

ESTABILIDADE ESTRUTURAL  
e  
ATRADORES HIPERBÓLICOS

ARTUR OSCAR LOPES

Tese apresentada para a obtenção do título de  
Doutor em Matemática

IMPA  
Rio de Janeiro  
1977

## Agradecimentos

Desejo agradecer a todos aqueles que me ajudaram a elaborar este trabalho direta ou indiretamente.

Agradeço em especial ao meu orientador Jacob Palis e a Ricardo Mañé Ramirez pelas conversas, orientação e encorajamento que me deram.

Agradeço a Elon Lages Lima, meu orientador no curso de Mestrado.

Agradeço aos meus colegas e professores do IMPA.

Agradeço a Sílvia por tudo.

Agradeço ao prof. Volney pelo que ele um dia me ensinou.

Agradeço ao Wilson Góes pela excelente datilografia.

Rio de Janeiro, 25 de março de 1977

Artur Oscar Lopes

## Introdução

Uma das questões básicas em Sistemas Dinâmicos é a caracterização e o estudo das propriedades dos sistemas (campos de vetores e difeomorfismos) estruturalmente estáveis. A conjectura a este respeito, formulada pela primeira vez em Palis-Smale [8], é a de que um sistema é estruturalmente estável se e somente se ele satisfaz o Axioma A e a condição de transversalidade forte. Que um sistema satisfazendo a estas condições é estruturalmente estável foi demonstrado por Robbin [13] e Robinson [14] [15], culminando uma série de importantes resultados nessa direção. Também é conhecido [16] que em presença de Axioma A a transversalidade forte é condição necessária para a estabilidade. Resta assim como questão em aberto saber se a estabilidade implica o Axioma A. Resultados relevantes sobre esta questão foram obtidos por Mañé [4], [6] e Pliss [10], [11]. Em [11], Pliss demonstrou que a estabilidade para difeomorfismos de classe  $C^1$  implica a existência de apenas um número finito de órbitas periódicas atratoras (hiperbólicas). O propósito do presente trabalho é mostrar, generalizando este último resultado, que a estabilidade dos difeomorfismos de classe  $C^1$  implica a existência de apenas um número finito de atratores hiperbólicos.

Enunciaremos a seguir, de forma mais precisa nosso resultado principal.

Seja  $M$  uma variedade  $C^\infty$  sem bordo e  $\text{Dif}^r(M)$  o espaço dos  $C^r$ -difeomorfismos de  $M$  com a topologia  $C^r$ . Um difeomorfismo

$f \in \text{Dif}^r(M)$  é  $C^r$ -estruturalmente estável se existe uma vizinhança  $U$  de  $f$  em  $\text{Dif}^r(M)$ , tal que se  $g \in U$  então existe um homeomorfismo  $h$  de  $M$  satisfazendo  $fh = hg$ . Tal difeomorfismo  $f$  tem a propriedade que todo difeomorfismo suficientemente próximo dele tem a mesma estrutura de órbitas.

Um ponto é não errante para  $f \in \text{Dif}^r(M)$  quando  $\forall U$  vizinhança de  $x$  em  $M$  existe  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$  tal que  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ . Nós anotaremos este conjunto por  $\Omega(f)$ .

Um subconjunto  $\Lambda \subset \Omega(f)$  fechado em  $M$  é chamado atrator quando:

- 1)  $\Lambda$  é  $f$ -invariante (isto é  $f(\Lambda) = \Lambda$ )
- 2)  $\exists L$  vizinhança de  $\Lambda$  em  $M$  tal que  $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} f^n(L) = \Lambda$ .

Um subconjunto  $\Delta \subset M$  é chamado hiperbólico para um difeomorfismo  $f \in \text{Dif}^r(M)$  quando:

- 1)  $\Delta$  é  $f$  invariante.
- 2) Existem fibrados contínuos  $E^s(x)$  e  $E^u(x)$   $x \in \Delta$  que são invariantes por  $Df$ , e tal que  $E^s(x) \oplus E^u(x) = TM_x \quad \forall x \in \Delta$ .
- 3)  $\exists K > 0 \quad \exists \lambda \quad 0 < \lambda < 1$  tal que

$$\|(Df)^n | E^s(x)\| \leq K\lambda^n$$

$$\|(Df)^{-n} | E^u(x)\| \leq K\lambda^n \quad \forall x \in \Delta \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

Nosso objetivo nesse trabalho é provar o seguinte:

Teorema - O número de atratores hiperbólicos de um difeomorfismo  $C^1$ -estruturalmente estável é finito.

A seguir indicaremos mais detalhadamente as motivações para este resultado e suas consequências, dividindo o tópico em duas partes: I -  $C^r$ -estabilidade estrutural e II-atratores.

I -  $C^r$ -estabilidade estrutural - No estudo de  $C^r$ -estabilidade estrutural foram introduzidas as seguintes definições:

Axioma A - Nós diremos que um difeomorfismo  $f \in \text{Dif}^r(M)$  satisfaz o Axioma A quando:

- 1) Os pontos periódicos são densos no conjunto não-errante.
- 2) O conjunto não-errante do difeomorfismo  $f$  é hiperbólico.

Variedade estável (respectivamente instável) - Para um difeomorfismo  $f \in \text{Dif}^r(M)$  e um ponto  $x \in M$ , nós chamaremos variedade estável (instável) de  $x$  o seguinte conjunto

$$W^S(x) = \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0\}$$
$$\quad \quad \quad n \rightarrow \infty$$
$$(W^U(x) = \{y \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \rightarrow 0\}).$$
$$\quad \quad \quad n \rightarrow \infty$$

Pode ser provado [3] que se  $f \in \text{Dif}^r(M)$  satisfaz o Axioma A então para qualquer  $x \in \Omega(f)$   $W^S(x)$  e  $W^U(x)$  são variedades inversas 1 a 1 em  $M$  e  $\bigcup_{x \in \Omega(f)} W^S(x) = \bigcup_{x \in \Omega(f)} W^U(x) = M$ .

Transversalidade forte - Nós diremos que um difeomorfismo  $f \in \text{Dif}^r(M)$  satisfaz a condição de transversalidade forte quando:

- 1)  $f$  satisfaz o Axioma A.
- 2) A interseção entre variedades estáveis e instáveis de qualquer ponto no conjunto não errante é transversal.

Na direção da caracterização de  $C^r$ -estabilidade estrutural de difeomorfismos existe a seguinte conjectura:

Conjectura 1 - Um difeomorfismo  $f \in \text{Dif}^r(M)$  satisfaz o Axioma A e a condição de transversalidade forte se e somente se ele é  $C^r$ -estruturalmente estável.

Já demos anteriormente uma idéia do que se sabe sobre esta conjectura.

É um fato bastante conhecido que um difeomorfismo satisfazendo o Axioma A e a condição de transversalidade forte tem um número finito de atratores. Nosso trabalho portanto é inspirado na Conjectura 1. Uma demonstração completa da Conjectura 1 conteria o nosso resultado.

Citaremos agora, explicitamente, alguns resultados parciais sobre a Conjectura 1, que são correlatos com o nosso trabalho.

Teorema A (Pugh [12]) - Um difeomorfismo  $f \in \text{Dif}^1(M)$   $C^1$ -estruturalmente estável tem os pontos periódicos densos em  $\Omega(f)$ .

Teorema B (Pliss [10]) - Em variedades de dimensão 2 um difeomorfismo  $C^2$  que é  $C^1$ -estruturalmente estável

vel e tem um conjunto não errante com medida de Lebesgue zero satisfaz o Axioma A.

Teorema C (Mañé [5]) - Um difeomorfismo  $f \in \text{Dif}^1(M)$ ,  $C^1$ -estruturalmente estável com a propriedade do  $\Omega(f)$ -germe expansivo (isto é,  $\exists \epsilon > 0$  tal que se  $x \in M$ ,  $y \in \Omega(f)$  e  $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ , então  $x = y$ ) satisfaz o Axioma A.

Teorema D (Mañé [6]) - Em variedades de dimensão dois um difeomorfismo  $f \in \text{Dif}^1(M)$   $C^1$ -estruturalmente estável tal que o conjunto não errante é toda a variedade  $M$ , satisfaz o Axioma A. Portanto  $M = T^2$  e  $f$  é Anosov.

Observação: Com as idéias e técnicas que aparecem no Teorema D segue-se facilmente um resultado mais forte: Em variedades de dimensão dois um atrator de um difeomorfismo  $C^1$ -estruturalmente estável é hiperbólico.

No caso  $C^r$  ( $r \geq 2$ ) apenas se sabe que os pontos periódicos são hiperbólicos e que suas variedades estáveis e instáveis se interceptam transversalmente. Já no caso  $C^2$  os Teoremas de A a D estão em aberto.

Um outro ponto de vista é considerar definições mais fortes "a priori" de estabilidade estrutural. Nesse sentido nós chamaremos  $f \in \text{Dif}^r(M)$   $C^r$ -absolutamente estável se  $\exists U$  vizinhança de  $f$  em  $\text{Dif}^r(M)$  e  $C > 0$  tal que  $\forall g \in U$  existe um homeomorfismo  $h$  em  $M$  tal que  $gh = hf$  e  $d_0(h, I_d) \leq C d_0(g, f)$  (onde  $d_0(, )$  é definida por  $d_0(k_1, k_2) = \sup\{d(k_1(x), k_2(x)) \mid x \in M\}$ ).

