

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS
NA ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE ESTRUTURAS DE
CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO**

MARCELO PORTO DE FIGUEIREDO

Porto Alegre
Julho 2006

MARCELO PORTO DE FIGUEIREDO

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS
NA ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE ESTRUTURAS DE
CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Engenharia na modalidade Acadêmico

Porto Alegre
Julho 2006

MARCELO PORTO DE FIGUEIREDO

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS
NA ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE ESTRUTURAS DE
CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO**

Porto Alegre, 14 de julho de 2006

Prof. Luiz Carlos Pinto da Silva Filho
Ph.D., University of Leeds
Orientador

Prof. Roberto Domingo Rios
Dr., Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Orientador

Prof. Fernando Schnaid
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Mauro de Vasconcellos Real
Dr., Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Américo Campos Filho
Dr., Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Prof. Virgínia Maria Rosito d'Avila
Dr., Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Aos meus pais
Marco Aurélio e Marila Terezinha

AGRADECIMENTOS

Agradeço aqui a todas as pessoas que colaboraram de alguma forma para o desenvolvimento e concretização deste trabalho.

Ao professor e orientador Roberto Domingo Rios, pela dedicação e apoio despendidos nestes cinco anos em que trabalhamos juntos.

Ao professor Luis Carlos da Silva Filho, pela orientação da presente dissertação.

À Vó Marina, pela introdução ao mundo dos números!

Ao meu pai e minha mãe, equilíbrio e esplendor de minha vida.

Ao amigo Cesar Peña Olinto, pelas oportunidades proporcionadas e pelo companheirismo.

A todos os amigos, que durante este caminho cheio de obstáculos, sempre procuraram incentivar e ajudar.

À turma do Mestrado em Estruturas, pelo agradável convívio.

Ao CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio concedido ao desenvolvimento da pesquisa.

RESUMO

FIGUEIREDO, M.P. **Aplicação do Método dos Elementos Discretos na Análise Estática e Dinâmica de Estruturas de Concreto Reforçado com Fibras de Aço**. 2006. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PPGEC, UFRGS, Porto Alegre, 2006.

Quando o concreto é submetido a carregamentos especiais, como cargas cíclicas ou ação de cargas de impacto, modificações em sua composição são necessárias. Uma vez que o material não apresenta desempenho satisfatório à tração, seu comportamento frente a este tipo de carregamento acaba seriamente comprometido. Uma alternativa para amenizar esta deficiência consiste em adicionar fibras de aço ao concreto. Ao adicionar estes elementos à matriz cimentícia, promove-se meios de transferência de tensões através das fissuras, aumentando a tenacidade do material, proporcionando mecanismos de absorção, relacionados com o desligamento e o arrancamento de fibras. Um número significativo de trabalhos experimentais envolvendo os mais diversos tipos de elementos estruturais reforçados com fibras de aço está disponível, havendo, no entanto, uma forte carência sob o ponto de vista de simulações numéricas. Buscando colaborar no desenvolvimento do material, o presente trabalho propõe a aplicação do Método dos Elementos Discretos para simulação do compósito submetido a carregamentos estáticos e dinâmicos. São realizadas alterações no algoritmo do método a fim de realizar a dispersão de fibras de aço na matriz de concreto. A análise das condições de contorno utilizadas em trabalho anterior revela a necessidade de aplicação de apoios elásticos sob pena de superestimar a rigidez do modelo. Os diagramas carga versus deslocamento que resultaram dos ensaios estáticos demonstram que o modelo criado é sensível à adição de fibras: maiores teores conduzem a modelos com maior tenacidade. O ensaio de impacto também se mostrou sensível e o padrão de fissuração encontrado nas simulações revelou uma boa aproximação com ensaios experimentais anteriores.

Palavras-chave: Concreto Reforçado com Fibras de Aço; Método dos Elementos Discretos; Simulação Numérica

ABSTRACT

FIGUEIREDO, M.P. **Application of the Discrete Element Method in static and dynamic analysis of steel fiber reinforced concrete structures**. 2006. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PPGEC, UFRGS, Porto Alegre, 2006.

