UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Uma estimativa do primeiro autovalor do laplaciano para hipersuperfícies mínimas

Dissertação de Mestrado

Cinthya Maria Schneider

Porto Alegre, 15 de março de 2007.

Dissertação submetida por Cinthya Maria Schneider[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Jaime Bruck Ripoll

Banca Examinadora:

Dr. Jaime Bruck Ripoll (PPGMat-UFRGS)

Dr. Leonardo Prange Bonorino (PPGMat-UFRGS)

Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano (PPGMat-UFRGS)

Dr. Ari João Aiolfi (UFSM)

Data da Apresentação: 15 de março de 2007.

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

Resumo

Seja N uma variedade riemanniana de dimensão n, orientável, compacta com curvatura de Ricci limitada inferiormente por uma constante positiva k. Seja M uma hipersuperfície mínima compacta e orientável, mergulhada em N. O objetivo fundamental deste trabalho é apresentar um resultado foi obtido por H. I. Choi e AI-Nung Wang em [4] que prova que $\lambda_1(M) \geq k/2$, onde $\lambda_1(M)$ denota o primeiro autovalor do laplaciano de M. Este resultado é importante pois se $N = \mathbb{S}^n$ então dele decorre que $\lambda_1(M) \geq (n-1)/2$, dando evidências da veracidade de uma conhecida conjectura de Yau que afirma que, quando $N = \mathbb{S}^n$, vale $\lambda_1(M) = n - 1$.

Abstract

Let N be a compact orientable $n-$dimensional Riemannian manifold with Ricci curvature bounded below by a positive constant k, and let M be a compact orientable embedded minimal hypersurface of N. Our main purpose in this work is to present a result due to H. I. Choi and AI-Nung Wang [4] which proves that the first eigenvalue $\lambda_1(M)$ of the Laplacian operator of M satisfies$\lambda_1(M) \geq k/2$. This result implies, in particular, that if M is the unit sphere $\mathbb{S}^n$ then $\lambda_1(M) \geq (n-1)/2$. This estimate is an evidence of the validity of a well known conjecture of Yau which asserts that under these hypothesis $\lambda_1(M) = n - 1$.

Agradecimentos

À Deus e todas as pessoas que fizeram e fazem a diferença em minha vida; Ao professor Jaime Bruck Ripoll pelo exemplo, estímulo e paciência; Aos meus pais Protásio Pedro e Maria Schneider porque nunca mediram esforços para que eu continuasse minha jornada acadêmica e sempre compreenderam a minha ausência; Aos colegas Isabel Castro Bonow e Marcelo Maximiliano Danesi pela amizade e companheirismo; À todos os colegas da pós-graduação do Instituto de Matemática da UFRGS, em especial a amiga Adriana Neumann de Oliveira pela atenção, apoio e pelas longas conversas; Aos professores que contribuíram para minha formação acadêmica: Antônio Paques, Artur Lopes, Alexandre Baraviera, Luís Fernando Rocha e Luís Gustavo D. Mendes; Às Agências de Fomento: Programa de Apoio à Pós Graduação-PROF/CAPES e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq pelo financiamento da bolsa de mestrado durante o período de 03/2005 à 02/2007; À Rosane, secretária do programa de pós-graduação do Instituto de Matemática da UFRGS, pelo carinho e disponibilidade.

Sumário

Introdução

Seja N uma variedade riemanniana de dimensão n, orientável, compacta com curvatura de Ricci limitada inferiormente por uma constante positiva k. Seja M uma hipersuperfície mínima compacta e orientável, mergulhada em N. Neste trabalho vamos demonstrar que o primeiro autovalor do laplaciano de M, denotado por $\lambda_1(M)$, satisfaz

$$\lambda_1(M) \geq \frac{k}{2}. \tag{1}$$

Este resultado foi obtido por H. I. Choi e AI-Nung Wang em [4]. Como corolário temos que se M é uma hipersuperfície mínima, mergulhada em $\mathbb{S}^n$ então

$$\lambda_1(M) \geq \frac{n-1}{2}. \tag{2}$$

Este corolário segue diretamente de (1), do fato de que M é orientável e $\mathrm{Ric}(\mathbb{S}^n) = n-1$.

Combinando (1) com o resultado obtido por Yang e Yau em [11] que diz que se M é uma variedade riemanniana de dimensão 2, gênero g e área A então $\lambda_1(M)A \leq 8\pi(g+1)$, obtém-se um limite superior para a área A de uma hipersuperfície mínima mergulhada em $\mathbb{S}^3$ somente em função do seu gênero:

$$A \leq 8\pi(g+1).$$

Se M é uma hipersuperfície mínima mergulhada em $\mathbb{S}^n$, Yau conjectura que $\lambda_1(M) = n-1$. Esta conjectura está fortemente baseada no fato de que as funções coordenadas do $\mathbb{R}^{n+1}$ restritas a uma hipersuperfície mínima M de $\mathbb{S}^n$ são auto-funções do laplaciano de M com autovalor igual a $n-1$ (veja Proposição 2 adiante), de modo que $\lambda_1(M) \leq n-1$. Neste sentido, a desigualdade (2) pode ser vista como uma evidência para a conjectura de Yau.

1 Preliminares

1.1 Noções básicas

Em todo o texto desta dissertação, Ω denota uma variedade diferenciável compacta, com ou sem bordo, orientável e com uma orientação fixada. Por diferenciável entendemos C^∞.

Uma *conexão afim* ∇ em Ω é uma aplicação

$$\nabla : \Xi(\Omega) \times \Xi(\Omega) \longrightarrow \Xi(\Omega)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y$$

onde $\Xi(\Omega)$ é o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em Ω, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

3. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \Xi(\Omega)$ e $f, g \in C^\infty(\Omega)$.

Uma *métrica riemanniana* (ou estrutura riemanniana) em Ω é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in \Omega$ um produto interno $\langle \ , \ \rangle_p$ em $T_p\Omega$, que varia diferencialmente no seguinte sentido: se $\phi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Omega$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p com $\phi(x_1, ..., x_n) = q \in \phi(\mathcal{U})$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\phi_q(0, ..., 1, ..., 0)$ então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$ é uma função diferenciável em $\mathcal{U}$. É usual omitir o índice p em $\langle , \rangle_p$ sempre que não houver possibilidade de confusão. Vamos supor daqui para frente que Ω é uma variedade riemanniana, ou seja, está equipada com uma métrica riemanniana $\langle \ , \ \rangle$.

Definimos o *gradiente de uma função diferenciável* f, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, denotado por $\mathrm{grad}(f)$, como o campo de vetores de Ω dado por

$$\langle v, \mathrm{grad}(f)(p)\rangle \,=\, df_p(v)$$

$\forall (p, v) \,\in\, T\Omega$. Portanto, o gradiente de f claramente depende da métrica riemanniana. Um conhecido resultado de geometria riemanniana, devido a Levi-Civita, garante que existe uma única conexão afim ∇ em Ω, chamada Levi-Civita ou conexão riemanniana, que satisfaz

1. ∇ é simétrica:
$$[X, Y] \,=\, \nabla_X Y \,-\, \nabla_Y X$$
$\forall\, X, Y \,\in\, \Xi(\Omega)$ onde $[X, Y]$ é o colchete dos campos X e Y, definido por $[X, Y] \,=\, XY \,-\, YX$;

2. ∇ é compatível com a métrica:
$$X\langle Y, Z\rangle \,=\, \langle \nabla_X Y, Z\rangle \,+\, \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$
$\forall\, X, Y, Z \,\in\, \Xi(\Omega)$.

Ao longo deste trabalho, vamos denotar por ∇ a conexão riemanniana de Ω.