Os difeomorfismos satisfazendo essa definição podem ser caracterizados pelo seguinte resultado:

Teorema E (Franks [1], Guckenheimer [2], Mañé [5] - Um difeomorfismo  $f \in \text{Dif}^r(M)$  é  $C^r$ -absolutamente estável se e somente se ele satisfaz o Axioma A e a condição de transversalidade forte.

II - Atratores - A seguinte conjectura devida a Thom ilustra a importância dos atratores no estudo de órbitas de difeomorfismos:

Conjectura 2 - Existe um conjunto genérico  $\mathcal{J}$  de difeomorfismos em  $\text{Dif}^r(M)$  tal que:

- 1)  $\forall f \in \mathcal{J}$  tem no mínimo um atrator.
- 2)  $\forall f \in \mathcal{J} \exists U \subset M$  subconjunto denso em  $M$  tal que  $\forall x \in U$  a órbita positiva de  $x$  (isto é, o conjunto  $\{f^n(x) \mid x \in \mathbb{Z}_+\}$ ) acumula em algum atrator.

Essa conjectura é verdadeira no conjunto dos difeomorfismos satisfazendo o Axioma A e transversalidade forte, mas está em aberto em geral.

É claro que a órbita periódica atratora (isto é, todos os autovalores estão no interior do círculo unitário) é o caso mais simples de atrator. A seguinte conjectura de Smale está relacionada com a Conjectura 2 acima: existe um conjunto genérico  $\mathcal{J}'$  em  $\text{Dif}^r(S^2)$  tal que para  $f \in \mathcal{J}'$  existe ao menos um ponto periódico atrator para  $f$  ou  $f^{-1}$ .



Plikin [9] tem um exemplo em que é apresentado um conjunto aberto de difeomorfismos  $C^\infty$  em  $S^2$ , satisfazendo o Axioma A e a condição de transversalidade forte, mas sem pontos periódicos atratores para  $f$ .

Não é difícil provar que toda órbita periódica de um difeomorfismo  $C^r$ -estruturalmente estável é hiperbólica. Sobre o número de órbitas periódicas atratoras existe o seguinte resultado:

Teorema F (Pliss [11]) - O número de órbitas periódicas atratoras (todas hiperbólicas) de um difeomorfismo  $C^1$ -estruturalmente estável é finito.

O resultado que nós provaremos nesse trabalho estende o teorema acima para conjuntos atratores hiperbólicos. Nós ressaltamos que o Teorema F, como o deste trabalho, não diz nada a respeito da existência de atratores, mas apenas que não são em número infinito. O problema da existência de atratores para um difeomorfismo  $C^r$ -estruturalmente estável continua em aberto.

A relação entre a Conjectura 2 e este problema é que qualquer propriedade genérica daquele tipo será válida para difeomorfismos  $C^r$ -estruturalmente estáveis.

Newhouse [7] tem um contra-exemplo em  $S^2$  para a seguinte conjectura: existe um conjunto genérico  $\mathcal{J}''$  em  $\text{Dif}^r(M)$  tal que  $\forall f \in \mathcal{J}''$  o número de atratores hiperbólicos é finito. A

conjectura desse parágrafo, embora falsa no caso geral, é verdadeira no mundo dos difeomorfismos  $C^1$ -estruturalmente estáveis em variedades de dimensão  $n$ , como provaremos aqui.

A prova do principal resultado desse trabalho será feita da seguinte maneira: no §1 nós recordaremos e explicaremos alguns fatos já conhecidos, principalmente de [6] e [11]. No §2 nós demonstraremos alguns lemas preliminares que nos conduzirão no §3 ao resultado buscado.

### §1

Para difeomorfismos satisfazendo o Axioma A existe, como vimos na Introdução, uma generalização de variedade estável (instável) de pontos periódicos para pontos do conjunto não-errante [3]. Essa generalização permite-nos trabalhar com uma família contínua de discos fechados que têm algumas propriedades interessantes. Nós chamaremos essa família variedade estável (instável) local e nós enumeraremos alguma de suas propriedades nos Lemas (1.1) e (1.2).

Para sistemas  $C^1$ -estruturalmente estáveis nós não temos "a priori" essa estrutura de discos, que são definidos pela hiperbolicidade do conjunto não errante.

No entanto uma outra estrutura de discos foi introduzida por Mañé [6] para difeomorfismos  $C^1$ -estruturalmente estáveis. Essa estrutura tem algumas, mas não todas, das fortes propriedades da família de variedades estáveis (instáveis) locais. Nós chamare-

mos essa nova família de variedades pseudo-estáveis (pseudo-instáveis). Nós destacamos que esses dois tipos de famílias estáveis e pseudo-estáveis (instáveis e pseudo-instáveis) coincidem no caso em que  $f$  satisfaz o Axioma A.

Nesta seção nós relembremos algumas das propriedades dessas duas famílias.

No Lema (1.1) e (1.2) nós falaremos sobre a variedade estável (instável), isto é, o caso hiperbólico. Nos Lemas (1.3) a (1.8) estaremos interessados nas variedades pseudo-estável (pseudo-instável) de um difeomorfismo  $C^1$ -estruturalmente estável. Nós daremos apenas as provas do Lema (1.5) e (1.8) visto que os outros lemas estão provados em [6].

No Lema (1.9) nós relacionaremos os dois tipos de decomposição em fibrados que estão associados a estas duas famílias, no caso de um atrator hiperbólico de um difeomorfismo  $C^1$ -estruturalmente estável.

Finalmente, no Lema (1.11), nós aplicaremos as técnicas introduzidas por Pliss [11] no caso da variedade pseudo-estável.

Nós daremos antes do Lema (1.11) uma idéia de onde nós usaremos toda essa maquinária para provar o resultado principal deste trabalho.

Nós daremos o livro "Seminário Sistemas Dinâmicos", Monografia de Matemática, (organizado por J. Palis) IMPA, como referência geral para fatos conhecidos da Teoria de Sistemas Dinâmicos.

No resto deste trabalho estaremos sempre considerando uma

variedade  $C^\infty$  compacta  $M$  sem bordo,  $\text{Dif}^1(M)$  o conjunto dos difeomorfismos de  $M$  com a topologia  $C^1$  e  $d(x,y)$  uma métrica riemanniana fixada em  $M$ .

Lema 1.1 - Para  $x$  num conjunto hiperbólico  $\Lambda$  com os pontos periódicos densos em  $\Lambda$ , existe uma variedade instável (respectivamente estável) de  $x$ , denotada  $W^u(x)$  ( $W^s(x)$ ) com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \text{a) } W^u(x) &= \{y \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \rightarrow 0\} \\ &\quad n \rightarrow \infty \\ W^s(x) &= \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0\} \\ &\quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

é um plano imerso 1 a 1 com a mesma dimensão que  $E^u(x)$  ( $E^s(x)$ ).

b)  $E^u(x)$  ( $E^s(x)$ ) é o plano tangente a  $W^u(x)$  ( $W^s(x)$ ) em  $x$ .

c)  $f(W^u(x)) = W^u(f(x))$  ( $f(W^s(x)) = W^s(f(x))$ ).

d) Se  $\Lambda$  é um atrator hiperbólico então  $W^u(x) \subset \Lambda \subset \Omega(f)$

$\forall x \in \Lambda$  (note que os pontos periódicos são densos em  $\Lambda$  [12]).

Demonstração: Aparece em [3].

Definição 1.1 - Seja  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico e  $x \in \Lambda$ , nós definiremos a u-métrica em  $W^u(x)$  e a s-métrica em  $W^s(x)$  da seguinte maneira:  $d_u^x(v,z) = \inf\{\text{comprimentos na métrica } d \text{ em } M \text{ dos caminhos contidos em } W^u(x) \text{ que começam em } v \text{ e terminam em } z\}$  e  $d_s^x(v,z) = \inf\{\text{comprimentos na métrica } d \text{ em } M \text{ dos caminhos contidos em } W^s(x) \text{ que começam em } v \text{ e terminam em } z\}$ .

Definição 1.2 - Seja  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico e  $x \in \Lambda$ , nós definiremos  $W_\epsilon^u(x)$  a bola em  $W^u(x)$  de centro  $x$  e raio  $\epsilon$  na métrica  $d_u^x$ . Definimos  $W_\epsilon^s(x)$  de maneira similar.

Lema 1.2 - Seja  $\Lambda(f)$  conjunto hiperbólico com os pontos periódicos densos em  $\Lambda(f)$  e  $\epsilon > 0$ . Então para qualquer  $\delta > 0$  existe um  $N > 0$  tal que  $f^{-n}(W_\epsilon^u(x)) \subset W_\delta^u(f^{-n}(x)) \quad \forall n > N$ .

Demonstração: Aparece em "Seminário de Sistemas Dinâmicos" - IMPA.

Nos próximos lemas trataremos da família de variedades pseudo-instáveis (pseudo-estáveis) que existem para um difeomorfismo  $C^1$ -estruturalmente estável.

