UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PROGRAMAÇÃO LINEAR NA ESCOLA BÁSICA

TIAGO VENCATO MARTINS

Porto Alegre
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PROGRAMAÇÃO LINEAR NA ESCOLA BÁSICA

TIAGO VENCATO MARTINS

Dissertação realizada sob orientação da Prof.ª Dra. Luisa Rodriguez Doering, apresentada ao Instituto de Matemática da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Porto Alegre

2013

TIAGO VENCATO MARTINS

PROGRAMAÇÃO LINEAR NA ESCOLA BÁSICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PORTO ALEGRE, outubro de 2013.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke - UFRGS

____
Prof. Dra. Elisabete Zardo Búrigo - UFRGS

____
Prof. Dra. Marlene Alves Dias – Universidade Bandeirante de São Paulo

AGRADECIMENTOS

À Professora Dra Luisa Rodriguez Doering, pela disponibilidade de me orientar, pelas sugestões, incentivos, pelas suas ideias que ajudaram a desenvolver a sequência didática e por confiar no meu trabalho.

Aos docentes do PPGEMat, pela dedicação em manter e qualificar este programa.

Aos professores que compõem a banca examinadora, por aceitarem avaliar esta dissertação e pelas valiosas sugestões para o enriquecimento deste trabalho.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul, pelo apoio financeiro.

Aos colegas do mestrado, em especial à Cláudia Caldeira, pelo conhecimento dividido durante a realização do curso.

Ao Centro de Ensino Médio Pastor Dohms, por viabilizar a aplicação da sequência didática.

Aos colegas da Secretaria Municipal de Educação de Camaquã, pelo apoio, em especial ao colega Roger Tavares pela revisão linguística deste trabalho.

À minha família, pelo apoio constante e por me incentivar a levar adiante o projeto de cursar o mestrado. Em especial à Meridiane, minha esposa, e à Eduarda, minha filha, pela compreensão, apoio e incentivos diários.

RESUMO

Neste trabalho discutimos a inserção de tópicos básicos de Programação Linear em duas variáveis no ensino médio e apresentamos os resultados da aplicação de uma sequência didática abordando este tema. A aplicação da sequência foi realizada ao longo de oito encontros semanais no Centro de Ensino Médio Pastor Dohms – Unidade Camaquã – na modalidade de oficinas no turno inverso às aulas. Nossa sequência didática priorizou atividades que objetivaram levar os alunos a interpretar resultados e estabelecer conjecturas em detrimento à resolução mecanizada de exercícios. Elaboramos, para a aplicação da sequência, cinco problemas e através deles, desenvolvemos toda a teoria necessária para o entendimento e resolução das atividades. Usamos o software GeoGebra como meio facilitador para que os alunos conjecturassem sobre o teorema básico da Programação Linear. A elaboração e as análises dos resultados da aplicação da sequência didática basearam-se na Teoria de Registros de Representação Semióticas, de Raymond Duval, que trata dos aspectos cognitivos relacionados às representações semióticas e à aquisição de conhecimentos matemáticos. A coleta de dados foi feita através de anotações, filmagens dos encontros e do material produzido pelos alunos durante as aulas. Ao final, da pesquisa concluímos que a abordagem do conteúdo Programação Linear na educação básica pode dar significado a conteúdos que, para os estudantes parecem desconexos, além de aumentar o espectro de problemas passíveis de resolução pelos alunos do ensino médio.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Programação Linear. GeoGebra.

ABSTRACT

In this paper we discuss the integration of basic topics of Linear Programming in two variables in to high school and we present the results of applying a sequence of didactic addressing this theme. The Mathematics application of the sequence was accomplished with eight weekly meetings at the Pastor Dohms High School in Camaquã, in workshops dummy the opposite shift. Our didactic sequence prioritized activities that were designed to take the student to interpret results, and not merely through mechanic exercises. To apply the sequence, we developed five exercises and through them develop all necessary theory for solving the problems. We used the GeoGebra software to facilitate the learning of the basic linear programming theorem. This program was based on the theory of representation registers due to Raymond Duval the addresses he cognitive aspects of knowledge acquisition. The data was collected from notes, filmed meetings and work produced by students in class. At the end of the study conclude that the linear programming approach of content in basic education can give meaning to the contents that seem unconnected to students in addition to increasing the range of problems solvable by students.

Keywords: Teaching Maths. Linear Programming. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

PL – Programação Linear
PNLD – Programa Nacional do Livro Didático

SUMÁRIO

Introdução

Neste trabalho analisamos a possibilidade de inserir no currículo da Educação Básica o tema Programação Linear[1].

Nossa experiência no processo de ensino-aprendizagem de Matemática nos leva a acreditar que é necessário conectar alguns conteúdos ensinados na educação básica entre si e aproximá-los mais da vivência de nossos alunos – encontramos nos conceitos da PL uma boa oportunidade para essa aproximação. Nosso contato com esses conceitos ocorreu na disciplina MEM12 - Tópicos de Matemática Aplicada B, e a partir da sugestão do professor Dr. Marcus Basso, tomamos a decisão de escrever sobre o tema PL.

A pesquisa segue a linha "ensino de tópicos específicos de Matemática e abordagens alternativas" descrita no site do Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática como: "Projetos que tratam das questões de ensino/aprendizagem de Matemática com o principal objetivo de ampliar e consolidar o conhecimento matemático do professor, à medida que ele participa da elaboração e experimentação de propostas de ensino e/ou recursos didáticos que priorizam a construção dos conceitos, a indagação e o questionamento constantes e a busca de relações entre conteúdos que em geral não são conectados".

O trabalho consistiu na elaboração desta dissertação que contém uma sequência didática (produto da dissertação) que aborda tópicos de PL em duas variáveis no ensino médio.

Seguimos na elaboração deste trabalho norteados pelas seguintes questões: **É possível desenvolver o ensino de PL no nível médio? Qual a validade do desenvolvimento deste conteúdo? A teoria das representações semióticas de Duval pode dar suporte ao ensino/aprendizagem de tópicos de PL na escola básica?**

Procuramos, nas considerações finais, discutir respostas a estas questões.

Integram o trabalho:

Comentários sobre dissertações ligadas ao tema;

Comentários sobre livros didáticos utilizados no ensino médio que abordem (ou não) o conteúdo PL;

Tópicos sobre PL em duas variáveis;

Tópicos sobre a Teoria das Representações Semióticas de Reymond Duval;

---

[1] Referiremo-nos, exceto nos títulos, ao termo Programação Linear por PL – conforme consta na lista de abreviaturas.

Proposta didática e análise da produção dos alunos com base na teoria de Duval;

Conclusões e validação dos resultados com base na Teoria das Representações Semióticas;

Sequência didática revisada – produto da dissertação.

Justificamos nosso trabalho na medida em que repensar o currículo da escola deve ser uma preocupação docente constante. Questionados muitas vezes pelos alunos sobre a validade dos conteúdos que ensinamos, devemos buscar estratégias e sugerir alternativas para que os estudantes encontrem nas aulas de Matemática alguma relação com o cotidiano, alargando, assim, seu lastro de conhecimento. Encontramos subsídios ao trabalho proposto nas orientações oficiais do Ministério da Educação, por exemplo:

> “Em nossa sociedade, o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento.” (BRASIL, 2006, p. 111).

Ou ainda como competência: “Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas.” (BRASIL, 2006, p. 114).

Destacamos ainda de acordo com as orientações oficiais, os seguintes objetivos para o ensino de Matemática:

> “• Ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, árvores de possibilidades, fórmulas, equações ou representações geométricas.
>
> • Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; por exemplo, transformar situações dadas em linguagem discursiva em esquemas, tabelas, gráficos, desenhos, fórmulas ou equações matemáticas e vice-versa, assim como transformar as linguagens mais específicas umas nas outras, como tabelas em gráficos ou equações.
>
> • Selecionar diferentes formas para representar um dado ou conjunto de dados e informações, reconhecendo as vantagens e limites de cada uma delas [...]”. (BRASIL, 2006, p. 114).

Enfim este trabalho também se justifica como exigência deste programa de pós-graduação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

A dissertação está estruturada da seguinte forma:

No capítulo 2 apresentamos, de acordo com Anton (2011), tópicos de PL geométrica em duas variáveis. No capítulo 3 dissertamos sobre alguns tópicos da teoria das representações semióticas de Raymond Duval. No capítulo 4 apresentamos o resumo e análise de dissertações com temas assemelhados ao nosso. No capítulo 5 apresentamos a análise de livros didáticos. No capítulo 6 apresentamos nossa proposta didática. No capítulo 7 descrevemos detalhadamente as atividades seguidas das análises. No capítulo 8 apresentamos nossas conclusões e considerações finais. Ao final da dissertação apresentamos a bibliografia consultada, seguida da sequência didática revisada (produto), apontando possibilidades para outros trabalhos semelhantes.

2 Sobre a Programação Linear

Neste capítulo apresentamos tópicos de PL em duas variáveis baseados em Anton (2001). Objetivamos que este texto sirva de base para o professor que deseje aplicar nossa proposta em sua sala de aula. Iniciamos apresentando um breve histórico sobre o assunto.

2.1 Sobre aspectos históricos da Programação Linear

Resolver um problema de otimização consiste em maximizar ou minimizar uma função que está restrita a uma série de condições. Problemas que objetivam maximizar lucro ou rendimentos ou minimizar custos naturalmente podem despertar interesse.

PL é uma técnica da pesquisa operacional que permite a resolução de uma variedade desses problemas no caso em que as funções analisadas são funções afim e as restrições são expressas por desigualdades lineares.

Faremos um breve histórico da PL e da pesquisa operacional baseados em Ackoff e Sasieni (1977). Segundo os autores, o termo Pesquisa Operacional apareceu pela primeira vez em 1939, mas como é comum em descobertas científicas, logo que a atividade foi individualizada, foi possível remontar suas origens às épocas mais antigas da ciência.

Para Ackoff e Sasieni (1977), foi durante a primeira revolução industrial que a pesquisa operacional serviu de ferramenta para a resolução dos primeiros problemas de otimização.

Até meados do século XIX a indústria utilizava muita mão de obra e pouca tecnologia. Com a modernização das indústrias e o acirramento dos mercados, os dirigentes das indústrias estabeleceram objetivos como maximizar o volume de bens minimizando os custos, maximizar o volume vendido e minimizar o custo unitário de seus produtos, minimizar o capital necessário para manter certo nível de negócio, etc. A pesquisa operacional encontrou nesse fato um campo fértil para o seu crescimento.

Segundo Ackoff e Sasieni (1977), a pesquisa operacional teve sua expansão acelerada pelas organizações militares com a deflagração da Segunda Guerra Mundial. Estas organizações militares atravessaram o mesmo tipo de evolução organizacional que a indústria.

Historicamente, a PL teve um avanço significativo ligado ao campo militar. Durante a Segunda Guerra Mundial a técnica começou a ser aplicada pela Força Aérea Norte Americana na resolução de problemas formulados através de questões logísticas. Segundo Paiva (2008), esses problemas eram resolvidos por tentativa e erro até que George Dantzig, consultor da Força Aérea dos Estados Unidos da América, apresentou em 1947 uma forma sistematizada de resolver problemas de otimização: o método Simplex[2].

Dantzig desenvolveu o Simplex enquanto trabalhava na Rand Corporation no projeto SCOOP (Scientifc Computation of Optimun Programs) para a Força Aérea dos Estados Unidos, desenvolvendo métodos de otimização.

O algoritmo Simplex requer uma grande quantidade de cálculos, tendo nos primeiros anos de seu desenvolvimento, demandado muito cálculo manual. Com o surgimento do computador, os desenvolvedores da PL encontraram uma poderosa ferramenta, podendo expandir seus estudos na área.

2.2 Sobre Programação Linear em duas variáveis

PL geométrica é uma técnica para maximizar ou minimizar uma expressão linear em duas variáveis sujeita a um conjunto de restrições (vínculos lineares).

2.2.1 Exemplo 1- Maximizando o lucro de vendas

Um fabricante de bombons tem estocado bombons de chocolate, sendo 130 kg com recheio de cerejas e 170 kg com recheio de menta. Ele decide vender o estoque na forma de dois pacotes sortidos diferentes. Um pacote contém uma mistura com metade do peso em bombons de cereja e metade em menta e é vendido a R$ 20,00 o quilograma. O outro pacote tem uma mistura de um terço de bombons de cereja e dois terços de bombons de menta e é vendido a R$ 12,50 o quilograma. O vendedor deveria preparar quantos quilos de cada mistura a fim de maximizar o lucro?

---

[2] O método Simplex é uma técnica que permite determinar numericamente a solução ótima de um problema de PL.

Traduzindo o problema para a linguagem matemática temos:

Chamemos de mistura A o pacote que contém $\frac{1}{2}$ do peso de bombons de cereja e $\frac{1}{2}$ do peso de bombons de menta;

x é a quantidade de quilos da mistura A;

Chamemos de mistura B a composição que tem $\frac{1}{3}$ do peso de bombons de cereja e $\frac{2}{3}$ do peso de bombons de menta;

y é a quantidade de quilos da mistura B

O lucro das vendas será representado por L e pode ser calculado por

$$L = 20{,}00x + 12{,}50y.$$

Sobre a quantidade de bombons de cada mistura podemos construir a seguinte tabela:

Bombom	**Quantidade de bombons por x kg da mistura A**	**Quantidade de bombons por y kg da mistura B**	**Expressão que representa o total de bombons em x kg de A e y kg de B**
Cereja	$\frac{1}{2}x$ kg	$\frac{1}{3}y$ kg	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$
Menta	$\frac{1}{2}x$ kg	$\frac{2}{3}y$ kg	$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y$

Tabela 1 - Dados do exemplo 1

Uma vez que o fabricante dispõe de 130 kg de bombons de cereja e 170 kg de bombons de menta, ele está sujeito as seguintes restrições:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \leq 130,$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y \leq 170.$$

Obviamente teremos quantidades não negativas da mistura A e B, ou seja,

$$x \geq 0 \; e \; y \geq 0.$$

Isto mostra que o problema pode ser formulado matematicamente como segue: encontrar os valores de x e y que maximizam $L = 20{,}00x + 12{,}50y$ sujeito às restrições

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \leq 130,$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y \leq 170,$$

$$x \geq 0\,,$$

$$y \geq 0.$$

Agora vamos desenvolver a teoria necessária para resolver esses problemas de PL em duas variáveis.

2.2.2 Uma solução geométrica para problemas de Programação Linear

Um problema de PL em duas variáveis consiste em encontrar os valores de x e y que maximizam ou que minimizam a função $z = ax + by$ (1) sujeita às condições:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x + a_{12}y(\leq)(\geq)(=)b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y(\leq)(\geq)(=)b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x + a_{m2}y\,(\leq)(\geq)(=)b_m \end{array}\right\} (2)$$

$$x \geq 0 \; e \; y \geq 0 \; (3)$$

Onde cada uma das m inequações pode ter qualquer um dos símbolos $\leq, \geq \; ou \; =$. O problema acima é chamado problema geral da PL em duas variáveis. A função linear z em (1) é chamada função-objetivo.

As equações (2) e (3) são chamadas restrições. Em particular as equações (3) são denominadas restrições de não negatividade das variáveis x e y.

Discutiremos como resolver graficamente problemas de PL em duas variáveis. Um par de valores (a, b) que satisfaz as restrições é chamado de solução viável. O conjunto de todas as soluções viáveis determina um subconjunto do plano xy chamado de região viável.

O objetivo é encontrar uma solução viável que maximize ou minimize a função-objetivo. Essa solução é denominada solução ótima.

Para investigar a região viável de um problema de PL, observamos que cada restrição do tipo $a_{i1}x + a_{i2}y = b_i$ define uma reta, no plano xy enquanto cada uma das restrições do tipo $a_{i1}x + a_{i2}y \leq b_i$ ou $a_{i1}x + a_{i2}y \geq b_i$ define um semiplano que inclui a reta de fronteira $a_{i1}x + a_{i2}y = b_i$.

Assim, a região viável é a interseção de um número finito de retas e semiplanos. Retomemos como exemplo o problema de maximizar lucros.

As figuras de 1 a 4 ilustram as regiões do plano determinadas pelas restrições do problema do exemplo 1:

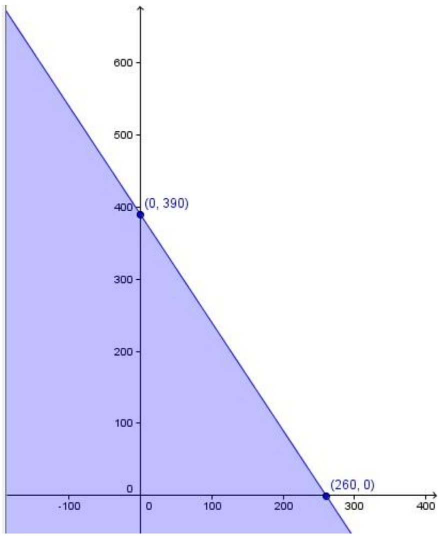


Figura 1: $\boldsymbol{região\ do\ plano\ definida\ por\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \leq 130}$

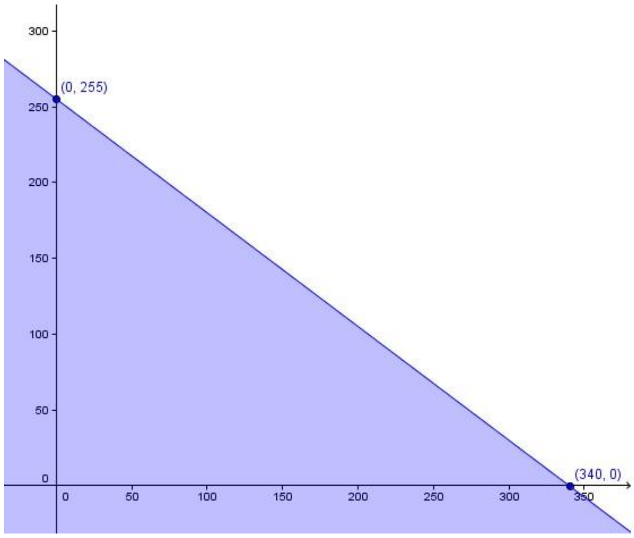


Figura 2: região do plano definida por $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y \leq 170$

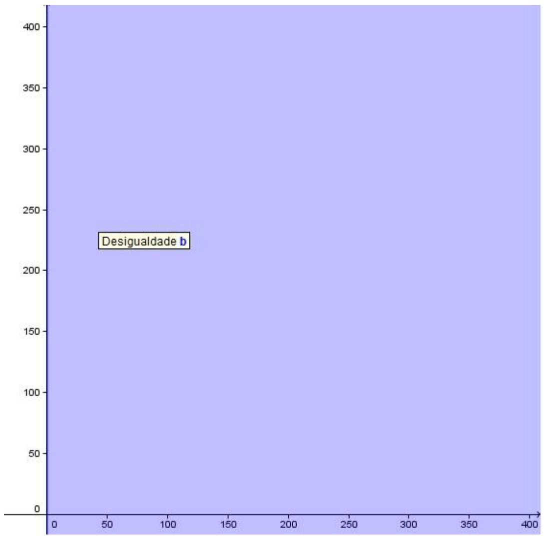


Figura 3: região do plano definida por $x \geq 0$

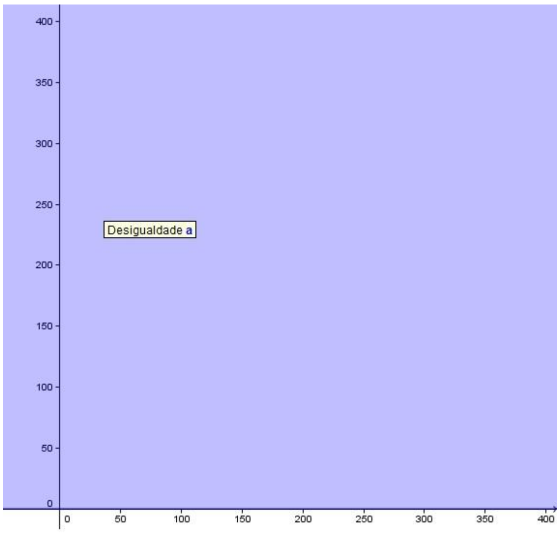


Figura 4: Região do plano definida por $y \geq 0$

A região viável do problema exemplo 1 é a intersecção desses quatro semiplanos, que é a região indicada na figura 5.

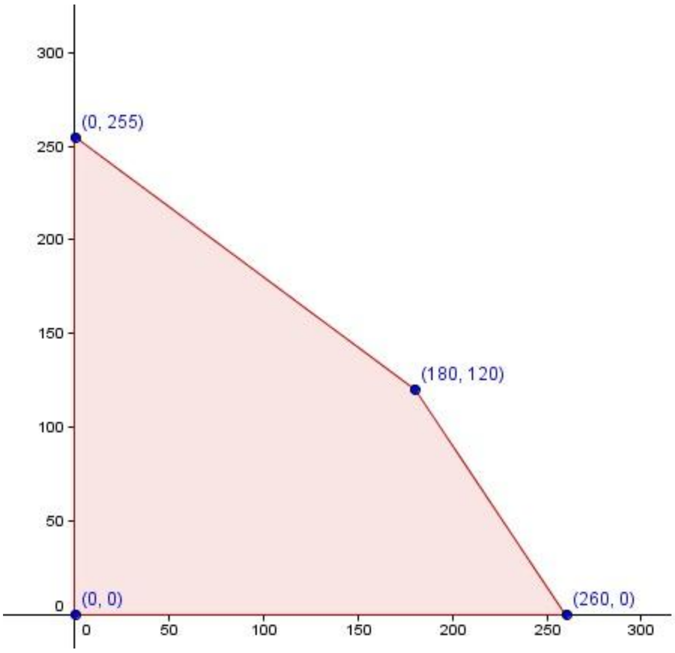


Figura 5: região viável do exemplo 1

Pode ser mostrado que a região viável de um problema de PL tem uma fronteira que consiste em um número finito de segmentos de retas ou semirretas. Uma região viável é dita limitada (como a Figura 5) se puder ser englobada por um círculo suficientemente grande; caso contrário ela é ilimitada.

Se a região viável é vazia (ela não tem pontos) então as restrições são inconsistentes e o problema de PL não tem solução.

Os pontos de fronteira de uma região viável que são intersecções de dois segmentos de retas de fronteira são chamados de pontos extremos. Por exemplo, na região viável do problema exemplo 1, temos 4 vértices $(0,0), (0,255), (180,120), (260,0)$, que são os pontos extremos.

A importância dos pontos extremos da região viável é mostrada no teorema a seguir.

2.3 Teorema: Valores máximos e mínimos

Se a região viável de um problema de PL é não vazia e limitada, então a função objetivo atinge valor máximo e valor mínimo e estes ocorrem em pontos extremos da região viável. Se a região viável é ilimitada, então a função-objetivo pode ou não assumir valores máximos ou mínimos, porém se atingir um máximo ou um mínimo este ocorrerá em pontos extremos.

Se quisermos determinar os valores extremos de uma função $z = ax + by$ numa região R do plano xy, basta observar dois fatos básicos da Geometria Analítica, a saber, que i) os pontos (x, y) do plano nos quais z toma um determinado valor constante c constituem uma reta, pois $ax + by = c$ é a equação geral da reta no plano e que ii) duas retas de equações $ax + by = c_1$ e $ax + by = c_2$ são paralelas. Assim, podemos “fatiar” a região R por retas paralelas tais que, em cada uma delas, a nossa função toma um mesmo valor. Consequentemente, as retas nas quais a função $z = ax + by$ atinge seus valores extremos são as retas tangentes à fronteira da região R, pois de um lado dessas retas temos retas nas quais a função vale menos, ou mais, e do outro lado, não temos quaisquer pontos dessa região R.

A figura 6, adaptada de Anton (2001), dá uma ideia da prova do teorema. Essa figura apresentada pelo autor nos motivou a levar os alunos a construírem, com o auxílio do software GeoGebra, o arquivo dinâmico que os ajudou a ter um convencimento do teorema. Propusemos a criação de uma animação onde os alunos, através de um recurso do software chamado “controle deslizante[3]”, fizeram variar o valor de z nas funções-objetivo $z = ax + by$ transladando a reta até os extremos da região admissível.

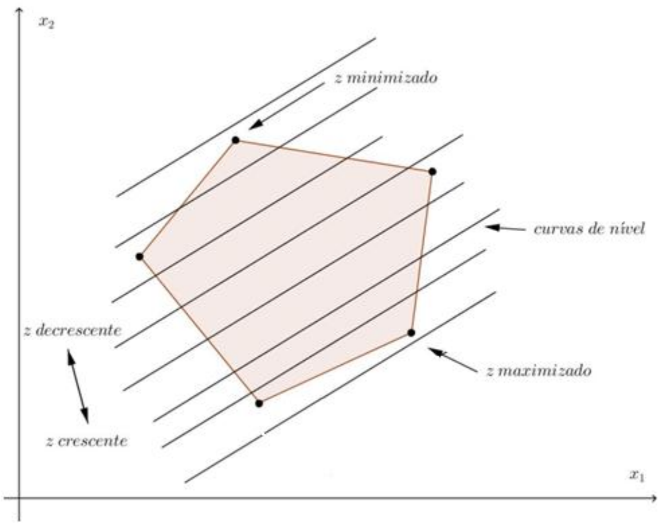


Figura 6: Ideia por trás do teorema

De acordo com o autor:

> Como a função-objetivo $z = c_1x_1 + c_2x_2$ de um problema de programação linear é uma função linear de x_1 e x_2, suas curvas de nível (as curvas ao longo das quais z tem valor constante) são retas. À medida que nos deslocamos perpendicularmente a estas retas, a função-objetivo ou cresce ou decresce monotonamente. Dentro de uma região viável limitada, os valores máximos e mínimos de z devem ocorrer, portanto, nos pontos extremos. (ANTON, 2001, p. 375).

Na figura 5 vimos que a região viável do problema exemplo 1 é limitada, consequentemente pelo teorema dos valores máximos e mínimos a função objetivo $L = 20{,}00x + 12{,}50y$ atinge tanto um valor máximo quanto um valor mínimo nos pontos extremos. Os pontos extremos e o valor correspondente de z são apresentados na tabela 2:

---

[3] O controle deslizante é um comando do software GeoGebra que permite ao usuário fazer variar um parâmetro dentro de limites previamente estabelecidos. Para mais informações indicamos o endereço http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/.

Pontos extremos $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$	**Valor de $\boldsymbol{L = 20,00x + 12,50y}$**
(0,0)	**0**
(0,255)	**3187,50**
(180,120)	**5100,00**
(260,0)	**5200,00**

Tabela 2 - Pontos extremos: exemplo 1

Constatamos, ao observar a tabela, que o maior valor de z é 5200,00 e a correspondente solução ótima (260,0). Assim o fabricante de balas atinge um máximo de R$ 5200,00 de vendas quando ele produz 260 kg da mistura A e nada da mistura B.