Definição 1. *A curvatura R de Ω é uma correspondência que a cada par de campos de vetores $X, Y \,\in\, \Xi(\Omega)$ associa a aplicação*

$$R(X, Y) : \Xi(\Omega) \to \Xi(\Omega)$$

$$R(X, Y)Z \,=\, \nabla_X \nabla_Y Z \,-\, \nabla_Y \nabla_X Z \,-\, \nabla_{[X,Y]} Z$$

onde $Z \in \Xi(\Omega)$.

Em particular, seguem da definição de curvatura as seguintes propriedades:

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = -\langle R(X,Y)W,Z\rangle$$

e

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = -\langle R(Y,X)Z,W\rangle.$$

Definição 2. *O tensor de Ricci de* Ω *em* $p \in \Omega$ *é definido por*

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\langle R(X,E_i)E_i,Y\rangle$$

onde $X,Y \in T_p\Omega$ *e* $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ *é uma base ortonormal qualquer de* $T_p\Omega$.

Dado um vetor unitário $u \in T_p\Omega$, *o número real* $\mathrm{Ric}(u,u)$, *que por abuso de notação denotamos por* $\mathrm{Ric}(u)$, *é dito a curvatura de Ricci em* p *de* Ω *na direção de* u.

Definição 3. *Dado* $X \in \Xi(\Omega)$ *definimos o divergente de* X *como a função real*

$$\mathrm{div}(X) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\mathrm{div}(X)(p) = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}X, E_i\rangle(p)$$

onde $p \in \Omega$ *e* $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ *é uma base ortonormal de* $T_p\Omega$.

Para cada campo de vetores C^∞ em Ω, o divergente do campo é uma função C^∞ em Ω e satisfaz as seguintes propriedades: para todo $X,Y \in \Xi(\Omega)$

1. $\mathrm{div}(X+Y) = \mathrm{div}\,X + \mathrm{div}\,Y$;

2. $\mathrm{div}(fX) = f\,\mathrm{div}\,X + \langle \mathrm{grad}(f), X\rangle$.

Definição 4. *Sejam $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $X, Y \in \Xi(\Omega)$ definidos em uma vizinhança de $p \in \Omega$. Definimos o hessiano de f em p como o operador bilinear dado por*

$$\mathrm{Hess}(f)(X,Y) = \langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), Y\rangle.$$

O hessiano é um operador *tensorial*, isto é, dados $X, X', Y, Y' \in \Xi(\Omega)$ tais que $X(p) = X'(p)$ e $Y(p) = Y'(p)$ temos que $\mathrm{Hess}(f)(X,Y)(p) = \mathrm{Hess}(f)(X',Y')(p)$. Este fato é uma decorrência direta da tensorialidade da aplicação $Y \to \nabla_Y X$ para X fixo. O Hessiano é também um operador *simétrico*, ou seja, $\mathrm{Hess}(f)(X,Y) = \mathrm{Hess}(f)(Y,X)$.
De fato, como

$$\begin{aligned} df_p([X,Y]) &= [X,Y](f)(p) \\ &= X(Y(f))(p) - Y(X(f))(p), \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}(f)(X,Y) &= \langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), Y\rangle \\ &= X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle - \langle \operatorname{grad}(f), \nabla_X Y\rangle \\ &= X\left(Y(f)\right) - \langle \operatorname{grad}(f), \nabla_X Y\rangle. \end{aligned}$$

Como ∇ é simétrica, podemos escrever

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X,Y],$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} X\left(Y(f)\right) &- \langle \operatorname{grad}(f), \nabla_X Y\rangle = \\ &= X\left(Y(f)\right) - \langle \operatorname{grad}(f), \nabla_Y X + [X,Y]\rangle \\ &= X\left(Y(f)\right) - \langle \operatorname{grad}(f), \nabla_Y X\rangle - \langle \operatorname{grad}(f), [X,Y]\rangle. \end{aligned}$$

Do fato de que ∇ é compatível com a métrica, temos

$$\begin{aligned}
X\left(Y(f)\right) \; - \; & \langle \mathrm{grad}(f), \nabla_Y X\rangle \, - \, \langle \mathrm{grad}(f), [X,Y]\rangle = \\
= \; & X\left(Y(f)\right) \, + \, \langle \nabla_Y \, \mathrm{grad}(f), X\rangle \, - \, Y\langle \mathrm{grad}(f), X\rangle \\
& - \langle \mathrm{grad}(f), [X,Y]\rangle \\
= \; & X\left(Y(f)\right) \, + \, \langle \nabla_Y \, \mathrm{grad}(f), X\rangle \, - \, Y\left(X(f)\right) \\
& - \langle \mathrm{grad}(f), [X,Y]\rangle \\
= \; & \langle \nabla_Y \mathrm{grad}(f), X\rangle \\
= \; & \mathrm{Hess}(f)(Y,X).
\end{aligned}$$

Definição 5. *Seja $f \in C^\infty(\Omega)$. Definimos o laplaciano de f como o operador*

$$\Delta : C^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$$

dado por

$$\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)).$$

Seja $p \in \Omega$. Dada uma base ortonormal $\{E_i\}_{i=1}^n$ de $T_p\Omega$, temos:

$$\begin{aligned}
\Delta f(p) \; &= \; \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))(p) \\
&= \; \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \, \mathrm{grad}(f), E_i\rangle \\
&= \; \sum_{i=1}^n \mathrm{Hess}(f)(E_i, E_i).
\end{aligned}$$

O laplaciano satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\Delta(f \, + \, h) \, = \, \Delta f \, + \, \Delta h$;

2. $\mathrm{div}(h(\mathrm{grad}(f))) \, = \, h(\Delta f) \, + \, \langle \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(h)\rangle$;

3. $\Delta(fh) \, = \, h(\Delta f) \, + \, 2\langle \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(h)\rangle \, + \, f(\Delta h)$.

Sejam M uma hipersuperfície de Ω, $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$, isto é, η é normal a M em p. A aplicação $B_\eta : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$B_\eta(u, v) \; = \; -\langle (\nabla_U V)(p), \eta \rangle$$

onde $u\,, v \in T_pM$ e U e V são campos de vetores de M definidos em uma vizinhança de p em M tais que $U(p) = u$, $V(p) = v$, está bem definida, isto é, não depende das extensões U e V de u e v. Além disso, B_η é uma forma bilinear simétrica (veja [2] página 127), dita *segunda forma fundamental de M em Ω com relação à η.*

Definição 6. *A curvatura média não normalizada H de M em p com relação a η é dada por*

$$H \; = \; \sum_{i=1}^{n-1} B_\eta(E_i, E_i)$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^{n-1}$ é uma base ortonormal qualquer de T_pM.

Definição 7. *A hipersuperfície M é dita mínima quando $H \equiv 0$. Note que a minimalidade de M independe da escolha de η.*

1.2 Resultados importantes

A forma diferencial ω de grau $n = \dim(\Omega)$ definida, em cada ponto $p \in \Omega$ por

$$\omega_p(v_1, ..., v_n) \; = \det\left(\langle v_i, e_j \rangle\right) = \text{volume orientado}\{v_1, ..., v_n\}$$

onde $v_i \in T_p\Omega$ e $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base ortonormal positiva qualquer de $T_p\Omega$ é chamada *o elemento de volume de* Ω. Pode-se mostrar que ω está bem definida, isto é, $\omega_p(v_1, ..., v_n)$ não depende da base ortonormal positiva escolhida.