Nós chamaremos  $\text{Per}_j(f)$  o conjunto dos pontos periódicos de  $f$  que tem dimensão estável  $j$ . Seja  $\Lambda_j(f)$  o fecho de  $\text{Per}_j(f)$ .

Nós usaremos a notação  $\mathfrak{I}(M)$  para indicar o interior (na topologia  $C^1$ ) do conjunto dos difeomorfismos em  $\text{Dif}^1(M)$ , no qual todos os pontos periódicos são hiperbólicos.

O seguinte argumento bem conhecido mostra que todo difeomorfismo  $f$   $C^1$ -estruturalmente estável em  $\mathfrak{I}(M)$ : Suponhamos por absurdo que  $x$  é periódico e não hiperbólico. Nós podemos aproximar  $f$  por dois difeomorfismos  $f_1$  e  $f_2$  em  $\text{Dif}^1(M)$  que tenham diferentes números de pontos periódicos com mesmo período e mesma dimensão estável. Nós podemos supor que  $f_1, f_2$  e  $f$  são conjugados pela estabilidade de  $f$ . Mas isto é um absurdo

pois estabilidade preserva este número. Portanto como todos os difeomorfismos em uma vizinhança de  $f$  são estruturalmente estáveis, nós temos que  $f \in \mathcal{F}(M)$ .

Nos próximos lemas nós suporemos apenas que  $f \in \mathcal{F}(M)$ . Como vimos acima esses lemas serão válidos para um difeomorfismo  $C^1$ -estruturalmente estável.

Lema 1.3 - Seja  $f \in \mathcal{F}(M)$  com os pontos periódicos densos em

$\Lambda_j \neq \emptyset$ , para algum  $0 < j < \dim M$ . Então existe uma fibração contínua que decompõe  $TM|_{\Lambda_j} = \bar{E}^s \oplus \bar{E}^u$  e constantes  $0 < \bar{\lambda} < 1$ ,  $\bar{K} > 0$  tais que:

a)  $(Tf) \bar{E}^s = \bar{E}^s$

$(Tf) \bar{E}^u = \bar{E}^u$ ,  $\dim \bar{E}^s = j$

b) Se  $x \in \text{Per}_j(f)$  e  $m$  é o período de  $x$ , então:

$$\|(Tf)^n | \bar{E}_x^s\| \leq \bar{K} \bar{\lambda}^m$$

$$\|(Tf)^{-n} | \bar{E}_x^u\| \leq \bar{K} \bar{\lambda}^m$$

c) Para todo  $x \in \Lambda_j(f)$  e  $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\|(Tf)^m | \bar{E}_x^s\| \|(Tf)^{-m} | \bar{E}_{f^m(x)}^u\| \leq \bar{K} \bar{\lambda}^m.$$

Demonstração: Aparece em [6].

Seguindo [6] nós temos que dado  $\epsilon > 0$ ,  $r > 0$ , seja  $\phi_\epsilon$  uma função  $C^1$  preservando fibras de  $TM$ , cobrindo  $f$  e tal que  $\forall p \in M$ ,  $\forall v \in (TM)_p$ :

1)  $\exp \phi_\epsilon(p, v) = f(\exp v)$  se  $\|v\| < r$

2)  $\|\phi_\epsilon(p, v) - (Tf)v\| + \|d \phi_\epsilon(p, v) - (Tf)_p\| \leq \epsilon$

onde  $d\phi_\epsilon(p,v)$  é a derivada de  $\phi_\epsilon|_{(TM)_p}$  em  $(p,v)$ . Se  $\bar{E}^S$  e  $\bar{E}^u$  são os fibrados de  $TM|_{\Lambda_j(f)}$ , seja  $F_\partial$  o conjunto das funções contínuas  $h: \bar{E}^S \rightarrow \bar{E}^u$ , cobrindo a identidade, tal que para todo  $x \in \Lambda_j(f)$   $h|_{\bar{E}_x^S}$  é  $C^1$ , e se  $dh(x,v)$  denota a derivada da função  $h|_{\bar{E}_x^S}$  em  $(x,v)$ ,  $v \in \bar{E}_x^S$ , a função  $(x,v) \rightarrow dh(x,v)$  é contínua e  $\sup\{\|dh(x,v)\|, x \in \Lambda_j(f), v \in \bar{E}_x^S\} \leq \partial$ .

Coloque em  $F_\partial$  a pseudo-métrica:

$$\bar{d}(h_1, h_2) = \sup\{\|dh_1(x,v) - dh_2(x,v)\| \mid (x,v) \in \bar{E}^S\}.$$

Seja  $\theta: F_\partial \rightarrow F_\partial$  uma função tal que  $\phi_\epsilon: (\text{gráfico}(h)) = \text{gráfico}(\theta h)$  para todo  $h \in F_\partial$  e onde  $\text{gráfico } h = \{(x,v) + h(x,v) \mid x \in \Lambda_j(f) \ v \in \bar{E}_x^S\}$ .

Se  $r$  e  $\epsilon$  são pequenos então  $\partial$  pode ser escolhido de tal jeito que  $\theta$  está bem definido e é contínuo [6].

Seja  $F_{\partial,0} = \{h \in F_\partial \mid h(x,0) = 0, dh(x,0) = 0, \forall x \in \Lambda_j(f)\}$ .  
Então  $\theta(F_{\partial,0}) = F_{\partial,0}$ .

Nesse caso  $\bar{d}$  é uma métrica em  $F_{\partial,0}$  e nós temos o seguinte:

Lema 1.4 -  $\theta$  tem um ponto fixo  $h^S \in F_{\partial,0}$ . A função  $h^S$  tem as seguintes propriedades:

- a)  $\phi_\epsilon(\text{gráfico}(h^S)) = \text{gráfico}(h^S)$
- b)  $h^S(x,0) = (x,0)$
- c)  $\partial h^S(x,0) = 0$

para todo  $x \in \Lambda_j(f)$ .

As mesmas propriedades correspondentes são verdadeiras para  $\theta^u$ ,  $h^u$  e  $\bar{E}^u$  obtidos de maneira similar.

Demonstração: aparece em [6].

Definição 1.3 - Seja  $\bar{W}_\epsilon^s(x) = \{\exp((x,v) + h^s(x,v)) \mid v \in \bar{E}^s(x), \|v\| \leq \epsilon\}$  e  $\bar{W}_\epsilon^u(x) = \{\exp((x,v) + h^u(x,v)) \mid v \in \bar{E}^u(x), \|v\| < \epsilon\}$  para  $x \in \Lambda_j$ .

Essas duas famílias de discos fechados serão chamadas, respectivamente, de pseudo-estável e pseudo-instável.

Observação 1: Esses conceitos acima são "a priori" diferentes da família de variedades estável e instável definida no Lema (1.1).

Esses dois Lemas (1.3) e (1.4) nos possibilitam usar uma estrutura contínua de discos em  $\Lambda_j$ , que tem algumas propriedades interessantes. Essas propriedades aparecerão nos Lemas de (1.5) a (1.8). Essa estrutura no entanto não tem em geral a propriedade uniforme, que aparece no caso hiperbólico do Lema (1.2).

Como Lema (1.3) mostra, a  $\bar{W}_\epsilon^u(x)$  corresponde a parte linear invariante de  $f$ .

Observação 2: Nós ressaltamos a seguinte propriedade de invariância da família pseudo-estável: para qualquer  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que  $\forall x \in \Lambda_j$   $f(\bar{W}_\delta^s(x)) \subset \bar{W}_\epsilon^s(f(x))$ . Similarmente para qualquer  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\forall x \in \Lambda_j$   $f^{-1}(\bar{W}_\delta^u(x)) \subset \bar{W}_\epsilon^u(f^{-1}(x))$ . Suponhamos agora que  $p$  é periódico de período  $\pi(p)$ . Tome então  $\delta$  tal que  $f^j(\bar{W}_\delta^s(p)) \subset \bar{W}_\epsilon^s(f^j(p))$



$\forall 0 \leq j \leq \pi(p)$ . Neste caso, embora em geral  $f^{\pi(p)}(\bar{W}_\epsilon^S(p)) \neq \bar{W}_\epsilon^S(p)$ , para tal  $\delta > 0$  nós temos  $f^{\pi(p)}(\bar{W}_\delta^S(p)) \subset \bar{W}_\delta^S(p)$ .

Nós usamos aqui também a uniformidade de  $\bar{K}$  do Lema ((1.3).b).

Lema 1.5 - Seja  $\epsilon > 0$  como no Lema (1.4) e  $x \in \text{Per}_j(f) \cap \Lambda_j$  hiperbólico, então existe  $\epsilon_1 > 0$  tal que  $W_{\epsilon_1}^u(x) = \bar{W}_{\epsilon_1}^u(x)$  (nos recordamos que  $W_{\epsilon_1}^u(x)$  é a variedade instável do ponto periódico hiperbólico  $x$  de tamanho  $\epsilon_1$ ).

Demonstração: Suponhamos que  $x$  é fixo por  $f$  (de outro modo tome  $n \in \mathbb{Z}_+$  tal que  $f^n(x) = x$ ). Seja  $U$  vizinhança de  $x$  de tamanho  $\epsilon_2$  dado pelo teorema de Hartman

[16, para referência]; isto é  $f$  é conjugado com  $Tf_x$  em  $U$ .

