporte de conhecimentos e de métodos para o ensino, servindo como orientação para as atividades de produção e reprodução de conhecimento. (PAVÃO, 2006, p. 3).

Carlovich (2005) faz uma análise do ensino de Geometria nas coleções de livros didáticos do Ensino Fundamental mais utilizados nas escolas públicas do Estado de São Paulo nas décadas de 1990 e 2000. "Nas coleções de 1990 observamos que o ensino da Geometria é concentrado num único capítulo, não havendo integração com as outras partes da Matemática. Nas coleções de Giovanni e Iezzi esse estudo é realizado no final do livro (p.110)."

Percebe-se na análise acima que o ensino de Geometria nos livros didáticos da década de 1990 aglomera-se em um único capítulo quando não está localizado no final do livro. Isso indica que esse estudo, quando ocorria, era dissociado das outras áreas da Matemática e ainda era abordado somente no final do ano. Fato esse que contribui para o não ensino de Geometria nas escolas conforma afirma Bertonha "(...) como o programa de matemática, a cada série, é muito extenso e os tópicos referentes à geometria são sempre finais, nem sempre é possível cumprir toda a programação, devido ao curto espaço de dias letivos (180 dias).” (1989, apud PEREIRA, 2001, p.20).

Percebe-se que os professores deixam para o final do ano o ensino de Geometria, por uma influência dos livros didáticos da década de 1990, e devido à falta de tempo, esse conteúdo acaba por não ser trabalhado nas escolas.

Na análise dos livros didáticos da década de 2000, Carlovich, (2005, p. 111) conclui que o ensino de Geometria agora acontece de forma integrada com outras áreas da Matemática e cita como exemplo as coleções de Tosatto e Dante. Desta forma vemos que houve um avanço na abordagem ao ensino de Geometria nos livros didáticos da década de 2000 com relação à década anterior.

> Nossa análise das coleções de livros didáticos dos anos 2000 aponta para algum otimismo em relação ao ensino de Geometria no Brasil. Em primeiro lugar, a Geometria apresenta-se nos livros em capítulos intercalados e mais integrada com as outras partes da Matemática. Isso acena para uma mudança em relação ao seu abandono. (CARLOVICH, 2005, p. 120).

Podemos perguntar a que se deve essa mudança na qualidade dos livros didáticos nos anos 2000. Para Carlovich (2005) a implantação do Programa Nacional do Livro Didático (PNDL) em 1995 fez com que os conteúdos de Matemática abordados nos livros fossem aprimorados, já que os livros começaram a ser avaliados pelo governo. “O livro didático também passa a ser objeto de constante debate e pesquisa no meio acadêmico,” (PAVÃO, 2006, p.4).

Mas, se a qualidade da didática de Geometria nos livros didáticos de Matemática melhorou, por que o ensino deste tema continua a ser deixado de lado nas escolas ainda hoje?

2.2.1 A formação do professor

A partir de 1968 são ampliadas as redes públicas de ensino de 1º e 2º graus sendo necessários mais professores para suprir as novas vagas que surgem. Muitos cursos superiores para a formação de professores são criados nessa época.

> Os novos cursos criados (...) estabelecem critérios pouco rigorosos de ingresso e, principalmente, são organizados, em sua maioria, como “licenciaturas curtas” em determinadas áreas de estudo, seguidas de especialização em uma das disciplinas

> desta área. Essa organização não garante, em geral, o domínio dos conteúdos, nem mesmo os da disciplina sobre a qual incide a especialização. (PAVANELLO, 1993 p. 14).

Com uma formação insuficiente e com a falta de atualização, os professores de Matemática não possuem os conhecimentos geométricos necessários para que esse assunto seja trabalhado em sala de aula.

> Falta metodologia apropriada ao professor, para que esse ensino (de Geometria) se realize, mostrando formação deficiente em conteúdo e metodologia assim como necessidade de orientação e atualização através de cursos, após estarem no mercado de trabalho. (PEREZ, 1991 apud PEREIRA, 2002, p.35).

Esse desarranjo dos professores no que se refere ao ensino de Geometria, fez com que esse conteúdo simplesmente não fosse abordado nas escolas, sendo deixado para o final dos planejamentos e para o final do ano letivo e dando lugar à Aritmética e à Álgebra.

Para Bertonha "(...) o despreparo dos professores em todos os níveis de ensino, levaram a escola a ministrar apenas conteúdos que elaboram um raciocínio algébrico." (1989, apud PEREIRA, 2001 p.22). Como consequência de um aprendizado em Matemática baseado apenas no raciocínio algébrico Pavanello afirma:

> Essa ênfase ao ensino da Álgebra e a ausência da Geometria, pode prejudicar a formação dos alunos por privá-los da possibilidade do desenvolvimento integral dos processos de pensamento necessários à resolução de problemas matemáticos. (1993 p.16).

2.2.2 O Movimento da Matemática Moderna

O Movimento da Matemática Moderna surge na década de 60 e influência o ensino de Matemática em vários países inclusive o Brasil. Baseados nesse movimento são publicados livros didáticos de Matemática onde "está presente a preocupação com as estruturas algébricas e com a utilização da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos." (PAVANELLO, 1993, p. 13). Em 1976 a Secretaria de Educação elabora a guia curricular para o Ensino Fundamental e "apresenta o ensino de Geometria por meio de transformações." (PEREIRA, 2001 p.61)

> A orientação de trabalhar a Geometria sob o enfoque das transformações, assunto não dominado pela grande maioria dos professores do secundário, acaba por fazer

> com que muitos deles deixem de ensinar geometria sob qualquer abordagem, passando a trabalhar predominantemente a álgebra – mesmo porque, como a Matemática Moderna fora introduzida através desse conteúdo, enfatizara sua importância. (PAVANELLO, 1989 apud PEREIRA, 2001 p. 62).

Percebemos como o Movimento da Matemática Moderna causou uma reforma no ensino de Geometria através de mudanças no currículo escolar feitas pela Secretaria de Educação e pela consequente transformação do ensino de Geometria nos livros didáticos da época.

Trabalhar Geometria com enfoque nas transformações não foi bem aceito pelos professores por se tratar de um assunto não estudado na faculdade. Desta forma o ensino de Matemática acaba priorizando a Álgebra e a Geometria acaba por ser esquecida.

O Movimento da Matemática Moderna acaba por influenciar inclusive as faculdades que passam a priorizar o ensino da Álgebra. Para Bertonha, o Movimento da Matemática Moderna "seguindo algumas correntes de ensino, também enfatizava a Álgebra em seu modelo de ensino; as próprias faculdades já o faziam em diversos cursos ministrados." (1989, apud PEREIRA, 2001 p.61).

Em 1971 é promulgada a Lei 5692/71 que deixa livre às escolas a escolha dos conteúdos a serem trabalhados.

> A liberdade que essa lei concedia às escolas quanto à decisão sobre os programas das diferentes disciplinas possibilitou que muitos professores de Matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a Geometria, deixassem de incluí-la na sua programação. (PAVANNELO, 1993, p. 7)

Sob influência do currículo escolar, dos livros didáticos, da formação acadêmica e com a promulgação da Lei 5692/71 o consequente abandono do ensino da Geometria torna-se uma constante predominantemente nas escolas públicas brasileiras.

O acontecimento do abandono do ensino de geometria analisado neste capítulo, ainda deixa algumas sequelas no ensino de Matemática atual. Mas vale ressaltar as mudanças positivas na abordagem da Geometria nos livros didáticos a partir da década de 2000, conforme constatado por Carlovich, que influenciaram para uma gradual retomada deste conteúdo nas escolas.

3. TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) é uma teoria psicológica do conceito que oferece uma estrutura para as pesquisas sobre aprendizagem. Esta teoria ajuda a compreender como os alunos constroem os conhecimentos matemáticos.

Para Vergnaud, um conceito matemático está introduzido em um campo conceitual, este que é composto por várias situações de diferentes tipos. O saber se forma a partir de problemas para resolver, ou seja, de situações. Um conceito não se forma a partir de um único tipo de situação, logo as atividades de ensino devem ser diversificadas, de modo que se permita ao aluno que trabalhe determinado conceito em diversas situações.

> Um conceito não pode ser reduzido à sua definição, principalmente se nos interessamos por sua aprendizagem e seu ensino. É através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança. (VERGNAUD, 1993 p. 1).

Desta forma, a aprendizagem de um conceito novo pode acontecer tanto com problemas teóricos quanto práticos, e a linguagem e o simbolismo também exercem importante papel na conceitualização.

Vergnaud afirma que, os professores devem propor situações onde os conhecimentos matemáticos estudados façam sentido, pois o conhecimento do aluno evolui ao longo do tempo, no decorrer das variadas experiências que ele vivencia dentro e fora da escola. Geralmente, diante de um problema novo, ele faz uso dos conhecimentos desenvolvidos através das experiências anteriores, e procuram adaptar aquilo que eles já sabem ao problema em questão (MAGINA, 2005).

Vergnaud (1993) distingue duas classes de situações em que um sujeito se encontra ao resolver um problema:

1. classes de situações em que o sujeito dispõe, no seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
2. classes de situações em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso.

3.1 ESQUEMAS

Um esquema é "a organização invariante do sujeito ou do comportamento sobre uma classe de situações dadas." (VERGNAUD, 1993, p. 2) Essas situações são formadas por conhecimentos em ação ou invariantes operatórios que são "elementos cognitivos que fazem com que ação do sujeito seja operatória" (SILVA, 2009 p.10). Esses conhecimentos ou invariantes são implícitos e são constituídos por teoremas em ação e conceitos em ação.

> Teoremas em ação e conceitos em ação são, respectivamente, proposições tidas como verdadeiras sobre o real e categorias de pensamentos tidas como pertinentes. Entende-se que conceito em ação não é um verdadeiro conceito científico, mas os dois podem, ainda que de forma progressiva, se tornarem verdadeiros conceitos e teoremas científicos. (SILVA, 2009 p.10).

Na primeira classe de situação em que um sujeito se encontra ao resolver um problema os comportamentos são automatizados e organizados por um só esquema. Na segunda classe de situação o sujeito utiliza vários esquemas, "que podem entrar em competição e que, para atingir a solução desejada, devem ser acomodados, descombinados e recombinados. Este processo é necessariamente acompanhado por descobertas" (VERGNAUD, 1993, p. 2).

> Os esquemas organizam o comportamento do sujeito para uma classe de situações dada, mas também organizam, ao mesmo tempo, sua ação e a atividade de representação simbólica, sobretudo linguística, que acompanha essa ação. Uma criança de 5 anos enumera contando em voz alta; um aluno de 12 anos trata uma equação algébrica escrevendo no papel e murmurando. De um modo geral, o tratamento de uma situação nova se faz acompanhar por uma atividade linguística e simbólica. Esta atividade é eventualmente interiorizada. Ela é tanto mais importante e manifesta, quanto mais nova é a situação e menos automatizado o tratamento. A solução de problemas muito novos é impossível sem a linguagem, sobretudo quando essa solução evoca conceitualizações novas e a transformação de certos elementos em objetos de pensamento bem identificados. (VERGNAUD, 1993, p. 26)

A automatização é uma das manifestações mais visíveis do caráter invariante da organização da ação, mas ela não impede que o sujeito conserve o controle das condições sob as quais tal operação é apropriada ou não.

O aprendizado de novos conceitos abrange "as operações que se automatizam progressivamente e as decisões conscientes que oportunizam a percepção dos valores particulares das variáveis da situação" (VERGNAUD, 1993, p. 3). Todas as nossas condutas têm uma parte de automatização e uma parte de decisão consciente.

Quando uma criança utiliza um esquema ineficaz para certa situação, a experiência o conduz a mudar de esquema ou a modificar o esquema.

> Não se pode teorizar sobre a aprendizagem da Matemática apenas a partir do simbolismo, nem apenas a partir das situações. Deve-se considerar o sentido das situações e dos símbolos. A chave é considerar a ação do sujeito em situação e a organização de seu comportamento. Daí a importância atribuída ao conceito de esquema. (VERGNAUD, 1993, p.25)

Desta forma, podemos considerar o conceito como uma trinca de conjuntos:

$$C= (S, I, L)$$

S é o conjunto das situações que dão sentido ao conceito, ou seja, dão significado ao objeto em questão (referência).

I é o conjunto das invariantes em que se baseia a operacionalização dos esquemas, ou seja, que trata das propriedades e procedimentos necessários para definir esse objeto (significado).

L é o conjunto das formas de linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento, ou seja, permitem relacionar o significado desse objeto com as suas propriedades (significante).

3.2 CAMPO CONCEITUAL

Um Campo Conceitual é, ao mesmo tempo, um conjunto de situações, cujo domínio progressivo demanda uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão, e um conjunto de conceitos que contribuem com o domínio dessas situações.

Somente a partir de variadas situações é que os conceitos matemáticos passam a fazer sentido para os alunos, e a maioria destas situações não pode ser compreendida tomando como base um único conceito, são necessários variados conceitos.

> Quando Vergnaud propõe estudar um campo conceitual ao invés de um conceito, ele está afirmando numa situação problema qualquer, nunca um conceito aparece isolado. Se pensarmos em uma situação aditiva extremamente simples, como por exemplo, “Ana tinha 5 blusas e no seu aniversário sua avó lhe deu 2 blusas. Quantas

> blusas Ana tem agora?" podemos identificar vários conceitos aqui envolvidos, os quais a criança precisa ter adquirido para resolver com sucesso o problema, são eles: adição, temporalidade (tinha = passado, tem agora = presente), contagem (depois do 5 vem o 6, depois o 7). Se tivéssemos trabalhado com números maiores – acima de 15 ou 20 – seria preciso que a criança tivesse o entendimento do sistema decimal (os numerais são 10 – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – e a partir de suas combinações obteremos infinitos números) (MAGINA, 2005, p. 4).

Desta forma podemos perceber porque Vergaud analisa um campo conceitual e não um único conceito: ao resolver um problema o aluno não utiliza apenas um conceito, mas vários deles.

3.3 CAMPO CONCEITUAL DAS ESTRUTURAS ADITIVAS

Vergnaud (1993) explica que o campo conceitual das estruturas aditivas é "o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas" (p.10).

No campo conceitual das estruturas aditivas há seis relações nas quais todos os problemas de adição e subtração estão inseridos:

1. Composição de duas medidas em uma terceira.
2. Transformação (quantificada) de uma medida inicial em uma final.
3. Relação (quantificada) de comparação entre duas medidas.
4. Composição de duas transformações.
5. Transformação de uma relação.
6. Composição de duas relações.