Suponha agora que Ω é uma variedade com bordo $\partial\Omega = M$. Denotamos por η o campo unitário normal “exterior” à M. Exterior significa que $\eta(p) = \alpha'(0)$

sendo $\alpha : [-1, 0] \to \Omega$ uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(t) \in \Omega \backslash M$ para todo $t \in [-1, 0)$. A orientação de Ω induz uma orientação em M: dado $p \in M$ e dada um base $\beta = \{v_1, ..., v_{n-1}\} \subset T_pM$, dizemos β é positiva se $\{v_1, ..., v_{n-1}, \eta\}$ é uma base positiva de $T_p\Omega$, sendo η, como antes, o campo de vetores normal unitário *exterior* a M em Ω.

Teorema 1.1. *Se X é um campo de vetores diferenciável em Ω, então*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X(p)\omega = \int_{\partial\Omega} \langle X, \eta \rangle \sigma \tag{3}$$

onde ω é a forma volume de Ω, σ é a forma volume de $\partial\Omega$ com relação à orientação induzida por Ω e η o campo de vetores unitário, normal exterior a $\partial\Omega$ em Ω.

Este teorema é uma conseqüência direta do Teorema de Stokes para variedades (para o Teorema de Stokes veja, por exemplo, [10] capítulo 5). Uma prova do Teorema da Divergência pode ser vista em [6], página 206. Pode-se também provar o Teorema da Divergência a partir do Teorema de Stokes usando resultados do Capítulo 3 de [2] e fatos básicos sobre formas diferenciais.

Vamos denotar o elemento de volume ω de Ω por $\omega = dV$ e o elemento de volume σ de $\partial\Omega$ por $\sigma = dA$.

Corolário 1 (Fórmula de Green). *Sejam h e f funções diferenciáveis em Ω. Então valem*

$$\int_{\Omega} \{h\Delta f + \langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(h) \rangle\} dV = \int_{\partial\Omega} \langle h \operatorname{grad}(f), \eta \rangle dA \tag{4}$$

e

$$\int_{\Omega} \{h\Delta f - f\Delta h\} dV = \int_{\partial\Omega} \{h\langle \operatorname{grad}(f), \eta \rangle - f\langle \operatorname{grad}(h), \eta \rangle\} dA.$$

Segue diretamente do Teorema da Divergência fazendo $X = h\,\mathrm{grad}(f)$ em (3) e usando a propriedade 2 do laplaciano.

Lema 1 (Weitzenböck)**.** *Seja Ω uma variedade riemanniana e $f \in C^\infty(\Omega)$. Então, em cada ponto de Ω, tem-se:*

$$\frac{1}{2}\Delta(|\,\mathrm{grad}(f)|^2) = |\,\mathrm{Hess}(f)|^2 + \langle \mathrm{grad}(\Delta f), \mathrm{grad}(f)\rangle + \mathrm{Ric}(\mathrm{grad}(f)). \quad (5)$$

A expressão acima é conhecida como Fórmula de Bochner-Lichnerowicz. É nela que se baseia a prova do teorema principal deste trabalho.

Prova: Sejam $p \in \Omega$ e $\{E_i\}_{i=1}^n$ referencial geodésico em p, isto é, existe uma vizinhança U de p tal que $\{E_i\}_{i=1}^n$ são ortonormais em cada ponto de U e $(\nabla_{E_i}E_j)(p) = 0, \ \forall i, j = 1, ..., n.$

Do fato de que $\{E_i\}_{i=1}^n$ é geodésico, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Delta f(p) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \mathrm{grad}(f), E_i\rangle (p) \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla_{E_i}\left(\sum_{j=1}^n E_j(f)E_j\right), E_i\right\rangle (p) \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n E_j(f)\nabla_{E_i}E_j + E_i\left(E_j(f)\right)E_j, E_i\right\rangle (p) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_i(E_j(f))\,\langle E_j, E_i\rangle (p) \\
&= \sum_{i=1}^n E_i\left(E_i(f)\right)(p).
\end{aligned}$$

Com isto temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta(|\operatorname{grad}(f)|^2) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} E_i\left(E_i\left(\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i\left\langle \nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\right\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), \nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f)\right\rangle .
\end{aligned} \tag{6}
$$

Podemos reescrever $\sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\right\rangle$ da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\right\rangle &= \left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), \sum_{j=1}^{n} E_j(f)E_j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} E_j(f)\left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), E_j\right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \operatorname{grad}(f), E_j\right\rangle \left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), E_j\right\rangle
\end{aligned}
$$

onde $\left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), E_j\right\rangle$ pode ser escrito como

$$
\begin{aligned}
\left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), E_j\right\rangle &= E_i\left(\left\langle \nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), E_j\right\rangle\right) \\
&= E_i\left(\mathrm{Hess(f)}(E_i, E_j)\right) \\
&= E_i\left(\mathrm{Hess(f)}(E_j, E_i)\right) \\
&= E_i\left(\left\langle \nabla_{E_j}\operatorname{grad}(f), E_i\right\rangle\right) \\
&= \left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}\operatorname{grad}(f), E_i\right\rangle .
\end{aligned}
$$

Portanto, a equação (6) é equivalente a

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta(|\operatorname{grad}(f)|^2) &= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \operatorname{grad}(f), E_j\right\rangle \left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}\operatorname{grad}(f), E_i\right\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), \nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f)\right\rangle .
\end{aligned} \tag{7}
$$

Por definição de curvatura segue que:

$$\begin{aligned}\langle R(E_i,E_j)\operatorname{grad}(f),E_i\rangle &= \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}\operatorname{grad}(f)\,-\,\nabla_{E_j}\nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f)\\ &\quad -\nabla_{[E_i,E_j]}\operatorname{grad}(f),E_i\rangle.\end{aligned}$$

Como $\{E_i\}_{i=1}^n$ é um referencial geodésico em p, temos

$$[E_i,E_j](p)\,=\nabla_{E_i}E_j(p)\,-\,\nabla_{E_j}E_i(p)\,=\,0$$

de onde vem que

$$\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}\operatorname{grad}(f),E_i\rangle\,=\,\langle R(E_i,E_j)\operatorname{grad}(f),E_i\rangle\,+\,\langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f),E_i\rangle.$$

Lembrando que, por propriedades de curvatura, temos

$$\langle R(E_i,E_j)\operatorname{grad}(f),E_i\rangle\,=\,\langle R(E_j,E_i)E_i,\operatorname{grad}(f)\rangle$$

segue que (7) é equivalente a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta(|\operatorname{grad}(f)|^2) &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle \operatorname{grad}(f),E_j\rangle\langle R(E_j,E_i)E_i,\operatorname{grad}(f)\rangle\\ &\quad+\sum_{i,j=1}^{n}\langle \operatorname{grad}(f),E_j\rangle\langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f),E_i\rangle \qquad (8)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f),\nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f)\rangle.\end{aligned}$$

Podemos reescrever $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\langle \operatorname{grad}(f),E_j\rangle\langle R(E_j,E_i)E_i,\operatorname{grad}(f)\rangle$ como

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} & \langle \operatorname{grad}(f), E_j\rangle \, \langle R(E_j,E_i)E_i, \operatorname{grad}(f)\rangle \; = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle R\left(\sum_{j=1}^{n}\langle \operatorname{grad}(f), E_j\rangle E_j, E_i\right) E_i, \operatorname{grad}(f)\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle R(\operatorname{grad}(f), E_i)E_i, \operatorname{grad}(f)\rangle \\
&= \operatorname{Ric}\left(\operatorname{grad}(f)\right).
\end{aligned}$$

Na equação (8), para reescrever $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\langle \operatorname{grad}(f), E_j\rangle\langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), E_i\rangle$ de maneira conveniente, note que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \langle \operatorname{grad}(f), E_j\rangle \left\langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), E_i\right\rangle \; &= \; \sum_{i,j=1}^{n} E_j(f)\left\langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), E_i\right\rangle \\
&= \; \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \nabla_{E_j(f)E_j}\nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), E_i\right\rangle \\
&= \; \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{\operatorname{grad}(f)}\nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), E_i\right\rangle \\
&= \; \sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad}(f)\left(\langle \nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), E_i\rangle\right).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad}(f)\left(\langle \nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), E_i\rangle\right) \; = \; \operatorname{grad}(f)(\Delta f) \; = \; \langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(\Delta f)\rangle.$$