Pela Observação 2 após Definição (1.3) podemos tomar  $0 < \epsilon_1 < \epsilon$  e  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  tal que  $f(\bar{W}_{\epsilon_1}^S(x)) \subset \bar{W}_{\epsilon_1}^S(x)$ . Mas pela unicidade de  $W_{\epsilon_2}^S(x)$ , essa propriedade só ocorre para um disco de dimensão  $j$ , o disco  $W_{\epsilon_1}^S(x)$ . Portanto segue que  $W_{\epsilon_1}^S(x)$  é igual a  $\bar{W}_{\epsilon_1}^u(x)$ .

Nós ressaltamos que esse  $\epsilon_1$  depende de  $x$ .

Definição 1.4 - Suponhamos que  $x \in \Lambda_j$ ,  $y \in \bar{W}_\epsilon^S(x)$  e  $\epsilon$  como no Lema (1.4). Nós definimos  $\bar{d}_S(x, y) = \inf\{\ell \mid y \in \bar{W}_\ell^S(x)\}$ .

Definição 1.5 - Para  $x, y \in \Lambda_j$  nós definimos  $\langle x, y \rangle = \bar{W}_\epsilon^S(x) \cap \bar{W}_\epsilon^u(y)$ .

Lema 1.6 - O  $\epsilon$  do Lema (1.4) pode ser tomado de tal jeito que se  $x, y \in \Lambda_j$  e  $d(x, y) \leq \epsilon$  então  $\langle x, y \rangle$  é apenas um ponto e  $f(\langle x, y \rangle) = \langle f(x), f(y) \rangle$   $f^{-1}(\langle x, y \rangle) = \langle f^{-1}(x), f^{-1}(y) \rangle$ .

Demonstração: Aparece em [6].

Lema 1.7 -  $\exists \epsilon_1 > 0$   $m_1 > 0$   $0 < \bar{\lambda} < 1$  e  $\bar{K} > 0$  tal que:

a) Se  $x \in \text{Per}_j(f)$  tem período maior do que  $m_1$ , então  
 $\bar{d}_u(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon_1$  para todo  $n \geq 0$  ( $\bar{d}_s(f^{-n}(x), f^{-n}(y))$   
 $\forall n \leq 0$ ) implica  $x = y$ .

b) Se  $x_i \in \Lambda_j(f)$   $i = 1, 2$ ,  $y_i \in M$   $i = 1, 2$ ,  $N > 0$  e

$$\bar{d}_s(x_2, y_2) < \epsilon_1$$

$$\bar{d}_u(f^n(x_1), f^n(y_1)) < \epsilon_1$$

$$d(f^n(x_2), f^n(x_1)) < \epsilon_1$$

para todo  $0 \leq n \leq N$  então:

$$\frac{\bar{d}_s(f^n(x_2), f^n(y_2))}{\bar{d}_s(x_2, y_2)} \leq \bar{K} \bar{\lambda}^n \frac{\bar{d}_u(f^n(x_1), f^n(y_1))}{\bar{d}_u(x_1, y_1)}$$

para todo  $0 \leq n \leq N$ .

Demonstração: Aparece em [6].

Lema (1.8) a seguir, será a propriedade que realmente usaremos neste trabalho e é uma consequência do Lema (1.7.b). O Lema (1.8) diz, informalmente falando, que se as imagens dos iterados positivos de  $\bar{W}_\epsilon^u(x)$  estão limitados, então os iterados positivos de  $\bar{W}_\epsilon^s(x)$  estão limitados também, para  $x$  em  $\Lambda_j$ .

Lema 1.8 - Suponha que para  $\epsilon_1$  como no Lema (1.7) e  $a, b \in \Lambda_j$   
tal que  $a \in \bar{W}_{\epsilon_1}^u(b)$ ,  $d_u(a, b) = \epsilon_1$  e

$\bar{d}_u(f^n(a), f^n(b)) \leq \epsilon_1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$ , então  $\exists \epsilon_2 > 0$  tal que  
 $\forall y \in \bar{W}_{\epsilon_2}^s(b) \quad \bar{d}_s(f^n(b), f^n(y)) \leq \epsilon_1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$ .

Demonstração: Seja  $n_0$  tal que  $\bar{K} \bar{\lambda}^{n_0} \frac{\bar{d}_s(a,b)}{\bar{d}_u(a,b)} < 1$  onde  $\bar{K}$  e  $\bar{\lambda}$   
são as constantes do Lema (1.7). Seja  $\epsilon_2$  tal que  
 $\bar{d}_s(f^n(y), f^n(b)) < \epsilon_1 \quad \forall n \quad 0 \leq n \leq n_0 \quad \forall y \in \bar{W}_{\epsilon_2}^s(b)$ . Então pelo  
Lema (1.7) nós temos

$$\bar{d}_s(f^n(y), f^n(b)) \leq \bar{K} \bar{\lambda}^n \frac{\bar{d}_u(f^n(a), f^n(b)) \cdot \bar{d}_s(y, b)}{\bar{d}_u(a, b)} \leq \epsilon_1$$

$\forall n \quad n \geq n_0$ . Portanto segue que o Lema (1.8) é verdadeiro.

O próximo Lema (1.9) estuda a relação, no caso de um atrator hiperbólico, entre a decomposição  $E^s(x) \oplus E^u(x)$  (dado pela hiperbolicidade) e a decomposição  $\bar{E}^s(x) \oplus \bar{E}^u(x)$  (do Lema (1.3)) para  $x$  no atrator. Para que a última decomposição tenha sentido nós estamos considerando que o atrator está contido em  $\Lambda_j$ , para um certo  $0 < j < \dim M$ .

Lema 1.9 - Seja  $\Lambda \subset \Lambda_j$  para algum  $0 < j < \dim M$ .  $\Lambda$  um atrator hiperbólico para  $f \in \mathcal{F}(M)$  com os pontos periódicos densos em  $\Lambda$ . Então o fibrado  $\bar{E}^u(x)$  (respectivamente  $\bar{E}^s(x)$ ) e o fibrado  $E^u(x)$  ( $E^s(x)$ ) são os mesmos para  $x \in \Lambda$ .

Demonstração: Nós apenas consideraremos o caso  $E^u$  e  $\bar{E}^u$  pois o outro caso, isto é,  $E^s$  e  $\bar{E}^s$ , é similar.

Seja  $\bar{\epsilon}$  tal que  $f^{-n}(W_{\bar{\epsilon}}^u(x)) \subset W_{\bar{\epsilon}}^u(f^{-n}(x)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad x \in \Lambda$ .  
A existência de tal  $\bar{\epsilon}$  segue da uniformidade da hiperbolicidade (inegualdade  $\|(Df)^{-n} E^u(x)\| < K \lambda^m \quad \forall x \in \Lambda \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+$ ).

Do Lema (1.7) nós temos que se  $\bar{\epsilon}$  é pequeno então  $\bar{W}_{\bar{\epsilon}}^u(x) = W_{\bar{\epsilon}}^u(x)$ , para qualquer  $x$  periódico em  $\Lambda$ . Os planos tangentes de tais variedades são os mesmos, portanto, nos pontos periódicos  $x$ . Então é claro que nos pontos periódicos  $E^u$  e  $\bar{E}^u$  coincidem. Agora usando o fato que os fibrados  $E^u$  e  $\bar{E}^u$  são contínuos, e os pontos periódicos densos em  $\Lambda$  segue o Lema (1.9).

O Lema (1.10) abaixo é um fato bastante conhecido para atratores hiperbólicos.

Lema 1.10 - Seja  $\Lambda$  um atrator hiperbólico e  $c \in \Lambda$  tal que  $f(c) = c$ . Então para todo  $x, y \in W^u(c)$ , a sequência  $d_u^c(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto  $W^u(c)$  não é limitada para a métrica  $d_u^c$ .

Demonstração: Seja  $\alpha: [0, 1] \rightarrow W^u(c)$  tal que  $\alpha(0) = f^n(x)$  e  $\alpha_1 = f^n(y)$ . Como  $f^{-n}(\alpha(t))$  está no conjunto  $\Lambda$  pelo Lema (1.1, d), nós temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|((f^{-n} \circ \alpha)(t))\| dt &= \int_0^1 \frac{\|(Df)^{-n}(\alpha'(t))\|}{f^{-n}(\alpha(t))} dt \\ &\leq K \lambda^n \int_0^1 \|\alpha'(t)\| dt \end{aligned}$$

onde  $K$  e  $\lambda$  são as constantes de hiperbolicidade de  $\Lambda$ .

Como  $f$  é um difeomorfismo, todo caminho entre  $f^n(x)$  e  $f^n(y)$  é  $f^n$  de algum caminho entre  $x$  e  $y$ . Portanto

$$\frac{1}{K^{-1} \lambda^{-n}} d_u^c(x, y) \leq d_u^c(f^n(x), f^n(y)).$$

Então o Lema (1.10) é verdadeiro e conseqüentemente  $W^u(c)$

não é limitado para  $d_u^C$ .

Nós daremos agora uma idéia da prova do resultado principal deste trabalho. Isto será feito em detalhe no §2 e §3.