Esses problemas pertencem a diversas situações, desta forma os estudantes devem não só saber as operações de adição e subtração, como precisam saber resolver problemas em diversas situações.

4. CONSIDERAÇÕES SOBRE O TANGRAM

4.1 A MATEMÁTICA DO TANGRAM

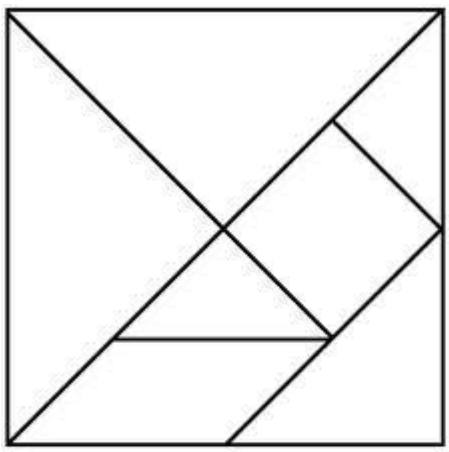
Tratarei aqui da matemática do Tangram, mais especificamente da Matemática que irei trabalhar na sequência didática proposta neste trabalho.

1. Área

O principal tópico a ser estudado neste trabalho é o conceito e cálculo de áreas. Com o Tangram há uma forma interessante de abordar este assunto já que existe uma relação de proporcionalidade entre as peças do Tangram.

Tomando o quadrado original formado pelas sete peças do Tangram como unidade de área, observamos que cada triângulo grande tem área igual a 1/4, o triângulo médio, o quadrado e o paralelogramo têm áreas iguais a 1/8 e o triângulo pequeno tem área igual a 1/16.

Figura 1 - Tangram



Fonte: Arquivo pessoal

2. Área invariante

A questão da área invariante também será abordada neste trabalho. É fácil perceber esta propriedade com o Tangram. A área de diferentes figuras formadas pelas sete peças é constante já que estas figuras são formadas pelas mesmas peças, apenas posicionadas de forma diferente.

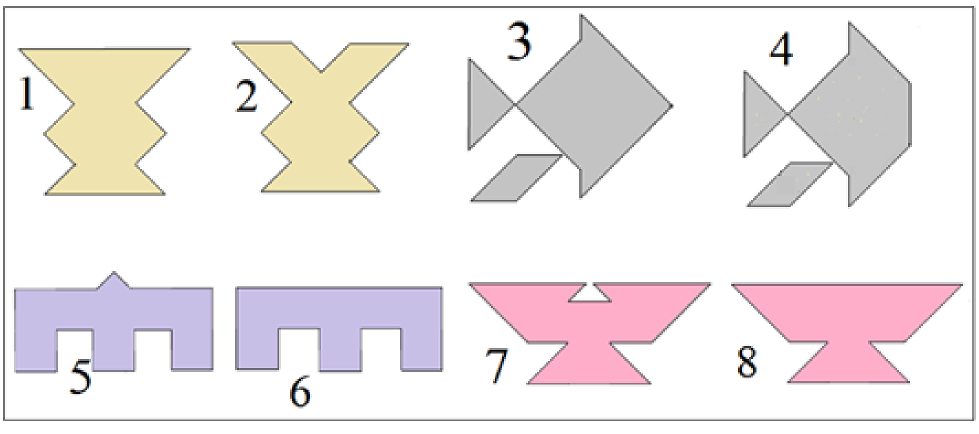
A composição e decomposição de figuras é uma forma simples e intuitiva de comparar a área de figuras poligonais. Desta forma, se duas figuras planas são formadas com as mesmas peças, sem sobreposições, elas têm a mesma área.

Utilizando o Tangram podemos construir figuras de diversas formas, porém qualquer que seja a figura formada todas têm a mesma área. Isso porque para montar cada figura são utilizadas todas as sete peças.

Ao trabalhar com o Tangram, o aluno monta e desmonta diversas figuras utilizando as sete peças. Assim o estudante percebe que não importa a posição ou a forma que cada peça se encontra nas diversas silhuetas, mas sim o conjunto, ou seja, todas as figuras são formadas pelas mesmas sete peças, logo possuem a mesma área.

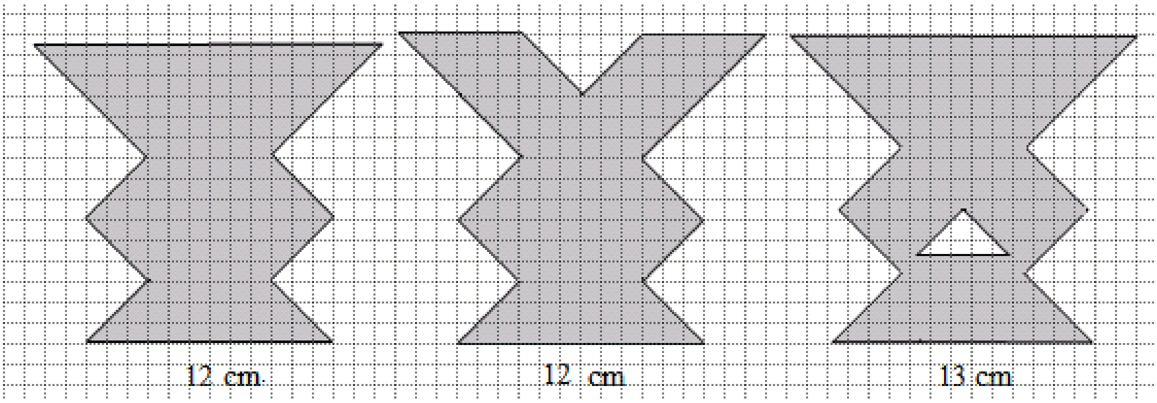
Porém existem alguns paradoxos no Tangram. Esses paradoxos são figuras construídas com as sete peças do Tangram e sem sobreposição, mas que supostamente são contraditórias. Alguns destes paradoxos são apresentados na atividade 7 da proposta didática que se encontra no capítulo 4 deste trabalho. As imagens não foram modificadas. Representam exatamente as silhuetas construídas com as sete peças do Tangram. Mesmo assim, ao olharmos as figuras parecemos não acreditar que elas sejam constituídas com as mesmas peças. Aparentemente o primeiro peixe tem mais peças que o segundo. Afinal, onde foi parar a parte da frente do peixe? Como surgiu aquele bico em cima da ponte? Como é possível aquele buraco na taça? Se as regras do jogo não foram burladas, pois as figuras contêm as sete peças, não há sobreposição de peça e todas as peças estão encostadas umas às outras, como explicar estas imagens?

Figura 2 - Paradoxos do Tangram



Fonte: Arquivo pessoal

Figura 3 - Paradoxo 1

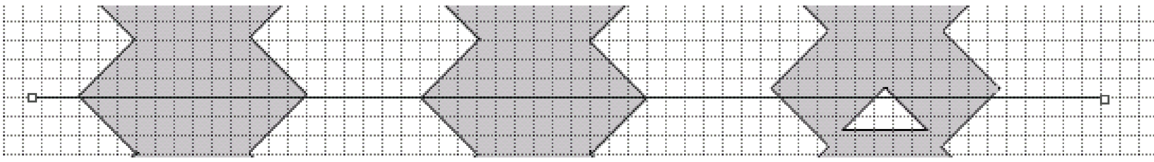


Fonte: Arquivo pessoal

Na verdade não há paradoxo algum já que as silhuetas possuem diferenças na altura ou na largura, embora algumas não sejam facilmente perceptíveis aos nossos olhos.

Nas imagens acima podemos perceber que há diferenças na altura da primeira figura com relação às outras. Notemos também a diferença no tamanho da base do vaso na terceira figura com relação às outras. Tomando o lado do quadrado como 1 cm vemos que a base da terceira figura mede 13 cm, enquanto que as bases das primeiras valem 12 cm. Percebemos também um desnível na parte central da terceira silhueta:

Figura 4 - Solução do paradoxo 1



Fonte: Arquivo pessoal

Desta forma, estas imagens desafiam nossa visão e raciocínio. Se a área de figuras formadas com as sete peças é invariante, ao entrar em contato com estas imagens supostamente paradoxais, os alunos podem entrar em contradição e achar que a área de figuras formadas com as mesmas peças pode mudar.

4.2 TRABALHOS CORRELATOS SOBRE TANGRAM E O ENSINO DE MATEMÁTICA

Com o objetivo de conhecer o que têm sido publicado sobre Tangram e Educação Matemática, nesta seção farei uma análise de cinco artigos apresentados no XI ENEM e do artigo “O uso do Tangram para aprendizagem de Geometria plana” de autoria de Alves, Galdeski e Carvalho (2011). Nesta análise foi verificado quais conteúdos de Matemática foram trabalhados com o Tangram e quais os métodos e didáticas de ensino utilizados.

4.2.1 Mumbach, Wolkmer e Preussler - Tangram: Uma alternativa para aprendizagem de conceitos Geométricos

Este trabalho, publicado nos anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática em 2013, trata de um relato de experiência com o Tangram na aprendizagem de conceitos como congruência e semelhança de figuras Geométricas.

O grupo, composto por dois alunos da Licenciatura em Matemática e um professor orientador, criou uma sequência didática utilizando o Tangram pensando em trabalhar os conceitos geométricos de forma lúdica. A proposta foi fundamentada na Teoria Histórico-cultural de Vygotsky.

A prática aconteceu em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental. A atividade inicial consistia em um questionário de sondagem sobre conceitos básicos de Geometria como reconhecimento de formas geométricas. Na atividade seguinte os alunos, através de instruções por escrito, construiram o Tangram, e responderam a questões acerca das características geométricas das peças do Tangram como, por exemplo lado maior, ângulo reto etc. As questões propostas aos alunos não foram divulgadas no artigo. A terceira atividade consisitia em questões relacionadas às áreas das figuras. Novamente as atividades e perguntas propostas não foram divulgadas no trabalho.

Os autores relatam que os alunos acharam mais fácil responder às perguntas com o uso do material concreto, pois segundo eles, podem pegar (as peças do Tangram) e testar. Também afirmam que a turma não estava acostumada a trabalhar com material concreto nas aulas de Matemática. As melhores aprendizagens ocorrem quando estão relacionados a teoria e a prática, pois para Vigotsky (2007) a internalização dos conceitos ocorre após o sujeito interagir com o meio e com os instrumentos. Finalizam destacando a importância do uso de materiais concretos nas aulas de Matemática.

4.2.2 Jesus e Thiengo – Abordagem de polígonos mediada pelo uso do Tangram: Relato de uma experiência com alunos surdos

Neste trabalho, publicado nos anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática em 2013, é apresentado um relato de experiência, com alunos surdos e ouvintes, acerca de uma proposta didática sobre polígonos mediada pelo uso do Tangram. O artigo também trata da importância da Lingua Brasileira de Sinais na mediação entre surdos e ouvintes. Na escrita e análise das experiências os autores utilizaram Skliar (2012) e Quadros e Karnopp (2004) como referencial teórico sobre a educação de surdos.

Os autores começam o artigo discorrendo sobre um pouco da história da educação de surdos. Em seguida já começam com o relato de experiêcia da aplicação de uma sequencia didática. O objetivo do trabalho era identificar as características, as diferenças e os elementos dos polígonos.

Em um primeiro momento foram apresentados alguns polígonos regulares bem como suas característica e elementos. A aula contava com a presença de um intérprete de LIBRAS. Os autores relatam que o nome de alguns polígonos não tinha correspondência na língua de sinais, logo os próprios alunos com a ajuda do intérprete criaram os sinais para estes polígonos.

A segunda atividade consisitia na identificação de polígonos em diversas imagens. A terceira atividade tinha como objetivo comparar diversos polígonos, de forma a perceber que alguns podiam ser formados apartir da composição de outros polígonos de menor área, como por exemplo, é possível formar um quadrado a partir de dois triângulos retângulos congruentes.

Na quarta atividade foi introduzido o Tangram, o qual não pode ser construído pela turma porque não havia tempo para isso. Com o uso das peças os alunos deveriam construir polígonos. Os autores relatam que para construir polígonos utilizando três peças os alunos não tiveram dificuldades, mas a construção de polígonos com as sete peças é mais difícil e apenas alguns alunos conseguiram completar a tarefa.

Os autores finalizam o artigo afirmando as dificuldades dos alunos surdos estavam em entender o sentido e significado dos termos e em formular perguntas. O Tangram ajudou os alunos surdos, pois se trata de um meio visual de compreender alguns conceitos matemáticos.

4.2.3 Nascimento e Silva – Oficina de Tangram: Investigação métrica e Geométrica

Este trabalho publicado nos Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática em 2013 fala sobre o uso de materiais manipulativos a um relato de uma oficina de Tangram que ocorreu com turmas de 8º e 9º anos do Ensino Fundamental.

No primeiro encontro os alunos construiram o Tangram através de dobradura em papel. Também identificaram cada peça do Tangram e suas propriedades. No segundo encontro os alunos calcularam o perímetro de todas as peças e também a área através das fórmulas das áreas de figuras geométricas planas. No terceiro encontro foi discutido as relações de proporcionalidade entre as áreas das peças e o significado da repetição do valor $\sqrt{2}$. No último encontro os alunos criaram histórias utilizando as peças do Tangram e responderam a um questionário avaliativo sobre a oficina.

Os alunos responderam no questionário que puderam aprender conceitos novos e formas geométricas que não conheciam. Os autores terminam o trabalho dizendo que a intervenção foi bastante favorável.

4.2.4 Misse, Ferreira e Paulo – O Tangram como recurso para o trabalho com leitura e escrita nas aulas de Matemática

Este trabalho apresenta o relato de um minicurso com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental sobre leitura e escrita nas aulas de Matemática com o uso do Tangram. O objetivo do trabalho é fazer uma articulação entre as disciplinas de Português e Matemática onde os alunos possam utilizar tanto a linguagem cotidiana quanto a linguagem matemática. Os autores defendem que os professores de matemática devem trabalhar em suas aulas a leitura e a escrita. Um dos caminhos para essa abordagem de leitura e escrita em sala de aula é a contação de histórias.

O minicurso começa através da contação da História das Sete Peças do Tangram enquanto os alunos constróem o material através de dobraduras. Os personagens da história são representados através de montagens com as peças do Tangram os quais ilustraram a história que foi exposta em papel pardo.