2.4 Exemplo 2 – Mais de uma solução

Encontre os valores de x e de y que maximizam $z = 4x + 6y$ sujeito às restrições

$$2x + 3y \leq 24,$$

$$x - y \leq 7,$$

$$y \leq 6,$$

$$x \geq 0,$$

$$y \geq 0.$$

As restrições deste problema e a região viável estão ilustradas na figura 7:

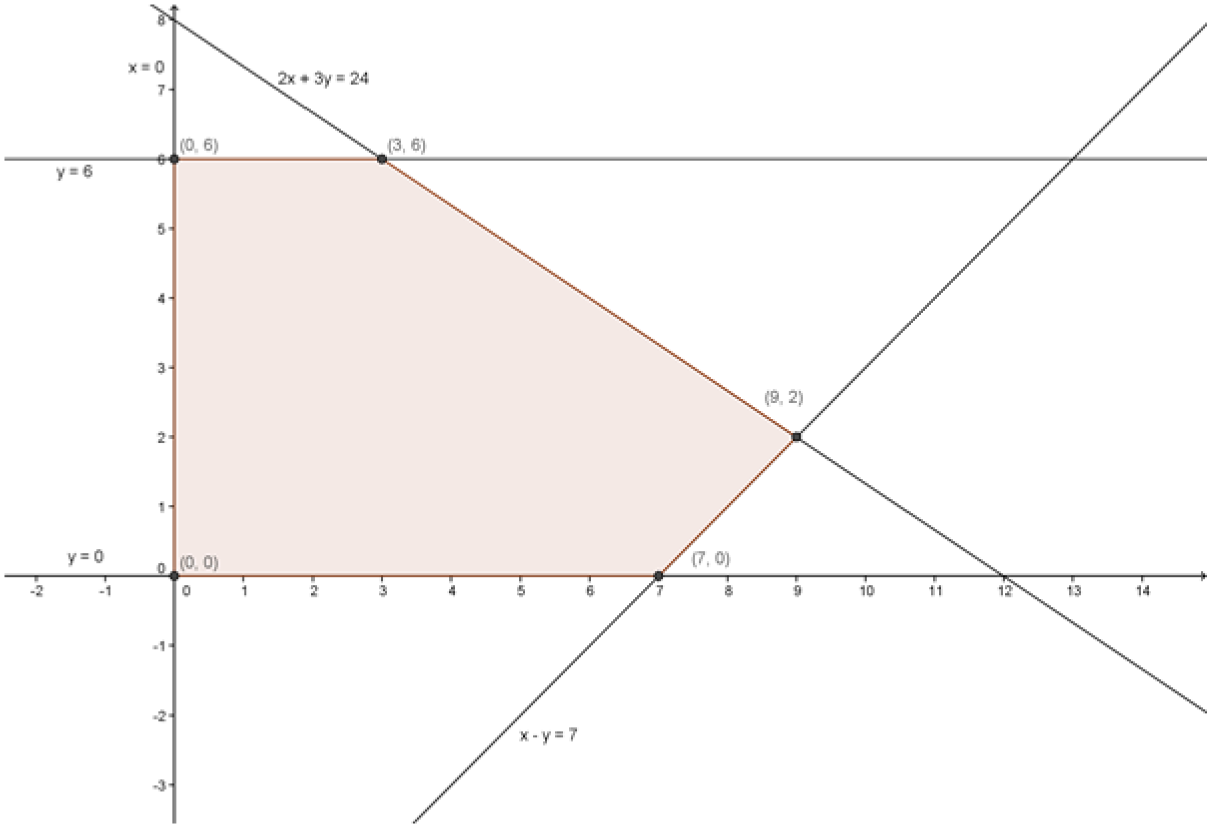


Figura 7: região viável do exemplo 2

Os valores extremos da função objetivo estão dados na tabela:

Ponto extremo (x, y)	**Valor de $z = 4x + 6y$**
(0,6)	36
(3,6)	48
(9,2)	48
(7,0)	28
(0,0)	0

Tabela 3 - Pontos extremos: exemplo 2

A função objetivo atinge valor máximo de 48 em dois pontos extremos adjacentes (3,6) e (9,2) isto exemplifica que a solução ótima em um problema de PL não precisa ser única. Observe que o valor máximo 48 não é atingido apenas nos extremos, mas também em todos os pontos do segmento que unem os dois.

2.5 Exemplo 3 – A região viável é um segmento de reta

Encontre os valores de x e y que minimizam $z = 2x - y$ sujeito às restrições

$$2x + 3y = 12,$$

$$2x - 3y \geq 0,$$

$$x \geq 0,$$

$$y \geq 0,$$

A figura 8 mostra as região viável do exemplo 3:

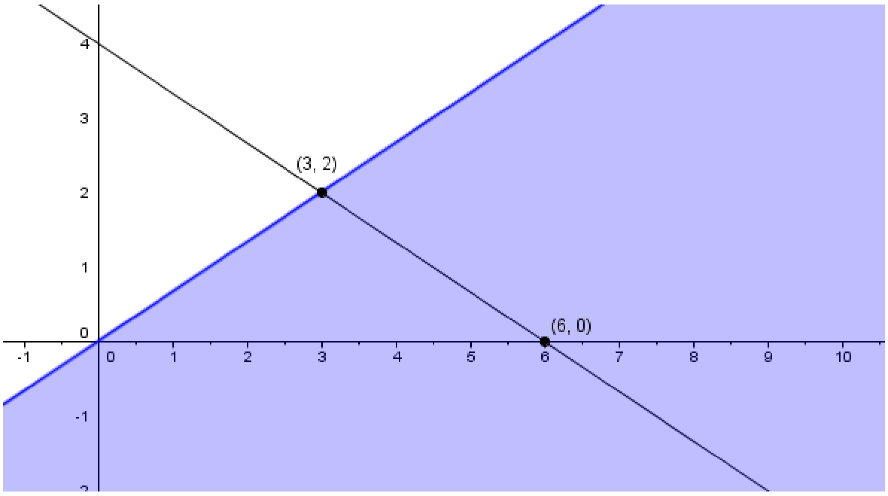


Figura 8: região viável do exemplo 3

Veja no primeiro quadrante (determinado pelas restrições $x \geq 0$ e $y \geq 0$) que a região viável consiste apenas nos pontos de intersecção entre a reta $2x + 3y = 12$ e a região do plano definida por $2x - 3y \geq 0$, que resulta no segmento de reta.

Ponto extremo (x, y)	**Valor de $z = 2x - y$**
(3,2)	4
(6,0)	12

Tabela 4 - Pontos extremos: exemplo 3

Assim, o valor mínimo de z é 4, atingido quando $x = 3$ e $y = 2$.

2.6 Exemplo 4 – Região ilimitada

Encontre os valores de x e y que maximizam $z = 2x + 5y$ sujeito às restrições

$$2x + y \geq 8,$$

$$-4x + y \leq 2,$$

$$2x - 3y \leq 0,$$

$$x \geq 0,$$

$$y \geq 0,$$

A figura 9 mostra região ilimitada

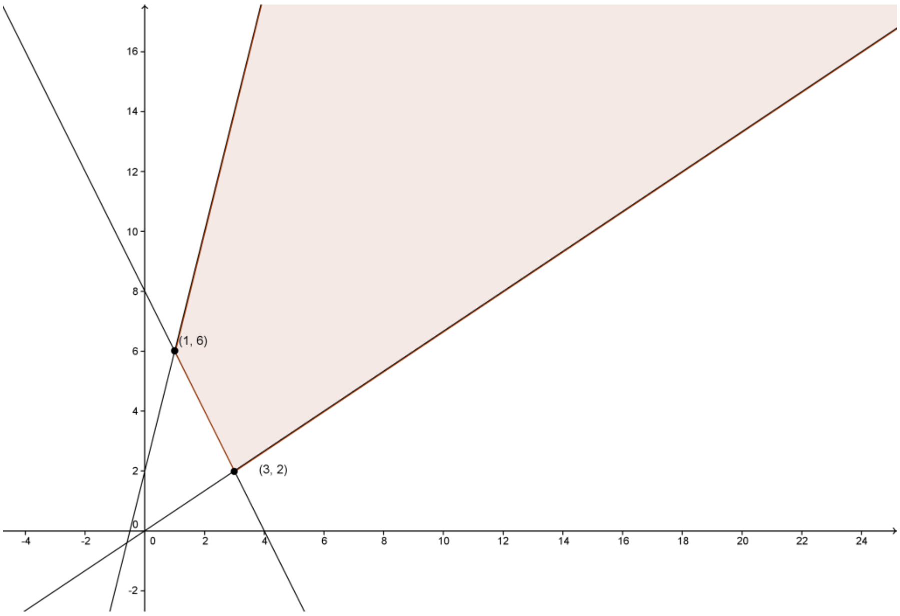


Figura 9: região ilimitada superiormente

A região viável deste problema de PL, indicada na figura acima, é ilimitada. O teorema não nos garante que a função-objetivo atinge um valor máximo.

De fato é fácil verificar que, como a região viável contém pontos nos quais x e y são arbitrariamente grandes e positivos, a função objetivo toma valores arbitrariamente grandes e positivos.

Note que a função não atinge um máximo, mas atinge um ponto mínimo.

2.7 Exemplo 5 – Restrições inconsistentes

Encontre valores de x e de y que minimizam $z = 3x - 8y$ sujeito às restrições

$$2x - y \leq 4,$$

$$3x + 11y \leq 33,$$

$$3x + 4y \geq 24,$$

$$x \geq 0,$$

$$y \geq 0.$$

A figura 10 motra a região vazia:

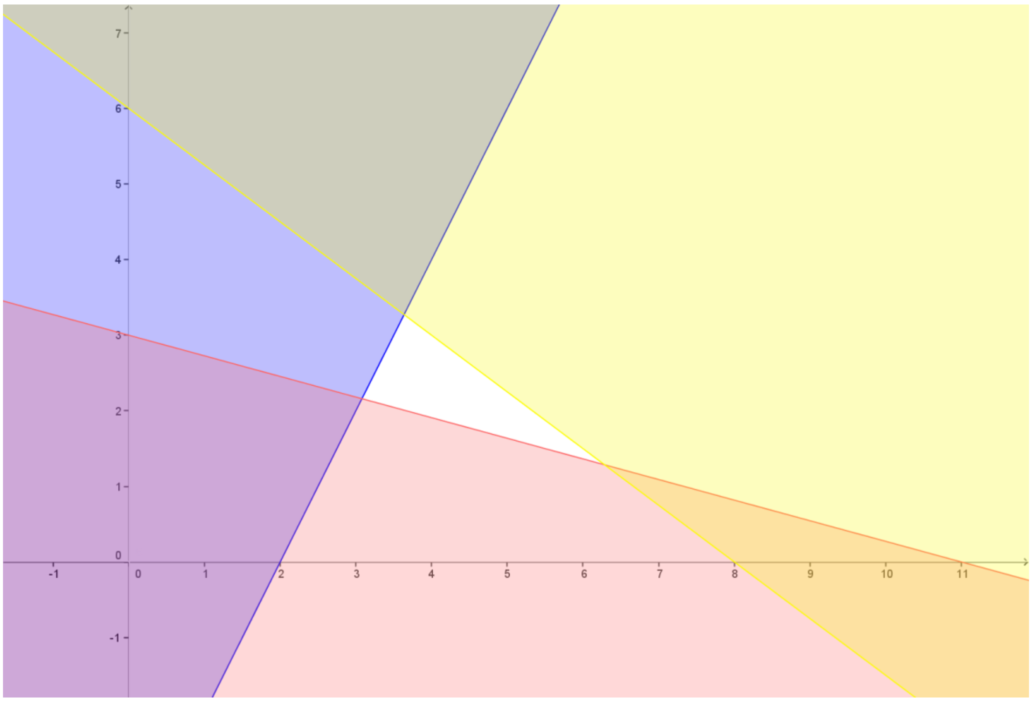


Figura 10: região vazia

Constatamos, ao analisar na figura, que a intersecção dos cinco semiplanos definida pela intersecção das cinco restrições é vazia; este problema de PL não possui soluções viáveis, pois as restrições são inconsistentes.

3. Sobre a Teoria de Registros de Representação Semióticas de Raymond Duval

Como compreender as dificuldades encontradas pelos alunos em Matemática? Qual a natureza destas dificuldades? Onde elas se encontram? Questões como estas são pertinentes ao levarmos em consideração a exigência de uma formação inicial mais sólida em Matemática a fim de preparar os alunos para um mundo cada vez mais tecnológico e informatizado.

Neste capítulo apresentamos tópicos sobre a Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval que nos ajuda a discutir respostas às questões colocadas acima e que servirá de base para que façamos a análise dos resultados a aplicação da sequência didática.

Para Duval (2003), o objetivo primordial da Matemática na formação inicial é contribuir para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização.

Duval (2003) destaca duas questões fundamentais para analisar os problemas da aprendizagem da Matemática:

a) Quais sistemas cognitivos são necessários mobilizar para aceder aos objetos matemáticos e para efetuar as múltiplas transformações que constituem o tratamento matemático?
b) Esses sistemas cognitivos são os únicos a serem mobilizados por qualquer processo de conhecimento em outros domínios científicos ou são próprios da atividade matemática?

Elucidar essas duas questões é, para o autor, ponto chave para procurar compreender as causas das dificuldades dos alunos e delimitar os problemas da aprendizagem da Matemática em todos os níveis.

Segundo Duval (2003), a diferença entre a atividade cognitiva requerida pela Matemática e aquela requerida pelos outros domínios do conhecimento não deve ser procurada nos conceitos, mas sim na importância primordial e na grande variedade de representações semióticas utilizadas na Matemática.

3.1 A importância primordial das representações semióticas

Para Duval (2012), as representações semióticas são produções que se constituem pela utilização de signos que pertencem a um sistema de representação que tem vantagens e desvantagens próprias de significação e funcionamento. Para o autor:

> Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. Consideram-se, geralmente, as representações semióticas como um simples meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, quer dizer para torná-las visíveis ou acessíveis a outrem. Ora, este ponto de vista é enganoso. As representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento. De fato, elas desempenham um papel primordial:
> - no desenvolvimento das representações mentais: estas dependem de uma interiorização de representações semióticas, do mesmo modo que as representações mentais são uma interiorização daquilo que é percebido (VYGOTSKY, 1962; PIAGET 1968);
> - na realização de diferentes funções cognitivas: a função de objetivação (expressão particular) que é independente daquela de comunicação (expressão para outrem), e a função de tratamento que não pode ser preenchida pelas representações mentais (algumas atividades de tratamento são diretamente ligadas à utilização de sistemas semióticos, por exemplo, o cálculo);
> - a produção de conhecimentos: as representações semióticas permitem representações radicalmente diferentes de um mesmo objeto, na medida em que elas podem atender sistemas semióticos totalmente diferentes. (BENVENISTE 1979, BRESSON 1978). Assim, o desenvolvimento das ciências está ligado a um desenvolvimento de sistemas semióticos cada vez mais específicos e independentes da língua natural. (GRANGER, 1979). (DUVAL, 2012, p. 269).

A importância das representações semióticas se dá pelo fato de as possibilidades de tratamento matemático dependerem do sistema utilizado (exemplo: sistema de numeração decimal versus sistemas gregos ou romanos de numeração) e pelo fato de que os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis ou observáveis (exemplo: o número).

Não se deve jamais confundir um objeto e sua representação. Os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivamente ou instrumentalmente. O acesso aos objetos matemáticos acontece necessariamente por representações semióticas.

O paradoxo da compreensão em Matemática: como podemos não confundir um objeto e sua representação, se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação?

O conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado. Passar de um registro de representação para o outro não é somente mudar de modo de tratamento. É também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto.

Duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm de forma alguma, o mesmo conteúdo.

A compreensão matemática está ligada ao fato de se dispor de ao menos dois registros de representação diferentes, essa é a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado.

Segundo Duval (2003) é a articulação dos registros que constitui condição de acesso à compreensão matemática, e não o inverso.

O problema fundamental dos "aprendizes" em Matemática é o de como ele (aluno) pode aprender a reconhecer um objeto matemático por meio de múltiplas representações que podem ser feitas em diferentes registros de representações.

Esse reconhecimento é a condição fundamental para que o aluno possa por si próprio transferir ou modificar formulações ou representações de informações durante a resolução de um problema.

Muitas vezes representações mentais não passam de representações semióticas interiorizadas. As representações mentais úteis em Matemática são representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representações semióticas.

3.2 Coordenação entre registros de representação semiótica

Além dos sistemas de numeração, existem figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural, entre outros.

Para Duval (2003), a compreensão em Matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas: os tratamentos e as conversões.

Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, realizar um cálculo ficando num mesmo sistema de escrita ou de representação dos números, resolver uma equação ou um sistema de equações.

As conversões são transformações de representação que consistem em mudar de registro conservando o mesmo objeto denotado: passar da escrita algébrica de uma equação para sua representação gráfica, por exemplo. A conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais convenientes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em outro registro.

Do ponto de vista matemático a conversão não tem nenhum papel intrínseco nos processos de Matemática de justificação ou prova, pois eles se fazem em um registro determinado, necessariamente discursivo.

Segundo Duval (2003) a conversão é tida, erroneamente, como uma atividade lateral, prévia à atividade matemática. Mas do ponto de vista cognitivo, é a conversão que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. Geralmente, considera-se converter a representação de um objeto de um registro a outro uma atividade simples e local. É comum descrever-se a conversão como uma associação preestabelecida entre nomes e figuras. De acordo com essas ideias, o ato de converter seria uma das formas mais simples de tratamento, pois bastaria aplicar regras de correspondência para "traduzir".

Essa visão é superficial e enganadora, pois, segundo Duval (2003), a regra de codificação permite somente uma leitura pontual das representações, não permitindo uma apreensão global e qualitativa.

Há dois tipos de fenômenos que se pode observar a respeito de qualquer representação de conversão: a) as variações de congruência e de não congruência; b) heterogeneidade dos dois sentidos de conversão. Quando a representação terminal transparece na representação de saída diz-se que há congruência, ou ela não transparece e se dirá que ocorre a não congruência.

Encontramos em Duval (2009, p. 65) um exemplo de *congruência*: "o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa" corresponde a "$y > x$". Para Duval (2009) observa-se uma correspondência termo a termo entre as unidades significativas.

Para Duval (2009), a dificuldade em realizar conversões está ligada à congruência e não congruência.

Encontramos, em Duval (2009) também um exemplo de *não-congruência*: "o conjunto dos pontos que têm abscissa e ordenada de mesmo sinal" corresponde a " $xy > 0$ ", mas a conversão inversa não permite reencontrar a expressão inicial: “ $xy > 0$ ” , pois o “> 0” traduz tanto “ de mesmo sinal” quanto “ positivo”. Logo, pode ser traduzido por “o produto da abscissa e da ordenada é superior a zero (positivo)”, ou por “o conjunto dos pontos que têm abscissa e ordenada de mesmo sinal”.

O segundo tipo de fenômeno, em que não há congruência, é o da importância do sentido da conversão. Nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e de chegada.

Observações mostram que o fracasso ou bloqueio dos alunos, em diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é requerida. No caso das conversões serem não congruentes, esse fracasso aumenta.

Essa dificuldade limita consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizarem conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos.

3.3 As representações semióticas nas aprendizagens em Matemática

A possibilidade de trânsito entre diferentes tipos de registros quando se estuda PL nos motivou a escolha das ideias de Duval para embasar este trabalho. De acordo com o autor:

> O que importa primeiro nas representações semióticas é a potencialidade intrínseca de serem facilmente transformadas em outras representações semióticas. [...] A questão da necessidade de representações semióticas no conhecimento matemático abrange dois problemas muito diferentes segundo o aspecto que consideramos, seja aquele de “referência a um objeto”, seja o de “transformação em outras representações semióticas”. (DUVAL, 2011, p. 40)

A aprendizagem da Matemática ressalta fenômenos complexos, pois é necessário levar em consideração exigências científicas próprias da Matemática e o funcionamento cognitivo do pensamento humano.

O que é necessário observar nas produções dos alunos? Qual o tipo de modelo pertinente para analisar e interpretar as observações ou os dados da experiência?

Os fenômenos reveladores da atividade matemática referem-se à mobilização de vários registros de representação semiótica e à conversão dessas representações.

É necessário desenvolver um método que permita observar esses fenômenos nas produções dos alunos. É necessário distinguir se esses fenômenos consistem em uma simples mudança de registro ou em uma mobilização em paralelo de dois registros diferentes.

A diversidade de registros de representações semióticas – característica importante da atividade matemática – raramente é levada em conta no ensino.

Para analisar as dificuldades em matemática, é preciso estudar prioritariamente a conversão das representações e não os tratamentos.

É preciso distinguir bem esses dois tipos de transformação das representações. Há motivos para este não diferenciamento: estima que a conversão seja uma forma particular de tratamento; acredita-se que a conversão depende de uma compreensão conceitual (uma atividade puramente mental – assemiótica).

Há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, a articulação desses diferentes registros é a condição para a compreensão matemática (as abordagens didáticas em geral não levam em conta esse fato).

4 Sobre dissertações ligadas ao tema

Acreditamos ser de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho tomarmos conhecimento de dissertações e trabalhos que abordem assuntos assemelhados ao nosso. Para tal, pesquisamos em repositórios digitais de cursos de mestrado em Ensino de Matemática dissertações ligadas ao tema PL. Apresentamos na tabela abaixo a relação de dissertações pesquisadas.

Dissertação	**Autor** **Orientador**	**Universidade – Curso**
Estudos em Programação Linear	Adão Nascimento dos Passos Professora Dra. Valéria Abrão Podestá	Unicamp – Pós-graduação – Mestrado Profissional em Educação Matemática.
Sistema de inequações do 1º grau: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando registros de representações.	Armando Traldi Júnior Professor Dr. Saddo Ag Almouloud	PUC – SP – Mestrado em Educação Matemática.
A Programação Linear No Ensino Secundário	Suzete Marisa de Almeida Paiva Professora Dra. Ana Ramires	Universidade Portucalense Infante D. Henrique – Mestrado em Educação/ Matemática
Uma Proposta de Ensino e Aprendizagem de Programação Linear no Ensino Médio	Jorge Nazareno Batista Melo Professora Dra. Maria Paula Gonçalves Fachin	UFRGS – Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.

Tabela 5 - Dissertações analisadas

Seguem os resumos e as análises feitas sobre as dissertações.

4.1 Sobre a dissertação de Adão Nascimento do Passos

O autor justifica seu trabalho na introdução escrevendo que em seu estado, o Maranhão, em particular em sua microrregião, Imperatriz – polo universitário do interior – o assunto PL não despertou ainda o devido interesse nos professores. Dada a grande aplicabilidade do tema, o autor escreve sua dissertação para que ela sirva de apoio aos estudantes interessados e que atuam na sua região geográfica.

O autor destaca que o professor Geraldo Ávila, em um artigo intitulado Limites e Derivadas no Ensino Médio, sugere a abordagem de PL no ensino médio e não só nos cursos superiores.

Logo em seguida Passos (2009) aborda brevemente a história da PL, define modelo, modelo matemático e iteração.

O trabalho está dividido em quatro capítulos. No capítulo 1 há a abordagem do contexto histórico, os principais modelos de PL e suas hipóteses básicas. O capítulo é finalizado com a resolução de vários problemas apresentados.

No capítulo 2 estão os fundamentos matemáticos e os resultados existentes na literatura necessários para a fundamentação do método Simplex.

A fundamentação do capítulo anterior é utilizada para justificar o método Simplex no capítulo 3, o qual é apresentado juntamente com duas técnicas: método das duas fases e forma Tableau.

No quarto capítulo apresenta-se o princípio da decomposição de Dantzig-Wolge, princípio aplicado a problemas de grande porte.

No capítulo 1, onde é feita uma abordagem histórica detalhada sobre PL, Passos (2009) destaca que esta não se trata apenas de uma aplicação da álgebra linear. Segundo o autor, PL se destaca por utilizar métodos de cálculos baseados na execução repetida de operações relativamente simples, beneficiando-se do advento dos computadores.

Passos (2009) destaca que, historicamente, foram encontrados quatro grandes problemas de PL:

a) Encontrar uma solução básica inicial, ponto de partida para o algoritmo;
b) Resolver problemas que envolviam degeneração;
c) Reduzir a área de memória e o número de operações aritméticas requeridas sem causar limitação de uso;
d) Manter precisão suficiente para a obtenção de resultados significativos.

Passos (2009) define um problema de PL como um problema de determinar valores de n variáveis que tornam máximo ou mínimo o valor de uma função linear chamada função objetivo.

O autor traz exemplos de modelos de PL:

a) Problema da análise de resultados – pode ser associado a uma empresa que tem recursos disponíveis para a realização de atividades; a função objetivo representa o lucro a ser maximizado.
b) Problema do transporte – tem por objetivo minimizar os custos com o transporte necessário para atender n centros distribuidores (destinos) a partir de m centros fornecedores (origem).
c) Problema de multiperíodo – envolve a estocagem de uma quantidade de produto de um período para o seguinte.
d) Problema do multiproduto – envolve a produção de diferentes produtos a partir de um conjunto de recursos, objetivando minimizar o custo total de produção.
e) Problema da dieta mais econômica – associado a uma pessoa que deseja minimizar os custos de sua dieta diária.

Segundo Passos (2009), apesar das limitações e das simplificações, a PL tem se mostrado uma das ferramentas mais utilizadas na resolução de problemas reais que envolvem formulações de modelos matemáticos.

Na dissertação o autor apresenta as hipóteses básicas da PL:

a) Proporcionalidade;
b) Aditividade;
c) Divisibilidade;
d) Hipótese determinística.

Encerrando o capítulo 1, o autor apresenta a resolução gráfica de alguns problemas de PL.

No capítulo 2 o autor traz a fundamentação matemática fundamental da teoria de PL referentes às condições para existência de soluções do problema, visto que para compreender os principais aspectos da PL. Segundo o autor, é indispensável conhecer um conjunto de conceitos e elementos matemáticos, entre eles destaca: combinação linear convexa, conjuntos convexos, soluções básicas de sistemas lineares, além de resultados importantes nos quais se fundamentam a teoria de PL e do método Simplex.

No capítulo 3 é apresentado o simplex e são discutido os requisitos matemáticos para a implementação de tal método.

No capítulo quarto é apresentada a motivação e o desenvolvimento do princípio de decomposição e é descrito o algarismo correspondente.

O princípio da decomposição aplica-se a problemas de PL de grande porte, em que a matriz dos coeficientes tem estrutura bloco angular. Neste capítulo, assim como nos anteriores, é desenvolvido todo o aparato matemático requerido pelo tema, seguido de exemplos.

Passos (2009) destaca que a ideia inicial de seu trabalho era produzir um texto introdutório e didático relacionado à PL. Ao verificar que PL está longe de ser apenas uma aplicação de álgebra linear, o autor diz ter se dedicado a algo específico sobre PL: o princípio de decomposição de Dantzig-Wolfe.

Passos (2009) destaca que, como professores, precisamos estar atentos para promover o intercâmbio entre os assuntos abordados em PL – equações, inequações, sistemas lineares e matrizes – argumenta que estes assuntos estão ao nível da educação básica, por isso PL pode ser abordada neste nível de ensino.

Apesar de concluir na direção de que a PL pode ser abordada na educação básica, o autor da dissertação não aponta, em momento algum de seu texto, indicações de que tenha constatado tal fato no desenvolvimento do seu trabalho, nem indica como fazê-lo ou aplicá-lo. Também não consta em seu texto embasamento teórico-pedagógico que dê suporte a tal ideia.

Enfim no texto de Adão Nascimento dos Passos verifica-se um forte embasamento matemático, com demonstrações e exemplos, esta dissertação – uma revisão bibliográfica sobre PL – pode servir muito a quem busca aprofundar seus conhecimentos sobre o tema.

4.2 Sobre a dissertação de Armando Traldi Júnior

A dissertação de Armando Traldi Júnior está dividida em dez capítulos. Apresentando introdução, problemática, metodologia e processos metodológicos, estudos preliminares, análise de livros didáticos, teste-diagnóstico, sequência didática, considerações finais, bibliografia e anexos.

Na introdução, o autor explicita os dois objetivos do seu trabalho:

a) Observar se os alunos da terceira série do ensino médio, que já estudaram o conteúdo de sistemas de inequações do 1º grau, resolvem alguns problemas de PL;

b) Observar se, após a inserção, no processo de ensino aprendizagem de atividades que focalizem o tratamento, a conversão e a coordenação dos registros de representação do objeto matemático sistema de inequação do 1º grau, o aluno terá condições mais favoráveis para apreensão deste objeto e aplicação de seus conhecimentos na resolução de problemas de PL.

O autor encaminha seu trabalho embasando-se nas ideias de Duval, destaca a importância da resolução de problema para o ensino de Matemática justificando que os PCN apontam nesta direção.

Para Traldi Júnior (2002), os procedimentos que o aluno mobiliza para resolver problemas de PL, utilizando estratégias geométricas e algébricas, são: conversão da língua natural para sentenças matemáticas, das sentenças matemáticas para a representação no plano cartesiano, leitura e interpretação de gráficos, cálculos numéricos e função poliominal do primeiro grau.

Em seguida, o autor formula a questão de pesquisa questionando se a inserção de atividades que focalizem o tratamento, a conversão e a coordenação entre os registros de representação algébrico, gráfico e da língua natural no processo de ensino de sistemas de inequações do 1º grau, proporcionarão aos alunos condições favoráveis para a apreensão deste objeto matemático. Ainda tem como hipótese de que o ensino-aprendizagem do objeto sistema de inequação que considera esta abordagem permite que o aluno utilize tal objeto na resolução de alguns problemas.

No Capítulo 3, o autor explicita a metodologia de seu trabalho, que consiste na elaboração e aplicação de um teste-diagnóstico, uma sequência didática e um pós-teste.

Na dissertação o autor analisa os PCN, buscando observar quais os objetivos e processos metodológicos são indicados por este documento para o ensino médio. Faz um levantamento histórico sobre PL, fundamenta sua proposta com a Teoria de Registros de Representação Semiótica proposta por Duval, busca em artigos ou dissertações contribuições para a sequência didática, faz análise de livros didáticos.