Primeiro, vamos recordar o trabalho de Pliss sobre pontos periódicos atratores em [11] (para um difeomorfismo  $C^1$ -estruturalmente estável existem apenas um número finito de pontos periódicos atratores): Pliss encontra  $\delta > 0$  tão pequeno quanto se queira, e pontos periódicos atratores  $p_i$  (com período  $\pi(p_i)$ ) tal que existem pulos de tamanho constante  $k_i$



tais que  $f^{k_i}(\bar{W}_\delta^S(f^{\ell k_i}(p_i))) \subset \bar{W}_\delta^S(f^{(\ell+1)k_i}(p_i))$  é uma contração uniforme por  $\frac{1}{4}$ . Aqui  $\ell > 0$  são inteiros tais que  $\ell k_i \leq \pi(p_i)$ . Ele pode fazer  $k_i$  e o maior de tais  $\ell$ , arbitrariamente grandes, tomando  $\pi(p_i)$  grande. Portanto no caso de existirem um número infinito de pontos periódicos atratores, nós podemos tomar  $p_i$  com um número muito grande de elementos na sequência de saltos  $k_i$  acima (isto é, o maior de tais  $\ell$ , arbitrariamente grandes). Como  $M$  é compacta, dois destes elementos de uma sequência estarão a uma distância menor que  $\delta/2$ ; isto é existem inteiros  $m_i > n_i > 0$  tal que  $d(f^{m_i k_i}(p_i), f^{n_i k_i}(p_i)) < \delta/2$  e  $(m_i - n_i)k_i < \pi(p_i)$  bastante grande. Ora como  $f^{m_i k_i - n_i k_i}$  é uma contração de  $\bar{W}_\delta^S(f^{n_i k_i}(p_i))$  em  $\bar{W}_\delta^S(f^{m_i k_i}(p_i))$ , então  $f^{m_i k_i - n_i k_i}$  tem apenas um ponto fixo em  $\bar{W}_\delta^S(f^{n_i k_i}(p_i))$ , e este ponto é diferente de  $p_i$  porque  $m_i k_i - n_i k_i < \pi(p_i)$ . Assim ele obtemos uma contradição, e portanto segue que o número de pontos periódicos atratores

é finito.

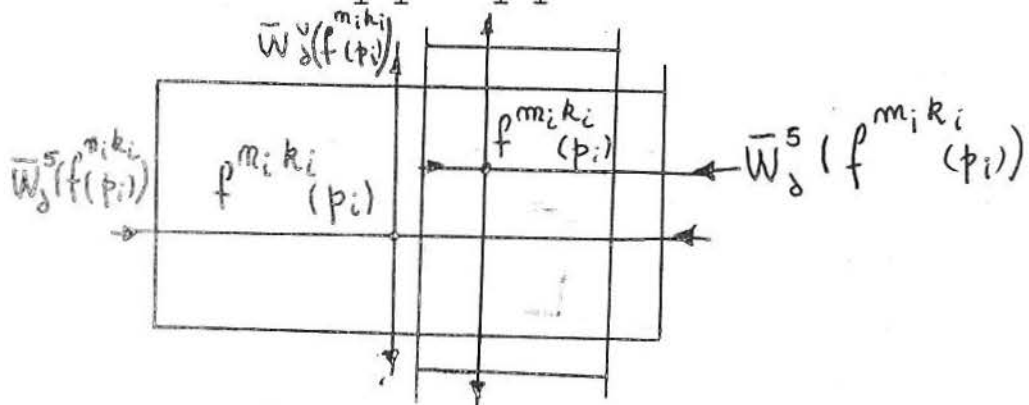
Observação 3: Pliss em [11] não usa explicitamente a variedade pseudo-estável, mas as vizinhanças dos pontos  $p_i$  que ele considera correspondem a essas variedades.

Vamos ver agora como provaremos que se  $f \in \mathfrak{F}(M)$ , com os pontos periódicos densos em  $\Omega(f)$ , então  $f$  tem apenas um número finito de atratores hiperbólicos.

Suponha por absurdo que exista um número infinito de atratores hiperbólicos em  $\Lambda_j$ . Tome  $p_i$  um ponto periódico em cada atrator, tal que  $p_i$  tenha período mínimo no atrator.

Primeiro nós observamos que, com os mesmos argumentos que em [7], obtém-se a existência de sequências de saltos  $k_i$  como acima para pontos periódicos  $p_i$  com dimensão estável  $j$   $0 < j < \dim M$ . Esse fato será formalmente formulado no Lema (1.11).

Outra propriedade básica que será necessária, a qual será provada no Lema (.25) Seção §2, é a seguinte: dado um  $\delta > 0$ , existe um  $N$  grande a partir do qual  $f^{-r}$  é uma contração para  $r > N$  de  $\bar{W}_\delta^u(f^r(p_i))$  em  $\bar{W}_\delta^u(p_i)$ . Portanto como se pode ver na Figura 1, nós teremos um novo ponto periódico em  $\bar{W}_\delta^u(f^{n_i k_i}(p_i)) \times \bar{W}_\delta^s(f^{n_i k_i}(p_i))$  se tomarmos  $m_i k_i - n_i k_i > r$ .



Esse novo ponto periódico tem período menor que o período de  $p_i$ . Portanto nós teremos um absurdo se provarmos (e nós faremos isso em §3) que esse novo ponto periódico está no mesmo atrator que  $p_i$ . Isto será obviamente absurdo pois  $p_i$  tem período mínimo no atrator.

Nós terminaremos o §1 com a nova formulação do lema de Pliss para as sequências de saltos mencionadas acima. A prova é a mesma como em [7].

Lema 1.11 - Seja  $f \in \mathcal{F}(M)$  com os pontos periódicos densos em

$\Omega(f)$  e uma sequência  $p_i \in \text{Per}_j(f)$ , isto é,  $p_i$  é uma sequência de pontos com dimensão estável  $0 < j < \dim M$ .

Suponhamos que  $\pi(p_i) \rightarrow \infty$ , onde  $\pi(p_i)$  é o período de  $p_i$ .

Então  $\exists \delta_0 > 0$  tal que  $\forall \delta < \delta_0, \forall N > 0, \exists i \in \mathbb{Z}_+, \exists k_i > 0 \exists m_i > n_i > 0$  tal que

$$1) \quad \pi(p_i) > m_i k_i - n_i k_i > N > 0$$

$$2) \quad d(f^{m_i k_i}(p_i), f^{n_i k_i}(p_i)) < \delta/2$$

$$3) \quad f^{(m_i - n_i)k_i} \text{ é uma contração de } \bar{W}_\delta^s(f^{n_i k_i}(p_i)) \text{ em } \bar{W}_\delta^s(f^{m_i k_i}(p_i)), \text{ com constante de contração menor que } \frac{1}{4}.$$

$$\text{Em particular } f^{(m_i - n_i)k_i}(\bar{W}_\delta^s(f^{n_i k_i}(p_i))) \subset \bar{W}_{\delta/4}^s(f^{m_i k_i}(p_i)).$$

Demonstração: Aparece em [11].

Nós ressaltamos que os resultados correspondente para  $\bar{W}_\delta^u$  são verdadeiros, mas infelizmente nós não podemos obter simultaneamente ambos resultados para o mesmo ponto periódico  $p_i$ .



§2

Como antes nós consideraremos  $f \in \mathcal{F}(M)$ , com os pontos periódicos densos. Na última seção nós vimos que para todo  $p \in \text{Per}_j(f)$  existe um  $\delta(p) > 0$  tal que  $\bar{W}_{\delta}^u(p)(p) = W_{\delta}^u(p)(p)$ . Nosso principal objetivo na presente seção é obter um  $\delta$  universal positivo tal que  $\bar{W}_{\delta}^u(x) = W_{\delta}^u(x)$  para todo  $x \in A_H$ , onde  $A_H$  é a união de todos atratores hiperbólicos para  $f$  (Lema 2.7)). Mais do que isso nós exibiremos um inteiro  $N > 0$  tal que  $f^{-N}$  é uma contração uniforme em  $\bar{W}_{\delta}^u(x)$  para  $x \in A_H$  e  $\delta$  como antes (Lema (2.5)).

Naturalmente esses fatos seriam facilmente verificados se nós tivéssemos apenas um número finito de atratores hiperbólicos. O problema aqui é que com um número infinito de atratores hiperbólicos, nós não temos uma constante uniforme de hiperbolicidade.

Seja  $\epsilon > 0$  como no Lema (1.3), de tal modo que possamos falar nas variedades pseudo-estáveis e pseudo-instáveis para todo  $x \in \Lambda_j$ .

Tal  $\epsilon > 0$ , será usado em toda a seção da seguinte maneira: sempre que nós mencionarmos  $\bar{W}_r^u(p)$  ou  $\bar{W}_r^s(p)$  para algum  $r > 0$ , está sempre implícito que  $r < \epsilon$ .

Lema 2.1 - Para  $p \in A_H \cap \text{Per}(f) \cap \Lambda_j$  e  $\epsilon_0 > 0$  suponha  
 $\forall q \in \bar{W}_{\epsilon_0}^u(p), d(f^{-n}(q), f^{-n}(p)) < \epsilon$  para todo  $n \geq 0$ ,  
então  $\bar{W}_{\epsilon_0}^u = W_{\epsilon_0}^u$ .