Em um segundo momento foi montada uma tabela que continha as áreas das figuras montadas pelos alunos utilizando uma unidade de medida não padronizada. Os autores afirmam que também trabalharam com a adição e subtração de frações utilizando o Tangram, mas não deixam claro como esse trabalho foi feito.

Os autores finalizam afirmando que o minicurso contribuiu para o trabalho em grupo e que se surpreenderam positivamente com a criação dos personagens e da história representada no cartaz. Eles também relatam que um grupo apresentou dificualdades na criação dos personagens e do cartaz, mas que com a intervenção dos professores a criatividade dos alunos aflorou. Não foi relatado no artigo o desenvolvimento em sala de aula das outras atividades descritas na proposta que envolviam o conceito de área e a soma e subtração de frações.

4.2.5 Ribeiror, Teresa e Cardoso – O uso do Tangram como uma ferramenta para a prática pedagógica

Este trabalho apresenta o relato de uma oficina oferecida a professores e alunos de Licenciatura em Matemática. Os autores começam o trabalho afirmando que o currículo de Matemática deve ser reestruturado de forma que a ênfase do processo de ensino-aprendizagem não esteja na repetição de exercícios, mas na interpretação de problemas. Desta forma a oficina se apresenta como uma alternativa no ensino de Matemática.

Na oficina foram trabalhadas as quatro operações básicas com os números racionais utilizando o Tangram. Também foi verificado o teorema de Pitágoras pela manipulação de dois conjuntos do Tangram. Foram deduzidas as áreas das peças utilizando o quadrado como unidade. A avaliação da oficina ocorreu através de um questionário online respondidos pelos participantes sobre o andamento e o aproveitamento no minicurso.

O artigo termina com gráficos que apresentam as respostas dos participantes ao questionários. Todos os gráficos apresentam ótimos índices de aproveitamentos dos alunos, melhoria nos conhecimentos e das práticas pedagógicas dos participantes.

4.2.6 Alves, Gaideski e Carvalho – O uso do Tangram para a aprendizagem de Geometria plana

Este artigo apresenta sugestões de atividades envolvendo Geometria e o Tangram para o Ensino Fundamental e Médio. Os autores também relatam as experiências da utilização destas atividades em sala de aula.

O artigo ressalta a importância do uso de jogos e atividades lúdicas no ensino da Matemática. Partindo dessa ideia, os autores elaboram uma proposta de ensino com o uso do Tangram.

No terceiro capítulo os autores escervem especificamente sobre o Tangram e a Matemática que pode ser tabalhada com esse quebra-cabeça como, área, perímetro, ãngulos, semelhanças de figuras etc. Em seguida os autores apresentam sugestões de atividades com o Tangram. As atividades foram realizadas com alunos do Ensino Fundamental.

Primeiramente foi apresentado aos alunos a história da origem do Tangram. Depois de receberem o Tangram pronto, os alunos responderam à questões de Geometria com o auxilio do material. Nessa atividade os alunos tiveram que identificar as formas geométricas das peças do Tangram, bem como identificar ângulos retos, construir quadrados com determinados números de peças e calcular áreas de figuras formadas por diferentes números de peças.

Na segunda atividade os alunos construiram diferentes figuras com todas as peças do Tangram e eram também questionado a respeito das áreas dessas peças, tomando o quadrado como unidade, que deveria ser constante. Os autores afirmam que esta atividade foi prazerosa, pois os alunos aprenderam a calcular áreas de uma forma dinâmica e divertida.

Na terceira atividade os alunos tiveram que calcular o perímetro de diversas figuras formadas com as peças do tangram utilizando a régua para medir os lados.

Na quarta tarefa os alunos tiveram contato com o Tangram virtual, onde puderam construir diferentes figuras utilizando essa outra versão do quebra-cabeça.

Nas atividades para o Ensino Médio os autores propuseram que os alunos construíssem o Tangram em folha quadriculada a partir de instruções que utilizavam vocabulário geométrico. Depois, foi entregue uma réplica em madeira com as peças soltas para que a turma pudesse montar o quadrado original. Outra atividade consisitiu na construção de diferentes formas geométricas como quadrado, triângulo e trapézio utilizando-se de um diferente número de peças. A última atividade consistia em estudar as relações métricas do Tangram. Adotou-se o quadrado feito com as sete peças do Tangram como unidade de área e perguntou-se aos alunos as áreas de cada peça bem como o perímetro.

Os autores concluem o artigo afirmando que o trabalho com Tangram e Geometria consegue envolver teoria e prática em sala de aula e promover a interação entre os alunos. Afirmam ainda que há poucas publicações sobre o assunto e que também é pouco citado em livros didáticos.

Quadro Resumo

Segue um quadro resumo dos trabalhos analizados:

Autores	**Tema**	**Base Teórica**	**Método**	**Resultados**
Mumbach, Wolkmer e Preussler	Tangram na aprendizagem de conceitos de congruência e semelhança de figuras Geométricas	Teoria Histórico-cultural de Vigotsky, Souza, Kamil, Moreira, Oliveira, Rolim.	Sequência didática aplicada em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental	As melhores aprendizagens ocorrem quando relacionamos teoria à prática, pois para Vigotsky a internalização dos conceitos ocorre após o sujeito interagir com o meio e com os instrumentos.
Jesus e Thiengo	O uso do Tangram para o ensino de polígonos com alunos surdos	Skliar, Quadros e Karnopp, Alves, Uzan e Giovanni.	Sequência didática aplicada em uma turma de alunos surdos e ouvintes.	O Tangram ajudou os alunos surdos, pois se trata de um meio visual de compreender os conceitos matemáticos.
Nascimento e Silva	Congruência, proporcionali-dade área e perímetro com as peças do Tangram	Iran Abreu Mendes e Reginaldo Alves	Oficina em turmas do 8º e 9º ano	Os autores concluem que a intervenção foi favorável, pois a maioria dos alunos respondeu no questionário final, que aprendeu um conceito novo ou formas geométricas que não conheciam.
Misse, Ferreira e Paulo	Leitura, escrita e contação de histórias em Matemática com o Tangram	Felisberto e Lopes, Lopes e Nacarato, Souza, Santos, Nogueira, D’Ambrósio.	Minicurso aplicado em uma turma do 6º ano.	O uso do Tangram para o trabalho com leitura e escrita nas aulas de Matemática leva o aluno a expor suas ideias, questionar o sentido do que é feito e valorizar alternativas de solução investigando possibilidades.
Ribeiror, Teresa e Cardoso	Explorando o Tangram para a prendizagem	Azcaráte, Cármen Passos, Cunha, D’Amore,	Oficina para professores e alunos de	A oficina possibilitou aos seus participantes o desenvolvimento da

	de conceitos matemáticos	Flemming, Fiorentini e Nacarato, Groenwald, Nóvoa, Sampaio.	Licenciatura em Matemática.	curiosidade e o interresse pela pesquisa de novas abordagens aos conteúdos de Matemática. Expectativa dos autores em que os partipantes efetivamente incorporem o Tangram nas suas práticas pedagógicas.
Alves, Gaideski e Carvalho	Relato de experiência com o Tangram e conceitos geométricos em sala a de aula e sugestões de atividades para o Ensino Fundamental e Médio.	Inoue, Migliori e D'Ambrósio, Piaget, Ribeiro, Romanowski, Sadowsky, Serres, Zaslavsky.	Sequência didática aplicada em duas escolas púbicas uma de Ensino Fundamental e outra de Ensino Médio.	O uso do Tangram na atividade docente pode envolver teoria e prática em sala de aula de uma forma prazerosa e divertida. Os alunos interagiram de forma construtiva e dinâmica. Os alunos desinteressados pela Matemática participaram das atividades.

A leitura destes trabalhos correlatos possibilitou-me conhecer um pouco do que têm sido publicado sobre o Tangram e o Ensino de Geometria. Em geral, os autores aqui apresentados afirmam que a utilização de um material manipulável, como o Tangram, facilita no aprendizado de conceitos geométricos seja porque o aluno internaliza o conceitos após a interação com o meio e os instrumentos ou porque a manipulação dos objetos propicia o envolvimento entre teoria e prática. Os autores também citam que o uso de jogos em sala de aula proporciona um ambiente de aprendizado divertido e prazeroso, onde o interesse dos estudantes pela Matemática pode ser estimulado.

5. METODOLOGIA

O Tangram pode auxiliar no processo de aprendizagem do conceito e do cálculo de áreas? Como? Para responder a esta questão foi desenvolvido um trabalho de investigação em duas turmas do 1º ano do Ensino Médio Normal de uma escola pública de Porto Alegre. Cada turma contém em média 20 alunos, com idades que variam de 15 a 30 anos.

Para a realização da investigação elaborei uma sequência didática composta por oito atividades que foram aplicadas durante três encontros – cada encontro composto de dois períodos, cada período com a duração de 45 minutos. As atividades foram realizadas no segundo semestre de 2013.

A coleta de dados foi feita através das respostas dos alunos às atividades propostas. Durante o andamento das aulas foram distribuídas folhas contendo as atividades a serem desenvolvidas, nestas folhas havia espaço para que os estudantes pudessem escrever suas respostas. Perguntas do tipo "Como você chegou a essa resposta?" estavam contidas nas folhas para que os alunos pudessem expressar seus raciocínios. Desta forma os resultados da proposta didática puderam ser analisados.

Durante as aulas pude solucionar dúvidas e orientar os alunos, mas não quis interferir no processo, deixando-os livres para resolverem os problemas de forma que pudessem buscar suas próprias estratégias. "[Em uma aula de investigação] o professor passa a desempenhar um papel de retaguarda. Cabe-lhe então procurar compreender como o trabalho dos alunos se vai processando e prestar o apoio que for sendo necessário." (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2003 p. 29).

As atividades têm caráter investigativo e são compostas por problemas. A resolução de problemas pode tornar-se uma atividade de investigação. "Uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. (...) Por isso, não é de se admirar que, em Matemática, exista uma relação estreita entre problemas e investigação." (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2003 p. 16).

As atividades foram feitas em grupo, onde os alunos puderam discutir os problemas e entrar em contato com outras visões e formas de pensar.

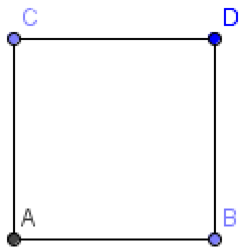
5.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

5.1.1 Atividade 1 – Construção do Tangram

A primeira atividade proposta foi a construção do Tangram. Cada aluno recebeu uma folha de EVA quadrada com o lado medindo 20 cm. O seguinte passo a passo da construção do Tangram foi feito no quadro:

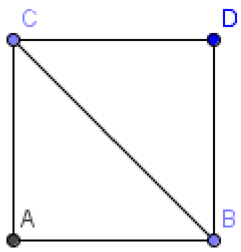
1. Você recebeu um pedaço de papel cartolina em forma de um quadrado.

Figura 5 - Construção do Tangram - Passo 1



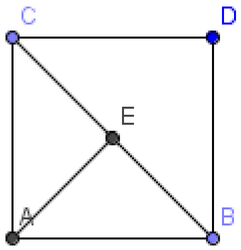
2. Trace a diagonal BC do quadrado, ou seja, um segmento de reta que vai do vértice B ao vértice C, dividindo o quadrado em dois triângulos iguais.

Figura 6- Construção do Tangram - Passo 2



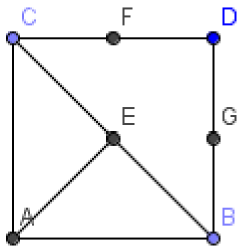
3. Agora trace a metade da diagonal AD do quadrado. As diagonais AD e BC se encontrarão em um ponto que chamaremos de E. O ponto E é o ponto médio das duas diagonais.

Figura 7 - Construção do Tangram - Passo 3



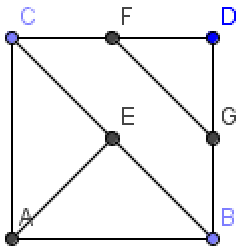
4. Nesta etapa você deverá encontrar os pontos médios F e G respectivamente dos segmentos CD e BD.

Figura 8 - Construção do Tangram - Passo 4



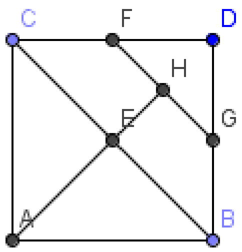
5. Agora trace um segmento de reta do ponto F ao ponto G.

Figura 9 - Construção do Tangram - Passo 5



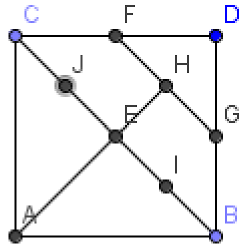
6. Prolongue o segmento AE até o segmento FG, de forma que o ponto de interseção desses segmentos, o ponto H, seja o ponto médio do segmento FG.

Figura 10 - Construção do Tangram - Passo 6



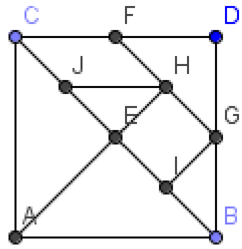
7. Encontre os pontos médios dos segmentos BE e CE, esses pontos serão I e J respectivamente.

Figura 11 - Construção do Tangram - Passo 7



8. Agora una com uma reta os pontos H e J e I e F.

Figura 12 - Construção do Tangram - Passo 8



5.1.2 Atividade 2 – Montagem do quadrado

Depois que todos os alunos recortaram as peças do Tangram, apaguei o desenho feito no quadro e pedi aos alunos que montassem novamente o quadrado. Nesta atividade estive circulando pela sala ouvindo os relatos e as dificuldades dos alunos.

Esta tarefa não é fácil. Principalmente para quem não conhece o Tangram. Aqui foi interessante analisar as estratégias que os alunos utilizaram para a montagem do quadrado que eles sabiam ser possível, já que a construção foi feita a partir deste.

4.1.3 Atividade 3 – Calculando a área das peças do Tangram

Nesta atividade perguntei aos alunos a área de cada uma das peças do Tangram, sabendo que o quadrado formado pelas sete peças possuía 20 cm de lado. Os alunos já sabiam calcular a área do quadrado multiplicando a medida da largura pela medida da altura. Estive circulando pela sala solucionando dúvidas e ajudando no que foi necessário. No entanto não quis interferir nas respostas para que os estudantes pudessem expressar seus raciocínios e formas de pensar livremente. Minha intenção não era a de conseguir respostas corretas, mas explorar as diferentes formas de pensar e de estratégia dos estudantes.