O autor aplicou um teste-diagnóstico em uma turma de 3ª série do ensino médio a fim de observar quais as estratégias de resolução de problemas propostos e as dificuldades encontradas pelos alunos ao tentar resolvê-los.

Na elaboração da sequência, didática utilizou atividades que permitissem observar as relações entre os alunos ao tratarem com um determinado objeto matemático, observando evoluções no tratamento de atividades da Matemática. Analisou, a priori, as atividades propostas, objetivando determinar o significado das variáveis escolhidas e predizer procedimentos possíveis durante as atividades.

O autor faz a discussão a respeito dos resultados encontrados, relacionando esses resultados com suas hipóteses.

Traldi Júnior (2002) encontra nos PCN respaldo para o trabalho com resolução de problemas, colocando que um problema é uma situação que exige a realização de uma sequência de ações, decisões e operações para a obtenção de resultados.

Segundo o autor, os problemas podem ser inseridos no currículo como:

a) Justificação: justificam o ensino da Matemática;
b) Motivação: despertar o interesse sobre tópicos do conteúdo matemático;
c) Recreação: uso recreativo, possibilitando que o aluno divirta-se com o que aprendeu;
d) Veículo: os problemas são veículos pelo qual um novo conceito pode ser aprendido;
e) Prática: os problemas são a prática para reforçar e ensinar conceitos e competências diretamente.

Acreditando que a maioria das pessoas sente-se mais motivada ao estudo quando é capaz de perceber que o conhecimento adquirido será útil para sua vida, o autor vê na PL uma possibilidade de trabalho nesta linha de resolução de problemas.

Seguindo a discussão teórica com base na Teoria de Registros de Representação Semióticas de Raymond Duval, o autor diferencia as representações mentais de semióticas. Enquanto as representações mentais ocultam o conjunto de imagens e mais globalmente as concepções que um indivíduo pode ter sobre um objeto, uma situação e sobre o que lhe está associado, as representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação que têm dificuldade próprias de significância e de funcionamento.

O autor cita os exemplos de Duval para representações semióticas: enunciados em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico. Destacando que não se pode considerar as apresentações semióticas como simplesmente subordinadas às representações mentais, uma vez que as representações mentais dependem de uma interiorização das semióticas.

Segundo Traldi Júnior (2002), os objetos matemáticos nem sempre são acessíveis pela experiência intuitiva imediata; é necessário dar-lhes representantes que permitam efetuar os tratamentos sobre os objetos matemáticos que dependem da representação semiótica utilizada.

Para que um sistema semiótico seja considerado um registro de representação, de acordo com Traldi Júnior (2002), ele deve permitir três atividades cognitivas:

a) Identificação da representação que consiste em a partir de um registro de representação, saber qual é o objeto matemático que está sendo referenciado;
b) Tratamento acontece quando podemos modificar a representação do objeto matemático conservando seu registro;
c) Conversão consiste na transformação de uma representação em outra usando o registro, conservando a totalidade ou somente parte da representação inicial.

Com base nos PCN, o autor fez a análise de dois livros didáticos adotados nas turmas onde aplicou o pré e o pós-teste: o livro de Dante (livro 1) e o dos autores Marcondes, Gentil e Sérgio (livro 2).

Ao fazer a análise o autor constatou que o livro 1 apresenta alguns problemas de PL e que estes são utilizados como motivação ou justificação para o ensino de sistema de inequações. O livro 2 inicia o estudos dos sistemas por definições e problemas mas não aborda problemas de PL.

O livro 1 utiliza registro de representações algébrico, gráfico e língua natural. O livro 2 utiliza registros algébricos e gráficos.

O livro 1 propõe atividades de conversão do registro em língua natural para o geométrico ou algébrico, pois apresenta problemas de PL, o livro 2 não faz isso.

Nenhum dos livros analisados propõe a coordenação entre os diversos registros de representação de um mesmo objeto.

O primeiro livro faz ligação do objeto estudado com aplicações em situações do cotidiano, pois apresenta problemas de PL enquanto o segundo não faz tal ligação.

Fazendo a análise geral dos livros o autor destaca que o livro 1 aborda PL e alguns problemas que iniciam o estudo de sistemas de inequações do 1º grau. Esses problemas são resolvidos de forma algébrica e geométrica simultaneamente e o procedimento utilizado na otimização é pelos vértices do polígono que delimita a região viável.

Também constata que os livros não propõem atividades de conversão da língua natural para a representação gráfica e dessa para a representação algébrica.

O autor aplicou um pré-teste em uma turma de 3º ano do ensino médio com os seguintes objetivos:

a) Verificar se aqueles alunos tinham disponível algumas das ferramentas necessárias para resolver problemas de PL;
b) Verificar se, caso os alunos tivessem essas ferramentas, seriam capazes de resolver problemas de PL propostos.

O teste diagnóstico foi composto de atividades de conversão da língua natural para a linguagem matemática, exercício de conversão do gráfico para a sentença aberta, resolução de um sistema de inequações e um problema de PL.

Ao analisar seus resultados, o autor constata que, apesar de estarem concluindo o ensino médio e terem recentemente estudado sistemas de inequação do 1º grau, a turma apresentou dificuldades como: conversão da língua natural para sentença matemática, conversão de sentenças matemáticas para suas representações gráficas, leitura e interpretação de gráficos, representação gráfica de inequações e resolução de sistemas de inequações.

Na elaboração da sequência didática o autor objetivou:

a) Propor atividades que permitissem ao aluno estudar sistemas de inequações do 1º grau com conversões entre os seus registros de representação: língua corrente para sentença matemática, sentença matemática para gráficos, gráficos para língua corrente;
b) Propor atividades de coordenação entre registros de representação: resolução de problemas por estratégia algébrica e geométrica simultaneamente.

A sequência didática se desenvolveu em quatro etapas:

a) Primeira: proposição de problemas que poderiam ser resolvidos usando sistemas de inequações;

b) Segunda: aula ministrada pela professora da turma sobre sistemas, com exemplos e exercícios – duas aulas de 60 minutos cada;

c) Terceira: atividades complementares propostas pelo autor – duas aulas de 60 minutos.

d) Quarta: pós-teste.

Na sessão 1, o autor propôs uma série de problemas de otimização, envolvendo sistemas de inequações, objetivando observar quais são as ferramentas que eles têm disponíveis e a partir dessas observações, introduzir o assunto sistemas de inequações do 1º grau. Cabe salientar que a professora da turma, a pedido do pesquisador, deu “dicas”, resolveu juntamente com os alunos alguns exercícios e mostrou-lhes a regra dos vértices do polígono para encontrar o ponto de máximo ou de mínimo.

As sessões 2 e 3 foram preparadas pela professora a pedido e sem a interferência do pesquisador. Cabe salientar que o pesquisador solicitou que a professora desse uma aula sobre sistemas de inequações da sua maneira habitual.

As sessões 4 e 5 serviram para que o autor complementasse, seguindo a teoria de Duval, o ensino do tópico sistemas de inequações.

A sessão 6 constituiu o pós-teste. Em análise quantitativa individual dos resultados o pesquisador percebeu que a maior dificuldade encontrada pelos alunos foi fazer a conversão da língua natural para a sentença matemática. Também observou que a sequência didática permitiu um maior número de acertos dos alunos da segunda turma. Constata assim que a sequência didática possibilitou significativa evolução no processo de ensino-aprendizagem.

Nas considerações finais, o autor busca responder às suas questões iniciais constatando que os alunos que fizeram a sequência didática, tiveram uma atitude diferente frente aos problemas de otimização, constatado que no pós-teste o número de questões em branco foi menor.

O autor conclui que a inserção de atividades que permitam o tratamento, a conversão e a coordenação entre registros de representação são relevantes no processo de ensino e aprendizagem. Também percebeu que problemas de otimização contribuem para o aprendizado do objeto sistemas de inequações.

Sobre o trabalho de Armando Traldi Júnior consideramos que está escrito e estruturado de forma clara e organizada; não apresenta embasamento matemático para o assunto PL; apresenta a discussão dos resultados do seu trabalho com base na teoria de Raymond Duval.

Parece-nos natural que os alunos da primeira turma, onde foi somente aplicado o pré-teste, não tenham obtido êxito na realização das atividades, uma vez que eles não tinham estudado problemas de PL. Igualmente é relevante considerar que os alunos da segunda turma, que participaram da sequência didática, tenham obtido mais sucesso na resolução de problemas de otimização, mas também destacamos que fizeram parte da sequência didática aulas sobre tais problemas.

4.3 Sobre a dissertação de Suzete Marisa de Almeida Paiva

O trabalho da autora foi desenvolvido na Universidade Portucalense Infante D. Henrique (Portugal). O trabalho está dividido em quatro capítulos.

O primeiro traz a introdução acompanhada de uma síntese histórica e apresenta a estrutura do texto.

No capítulo 2, disserta sobre os programas das disciplinas de Matemática A e B (no currículo português), as novas tecnologias no ensino da Matemática, interdisciplinaridade entre Matemática e TIC[4], o módulo de PL nas disciplinas de Matemática A e B.

No capítulo 3, escreve sobre o método de investigação operacional, as hipóteses da PL, os problemas de PL.

No capítulo quarto, apresenta conclusões e bibliografia consultada.

Na introdução, Paiva (2008) procura justificar a importância do seu trabalho. Segundo a autora, a PL é tema obrigatório das disciplinas de Matemática A do 11º ano e Matemática B do 12º ano do Ensino Secundário Português – Ensino Profissional.

[4] Tecnologias da Informação e Comunicação, segundo Paiva (2008).

De acordo com informações do site do Ministério da Educação de Portugal o ensino secundário compreende três cursos a serem desenvolvidos em três anos: cursos científico-humanísticos, cursos profissionais e cursos com planos de estudo próprios.

De acordo com Paiva (2008), documentos do Ministério da Educação Português sugerem uma abordagem geométrica para a solução de problemas de máximo e de mínimo, sujeitas a um conjunto de restrições. Define como objetivo primordial do estudo de PL “motivar os alunos à aprendizagem da Matemática, mostrando a eles problemas reais nos quais a geometria é atualmente usada na indústria, na economia, etc.”.

Paiva (2008) traz uma perspectiva de ensino de PL aliada à utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), argumentando que as utilizações das TIC desenvolvem a curiosidade, requisito, segundo a autora, fundamental para o desenvolvimento do gosto pela aprendizagem.

Paiva (2008) argumenta que a utilização das TIC desenvolvem capacidades que vão além das habilidades comuns de sala de aula (cálculo, compreensão de conceitos e relações matemáticas). Desperta a confiança, o espírito de tolerância e cooperação, permitindo que o aluno tenha um papel mais ativo na sala de aula, possibilitando a investigação e a formulação e teste de conjecturas próprias.

Nas páginas seguintes, a autora apresenta uma breve síntese histórica da PL, acompanhada por um texto que descreve a estrutura de sua dissertação.

O objetivo principal do ensino de Matemática, segundo Paiva (2008), deve seguir o viés de formar no aluno conhecimentos que lhe permitam resolver problemas do cotidiano. Tornando a aprendizagem significativa, na medida em que valoriza a aplicação de seus conceitos à vida real.

Os programas das disciplinas de Matemática A e B foram elaborados de forma que desenvolvam a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real, a capacidade de resolver problemas, de promover o aprofundamento da cultura científica, técnica e humanística e que permita a continuidade nos estudos.

Segundo Paiva (2008), a disciplina de Matemática B ainda objetiva desenvolver a capacidade de selecionar a Matemática relevante para cada problema da realidade. No programa de Matemática A ampliam-se os conceitos de número, os conhecimentos de geometria no plano e no espaço, de estatística e probabilidade, iniciam-se o estudo da análise infinitesimal e da história da Matemática. Já no programa de Matemática B, os alunos iniciam-se na modelagem matemática, ampliam os conhecimentos sobre probabilidade e estatística, constroem e estudam modelos discretos e contínuos.

Sobre os recursos a serem utilizados, a autora destaca que o uso de calculadoras gráficas é obrigatório para os alunos do secundário, e que estas devem ser entendidas como meio incentivador do espírito de pesquisa.

Documentos do Ministério da Educação Português, segundo a autora, sugerem a utilização exaustiva das calculadoras nas seguintes atividades matemáticas: abordagem numérica de problemas; uso de manipulação algébrica para resolver equações e inequações e posterior confirmação, usando métodos gráficos, modelagem, simulação e resolução de situações problemas, uso de métodos visuais para resolver equações e inequações que não podem ser resolvidas ou que a resolução é impraticável com métodos algébricos, entre outros.

Para a autora, as TIC representam o apoio que o aluno necessita para desenvolver seu raciocínio e a sua forma de pensar matematicamente, podendo construir generalizações concretizáveis no cotidiano.

A PL é tema obrigatório das disciplinas citadas pela autora. A abordagem sugerida por Paiva (2008) objetiva dar ao aluno ferramentas para a resolução de problemas ligados, por exemplo, aos transportes e telecomunicações, à construção civil e militar, à indústria, ao planejamento financeiro, à assistência médica e aos serviços públicos.

Segundo a autora, o módulo de PL desenvolve uma série de aptidões e competências matemáticas, entre elas:

a) A aptidão para reconhecer as vantagens na escolha de referenciais, no uso de coordenadas e de condições para modelar e resolver situações problema;
b) A capacidade de comunicar oralmente e por escrito situações problema;

Os objetivos que pretende alcançar:

a) Utilizar sistema de coordenadas para obter equações e inequações que representem lugares geométricos;
b) Relacionar os efeitos das mudanças de parâmetro no gráfico da função afim;
c) Resolver numericamente, graficamente e com recursos computacionais problemas de PL;

d) Abordar a história da PL;
e) Resolver gráfica e algebricamente sistemas de equações e inequações;
f) Utilizar recursos computacionais específicos para a gestão de planejamento;
g) Reconhecer a contribuição da Matemática na tomada de decisões;
h) Comunicar, oralmente e por escrito, aspectos do processo de trabalho e crítica dos resultados.

No capítulo 3, a autora sugere para abordagem no ensino de PL no Ensino Secundário: a formulação, resolução e pós-otimização de problemas. Nesta resolução é enfatizado o uso da calculadora gráfica e do comando Solver do Microsoft Excel, na perspectiva de possibilitar a resolução de problemas mais complexos bem como a análise crítica dos resultados.

Na aplicação do método de pesquisa operacional, Paiva (2008) identifica as seguintes fases:

a) Fase 1: formulação do problema: identificam-se a situação problematizada e seus elementos estruturais: a função objetivo e o conjunto de restrições;
b) Fase 2: construção de um modelo: consiste na reprodução das relações existentes;
c) Fase 3: obtenção da solução: é a mais técnica do método. Objetiva determinar a solução ótima, entre as soluções possíveis definidas pelo conjunto de restrições;
d) Fase 4: validação do modelo e teste de solução: é dinâmica, a medida em que o modelo é construído as hipóteses devem ser continuamente validadas. A validação pode ser feita através da análise crítica do modelo e das soluções;
e) Antes de ser implementado, o modelo precisa passar por um teste final, onde deve ser verificado se as soluções propostas possuem impacto positivo na decisão a ser tomada, isto pode ser feito comparando-se a eficiência do modelo com a que resultaria da adoção da solução proposta;
f) Fase 5: implementação da solução: compreende a execução de todos os passos para que o solução proposta seja implementada.

A autora apresenta as seguintes hipóteses para a PL: proporcionalidade, divisibilidade, não negatividade, aditividade e linearidade.

a) Proporcionalidade: segundo esta condição deve-se verificar, sempre, uma proporção direta constante entre todos os parâmetros do problema.

b) Divisibilidade: qualquer atividade a ser considerada pela PL deve ser uma grandeza divisível, de forma a evitar arredondamentos.

c) Não negatividade: é uma condição imposta a qualquer problema de PL, as variáveis de decisão não podem assumir valores negativos.

d) Aditividade: esta hipótese não permite a possibilidade da existência de termos envolvendo produto de duas ou mais variáveis.

e) Linearidade: pressupõe que o valor atribuído a cada parâmetro de uma PL seja uma constante.

Segundo a autora, no nível de ensino considerado, a escolha dos problemas de PL deve ser cuidadosa e envolver somente duas variáveis de decisão nas restrições e na função objetivo. A formulação deve ser encarada como a tradução matemática dos problemas expressos em linguagem corrente.

O processo de formulação de um problema pode ser separado em duas etapas: compreensão do problema e construção de um modelo. Para a primeira, a autora sugere a construção de uma tabela ou um esquema que agregue os dados. Na construção do modelo devem-se identificar as variáveis de decisão, a função objetivo e as restrições.

Ilustrando as etapas do processo de formulação e resolução dos problemas a autora selecionou um conjunto de problemas extraídos de manuais escolares.

A resolução gráfica de um problema de PL é frequentemente usada quando o modelo se restringe a duas variáveis de decisão, a autora apresenta o método em três passos:

a) Passo 1: representação das restrições funcionais e de não negatividade;

b) Passo 2: determinar a região admissível, formada pelo conjunto de pontos (x, y) pertencentes ao plano xy. Como temos as restrições definindo semiplanos, esta região constitui em termos geométricos, um domínio poliédrico convexo, que resulta da intersecção dos semiplanos;

c) Passo 3 : Obtenção da solução ótima, determinação dos pontos da região que se ajusta à solução do problema.

A autora enuncia, sem demonstração, o teorema básico da PL, que garante que, se a região é limitada, a função objetivo tem um máximo e um mínimo ocorrendo em pelo menos um vértice desta região.

Nas seções seguintes, a autora apresenta instruções de utilização de calculadora gráficas e do comando Solver do Microsoft Excel para resolução de problemas de PL.

Na pós-otimização, a autora descreve o procedimento para a adição de novas restrições e faz a análise de três situações possíveis sobre a nova restrição: não altera a região admissível (mantendo a solução otimizada), altera a região admissível (mas não a solução ótima), altera a região e também a solução.

Na conclusão, Paiva (2008) descreve resumidamente os capítulos do seu trabalho e por fim sugere a inserção de um novo módulo no 12º ano que trabalhe a relação entre o método analítico e o Simplex na resolução de problemas de PL com duas variáveis. Para tanto a autora indica a introdução de conceitos de cálculo matricial (necessário ao desenvolvimento do Simplex).

O texto da autora é claro e objetivo. Paiva (2008), seguindo as orientações do Ministério da Educação de Portugal, sugere uma abordagem de PL que integre o uso de tecnologias digitais (calculadoras e computadores). A escolha dos problemas que ilustram seu trabalho é adequada, são práticos e ligados a áreas de interesse de cursos técnicos, de nível adequado que podem permitir o entendimento aos alunos do ensino secundário (médio).

Contudo a dissertação não apresenta a testagem e os resultados de uma possível aplicação da metodologia descrita para uma abordagem de PL no ensino.

Parece bastante apropriado justificar o ensino de conceitos básicos sobre cálculo matricial a fim de desenvolver estudos sobre o método Simplex, como apontado pela autora.

4.4 Sobre a dissertação de Jorge Nazareno Batista Melo

O trabalho de Melo (2012) está dividido em seis capítulos. Após a introdução, o autor apresenta no capítulo 2 a justificativa para sua pesquisa. No capítulo 3 são apresentados fundamentos da PL, abordando aspectos históricos. No capítulo 4 o autor apresenta a fundamentação teórica da resolução de problemas. No capítulo 5 é apresentada a aplicação da experiência prática. No capítulo 6 Melo (2012) apresenta as aulas e suas análises. Por fim apresenta suas conclusões.

O autor justifica sua pesquisa – baseando-se na sua experiência como professor da educação básica – da necessidade de apresentar aos alunos uma Matemática mais interessante e relacionada aos seus aspectos socioculturais.

Melo (2012) procurou localizar uma ferramenta que valorizasse e justificasse o estudo de matrizes, determinantes e sistemas no segundo ano do ensino médio. Segundo Melo (2012) o conteúdo de PL é uma extensão natural e aprofundada da álgebra linear ensinada na educação básica. O autor justifica a utilização da metodologia de resolução de problemas baseado na necessidade histórica do desenvolvimento de PL: a resolução de problemas de aplicação em diversas áreas do conhecimento.

O autor aponta nos Parâmetros Curriculares Nacionais indicações que, segundo ele, fundamentam suas escolhas. Também menciona a utilização de um software gráfico, o que segundo o autor, motivaria os alunos.

No capítulo 3, Melo (2012) inicia um apanhado histórico da PL. Segundo o autor, citando D'Ambrósio, é um erro desvencilhar a Matemática de outras atividades humanas. Fazendo este apanhado histórico, Melo (2012) aponta que a PL remonta à antiguidade, pois Euclides se confrontou com o problema de maximizar ou minimizar áreas. Na sequência, Melo (2012) faz um apanhado cronológico da história da PL desde a necessidade surgida durante a Segunda Guerra Mundial até a criação do método Simplex.

Na sequência do capítulo, o autor apresenta o problema de PL através de exemplos. Neste, o autor indica os passos a serem seguidos para a resolução. Define o que é uma região viável, a solução ótima e o que são os pontos extremos. Melo (2012) apresenta o teorema básico da PL e o método geométrico para a resolução. Retornando aos problemas exemplificados, Melo (2012) constrói os gráficos e define as regiões admissíveis, para o autor: regiões factíveis.

Melo (2012) resume os casos de problemas de PL em quatro categorias: problemas com uma solução ótima, com múltiplas soluções, problemas cujas soluções são inviáveis ou a região admissível é vazia, situações onde a solução é ilimitada. Na sequência, Melo (2012) apresenta um exemplo de cada tipo de solução.

No capítulo 4 Melo (2012) escreve sobre sua metodologia de trabalho: a resolução de problemas. Segundo o autor o ensino de Matemática através deste viés vem ao encontro das necessidades de tornar esta ciência aplicada e significativa ao contexto ensino-aprendizagem.

Na sessão seguinte, Melo (2012) faz um breve histórico sobre o ensino de Matemática desde a antiguidade, onde a resolução de problemas era privilegiada, até os dias atuais. Melo (2012) coloca como objetivos da resolução de problemas: fazer o aluno pensar criativamente, desenvolver o raciocínio, ensinar o aluno a enfrentar situações novas, oportunizar ao aluno o envolvimento com aplicações da Matemática.

Melo (2012), baseado em Polya, apresenta um esquema para a resolução de problemas: compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano, fazer a verificação. No decorrer do capítulo, o autor discute a metodologia de resolução de problemas com base em vários autores. Aborda detalhadamente as etapas de resolução de um problema, as habilidades desenvolvidas através deste fazer e as dificuldades encontradas pelo aluno quando este está confrontando-se com um problema.

O capítulo 5 começa com o autor relatando a preparação de sua sequência de atividades. Sua prática ocorreu no Colégio Militar de Porto Alegre com alunos do 2º ano do ensino médio. As atividades ocorreram no turno inverso às aulas. Melo (2012) aponta que vários problemas foram sugeridos para a sequência e o critério de escolha foi a proximidade dos temas abordados nos problemas com a vivência dos alunos. As atividades propostas pelo autor ocuparam 8 aulas de 45 minutos.

Na primeira aula, Melo (2012) abordou um problema de maximização: “Venda de bolos”. Introduziu o problema com um vídeo sobre a produção de bolos, em seguida os alunos, livremente, tentaram resolver a situação. Primeiro, de acordo com Melo (2012), os alunos inclinaram suas ideias no sentido de que produzir o maior número possível do bolo mais caro daria o rendimento máximo. Segundo o autor, aos poucos, os alunos perceberam as restrições impostas pelo problema. Melo (2012) notou que a maior dificuldade dos alunos foi organizar os dados. O autor orientou seus alunos a resolverem o problema seguindo os passos de Polya.

Na segunda aula Melo, (2012) retornou ao problema apresentado na aula anterior, encaminhando os alunos a descrever matematicamente o problema através de um sistema de inequações – segundo o autor esse conteúdo estava sendo estudado pelos alunos. Segundo o autor a necessidade de representar os dados dos problemas por variáveis surgiu espontaneamente entre os estudantes.

Na terceira aula, Melo (2012) apresentou aos seus alunos um histórico da PL e algumas aplicações. Segundo o autor, esse tema despertou bastante interesse na turma.

Na quarta aula, Melo (2012) apresentou aos alunos um novo problema: “Dieta”. Retomou a situação abordada na primeira aula e introduziu o método geométrico para solução de problemas de PL em duas variáveis. Segundo Melo (2012), a apresentação deste novo problema foi um facilitador, no sentido em que os alunos perceberam a necessidade de organizar os dados através de modelos matemáticos. Nessa aula o autor iniciou uma revisão sobre inequações do primeiro grau através de uma lista de exercícios.

Na quinta aula, os alunos foram apresentados ao software Graphmática – segundo Melo (2012), o aplicativo pretendido era o Winplot, que não pôde ser usado por uma incompatibilidade técnica com os computadores do laboratório. Nessa aula os alunos aprenderam a usar os comandos do software e o utilizaram para modelar graficamente os problemas apresentados – o uso do Graphmática, segundo Melo (2012), despertou interesse na turma.

Na sexta aula, Melo (2012) apresentou o teorema básico da PL sem demonstração. Os alunos utilizaram as representações gráficas elaboradas na aula anterior, calcularam as intersecções das retas resolvendo sistemas de equações e procuraram nos vértices das regiões poligonais os máximos das funções dos problemas estudados.

Segundo Melo (2012), foi necessária uma intervenção do professor no sentido de fazer os alunos perceberem que o máximo/mínimo é atingido nos vértices da região poligonal, para isso o autor utilizou o software para esboçar retas paralelas através da variação de parâmetros da função que os alunos pretendiam maximizar.

Na sétima aula, foi disponibilizada uma lista de exercícios com problemas de PL para que os alunos resolvessem. De acordo com o autor, os alunos, em sua grande maioria, não tiveram dificuldades com os exercícios.

Na oitava aula, apresentou aos seus alunos problemas de PL com três variáveis. Apesar dos alunos não terem resolvido as atividades até o final, elaboraram, de acordo com o autor, corretamente os modelos matemáticos. Segundo Melo (2012), o objetivo desta aula era dar ciência aos alunos no método Simplex, do comando Solver do Microsoft Excel e das limitações do software Graphmática na resolução geométrica de problemas com três variáveis.

Na conclusão, Melo (2012) faz uma avaliação positiva de seu trabalho. Aponta que o conteúdo de PL deve ser abordado no ensino médio e que a metodologia de resolução de problemas foi bastante adequada à proposta. O autor ainda cita que as condições da escola onde aplicou a proposta foram favoráveis ao desenvolvimento do trabalho.

No final do trabalho de Melo (2012) são apresentadas as referências bibliográficas e a sequência de atividades como sugestão para aplicação na sala de aula.

Consideramos que o trabalho de Jorge Nazareno Batista Melo (2012) está bem estruturado, é claro e apresenta aos professores da educação básica um excelente exemplo de aproximação da Matemática à realidade dos alunos. A dissertação apresenta um bom embasamento teórico-didático e matemático, as atividades propostas parecem bastantes adequadas.

Analisamos a dissertação de Melo (2012) por uma sugestão dada pela comissão de pós-graduação quando ela aprovou nosso plano de trabalho. Desconhecíamos o trabalho de Melo quando escolhemos o tema de nossa pesquisa.

Apesar de julgarmos bastante adequado o trabalho de Melo (2012), optamos por caminhos diferentes. Apesar de concordarmos com Melo (2012) em que os estudantes do ensino médio ainda não têm maturidade matemática suficiente para uma demonstração do teorema básico da PL optamos por levar nossos alunos a um convencimento do teorema através de nossas atividades. Evitamos o trabalho com listas de exercícios, por acreditarmos que nossa sequência de atividades deveria se diferenciar das já tradicionais aulas de Matemática. Ainda optamos por não utilizar problemas encontrados em livros didáticos destinados ao ensino superior por acreditarmos que eles, apesar de abordarem temas ligados ao cotidiano, ainda estariam distante da realidade de nossos alunos.

5. Sobre a análise de livros didáticos

Levando em consideração a relevância dos livros didáticos no ensino de Matemática, pesquisamos se os indicados no "Guia de livros didáticos" do Programa Nacional do Livro Didático 2012 (PNLD 2012) apresentavam conteúdo sobre PL. Este guia, elaborado pelo Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica e Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, deve servir de base para que os professores façam as escolhas do livro a ser adotado nas escolas. O documento traz resenha, comentários e o índice dos livros. Na tabela 6 relacionamos as coleções apresentadas no guia.