Demonstração: Seja  $\pi(p)$  o período de  $p$ , portanto pela Observação 2 segue  $f^{-\pi(p)}(\bar{W}_{\epsilon_0}^u(p)) \subset \bar{W}_{\epsilon_0}^u(p)$ . Temos pelo



Lema (1.5) que para algum  $r < \epsilon$   $\bar{W}_r^u(p) = W_r^u(p)$ . Ainda, é claro que  $f^{-n}(p) (W_r^u(p)) \subset W_r^u(p)$ .

Seja  $y$  um ponto no bordo de  $W_{\epsilon_0}^u \cap \bar{W}_{\epsilon_0}^u$  e  $V$  vizinhança de  $y$  em  $W_{\epsilon_0}^u$ . Nós podemos supor  $f^{-n}(V) \subset \bar{W}_r^u(p) = W_r^u(p)$  como  $f^n(\bar{W}_{\epsilon_0}^u(p)) \subset \bar{W}_{\epsilon_0}^u(p)$ , temos que  $f^n(f^{-n}(V))$  está contido em  $\bar{W}_{\epsilon_0}^u(p)$ , o que é um absurdo pela maneira como tomamos  $y$ . Portanto segue que o Lema (2.1) é verdadeiro.

Observação 4: O fibrado  $\bar{E}^u$  é uniformemente contínuo, portanto  $\exists \epsilon_4 > 0$  tal que se  $d(x, y) < \epsilon_4$  então os ângulos entre  $\bar{E}^u(x)$  e  $\bar{E}^u(y)$  são menores que  $\frac{1}{4}$ . Nós consideraremos no resto deste trabalho o  $\epsilon$  do Lema (1.3) como sendo menor que esse  $\epsilon_4$ .

Lema 2.2 - Seja  $p \in \text{Per}_j(f) \cap A_H \cap \Lambda_j$ ,  $q \in \Lambda_j$ ,  $\epsilon$  como na Observação 4 e  $\bar{W}_\epsilon^u(q) \subset \Lambda_j$ , então  $\exists \epsilon_5 > 0$  tal que se  $d(p, q) < \epsilon_5$  então  $W^u(p) \cap \bar{W}_\epsilon^s(x) \forall x \in \bar{W}_\epsilon^u(q)$   $d(x, q) \leq \epsilon$ .

Demonstração: Primeiro note que existe um  $\epsilon_5$  tal que qualquer superfície  $V$  de dimensão  $n-j$  a qual não é limitada tem a seguinte propriedade: se os planos tangentes de  $V$  e  $\bar{E}(y) \forall y \in \bar{W}_\epsilon^u(q)$  são menores que  $\frac{1}{4}$  e existe  $z \in V$   $d(z, q) < \epsilon_5$ , então  $V$  é o gráfico de alguma função de  $\bar{W}_\epsilon^u(q)$  em  $\mathbb{R}$ . Portanto  $V \cap \bar{W}_\epsilon^s(x) \neq \emptyset$  para qualquer  $x \in \bar{W}_\epsilon^u(q)$  tal que  $d(x, q) \leq \epsilon$ . Nós apenas temos que mostrar que  $W^u(p) \forall p \in \text{Per} f \cap A_H \cap \Lambda_j$  satisfaz as condições de  $V$  se  $d(p, q) < \epsilon_5$ . Lembre-se que pelo Lema (1.10)  $W^u(p)$  não é limitada, e pelo Lema (1.1, d)  $W^u(p) \subset \Lambda_j$ . Agora pelo Lema (1.9)  $\bar{E}^u(z) = E^u(z)$ , então para  $y \in \bar{W}_\epsilon^u(q)$  e

$z \in W^u(p)$  os ângulos entre  $\bar{E}^u(y)$  e  $\bar{E}^u(z)$  são menores que  $\frac{1}{4}$  pela maneira como nós tomamos  $\epsilon$  (veja Observação 4). Portanto o Lema (2.2) é verdadeiro.

Observação 5: Seja  $\epsilon_5$  fixado satisfazendo as condições do Lema (2.2). Então existe um  $C > 0$  tal que para todo  $p \in \text{Per}_j(f) \cap \Lambda_j \cap A_H$   $d(p,q) < \epsilon_5$ , a distância  $d_u^C(x,y)$  é limitada por  $C$ , para  $x,y$  na mesma componente conexa de  $W^u(p) \cap (\bar{W}_\epsilon^s(q) \times \bar{W}_\epsilon^u(q))$ . Nós suporemos no resto deste trabalho o  $\epsilon$  da Observação 4 menor que esse  $\epsilon_5$  fixado.

Os seguintes Lemas (2.3) e (2.4) são apenas para pontos periódicos, mas eles são o ponto central do §2.

O objetivo desta seção serão os Lemas (2.5) e (2.7) que seguirão dos anteriores por argumentos de continuidade de  $\bar{W}_\epsilon^u(x)$  em todo  $\Lambda_j \cap A_H$ .

No próximo Lema (2.3) nós obteremos uma propriedade que é fácil provar para apenas um atrator hiperbólico (Lema (1.2)). O problema com um número infinito de atratores é que as constantes  $K$  de hiperbolicidade podem ficar arbitrariamente próximos de 0.

Lema 2.3 -  $\exists \epsilon_0 > 0$  tal que  $\forall \epsilon_6$   $0 < \epsilon_6 \leq \epsilon_0$   $\exists \delta > 0$  tal que  $f^{-n}(\bar{W}_\delta^u(p)) \subset \bar{W}_{\epsilon_6}^u(p)$  para todo  $p \in A_H \cap \text{Per}_j(f) \cap \Lambda_j$   $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ .

Demonstração: Seja  $\epsilon_0 = \epsilon_5$  como na Observação 5 depois do Lema (2.2). Para  $p \in \Lambda_j$  nós definimos

$$S_p = \{\alpha \in \bar{W}_{\epsilon_6}^u(p) \mid d(f^n(p), f^n(\alpha)) < \epsilon_6 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+\} \quad \epsilon_6 < \epsilon$$

Note que pelo Lema (1.3, b) nós temos que  $\pi(p)$  é suficientemente grande  $f^{-\pi(p)}(\bar{W}_{\partial_p}^u(p)) \subset \bar{W}_{\partial_p}^u(p) \quad \forall p \in \text{Per}_j f \cap \Lambda_j$ .  
Portanto  $\partial_p > 0$  sempre. Temos também que se  $x \in \bar{W}_{\partial_p}^u(p)$  então  $d(f^{-n}(p), f^{-n}(x)) \leq \epsilon_6$  para todo  $n > 0$ .

Suponha por absurdo que exista  $\partial_n = \partial_{p_n} \rightarrow 0, \quad p_n \in \text{Per}_j(f) \cap \Lambda_H \cap \Lambda_j$ . Seja  $q_n \in \Lambda_j \cap \bar{W}_{\partial_n}^u(p_n) \quad 0 < m_n < \pi(p_n)$  tal que  $d(f^{-m_n}(q_n), f^{-m_n}(p_n)) = \epsilon_6$ . É claro que  $m_n \rightarrow \infty$  porque como  $f$  é  $C^1$  e  $M$  é compacta, então a derivada de  $f$  é uniformemente limitada.

Seja  $a = \lim f^{-m_n}(q_n) \in \Lambda_j \quad b = \lim f^{-m_n}(p_n) \in \Lambda_j$ .  
Nós mostraremos que  $d(f^n(a), f^n(b)) < \epsilon_6 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$ .

Seja  $B_\Delta(x) = \{y \in M \mid d(x, y) < \Delta\}$ . Suponha por absurdo que  $\exists n_0 > 0$  tal que  $d(f^{n_0}(a), f^{n_0}(b)) > \epsilon_6$ .

Seja  $\Delta_1 > 0$  tal que  $\forall x \in B_{\Delta_1}(f^{n_0}(a)) \quad \forall y \in B_{\Delta_1}(f^{n_0}(b))$  nós temos  $d(x, y) > \epsilon_6$ . Seja agora  $\Delta_2$  tal que  $\forall x \in B_{\Delta_2}(a) \quad \forall y \in B_{\Delta_2}(b)$  nós temos  $f^{n_0}(x) \in B_{\Delta_1}(f^{n_0}(a)) \quad f^{n_0}(y) \in B_{\Delta_1}(f^{n_0}(b))$ .  
Seja  $p_n, q_n$  tal que  $d(f^{-m_n}(q_n), a) < \Delta_2$  e  $d(f^{-m_n}(p_n), b) < \Delta_2$   $m_n > n_0$ . Então  $d(f^{-m_n+n_0}(p_n), f^{-m_n+n_0}(q_n)) > \epsilon_6$ , mas isto é uma contradição com o fato de que  $q_n \in \bar{W}_{\partial_n}^u(p_n)$ . Portanto  $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad d(f^n(a), f^n(b)) < \epsilon_6$ .

Nós ressaltamos que pela maneira como tomamos  $a$  e  $b$  nós temos que  $a \in \bar{W}_{\epsilon_6}^u(b)$ . Seja agora  $c \in \Lambda_H$  algum ponto periódico da sequência  $f^{-m_n}(p_n)$ . Pelo Lema (2.2) se  $c$  estiver próximo su

ficiente de  $b$  então nós temos o seguinte: existem  $a_1$  na interseção de  $\bar{W}_{\epsilon_6}^S(a) \cap W^u(c)$  e  $b_1$  na interseção de  $\bar{W}_{\epsilon_6}^S(b) \cap W^u(c)$ .