Na equação (8), resta ainda reescrever $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f), \nabla_{E_i}\operatorname{grad}(f)\rangle$, que o fazemos como segue:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad}(f), \nabla_{E_i} \operatorname{grad}(f) \rangle &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} E_j(f) E_j, \nabla_{E_i} E_k(f) E_k \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} E_j(f) E_j, \nabla_{E_i} E_j(f) E_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle E_i(E_j(f)) E_j, E_i(E_j(f)) E_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} |E_i(E_j(f))|^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} |E_i \langle \operatorname{grad}(f), E_j \rangle|^2.
\end{aligned}
$$

onde usamos o fato de que $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ é um referencial geodésico em p. Além disso, segue que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} |E_i \langle \operatorname{grad}(f), E_j \rangle|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} |\langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad}(f), E_j \rangle|^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} |\operatorname{Hess}(f)(E_i, E_j)|^2 \\
&= |\operatorname{Hess}(f)|^2.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\frac{1}{2}\Delta(|\operatorname{grad}(f)|^2) = \operatorname{Ric}(\operatorname{grad}(f)) + \langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(\Delta f) \rangle + |\operatorname{Hess}(f)|^2
$$

o que conclui a prova do lema.

Este teorema resulta em aplicações interessantes se tomarmos f como a função distância a uma subvariedade fixa de Ω, bem como, por exemplo, uma auto-função do laplaciano.

Dada uma função diferenciável f em Ω, e fixado um ponto $p \in \Omega$, utilizaremos a seguinte notação:

$$f_{ij} = \mathrm{Hess}(f)(E_i, E_j),$$

$$f_i = \langle \mathrm{grad}(f), E_i \rangle$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal definida em uma vizinhança de p.

A importância do próximo teorema se deve ao fato de que, como corolário, obtemos uma desigualdade fundamental para a prova do teorema principal desta dissertação. A prova do teorema 1.2 consiste, basicamente, em integrar a fórmula de Bochner-Lichnerowicz (5).

Teorema 1.2. *[Reilly] Seja Ω uma variedade compacta de dimensão n com bordo $M = \partial\Omega$. Suponha que f é uma função definida em Ω satisfazendo $\Delta f = g$ em Ω e $f|_M = z$. Então*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left[g^2 - |\,\mathrm{Hess}(f)|^2 - \mathrm{Ric}(\mathrm{grad}(f))\right] = \\ &= \int_M \left[u(\Delta z + Hu) - \langle \mathrm{grad}(u), \mathrm{grad}(z)\rangle + B(\mathrm{grad}(z), \mathrm{grad}(z))\right] \end{aligned}$$

onde H e $B(\mathrm{grad}(z), \mathrm{grad}(z))$ denotam, respectivamente, a curvatura média e a segunda forma fundamental de M em relação ao normal exterior unitário η, $u = \langle \mathrm{grad}(f), \eta\rangle$ e $\mathrm{Ric}(\mathrm{grad}(f))$ é a curvatura de Ricci de Ω.

Prova:

Pela fórmula (5), temos que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \frac{1}{2} \Delta(|\,\mathrm{grad}(f)|^2) = \\ &\qquad = \int_\Omega \left[\mathrm{Ric}(\mathrm{grad}(f)) + \langle \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g)\rangle + |\,\mathrm{Hess}(f)|^2\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Seja $\{E_1, ..., E_n\}$ uma base ortonormal definida numa vizinhança do bordo de Ω tal que em $q \in \partial\Omega$, $\{E_1, ..., E_{n-1}\}$ são tangentes a M e $E_n = \eta$ é o vetor unitário normal exterior a M.

Na equação (9), pela fórmula de Green (4), temos

$$\int_\Omega \langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g) \rangle = -\int_\Omega g^2 + \int_M gu.$$

Como $g = \Delta f = \sum_{i=1}^{n} f_{ii}$, podemos escrever

$$g = f_{nn} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} f_{\alpha\alpha}.$$

Portanto,

$$\int_\Omega \langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g) \rangle = -\int_\Omega g^2 + \int_M u \left(f_{nn} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} f_{\alpha\alpha} \right). \tag{10}$$

Pelo Teorema da Divergência temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Omega \Delta(|\operatorname{grad}(f)|^2) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div}(\operatorname{grad}(|\operatorname{grad}(f)|^2))dV \\ &= \frac{1}{2}\int_M \langle \operatorname{grad}(|\operatorname{grad}(f)|^2), \eta \rangle dA. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\langle \operatorname{grad}(|\operatorname{grad}(f)|^2), \eta \right\rangle &= \frac{1}{2}\eta\left(|\operatorname{grad}(f)|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\eta\left(\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f) \rangle\right) \\ &= \langle \nabla_\eta \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f) \rangle. \end{aligned} \tag{11}$$

Em (11) vamos substituir convenientemente

$$\operatorname{grad}(f) = \sum_{i=1}^{n} \langle \operatorname{grad}(f), E_i \rangle E_i,$$

de onde vem que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left\langle \operatorname{grad}(|\operatorname{grad}(f)|^2), \eta \right\rangle &= \left\langle \nabla_\eta \operatorname{grad}(f), \sum_{i=1}^{n} \langle \operatorname{grad}(f), E_i \rangle E_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \operatorname{grad}(f), E_i \rangle \left\langle \nabla_\eta \operatorname{grad}(f), E_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i f_{ni} \\
&= u f_{nn} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} f_\alpha f_{n\alpha}.
\end{aligned}
$$

Assim, podemos escrever

$$
\frac{1}{2}\int_\Omega \Delta(|\operatorname{grad}(f)|^2) = \int_M \left(u f_{nn} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} f_\alpha f_{n\alpha} \right). \tag{12}
$$

Subtraindo (10) de (12) obtemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega \Delta(|\operatorname{grad}(f)|^2) &- \int_\Omega \langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g) \rangle = \\
&= \int_M \left(u f_{nn} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} f_\alpha f_{n\alpha} \right) + \int_\Omega g^2 \\
&\quad - \int_M u \left(f_{nn} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} f_{\alpha\alpha} \right) \\
&= \int_M \left(\sum_{\alpha=1}^{n-1} f_\alpha f_{n\alpha} - u \sum_{\alpha=1}^{n-1} f_{\alpha\alpha} \right) + \int_\Omega g^2.
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
f_{n\alpha} &= f_{\alpha n} = \langle \nabla_{E_\alpha} \operatorname{grad}(f), E_n \rangle \\
&= E_\alpha \langle \operatorname{grad}(f), E_n \rangle - \langle \operatorname{grad}(f), \nabla_{E_\alpha} E_n \rangle \\
&= E_\alpha(u) - \langle \operatorname{grad}(z) + u E_n, \nabla_{E_\alpha} E_n \rangle \\
&= E_\alpha(u) - \langle \operatorname{grad}(z), \nabla_{E_\alpha} E_n \rangle - u \langle E_n, \nabla_{E_\alpha} E_n \rangle.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Como $|E_n| = 1$, temos que

$$
E_\alpha(|E_n|^2) = 0
$$

e, portanto,

$$\langle E_n, \nabla_{E_\alpha} E_n\rangle \,=\, \frac{1}{2} E_\alpha(|E_n|^2) \,=\, 0.$$