Coleção - Editora	Autor (es)	Aborda PL?
Conexões com a matemática - Moderna	Juliane Matsubara Barroso	Não
Matemática: contexto & aplicações – Ática	Luiz Roberto Dante	Sim
Matemática: Paiva – Moderna	Manoel Paiva	Não
Matemática: Ciência e aplicações – Saraiva	David Degenszajn Gelson Iezzi Nilze de Almeida Osvaldo Dolce Roberto Périgo	Sim
Matemática: Ciência Linguagem e tecnologia – Scipione	Jackson Ribeiro	Não
Matemática: Ensino médio – Saraiva	Maria Ignez Diniz Kátia Stocco Smole	Não
Novo olhar: Matemática - FTD	Joamir Souza	Não

Tabela 6: Coleções do PNLD 2012

Na sequência apresentamos a análise de parte das duas coleções que trazem conteúdo sobre PL.

5.1 Sobre o livro de Luiz Roberto Dante

Encontramos no livro volume 2 da coleção “Matemática: contextos e aplicações”, de Luiz Roberto Dante, Editora Ática (2011), uma referência sobre PL .

O autor traz no capítulo nove, que trata sobre sistemas lineares, duas aplicações destes. O tópico onze deste capítulo é intitulado “Introdução à Programação Linear”.

Dante (2011) inicia o tópico sobre PL destacando a importância dos sistemas de equações e inequações na resolução de muitos problemas de economia, transportes, dietas, etc. O autor apresenta como motivação para estudo do tópico que, em muitas destas situações é comum a necessidade de se calcular o máximo ou mínimo de uma função que está sujeita a restrições.

Em seguida o autor inicia o estudo do método gráfico para PL com o seguinte problema:

> “Dois Produtos P e Q contêm as vitaminas A, B e C nas quantidades indicadas no quadro ao lado. A última coluna indica a quantidade mínima necessária de cada vitamina para uma alimentação sadia, e a última linha indica o preço de cada produto por unidade. Que quantidade de cada produto uma dieta deve conter para que proporcione uma alimentação sadia como o mínimo custo?” (DANTE, 2011, p.166).

	P	**Q**	
A	3	1	12
B	3	4	30
C	2	7	28
	3	2	

Dante (2011) traz as seguintes orientações para a resolução de um problema de PL pelo método gráfico:

1º) Estabelecer a função que se quer maximinar/minimizar: função objetivo;

2º) Transcrever as restrições do problema como um sistema de inequações;

3º) Esboçar o gráfico da região poligonal correspondente às restrições determinando as coordenadas dos vértices;

4º) Calcular o valor da função objetivo nos vértices;

5º) Constatar os valores máximos e mínimos;

6º) Dar a solução do problema.

Na continuidade, Dante (2011) apresenta a resolução de um exercício que solicita a determinação do máximo da função expressa por $2x + y$ sujeita às restrições:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 3 \\ 4x + y \leq 6 \end{cases}$$

É comum, quando trabalhamos no esboço de curvas com a conversão do registro algébrico para o gráfico associar-se no plano cartesiano um par de números a um ponto. Duval (2011) chama esse procedimento de "abordagem de ponto". Segundo o autor isso traz limitações:

> "É por meio desta abordagem que são introduzidas e definidas as representações gráficas. Em referência aos dois eixos graduados, um par de números permite identificar um ponto (e, inversamente, um ponto se traduz por um par de números). Este modo associativo limita-se a alguns valores particulares e aos pontos marcados no plano referencial." (DUVAL, 2011, p. 98).

Dante (2011) traz para este exercício uma abordagem ponto a ponto. Segundo Duval (2011), essa abordagem favorece quando se quer traçar o gráfico de uma função polinomial do primeiro grau. É ainda interessante quando se quer fazer a leitura das coordenadas de algum ponto de interesse como a intersecção com eixos ou máximos e mínimos.

Dante (2011) em seguida apresenta um problema de economia:

> "Um comerciante vende dois tipos de artigos A e B. Na venda do artigo A tem um lucro de 20 por unidade, e na venda do artigo B tem um lucro de 30 por unidade. Em seu depósito só cabem 100 artigos e sabe-se que por compromissos já assumidos ele venderá pelo menos 15 artigos do tipo A e 25 do tipo B. O distribuidor pode entregar ao comerciante, no máximo, 60 artigos do tipo A e 50 artigos do tipo B. Quantos artigos de cada tipo deverá o comerciante encomendar ao distribuidor para que, supondo que venda todos, obtenha o lucro máximo?" (DANTE, 2011, p.167).

Dante (2011) começa a resolver o problema estabelecendo a função objetivo com uma breve explicação de como proceder para tal. Em seguida estabelece as restrições, esboça os gráficos e calcula, através de uma tabela, o valor da função objetivo para cada vértice. Destacamos que nesta resolução não é exemplificado como encontrar os vértices da região poligonal.

Dante cita durante a resolução: "As coordenadas dos vértices da região poligonal resultante se encontram facilmente resolvendo os pares de equações que correspondem aos lados que determinam o vértice." (DANTE, 2011, p. 168). Pensamos ser razoável não apresentar a resolução dos sistemas neste exemplo, visto que essa sessão sobre PL ilustra uma aplicação dentro do capítulo dos sistemas lineares.

Na sequência, Dante (2011) apresenta a resolução do problema da dieta, já citado. Segue os procedimentos descritos e apresenta os sistemas que determinam os vértices, porém não os resolve.

Nos exercícios, Dante (2011) apresenta um grupo de atividades que solicitam o esboço dos gráficos de sistemas de inequações, em um segundo exercício são dadas a função objetivo e três conjuntos de restrições para que o aluno calcule o máximo em cada caso.

Por fim, Dante (2011) apresenta um problema de PL e um “Desafio em dupla” que consiste em um problema em que os alunos deverão fazer a resolução de um sistema.

Sobre o conteúdo de PL apresentado por Dante (2011), acreditamos que possa fornecer subsídios iniciais para o professor que deseja trabalhar esse conteúdo com seus alunos. Porém o aprofundamento no assunto requer a busca de outros referenciais bibliográficos, visto que o autor apresenta apenas um problema para que os alunos resolvam.

Sobre o problema da dieta apresentado como exemplo pelo autor, acreditamos que ele seja confuso e de difícil compreensão para os alunos, já que é um problema inicial de motivação. Acreditamos que a conversão da tabela em um conjunto de equações e inequações seja uma barreira à resolução do problema.

O autor traz pronto o roteiro de resolução dos problemas, acreditamos que a construção, pelos alunos, de um algoritmo de resolução, possa dar mais significado ao processo de ensino e aprendizagem de PL na educação básica.

Os exercícios apresentados requerem somente uma conversão da linguagem algébrica para a gráfica, o que de acordo com Duval não garante a compreensão. Ainda a abordagem ponto a ponto utilizada por Dante pode, segundo Duval (2011), favorecer a procura por máximos ou mínimos. Porém não é feita uma abordagem de interpretação global das figuras. Duval (2011) coloca sobre a abordagem de interpretação global:

> “O conjunto traçado/eixos forma uma imagem que representa um **objeto** descrito por uma expressão algébrica. Toda modificação desta imagem, que leva a uma modificação na expressão algébrica correspondente, determina uma variável visual pertinente para a interpretação gráfica. É importante, deste modo, identificar todas as modificações pertinentes possíveis desta imagem, quer dizer, ver as modificações conjuntas da imagem e da expressão algébrica: **isto significa proceder a uma** análise de congruência entre dois registros de apresentação de um objeto ou de uma informação. Com esta abordagem **não estamos mais na presença da associação “um ponto - um par de números”, mas na presença da associação variável visual de representação - unidade significativa da expressão algébrica”.** (DUVAL, 2011, p. 99).

5.2 Sobre o livro de David Degenszajn, Gelson Iezzi, Nilze de Almeida, Osvaldo Dolce e Roberto Périgo

Encontramos no livro volume 3 da coleção Matemática: ciência e aplicações, dos autores David Degenszajn, Gelson Iezzi, Nilze de Almeida, Osvaldo Dolce e Roberto Périgo, Editora Saraiva (2011), uma referência sobre PL .

Os autores trazem no capítulo dois, que trata sobre a reta, logo após o tópico sobre sistemas de inequações, uma pequena apresentação sobre PL.

Degenszajn et al. (2011) iniciam o tópico sobre PL apresentando o seguinte problema:

> "Considere a seguinte situação: uma empresa fabrica dois tipos de boxes de vidro (8 mm) para banheiros, o transparente, cujo preço unitário de custo, no tamanho padrão, é de R$ 200,00 e colorido (fumê ou verde), cujo preço unitário de custo, no tamanho padrão é R$ 300,00. As restrições financeiras da empresa permitem que ela gaste, semanalmente, no máximo, R$ 9000,00 para fabricar os boxes. Sua capacidade produtiva é de até 32 boxes por semana.
>
> Os boxes são vendidos aos preços unitários de R$ 280,00 o transparente e R$ 360 o colorido. Quantos boxes de cada tipo devem ser fabricados e vendidos durante a semana, a fim de maximizar a receita da empresa?"(DEGENSZAJN et al., 2011, p.62)

Na sequência, Degenszajn et al. (2011) apresentam o modelo matemático do problema e a representação gráfica.

Sobre o teorema básico da PL, os autores apontam:

> "Por meio de argumentos do cálculo diferencial e integral, é possível mostrar que função $R(x,y)$, assume seu valor máximo quando x e y são substituídos pelas coordenadas de um dos vértices do quadrilátero $OPQR$. (DEGENSZAJN et al., 2011, p.63)

Em seguida são calculados os valores da função que maximiza os rendimentos da empresa nos vértices da região poligonal e a solução do problema é apresentada.

Os autores definem PL da seguinte forma:

> "Programação linear é uma técnica de planejamento em pesquisa operacional presente em vários ramos da atividade humana. Em linhas gerais, trata de problemas de otimização: como distribuir recursos limitados para atender um objetivo específico, que, em geral, é a maximização da receita de uma empresa." (DEGENSZAJN et al., 2011, p.63)

No final da apresentação, os autores citam alguns exemplos de aplicação de PL (formulação de composição de alimentos, composição de tabelas e horários de funcionários, seleção de rotas e elaboração de logísticas que permitam redução de custos) e uma lista de endereços da internet onde o estudante pode pesquisar sobre PL.

Sobre o conteúdo de PL apresentado pelos autores, consideramos tratar-se de uma breve apresentação do tema. O texto é claro e o problema apresentado parece ser adequado. O cálculo diferencial e integral é citado como justificativa para o teorema – consideramos que esta área da Matemática pode ser desconhecida para estudantes do ensino médio. Embora não seja proposto nenhum exercício aos alunos, há referências que indicam onde pesquisar sobre PL. Embora o texto apresentado seja bastante superficial, pode ser um indicativo para o professor que tenha interesse em desenvolver com seus alunos um estudo sobre o tema PL.

6. Sobre a sequência de atividades

A sequência de atividades foi oferecida, na modalidade de oficina, aos estudantes do ensino médio do Centro de Ensino Médio Pastor Dohms[5] – Unidade Camaquã. Esta modalidade – as oficinas – oportunizou aos alunos da escola aulas no turno inverso. Foram oferecidas 20 horas de aulas em 8 encontros. A adesão à oficina foi por convite às turmas do ensino médio e participaram, inicialmente, 20 alunos.

No decorrer das oficinas houve, uma mudança na obrigatoriedade do cumprimento de horas-atividade pelo aluno, com isso alguns estudantes, principalmente os do 3º ano, deixaram de participar das oficinas. Desse modo, o número de participantes variou durante a sequência. Dez alunos estiveram presentes na última aula e nove alunos participaram de todas as aulas.

A sequência didática foi pensada de modo a levar os estudantes a conjecturarem e elaborarem conclusões ao longo das atividades. Privilegiamos o trabalho em grupos, por entendermos, baseados nas orientações do Ministério da Educação, que esse tipo de trabalho favorece o desenvolvimento do raciocínio. Encontramos em Brasil (2000) que trabalhar em grupo produz flexibilidades no pensamento do aluno, auxilia-o a desenvolver a autoconfiança necessária para se engajar numa atividade, na aceitação do outro, na divisão de trabalho, na responsabilidade e na comunicação com os colegas. Ao fazer parte de uma equipe o aluno exercita a autodisciplina e o desenvolvimento da autonomia e do automonitoramento.

Privilegiamos, em nossas atividades, a resolução de problemas. Elaboramos para a sequência didática cinco problemas sobre PL, procuramos levar em consideração temas de interesses dos estudantes. Com base nesses problemas desenvolvemos todas as nossas atividades.

A resolução de problemas, segundo Brasil (2000), é elemento central para o ensino de Matemática, o pensar e o fazer se articulam e se desenvolvem quando o aluno está engajado ativamente no confronto com desafios. Essas competências não se desenvolvem quando propomos ao aluno apenas exercícios de aplicação de conceitos e técnicas matemáticas. Propondo apenas exercícios o aluno busca na memória uma atividade semelhante e desenvolve passos comparáveis aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em diferentes ou mais complexas situações.

[5] O Centro de Ensino Médio Pastor Dohms é uma entidade privada de ensino, confessional, ligado à IECLB e mantido pela CEPA - Comunidade Evangélica de Porto Alegre.

Iniciamos nossas atividades sem nenhuma teoria, queríamos com nossa proposta despertar nos alunos a percepção da necessidade de um método para resolução de problemas de otimização. A teoria foi desenvolvida enquanto aplicávamos a sequência, conjuntamente com uma revisão de conteúdos.

Encaminhamos nossos alunos, através de uma sequência de atividades, a conjecturarem sobre o teorema básico da PL. Para isso utilizamos recursos do software GeoGebra. Escolhemos esse aplicativo por dois motivos: ele possui uma ferramenta chamada “controle deslizante” que permite a variação de parâmetros; em segundo lugar levamos em consideração a familiaridade dos estudantes com o software – os alunos já trabalharam com o GeoGebra.

Acreditamos, baseados em Brasil (2000), que nossos objetivos estão de acordo com as orientações oficiais, uma vez que estas recomendam que o aluno faça e valide conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

As atividades oportunizaram que os alunos criassem seu próprio algoritmo para a resolução de problemas de PL. Acreditamos que isso favoreça o aprendizado, nosso entendimento aponta no sentido de que a mecanização e memorização de procedimentos e algoritmos prontos sejam prejudiciais ao desenvolvimento do aluno.

Enfim, nossa proposta foi elaborada a fim de nos dar suporte para respondermos à questão norteadora desta pesquisa – citada na introdução. Acreditamos, como veremos no capítulo seguinte, que os resultados de nossa proposta de atividades foram satisfatórios. No capítulo sete descrevemos e analisamos, com base na teoria de Duval, os oito encontros. As análises foram feitas através da coleta do material escrito produzido pelos alunos e pela filmagem dos encontros.

7. Sobre as aulas

Ressaltamos que esta sequência de atividades, além de ser objetivo desta dissertação, também foi parte do estágio obrigatório exigido pela disciplina MEM 31 – Estágio supervisionado.

A elaboração e aplicação das atividades foram supervisionadas pela Professora Dra. Luisa Rodriguez Doering. A aplicação foi autorizada pela direção do Centro de Ensino Médio Pastor Dohms – Unidade Camaquã e os estudantes participaram da oficina devidamente autorizados pelos seus responsáveis, mediante assinatura do termo de consentimento informado. Passamos a análise das aulas.

7.1 Análises da aula 1

Esta aula teve por objetivo motivar os alunos a modelar e resolver problemas de PL, inicialmente sem interferência do professor, de modo que os alunos buscassem estratégias de resolução intuitivas.

Esperávamos que os alunos buscassem a solução ótima das mais variadas maneiras, como a montagem de tabelas, por exemplo, sem a utilização dos recursos da PL.

Ainda objetivamos que os alunos, de acordo com a teoria de Duval, fizessem a conversão da língua natural para a linguagem matemática.

Na aula 1 foram propostos dois problemas para a escolha dos alunos. Tais atividades tinham uma estrutura semelhante e chamaram a atenção dos estudantes de acordo com seus interesses (problema da “Corrida maluca” e “Dieta dos sonhos”).

A dieta dos sonhos

Na dieta de chocolate da Dra. Chocólatra, o importante é maximizar as calorias.

A Dra. Chocólatra sabe que cada barra de 25 g do chocolate Nestlé Classic – Branco fornece 140 calorias e cada barra de 25 g do chocolate Nestlé Classic – Meio amargo 127 calorias.

Apesar de adorar chocolate, a Dra. Chocólatra não recomenda que sejam ingeridas mais do que míseras quinze dessas barras de chocolate por dia.

Também há a recomendação de que se ingiram, no mínimo, duas barras de chocolate branco por dia.

A dieta de chocolate da Dra. Chocólatra recomenda que não sejam ingeridas mais do que 25 gramas de proteínas por dia. A Dra. sabe que cada barra do chocolate Nestlé Classic - Branco fornece 1,8 gramas de proteína e cada barra do chocolate Nestlé Classic – Meio amargo 1,4 gramas de proteína.

Quantas barras de cada de chocolate devem ser ingeridas para que se obtenha o máximo de calorias possíveis nessa dieta da Dra. Chocólatra?

A Corrida Maluca

Na Corrida Maluca o importante é maximizar a quantidade de pontos.

Para pontuar Dick Vigarista pode escolher entre duas pistas. Cada volta na pista 1 é percorrida em exatamente 4 minutos e cada volta na pista 2 é percorrida em 3 minutos. Ele pode percorrer (ao todo), no máximo, 15 voltas, sendo que precisa dar, no mínimo, 2 voltas na pista 2. A corrida termina em, no máximo, 50 minutos. A cada volta dada na pista 1 ele ganha 5 pontos e a cada volta na pista 2 ganha 4 pontos.

Qual a estratégia que Dick Vigarista deve escolher para maximizar a quantidade de pontos para, finalmente sem trapaças, subir ao pódio?

Estas atividades objetivaram, além de motivar o estudo de uma técnica para resolver problemas de PL, averiguar quais estratégias de resolução os alunos usariam.

Para o desenvolvimento de competências gerais e o conhecimento em Matemática, as propostas dos PCN privilegiam o trabalho com situações problemas, preferencialmente com uma abordagem de situações reais.

De acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2006, p.129) “A **resolução de problemas** é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado".

Nestas atividades os alunos realizaram a conversão dos problemas escritos em língua natural para a linguagem matemática. De acordo com Duval (2003), a compreensão matemática está ligada ao fato de se dispor de ao menos dois registros de representação diferentes, essa é a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado.

Constatamos que os alunos tentaram encontrar a solução dos problemas por tentativa e erro. Dois grupos que trabalharam no problema da corrida foram questionados sobre a certeza de que a resposta que encontraram era a combinação que dava a maior quantidade de pontos. Os alunos responderam esse questionamento procurando novas soluções.

Após algum tempo, sugerimos aos alunos que montassem uma tabela a fim de organizar os dados. A sugestão foi bem recebida pelos estudantes, que logo confirmaram a solução que já haviam encontrado.

Após essa fase, discutimos sobre a eficácia do método de organização dos dados em tabelas. Os alunos concordaram que isso só foi possível pela estrutura simples dos problemas e pela quantidade limitada de dados, evidenciando então a necessidade de estudo de um método mais eficaz.

A figura 11 mostra a resolução da aluna VLRS.

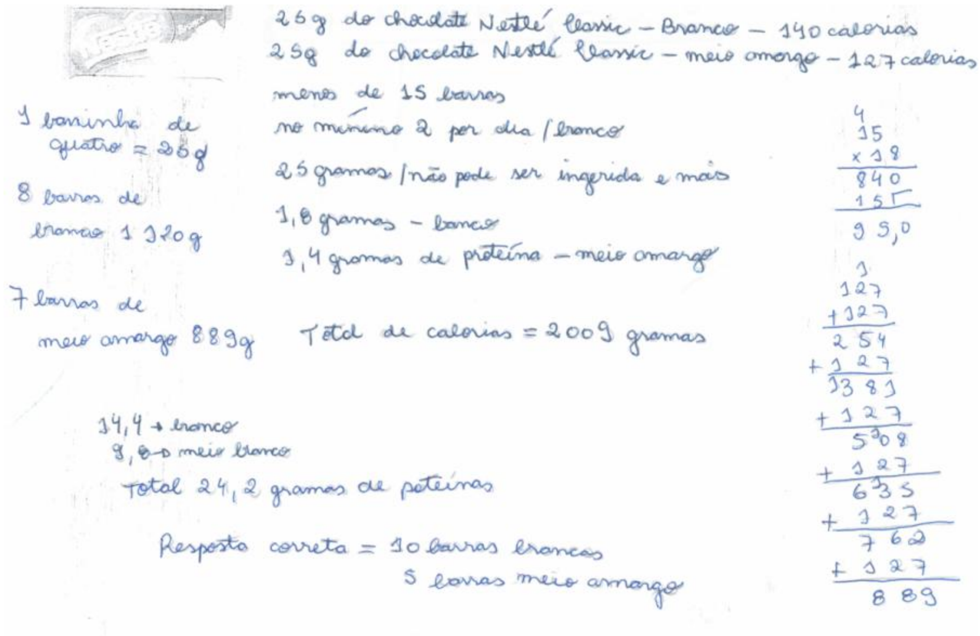


Figura 11: Resolução da aluna VLRS

Na resolução, a aluna transcreve de maneira simplificada os dados do problema. Destacamos que a aluna não faz uso da multiplicação para obter o resultado 127×7, mas sim realiza a soma das parcelas para visualizar, a cada etapa da soma, a quantidade de calorias obtidas pela ingestão de barras de chocolate branco. Este fato foi usado pelo professor no convencimento da necessidade do estudo de uma técnica que permitisse a obtenção de resultados mais precisos.

Ainda destacamos que, na escrita da aluna, nenhum cálculo indica a obtenção da resposta correta; ressaltamos que os alunos estavam trabalhando em grupos, discutindo as possibilidades de resolução em conjunto com os colegas.

A figura 12 mostra a tabela da aluna VLRS.

x Barras Choc. Brancas	y Barras M. Amargo	Proteínas	Calorias
2	13	B - 3,6 g A - 18,2 g =21,8 g	B - 280 g A - 1651 g = 1931 g
3	12	B - 5,4 g A - 16,8 g =22,2 g	B - 420 g A - 1524 g = 1944 g
4	11	B - 7,2 g A - 15,4 g =22,6 g	B - 560 g A - 1397 g = 1957 g
5	10	B - 9 g A - 14 g =23 g	B - 700 g A - 1270 g = 1970 g
6	9	B - 10,8 g A - 12,6 g =23,4 g	B - 840 g A - 1143 g = 1983 g
7	8	B - 12,6 g A - 11,2 g =23,8 g	B - 980 g A - 1016 g = 1996 g
8	7	B - 14,4 g A - 9,8 g =24,2 g	B - 1120 g A - 889 g = 2009 g
9	6	B - 16,2 g A - 8,4 g = 24,6 g	B - 1260 g A - 762 g = 2022 g
10	5	B - 18 g A - 7 g = 25 g	B - 1400 g A - 635 g = 2035 g

Figura 12: Tabela baseada nas orientações do professor

Para que montassem a tabela, sugerimos que os alunos dispusessem os dados de uma variável de forma crescente e o da outra de maneira decrescente. Observamos na tabela acima que a aluna seguiu esta orientação, fazendo as barras brancas (x) variarem de 2 a 10 e as barras de chocolate meio amargo (y) variarem de 13 a 5. A aluna fez a tabela de forma que $x + y = 15$ e calculou a quantidade de proteínas e calorias para cada linha da tabela, até obter a combinação que fornece o máximo de calorias, sem extrapolar o limite de 25 gramas de proteínas.

Novamente aqui não se constata a escrita da linha em que $x = 11$ e $y = 4$, combinação que forneceria 2048 calorias extrapolando as 25 gramas de proteína (25,4 g).

Acreditamos que os objetivos propostos para a atividade foram alcançados, já que os alunos aceitaram as propostas de trabalho, demonstraram interesse em resolver os problemas e buscaram estratégias de resolução. Também demonstram através de falas que compreenderam a limitação no uso das tabelas e a necessidade de estudar um método mais eficaz para a resolução de problemas de PL.

Através da análise do material escrito, constatamos que os 12 alunos resolveram os problemas realizando duas conversões: da escrita em língua natural do problema para a linguagem matemática (realizada de forma livre) e desta para a tabela (de forma orientada). Os alunos obtiveram, dessa forma, dois registros diferentes da resolução problema o que possibilita para Duval (2003), como citado anteriormente, a compreensão em Matemática.

7.2 Análises da aula 2

A atividade inicial da aula 2 propõe que os alunos modelem o problema da aula anterior utilizando para isso expressões matemáticas.

Modele o problema da aula anterior usando expressões matemáticas.

O objetivo desta aula era levar os alunos a modelar matematicamente os problemas da aula anterior através de equações e inequações.

Esperávamos que a compreensão do problema gerasse a percepção da necessidade do uso das inequações para a modelagem; esperávamos alguma resistência ao seu uso já que é esse é um tema pouco abordado na educação básica. Isto ocorreu, em parte, já que um grupo de alunos utilizou a definição de desigualdade para modelar os problemas, entendendo que as expressões "no máximo" e "no mínimo" só poderiam ser expressas por uma igualdade se somassem uma constante a um dos membros das equações – utilizaram, por exemplo, $x + y + k = 15$ ao invés de $x + y \leq 15$. O que não está errado, mas não facilita o desenvolvimento algébrico uma vez que acresce mais uma variável (k).

Como esta parte da tarefa foi realizada de forma livre, obtivemos uma variedade de respostas. Como por exemplo:

Transcrição da resposta da aluna CH sobre o problema "Corrida Maluca": *"Para montarmos essa equação temos x como pista 1 e y para pista 2, sendo obrigatoriamente 2 voltas na pista y. $y \geq 2$"* O que mostra que a aluna compreendeu que a expressão "no mínimo 2 voltas na pista 2" deve ser traduzida em linguagem matemática por uma inequação.

Transcrição das respostas das alunas VLRS, JTK e NOR ao problema “Dieta dos sonhos”: *“Na dieta do chocolate da Dra. Chocólatra, o importante é maximizar as calorias. Então para obter o número máximo de 15 barras, sendo que no mínimo tem que ser utilizado no mínimo 2 barras de chocolate branco (y), podendo usar chocolate meio amargo (x), mas não pode ultrapassar 25 gramas de proteínas. Utilizando os seguintes dados fizemos uma equação. Cada barra de 6 quadrinhos tem 25g do chocolate branco – 140 calorias/barra, chocolate meio amargo 25g – 127 calorias.”*

$$x + y \leq 15 \rightarrow \textit{barras}$$

$$1{,}40x + 1{,}8y \leq 25 \rightarrow \textit{calorias}$$

Verificamos na resposta das alunas uma reescrita simplificada do problema e uma transcrição para a linguagem matemática (inequações). Constatamos que as alunas não formularam todas as equações e inequações que modelam o problema, uma vez que não mencionaram a restrição de comer no mínimo 2 barras de chocolate branco por dia, a restrição de termos variáveis positivas nem a função cuja maximização o problema questiona.

Encontramos subsídios que embasam esse tipo de atividade nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, no que diz respeito a habilidades de contagem e organização de dados:

> “... decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista e fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação.” (BRASIL, 2006, p.126)

Após esta fase do trabalho os alunos receberam instruções para a modelagem do problema.

Atividades

Denominando:

x – o número de barras de 25 gramas de chocolate Nestlé Classic – Branco por dia;

y – o número de barras de 25 gramas de chocolate Nestlé Classic – Meio amargo por dia

1) Qual a equação que determina o número total de calorias (C) por dia?
2) Qual a expressão envolvendo x e y que caracteriza a restrição em relação às proteínas?

3) Qual a expressão envolvendo x e y que caracteriza a restrição em relação às unidades diárias de chocolate?
4) Qual a expressão envolvendo x que caracteriza a restrição de ingerir, no mínimo, duas barras de chocolate Nestlé Classic – Branco por dia?
5) Conclusão: organize o conjunto de expressões que descrevem matematicamente o problema.

Os estudantes trabalharam de forma autônoma e com facilidade nesta etapa – já estavam conscientes da necessidade do uso das inequações para modelar o problema.

Acreditamos, com base em Duval, que os objetivos propostos para esta aula foram atingidos na medida em que surgiu espontaneamente a necessidade de utilização de equações e inequações para a modelagem dos problemas.