Foi proposta aos alunos a seguinte questão: *Sabendo que o quadrado formado por todas as sete peças do Tangram que você construiu possui 20 cm de lado determine as áreas de cada uma das peças do Tangram.*

5.1.4 Atividade 4 – Determinando áreas

1. Tomando o triângulo menor como unidade de área, ou seja, a área do triângulo menor é 1, qual a área do triângulo médio?
2. Tomando o quadrado como unidade de área, qual é a área do triângulo maior?
3. Tomando o quadrado como unidade de área, qual a área do triângulo menor? Explique como chegou a essa resposta.
4. Quais as peças do Tangram com a mesma área do quadrado?
5. Tomando o triângulo maior como unidade de área qual a área do paralelogramo? Como você obteve essa resposta?

Nesta atividade os problemas são relacionados à área de figuras, tomando as diferentes peças do Tangram como unidade de área. O objetivo desta atividade foi fazer com que os alunos percebessem que a unidade de área é uma superfície que é comparada com outras, se contando quantas vezes a unidade cabe na superfície que se quer saber a área. A unidade de área mais utilizada no Brasil é o metro quadrado, mas no caso do Tangram a unidade de área pode ser qualquer peça já que todas elas são proporcionais entre si. Podemos então trabalhar com unidades de áreas diferentes do quadrado, como o triângulo, por exemplo, possibilitando aos estudantes a percepção de que a unidade de área é uma mera convenção, podendo ser diferente de acordo com a situação.

Não foi permitido o uso de régua para medir os lados das peças, evitando que os alunos determinassem as áreas pelo uso de fórmulas. Meu objetivo era fazer com que eles buscassem outras estratégias e conhecimentos para a resolução do problema.

5.1.5 Atividade 5 - Desafios com o Tangram

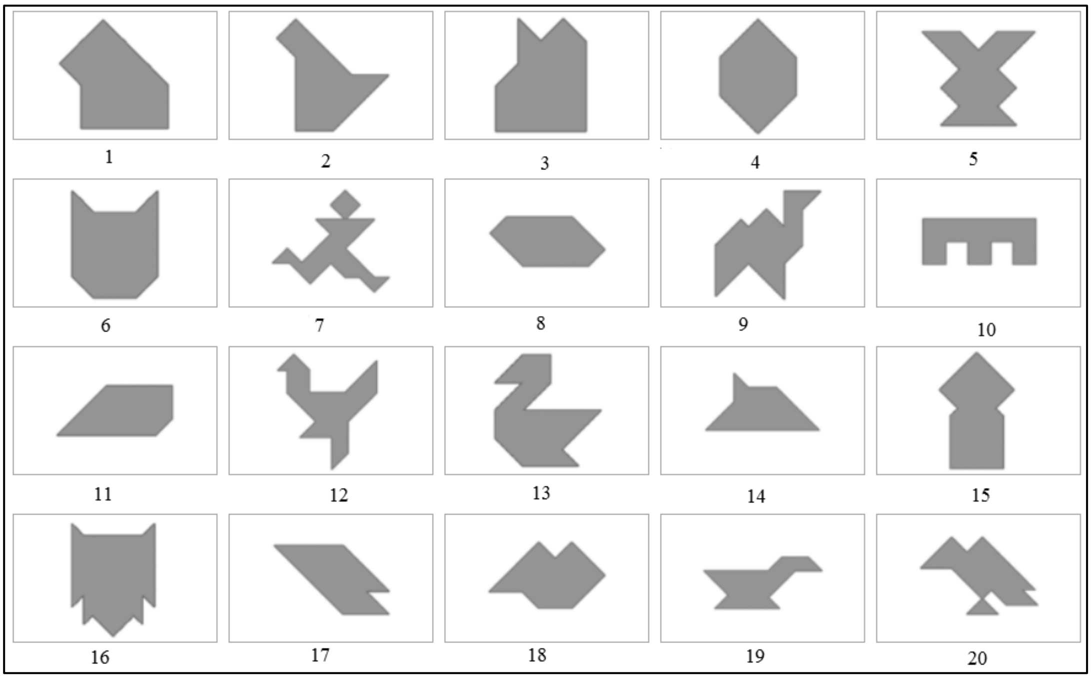
Indique quais peças do Tangram você utilizou. Lembre-se que para esta atividade você poderá somente utilizar as peças do Tangram que você construiu. Tomando o triângulo menor como unidade de área construa:

1. um quadrado de área dois.
2. um paralelogramo de área dois.
3. um triângulo de área quatro.
4. um trapézio de área quatro.
5. um retângulo de área quatro.
6. um triângulo de área dois.
7. um trapézio retângulo de área três.
8. um paralelogramo de área quatro.
9. um quadrado de área quatro.
10. um retângulo de área seis.

Estes desafios consistem na construção de figuras geométricas variadas como triângulo, trapézio etc. de determinada área. É uma forma de identificar algumas figuras da geometria plana nas peças do Tangram ou na combinação destas peças e trabalhar o raciocínio lógico através da manipulação destes objetos. Os alunos podem começar a perceber as peças que possuem lados congruentes e as possíveis combinações para a construção de determinadas formas. Ao se deparar com problemas deste tipo os alunos podem desenvolver estratégias para a montagem de cada figura com a área solicitada.

5.1.6 Atividade 6 – Área invariante

Figura 13 - Tangrans Atividade 6



Fonte: Adaptado do site Racha Cuca: http://rachacuca.com.br/jogos/tangram/

1. Construa e determine as áreas das figuras sabendo que todas as sete peças do Tangram foram utilizadas na construção. Escreva o número da figura e a área correspondente.
2. Você consegue observar algum padrão nas áreas das figuras? Qual?
3. Esse padrão é constante para quaisquer figuras construídas com as sete peças do Tangram? Justifique.

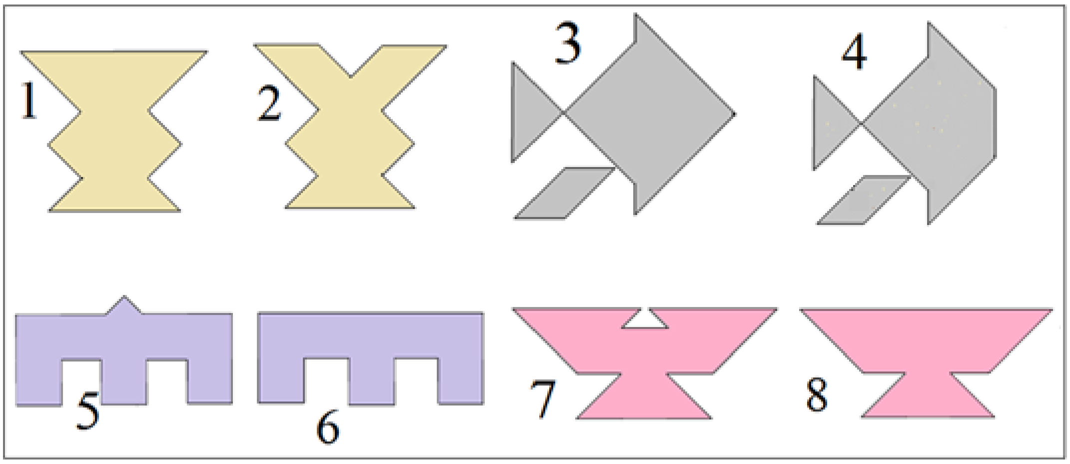
Nesta tarefa os alunos montaram, com todas as peças do Tangram que eles produziram, algumas das figuras 1 a 20 propostas, além de determinar a área de cada uma delas utilizando o quadrado como unidade de área. A ideia central é que as áreas de todas as figuras são iguais, já que são compostas pelas mesmas sete peças do Tangram. Desta forma os alunos puderam perceber que a área é invariante, ou seja, é possível formar qualquer figura com as sete peças do Tangram que a área permanecerá a mesma. Este marterial ajuda a na percepção desta propriedade.

> Quando trabalhamos num problema, o nosso objetivo é, naturalmente, resolvê-lo. No entanto, para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que o problema original. Outras vezes, não se conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevistas que proporciona. (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2003 p. 17).

O fato de a área ser constante para todas as figuras pode não ser óbvio para os alunos. Ao serem questionados se a área constante vale para quaisquer figuras construídas com as sete peças do Tangram, os alunos ao justificar suas respostas devem passar por um processo de investigação. Embora a questão a ser respondida seja a área das figuras o fato de a área ser constante pode gerar uma descoberta.

5.1.7 Atividade 7 – Paradoxos

Figura 14 - Paradoxos - Atividade 7



Fonte: Arquivo Pessoal

Ao ver pela primeira vez estes supostos paradoxos desafiaram-me. Pensei se realmente seria possível a montagem de tais figuras ou se se tratava de uma montagem ou truque visual. Propus trazer esse desafio para os alunos de forma que eles também ficassem em dúvida ao ver estas imagens e buscassem as respostas para solucionar esse problema.

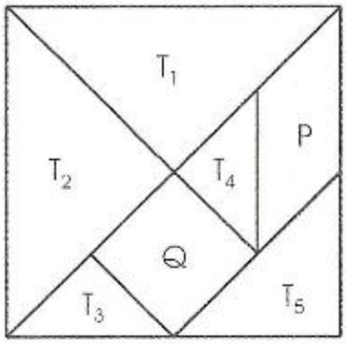
Na atividade anterior foram construídas diversas figuras com as sete peças do Tangram. As áreas das imagens, tomando o quadrado como unidade de área, eram todas iguais a 8 quadrados. Isso porque, como foi explicado anteriormente, as silhuetas são formadas por todas as sete peças do Tangram. Mas nesta atividade, ao responder qual a área das imagens paradoxais os alunos responderam de formas diferentes ao se basear somente nas imagens. Os estudantes estavam livres para pensar e responder às questões.

5.1.8 Atividade 8 – Questões

Nesta atividade propus aos alunos a resolução de duas questões relacionadas com o Tangram: uma do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e outra do vestibular da UFSM (Universidade Federal de Santa Maria). São questões que envolvem o conceito de área e o Tangram.

1. (UFSM – 2006 - Adaptado) Abaixo temos as sete peças do Tangram formando um quadrado. Se a área de Q é 1, ou seja Q é a unidade de área, é correto afirmar:

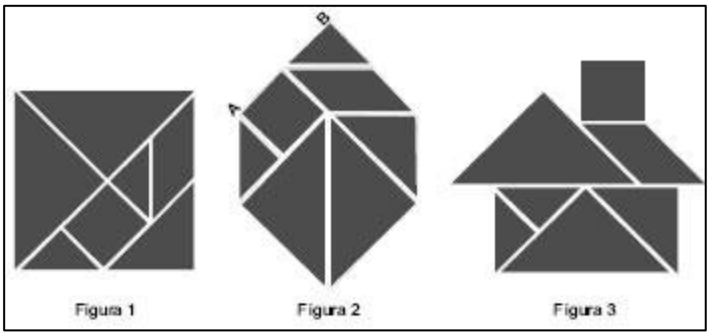
Figura 15 - Tangram - Questão UFSM



a) A área do quadrado maior é 4.
b) A área de T_1 é o dobro da área de T_3.
c) A área de T_4 é igual à área de T_5.
d) A área de T_5 é ¼ da área do quadrado maior.
e) A área de P é igual à área de Q.
Justifique sua resposta.

2. (ENEM - 2008) O Tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.

Figura 16 - Tangram - Questão Enem



Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, então a área da figura 3, que representa uma “casinha”, é igual a

a) 4 cm^2.

b) 8 cm^2.

c) 12 cm^2.

d) 14 cm^2.

e) 16 cm^2.

Justifique sua resposta.

6. ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo é apresentado e analisado algumas respostas dos alunos. As atividades foram realizadas em duas turmas do 1º ano do Ensino Médio Normal. Os alunos trabalharam em grupos, mas cada um entregou sua folha de respostas.

6.1 ATIVIDADE 1

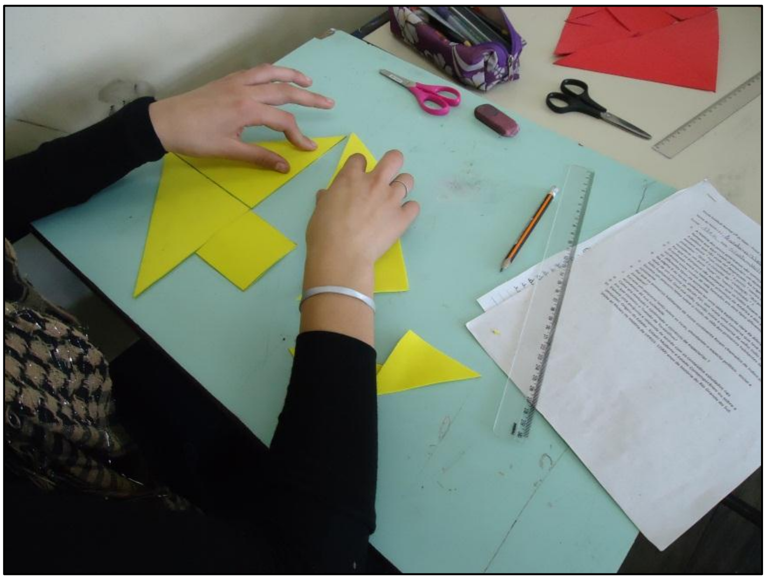
A primeira atividade consistia na construção do Tangram. Cada aluno recebeu um quadrado de TNT com 20 cm de lado, tesoura e régua. No quadro desenhei um quadrado e fui fazendo o passo a passo descrito na seção 4.1.1 para a montagem do Tangram. A realização desta atividade levou cerca de 20 minutos e os alunos não tiveram dificuldades.

Na etapa 4 da construção do Tangram, os alunos deveriam encontrar os pontos médios de dois lados do quadrado. Nesse momento perguntei a turma 12 EN (Ensino Normal) como o ponto médio poderia ser encontrado. A maioria respondeu que bastava marcar 10 cm com a régua, mas uma aluna sugeriu que dobrássemos a folha de TNT de forma que dois lados consecutivos se encontrassem, e marcar o ponto médio. A última estratégia só foi sugerida por essa aluna. Na turma 11 EM (Ensino Normal) ninguém sugeriu essa estratégia, mesmo quando perguntados se haveria outra forma de encontrar o ponto médio que não fosse medindo com a régua. A sugestão desta estratégia foi então dada por mim a turma e alguns alunos a adotaram dizendo que parecia ser mais simples do que medir com a régua.