When submitted to special loading patterns, derived from dynamical actions such as cyclic or impact loads, some alterations in the concrete constitution need to be done, since the material don't have an adequate behavior under tensile stress. A feasible alternative, in such cases, is to incorporate steel fibers in the concrete matrix. Adding these elements, stress transference mechanisms along the cracks are promoted, increasing the material tenacity. An expressive number of experimental works involving all the kinds of steel fiber reinforced concrete structural elements are available. However, few researches based on numerical methods are found in the literature. In order to contribute with the data collection and the development of the material, the present research work proposes the application of the Discrete Element Method to simulate the composite subjected to static and dynamic loads. Some modifications are made on the method algorithm trying to create the dispersion of fibers in the concrete matrix. The analysis of the boundary conditions used on previous work reveal the importance of using elastic support to don't overestimate the stiffness of the model. The diagram load *versus* displacement that came from the static simulations shows that the model is sensible to the addition of fibers: higher proportions of fiber leads to models with higher tenacity. The impact tests also demonstrate sensibility and the crack pattern found on the simulations presented a very good approximation to previous experimental work.

Key-words: Steel Fiber Reinforced Concrete; Discrete Element Method; Numerical Smulation

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Relevância e justificativa	1
1.2	Objetivos	3
1.3	Estrutura do trabalho	4
2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS	5
2.1	Aspectos teóricos do concreto reforçado com fibras de aço	5
2.1.1	Considerações iniciais	5
2.1.2	Objetivos do uso das fibras	5
2.1.3	Comportamento no Estado Fresco	7
2.1.4	Mecanismos de transferência de tensões	8
2.1.4.1	Comportamento pré-fissuração	9
2.1.4.2	Comportamento pós-fissuração	10
2.1.5	Outros fatores influentes	12
2.1.6	Principais efeitos da adição das fibras	13
2.2	Método dos Elementos Discretos	14
2.2.1	Revisão do Método	15
2.2.1.1	Formulação empregada neste trabalho	16
2.3	Revisão de outros métodos numéricos já empregados	30
3	IMPLEMENTAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO ALEATÓRIA DAS FIBRAS	34
3.1	Dispersão das fibras de aço na matriz de concreto	34
3.1.1	Geração de números pseudoaleatórios	36
3.1.2	Ajuste do tamanho das fibras	37
3.1.3	Aleatorização da dispersão das fibras	41

3.1.4	Aplicação das relações constitutivas e outras alterações	42
3.1.5	Fluxograma	43
4	IMPLEMENTAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	44
4.1	Alterações propostas	44
4.2	Simulações	46
5	SIMULAÇÃO DOS ENSAIOS DE TENACIDADE	52
5.1	Tenacidade à flexão do concreto reforçado com fibras de aço	52
5.2	Velocidade de aplicação da carga	53
5.3	Número de fibras utilizadas nos modelos	54
5.4	Propriedades mecânicas dos modelos simulados.....	54
5.5	Simulações	56
5.5.1	Placa sem reforço - Testemunho.....	57
5.5.2	Fibra 80/60	58
5.5.2.1	Fibra 80/60 – Teor 10 kg/m ³	58
5.5.2.2	Fibra 80/60 – Teor 30 kg/m ³	59
5.5.2.3	Fibra 80/60 – Teor 45 kg/m ³	60
5.5.2.4	Fibra 80/60 – Teor 60 kg/m ³	61
5.5.3	Fibra 65/60	62
5.5.3.1	Fibra 65/60 – Teor 10 kg/m ³	62
5.5.3.2	Fibra 65-60 – Teor 30kg/m ³	63
5.5.3.3	Fibra 65-60 – Teor 45 kg/m ³	64
5.5.3.4	Fibra 65-60 – Teor 60 kg/m ³	65
5.5.4	Resumo dos Resultados	66
5.5.5	Esquemas de Ruptura.....	67
6	ENSAIOS DE IMPACTO	70
6.1	Determinação das cargas de impacto.....	71
6.1.1	Medições experimentais.....	71