> “Um estudo das aprendizagens intelectuais fundamentais deve considerar esses três fenômenos relativos à *semiósis* e à operação que lhe é verdadeiramente intrínseca. Nos sujeitos, uma representação pode verdadeiramente funcionar como representação, quer dizer, dar-lhe acesso ao objeto representado apenas quando duas condições são preenchidas: que eles disponham de ao menos dois sistemas semióticos diferentes para produzir a representação de um objeto, de uma situação, de um processo...e que eles possam converter “espontaneamente” de um sistema semiótico a outro, mesmo sem perceber as representações produzidas. Quando essas duas condições não são preenchidas, a representação e o objeto representado são confundidos, e duas representações diferentes de um mesmo objeto não podem, ser reconhecidas como sendo as representações do mesmo objeto. (DUVAL, 2009, p.38)”

7.3 Análise da aula 3

A terceira aula da sequência de atividades iniciou a etapa de revisão de conteúdos. Esperávamos que os alunos:

a) Descrevessem matematicamente situações que envolvem funções polinomiais do primeiro grau, realizando conversões da língua natural para a linguagem algébrica, segundo a teoria de Duval;
b) Esboçassem gráficos da função polinomial do primeiro grau convertendo a forma algébrica para a gráfica, segundo a teoria de Duval;
c) Identificassem a equação reduzida e a forma geral da equação da reta;
d) Convertessem a forma reduzida em equação geral da reta (e vice-versa), realizando, segundo Duval, tratamentos.

Treinamento esportivo
Um jovem atleta se sente atraído pela prática de dois esportes: natação e ciclismo. Sabe por experiência que a natação exige um gasto médio R$ 5,00 por sessão de uma hora de treinamento decorrente da mensalidade do clube e do deslocamento até a piscina. O ciclismo, mais simples, acaba custando R$ 2,00 a sessão de uma hora. O atleta possui um orçamento mensal de R$ 160,00 para seu treinamento. Sabe, por questão de saúde, que poderá fazer no máximo 65 horas mensais de treinamento nas duas modalidades esportivas. Deverá fazer no mínimo 5 horas mensais de natação e 10 horas mensais de ciclismo. A natação tem um gasto calórico de 400 Kcal por hora e o ciclismo de 280 Kcal por hora de treinamento. Quantas horas de cada modalidade o atleta deve praticar para maximizar o gasto calórico mensal?

Nessa aula os alunos trabalharam com o problema “Treinamento esportivo”.

A primeira atividade da aula solicitava que os alunos organizassem o conjunto de expressões matemáticas que descrevem o problema.

1)	Organize o conjunto de expressões que descrevem matematicamente o problema.

Os alunos demonstraram familiaridade com a modelagem do problema e responderam satisfatoriamente à questão.

Transcrição da resposta do aluno RDC:

$$5x + 2y \leq 160$$
$$x + y \leq 65$$
$$x \geq 5$$
$$y \geq 10$$
$$400x + 280y = z$$

Notamos, na resposta do aluno, que ele descreve corretamente o conjunto de expressões transcrevendo o problema da linguagem natural em linguagem matemática, incluindo a função objetivo (que se deseja maximizar). De acordo com Duval (2009), essa conversão espontânea entre sistemas semióticos possibilita a apreensão do objeto.

Em seguida as atividades tomaram caráter de revisão de conteúdos. Iniciamos retomando alguns conceitos sobre a função polinomial do primeiro grau – os alunos que já estudaram na oitava série este tipo de função e demonstraram familiaridade com a equação de reta $y = ax + b, com\ a, b \in R$. Esboçaram o gráfico de $y = -x + 65$ também demonstrando familiaridade com o procedimento. Para Duval esse é um ponto crítico no estudo da função afim, em especial quando se trata de converter a representação gráfica em algébrica (o que não foi abordado no caso). Para o autor:

> “Muitos estudos apontam dificuldades de leitura e de interpretação das representações gráficas cartesianas. Por exemplo, a ligação entre o conceito de inclinação e direção da reta no plano não é em geral efetuada. (HERSCOVICS, 1980). Também a confusão entre inclinação e altura parece ser frequente. (CLEMENT, 1985). Observa-se ainda a impossibilidade de encontrar a equação de uma reta partindo de sua representação gráfica, até para os casos mais elementares. Mesmo para o caso das retas, a articulação entre o registro das representações gráficas e das equações parece não se estabelecer mesmo depois que os alunos tenham tido aulas sobre funções afins. (DUVAL, 2011, p.97)”.

Duval (2011) nos explica que a razão dessa dificuldade não deve ser procurada nos conceitos matemáticos, mas na falta de conhecimento das regras de correspondência entre os diferentes registros semióticos das retas.

Na abordagem deste tópico procuramos fazer, como Duval (2011) denomina, uma abordagem ponto a ponto, porém baseados em propriedades da equação $y = ax + b$, e não na construção de tabelas de pontos. Sobre a abordagem ponto a ponto, para o autor:

> “É por meio desta abordagem que são introduzidas e definidas as representações gráficas. Em referência aos dois eixos graduados, um par de números permite identificar um ponto (e, inversamente, um ponto se traduz por um par de números). Este modo associativo limita-se a alguns valores particulares e aos pontos marcados no plano referencial. Esta abordagem favorece quando se quer TRAÇAR o gráfico correspondente de uma equação do primeiro grau ou o gráfico de uma equação do segundo grau. Favorece ainda quando se quer LER as coordenadas de algum ponto interessante (porque é ponto de intersecção com os eixos ou com alguma reta, porque é máximo, etc.) (DUVAL, 2011, p.97)”.

A figura 13 mostra o gráfico de $y = -x + 65$ feito pelo aluno RDC.

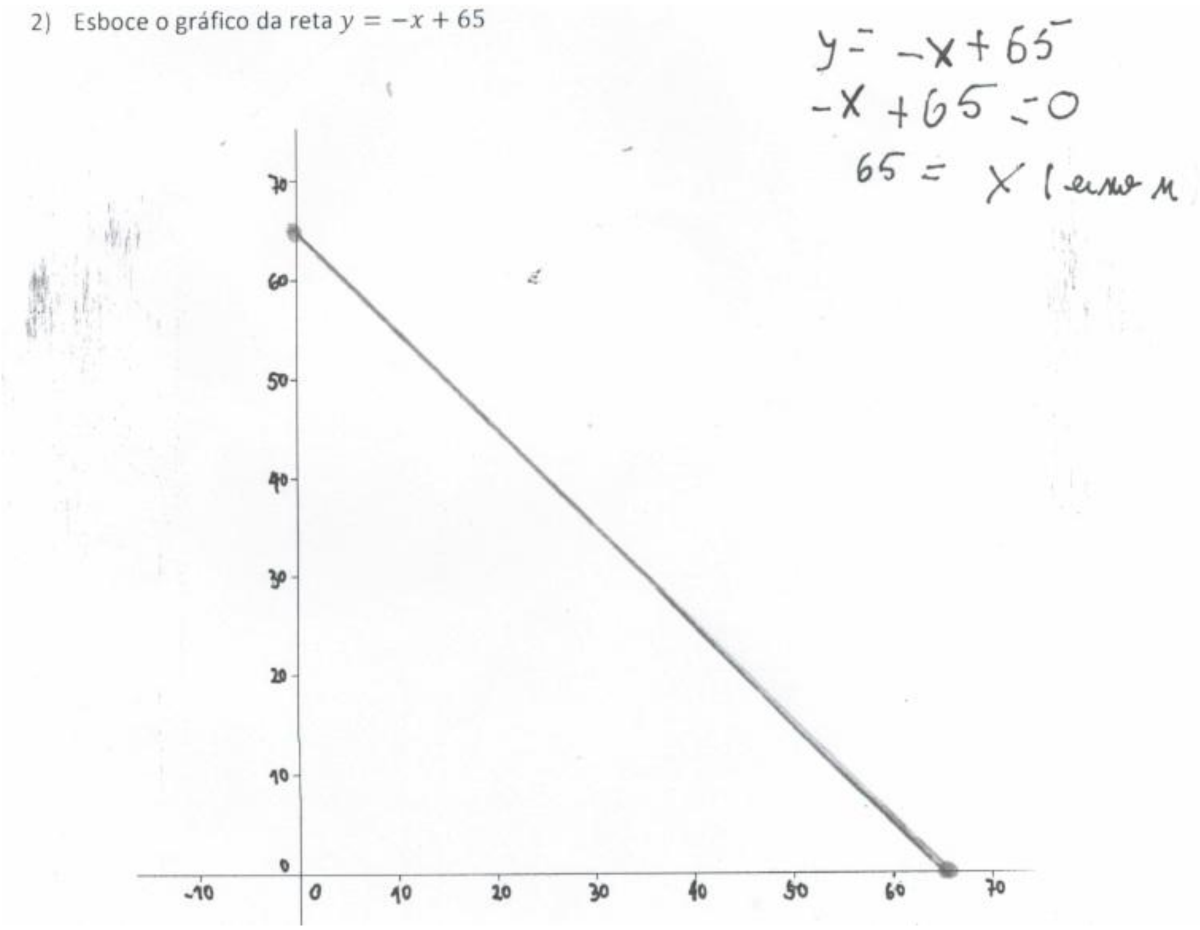


Figura 13: Esboço do gráfico de $y = -x + 65$ no primeiro quadrante

Observamos que, para o esboço do gráfico, o aluno baseou-se na raiz da equação e no coeficiente linear da reta.

Aproveitando o esboço de $y = -x + 65$, abordamos a região do plano determinada por $x + y < 65$. Questionados sobre como representar graficamente esta inequação, os alunos referenciaram o uso de intervalos na reta – não haviam ainda estudado inequações com duas variáveis.

Explicamos, então, que esta representação se faz no plano cartesiano esboçando o gráfico da reta $x + y = 65$. Mostramos que esta reta divide o plano em duas partes e que a inequação representa uma delas. Explicamos que basta testar se um dos pontos da região satisfaz a inequação para "decidir" se esta é a região é representada pela inequação.

Na etapa seguinte do trabalho abordamos a conversão da equação geral da reta versus equação reduzida.

Equação geral versus equação reduzida da reta

Uma equação da forma $Ax + By + C = 0$ em que A e B não são ambos nulos, é chamada equação geral da reta.

Isolando y na equação $Ax + By + C = 0$ obtemos:

$$By = -Ax - C$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Fazendo $\frac{-A}{B} = a$ e $\frac{-C}{B} = b$, temos a equação que já conhecíamos

$$y = ax + b$$

A forma $y = ax + b$ é chamada de equação reduzida da reta

A abordagem do tópico "Equação geral versus equação reduzida da reta" requereu um pouco mais de atenção por parte dos alunos, já que os educandos que estão no primeiro e no segundo anos do ensino médio ainda não estudaram geometria analítica.

Os alunos realizaram os tratamentos, transformando a forma geral da reta para reduzida (e vice-versa), demonstrando familiaridade com o manejo de equações.

Para Duval (2003), os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, realizar um cálculo ficando num mesmo sistema de escrita ou de representação dos números, resolver uma equação ou um sistema de equações.

Ainda esboçaram, no mesmo sistema de eixos e tomando como equações, o gráfico das expressões que modelam o problema do treinamento esportivo. Fazendo, dessa forma, duas conversões: da linguagem natural, na qual o problema estava escrito, para a linguagem matemática (equações e inequações) e desta para a representação gráfica. O que novamente está em acordo com a teoria de Duval que prevê no mínimo dois registros semióticos do mesmo objeto. Na figura 14, exemplificamos com os gráficos desenhados pela aluna VLRS.

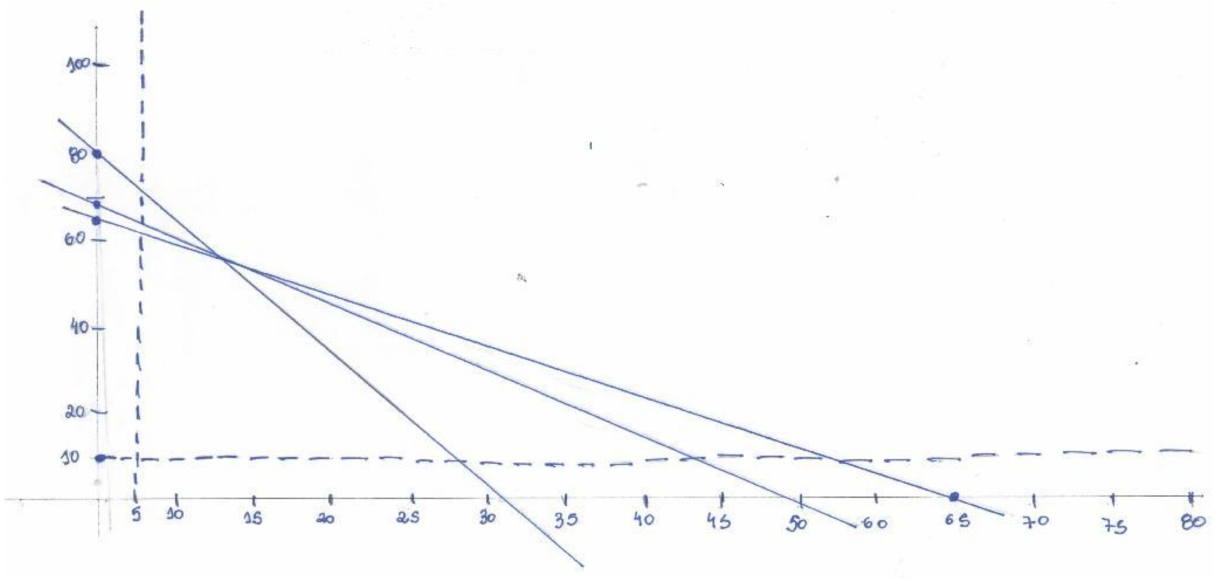


Figura 14: Gráfico das equações do problema "Treinamento Esportivo"

7.4 Análise da aula 4

A quarta aula teve por objetivo principal revisar conceitos que seriam requeridos durante o desenvolvimento dos tópicos de PL. Desejávamos que os alunos:

a) Descrevessem matematicamente situações que envolvam sistemas de equações lineares de duas incógnitas e duas equações, realizando conversões da língua natural para a linguagem algébrica segundo a teoria de Duval;

b) Utilizassem o método da adição – já familiar aos alunos – para resolução dos sistemas lineares, realizando dessa forma, segundo Duval, tratamentos;

c) Interpretassem geometricamente a solução de sistemas lineares 2 x 2, realizando a conversão da forma algébrica das equações para o registro geométrico.

Nesta aula iniciamos o trabalho com um novo problema – "Problema da ração"

Problema da ração
Um criador de cães pode optar por duas rações: "Boa pra cachorro" ou "Até cachorro come". Ambas são vendidas em sacos de 1 quilograma. O criador sabe que seus cães precisam de uma quantidade mensal de 12 unidades de vitamina A, 30 unidades de vitamina B e 28 unidades de vitamina D.

Cada saco da ração “Bom pra cachorro” custa R$ 3,00 e tem 3 unidades de vitamina A, 2 unidades de vitamina B e 2 unidades de vitamina D.

Cada saco da ração “Até cachorro come” custa R$ 2,00 e tem 1 unidade de vitamina A, 4 unidades de vitamina B e 7 unidades de vitamina D.

Quantos sacos de cada ração o criador deve comprar para atender as necessidades de vitaminas na dieta de seus cães gastando para isso, o mínimo necessário?

Em seguida a atividade:

1) Organize o conjunto de expressões que descrevem matematicamente o problema.

Novamente, como ocorreu na atividade da aula anterior, os alunos responderam satisfatoriamente organizando o conjunto de expressões e fazendo a conversão da linguagem natural para a matemática. A figura 15 mostra a resolução da aluna MG. Destacamos que a aluna não levou em consideração as restrições de não negatividade.

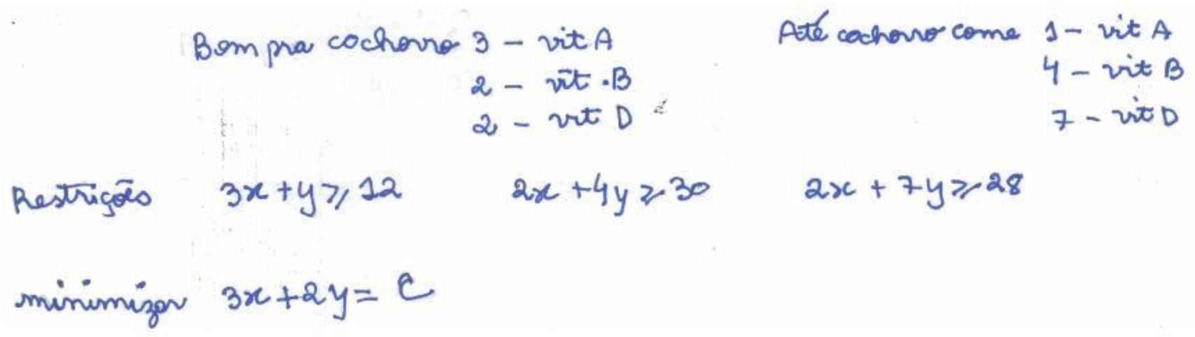


Figura 15: Modelagem para o "Problema da Ração"

Iniciamos em seguida a discussão sobre sistemas lineares de duas incógnitas e duas equações. Optamos por revisar a técnica da adição por acreditarmos que este método é familiar aos alunos.

A revisão de sistemas de equações lineares com duas equações e duas incógnitas foi motivada pela necessidade de encontrar a intersecção das retas que delimitam a região admissível nos problemas de PL – vértices da região poligonal.

Sobre a resolução de sistemas encontramos nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais a descrição do seguinte objetivo:

> Reconhecer a conservação contida em toda igualdade, congruência ou equivalência para calcular, resolver ou provar novos fatos. Por exemplo, ao resolver uma equação ou um sistema linear, compreender que as operações realizadas a cada etapa transformam a situação inicial em outra que lhe é equivalente, com as mesmas soluções. (BRASIL, 2006, p. 116).

Acreditamos que o objetivo descrito acima tenha sido alcançado, pois ao resolver os sistemas os alunos trabalharam dentro de um mesmo sistema semiótico, realizando segundo a teoria de Duval, tratamentos.

Na próxima etapa do trabalho os alunos esboçaram os gráficos das equações no mesmo sistema de eixos.

1)	Esboce o gráfico das retas $3x + y - 12 = 0$ e $3x + 4y - 30 = 0$ no mesmo sistema de eixos

A figura 16 mostra o esboço do gráfico feito pelo aluno GH.

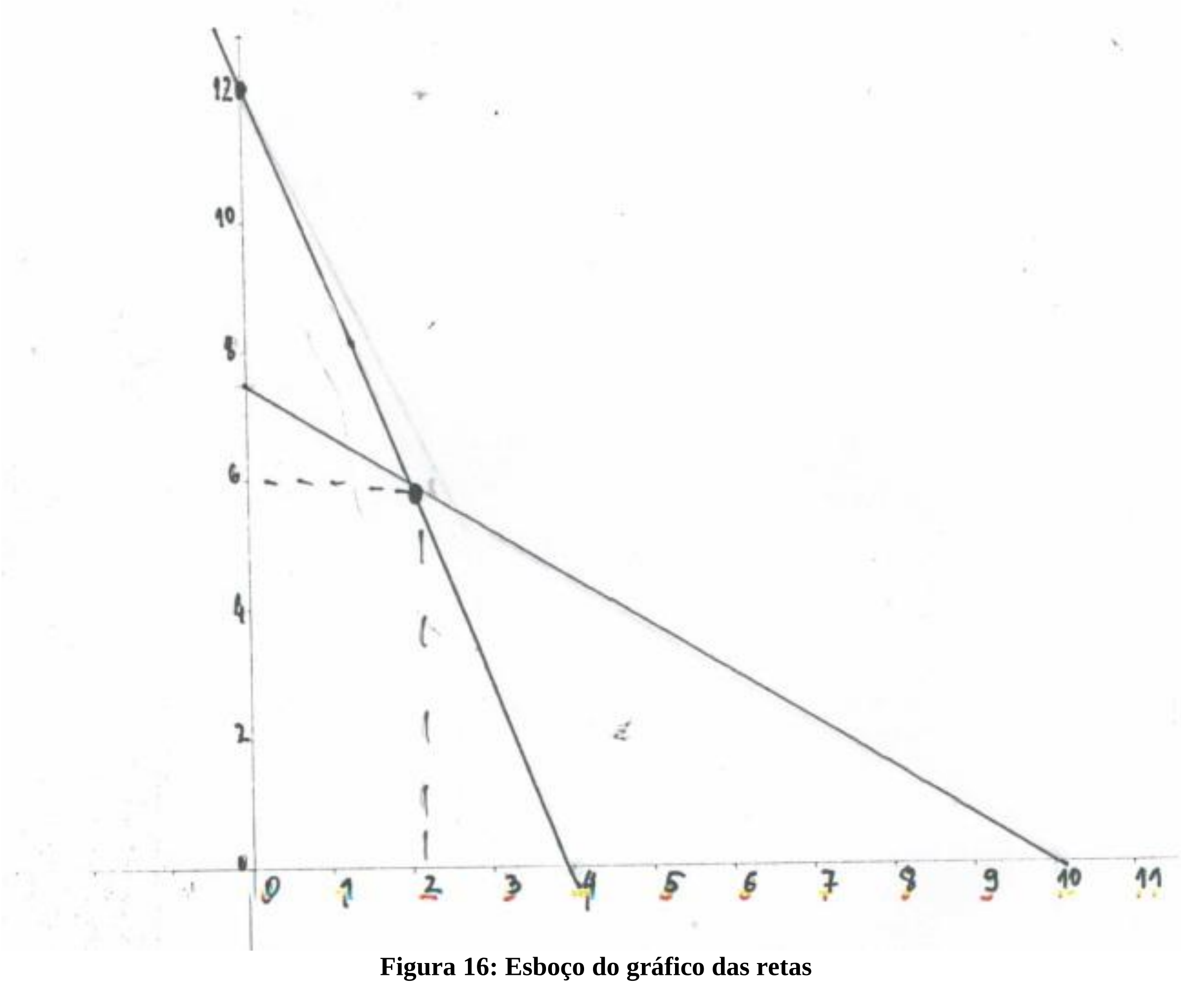


Figura 16: Esboço do gráfico das retas

Vemos, na resolução do aluno, que as retas foram traçadas corretamente. A conversão da linguagem matemática para a gráfica foi feita com base nos seguintes cálculos desenvolvidos por GH e transcritos abaixo:

$$\text{Se } y = 0$$
$$3x - 30 = 0$$
$$3x = 30$$
$$x = \frac{30}{3}$$
$$x = 10$$

$$\text{Se } x = 0$$
$$-4y - 30 = 0$$
$$-30 = 4y$$
$$\frac{-30}{4} = y$$
$$y = -7{,}5$$

$$\text{Se } x = 0$$
$$3x + y - 12 = 0$$
$$y = 12$$

$$\text{Se } y = 0$$

$$3x - 12 = 0$$
$$3x = 12$$
$$x = \frac{12}{3}$$
$$x = 4$$

Vemos, no desenvolvimento, bastante desenvoltura com os cálculos e o aluno transita dentro do mesmo registro semiótico sem dificuldades.

A próxima atividade solicita a interpretação do gráfico.

> Analisando os gráficos acima, dê uma interpretação geométrica para a solução do sistema
>
> $$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases}$$

As respostas dos alunos convergiram para a indicação de que a solução do sistema é o ponto de intersecção das retas. Como por exemplo, na transcrição da resposta da aluna JTK:

"O ponto onde as retas se cruzam pode ser interpretado como solução do sistema que tem as equações dessas retas como equações do sistema."

Acreditamos que os objetivos da aula foram atingidos: os alunos foram receptivos aos conceitos revisados demonstrando familiaridade com os assuntos abordados e realizaram satisfatoriamente as atividades, convertendo a forma algébrica das equações para a forma gráfica, interpretando geometricamente os sistemas e realizando a conversão da linguagem natural em linguagem matemática na medida em que modelaram corretamente o problema.

7.5 Análise da aula 5

A aula 5 teve por objetivo principal levar os alunos a conjecturarem sobre o teorema fundamental da PL concluindo que o máximo/mínimo da função é atingido em um dos vértices da região poligonal. Esperávamos que os alunos:

a) Esboçassem gráficos de funções polinomiais do primeiro grau variando o coeficiente linear, gerando uma família de retas paralelas;

b) Concluíssem que a mudança no coeficiente linear gera uma série de retas paralelas;

c) Utilizassem o software GeoGebra para resolver o "Problema da corrida" utilizando o controle deslizante;

d) Conjecturassem sobre o possível máximo da função; concluíssem que o máximo/mínimo da função deve ser atingido em um dos vértices da região admissível.

Os alunos esboçaram à mão o gráfico da função $p = 5x + 4y$ para $p = 8, p = 20, p = 40, p = 60\ e\ p = 63$. A figura 17 mostra as retas esboçadas pela aluna NOR.

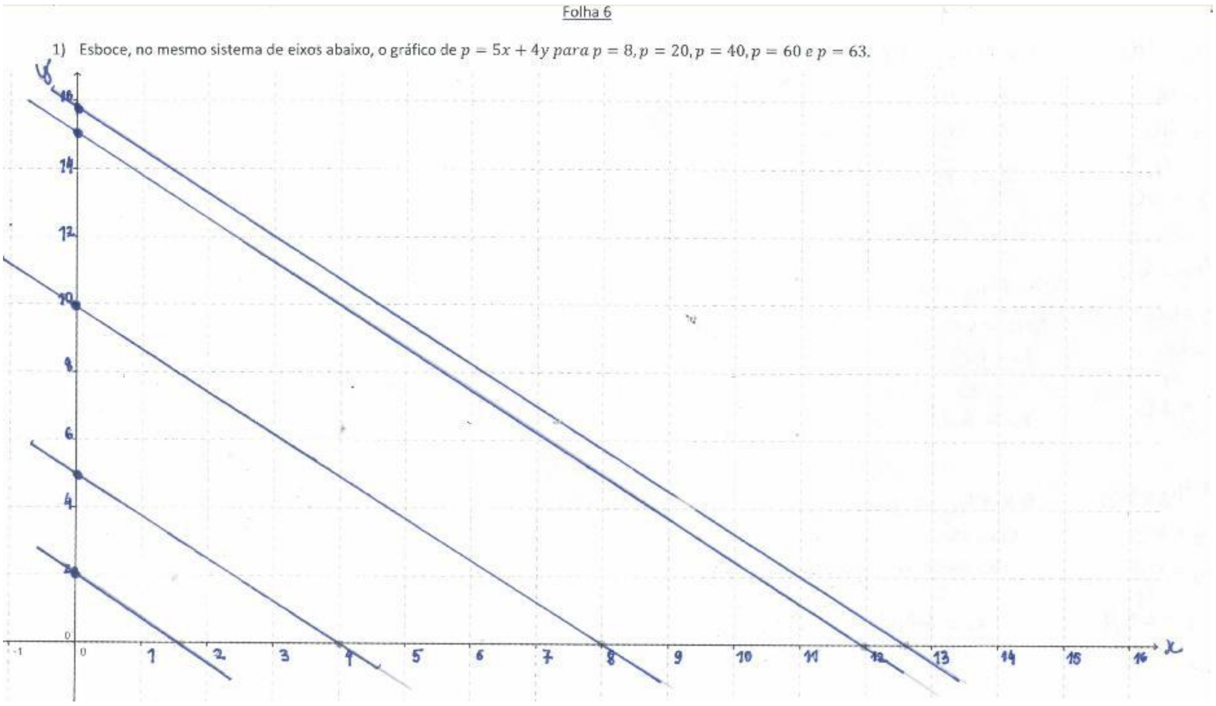


Figura 17: Esboço de retas paralelas

Analisando os gráficos desenhados responderam às perguntas sobre as posições das retas.

1) Esboce, no mesmo sistema de eixos abaixo, o gráfico de $p = 5x + 4y \; para \; p = 8, p = 20, p = 40, p = 60 \; e \; p = 63.$

2) Como são essas retas em relação à posição de uma às outras?

3) O que essas equações de retas têm em comum? O que mudou?

4) Escreva sobre qual a consequência de mudar o coeficiente linear numa equação de reta.

Transcrição das respostas do aluno GH sobre as questões:

2) “Paralelas, mesmo sentido.”

3) “O coeficiente angular permanece o coeficiente linear muda.”

4) “Vai provocar um deslocamento da reta.”

Transcrição das resposta da aluna VLRS:

2) “São paralelas, tem o mesmo sentido.”

3) “O coeficiente angular permanece o mesmo o que muda é o coeficiente linear.”

4) “Vai provocar um deslocamento da reta”

As respostas dos alunos convergiram para as respostas dadas pelos alunos GH e VLRS. Demonstram que os alunos têm o entendimento das mudanças provocadas no gráfico em função da variação nos parâmetros da equação $y = ax + b$. Acreditamos que esse entendimento é fundamental, pois permite o entendimento do teorema básico da PL.