6.2 ATIVIDADE 2

Nesta atividade os alunos, depois de terem recortado as peças do Tangram, deveriam construir novamente o quadrado original. Os alunos conseguiram realizar a atividade sem dificuldades. Acredito que o fato de termos construído o material ajudou na montagem do quadrado, pois eles puderam perceber como as peças iam se formando através do passo a passo da construção do Tangram. Poucos alunos precisaram de ajuda para realizar esta tarefa.

Figura 17 - Aluna tentando montar o quadrado



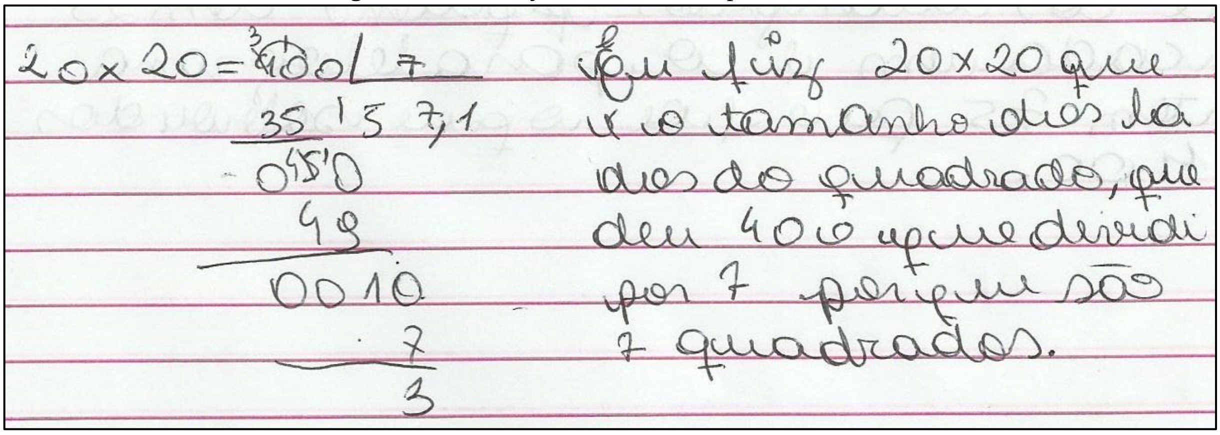
6.3 ATIVIDADE 3

Na terceira atividade foi pedido aos alunos que calculassem a área de cada uma das peças do Tangram, sabendo que o lado do quadrado original formado pelas sete peças do quebra-cabeça, media 20 cm. Os alunos não poderiam usar a régua para medir os lados. Nesta atividade era pedido que os alunos escrevessem seus raciocínios, ou seja, como chegaram às respostas.

O erro mais comum, ilustrado na imagem 18 a seguir, foi calcular a área do quadrado original que era 400 cm^2, e dividir este valor por 7. Os estudantes que cometeram este erro dividiram a área do quadrado original por sete por serem sete as peças que formam o quadrado. Mas estes alunos não perceberam que as peças do Tangram têm áreas diferentes.

Aos alunos que cometeram este erro mostrei o triângulo pequeno sobre o triângulo grande e perguntei se tinham a mesma área. Ao responder que não, estes alunos perceberam o erro.

Figura 18 - Resolução da atividade 3 pela aluna MO


20x20=400 | 7
35 | 57,1
050
49
0010
7
3

Eu fiz 20x20 que é o tamanho dos lados do quadrado, que deu 400 que dividi por 7 porque são 7 quadrados.

Para Vergnaud (1993), todas as nossas condutas têm uma parte de automatização e uma parte de decisão consciente. No caso da aluna MO, determinar a área de cada peça dividindo a área total por sete, é uma conduta automatizada e estaria correta se todas as partes do quadrado tivessem a mesma área, mas não têm. Ao perceber que o esquema utilizado para resolver o exercício foi não foi eficaz, a aluna teve que buscar outros esquemas, de forma a atingir a solução.

Na resolução acima a aluna MO[1] escreve que dividiu por sete porque são sete *quadrados*. Aqui a aluna quis dizer peças em vez de quadrados, pois provavelmente ela saiba diferenciar formas geométricas básicas como triângulo e quadrado.

O paralelogramo foi uma forma geométrica nova para muitos alunos. Alguns chegaram a se referir a esta peça como losango, pentágono ou “paralelograma”. Foi possível perceber que muitos alunos não conheciam o paralelogramo, então conforme circulava pelos grupos, apresentava a peça e dizia que se tratava de uma forma geométrica com os lados opostos paralelos e congruentes dois a dois.

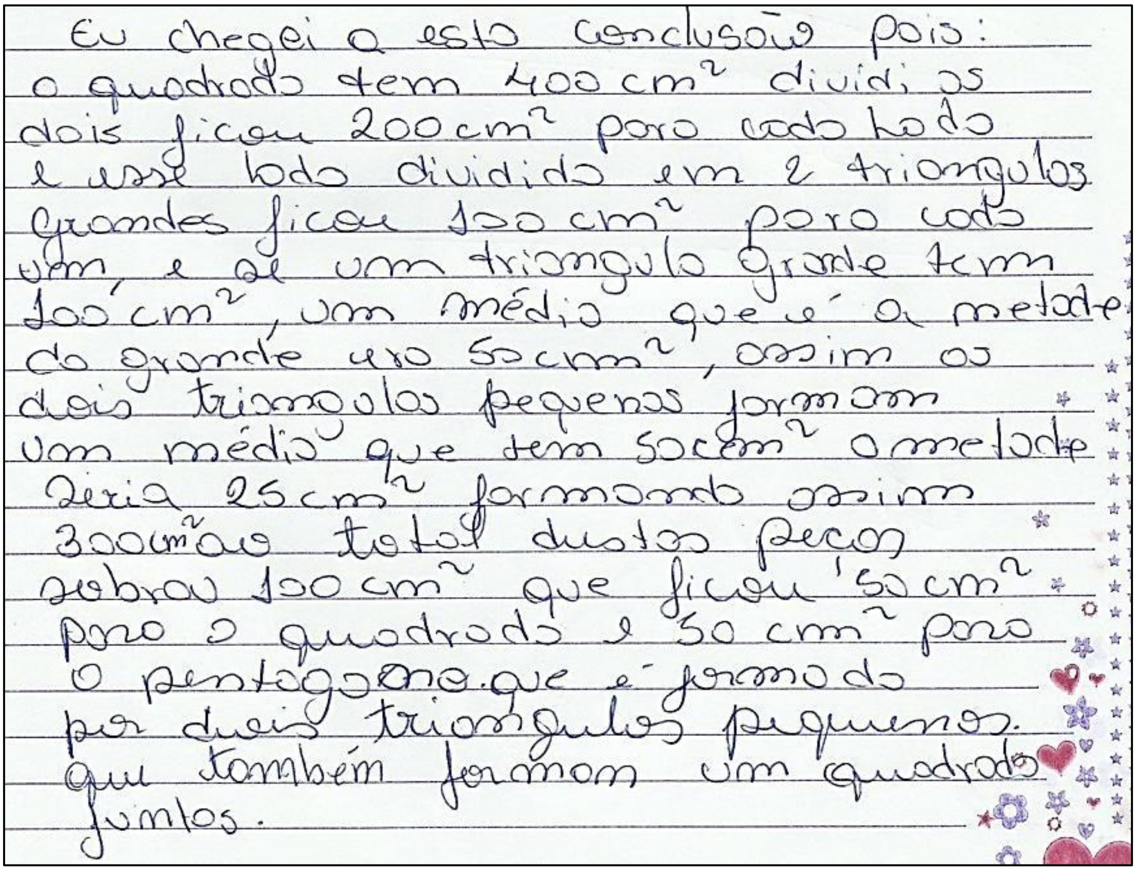
Os alunos tentavam determinar as áreas das peças, mas ninguém conseguia responder a questão. Então, enquanto circulava pela sala, de grupo em grupo, resolvi dar uma dica para que a turma pudesse sair da estaca zero. Perguntava a eles qual o primeiro passo da construção do Tangram que eu mostrei no quadro. Ao responderem que era a diagonal do quadrado perguntei novamente o que a diagonal “fazia” com o quadrado. Então eles respondiam que “dividia o quadrado em duas partes iguais” ou “dividia na metade”. Desta forma já podiam concluir que a área de cada triângulo grande era de 100 cm^2.

Para determinar as áreas das outras peças os alunos estagnaram novamente. Sabiam que as outras cinco peças juntas tinham área igual a 200 cm^2, mas não conseguiam determinar

[1] Os alunos são chamados pelas duas primeiras letras do nome.

a área de cada peça. Novamente tive que interferir dizendo para que manipulassem as peças sobrepondo-as para poder compará-las. Só então os alunos puderam perceber as relações de proporção entre as peças e determinar as áreas de cada uma sem precisar medir os lados com a régua ou usar fórmulas. Abaixo a resposta correta de uma aluna que chamou o paralelogramo de pentágono:

Figura 19 - Resolução da atividade 3 pela aluna NM

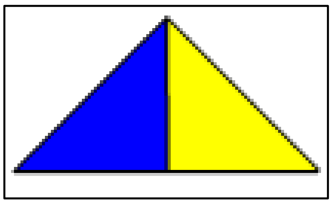

Eu chegei a esta conclusão pois:
o quadrado tem 400 cm² dividi os
dois ficou 200cm² para cada lado
e esse lado dividido em 2 triangulos
grandes ficou 100 cm² para cada
um, e se um triangulo grande tem
100 cm², um médio que é a metade
do grande era 50cm², assim os
dois triangulos pequenos formam
um médio que tem 50cm² a metade
seria 25cm² formando assim
300cm² ao total destas peças
sobrou 100 cm² que ficou 50 cm²
para o quadrado e 50 cm² para
o pentagono que é formado
por dois triangulos pequenos.
que também formam um quadrado
juntos.

6.4 ATIVIDADE 4

Nesta quarta atividade os alunos responderam a cinco questões sobre o cálculo de áreas. A unidade de área variava nas questões.

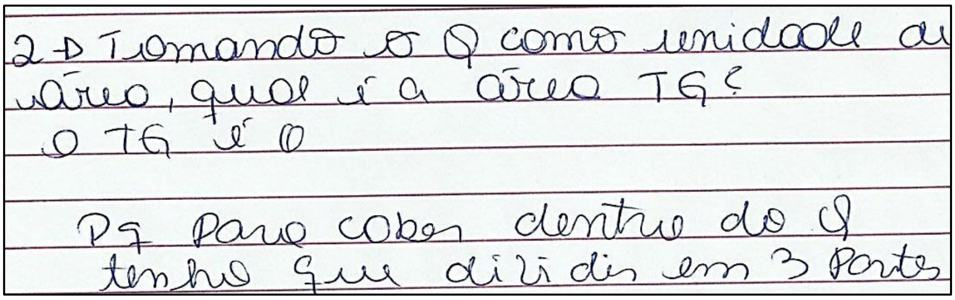
Na primeira questão era pedida a área do triângulo médio tomando o triângulo pequeno como unidade. Todos responderam corretamente que a área era 2, pois aqui bastava sobrepor os dois triângulos pequenos no triângulo médio para determinar a área.

Figura 20 - Triângulo pequeno sobre o triângulo médio



Na segunda questão era pedida a área do triângulo grande tomando o quadrado como unidade de área. A estratégia usada na primeira questão não pode ser aplicada aqui, já que não é possível cobrir o triângulo grande com quadrados. Mas sabendo que a área do quadrado é equivalente à área de dois triângulos pequenos, pode-se determinar que á área do triângulo grande é 2 quadrados através da sobreposição das peças.

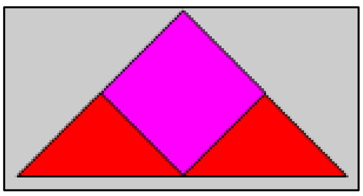
Figura 21 - Resolução da questão 2 da atividade 4 pela aluna JR



A aluna JR afirma que a área do triângulo grande é 6, e explica que "*para [o triângulo grande] caber no quadrado tenho que dividir [o triângulo grande] em três partes.*"

A aluna se enganou, tentando calcular a área do triângulo grande ao querer colocá-lo dentro do quadrado quando deveria ser o contrário, o quadrado é que deve cobrir a superfície do triângulo grande. Mas a aluna ainda escreve que a área do triângulo grande é 6, pois "*deve ser dividido em três partes*." A figura 22, ajuda a compreender o porque desta resposta. Neste caso a aluna atribuiu área 2 a cada uma das três partes.

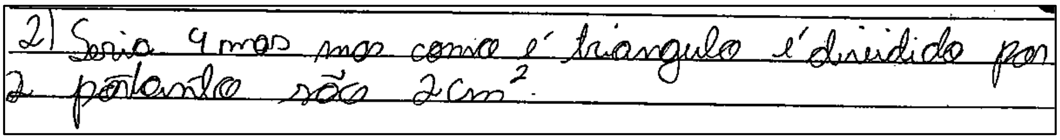
Figura 22 – Quadrado sobre o triângulo grande



Vergnaud (1993) distingue duas classes de situações em que o sujeito se encontra ao resolver um problema. A primeira delas é a classe de situações em que o sujeito dispõe das competências necessárias ao tratamento da situação. A segunda é a classe de situações em que o sujeito não dispõe das competências necessárias. Ao analisar a resposta da aluna JR, a questão 2 da atividade 4, é possível perceber que o conceito de área não foi compreendido. O que nos leva à segunda classe de situações, pois a aluna não desenvolveu os conhecimentos sobre área necessários para resolver a questão. Na segunda classe de situações, segundo Vergnaud (1993), se faz necessário um tempo para reflexão e exploração, onde são utilizados vários esquemas, para resolver o problema, que podem resultar em tentativas frustradas ou em sucesso. Neste exemplo, o esquema que a aluna desenvolveu não a levou a resposta correta.

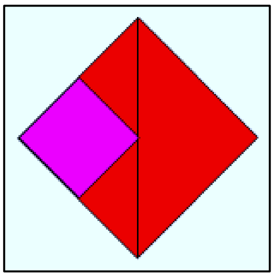
A aluna R.M respondeu a questão 2 da seguinte maneira:

Figura 23 - Resolução da questão 2 da atividade 4 pela aluna RM


2) Seria 4 mas mas como é triangulo é dividido por 2 portanto são 2cm².