6.1.2	Método do Fator de Impacto.....	72
6.1.3	Programas computacionais comerciais	74
6.1.4	Fórmulas obtidas a partir do Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento	75
6.1.5	Aplicação de velocidades	77
6.2	Ensaio de pulso único.....	77
6.2.1	Objetivos	77
6.2.2	Resultados	78
6.3	Ensaio de queda de esfera	80
6.3.1	Esquema de Cargas.....	80
6.3.2	Definição da região de aplicação da carga	81
6.3.3	Resultados	82
6.3.4	Comparativo dos padrões de fissuração.....	84
7	CONCLUSÕES	85
	REFERÊNCIAS	88

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: (a) Mecanismo de concentração de tensões na tração no extremo das microfissuras; (b) mecanismo de reforço das fibras atuando como ponte de transferência de tensões. (Nunes e Agopyan, 1998 <i>apud</i> Garcez, 2005).....	7
Figura 2.2 – Representação das tensões de cisalhamento na interface fibra-matriz imediatamente após a fissura (Bentur e Mindess, 1990 <i>apud</i> Garcez, 2005).....	9
Figura 2.3 – Tensões de cisalhamento na interface fibra-matriz após desligamento parcial das fibras (Holanda, 2002).....	10
Figura 2.4 – Representação das zonas de transferência de tensões ao longo de uma fissura (Bentur e Mindess, 1990).....	11
Figura 2.5 – Figuras típicas de tensão de tração <i>versus</i> deformação para volumes variáveis de fibras (Bentur e Mindess, 1990, <i>apud</i> Garcez, 2005).	13
Figura 2.5 – Módulo cúbico apresentado por Nayfeh & Hefzy (1979) e utilizado nos trabalhos de Hayashi (1982), Rocha (1989) e Rios (2002). a) Módulo Cúbico b) e c) composição de prismas.....	17
Figura 2.6 – Cálculo da área efetiva para as barras normais (a), e diagonais (b) do módulo cúbico.....	20
Figura 2.7 – Relação constitutiva elementar implementada por Rocha (1989).....	27
Figura 2.8 – Relação constitutiva para o aço.....	28
Figura 2.9 – Modelos constitutivos adotados por Al-Ta'an e Ezzadeen (1995) para simular o comportamento do concreto reforçado com fibras.	31
Figura 3.1 – Proposta de substituição de barras que representam o concreto (azul) por barras que representam as fibras de aço (vermelho).....	35
Figura 3.2 – Modelo discreto inicial: comprimento das fibras não ajustado.....	37
Figura 3.3 – Esquema do procedimento aplicado para ajustar o tamanho das fibras.....	38
Figura 3.4 – Barras ajustadas na direção x.....	40
Figura 3.5 – Barras ajustadas na direção y.....	40
Figura 3.6 – Barras ajustadas na direção z.....	41