Duval destaca a importância desse entendimento:

> "O conjunto traçado/eixos forma uma imagem que representa um **objeto** descrito por uma expressão algébrica. Toda modificação desta imagem, que leva a uma modificação na expressão algébrica correspondente, determina uma variável visual pertinente para a interpretação gráfica. É importante, deste modo, identificar todas as modificações pertinentes possíveis desta imagem, quer dizer, ver as modificações conjuntas da imagem e da expressão algébrica: **isto significa proceder a uma** análise de congruência entre dois registros de apresentação de um objeto ou de uma informação. Com esta abordagem **não estamos mais na presença da associação "um ponto - um par de números", mas na presença da associação "variável visual de representação - unidade significativa da expressão algébrica"".** (DUVAL, 2011, p.99)

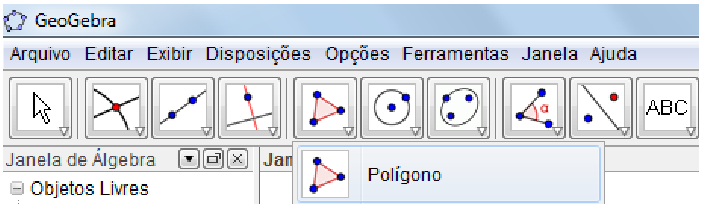
Na fase seguinte da tarefa o trabalho se desenvolveu no laboratório de informática com o software GeoGebra. Os alunos iniciaram a realização de atividades que objetivaram levá-los a concluir que o máximo/mínimo das funções que se pretende maximizar/minimizar são atingidos nos vértices da região poligonal.

Encontramos nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais indicações positivas a esse tipo de trabalho, recomendando sobre a investigação e interpretação o seguinte objetivo: "Selecionar e utilizar instrumentos de medição e de cálculo, representar dados e utilizar escalas, fazer estimativas, elaborar hipóteses e interpretar resultados." (BRASIL, 2006, p. 30).

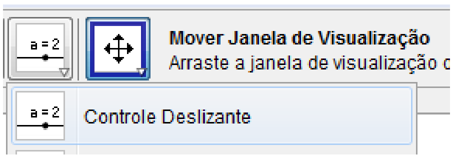
No laboratório de informática os alunos, com a ajuda do professor, realizaram as demais atividades da tarefa, criando um arquivo dinâmico. A maioria dos alunos já estava familiarizado com o software GeoGebra. Cada aluno trabalhou com o problema que escolheu inicialmente – "Dieta dos sonhos" ou "Corrida Maluca".

Atividades com GeoGebra – A corrida maluca
5) No software GeoGebra insira as desigualdades relativas às restrições do problema " A corrida maluca". Comando: em "Entrada" digite $4x + 3y \leq 50$. 6) Marque os pontos de intersecção das retas $4x + 3y = 50, x + y = 15$ e $y = 2$. Esses pontos de intersecção já foram calculados na atividade 5 da folha 5: (0,2), (0,15), (5,10), (11,2).

7) Desenhe um polígono com vértices nos pontos de intersecção das retas. Utilize o botão Polígono (5º botão) mostrado na figura abaixo



8) Insira um Controle Deslizante (11º botão), nomeie-o de **p** e faça-o variar de 0 a 70.



9) Insira a função pontos $5x + 4y = p$

10) Movimente o Controle Deslizante p, observe o comportamento da função pontos.

11) Onde a função pontos atinge o máximo?

12) A função pontos poderia assumir o valor 68? Para quais x e y?

13) Por que esse não é o máximo de pontos possíveis?

Atividades com GeoGebra – A dieta dos sonhos

1) No software GeoGebra insira as desigualdades relativas às restrições do problema “ A dieta dos sonhos”.

2) Insira o controle deslizante variando de 0 a 2500, nomeio de **c.**

3) Insira a função calorias $140x + 127y = c$.

4) Movimente o Controle Deslizante c, observe o comportamento da função calorias.

5) Onde a função calorias atinge o máximo?

6) A função pontos poderia assumir o valor 2400? Para quais x e y?

7) Por que esse não é o máximo de calorias possíveis?

8) Você pode fazer uma suposição sobre onde o as funções que se pretende maximizar atingirão o máximo? Comente a respeito.

Transcrição das respostas do aluno GH sobre o “Problema da dieta”:

5) $c = 2035$

6) "Não, pois iria exceder seu limite".

7) "Por que passa as restrições".

8) "A função vai atingir o máximo no ponto B por que é o último vértice que não ultrapassa as restrições."

Transcrição das respostas do aluno L sobre o "Problema da corrida".

11) $p = 60$

12) "Não, pois excede o limite.

13) "Por que o máximo é $p = 60$*".*

Percebemos através da fala dos alunos que o entendimento e as conjecturas solicitadas ainda precisam ser aperfeiçoados. Acreditamos que isso ocorreu nesse momento do trabalho por tratar-se da primeira vez onde tais conjecturas foram solicitadas.

Percebemos na fala e na escrita de alguns alunos (por exemplo, na escrita de GH) que eles se referem ao ponto máximo como "último ponto" e ao ponto mínimo como "primeiro ponto". O que nos leva a crer que os objetivos da atividade foram alcançados.

Apesar da falta de termos apropriados acreditamos que essas respostas (primeiro e último ponto) deixam transparecer o entendimento, ainda que preliminar, de que esses são pontos extremos e representam o máximo e mínimo das funções.

7.6 Análise da aula 6

A aula 6 teve por objetivo principal levar os alunos a conjecturarem sobre o teorema básico da PL concluindo que o máximo/mínimo da função é atingido em um dos vértices da região poligonal. Para isso esperávamos que os alunos:

a) Esboçassem gráficos de funções polinomiais do primeiro grau variando o coeficiente linear, gerando uma família de retas paralelas;

b) Concluíssem que a mudança no coeficiente linear gera uma série de retas paralelas;

c) Utilizassem o software GeoGebra para resolver o "Problema da corrida" utilizando o controle deslizante;

d) Conjecturassem sobre o possível máximo/mínimo da função; concluíssem que o máximo/mínimo da função deve ser atingido em um dos vértices da região admissível.

Nesta aula os alunos retomaram os problemas do “Treinamento esportivo” e o “Problema da ração”. Desenvolveram estas atividades com o auxílio do software GeoGebra.

Encontramos subsídios nos Parâmetros Curriculares Nacionais (2000) que nos indicam que nossa proposta se enquadra em tais orientações. Segundo o documento do MEC, a presença da tecnologia, em conjunto com as funções da Matemática, descritas no documento, nos permitem afirmar que aprender esta disciplina vai além da memorização de resultados dessa ciência e que a apreensão do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de saber fazer Matemática, de um saber pensar Matemática.

Acreditamos que nossa proposta de levar os alunos a conjecturarem sobre resultados dos problemas de PL corrobora para o desenvolvimento desse conhecimento matemático. Segundo o documento do MEC:

> “Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento.” (BRASIL, 2000, p. 41).

A sequência de atividades da aula 6 assemelha-se às descritas na aula 5.

Treinamento esportivo

Um jovem atleta se sente atraído pela prática de dois esportes: natação e ciclismo: Sabe por experiência que a natação exige um gasto médio R$ 5,00 por sessão de uma hora de treinamento decorrente da mensalidade do clube e do deslocamento até a piscina. O ciclismo, mais simples, acaba custando R$ 2,00 a sessão de uma hora. O atleta possui um orçamento mensal de R$ 160,00 para seu treinamento.

Sabe, por questão de saúde, que poderá fazer no máximo 65 horas mensais de treinamento nas duas modalidades esportivas.

Deverá fazer no mínimo 5 horas mensais de natação e 10 horas mensais de ciclismo.

A natação tem um gasto calórico de 400 Kcal por hora e o ciclismo de 280 Kcal por hora de treinamento. Quantas horas de cada modalidade o atleta deve praticar para maximizar o gasto calórico mensal?

Você já viu que este problema pode ser descrito em linguagem matemática pelo seguinte conjunto de equações:

Maximizar a função calorias (c):

$$400x + 280y = c$$

Sujeito às restrições:

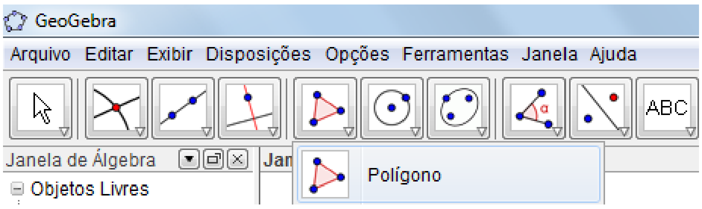
$$5x + 2y \leq 160$$
$$x + y \leq 65$$
$$x \geq 5$$
$$y \geq 10$$

Atividades com GeoGebra – Treinamento esportivo

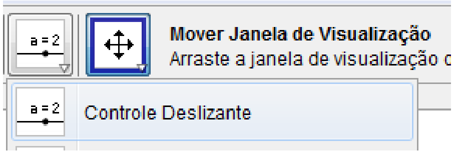
1) No software GeoGebra, insira as desigualdades relativas às restrições do problema “ Treinamento esportivo”.

2) Marque os pontos de intersecção das retas. Esses pontos já foram calculados em uma atividade anterior: (5,10), (5,60), (10,55), (28,10).

3) Desenhe um polígono com vértices nos pontos de intersecção das retas. Utilize o botão Polígono (5º botão) mostrado na figura abaixo



4) Insira um Controle Deslizante (11º botão), nomeie-o de **c** e faça-o variar de 0 a 20000.



5) Insira a função pontos $400x + 280y = c$

6) Movimente o Controle Deslizante c, observe o comportamento da função calorias.

7) Onde a função pontos atinge o máximo? Qual é o máximo?

8) A função pontos poderia assumir o valor 20000?

9) Por que esse não é o máximo de pontos possíveis?

Transcrição da resposta da aluna JTK para as questões:

7) "Ponto c – 19400"

8)e 9) "Não, por que ultrapassaria o ponto".

Transcrição das resposta do aluno EK:

7) 19400

8) "Não"

9) "Por que ultrapassaria a região de restrição se for maior que 19400".

A figura 18 mostra uma imagem do arquivo dinâmico criado pela aluna JTK.

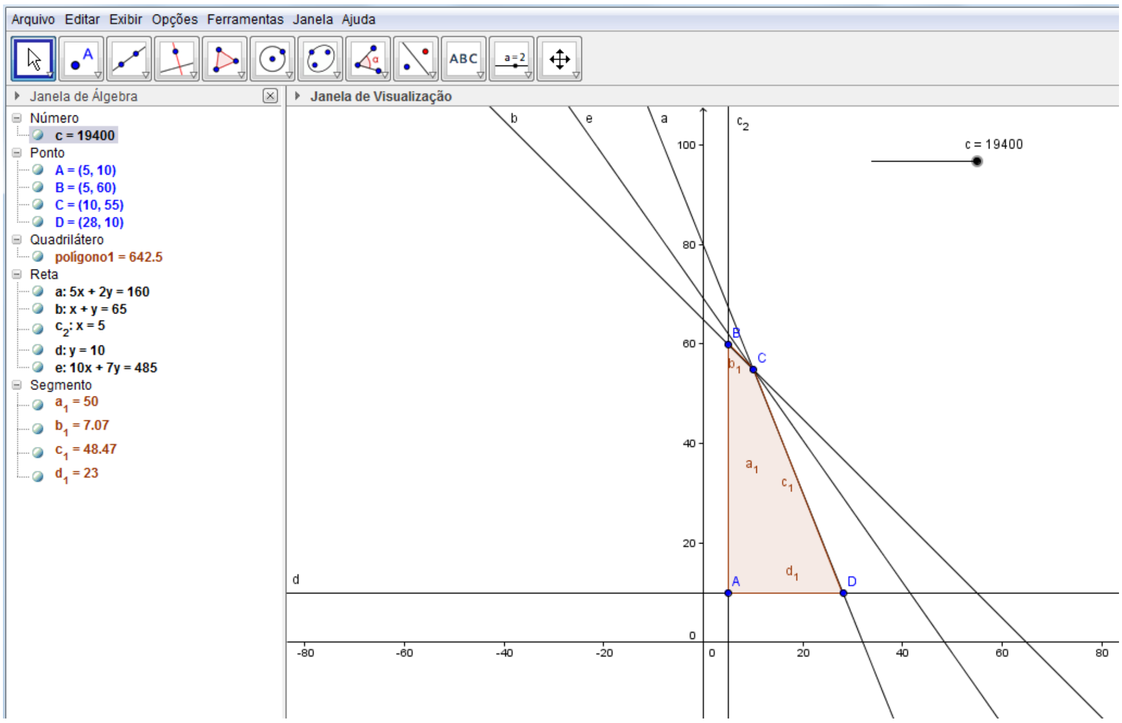


Figura 18: Imagem do arquivo dinâmico

As respostas dos alunos convergiram para os exemplos apresentados acima. Acreditamos, baseados na escrita e também no relato oral dos alunos, que esses amadureceram a ideia, ainda que intuitiva, do teorema básico da PL. A imagem mostra que a aluna, a exemplo de seus colegas, determinou corretamente a região poligonal e levou, através da variação do parâmetro c, a função objetivo ao ponto máximo.

Ainda nessa fase do trabalho, continuamos constatando a dificuldade do emprego de termos adequados aos pontos máximos e mínimos, estes continuaram a ser chamados de “primeiro” e “último” pontos. Apesar dessa incorreção no emprego dos termos, essa fala reflete a compreensão de que esses pontos são extremos da região poligonal (vértices).

Ainda nesta aula os alunos retornaram ao problema da ração.

Problema da ração

Um criador de cães pode optar por duas rações: “Boa pra cachorro” ou “Até cachorro come”. Ambas são vendidas em sacos de 1 quilograma.

O criador sabe que seus cães precisam de uma quantidade mensal de 12 unidades de vitamina A, 28 unidades de vitamina B e 28 unidades de vitamina D.

Cada saco da ração “Bom pra cachorro” custa R$ 3,00 e tem 3 unidades de vitamina A, 2 unidades de vitamina B e 2 unidades de vitamina D.

Cada saco da ração “Até cachorro come” custa R$ 2,00 e tem 1 unidade de vitamina A, 4 unidades de vitamina B e 7 unidades de vitamina D.

Quantos sacos de cada ração o criador deve comprar para atender as necessidades de vitaminas na dieta de seus cães gastando para isso, o mínimo necessário?

Você já viu que este problema pode ser descrito em linguagem matemática pelo seguinte conjunto de equações:

Minimizar a função custo (c)

$$3x + 2y = c$$

Sujeita às restrições:

$$\begin{aligned} &3x + y \geq 12 \\ &2x + 4y \geq 28 \\ &2x + 7y \geq 28 \\ &x \geq 0 \\ &y \geq 0 \end{aligned}$$

Atividades com GeoGebra – Problema da ração

1) No software GeoGebra insira as desigualdades relativas às restrições do “Problema da ração”.
2) Marque os pontos de intersecção das retas. Esses pontos já foram calculados: (0,12), (2,6), (7.54,1.85), (14,0).
3) Note que, diferentemente dos outros problemas, este não tem região possível fechada.
4) Insira um Controle Deslizante (11º botão), nomeie-o de **c** e faça-o variar de 0 a 60.
5) Insira a função custo $3x + 2y = c$
6) Movimente o Controle Deslizante c, observe o comportamento da função custo.
7) Onde a função custo atinge o valor mínimo?
8) A função custo pode atingir um valor máximo? Dê sua explicação.

9) Pensando nos problemas que você já resolveu, faça uma suposição de onde as funções que se pretende maximizar ou minimizar atingem o máximo ou mínimo. Escreva um comentário a respeito.

Retomando o “Problema da ração”, solicitamos explicitamente, pela primeira vez, que os alunos conjecturassem sobre os resultados dos problemas resolvidos anteriormente.

Nossa tarefa está em acordo com as competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática de acordo com os PCN. Encontramos o seguinte objetivo no documento do MEC: “Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.” (Brasil, 2000, p. 46).

Transcrição das respostas do aluno GH sobre os questionamentos acima:

7) c=18

8) “Não, pois ela não tem limite superior”.

9) “Elas atingem o ponto que está mais longe, ou seja o ponto limite, seja ele mínimo ou máximo”.

Transcrição das respostas do aluno L:

7) c=18

8) “Não ela não tem um valor superiormente.”

9) Elas atingem no ponto limite, no vértice, seja mínimo ou máximo.

Transcrição das respostas do aluno RR:

7) c=18

8) Não, por que ela não pode atingir um valor superiormente.

9) Ela atinge o limite no vértice, sendo ele máximo ou mínimo.

As respostas dos alunos convergiram para as respostas acima. Notamos nestas respostas e também no relato oral dos alunos que estes compreenderam que a região delimitada pelas restrições do “Problema da ração” não é limitada superiormente. Que, dessa forma, a função não pode atingir um máximo.

Ainda percebemos através do registro escrito e oral que a compreensão do teorema básico da PL evoluiu e que a totalidade de alunos compreendeu que o máximo/mínimo é atingido sobre os vértices da região poligonal. Constatamos também que na falta de uma linguagem técnica os alunos desenvolveram uma linguagem própria que, em nosso entendimento, demonstra a compreensão do conteúdo.

7.7 Análise da aula 7

A aula 7 teve por objetivo que os alunos criassem um conjunto de passos – algoritmo – para a resolução de problemas de PL. Esse algoritmo deveria ser baseado nos problemas resolvidos anteriormente.

Encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais indicações de que a construção de abstrações e para além da memorização de regras ou algoritmos deve estender-se além do conhecimento matemático:

> “O desenvolvimento de instrumentos matemáticos de expressão e raciocínio, contudo, não deve ser preocupação exclusiva do professor de Matemática, mas das quatro disciplinas científico-tecnológicas, preferencialmente de forma coordenada, permitindo que o aluno construa efetivamente as abstrações matemáticas, evitando-se a memorização indiscriminada de algoritmos, de forma prejudicial ao aprendizado”. (BRASIL, 2000, p. 9).

Acreditamos que nossa sequência de atividades caminhe nesse sentido, uma vez que privilegiamos a construção de conceitos e algoritmos opondo-nos à memorização indiscriminada. Ainda encontramos nos PCN indicações de que nossa proposta de elaboração de algoritmos é valida:

> “Outro aspecto metodológico a ser considerado, no ensino das ciências em geral [...] diz respeito às abordagens quantitativas e às qualitativas. Deve-se iniciar o estudo sempre pelos aspectos qualitativos e só então introduzir tratamento quantitativo. Esse deve ser feito de tal maneira que os alunos percebam as relações quantitativas se a necessidade de utilização de algoritmos. Os alunos, a partir do entendimento do assunto, poderão construir seus próprios algoritmos”. (BRASIL, 2000, p.53).

Os alunos construíram a sequência de passos através da seguinte tabela:

Para resolver um problema de PL com duas variáveis, utilizando o método geométrico, você realiza uma série de passos. Descreva, na tabela abaixo, os procedimentos adotados para a resolução – inspire-se nos problemas resolvidos. Passo 1:

Passo 2:
Passo 3:
Passo 4:
Passo 5:
Passo 6:

Transcrição das respostas da aluna NOR para a montagem do algoritmo

Passo 1 "Ler o problema"
Passo 2 "Montar as restrições"
Passo 3 "Fazer o gráfico das inequações"
Passo 4 "Calcular as intersecções"
Passo 5 "Verificar o máximo e o mínimo"
Passo 6

Transcrição das respostas do aluno L

Passo 1 "Usar variáveis para equacionar o problema (x, y)*"*
Passo 2 "Montar um sistema de inequações (inequacional)"
Passo 3 "Produzir um gráfico e marcar suas intersecções"
Passo 4 "Verificar o ponto máximo e mínimo"
Passo 5

Passo 6

Destacamos na resposta do aluno L o termo “inequacional”. Novamente aqui nos deparamos com a questão da linguagem, descrita por Duval como ponto primordial no ensino/aprendizagem de Matemática. Certamente existe alguma lógica na expressão empregada pelo aluno.

As respostas a esta tarefa nos fazem concluir que a totalidade dos alunos elaborou satisfatoriamente o conjunto de passos para a resolução de problemas de PL, através da técnica empregada na sequência de atividades. Há uma variação no número de passos, uma vez que algumas respostas agrupam passos (como na resposta de L).

7.8 Análise da aula 8

A aula 8 encerrou a sequência de atividades. Nela, objetivamos que os alunos resolvessem um problema inédito utilizando o algoritmo criado na aula anterior. Os alunos trabalharam no laboratório de informática criando um arquivo dinâmico no GeoGebra, a exemplo dos criados anteriormente.

Esta aula teve o caráter de avaliação visto que os alunos reuniram os conceitos trabalhados durante a sequência na resolução do problema abaixo:

Problema do combustível

Começa a faltar gasolina no Rio Grande do Sul

Mau tempo dificulta descarga em Tramandaí, e Refap não recebe todo o petróleo necessário para abastecimento do mercado.

A combinação de mau tempo, aumento da demanda e produção limitada provocam problemas de abastecimento de gasolina no Rio Grande do Sul. Com estoques reduzidos em postos de combustíveis, as distribuidoras estão buscando o produto em Santa Catarina e no Paraná.

Segundo a Petrobrás, está havendo "condições climáticas desfavoráveis para amarração de navios e descarga de matéria-prima no terminal marítimo de Tramandaí”. Desde a semana passada, a Refinaria Alberto Pasqualini (Refap), em Canoas, que abastece 80% do mercado gaúcho, está com a produção reduzida devido à escassez de petróleo trazido de fora.

Zero Hora, 16/10/2012

Seu Precavido, um homem atualizado e cauteloso, proprietário de um carro flex, pretende usar seus conhecimentos sobre PL para não ficar sem combustível.

O tanque do carro do Senhor Precavido está vazio e tem capacidade de 40 litros de combustível.

O litro da gasolina está custando na cidade de Seu Precavido R$ 2,80 e o litro de álcool custa R$ 1,60. Ele tem disponível R$ 100,00 para gastar com os dois combustíveis.

Com um litro de gasolina, o carro de Seu Precavido anda 12 km e com um litro de álcool 9 km.

Quantos litros de cada combustível Seu Precavido deve comprar para obter a maior autonomia possível, ficando assim imune à falta de combustível?

Os alunos modelaram o problema, escrevendo corretamente o conjunto de expressões matemáticas que descrevem o problema – realizaram a conversão do problema escrito em língua natural para linguagem algébrica.

Realizaram a conversão da linguagem algébrica em gráfica na medida em que esboçaram os gráficos corretamente. Trataram com desenvoltura os sistemas de equações que determinaram os vértices da região admissível.

Concluída a etapa de esboço do gráfico, os alunos procuraram entre os vértices da região poligonal o máximo da função, alcançando êxito nesta busca.

Constatamos que todos os alunos concluíram satisfatoriamente a tarefa. Acreditamos, com base no que prevê a teoria de Duval, que os alunos compreenderam os conceitos abordados durante a sequência.

8 Considerações finais

Repensar o currículo da escola é uma das funções do professor pesquisador em sua docência. Acreditamos que nosso trabalho possa servir como subsídio para questionar pontos do currículo como, por exemplo, que conteúdos devem estar presentes na escola básica.

No decorrer da elaboração da dissertação e da proposta didática e na aplicação das atividades, discutimos a pergunta norteadora feita em nosso projeto: É possível desenvolver o ensino de PL no nível médio?

Acreditamos, baseados nos resultados da aplicação da sequência didática, ser viável a abordagem de tópicos de PL no ensino médio. Constatamos nas falas e nos registros escritos dos alunos, de modo geral, o interesse nesse tópico da Matemática até então desconhecido por eles.

Das análises das aulas, concluímos que houve o entendimento de que a montagem de tabelas não resolve em geral problemas de PL e que um método mais eficaz se faz necessário. Vimos surgir espontaneamente a noção de que o uso de equações e inequações seria necessário para modelar os problemas propostos. Conforme referenciamos nas análises da aula 2, os alunos utilizaram a definição de desigualdade para modelar os problemas, entendendo que as expressões “no máximo” e “no mínimo” só poderiam ser expressas por uma igualdade, se somassem uma constante a uma dos membros das equações – utilizaram, por exemplo, $x + y + k = 15$ em vez de $x + y \leq 15$.

Outro fator que nos leva a responder positivamente a questão norteadora, é o fato de que nenhum conceito inteiramente novo foi abordado com os alunos – nossa proposta oportunizou uma reorganização do conhecimento prévio dos alunos servindo, como revisão de conceitos estudados ao longo das séries finais do ensino fundamental e do ensino médio, conectando assuntos, que às vistas dos estudantes, são desconexos e sem sentido.

O estudo de PL aproximou conceitos que para os estudantes da educação básica podem ser desconexos ou até sem sentido. Conteúdos como desigualdades ou sistemas de desigualdades com a aplicação em PL tomam significação. Encontramos nas orientações oficiais do Ministério da Educação o seguinte objetivo para a investigação e compreensão em Matemática:

> “Construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos, para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada” (BRASIL, 2006, p.117).

As atividades que propusemos permitiram que os estudantes interpretassem geometricamente a resolução de sistemas de equações numa aproximação da álgebra com a geometria.

A sequência de atividades possibilitou que os alunos transitassem entre diversos tipos de representações semióticas, o que para Duval possibilita o entendimento de conceitos. Além disso, ensinar PL no ensino médio aumenta o espectro de problemas que o professor pode propor aos seus alunos.

A nossa proposta incitou os alunos a conjecturarem sobre o teorema fundamental da PL e a utilizar recursos computacionais (software GeoGebra) para isso. Nosso entendimento é de que a proposta de atividades está adaptada às orientações dos documentos oficiais do Ministério da Educação, conforme citamos e referenciamos nas análises da aula 6: este fato nos dá fortes indícios da validade de nosso trabalho. Encontramos nas orientações oficiais:

> “Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento.” (BRASIL, 2000, p. 41).

Com base na Teoria das Representações Semióticas, elaboramos, aplicamos e analisamos nossa proposta didática. Baseados em nossas observações e análises acreditamos que a teoria de Duval sirva de excelente apoio ao processo de ensino-aprendizagem dos tópicos de PL abordados.

Nossos alunos transitaram entre diferentes registros de representações na medida em que converteram linguagem natural em álgebra – ao modelar os problemas através de sistemas de inequações – e linguagem algébrica em geométrica – ao esboçarem gráficos.

Sobre nossa proposta didática, acreditamos que ela se diferencia de outras propostas analisadas neste trabalho: trabalhamos com cinco problemas inéditos pensados especialmente para que alcançássemos os objetivos propostos e, através destes, desenvolvemos os tópicos de

PL. Acreditamos que nossas atividades questionem o aluno de uma forma que não é usual nas tradicionais aulas de Matemática.

Retornando sempre aos problemas, evitamos abordar exemplos ou exercícios descontextualizados, entendemos que também neste aspecto nossa proposta se adapte às orientações dos PCN.

Sobre o uso de recursos computacionais, software GeoGebra, acreditamos que nossa proposta se adapta aos propósitos dos encontramos nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: “Selecionar e utilizar instrumentos de medição e de cálculo, representar dados e utilizar escalas, fazer estimativas, elaborar hipóteses e interpretar resultados.” (BRASIL, 2002, p. 30).

Em nossas atividades o uso do computador foi um instrumento facilitador ao entendimento do teorema básico da PL. Através da manipulação de parâmetros no software GeoGebra os alunos conjecturaram e concluíram, ainda que intuitivamente, que o máximo ou mínimo das funções devem ser atingidos nos vértices da região poligonal.

Destacamos a importância das atividades onde os estudantes, baseados nos exercícios resolvidos, criaram um algoritmo para a resolução de problemas de PL, organizando as resoluções dos problemas de maneira sistemática. Evitamos, assim, a memorização indiscriminada de algoritmos prontos que, segundo as orientações oficiais do Ministério da Educação, prejudica o aprendizado.

Ressaltamos ainda a importância deste trabalho para nosso crescimento profissional. Através dele tivemos a oportunidade de aprofundar o estudo de PL abordando tópicos que até então não havíamos sido contemplados em nossa formação. Aproximamo-nos da teoria de Raymond Duval o que certamente nos oportunizou um ganho didático enorme não só na elaboração desta sequência de atividades, mas em nossa sala de aula, em nosso dia a dia.

Manifestamos nossa satisfação em concluir este trabalho e este curso. Esperamos que nossa proposta possa servir de apoio aos colegas professores que desejarem desenvolver um estudo de PL em suas salas de aula – certamente estes colegas enriquecerão nossas propostas de atividades com suas ideias e experiências.