Disto segue que o terceiro termo da direita da equação (13) é nulo. Assim, temos

$$\begin{aligned}
f_{\alpha n} &= E_\alpha(u) \,-\, \langle \mathrm{grad}(z), \nabla_{E_\alpha} E_n\rangle \\
&= E_\alpha(u) \,-\, \left\langle \sum_{\beta=1}^{n-1} E_\beta(z) E_\beta, \nabla_{E_\alpha} E_n \right\rangle \\
&= E_\alpha(u) \,-\, \left\langle \sum_{\beta=1}^{n-1} z_\beta E_\beta, \nabla_{E_\alpha} E_n \right\rangle \\
&= E_\alpha(u) \,-\, \sum_{\beta=1}^{n-1} z_\beta \,\langle E_\beta, \nabla_{E_\alpha} E_n\rangle
\end{aligned}$$

e, portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{n-1} f_\alpha f_{\alpha n} &= \sum_{\alpha=1}^{n-1} z_\alpha \left(E_\alpha(u) \,-\, \sum_{\beta=1}^{n-1} z_\beta \,\langle E_\beta, \nabla_{E_\alpha} E_n\rangle \right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n-1} z_\alpha E_\alpha(u) \,-\, \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} z_\alpha z_\beta \,\langle E_\beta, \nabla_{E_\alpha} E_n\rangle
\end{aligned} \tag{14}$$

pois para $\alpha \,=\, 1, ..., n-1$ temos que

$$\begin{aligned}
f_\alpha &= \langle \mathrm{grad}(f), E_\alpha\rangle \\
&= \langle \mathrm{grad}(z) \,+\, uE_n, E_\alpha\rangle \\
&= \langle \mathrm{grad}(z), E_\alpha\rangle \\
&= z_\alpha.
\end{aligned}$$

Na equação (14), $\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n-1} z_\alpha E_\alpha(u)$ pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{n-1} z_\alpha E_\alpha(u) &= \sum_{\alpha=1}^{n-1} z_\alpha \langle \mathrm{grad}(u), E_\alpha\rangle \\ &= \left\langle \mathrm{grad}(u), \sum_{\alpha=1}^{n-1} z_\alpha E_\alpha \right\rangle \\ &= \langle \mathrm{grad}(u), \mathrm{grad}(z)\rangle .\end{aligned} \tag{15}$$

Quanto a $\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} z_\alpha z_\beta \langle E_\beta, \nabla_{E_\alpha} E_n\rangle$, na equação (14), temos que

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} z_\alpha z_\beta \langle E_\beta, \nabla_{E_\alpha} E_n\rangle &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} \langle f_\beta E_\beta, \nabla_{f_\alpha E_\alpha} E_n\rangle \\ &= \langle \mathrm{grad}(z), \nabla_{\mathrm{grad}(z)} E_n\rangle \\ &= -\langle \nabla_{\mathrm{grad}(z)} \mathrm{grad}(z), E_n\rangle \\ &= B(\mathrm{grad}(z), \mathrm{grad}(z)).\end{aligned} \tag{16}$$

Substituindo (15) e (16) em (14), obtemos

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} f_\alpha f_{\alpha n} = \langle \mathrm{grad}(u), \mathrm{grad}(z)\rangle - B(\mathrm{grad}(z), \mathrm{grad}(z)).$$

A mostrar:

$$u\left(\sum_{\alpha=1}^{n-1} f_{\alpha\alpha}\right) = u(\Delta z + uH)$$

Primeiramente, vamos decompor $\nabla_{E_\alpha} E_\alpha$ da seguinte forma:

$$\nabla_{E_\alpha} E_\alpha = (\nabla_{E_\alpha} E_\alpha)^N + (\nabla_{E_\alpha} E_\alpha)^T$$

onde $(\,)^N$ é a componente de $\nabla_{E_\alpha} E_\alpha$ normal a TM e $(\,)^T$ é a componente de $\nabla_{E_\alpha} E_\alpha$ tangente a TM.

Note que

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{n-1} f_{\alpha\alpha} &= \sum_{\alpha=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_\alpha} \mathrm{grad}(f), E_\alpha\rangle \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n-1} E_\alpha \langle \mathrm{grad}(f), E_\alpha\rangle - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \langle \mathrm{grad}(f), \nabla_{E_\alpha} E_\alpha\rangle.\end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo $\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n-1}\langle \mathrm{grad}(f), (\nabla_{E_\alpha}E_\alpha)^T\rangle$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{n-1} f_{\alpha\alpha} \;&=\; \sum_{\alpha=1}^{n-1}\Big(E_\alpha\langle \mathrm{grad}(f), E_\alpha\rangle \;-\; \langle \mathrm{grad}(f), (\nabla_{E_\alpha}E_\alpha)^T\rangle\Big) \\
&\quad - \sum_{\alpha=1}^{n-1}\Big(\langle \mathrm{grad}(f), \nabla_{E_\alpha}E_\alpha\rangle \;-\; \langle \mathrm{grad}(f), (\nabla_{E_\alpha}E_\alpha)^T\rangle\Big)\,.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Por outro lado, note que

$$
\begin{aligned}
\Delta z \;&=\; \sum_{\alpha=1}^{n-1}\langle \nabla_{E_\alpha}\mathrm{grad}(z), E_\alpha\rangle \\
&=\; \sum_{\alpha=1}^{n-1}\left(E_\alpha\langle \mathrm{grad}(z), E_\alpha\rangle \;-\; \langle \mathrm{grad}(z), \nabla_{E_\alpha}E_\alpha\rangle\right) \\
&=\; \sum_{\alpha=1}^{n-1}\left(E_\alpha\langle \mathrm{grad}(f) \;-\; uE_n, E_\alpha\rangle \;-\; \langle \mathrm{grad}(f) - uE_n, \nabla_{E_\alpha}E_\alpha\rangle\right) \\
&=\; \sum_{\alpha=1}^{n-1}\left(E_\alpha\langle \mathrm{grad}(f), E_\alpha\rangle \;-\; \langle \mathrm{grad}(f) - uE_n, \nabla_{E_\alpha}E_\alpha\rangle\right).
\end{aligned}
$$

Além disso, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{n-1}\langle \mathrm{grad}(f) \;&-\; uE_n, \nabla_{E_\alpha}E_\alpha\rangle = \\
&=\; \sum_{\alpha=1}^{n-1}\langle \mathrm{grad}(f) - uE_n, (\nabla_{E_\alpha}E_\alpha)^N + (\nabla_{E_\alpha}E_\alpha)^T\rangle \\
&=\; \sum_{\alpha=1}^{n-1}\Big(\langle \mathrm{grad}(f), (\nabla_{E_\alpha}E_\alpha)^N\rangle \;+\; \langle \mathrm{grad}(f), (\nabla_{E_\alpha}E_\alpha)^T\rangle \\
&\quad - u\langle E_n, (\nabla_{E_\alpha}E_\alpha)^N\rangle \;-\; u\langle E_n, (\nabla_{E_\alpha}E_\alpha)^T\rangle\Big) \\
&=\; \sum_{\alpha=1}^{n-1}\Big(u\langle E_n, (\nabla_{E_\alpha}E_\alpha)^N\rangle \;+\; \langle \mathrm{grad}(f), (\nabla_{E_\alpha}E_\alpha)^T\rangle \\
&\quad - u\langle E_n, (\nabla_{E_\alpha}E_\alpha)^N\rangle \;-\; u\langle E_n, (\nabla_{E_\alpha}E_\alpha)^T\rangle\Big) \\
&=\; \sum_{\alpha=1}^{n-1}\langle \mathrm{grad}(f), (\nabla_{E_\alpha}E_\alpha)^T\rangle
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\Delta z = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \Big(E_\alpha \langle \operatorname{grad}(f), E_\alpha \rangle - \langle \operatorname{grad}(f), (\nabla_{E_\alpha} E_\alpha)^T \rangle \Big).$$