Agora pelo Lema (1.8) se  $d(a_1, a) < \epsilon_2$  e  $d(b_1, b) < \epsilon_2$  para um certo  $\epsilon_2 > 0$  então  $d(f^n(a_1), f^n(b_1)) < \epsilon_6 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$ . É claro que nós podemos tomar  $a_1$  perto de  $a$  e  $b_1$  perto de  $b$ , tomando  $c$  perto de  $b$ . Portanto  $d(f^n(a_1), f^n(b_1)) < \epsilon_6$  para todo  $n > 0$ , e  $a_1$  e  $b_1$  estão em  $W^u(c)$ .

Nós mostraremos finalmente que isto implica que  $d_u^C(f^n(a_1), f^n(b_1))$  é limitado, e portanto pelo Lema (1.10) nós teremos uma contradição. Acontece que a distância  $d_u^C(f^n(a_1), f^n(b_1))$  é limitada por  $C$  (veja Observação 5 do Lema (2.2)) porque  $d(f^n(a_1), f^n(b_1)) \leq \epsilon_6 < \epsilon_5$ .

Portanto com essa contradição com o Lema (1.10), nós concluimos que  $\delta_n$  não pode tender a 0. Logo o Lema (2.3) segue.

Lema 2.4 - Seja  $\epsilon_0$  como no Lema (2.3). Existe  $\epsilon_7$   $0 < \epsilon_7 < \epsilon_0$  tal que  $F_n(p) = \text{diam } f^{-n}(\bar{W}_{\epsilon_7}^u(p))$  converge uniformemente a zero em todo  $A_H \cap \text{Per}_j(f) \cap \Lambda_j$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Demonstração: Nós temos que provar o seguinte:  $\forall \epsilon_3 > 0 \exists N > 0$  tal que para todo  $p$  em  $A_H \cap \text{Per}_j(f) \cap \Lambda_j$ ,  $\forall n > N$ ,  $f^n(\bar{W}_{\epsilon_7}^u(p)) \subset \bar{W}_{\epsilon_3}^u(f^N(p))$ .

Seja  $\epsilon_7 > 0$  tal que  $f^{-n}(\bar{W}_{\epsilon_7}^u(p)) \subset \bar{W}_{\epsilon_0}^u(p) \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$  como no Lema (2.3). Dado  $\epsilon_3 > 0$  com  $\epsilon_3 < \epsilon_7$ , novamente pelo Lema (2.3) existe  $\delta > 0$  tal que  $f^{-n}(\bar{W}_{\delta}^u(p)) \subset \bar{W}_{\epsilon_3}^u(p) \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$   $\forall p \in (\Lambda_j \cap \text{Per}_j(f) \cap A_H)$ .

Suponha por absurdo que  $\exists n_k$  sequência em  $Z_+$ ,  $n_p \rightarrow \infty$  tal que  $F_{n_k}(p_k) > \epsilon_3$  para algum  $\epsilon_3$  fixado. Seja  $q_k \in \bar{W}_{\epsilon_7}^u(p_k)$  tal que  $d(f^{-n_k}(q_k), f^{-n_k}(p_k)) = \epsilon_3$ . É claro que  $d(f^{-j}(q_k), f^{-j}(p_k)) \geq \delta \quad \forall j \quad 0 < j < n_k$  de maneira que tomamos  $\delta$ .

Seja agora  $a = \lim(f^{-n_k}(q_k))$  e  $b = \lim f^{-n_k}(p_k) = b$  onde  $\bar{n}_k$  é o menor inteiro maior que  $\frac{1}{2} n_k$ . Note que pela maneira que nós tomamos  $\epsilon_7 \quad d(f^{-j}(q_k), f^{-j}(p_k)) < \epsilon_0 \quad \forall j \quad 0 < j < n_k$ .

Nós usaremos agora o mesmo argumento do Lema (2.3) para mostrar que  $\delta < d(f^n(b), f^n(a)) < \epsilon_0$ .

Suponhamos por absurdo que  $\exists n_0 \in Z_+$  tal que  $\delta < d(f^{n_0}(b), f^{n_0}(a))$  ou  $d(f^{n_0}(b), f^{n_0}(a)) < \epsilon_0$ . Seja  $\Delta_1$  tal que  $\forall x \in B_{\Delta_1}(f^{n_0}(a)), \forall y \in B_{\Delta_1}(f^{n_0}(b)), d(x, y) < \epsilon_0$ .

Seja agora  $\Delta_2$  tal que  $\forall x \in B_{\Delta_2}(a) \quad \forall y \in B_{\Delta_2}(b), f^{n_0}(x) \in B_{\Delta_1}(f^{n_0}(a))$  e  $f^{n_0}(y) \in B_{\Delta_1}(f^{n_0}(b))$ . Seja  $p_k$  e  $q_k$  tal que  $d(p_k, a) < \Delta_2, d(q_k, b) < \Delta_2$  e  $n_k > n_0$ . Consequentemente  $d(f^{n_0}(p_k), f^{n_0}(q_k)) > \epsilon_0$  ou  $d(f^{n_0}(p_k), f^{n_0}(q_k)) > \delta$ , mas isto é uma contradição com o fato que (pela definição de  $n_k$ ) essa propriedade não ocorre para  $j \quad 0 < j < n_k$ . Portanto  $\forall n \in Z_+$   $\delta < d(f^n(b), f^n(a)) < \epsilon_0$ .

Seja agora novamente (como no Lema (2.3))  $a_1, b_1$  respectivamente as interseções de  $W^u(c) \cap \bar{W}_{\epsilon_0}^s(a)$  e  $W^u(c) \cap \bar{W}_{\epsilon_0}^s(b)$ , onde  $c$  é um elemento da sequência  $f^{-n_k}(p_k)$  que está suficientemente próximo de  $b$ . Essas interseções existem pelo Lema (1.10) e Lema (2.2).

Novamente (como no Lema (2.3)) pela Observação 5 do Lema (2.2) nós concluímos que  $d_c^u(f^n(a_1), f^n(b_1))$  é limitado para  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

Como  $c \in A_H$ , a última afirmação que fizemos acima contradiz o Lema (1.10). Portanto não existe a sequência  $n_k$  que assumimos inicialmente, e assim o Lema (2.4) é verdadeiro.

Lema 2.5 - Seja  $\epsilon_0, \epsilon_7$  e  $F_n(p)$  como no Lema (2.4), então  $F_n(p)$  converge uniformemente para zero em todo  $A_H \cap \Lambda_j$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Demonstração: Suponha por absurdo que o Lema (2.5) é falso,

portanto  $\exists \epsilon_3 > 0 \exists x_k \in A_H \cap \Lambda_j \ y_k \in \bar{W}_{\epsilon_7}^u(x)$  e  $n_k \rightarrow \infty$ , tal que  $d(f^{-n_k}(x_k), f^{-n_k}(y_k)) = 2\epsilon_3$ . Para cada  $k$ , tome  $p_k \in A_H \cap \text{Per}(f) \cap \Lambda_j$  e  $q_k \in \bar{W}_{\epsilon_7}^u(p_k)$  suficientemente próximo de  $x_k$  e  $y_k$ , pela continuidade da família pseudo-instável em  $\Lambda_j$ . Se a distância  $d(x_k, p_k)$  e  $d(y_k, q_k)$  é pequena, então  $d(f^{-n_k}(p_k), f^{-n_k}(q_k)) > \epsilon_3$ . Como  $n_k \rightarrow \infty$ , essa última sentença contradiz o Lema (2.4). Portanto o Lema (2.5) é verdadeiro.

Lema 2.6 - Existe uma constante  $\delta > 0$  tal que  $W_\delta^u(p) = \bar{W}_\delta^u(p)$  para todo  $p \in A_H \cap \text{Per}_j(f) \cap \Lambda_j$ .

Demonstração: Seja  $\delta$  obtido no Lema (2.3) para  $\epsilon_6 = \epsilon_0 < \epsilon$ .

Como nós vimos no Lema (2.3)  $f^{-n}(\bar{W}_\delta^u(p)) \subset \bar{W}_\epsilon^u(f^{-n}(p))$   $\forall n \geq 0$ . Portanto  $\forall p \in \text{Per}_j(f) \cap A_H \cap \Lambda_j$   $f^{-n}(p)(\bar{W}_\delta^u(p)) \subset \bar{W}_\delta^u(p)$  pela Observação 2 depois da Definição 1.3. Nós concluímos então pelo Lema (2.1) que  $\bar{W}_\delta^u(p) = W_\delta^u(p)$ .

Lema 2.7 - A constante  $\delta$  do Lema (2.6) é tal que  $W_\delta^u(p) = \bar{W}_\delta^u(p)$   
 $\forall p \in A_H \cap \Lambda_j$ .