Referências

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra linear com aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ACKOFF, Russell; SASIENI, Maurice W. **Pesquisa operacional.** Rio de Janeiro: LTC, 1977.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação e do desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.** Brasília: MEC, 2000.

DANTE, Luiz Roberto**. Matemática: Contexto & aplicações.** São Paulo: Editora Ática, 2011.

DEGENSZAJN, David et al. **Matemática:** ciência e aplicações. São Paulo: Saraiva, 2011.

DUVAL, Raymond. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, n.6, p.96-112, 2011. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. Disponível em: <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2011v6n2p96>>. Acesso em: 20 jan. 2012.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, n.7, p.266-297, 2012. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/index>. Acesso em: 25 nov. 2012.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Aprendizagem em matemática. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: Proem, 2011.

DUVAL, Reymond. **Semiósis e Pensamento Humano:** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MELO, Jorge Nazareno Batista. **Uma proposta de ensino de aprendizagem de programação linear no ensino médio.** 2012. 124 f. Dissertação (Mestrado) - UFRGS, Porto Alegre, 2012. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem/>. Acesso em: 15 jan. 2013.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA. Sistema Educativo. Disponível em: <http://www.min-edu.pt/index.php?s=sistema-educativo>. Acesso em: 02 jan. 2012.

PAIVA, Suzete Marisa de Almeida. A PL no ensino secundário. 2008. 124 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Portucalense Infante D. Henrique, Lisboa, 2008. Disponível em: <http://repositorio.uportu.pt/dspace/bitstream/123456789/62/1/TMMAT%20101.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2011.

PASSOS, Adão Nascimento Dos. Estudos em Programação Linear. 2009. 169 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009. Disponível em: <http://cutter.unicamp.br/document/?code=000470278>. Acesso em: 29 dez. 2011.

TRALDI JÚNIOR, Armando. Sistema de Inequação do 1º grau: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando os registros de representações. 2002. 112 f. Dissertação (Mestre em Educação Matemática) - Puc-sp, São Paulo, 2002. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/>. Acesso em: 26 dez. 2011.

Apêndice 1 – Proposta revisada da sequência didática

Neste apêndice apresentamos nossa proposta completa de atividades. Esperamos que este texto sirva aos colegas professores, que julgando apropriada nossa proposta, possam aplicá-la e enriquecê-la em suas salas de aula.

Recomendamos ainda que o professor leia os capítulos 2 e 3 onde apresentamos a teoria matemática que dá suporte à sequência de atividades e a revisão sobre a teoria de Duval.

Aula 1 – 2 horas aula

I. Objetivos e expectativas do professor

Esta aula tem por objetivo motivar os alunos a modelar e resolver problemas de PL buscando estratégias de resolução intuitivas.

Espera-se que os alunos busquem a solução das mais variadas maneiras, como a montagem de tabelas, por exemplo, sem a utilização dos recursos da PL.

Espera-se que os alunos façam, de acordo com a teoria de Duval, a conversão da língua natural para a linguagem matemática.

II. Desenvolvimento

1º) Apresentar dois problemas de PL e, de acordo com o interesse dos alunos nos problemas, dividi-los em grupos;

2º) Entregar as folhas 1A ou 1B para que os alunos busquem a solução. Os registros das soluções serão anotados nas folhas;

3º) Interagir com os alunos questionando-os e propondo sugestões;

4º) Ao final do encontro fazer uma discussão dos problemas e a apresentação destes como exemplos de problemas de PL.

Folha 1 A

Leia o problema a seguir em conjunto com os colegas de grupo e busque uma estratégia de resolução.

A dieta dos sonhos...

Na dieta de chocolate da Dra. Chocólatra, o importante é maximizar as calorias.

A Dra. Chocólatra sabe que cada barra de 25 g do chocolate Nestlé Classic – Branco fornece 140 calorias e cada barra de 25 g do chocolate Nestlé Classic – Meio amargo 127 calorias.

Apesar de adorar chocolate a Dra. Chocólatra não recomenda que sejam ingeridas mais do que míseras quinze dessas barras de chocolate por dia.

Também há a recomendação de que se ingiram, no mínimo, duas barras de chocolate branco por dia.

A dieta de chocolate da Dra. Chocólatra recomenda que não sejam ingeridas mais do que 25 gramas de proteínas por dia. A Dra. sabe que cada barra do chocolate Nestlé Classic - Branco fornece 1,8 gramas de proteína e cada barra do chocolate Nestlé Classic – Meio amargo 1,4 gramas de proteína.

Quantas barras de cada de chocolate devem ser ingeridas para que se obtenha o máximo de calorias possíveis nessa dieta da Dra. Chocólatra?

Folha 1B

Leia o problema a seguir em conjunto com os colegas de grupo e busque uma estratégia de resolução.

A Corrida Maluca

Na Corrida Maluca o importante é maximizar a quantidade de pontos.

Para pontuar, Dick Vigarista pode escolher entre duas pistas. Cada volta na pista 1 é percorrida em exatamente 4 minutos e cada volta na pista 2 é percorrida em 3 minutos. Ele pode percorrer (ao todo), no máximo, 15 voltas, sendo que precisa dar, no mínimo, 2 voltas na pista 2. A corrida termina em, no máximo, 50 minutos. A cada volta dada na pista 1 ele ganha 5 pontos e a cada volta na pista 2 ganha 4 pontos.

Qual a estratégia que Dick Vigarista deve escolher para maximizar a quantidade de pontos para, finalmente sem trapaças, subir ao pódio?

Aula 2 – 2 horas aula

I. Objetivos e expectativas do professor

O objetivo desta aula é levar os alunos a modelar matematicamente os problemas da aula anterior através de equações e inequações.

Espera-se que a compreensão do problema gere a percepção da necessidade do uso das inequações para a modelagem; espera-se, também, alguma resistência ao uso das inequações já que este é um tema pouco abordado na educação básica.

II. Desenvolvimento

1º) Iniciar retomando os grupos da aula anterior, devolver as folhas 1A ou 1B e solicitar que os alunos modelem livremente o problema na folha 2;

2º) Entregar a folha 3A ou 3B (de acordo com a escolha inicial dos grupos) que orienta a modelagem através de um conjunto de expressões;

3º) Concluir discutindo os modelos elaborados pelos alunos;

Folha 2

Modele o problema da aula anterior usando expressões matemáticas.

Folha 3A

Releia o problema e realize as atividades

A dieta dos sonhos...

Na dieta de chocolate da Dra. Chocólatra, o importante é maximizar as calorias.

A Dra. Chocólatra sabe que cada barra de 25 g do chocolate Nestlé Classic – Branco fornece 140 calorias e cada barra de 25 g do chocolate Nestlé Classic – Meio amargo 127 calorias.

Apesar de adorar chocolate a Dra. Chocólatra não recomenda que sejam ingeridas mais do que míseras quinze dessas barras de chocolate por dia.

Também há a recomendação de que se ingiram, no mínimo, duas barras de chocolate branco por dia.

A dieta de chocolate da Dra. Chocólatra recomenda que não sejam ingeridas mais do que 25 gramas de proteínas por dia. A Dra. sabe que cada barra do chocolate Nestlé Classic - Branco fornece 1,8 gramas de proteína e cada barra do chocolate Nestlé Classic – Meio amargo 1,4 gramas de proteína.

Quantas barras de cada de chocolate devem ser ingeridas para que se obtenha o máximo de calorias possíveis nessa dieta da Dra. Chocólatra?

Atividades

Denominando:

x – o número de barras de 25 gramas de chocolate Nestlé Classic – Branco por dia;

y – o número de barras de 25 gramas de chocolate Nestlé Classic – Meio amargo por dia

1. Qual a equação que determina o número total de calorias (C) por dia?
2. Qual a expressão envolvendo x e y que caracteriza a restrição em relação às proteínas?

3. Qual a expressão envolvendo x e y que caracteriza a restrição em relação às unidades diárias de chocolate?

4. Qual a expressão envolvendo x que caracteriza a restrição de ingerir, no mínimo, duas barras de chocolate Nestlé Classic – Branco por dia?

5. Conclusão: organize o conjunto de expressões que descrevem matematicamente o problema.

Folha 3B

Releia o problema e realize as atividades

A Corrida Maluca

Na Corrida Maluca o importante é maximizar a quantidade de pontos.

Para pontuar Dick Vigarista pode escolher entre duas pistas. Cada volta na pista 1 é percorrida em exatamente 4 minutos e cada volta na pista 2 é percorrida em 3 minutos. Ele pode percorrer (ao todo), no máximo, 15 voltas, sendo que precisa dar, no mínimo, 2 voltas na pista 2. A corrida termina em, no máximo, 50 minutos. A cada volta dada na pista 1 ele ganha 5 pontos e a cada volta na pista 2 ganha 4 pontos.

Qual a estratégia que Dick Vigarista deve escolher para maximizar a quantidade de pontos para, finalmente sem trapaças, subir ao pódio?

<u>Atividades</u>

Denominando:

x – o número de voltas na pista 1

y – o número de voltas na pista 2

1. Qual a equação que determina o número total de pontos (P) de Dick Vigarista na corrida?
2. Qual a expressão envolvendo x e y que caracteriza a restrição em relação ao tempo de corrida?
3. Qual a expressão envolvendo x e y que caracteriza a restrição em relação ao número de voltas da corrida?
4. Qual expressão envolvendo y caracteriza a restrição de dar no mínimo duas voltas na pista 2?
5. Conclusão: organize o conjunto de expressões que descrevem matematicamente o problema.

Aula 3 – 3 horas aula

I. Objetivos e expectativas do professor

O objetivo principal desta aula é revisar conceitos que serão requeridos durante o desenvolvimento dos tópicos de PL.

Espera-se que os alunos sejam capazes de:

a) Descrever matematicamente situações que envolvam funções polinomiais do primeiro grau, realizando conversões da língua natural para a linguagem algébrica segundo a teoria de Duval;

b) Esboçar gráficos da função polinomial do primeiro grau convertendo a forma algébrica para a gráfica, segundo a teoria de Duval;

c) Distinguir a equação reduzida e a forma geral da equação da reta;

d) Converter a forma reduzida em equação geral da reta (e vice-versa), realizando, segundo Duval, tratamentos.

II. Desenvolvimento

1º) Apresentar o problema “Treinamento esportivo”, fazer a discussão e organizarão o conjunto de expressões que descreve matematicamente o problema;

2º) Abordar os tópicos sobre a reta, os alunos esboçarão gráficos nas atividades 2, 5 e 6;

3º) Os alunos deverão converter a equação geral da reta para a forma reduzida realizando a atividade 3.

Folha 4

Leia o problema e realize as atividades

Treinamento esportivo

Um jovem atleta se sente atraído pela prática de dois esportes: natação e ciclismo. Sabe por experiência que:

A natação exige um gasto médio R$ 5,00 por sessão de uma hora de treinamento decorrente da mensalidade do clube e do deslocamento até a piscina. O ciclismo, mais simples, acaba custando R$ 2,00 a sessão de uma hora. O atleta possui um orçamento mensal de R$ 160,00 para seu treinamento.

Sabe, por questão de saúde, que poderá fazer no máximo 65 horas mensal de treinamento nas duas modalidades esportivas.

Deverá fazer no mínimo 5 horas mensais de natação e no mínimo 10 horas mensais de ciclismo.

A natação tem um gasto calórico de 400 Kcal por hora e o ciclismo de 280 Kcal por hora de treinamento. Quantas horas de cada modalidade o atleta deve praticar para maximizar o gasto calórico mensal?

Atividades

1. Organize o conjunto de expressões que descrevem matematicamente o problema.

A reta

Você já conhece a função polinomial do primeiro grau e sua representação algébrica, que é um polinômio de grau 1.

De maneira geral podemos representar a função polinomial do primeiro grau na forma $f(x) = y = ax + b$, com a e b sendo números reais e $a \neq 0$ (caso $a = 0$,temos $f(x) = y = b$, que representa uma função constante). Os números representados por a e b são chamados respectivamente de coeficientes angular e linear.

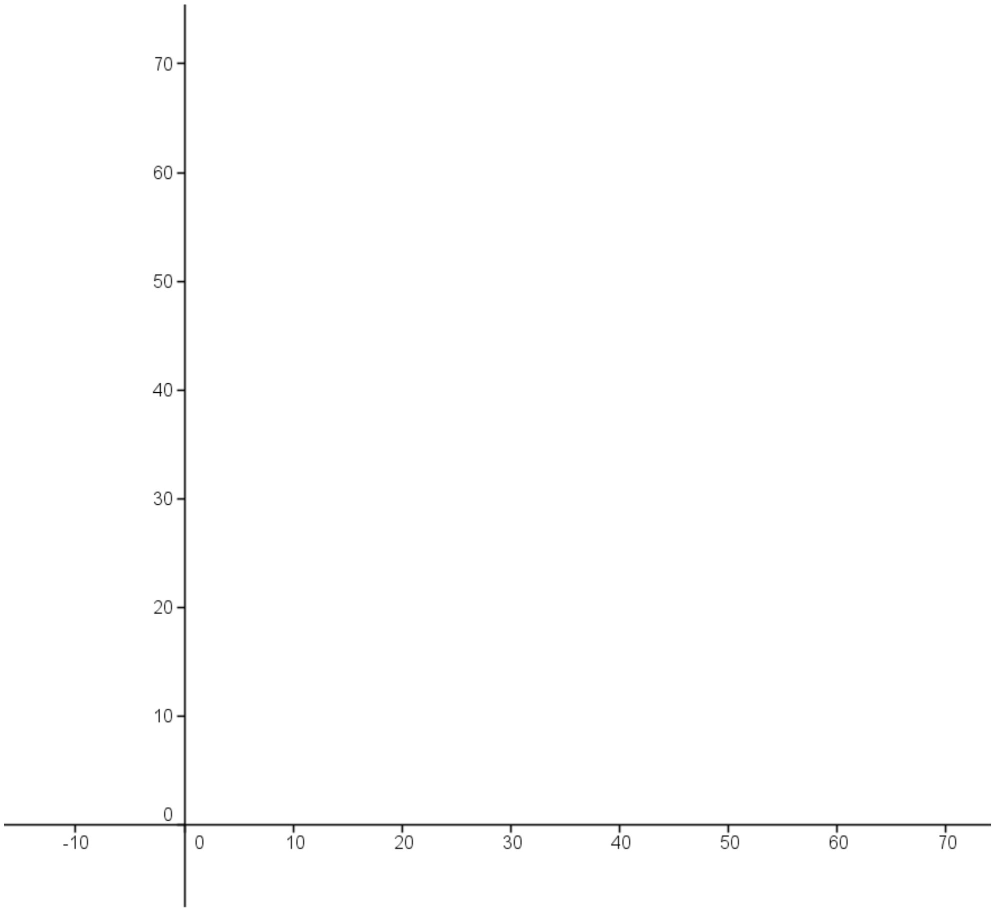
De modo geral o domínio da função polinomial do primeiro grau é todo o conjunto dos números reais, mas quando a função está vinculada a uma situação real, é preciso verificar o que representa a variável independente (x) para determinar seu domínio.

No problema do treinamento esportivo x e y devem assumir valores reais positivos ($x \geq 0$ e $y \geq 0$), pois representam as horas de treino em cada modalidade.

Gráfico da função polinomial do primeiro grau

Sabemos que o gráfico de $y = ax + b$ é uma reta que intercepta o eixo das ordenadas em $(0, b)$ e o eixo das abscissas em $(\frac{-b}{a}, 0)$.

2. Esboce o gráfico da reta $y = -x + 65$



Equação geral versus equação reduzida da reta

Uma equação da forma $Ax + By + C = 0$, em que A e B não são ambos nulos, é chamada equação geral da reta.

Isolando y na equação $Ax + By + C = 0$ obtemos:

$$By = -Ax - C$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Fazendo $\frac{-A}{B} = a$ e $\frac{-C}{B} = b$, temos a equação que já conhecíamos

$$y = ax + b.$$

A forma $y = ax + b$ é chamada de equação reduzida da reta.

3. As seguintes retas estão escritas na forma da equação geral $Ax + By + C = 0$. Escreva-as na forma reduzida $y = ax + b$.

$a)$ $5x + 2y - 150 = 0$

$b)$ $x + y - 65 = 0$

$c)$ $x - 5 = 0$

$d)$ $y - 10 = 0$

$e)$ $400x + 280y = 19400$

4. As seguintes retas estão escritas na forma reduzida $y = ax + b$. Escreva-as na forma geral $Ax + By + C = 0$

a) $y = -\frac{140}{127}x + \frac{2035}{127}$

b) $y = -\frac{18}{14}x + \frac{25}{14}$

c) $y = -x + 15$

5. Esboce no mesmo sistema de eixos o gráfico das retas da atividade 3.

6. Retorne à folha 3A ou 3B (de acordo com a escolha inicial) e esboce o gráfico das sentenças que descrevem o problema (tome-as como equações de reta). Observe que estas retas determinam uma região fechada – região poligonal.

7. Será que isso sempre vai acontecer, ou seja, a região será sempre fechada? O que deve acontecer para que a região não seja fechada?

Aula 4 – 3 horas aula

I. Objetivos e expectativas do professor

O objetivo principal nesta aula é revisar conceitos que serão requeridos durante o desenvolvimento dos tópicos de PL. Espera-se que os alunos sejam capazes de:

a) Descrever matematicamente situações que envolvam sistemas de equações lineares de duas incógnitas e duas equações, realizando conversões da língua natural para a linguagem algébrica segundo a teoria de Duval;

b) Utilizar o método da adição para resolução dos sistemas lineares, realizando dessa forma, segundo Duval, tratamentos;

c) Interpretar geometricamente a solução de sistemas lineares 2 x 2, realizando a conversão da forma algébrica das equações para o registro geométrico;

II. Desenvolvimento

1º) Apresentar o problema da ração e solicitar a organizarão do conjunto de expressões matemáticas que o modelam;

2º) Iniciar a revisão de sistemas de equações lineares com duas equações e duas incógnitas a fim de que os alunos possam encontrar a intersecção das retas que delimitam a região admissível nos problemas de PL – vértices da região poligonal;

3º) Revisar a resolução de sistemas de equações. Utilizamos em nossa sequência de atividades o método da adição por que os alunos estavam mais familiarizados com esta técnica, contudo esta escolha cabe ao professor;

4º) Levar os alunos à interpretação geométrica dos sistemas. Eles deverão concluir que a solução é o ponto de intersecção das retas que o compõe.

5º) Destacar junto aos alunos que essas retas determinam uma região fechada – região poligonal – e que as soluções dos sistemas são os vértices deste polígono;

6º) Retornar o problema da ração, esboçar o gráfico das expressões que descrevem o problema e encontrar, através da resolução de sistemas, o ponto de interseção das retas.

Folha 5

Problema da ração

Um criador de cães pode optar por duas rações: “Boa pra cachorro” ou “Até cachorro come”. Ambas são vendidas em sacos de 1 quilograma.

O criador sabe que seus cães precisam de uma quantidade mensal de 12 unidades de vitamina A, 28 unidades de vitamina B e 28 unidades de vitamina D.

Cada saco da ração “Bom pra cachorro” custa R$ 3,00 e tem 3 unidades de vitamina A, 2 unidades de vitamina B e 2 unidades de vitamina D.

Cada saco da ração “Até cachorro come” custa R$ 2,00 e tem 1 unidade de vitamina A, 4 unidades de vitamina B e 7 unidades de vitamina D.

Quantos sacos de cada ração o criador deve comprar para atender as necessidades de vitaminas na dieta de seus cães gastando para isso, o mínimo necessário?

1. Organize o conjunto de expressões que descrevem matematicamente o problema.

Sistemas de equações lineares

Sistema linear é um conjunto S de m equações lineares com n incógnitas.

Solução de um sistema linear

Um par ordenado (x, y) é solução de um sistema linear com duas incógnitas se ele for solução de cada uma das equações do sistema.

Método da adição pra resolução de sistemas lineares 2 x 2

Acompanhe a resolução do sistema $\begin{cases} 3x + y = 12 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases}$ pelo método da adição:

Procedimento	**Aplicação no sistema**
1) Pretende-se, no método da adição, adicionar membro a membro as equações do sistema a fim de obtermos uma equação de uma só incógnita.	No sistema em questão os coeficientes das incógnitas não se anularão ao efetuar-se a soma, observe: $\begin{cases} 3x + y = 12 \\ \underline{3x + 4y = 30} \\ 6x + 5y = 42 \end{cases}$
2) Observa-se que os coeficientes da incógnita x são iguais nas duas equações. Multiplica-se uma das equações por -1 a fim de obterem-se coeficientes opostos.	$\begin{cases} 3x + y = 12 \cdot (-1) \\ 3x + 4y = 30 \end{cases}$ $\begin{cases} -3x - y = -12 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases}$
3) Efetua-se a soma membro a membro das equações cancelando a variável *x*	$\begin{cases} -3x - y = -12 \\ \underline{3x + 4y = \ \ 30} \\ 3y = 18 \end{cases}$
4) Calcula-se o valor de *y*	$3y = 18$ $y = \frac{18}{3}$ $y = 6$
5) Substitui-se o valor de y em uma das equações a fim de calcular o valor da incógnita *x*	$3x + y = 12$ $3x + 6 = 12$ $3x = 12 - 6$ $3x = 6$

$$x = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

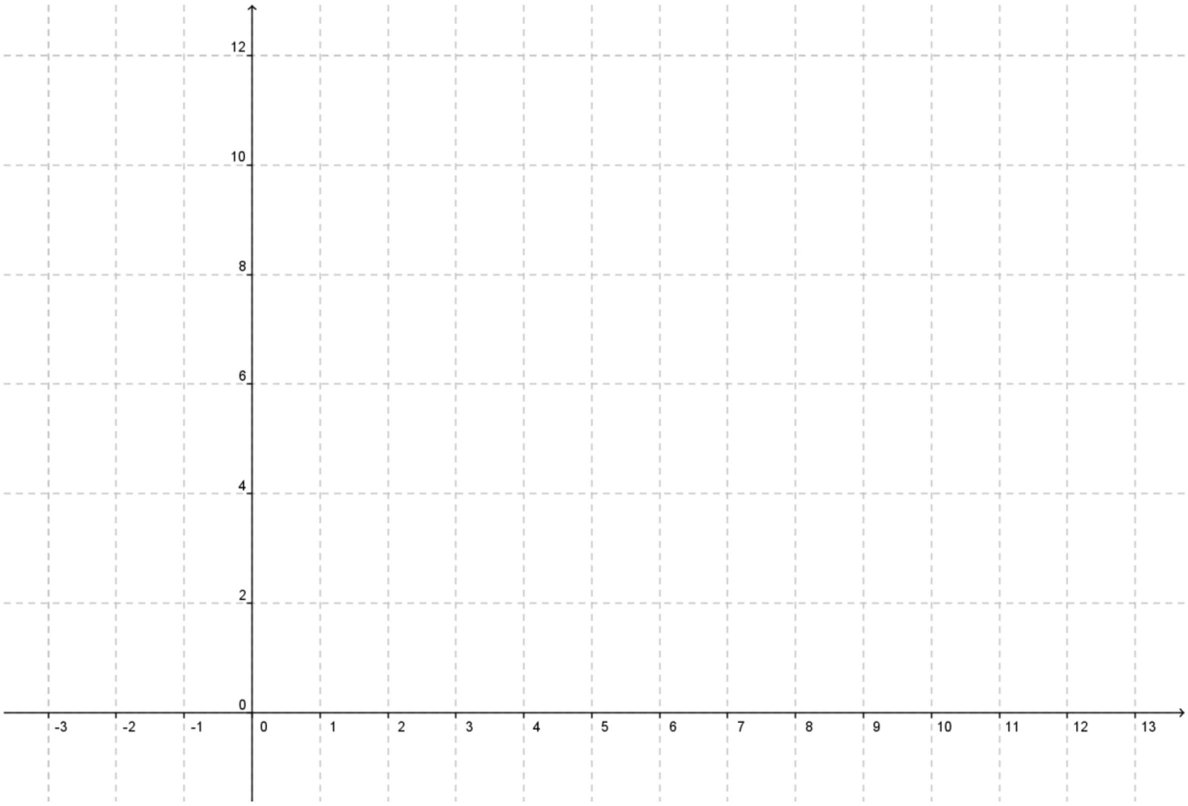
O par ordenado (2,6) é a solução do sistema $\begin{cases} 3x + y = 12 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases}$

No entanto quando as equações não apresentam a mesma incógnita com mesmos ou coeficientes opostos, podemos preparar o sistema multiplicando as duas equações, veja o exemplo:

$\begin{cases} \mathbf{3x + 7y = 2\ (\mathit{primeira\ equação})} \\ \mathbf{2x + 3y = 3\ (\mathit{segunda\ equação})} \end{cases}$	Vamos analisar os coeficientes de uma incógnita nas equações: os coeficientes 2 e 3 da incógnita x. Observe que o $mmc(2,3) = 6$; vamos multiplicar a primeira equação por 2 e a segunda equação por -3. $\begin{cases} 3x + 7y = 2 \cdot (2) \\ 2x + 3y = 3 \cdot (-3) \end{cases}$ $\begin{cases} 6x + 14y = 4 \\ -6x - 9y = -9 \end{cases}$ Segue-se o procedimento apresentado anteriormente.

Interpretação geométrica de sistemas 2 x 2

2. Esboce o gráfico das retas $3x + y - 12 = 0$ e $3x + 4y - 30 = 0$ no mesmo sistema de eixos



3. Analisando os gráficos acima dê uma interpretação geométrica para a solução do sistema $\begin{cases} 3x + y = 12 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases}$

4. Retorne ao “Problema da ração” (tomando como equações as expressões que o descrevem matematicamente) esboce os gráficos e encontre o ponto de intersecção entre as retas. Note que estes pontos de intersecção são os vértices da região delimitada pelas retas – região poligonal.

5. Retorne à atividade 6 da folha 4 (esta atividade remete às folhas 3A ou 3B) e encontre o ponto de intersecção entre as retas.

Observação: Note que quando as soluções do sistema são inteiras, muitas vezes é fácil encontrá-las geometricamente, mas se não forem, a resolução algébrica do sistema se torna imprescindível para encontrá-las.

Aula 5 – 3 horas aula

I. Objetivos e expectativas do professor

O objetivo principal é levar os alunos a conjecturarem sobre o teorema fundamental da PL concluindo que o máximo/mínimo da função é atingido em um dos vértices da região poligonal. Para isso os alunos deverão:

a) Esboçar gráficos de funções polinomiais do primeiro grau variando o coeficiente linear, gerando uma família de retas paralelas;

b) Concluir que a mudança no coeficiente linear gera uma série de retas paralelas;

c) Utilizar o software GeoGebra para resolver o "Problema da corrida" utilizando o controle deslizante;

d) Conjecturar sobre o possível máximo da função;

e) Concluir que o máximo/mínimo da função deve ser atingido em um dos vértices da região admissível.

II. Desenvolvimento

1º) Esboçar, a mão, o gráfico da função $p = 5x + 4y$ para $p = 8, p = 20, p = 40, p = 60 \; e \; p = 63$;

2º) Analisar os gráficos desenhados. Os alunos deverão responder às perguntas sobre as posições das retas;

3º) No laboratório de informática os alunos deverão, com a ajuda do professor, realizar as demais atividades. Cada aluno deverá trabalhar primeiro com o problema que escolheu inicialmente – "Dieta dos sonhos" ou "Corrida Maluca".

Folha 6

1. Esboce, no mesmo sistema de eixos abaixo, o gráfico de $p = 5x + 4y$ para $p = 8, p = 20, p = 40, p = 60\ e\ p = 63$.

2. Como são essas retas em relação à posição de uma às outras?

3. O que essas equações de retas têm em comum? O que mudou?

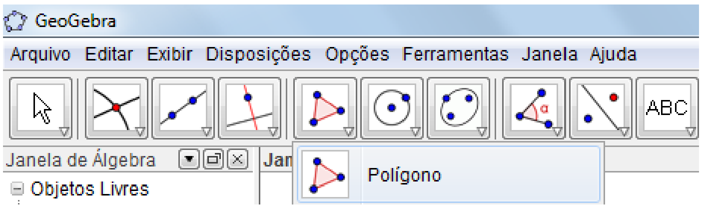
4. Qual a consequência de mudar o coeficiente linear numa equação de reta?

Atividades com GeoGebra – A corrida maluca

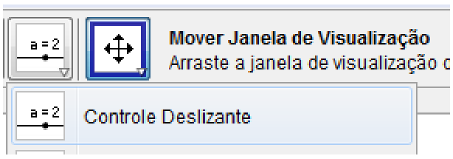
1. No software GeoGebra, insira as desigualdades relativas às restrições do problema “ A corrida maluca”. Comando: em “Entrada” digite $4x + 3y \leq 50$.