Em vez de cobrir o triângulo grande com o quadrado e dois triângulos pequenos, a aluna formou um quadrado com os dois triângulos grandes e concluiu que a área é equivalente a quatro quadrados. Neste caso, a área de um triângulo grande é a metade de quatro. Desta forma é possível cobrir o quadrado formado pelos dois triângulos grandes com quatro quadrados, assim não é preciso dividir o quadrado em dois triângulos pequenos para determinar a área do triângulo grande.

Figura 24 - Quadrado sobre dois triângulos grandes



Notemos também que a aluna usou o cm^2 como unidade, erro comum a muitos alunos nesta atividade, já que a unidade de área adotada foi uma peça do Tangram: o quadrado.

Os estudantes estão acostumados com a unidade de área padrão que é o metro quadrado e seus múltiplos e submúltiplos. Por isso os estudantes continuaram a usá-la mesmo que a unidade de medida adotada neste exercício tivesse sido outra.

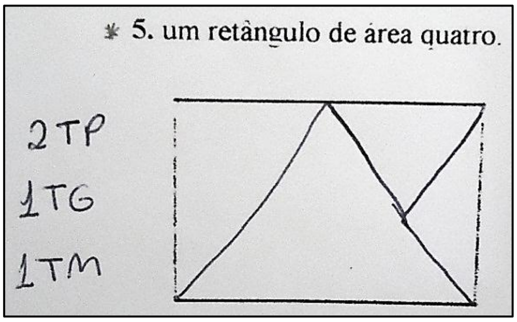
Nesta situação, a aluna já possui o esquema necessário para resolver o problema, e observa-se um comportamento amplamente automatizado. Por isso que a aluna RM utilizou o cm^2 em vez da unidade de área adotada na questão.

Analisando os alunos enquanto eles resolviam esta atividade 4, foi possível perceber que eles, ao tentar encontrar a área de determinada peça, primeiramente usavam a sobreposição, pois cobriam completamente a superfície da peça com a unidade de área. Depois contavam quantas unidades de área eram necessárias para cobrir completamente a peça. Aqui verificou-se a utilização de um conceito em ação utilizado pelas alunas: a área de uma figura é o número de unidades de área necessárias para cobrir completamente essa figura. Provavelmente essas alunas não saberiam enunciar formalmente o conceito de área, mas sabiam na prática como determinar a área das peças.

6.5 ATIVIDADE 5

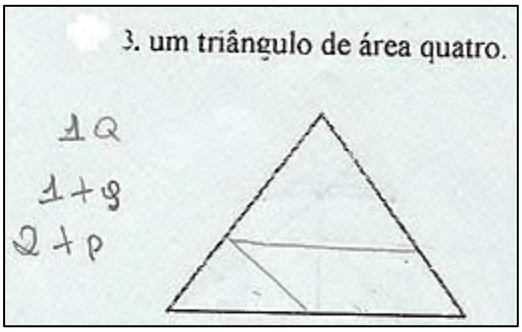
Nesta atividade os alunos, em grupos, construiram diferentes formas geométricas, de determinada área, utilizando apenas as peças do Tangram que cada um construiu. Isso para evitar que eles construíssem as figuras utilizando apenas triângulos pequenos, por exemplo. A unidade de área adotada foi o triângulo pequeno. Em geral, os alunos conseguiram montar as figuras pedidas, mas alguns se esqueceram de construir a figura com a área determinada. No exemplo a seguir, a aluna JA constrói o retângulo, porém a área não é quatro, mas sim oito.

Figura 25 - Resolução da questão 5 da atividade 5 pela aluna JA



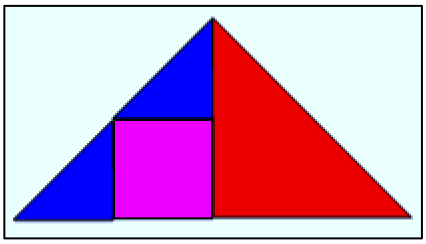
A aluna BO tentou construir um triângulo de área quatro conforme podemos observar na figura 25.

Figura 26 - Resolução da questão 3 da atividade e pela aluna BO



Ocorre que, com as peças indicadas ao lado da construção do triângulo, é possível construir um triângulo conforme podemos observar na figura 26. Mas esse triângulo não tem área quatro, mas área 8.

Figura 27 - Montagem do triângulo com as peças sugeridas pela aluna BO

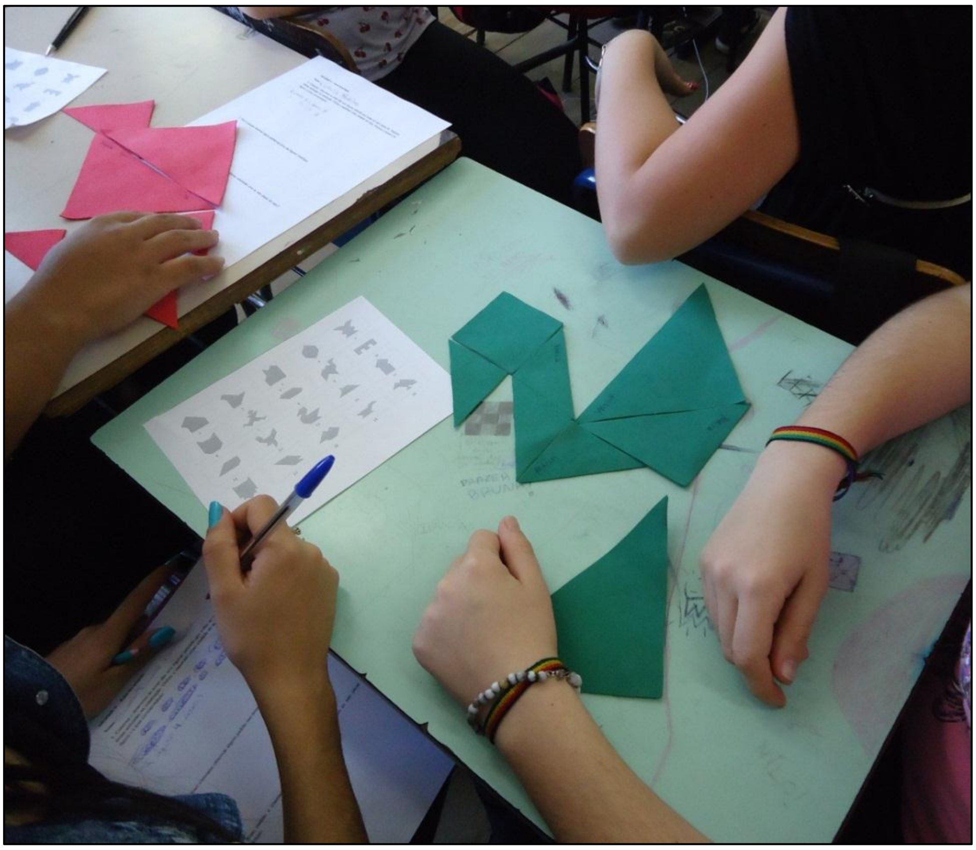


Além do mais, o desenho que ela fez no triângulo não corresponde às peças por ela indicadas na resposta. No desenho parecem ser usados um paralelogramo, um triângulo pequeno e um triângulo médio ou grande, mas essas peças juntas não formam um triângulo. Houve outros casos de alunos, assim como a aluna BO, que não conseguiram desenhar corretamente as peças dentro da figura.

6.6 ATIVIDADE 6

Nesta atividade os alunos, em grupos, tiveram que montar alguns Tangrans e determinar as áreas das figuras tomando o quadrado como unidade. Na folha que eles receberam com as imagens dos Tangrans a serem montados, foram colocadas imagens de variados níveis de dificuldade, das mais fáceis a serem montadas às mais difíceis. Isso foi feito, pois se eles tivessem que construir apenas as imagens mais triviais a atividade seria realmente muito fácil e não seria um desafio para eles. Para minha surpresa eles tiveram muita dificuldade para montar as figuras utilizando todas as peças. A maioria conseguiu montar uma ou duas figuras do nível fácil. As imagens do nível mais avançado de dificuldade ninguém conseguiu construir. Alguns se disseram cansados da atividade, pois acharam muito difícil, outros aceitaram o desafio, e não partiam para outra imagem sem antes conseguir completar aquela em que estava trabalhando. Embora eles não tenham conseguido construir os Tangrams mais difíceis, foi notável a persistência destes em realizar a tarefa.

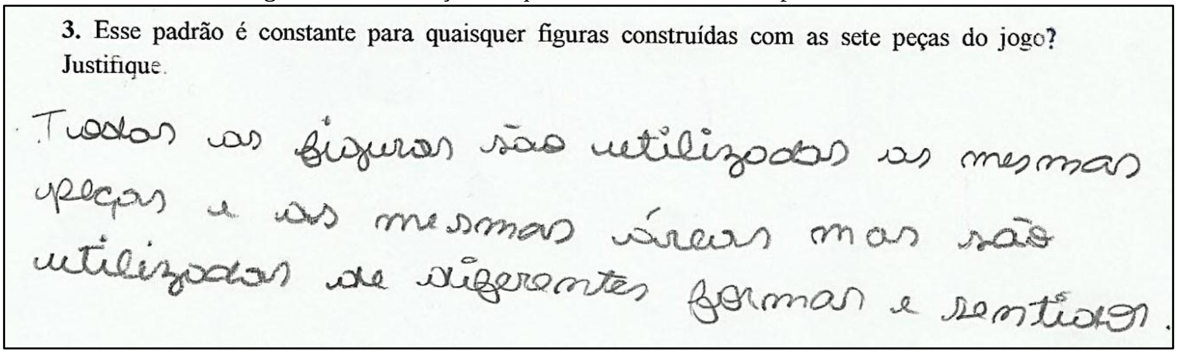
Figura 28 - Alunas tentando construir as figuras



Fonte: Arquivo pessoal

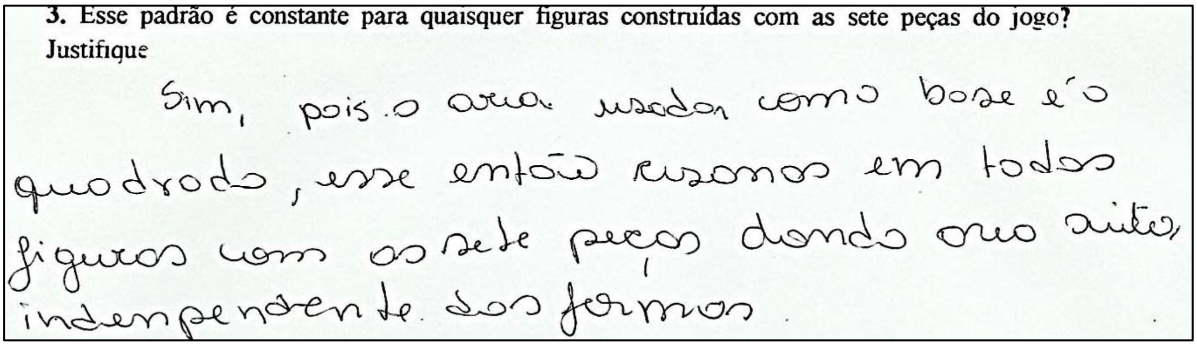
Para determinar a área das figuras os alunos não tiveram dificuldades. Foram sobrepondo as peças de forma a obter a resposta correta que era oito quadrados. Logo perceberam que a área seria constante para todas as figuras que utilizam na sua montagem as mesmas sete peças do Tangram. Nas figuras 29, 30 e 31 podemos ver alguns exemplos de respostas corretas dos alunos a esta questão.

Figura 29 - Resolução da questão 3 da atividade 6 pela aluna K.S


3. Esse padrão é constante para quaisquer figuras construídas com as sete peças do jogo? Justifique.

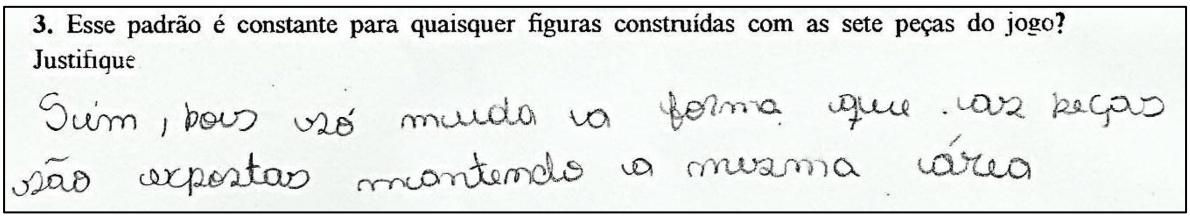
Todas as figuras são utilizadas as mesmas peças e as mesmas áreas mas são utilizadas de diferentes formas e sentidos.

Figura 30 - Resolução da questão 3 da atividade 6 pela aluna N.M


3. Esse padrão é constante para quaisquer figuras construídas com as sete peças do jogo? Justifique

Sim, pois a área usada como base é o quadrado, esse então usamos em todas figuras com as sete peças dando área oito, independente das formas.