Disto temos que a equação (17) é equivalente a

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{n-1} f_{\alpha\alpha} &= \Delta z - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \Big\langle \operatorname{grad}(f), \nabla_{E_\alpha} E_\alpha - (\nabla_{E_\alpha} E_\alpha)^T \Big\rangle \\
&= \Delta z - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \Big\langle \langle \operatorname{grad}(f), E_i \rangle E_i, (\nabla_{E_\alpha} E_\alpha)^N \Big\rangle \\
&= \Delta z - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \langle \operatorname{grad}(f), E_i \rangle \Big\langle E_i, (\nabla_{E_\alpha} E_\alpha)^N \Big\rangle.
\end{aligned}$$

Note que o produto $\langle E_i, (\nabla_{E_\alpha} E_\alpha)^N \rangle \neq 0$ somente se $i = n$, pois $E_n = \eta$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{n-1} f_{\alpha\alpha} &= \Delta z - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \langle \operatorname{grad}(f), E_n \rangle \langle E_n, \nabla_{E_\alpha} E_\alpha \rangle \\
&= \Delta z + u \left(\sum_{\alpha=1}^{n-1} - \langle E_n, \nabla_{E_\alpha} E_\alpha \rangle \right) \\
&= \Delta z + u \sum_{\alpha=1}^{n-1} B_\eta(E_\alpha, E_\alpha) \\
&= \Delta z + uH.
\end{aligned}$$

Com isto podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_\Omega \Delta(|\operatorname{grad}(f)|^2) - \int_\Omega \langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g) \rangle = + \int_\Omega g^2 \\
&+ \int_M \left[\langle \operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(z) \rangle - B(\operatorname{grad}(z), \operatorname{grad}(z)) - u(\Delta z + uH) \right].
\end{aligned} \tag{18}$$

Lembrando que por (9) temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega \Delta(|\operatorname{grad}(f)|^2) \quad - \quad & \int_\Omega \langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g)\rangle \ = \\ & = \int_\Omega \left[\operatorname{Ric}(\operatorname{grad}(f)) \ + \ |\operatorname{Hess}(f)|^2\right]\end{aligned} \tag{19}$$

e substituindo (18) em (19) obtemos

$$\begin{aligned}\int_M \quad & [\langle \operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(z)\rangle \ - \ B(\operatorname{grad}(z), \operatorname{grad}(z)) - u(\Delta z \ + \ uH)] \ + \\ & + \int_\Omega g^2 \ = \int_\Omega \left[\operatorname{Ric}(\operatorname{grad}(f)) \ + \ |\operatorname{Hess}(f)|^2\right]\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \quad & [g^2 \ - \ |\operatorname{Hess}(f)|^2 \ - \ \operatorname{Ric}(\operatorname{grad}(f))] \ = \\ & = \int_M [u(\Delta z \ + \ uH) \ - \ \langle \operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(z)\rangle \ + \ B(\operatorname{grad}(z), \operatorname{grad}(z))]\,.\end{aligned}$$

o que conclui a prova do teorema.

Corolário 2. *Sejam* Ω *e* f *como no teorema 1.2. Então*

$$\begin{aligned}\frac{n-1}{n}\int_\Omega g^2 \ \geq \ & \int_M [u(2\Delta z \ + \ uH) \ + \ B(\operatorname{grad}(z), \operatorname{grad}(z))] \\ & + \int_\Omega \operatorname{Ric}(\operatorname{grad}(f)).\end{aligned} \tag{20}$$

Prova: Pela fórmula de Green (4) e do fato de que $\partial M \ = \ \emptyset$ temos

$$\int_M \langle \operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(z)\rangle \ = \ -\int_M u\Delta z$$

e

$$\int_\Omega \langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g)\rangle \ = \ -\int_\Omega g^2 \ + \ \int_M gu.$$

Substituindo as duas equações acima em (18), obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \Delta(|\operatorname{grad}(f)|^2) \ = \ \int_M [gu \ - \ B(\operatorname{grad}(z), \operatorname{grad}(z)) - u(2\Delta z \ + \ uH)]\,. \tag{21}$$

Por outro lado, usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, não é difícil ver que

$$|\operatorname{Hess}(f)|^2 \geq \frac{g^2}{n}.$$

Substituindo a desigualdade acima na fórmula de Bochner-Lichnerowicz (5), vem que

$$\frac{1}{2}\Delta(|\operatorname{grad}(f)|^2) \geq \frac{g^2}{n} + \langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g)\rangle + \operatorname{Ric}(\operatorname{grad}(f))$$

e integrando em Ω temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \Delta(|\operatorname{grad}(f)|^2) \geq \frac{1}{n}\int_\Omega g^2 + \int_\Omega \langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g)\rangle + \int_\Omega \operatorname{Ric}(\operatorname{grad}(f)). \tag{22}$$

Novamente, pela fórmula de Green (4), temos que

$$\int_\Omega \langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g)\rangle = -\int_\Omega g^2 + \int_M gu.$$

Substituindo em (22) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Omega \Delta(|\operatorname{grad}(f)|^2) &\geq \frac{1}{n}\int_\Omega g^2 - \int_\Omega g^2 + \int_M gu + \int_\Omega \operatorname{Ric}(\operatorname{grad}(f)) \\ &= \frac{1-n}{n}\int_\Omega g^2 + \int_M gu + \int_\Omega \operatorname{Ric}(\operatorname{grad}(f)). \end{aligned} \tag{23}$$

De (21) e (23) temos que

$$\begin{aligned} \int_M gu &- \int_M Hu^2 - 2\int_M u\Delta z - \int_M B(\operatorname{grad}(z), \operatorname{grad}(z)) \\ &\geq -\frac{n-1}{n}\int_\Omega g^2 + \int_M gu + \int_\Omega \operatorname{Ric}(\operatorname{grad}(f)). \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\frac{n-1}{n}\int_\Omega g^2 \;\geq\; \int_M [u(2\Delta z + uH) + B(\mathrm{grad}(z),\mathrm{grad}(z))] + \int_\Omega \mathrm{Ric}(\mathrm{grad}(f)) \tag{24}$$

o que conclui a prova do corolário.

2 Teorema Principal

2.1 Autovalores

Os modelos matemáticos para os problemas de autovalores em geometria riemanniana surgiram das aplicações físicas em áreas como: acústica, ondulatória, elasticidade, etc. Estes problemas são divididos em dois tipos: os problemas diretos e os problemas inversos. O problema direto, do qual vamos tratar, consiste de procurar informações sobre os autovalores e as auto-funções de uma variedade riemanniana em termos das informações geométricas conhecidas da variedade. Usualmente, sabemos que é difícil, em geral não é possível, determinarem-se explicitamente os autovalores e as auto-funções de uma variedade riemanniana. Uma investigação teórica muito importante consiste de obter estimativas (tanto inferiores quanto superiores) para os autovalores. Devido ao caráter variacional do problema (os autovalores são os ínfimos do "Funcional Energia" restrito a certos espaços de funções, veja [1], capítulo 3, n^o 26-28 *Caracterizações variacionais*), é mais fácil obterem-se estimativas superiores para os autovalores. No problema inverso, assume-se que um ou todos os autovalores são conhecidos e, então, buscam-se informações sobre a variedade como, por exemplo, o volume (veja [1] capítulo VII).

Nesta dissertação vamos considerar o que muitas vezes é denominado problema do autovalor fechado, a saber:

O problema do autovalor fechado do laplaciano:

Obter todos os números reais λ para os quais existe uma solução não trivial $\phi \in C^{\infty}(M)$ para

$$\Delta\phi + \lambda\phi = 0, \tag{25}$$

onde M é uma variedade riemanniana compacta **sem bordo.**

Os valores de λ são ditos autovalores e as soluções ϕ de (25) são ditas auto-funções do operador de Laplace de Ω.