2. Marque os pontos de intersecção das retas $4x + 3y = 50, x + y = 15\ e\ y = 2$. Esses pontos de intersecção já foram calculados na atividade 5 da folha 5 – eles são vértices da região poligonal determinada pelas desigualdades.

3. Desenhe um polígono com vértices nos pontos de intersecção das retas. Utilize o botão Polígono (5º botão) mostrado na figura abaixo



4. Insira um Controle Deslizante (11º botão), nomeie-o de **p** e faça-o variar de 0 a 70.



5. Insira a função pontos $5x + 4y = p$

6. Movimente o Controle Deslizante p, observe o comportamento da função pontos.

7. Onde a função pontos atinge o máximo?

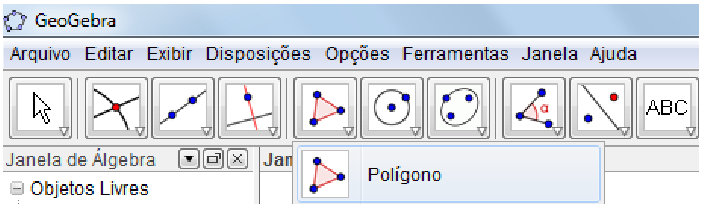
8. A função pontos poderia assumir o valor 68? Para quais x e y?

9. Por que esse não é o máximo que a função pontos p pode atingir?

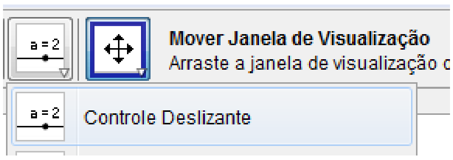
10. Você pode fazer uma suposição sobre onde o as funções que se pretende maximizar atingirão o máximo? Comente a respeito.

Atividades com GeoGebra – Dieta dos sonhos

1. No software GeoGebra insira as desigualdades relativas às restrições do problema “Dieta dos sonhos”. Comando: em “Entrada” digite $x + y = 15$.
2. Marque os pontos de intersecção das retas $x + y = 15$, $1{,}8x + 1{,}4y = 25$, $x = 0$ e $y = 2$. Esses pontos de intersecção já foram calculados na atividade 5 da folha 5: Eles são vértices da região poligonal determinada pelas desigualdades.
3. Desenhe um polígono com vértices nos pontos de intersecção das retas. Utilize o botão Polígono (5º botão) mostrado na figura abaixo



4. Insira um Controle Deslizante (11º botão), nomeie-o de **c** e faça-o variar de 0 a 2500.



5. Insira a função pontos $c = 140x + 127y$
6. Movimente o Controle Deslizante p, observe o comportamento da função pontos.
7. Onde a função pontos atinge o máximo?
8. A função pontos poderia assumir o valor 2400? Para quais x e y?
9. Por que esse não é o máximo que a função calorias c pode atingir?
10. Você pode fazer uma suposição sobre onde o as funções que se pretende maximizar atingirão o máximo? Comente a respeito.

Aula 6 – 3 horas aula

I. Objetivos e expectativas do professor

Esta aula tem por objetivo principal levar os alunos a conjecturarem sobre o teorema fundamental da PL concluindo que o máximo/mínimo da função é atingido em um dos vértices da região poligonal. Para isso os alunos deverão:

a) Esboçar gráficos de funções polinomiais do primeiro grau variando o coeficiente linear, gerando uma família de retas paralelas;
b) Concluir que a mudança no coeficiente linear gera uma série de retas paralelas;
c) Utilizar o software GeoGebra para resolver o "Problema da corrida" utilizando o controle deslizante;
d) Conjecturar sobre o possível máximo da função;
e) Concluir que o máximo/mínimo da função deve ser atingido em um dos vértices da região admissível.

II. Desenvolvimento

1º) Os alunos, no laboratório de informática, individualmente ou em duplas deverão realizar as atividades propostas com o uso do aplicativo GeoGebra. Através da manipulação do arquivo dinâmico, deverão responder aos questionamentos.

Folha 7

Treinamento esportivo

Um jovem atleta se sente atraído pela prática de dois esportes: natação e ciclismo: Sabe por experiência que:

A natação exige um gasto médio R$ 5,00 por sessão de uma hora de treinamento decorrente da mensalidade do clube e do deslocamento até a piscina. O ciclismo, mais simples, acaba custando R$ 2,00 a sessão de uma hora. O atleta possui um orçamento mensal de R$ 160,00 para seu treinamento.

Sabe, por questão de saúde, que poderá fazer no máximo 65 horas mensal de treinamento nas duas modalidades esportivas.

Deverá fazer no mínimo 5 horas mensais de natação e 10 horas mensais de ciclismo.

A natação tem um gasto calórico de 400 Kcal por hora e o ciclismo de 280 Kcal por hora de treinamento. Quantas horas de cada modalidade o atleta deve praticar para maximizar o gasto calórico mensal?

Você já viu que este problema pode ser descrito em linguagem matemática pelo seguinte conjunto de equações:

Maximizar a função calorias (c):

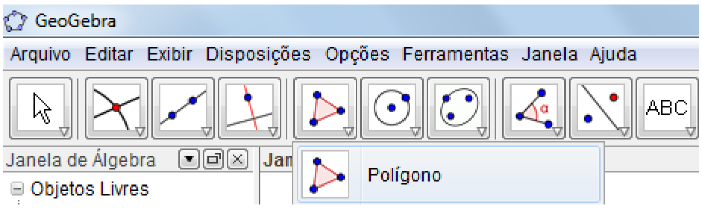
$$400x + 280y = c$$

Sujeito às restrições:

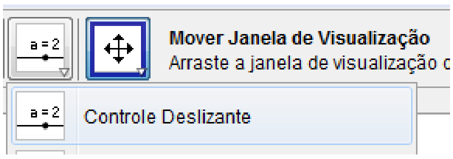
$$5x + 2y \leq 160$$
$$x + y \leq 65$$
$$x \geq 5$$
$$y \geq 10$$

Atividades com GeoGebra – Treinamento esportivo

1. No software GeoGebra insira as desigualdades relativas às restrições do problema " Treinamento esportivo".
2. Marque os pontos de intersecção das retas. Esses pontos já foram calculados em uma atividade anterior: (5,10), (5,60), (10,55), (28,10). Esses pontos são os vértices da região poligonal determinada pelas desigualdades.
3. Desenhe um polígono com vértices nos pontos de intersecção das retas. Utilize o botão Polígono (5º botão) mostrado na figura abaixo



4. Insira um Controle Deslizante (11º botão), nomeie-o de **c** e faça-o variar de 0 a 20000.



5. Insira a função pontos $400x + 280y = c$
6. Movimente o Controle Deslizante c, observe o comportamento da função calorias.
7. Onde a função pontos atinge o máximo? Qual é o máximo?
8. A função calorias c poderia assumir o valor 20000?
9. Por que esse não é o máximo que a função calorias c pode assumir?

Problema da ração

Um criador de cães pode optar por duas rações: “Boa pra cachorro” ou “Até cachorro come”. Ambas são vendidas em sacos de 1 quilograma.

O criador sabe que seus cães precisam de uma quantidade mensal de 12 unidades de vitamina A, 28 unidades de vitamina B e 28 unidades de vitamina D.

Cada saco da ração “Bom pra cachorro” custa R$ 3,00 e tem 3 unidades de vitamina A, 2 unidades de vitamina B e 2 unidades de vitamina D.

Cada saco da ração “Até cachorro come” custa R$ 2,00 e tem 1 unidade de vitamina A, 4 unidades de vitamina B e 7 unidades de vitamina D.

Quantos sacos de cada ração o criador deve comprar para atender as necessidades de vitaminas na dieta de seus cães gastando para isso, o mínimo necessário?

Você já viu que este problema pode ser descrito em linguagem matemática pelo seguinte conjunto de equações:

Minimizar a função custo (c)

$$3x + 2y = c$$

Sujeita às restrições:

$$\begin{aligned} &3x + y \geq 12 \\ &2x + 4y \geq 28 \\ &2x + 7y \geq 28 \\ &x \geq 0 \\ &y \geq 0 \end{aligned}$$

Atividades com GeoGebra – Problema da ração

1. No software GeoGebra insira as desigualdades relativas às restrições do “Problema da ração”.
2. Marque os pontos de intersecção das retas. Esses pontos já foram calculados: (0,12), (2,6) e (14,0).
3. Note que diferentemente dos outros problemas este não tem região poligonal fechada.
4. Insira um Controle Deslizante (11º botão), nomeie-o de **c** e faça-o variar de 0 a 60.
5. Insira a função custo $3x + 2y = c$
6. Movimente o Controle Deslizante c, observe o comportamento da função custo.
7. Onde a função custo atinge o valor mínimo?
8. A função custo pode atingir um valor máximo? Dê sua explicação.
9. Pensando nos problemas que você já resolveu, faça uma suposição de onde as funções que se pretende maximizar ou minimizar atingem o máximo ou mínimo. Escreva um comentário a respeito.

Aula 7 – 1 hora aula

I. Objetivos e expectativas do professor

Nesta aula os alunos deverão elaborar um cronograma (algoritmo) para a resolução de problemas de PL.

II. Desenvolvimento

1º) Completar a tabela com os passos para a resolução baseados nos procedimentos adotados durante as aulas.

.

Folha 8

Para resolver um problema de PL com duas variáveis, utilizando o método geométrico, você realiza uma série de passos. Descreva, na tabela abaixo, os procedimentos adotados para a resolução – inspire-se nos problemas resolvidos.

Passo 1
Passo 2
Passo 3
Passo 4
Passo 5
Passo 6

Aula 8 – 3 horas aula

I. Objetivos e expectativas do professor

Resolver o “Problema do combustível”, inédito na sequência de atividades. Os alunos deverão desenvolver todas as etapas de resolução que descreveram no cronograma elaborado.

Esta é a atividade de encerramento da sequência de atividades e servirá como avaliação do projeto.

II. Desenvolvimento

Os alunos, individualmente resolverão o problema e elaborarão um arquivo dinâmico com o GeoGebra.

Problema do combustível

Começa a faltar gasolina no Rio Grande do Sul

Mau tempo dificulta descarga em Tramandaí, e Refap não recebe todo o petróleo necessário para abastecimento do mercado.

A combinação de mau tempo, aumento da demanda e produção limitada provocam problemas de abastecimento de gasolina no Rio Grande do Sul. Com estoques reduzidos em postos de combustíveis, as distribuidoras estão buscando o produto em Santa Catarina e no Paraná.

Segundo a Petrobras, está havendo "condições climáticas desfavoráveis para amarração de navios e descarga de matéria-prima no terminal marítimo de Tramandaí". Desde a semana passada, a Refinaria Alberto Pasqualini (Refap), em Canoas, que abastece 80% do mercado gaúcho, está com a produção reduzida devido à escassez de petróleo trazido de fora.

Zero Hora, 16/10/2012

Seu Precavido, um homem atualizado e cauteloso, proprietário de um carro flex, pretende usar seus conhecimentos sobre PL para não ficar sem combustível.

O tanque do carro do Senhor Precavido está vazio e tem capacidade de 40 litros de combustível.

O litro da gasolina está custando na cidade de Seu Precavido R$ 2,80 e o litro de álcool custa R$ 1,60. Ele tem disponível R$ 100,00 para gastar com os dois combustíveis.

Com um litro de gasolina o carro de Seu Precavido anda 12 km e com um litro de álcool 9 km.

Quantos litros de cada combustível Seu Precavido deve comprar para obter a maior autonomia possível ficando assim imune à falta de combustível?

Apêndice 2 – Resolução dos problemas propostos na sequência didática

A dieta dos sonhos

Sejam x o número de barras de chocolate branco e y o número de barras de chocolate meio amargo.

Maximizar a função calorias $c = 140x + 127y$ sujeita às restrições:

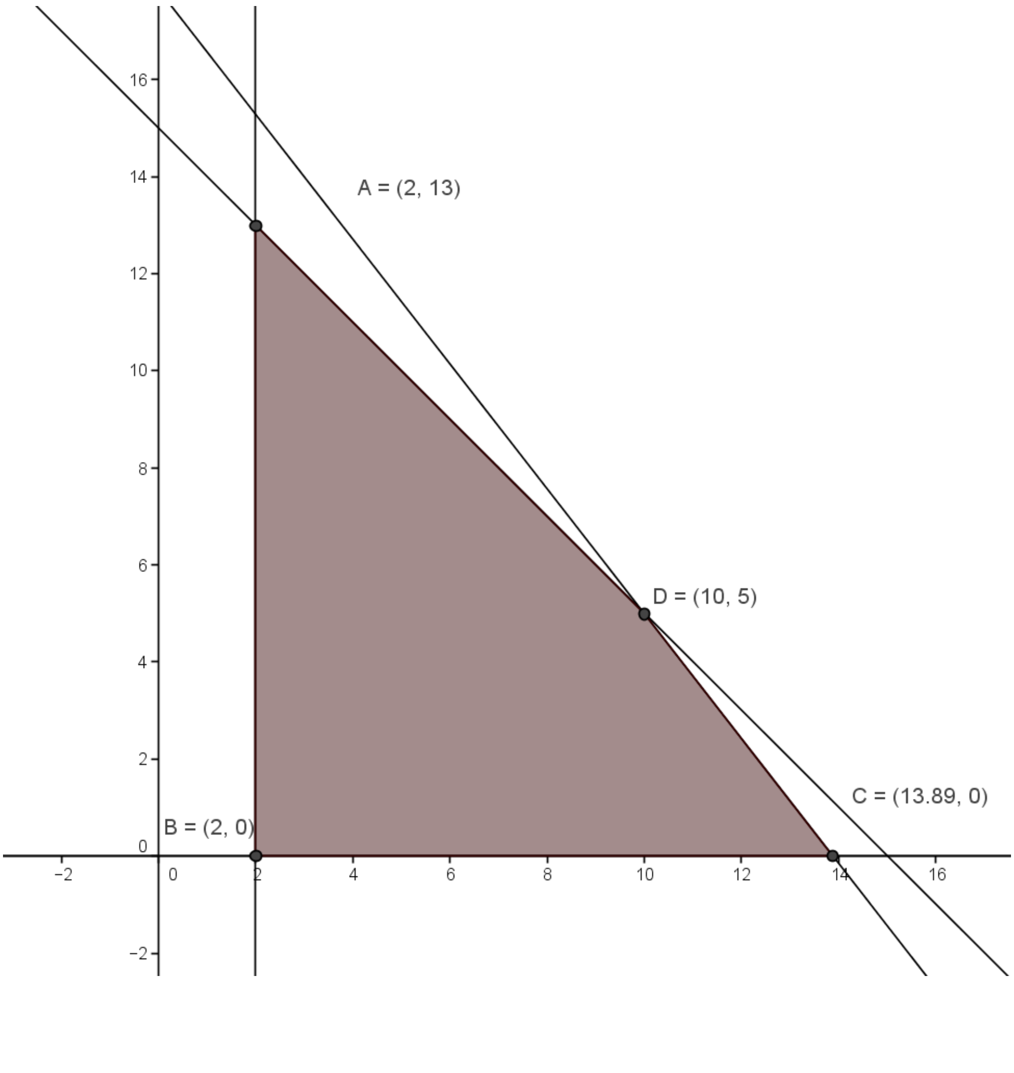
$$x + y \leq 15,$$

$$x \geq 2,$$

$$1{,}8x + 1{,}4y \leq 25,$$

$$y \geq 0.$$

A figura abaixo mostra a região viável do problema e os vértices da região poligonal:



Na tabela abaixo mostramos o valor da função calorias nos pontos extremos da região viável (vértices da região poligonal):

Pontos extremos $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$	Valor de $\boldsymbol{c = 140x + 127y}$
(2,13)	**1931**
(2,0)	**280**
(13,89,0)	**1944,6**
(10,5)	**2035**

O máximo de calorias é obtido quando se consomem 10 barras de chocolate branco e 5 barras de chocolate meio amargo.

A corrida maluca

Sejam x o de voltas na pista 1 e y o número de voltas na pista 2.

Maximizar a função pontos $p = 5x + 4y$ sujeita às restrições:

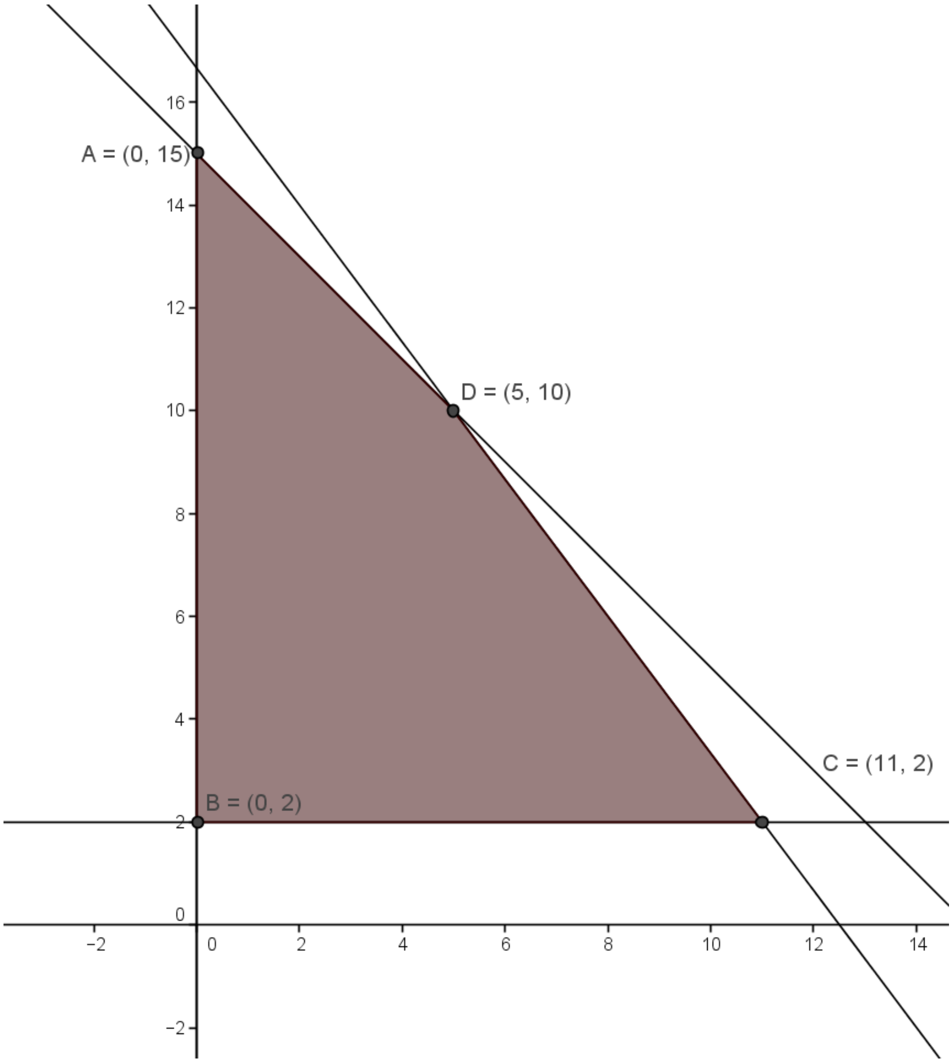
$$4x + 3y \leq 50,$$

$$y \geq 2,$$

$$x + y \leq 15,$$

$$x \geq 0.$$

A figura abaixo mostra a região viável do problema e os vértices da região poligonal:



Na tabela abaixo mostramos o valor da função p nos pontos extremos da região viável (vértices da região poligonal):

Pontos extremos $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$	Valor de $\boldsymbol{c = 5x + 4y}$
(0,15)	**60**
(0,2)	**8**
(11,2)	**63**
(5,10)	**65**

O máximo de pontos é obtido quando se percorrem 5 voltas na pista 1 e 10 voltas na pista 2.

Treinamento esportivo

Sejam x o número horas praticadas de natação e y o número horas praticadas de ciclismo.

Maximizar a função gasto calórico $c = 400x + 280y$ sujeita às restrições:

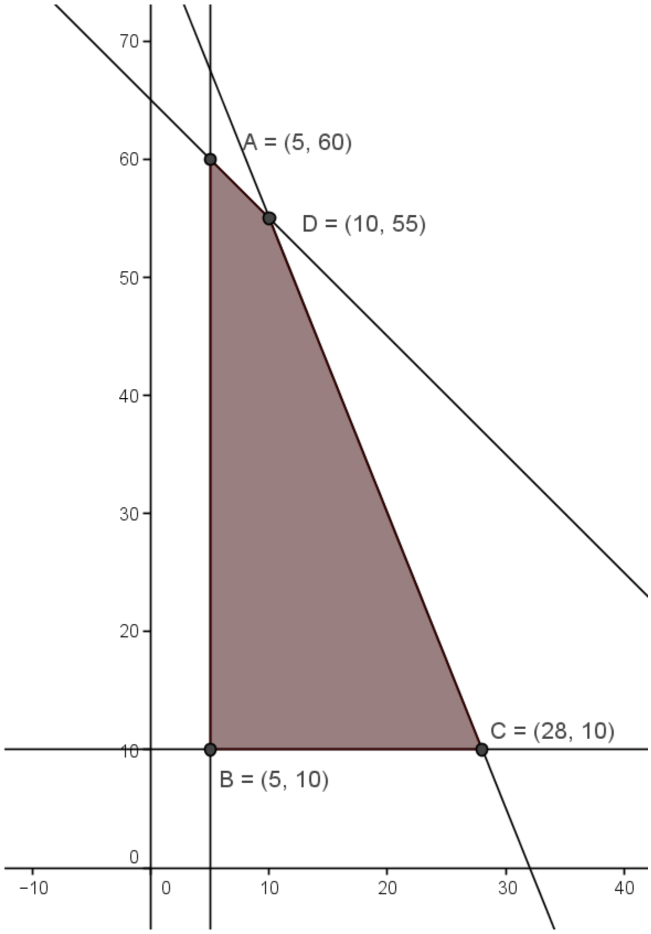
$$5x + 2y \leq 160,$$

$$x + y \leq 65,$$

$$x \geq 5,$$

$$y \geq 10.$$

A figura abaixo mostra a região viável do problema e os vértices da região poligonal:



Na tabela abaixo mostramos o valor da função gasto calórico nos pontos extremos da região viável (vértices da região poligonal):

Pontos extremos $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$	Valor de $\boldsymbol{c = 400x + 280y}$
(5,60)	**18800**
(5,10)	**4800**
(28,10)	**14000**
(10,55)	**19400**

O máximo de gasto calórico é obtido quando se praticam 10 horas de natação e 55 horas de ciclismo.

Problema da ração

Sejam x o número de sacos da ração "Boa pra cachorro" e y o número de sacos da ração "Até cachorro come".

Minimizar a função custo $c = 3x + 2y$ sujeita às restrições:

$$3x + y \geq 12,$$

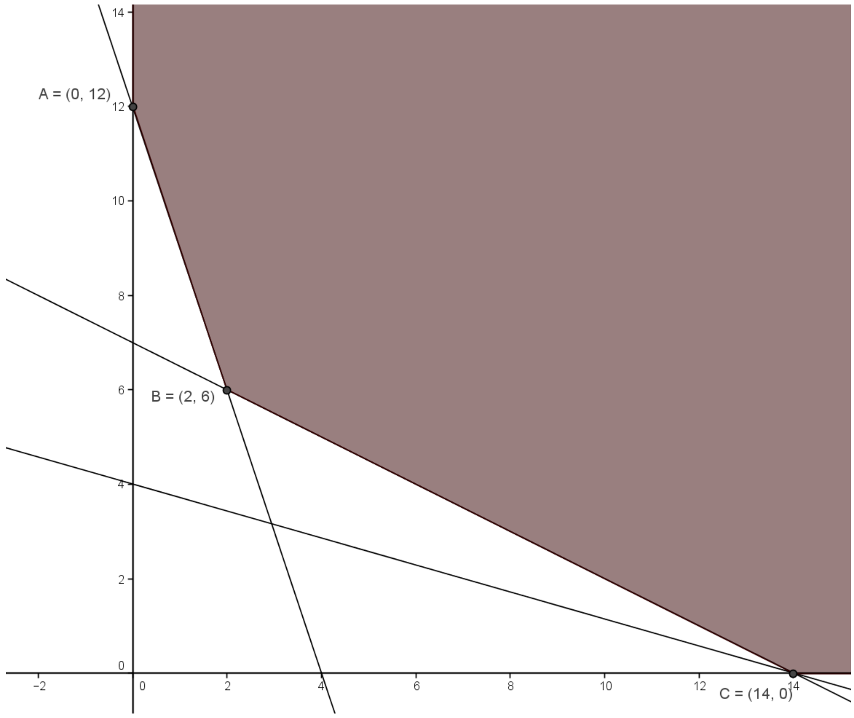
$$2x + 4y \geq 28,$$

$$2x + 7y \geq 28,$$

$$x \geq 0,$$

$$y \geq 0.$$

A figura abaixo mostra a região viável do problema. Note que a região possível do problema não é fechada:



Na tabela abaixo mostramos o valor da função autonomia nos pontos extremos da região viável:

Pontos extremos $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	Valor de $\boldsymbol{c = 3x + 2y}$
(0,12)	**24**
(2,6)	**18**
(14,0)	**42**

O custo mínimo é obtido quando se compram 2 sacos da ração "Boa pra cachorro" e 6 sacos da ração "Até cachorro come".

Problema do combustível

Sejam x o número litros de gasolina e y o número de litros de álcool.

Maximizar a função autonomia $a = 12x + 9y$ sujeita às restrições:

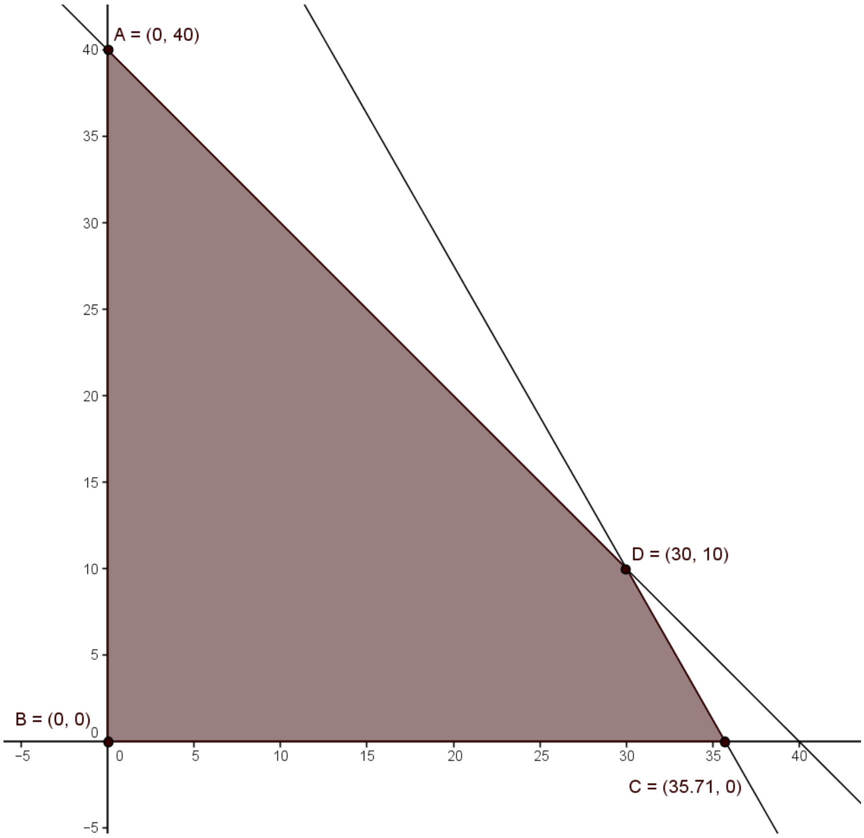
$$x + y \leq 40,$$

$$2{,}80x + 1{,}60y \leq 100,$$

$$x \geq 0,$$

$$y \geq 0.$$

A figura abaixo mostra a região viável do problema.



Na tabela abaixo mostramos o valor da função custo nos pontos extremos da região viável:

Pontos extremos $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$	Valor de $\boldsymbol{a = 12x + 9y}$
(0,40)	**360**
(0,0)	**0**
(31.71,0)	**428,52**
(30,10)	**450**

A maior autonomia é conseguida quando se abastece com 30 litros de gasolina e 10 litros de álcool.