Figura 3.7 – Dois esquemas de distribuição de fibras gerados a partir de sementes diferentes. Diferenciação no posicionamento leva a resultados diferentes.....	42
Figura 3.8 – Fluxograma da metodologia para obtenção da distribuição aleatória.....	43
Figura 4.1 – Modelo ensaiado por Garcez 2005.	45
Figura 4.2 – Nós fixos no contorno	45
Figura 4.3 – Substituição dos apoios fixos por molas.....	46
Figura 4.4 – Deslocamentos aplicados em um raio de 1,5 cm	47
Figura 4.5 – Curvas Carga <i>versus</i> Deslocamento para absorvedores de choque do tipo neoprene (LDEC, 1997).....	48
Figura 4.6 – Diagrama carga <i>versus</i> deslocamento: apoios fixos.....	48
Figura 4.7 – Diagrama carga <i>versus</i> deslocamento $k=5000\text{kN/m}$	49
Figura 4.8 – Diagrama carga <i>versus</i> deslocamento $k=2500\text{kN/m}$	49
Figura 4.9 – Diagrama carga <i>versus</i> deslocamento $k=1000\text{kN/m}$	50
Figura 4.10 – Resumo das simulações com apoios variáveis.	50
Figura 5.1 – Digrama carga <i>versus</i> deslocamento: placa sem reforço de fibras – testemunho.	57
Figura 5.2 – Digrama carga <i>versus</i> deslocamento: placa com adição de 10kg/m^3 de fibras de aço do tipo 80/60.	58
Figura 5.3 – Digrama carga <i>versus</i> deslocamento: placa com adição de 30kg/m^3 de fibras de aço do tipo 80/60.	59
Figura 5.4 – Digrama carga <i>versus</i> deslocamento: placa com adição de 45kg/m^3 de fibras de aço do tipo 80/60.	60
Figura 5.5 – Digrama carga <i>versus</i> deslocamento: placa com adição de 60kg/m^3 de fibras de aço do tipo 80/60.	61
Figura 5.6 – Digrama carga <i>versus</i> deslocamento: placa com adição de 10kg/m^3 de fibras de aço do tipo 65/60.	62
Figura 5.7 – Digrama carga <i>versus</i> deslocamento: placa com adição de 30kg/m^3 de fibras de aço do tipo 65/60.	63
Figura 5.8 – Digrama carga <i>versus</i> deslocamento: placa com adição de 45kg/m^3 de fibras de aço do tipo 65/60.	64
Figura 5.9 – Digrama carga <i>versus</i> deslocamento: placa com adição de 60kg/m^3 de fibras de aço do tipo 65/60.	65
Figura 5.10 – Resumo dos resultados dos ensaios de tenacidade.....	67

Figura 5.11 – Esquema de ruptura no instante 0,0075s.....	68
Figura 5.12 – Esquema de ruptura no instante 0,0105s.....	68
Figura 5.13 – Esquema de ruptura no instante 0,0135s.....	69
Figura 5.14 – Esquema de ruptura no instante 0,0145s.....	69
Figura 6.1 – Modelo gerado no Working Model™ e diagrama gerado pelo programa.	74
Figura 6.2 – Diagrama Resistência ao pulso <i>versus</i> Teor de fibras. Resultados de três simulações para cada teor e regressão encontrada.....	79
Figura 6.3 – Esquema de aplicação de cargas	81
Figura 6.4 – Alteração da seção de aplicação de carga no decorrer do tempo. (a) correspondente aos primeiros 8 ms de contato e (b) atuante nos 7 ms posteriores (Garcez, 2005).	82
Figura 6.5 – Ensaio de “Queda de esfera”. Reação nos apoios <i>versus</i> Tempo. Teor de fibras: 10 kg/m ³	83
Figura 6.6 – Ensaio de “Queda de esfera”. Reação nos apoios <i>versus</i> Tempo. Teor de fibras: 60 kg/m ³	83
Figura 6.7 – Padrão de fissuração, simulação numérica.....	84
Figura 6.8 – Padrão de fissuração, ensaio experimental (Garcez, 2005).	84

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Recomendações para dosagem de concretos reforçados com fibras de aço (ACI, 1996)	8
Tabela 4.1 – Propriedades mecânicas utilizadas na simulação numérica.....	47
Tabela 4.2 – Cargas de pico	51
Tabela 5.1 – Número de barras “transformadas” em fibras de aço	54
Tabela 5.2 – Propriedades Mecânicas.....	54
Tabela 5.3 – Propriedades das fibras	56
Tabela 5.4 – Índice de tenacidade – Placa Testemunho	57
Tabela 5.5 – Índice de tenacidade – Fibras 80/60 – 10kg/m ³	58
Tabela 5.6 – Índice de tenacidade – Fibras 80/60 – 30kg/m ³	59
Tabela 5.7 – Índice de tenacidade – Fibras 80/60 – 45 kg/m ³	60
Tabela 5.8 – Índice de tenacidade – Fibras 80/60 – 60kg/m ³	61
Tabela 5.9 – Índice de tenacidade – Fibras 65/60 – 10kg/m ³	62
Tabela 5.10 – Índice de tenacidade – Fibras 65/60 – 30kg/m ³	63
Tabela 5.11 – Índice de tenacidade – Fibras 65/60 – 45 kg/m ³	64
Tabela 5.12 – Índice de tenacidade – Fibras 65/60 – 60 kg/m ³	65
Tabela 5.13 – Resumo dos Resultados	66
Tabela 6.1 – Carregamento equivalente usando o Método do Fator de Impacto	73
Tabela 6.2 – Carregamento equivalente usando o software comercial Working Model TM 3D 2.0	75
Tabela 6.3 – Resistência ao pulso de carga único	79