Figura 31 - Resolução da questão 3 da atividade 6 pela aluna J.A

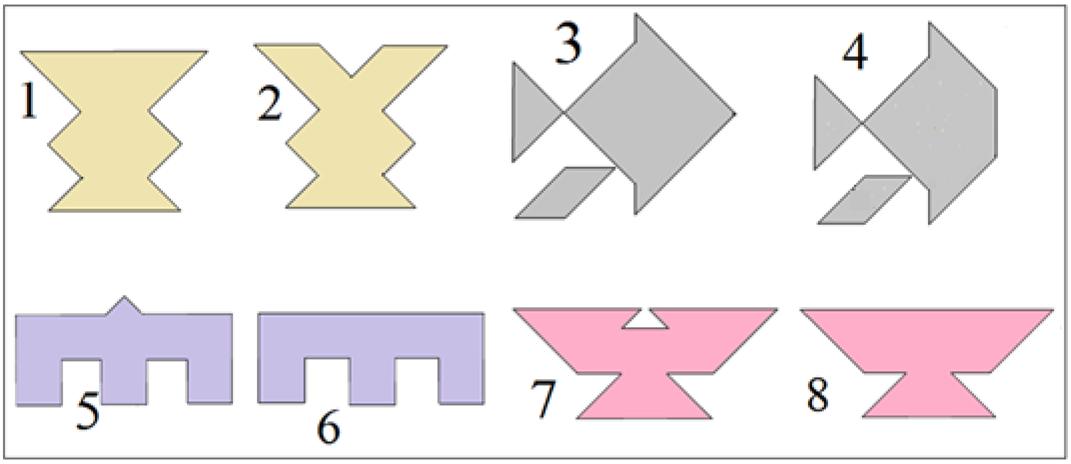

3. Esse padrão é constante para quaisquer figuras construídas com as sete peças do jogo? Justifique

Sim, pois só muda a forma que as peças são expostas mantendo a mesma área

6.7 ATIVIDADE 7

A atividade sete é sobre os pseudoparadoxos do Tangram. A seguir as figuras que foram entregues aos alunos:

Figura 32 - Paradoxos do Tangram



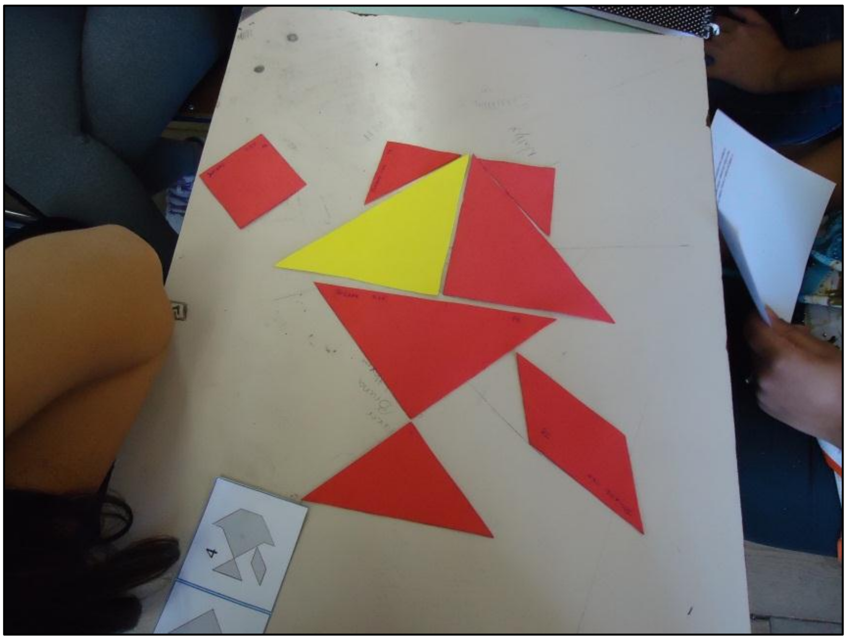
Fonte: Arquivo pessoal

Nesta atividade a turma deveria construir pares de figuras e determinar as suas áreas. Só que um olhar pouco atento não consegue perceber as diferenças, ás vezes sutis, nas alturas, comprimentos e perímetros dos pares de imagens acima. Mesmo sendo informados no enunciado que a montagem das imagens era feita com as sete peças, muitos alunos não acreditaram que fosse possível tal construção.

Conforme já tinha escrito na atividade 6, a maioria dos alunos tiveram dificuldades em montar os Tangrans sugeridos na atividade anterior. Nessa atividade não foi diferente. A maioria só conseguiu construir uma das imagens do par e quanto a outra, diziam que não era possível a construção com as sete peças porque faltavam ou sobravam peças.

Um grupo conseguiu construir a figura 3 corretamente, mas montou a figura 4 retirando um quadrado do seu Tangram e acrescentando um triângulo grande de outro Tangram. Com isso a área seria de 9 quadrados. Mas, conforme podemos observar na Figura 32, o peixe não corresponde com o peixe da figura.

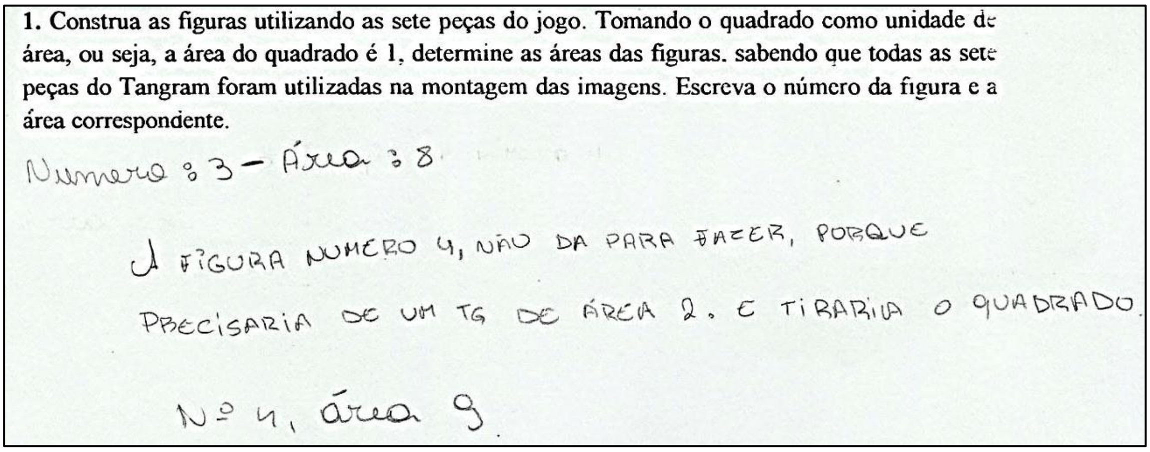
Figura 33 - Figura 4 da atividade 7 construída por um grupo



Fonte: Arquivo pessoal

Abaixo a resposta de uma aluna deste grupo:

Figura 34 - Resolução da atividade 7 pela aluna M.P



1. Construa as figuras utilizando as sete peças do jogo. Tomando o quadrado como unidade de área, ou seja, a área do quadrado é 1, determine as áreas das figuras, sabendo que todas as sete peças do Tangram foram utilizadas na montagem das imagens. Escreva o número da figura e a área correspondente.

Numero : 3 – Área : 8

A FIGURA NUMERO 4, NÃO DA PARA FAZER, PORQUE PRECISARIA DE UM TG DE ÁREA 2. E TIRARIA O QUADRADO.

Nº 4, área 9.

Outros grupos também construíram corretamente uma das figuras do par utilizando as sete peças, mas a outra imagem eles só conseguiram montar com menos ou mais peças.

Figura 35 - Resolução da atividade 7 pela aluna C.F

1. Construa as figuras utilizando as sete peças do jogo. Tomando o quadrado como unidade de área, ou seja, a área do quadrado é 1, determine as áreas das figuras. sabendo que todas as sete peças do Tangram foram utilizadas na montagem das imagens. Escreva o número da figura e a área correspondente.

4→

4→ Área 8

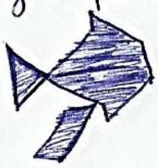
Eu consegui fazer a figura nº 4. Já a nº 3 pelo que e notei falta algumas peças por isso não consegui só com as peças que eu tenha.

Penso que os próprios pares de imagens, por serem um tanto contraditórios, induziram os alunos a acharem que pelo menos uma das silhuetas não poderia ser montada com sete peças.

Figura 36 - Resolução da atividade 7 pela aluna MS

1. Construa as figuras utilizando as sete peças do jogo. Tomando o quadrado como unidade de área. ou seja, a área do quadrado é 1, determine as áreas das figuras, sabendo que todas as sete peças do Tangram foram utilizadas na montagem das imagens. Escreva o número da figura e a área correspondente.

Fiz o peixe nº: 4



O valor da área é 8, pois usamos o mesmo nº de peças, e sempre da o mesmo valor. O peixe nº 3 não conseguimos fazer pois falta 1 peça, acrescentando um triângulo pequeno a mais conseguimos fazer a ponta do peixe, e acrescentando a ponta o valor da área do 3, ficaria então 8,5.

Apesar da aluna MS ter caído na armadilha dos pseudoparadoxos, percebe-se que ela compreendeu o conceito de área ao calcular corretamente a área da figura 3 que ela construiu utilizando um triângulo pequeno a mais.

Uma aluna conseguiu construir o par de imagens 7 e 8 e, claro constatou que a área era oito quadrados para ambas.

Quando ela me mostrou a solução perguntei então como ela explicaria a diferença entre as taças, já que uma tinha um espaço na parte superior enquanto a outra não tinha. Ela então explicou que tinha mudado as peças de posição por isso que o espaço na taça surgia. Eu perguntei depois se todos os lados das figuras tinham o mesmo tamanho, ela então respondeu sobrepondo as peças que as bases das taças das figuras 7 e 8 tinham mesma área e perímetro, mas que na parte superior da taça 7 o perímetro era maior devido ao espaço. Na Figura 37 conferimos a resposta desta aluna:

Figura 37 - Resolução da atividade 7 pela aluna BT

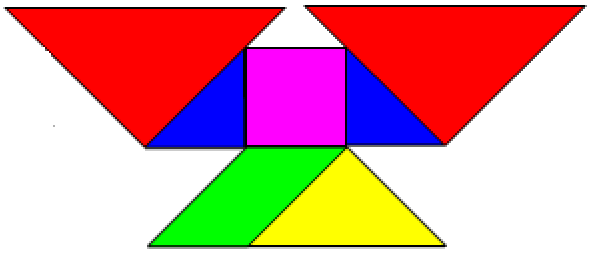
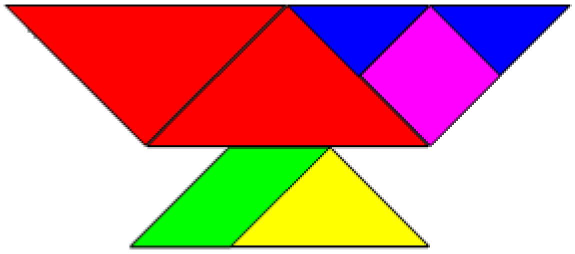
1. Construa as figuras utilizando as sete peças do jogo. Tomando o quadrado como unidade de área, ou seja, a área do quadrado é 1, determine as áreas das figuras, sabendo que todas as sete peças do Tangram foram utilizadas na montagem das imagens. Escreva o número da figura e a área correspondente.

Figura 7e 8 área 8.

Independente das formas, como usamos o quadrado base " com area 1. Sendo assim, com as 7 peças usadas em quaisquer quadrados a área iria ser a mesma.

Na figura 7, podemos encontrar um perímetro maior por conta de um espaço na área superior da figura. Os lados de ambas são iguais.

A aluna BT conseguiu construir as figuras 7 e 8 utilizando as sete peças do Tangram, por isso concluiu corretamente que a área das duas figuras era de oito quadrados. A aluna ainda explica que o perímetro na da figura 7 é maior do que o da figura 8 devido ao espaço da parte superior. Mas acrescenta que as partes laterais das imagens têm mesmo tamanho, ou seja, a aluna só encontrou diferença no perímetro da parte superior, mas a parte inferior do copo (não da base) também tem diferença no perímetro conforme podemos observar na Figura 38 e 39 a seguir.

Figura 38 - Figura 7 da Atividade 7	Figura 39 - Figura 8 da Atividade 7
	

Fonte: Arquivo pessoal

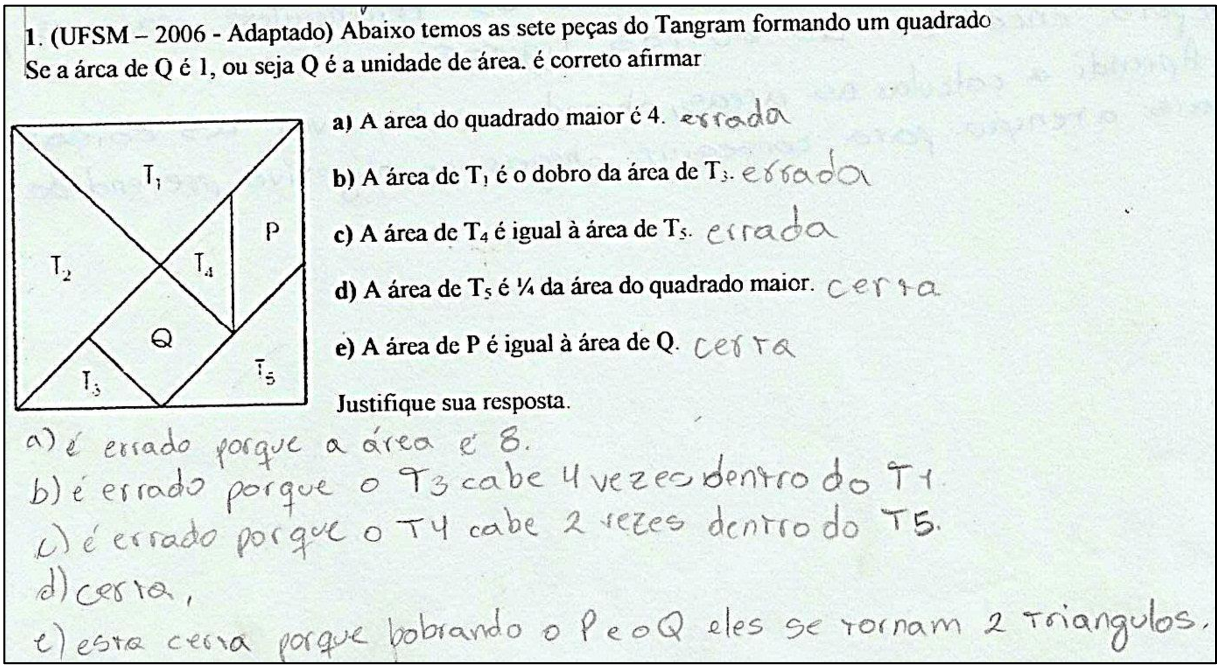
6.8 ATIVIDADE 8

Nesta atividade foram propostas duas questões de múltipla escolha, uma do vestibular 2006 da UFSM (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA) e outra do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) de 2008, ambas envolvendo o Tangram.

Questão 1

Na primeira questão os alunos marcaram corretamente a alternativa (e), e como foi pedido na questão que justificassem a respostas, todos concluíram que a alternativa (a) é falsa, pois a área do quadrado maior é 8, a alternativa (b) também é incorreta, e eles justificaram afirmando que a área de T_1 é quatro vezes a área de T_3, e a alternativa (c) é falsa, pois conforme as justificativas das alunas, área de T_4 é a metade da área de T_5. Mas um grupo de alunas respondeu que as alternativas (d) e (e) estavam corretas. Mesmo se tratando de uma questão de vestibular em que todas as questões têm apenas uma alternativa correta, essas alunas concluíram que as duas respostas estavam certas. Na figura 40 a seguir, vemos o exemplo da aluna PR afirmando que a alternativa (d) estava certa.