Demonstração: Os pontos  $p \in \text{Per}_j(f) \cap A_H \cap \Lambda_j$  são densos em cada atrator em  $A_H \cap \Lambda_j$ . Portanto pelo Lema (2.6), e pela continuidade das famílias de variedades pseudo-instáveis em  $\Lambda_j$  e de variedades instáveis no atrator em  $A_H$ , nós temos que  $W_\delta^u(q) = \bar{W}_\delta^u(q) \forall q \in A_H \cap \Lambda_j$ .

Observação 6: Nós destacamos que se tomarmos  $\epsilon_3 < \delta$ ,  $\epsilon_3 < \frac{\epsilon_7}{4}$  e  $N > 0$  como no Lema (2.5), então nós teremos que  $f^{-N}$  é uma contração em  $W^u(p)$  para todo  $p \in A_H \cap \Lambda_j$ . Nesse caso, a constante de contração é menor que  $\frac{1}{4}$ . A razão é que para qualquer  $q \in W^u(p)$  temos que  $q \in \Lambda_j \cap A_H$ , e portanto  $W_\delta^u(q) = \bar{W}_\delta^u(q)$ . Portanto como  $f^{-N}(W_\epsilon^u(q)) \subset \bar{W}_{\epsilon_3}^u(f^N(q))$ , podemos concluir que  $f^{-N}$  é uma contração em  $W^u(p) \forall p \in A_H \cap \Lambda_j$ .

### §3

Primeiro nós daremos uma idéia de como provaremos o resultado principal: suponha por absurdo que existam infinitos atratores hiperbólicos em  $\Lambda_j$ , e tome  $p_i$  em cada atrator com período mínimo no atrator. Bem, pelo Lema (1.11), dado o  $\delta$  do Lema (2.7), nós podemos encontrar um  $n$  arbitrariamente grande e um  $p_i$  ( $\pi(p_i) > n$ ) na sequência acima tal que  $d(p, f^n(p_i)) < \delta/2$  e  $f^n$  uma contração de  $\bar{W}_\delta^s(p_i)$  em  $\bar{W}_\delta^s(f^n(p_i))$ . Como  $n$  pode ser tomado tão grande quanto se queira, nós podemos supor pelo Lema (2.5) que  $f^{-n}$  é uma con



tração de  $\bar{W}_\partial^u(f^n(p_i))$  em  $W_\partial^u(p_i)$ . Agora nós só precisamos encontrar um ponto fixo  $x$  de  $f^n$ , a provar que esse novo ponto  $x$  está no mesmo atrator que  $p_i$ . Teremos então obtido um absurdo pois  $p_i$  tem período mínimo no atrator. Consequentemente existe um número finito de atratores hiperbólicos em  $\Lambda_j$ . Isto implicará o resultado final porque existe apenas um número finito de  $\Lambda_j$  e sua união é todo  $\Omega(f)$ .

Teorema - Se  $M$  é variedade  $C^\infty$ -compacta sem bordo e  $f$  é  $C^1$ -estruturalmente estável, então o número de atratores hiperbólicos é finito.

Demonstração: Nós suporemos apenas, como já explicamos no §1, que  $f \in \mathfrak{B}(M)$  e tem os pontos periódicos densos.

Como explicamos antes basta provar que o número de atratores hiperbólicos em  $\Lambda_j$  é finito. Note que cada atrator está inteiramente contido em algum  $\Lambda_j$ . Para um atrator hiperbólico em  $\Lambda_j$  podemos definir  $i(\Lambda) = \min\{\text{períodos}(x) \mid x \in \text{Per}(f) \cap \Lambda \cap \Lambda_j\}$ .

Suponhamos que existam um número infinito de atratores hiperbólicos em  $\Lambda_j$ , então  $i(\Lambda)$  não é limitado quando  $\Lambda$  varia em  $A_H$  (lembre que todos os pontos periódicos são hiperbólicos).

Tome  $p_n$  um ponto periódico de período mínimo em cada atrator em  $\Lambda_j$ . É claro que  $\pi(p_n) \rightarrow \infty$ .

Agora usando o Lema (1.11) para a sequência  $p_n$  e  $\partial$  como no Lema (2.7), nós temos o seguinte:  $\exists p_i$  na sequência  $p_n$



tal que  $f^{(m_i - n_i)k_i}$  é uma contração de  $\bar{W}_\delta^s(f^{n_i k_i}(p_i))$  em  $\bar{W}_\delta^s(f^{m_i k_i}(p_i))$  com constantes de contração menor do que  $\frac{1}{4}$ . Como nós havíamos visto no Lema (1.11)  $(m_i - n_i)k_i$  pode ser tomado tão grande quanto se queira,  $d(f^{n_i k_i}(p_i), f^{m_i k_i}(p_i)) < \delta/2$  e  $0 < (m_i - n_i)k_i < \pi(p_i)$ .

Se  $(m_i - n_i)k_i$  for suficientemente grande, então pelo Lema (2.5), nós teremos que  $f^{-(m_i - n_i)k_i}$  é uma contração de  $\bar{W}_{4\delta}^s(f^{m_i k_i}(p_i))$  em  $\bar{W}_\delta^u(f^{n_i k_i}(p_i))$  com constante de contração menor que  $1/4$  (veja Observação 6). Seja  $\Lambda$  o atrator hiperbólico tal que  $p_i \in \Lambda$ . Seja agora  $S = \bar{W}_\delta^s(f^{n_i k_i}(p_i)) \cap (\bigcap_{x \in \Lambda} W_\delta^u(x))$ .

Nós definiremos então uma função  $g: S \rightarrow S$ , por:

$$g(x) = \bar{W}_\delta^s(f^{n_i k_i}(p_i)) \cap W_\delta^u(f^{(m_i - n_i)k_i}(x)).$$

Esta função está bem definida pelo Lema (2.7). Nós ressaltamos que  $S$  é um espaço métrico completo para a métrica induzida de  $\bar{W}_\delta^s(p)$ . Como nós vimos antes aplicando o Lema (2.5),  $g$  é uma contração em  $S$ .

Tome  $x$  o ponto fixo de  $g$  em  $S$ . Como vimos na Observação 6 depois do Lema (2.7),  $f^{-(m_i - n_i)k_i}$  é uma contração de  $W_{4\delta}^u(x)$  em  $W_\delta^u(x)$ . Portanto existe um ponto periódico com período  $(m_i - n_i)k_i$  em  $\Lambda$ , mas isto é um absurdo pois  $(m_i - n_i)k_i < \pi(p_i)$ . A conclusão é que existem apenas um número finito de atratores hiperbólicos em  $\Lambda_j$ . Como existem um número finito de  $\Lambda_j$  e sua união é todo  $\Omega(f)$ , nós temos finalmente que existem para  $f$  apenas um número finito de atratores hiperbólicos em  $\Omega(f)$ .

Referências

- [1] J. Franks - Absolutely Structural Stable Diffeomorphism. Proc. Am. Math. Soc. 37, (73), 293 - 296.
- [2] J. Guckenheimer - Absolutely  $\Omega$ -stable Diffeomorphism. Topology 11 (1972) : pg. 195-197.
- [3] M. Hirsh and C. Pugh - Stable Manifolds and Hyperbolic Sets. Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math. 14. Amer. Math. Soc. Providence, 1970, Vol. 14, pg. 133-164.
- [4] R. Mañé - Expansive Diffeomorphisms. Dynamical Systems - Warwick 1974 (ed. by Manning), Lecture Notes in Math., 468. Springer-Verlag 1975, pg. 162-174.
- [5] R. Mañé - On Infinitesimal and Absolute Stability of Diffeomorphisms. Dynamical Systems - Warwick 1974 (ed. by Manning), Lecture Notes in Math. 468. Springer-Verlag 1975, pg. 151-161..
- [6] R. Mañé - The Stability Conjecture in two-dimensional Manifolds. to appear.
- [7] S. Newhouse - Diffeomorphisms with Infinitely Many Sinks. Topology Vol. 13 nº 1, 1974, pg. 9-18.
- [8] J. Palis & S. Smale - Structural Stability Theorems. Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math. 14, American Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1970, vol. 14,

pg. 223-331.

- [9] R.V. Plikin - Sources and Sinks of a-diffeomorphism of Surfaces. Math. Sbornick, Tom 94 (136) - 1974, n° 2, pg. 233-252
- [10] V.A. Pliss - The Location of separatrices of periodic Saddle Point Motion of Systems of Second-Order Differential Equations. Differential Equations 7 - 1971 - pg. 906-927.
- [11] V.A. Pliss - A Hypothesis Due to Smale. Differential Equation 8 - 1972 - pg. 203-214.
- [12] C. Pugh - The Closing Lemma. Amer. J. Math., 89 (1967), pg. 956-1009.
- [13] J. W. Robbin - On Structural Stability. Ann. of Math. 94, n° 3, 1971, pg. 447-493.
- [14] C. Robinson - Structural Stability of  $C^1$  Flows. Dynamical Systems - Warwick 1974 (ed. by A. Manning), Lecture Notes in Math., 468 - Springer-Verlag 1975 - pg. 262-277.
- [15] C. Robinson - Structural Stability of  $C^1$  Diffeomorphisms. Journal of Differential Equations 22 (1976), pg. 28-73.
- [16] C. Robinson -  $C^r$ -Structural Stability Implies Kupka-Smale. Dynamical Systems - (ed. by Peixoto) Academic Press - pg. 443-450. Salvador.