Estuda-se também o problema de autovalores quando Ω é uma variedade compacta com bordo. Neste caso, requer-se em geral, adicionalmente, que as soluções de (25) ou satisfaçam $\langle \operatorname{grad} \phi, \eta \rangle = 0$ em $\partial\Omega$, sendo η unitário normal a $\partial\Omega$ (condição de Neumann) ou que $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ (condição de Dirichlet). Como só iremos tratar aqui do problema do autovalor fechado, vamos nos referir a este problema simplesmente como o problema do autovalor.

Vamos agora mostrar que todo autovalor do laplaciano é não negativo sendo, além disso, zero, apenas no caso trivial, em que a auto-função é uma função constante.

Para ver isso, faça $f = h$ na Fórmula de Green (4). Segue que

$$\begin{gathered}
\int_M f\Delta f \, + \, |\operatorname{grad}(f)|^2 dV \, = \, 0 \Leftrightarrow \\
\int_M -\lambda f^2 + |\operatorname{grad}(f)|^2 dV \, = \, 0 \Leftrightarrow \\
-\lambda \int_\Omega f^2 dV \, = \, - \int_M |\operatorname{grad}(f)|^2 dV \Leftrightarrow \\
\lambda = \frac{\int_M |\operatorname{grad}(f)|^2}{\int_M f^2} \geq 0.
\end{gathered}$$

Note que se $\lambda \, = \, 0$, então

$$\int_M |\operatorname{grad}(f)|^2 dV \, = \, 0 \Leftrightarrow |\operatorname{grad}(f)|^2 \, = \, 0 \Leftrightarrow f \, = \, cte.$$

Portanto, desconsiderando as soluções constantes da equação dos autovalores, temos sempre $\lambda_1(M) > 0$.

2.2 Teorema Principal

Para provarmos o teorema principal desta dissertação precisamos do seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Sejam Ω e z uma função diferenciável em $M = \partial\Omega$. Então o problema de Dirichlet*

$$\Delta f = 0 \text{ em } \Omega$$

$$f = z \text{ em} M.$$

tem uma solução $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Comentários sobre a prova. Observamos que se Ω admite uma parametrização global (que é o que acontece, por exemplo, quando Ω é um aberto da esfera, caso que contempla o resultado mais importante da dissertação), então este resultado é uma conseqüência direta do problema de Dirichlet para EDP's lineares elípticas de segunda ordem (Teoremas 6.14 e 6.19 de [5]), uma vez que a equação de laplace na variedade se transforma em uma equação linear elíptica de segunda ordem em coordenadas locais (com $c = 0$, na notação de [5]).
Se Ω não admite uma parametrização global, pode-se usar a mesma técnica desenvolvida no Capítulo 6.3 de [5], usando o método de Perron. Este método se aplica aqui pois o mesmo depende unicamente de condições locais, que podemos mostrar que são satisfeitas usando parametrizações locais. Observamos também que as condições de bordo são tratadas localmente, de modo que, para este problema, novamente podemos usar os resultados clássicos de EDP's lineares elípticas em abertos do $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.2. ***(Teorema Principal)****. Seja M uma hipersuperfície mínima, orientável, compacta e mergulhada em uma variedade riemanniana compacta e orientável N tal que* $\dim(N) = n$. *Suponha que a curvatura de Ricci de N é limitada inferiormente por uma constante positiva k, ou seja,* $\mathrm{Ric}(u) \geq k$ *em todo ponto $p \in N$ e para todo vetor unitário $u \in T_pN$. Então o primeiro* *autovalor do laplaciano de M é tal que*

$$\lambda_1(M) \geq \frac{k}{2}. \tag{26}$$

Prova: Vamos supor aqui conhecido o fato de que uma hipersuperfície compacta mergulhada em uma variedade riemanniana compacta com curvatura de Ricci positiva divide a variedade em duas componentes conexas.
Assim, M divide N em duas componentes conexas Ω_1 e Ω_2 tais que $\partial\Omega_1 = M = \partial\Omega_2$. Denote por Ω uma dessas componentes.
Seja z a primeira auto-função (não constante) de M. Pode-se provar que $z \in C^\infty(M)$ (veja [5], Teorema 6.19 -1977).
A função z então satisfaz

$$\Delta z + \lambda_1 z = 0.$$

Vamos obter uma estimativa inferior para λ_1.
Seja f uma extensão harmônica de z a Ω, ou seja, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\Delta f = 0$ em Ω e $f|_M = z$. A existência de f está garantida pelo Teorema 2.1.
Por (24), como $\Delta f = 0$ em Ω e $H \equiv 0$ pois M é mínima, temos

$$0 \geq -2\lambda_1(M)\int_M zu + \int_M B(\mathrm{grad}(z), \mathrm{grad}(z)) + \int_\Omega \mathrm{Ric}(\mathrm{grad}(f)).$$

Mas note que, por hipótese, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(\mathrm{grad}(f)) &= |\,\mathrm{grad}(f)|^2\,\mathrm{Ric}\left(\frac{\mathrm{grad}(f)}{|\mathrm{grad}(f)|}, \frac{\mathrm{grad}(f)}{|\mathrm{grad}(f)|}\right) \\ &\geq |\,\mathrm{grad}(f)|^2 k. \end{aligned}$$

Daí segue que

$$0 \geq -2\lambda_1(M)\int_M zu + \int_M B(\mathrm{grad}(z), \mathrm{grad}(z)) + \int_\Omega |\,\mathrm{grad}(f)|^2 k. \tag{27}$$

Por outro lado, pela Fórmula de Green (4)

$$\int_M zu = \int_\Omega |\operatorname{grad}(f)|^2.$$

Substituindo em (27) vem que

$$(2\lambda_1(M) - k) \int_\Omega |\operatorname{grad}(f)|^2 \geq \int_M B(\operatorname{grad}(z), \operatorname{grad}(z)).$$

Note que a desigualdade anterior é válida seja qual for a componente conexa Ω de $N \backslash M$ considerada. Como o sinal de B muda ao trocarmos de componente conexa, escolhemos Ω de tal forma que

$$\int_M B(\operatorname{grad}(z), \operatorname{grad}(z)) \geq 0.$$

Assim temos $\lambda_1(M) \geq k/2$ ou $\operatorname{grad}(f) = 0$ em Ω. Mas como z não é constante e $z = f|_M$, a segunda possibilidade não pode acontecer e isto conclui a prova do teorema.

Corolário 3. *Seja M uma hipersuperfície compacta minimalmente mergulhada em $\mathbb{S}^n$, esfera unitária, de curvatura seccional 1. Então*

$$\lambda_1(M) \geq \frac{n-1}{2}. \tag{28}$$

Prova: É um fato bastante conhecido (algumas vezes provado nos cursos de Geometria Diferencial) que toda hipersuperfície compacta e mergulhada em $\mathbb{R}^n$ é orientável (para uma demonstração deste fato, veja [8]). Usando-se a projeção estereográfica, podemos então também mostrar que o mesmo vale em $\mathbb{S}^n$, ou seja, que toda hipersuperfície mergulhada e compacta de $\mathbb{S}^n$ é orientável. Além disso, como $\mathbb{S}^n$ tem curvatura seccional constante e igual 1, temos:

$$\operatorname{Ric}(E_i, E_i) = \sum_{j=1}^{n-1} \langle R(E_i, E_j)E_j, E_i \rangle = \sum_{j=1}^{n-1} K(E_i, E_j) = n - 1 > 0.$$

Disto temos que, pelo Teorema 2.2, fazendo $k = n-1$

$$\lambda_1(M) \geq \frac{n-1}{2}.$$

3 Aplicações

Yang e Yau [11] provaram que se M é uma variedade riemanniana compacta, de dimensão 2, orientável então

$$\lambda_1(M)A \leq 8\pi(g + 1), \tag{29}$$

onde g é o gênero de M e A sua área. Combinando isto com (26) temos o seguinte resultado:

Proposição 1. *Sejam M e N nas mesmas condições do Teorema Principal* (2.2). *Assuma que* $\dim N = 3$ *e que, portanto,* $\dim M = 2$. *Então, sendo A a área de M e g seu gênero, tem-se*

$$A \leq \frac{16\pi(g + 1)}{k}. \tag{30}$$

Prova: Juntando

$$\lambda_1(M) \geq \frac{k}{2}$$

com o resultado obtido em [11] temos:

$$\frac{k}{2}A \leq \lambda_1(M)A \leq 8\pi(g + 1)$$

o que implica em (30).