Figura 40 - Resolução da questão 1 da atividade 8 pela aluna PR



1. (UFSM – 2006 - Adaptado) Abaixo temos as sete peças do Tangram formando um quadrado
Se a área de Q é 1, ou seja Q é a unidade de área. é correto afirmar

a) A área do quadrado maior é 4. errada

b) A área de T_1 é o dobro da área de T_3. errada

c) A área de T_4 é igual à área de T_5. errada

d) A área de T_5 é ¼ da área do quadrado maior. certa

e) A área de P é igual à área de Q. certa

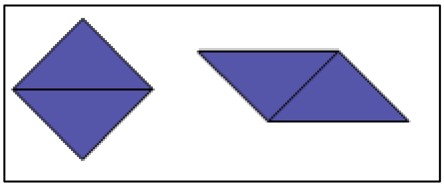
Justifique sua resposta.

a) é errado porque a área é 8.
b) é errado porque o T3 cabe 4 vezes dentro do T1
c) é errado porque o T4 cabe 2 vezes dentro do T5.
d) certa,
e) esta certa porque bobrando o P e o Q eles se tornam 2 triangulos.

Aos alunos que mostravam que tinham encontrado duas alternativas corretas para essa questão, perguntei se eles sabiam que só poderia haver uma alternativa certa. Eles respondiam que sim, mas diziam que não sabiam o que era ¼. Nas duas turmas houve casos de alunos que não sabiam quanto era ¼ ou como calcular ¼ da área do quadrado maior, que eles sabiam ter área de 8 quadrados. Não quis explicar a eles quanto era ¼, pois minha proposta era que eles respondessem às questões individualmente, como se estivessem fazendo o ENEM ou o vestibular.

No caso destes alunos faltou confrontar o que eles sabiam com o que estava sendo proposto no exercício. Se elas não sabiam quanto era ¼ então não tinham como dizer se a alternativa (d) estava errada ou certa. Mas elas sabiam que a alternativa (e) estava correta. Tínhamos trabalhado com essas peças nas atividades anteriores. Elas sabiam que tanto o quadrado como o paralelogramo têm área equivalente a dois triângulos pequenos. A própria aluna PR, na figura 40, afirma que dobrando o paralelogramo e o quadrado obtemos dois triângulos pequenos. Logo se a alternativa (e) estava correta, a alternativa (d) era incorreta. Isso poderia ser afirmado mesmo sem que elas soubessem quanto era ¼. Neste caso não, houve a mobilização dos conhecimentos necessários para responder o problema. Estas alunas sabiam calcular as áreas das peças e sabiam que a alternativa (e) estava correta, mas faltou analisar a situação específica do problema que pedia apenas uma alternativa correta. As alunas tinham os conhecimentos necessários para responder à questão, mas não tinham um esquema, ou seja, não conseguiram organizar o comportamento para esse tipo de situação.

Figura 41 - Quadrado e paralelogramo construídos com dois triângulos pequenos



Fonte: Arquivo pessoal

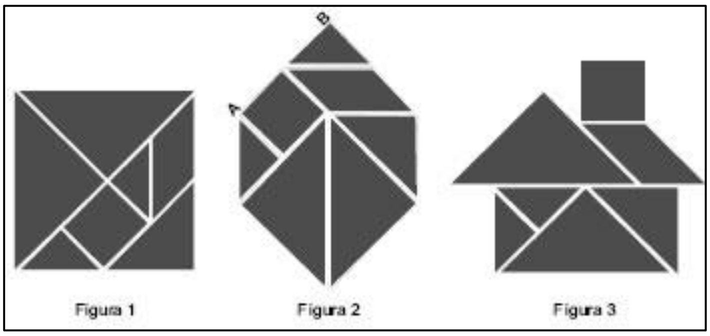
O conteúdo de área, que é uma medida, entra no campo aditivo [2] da teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Mas em qualquer um destes problemas, se os números forem grandes, decimais ou frações tudo fica mais complicado. Este é o caso do exercício 1 em questão, em que o conhecimento matemático envolvido é o de área, mas o surgimento de um número fracionário em uma das alternativas fez com que um grupo de alunas não soubesse a resposta correta por não ter desenvolvido conhecimentos sobre frações. Aqui, a aluna marcou corretamente e explicou quais eram as alternativas corretas e incorretas, comprovando que compreendeu o conceito de área, mas não sabia trabalhar com frações. Neste caso eles compreenderam a proposta das atividades e sabiam comparar e determinar as áreas das peças, porém não sabiam calcular com números fracionários.

Questão 2

2. (ENEM - 2008) O Tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.

[2] O conteúdo de área também está inserido no campo multiplicativo, pois para encontrar a área de uma superfície devemos multiplicar duas dimensões. Mas nas atividades propostas neste trabalho, os alunos não fizeram uso desta ideia, pois eles determinavam as áreas através da sobreposição das peças do jogo. Por isso não incluí o campo multiplicativo.

Figura 42 - Tangram - Questão Enem



Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, então a área da figura 3, que representa uma "casinha", é igual a

a) 4 cm^2.

b) 8 cm^2.

c) 12 cm^2.

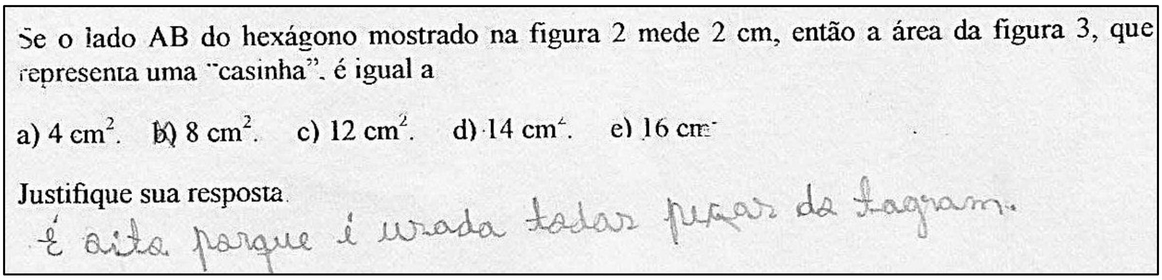
d) 14 cm^2.

e) 16 cm^2.

Justifique sua resposta.

A questão 2, do ENEM, foi respondida corretamente por todos os alunos. Acredito que o trabalho desenvolvido com o Tangram ajudou no êxito das estudantes. Na Figura 43, a aluna ES responde corretamente que a área da figura 3 é 8 "*porque são usadas todas as peças do Tangram.*"

Figura 43 - Resolução da questão 2 da atividade 8 pela aluna ES



Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, então a área da figura 3, que representa uma "casinha", é igual a

a) 4 cm^2. b) 8 cm^2. c) 12 cm^2. d) 14 cm^2. e) 16 cm^2

Justifique sua resposta.

É oita porque é usada todas peças da tagram.

Esta atividade final serviu também para que fosse possível avaliar os conhecimentos construídos pelos alunos no decorrer das atividades com o Tangram. A questão 1 desta atividade 8, não foi respondida corretamente por um grupo de alunas porque elas não sabiam trabalhar com frações. Mas este mesmo grupo também marcou corretamente a alternativa (e), mostrando que sabiam quais eram as áreas das peças. A questão 2 foi respondida corretamente por todos, o que mostra que a bagagem de conhecimentos que eles já tinham aliada com a aprendizagem construída durante as atividades com o Tangram, foi suficiente para que eles pudessem responder corretamente a esta questão.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como o Tangram pode auxiliar no ensino-aprendizagem do conceito e do cálculo de áreas e como se dá esse processo? Para responder a essas perguntas, foi proposta uma sequência didática que utiliza o Tangram como um meio de exploração e investigação e como ferramenta para a construção do conceito de área. Meu objetivo era que o conceito de área não fosse apenas memorizado, mas sim compreendido e internalizado pelos estudantes.

Compreender o conceito de área não é uma tarefa simples. Para medir a área de uma superfície plana o aluno deve primeiramente compreender que a área é uma quantidade de superfície. Efetuar esse processo de medição abrange a escolha de uma unidade de área, que serve como comparação com a área a medir. Essa comparação entre unidade de área e a figura a medir é que fará com que o aluno associe um número à quantidade de superfície. Este processo pode ser incomum para a maioria dos alunos que calculam a área de uma superfície multiplicando dois comprimentos ou utilizando fórmulas da qual não entendem o significado.

Através das atividades propostas com o Tangram, foi possível perceber a construção do conhecimento de área, que foi feita pelos alunos. Conforme afirma Vergnaud (1993) é através das experiências que os alunos constroem o conhecimento. Nesse trabalho, o conceito de área pôde ser construído através das situações apresentadas nas atividades. Na Teoria dos Campos Conceituais uma situação está associada a vários conceitos, e a formação desses conceitos deve acontecer ao longo do tempo, de maneira que os alunos possam aplicar e adaptar seus conhecimentos anteriores através das novas situações e dos novos conceitos.

Em vez de os alunos começarem a desenvolver as atividades sobre área, utilizando as peças já prontas do Tangram, a construção do material pelos estudantes proporcionou a visualização das relações matemáticas abstraídas ao construir o Tangram.

Nas atividades com o Tangram, para determinar as áreas das figuras, os alunos primeiramente utilizavam a sobreposição das peças adotadas como unidade de área, para depois contar as peças sobrepostas. Nessa situação é possível identificar, o conceito em ação utilizado pelos estudantes, em que a área de uma figura é o número de unidades de área necessárias para cobrir completamente essa figura. Esse conceito em ação é imprescindível para que o estudante compreenda o conceito de área e possa posteriormente compreender o significados das fórmulas para o cálculo de áreas.

Os alunos souberam identificar as peças do Tangram que, mesmo possuindo formas diferentes, tinham a mesma área. Isso foi possível através da sobreposição das peças, onde os estudantes puderam fazer uma comparação das áreas decompondo e recompondo as figuras. Desta forma o uso do Tangram, através da manipulação das peças, facilitou aos alunos a identificação das peças, dentre o conjunto das sete peças, que tinham mesma quantidade de superfície.

A questão da invariância da área pôde ser visualizada através da montagem das diversas silhuetas do Tangram. Com base nas respostas dos alunos, foi possível constatar que eles compreenderam, que mesmo decompondo e recompondo as figuras de forma a obter outras, a área se mantém constante.

Com base nessas considerações, foi possível concluir o presente texto incentivando os professores de Matemática ao uso de materiais manipulativos e jogos, como o Tangram, em sala de aula, pois eles podem ser sim, um facilitador na construção do conceito de área e na aprendizagem dos alunos.

8. REFERÂNCIAS BIBLIOGRAFICAS

ALVES, Daiane Cristina; GAIDESKI, Gislaine; CARVALHO, José Maria Teles de. **O uso do Tangram para aprendizagem de Geometria plana.** In: Revista Tuiuti: Ciência e Cultura. Curitiba, 2011.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** (Terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** (Ensino de primeira à quarta série). Brasília: MEC/SEF, 1997.

BURIGO, Elisabete Zardo. **Para que ensinar e aprender Geometria no Ensino Fundamental? Um exercício de reflexão sobre o currículo.** In: Teorias e fazeres na escola em mudança. Editora UFRGS, Porto Alegre, 2005.

CARLOVICH, Marisa. **A geometria dedutiva em livros didáticos das escolas públicas de São Paulo para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental.** Dissertação de Mestrado. PUC, São Paulo, 2005.

FAGUNDES, Léa da Cruz. **Materiais manipulativos no ensino de matemática a crianças de 7 a 14 anos Período das operações concretas.** Palestra proferida no Seminário Nacional sobre recursos audiovisuais no ensino de 1º Grau. Departamento de Ensino Fundamental – MEC – Brasília, 1977.

JESUS, Thamires Belo de; THIENGO, Edmar Reis. **Abordagem de polígonos mediada pelo uso do Tangram: relato de uma experiência com alunos surdos.** In: Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, 2013.

MAGINA, Sandra. **A Teoria dos Campos Conceituais: contribuições da Psicologia para a prática docente.** In: Anais do XVIII Encontro Regional de Professores de Matemática. Campinas: UNICAMP, 2005, p. 1- 5.

MISSE, Bruno Henrique La briola; FERREIRA, Miliam Juliana Alves; PAULO, Rosa Monteiro. **O Tangram como recurso para o trabalho com leitura e escrita nas aulas de Matemática.** In: Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, 2013.

MUMBACH, Morgani; WOLKMER, Leandro; PREUSSLER, Roberto. **Tangram: Uma alternativa para a aprendizagem de conceitos geométricos.** In: Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, 2013.

NASCIMENTO, Gleydson W. A. do; SILVA, Jaqueline de O. da. **Oficina de Tangram: investigação métrica e geométrica.** In: Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, 2013.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências.** Revista Zetetiké nº 1, 1993. p. 7-16.

PAVÃO, Antônio Carlos. **O livro didático em questão.** Disponível em: www.tvbrasil.org.br/fotos/series/161240LivroDidatico.pdf. Publicado em: 2006. Acesso em: 12 set. 2013.

PEREIRA, Maria Regina de Oliveira. **A Geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino.** Dissertação de Mestrado. PUC, São Paulo, 2001.

READ, Ronald C. **Tangrams - 330 Puzzles** – New York: Dover Publications, 1965.

RIBEIROR, Elizete Maria Possamai; TEREZA, Micheli Pinheiro; CARDOSO, Merleide Coan. **O uso do Tangram como uma ferramenta para a prática pedagógica.** In: Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, 2013.

SANTOS, Carlos Henrique dos; IMENES, Luiz Márcio P. **Tangram um antigo jogo chinês nas aulas de Matemática**. Revista do Ensino de Ciências nº 18, 1987.

SILVA, Sebastião Liberato Duarte da. **Campo conceitual de Vergnaud: Um estudo sobre o campo conceitual multiplicativo no 6º ano do Ensino Fundamental**. Trabalho de Conclusão de Curso. UERJ, Duque de Caxias, 2009.

SOUZA, Eliane Reame de et al. **A Matemática das sete peças do Tangram** – São Paulo: Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática, 1995.

USISKIN, Zalman. **Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar**. In: Aprendendo e Ensinando Geometria. Atual Editora: São Paulo, 1994.

VERGNAUD, Gérard. **Teoria dos Campos Conceituais**. In: Anais do 1° Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: UFRJ, 1993, p. 1 – 26.