Corolário 4. *Seja M uma superfície mínima, compacta e mergulhada em $\mathbb{S}^3$. Então*

$$A \leq 8\pi(g + 1).$$

Prova: Segue imediatamente de (30) e do fato de que a curvatura de Ricci de $\mathbb{S}^3$ é $\mathrm{Ric}(\mathbb{S}^3) = 2$.

A conseqüência mais importante do Corolário 3 relaciona-se com a conjectura de Yau que afirma que o primeiro autovalor de uma hipersuperfície mínima em $\mathbb{S}^n$ é $n - 1$. Esta conjectura está fortemente baseada no seguinte fato:

Proposição 2. *As funções coordenadas do* $\mathbb{R}^{n+1}$ *restritas a uma hipersuperfície mínima compacta* M *de* $\mathbb{S}^n$ *são auto-funções do laplaciano de* M *com com autovalor igual a* $n-1$.

Prova:

Tome $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ e defina $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(p) = \langle p, v \rangle.$$

A mostrar:

$$\Delta f = -(n-1)f.$$

Seja $p \in M$ e considere $\{E_i\}_{i=1}^{n-1}$ uma base ortonormal de T_pM.

Podemos estender cada E_i para uma vizinhança $V \subset U$ de p tal modo que $\{E_i\}_{i=1}^{n-1}$ seja um referencial ortonormal geodésico de M em p. Em particular, $\widetilde{\nabla}_{E_i}E_j(p) = 0$ onde $\widetilde{\nabla}$ é a conexão riemanniana de M. Estendemos os campos E_i a campos ortonormais F_i em uma vizinhança de p em $\mathbb{S}^n$ e, a seguir, fazemos uma extensão radial desta extensão a campos ortonormais G_i em uma vizinhança W de p em $\mathbb{R}^{n+1}$, ou seja,

$$G_i(q) = F_i(q/||q||).$$

Para simplificar a escrita, denotaremos $G_i = F_i = E_i$. Assim, em particular, $\langle E_i(q), q \rangle = 0$ para todo $q \in W$.

Do fato de que $\{E_i\}_{i=1}^{n-1}$ é geodésico em p temos que

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^{n-1} E_i(E_i(f(p))).$$

Note que, para cada i, $E_i(f) = \langle E_i, v \rangle$. De fato, seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = E_i$. Então

$$E_i(f) \;=\; E_i(f\circ\alpha) \;=\; \left\langle \frac{d}{dt}\alpha(t)\Big|_{t=0}, v \right\rangle \;=\; \langle E_i, v\rangle.$$

Segue-se que

$$E_i(E_i(f)) \;=\; \langle \overline{\nabla}_{E_i}E_i, v\rangle + \langle E_i, \overline{\nabla}_{E_i}v\rangle \;=\; \langle \overline{\nabla}_{E_i}E_i, v\rangle$$

onde $\overline{\nabla}$ denota a conexão riemanniana do $\mathbb{R}^{n+1}$. Denotando por $(\;)^T$ a projeção ortogonal do $\mathbb{R}^{n+1}$ sobre $T\mathbb{S}^n$, temos

$$\nabla_{E_i}E_i \;=\; \left(\overline{\nabla}_{E_i}E_i\right)^T$$

e

$$\left(\overline{\nabla}_{E_i}E_i\right)^N(p) = \langle \overline{\nabla}_{E_i}E_i, p\rangle p,\;\; p\in M.$$

Derivando ambos lados de $\langle E_i(q), q\rangle = 0$, em relação à E_i, $q \in W$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \overline{\nabla}_{E_i}E_i, q\right\rangle \;+\; \left\langle E_i(q), \overline{\nabla}_{E_i}q\right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_{E_i}E_i, q\right\rangle + \langle E_i(q), E_i(q)\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_{E_i}E_i, q\rangle + 1. \end{aligned}$$

Em particular

$$\langle \overline{\nabla}_{E_i}E_i, p\rangle = -1.$$

Logo

$$\begin{aligned} E_i(E_i(f))(p) \;&=\; \langle \overline{\nabla}_{E_i}E_i(p), v\rangle \\ &=\; \langle \left(\overline{\nabla}_{E_i}E_i\right)^T(p) + \left(\overline{\nabla}_{E_i}E_i\right)^N(p), v\rangle \\ &= \langle \nabla_{E_i}E_i, v\rangle - \langle p, v\rangle \\ &= \langle \nabla_{E_i}E_i, v\rangle - f. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\Delta f(p) = -(n-1)f + \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} E_i, v \rangle.$$

A mostrar:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} E_i, v \rangle = 0.$$

Como

$$\mathbb{R}^{n+1} = T_pM \oplus \mathbb{R}p \oplus \mathbb{R}\eta(p)$$

podemos escrever

$$v = p + a\eta(p) + bw$$

onde $w \in T_pM$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Note então que

$$\langle \nabla_{E_i} E_i(p), w \rangle = \left\langle \widetilde{\nabla}_{E_i} E_i(p), w \right\rangle = 0$$

bem como

$$\langle \nabla_{E_i} E_i(p), p \rangle = 0$$

pois $\nabla_{E_i} E_i(p) \in T_p\mathbb{S}^n$. Segue-se que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} E_i, v \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} E_i, \eta(p) \rangle = 0,$$

onde na segunda igualdade usamos que M é mínima. Com isto, fica provada a proposição.

Referências

[1] Berard, Pierre H. - *Lectures on Spectral Geometry*, 15° Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro, 1985.

[2] Carmo, Manfredo P. do - *Geometria Riemanniana*. IMPA, Rio de Janeiro, 1988.

[3] Chavel, Isaac - *Eigenvalues in Riemannian Geometry*. Academic Press, London, 1984.

[4] Choi, H. in and Wang, AI-Nung - *A first Eigenvalue Estimate for minimal Hypersurfaces*. J, Differential Geometry, **18** (1983), pp. 559-562.

[5] Gilbarg, D. e Trudinger, N.S. - *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[6] Lang, Serge - *Differential manifolds*. Addiison-Wesley, Inc., Philippines, 1972.

[7] Li, Peter - *Lectures notes on Geometric Analysis*. July 16, 1992; Revised August 15, 1996.

[8] Lima, Elon Lages - *Duas novas demonstrações do Teorema de Jordan-Brouwer no caso diferenciável*. Matemática Universitária **4** (1986), pp. 89-103.

[9] Petersen, Peter - *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[10] Spivak, Michael - *Calculus on Manifolds*. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1965.

[11] Yang, P. and Yau, S.T. - *Eigenvalue of the Laplacian of compact Riemannian surfaces and minimal submanifolds* . Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **7** (1980), pp. 55-63.

[12] Yau, S. T. - *Seminar on Differential Geometry.* Annals of Math. Studies, No. 102, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982.