LISTA DE SÍMBOLOS

α_n – cosseno diretor

Δt_{crit} – intervalo crítico de integração

δ_{st} – deslocamento da placa devido ao carregamento estático

ε_p – coeficiente de variação, deformação crítica do concreto

ε_r – deformação específica de ruptura do concreto

ε_y – deformação específica de escoamento das fibras de aço

ε_{yr} – deformação de ruptura das fibras de aço

ε_b – deformação de uma barra b

ϕ_{ij} – constantes elásticas

ϕ^i – constantes elásticas das barras normais

ϕ^d – constantes elásticas das barras diagonais

ρ – massa específica

σ_{fu} – tensão última a tração da fibra

τ_{au} – tensão de aderência entre a fibra e a matriz

τ_{fu} – máxima tensão tangencial de atrito

ν – coeficiente de Poisson

c_A – coeficiente geométrico

C_ρ – velocidade de propagação da onda

D_f – constante de amortecimento

E, E_c – módulo de elasticidade do concreto

E_0 – energia cinética antes do impacto

- E_I – energia cinética após o impacto
- EA_d – rigidez das barras diagonais
- EA_n – rigidez das barras normais
- E_{ct} – módulo de elasticidade do concreto
- E_{fi} – módulo de elasticidade das fibras
- E_s – módulo de elasticidade do aço
- F – força média agindo nos dois objetos no impacto
- f_{ck} – resistência característica à compressão do concreto
- f_t – resistência à tração do concreto
- f_y – tensão de escoamento das fibras de aço
- g – aceleração da gravidade
- G_F – energia de fratura
- h – altura da qual a esfera cai
- K – parâmetro da distribuição discreta uniforme
- k – rigidez dos apoios
- k_d – fator de impacto
- k_r – parâmetro de ductilidade
- k_m – fator de redução de massa
- ℓ_c – comprimento crítico
- L – número de nós na direção z
- L_c – aresta do elemento do módulo cúbico
- M – número de nós na direção x
- m_1 – massa da esfera
- m_2 – massa da placa
- N – número de nós na direção y
- NR – total de números aleatórios a serem gerados

P_{crit} – carga crítica associada a deformação crítica

P_{Eq} – carregamento estático equivalente

Q – peso da esfera

Q_o – peso da placa

r – raio da fibra

R_f – fator de falha

s – deformação total

SYS – tensão de escoamento do aço das fibras

t – tempo de simulação

v_1 – velocidade esfera antes do impacto

v_2 – velocidade da placa antes do impacto

v_3 – velocidade após o impacto dos objetos

V_o – velocidade da esfera no instante do impacto

1 INTRODUÇÃO

1.1 RELEVÂNCIA E JUSTIFICATIVA

O concreto, material consagrado por sua grande versatilidade, vem sendo pesquisado intensivamente ao longo das últimas décadas. Estudos desenvolveram tecnologias visando à melhoria de propriedades do material, tais como a trabalhabilidade, aparência, durabilidade e resistência à compressão. Contudo, o comportamento frágil e a baixa resistência à tração continuam sendo deficiências citáveis.

Progressos relativamente recentes têm demonstrado que uma das formas de amenizar estes problemas é a adição de fibras descontínuas dispersas na matriz cimentícia, formando um compósito com características mecânicas mais adequadas e equilibradas.

Diversos tipos de fibras, geradas a partir de diferentes materiais, tais como o aço, o carbono, o vidro, a aramida, o polipropileno, o sisal, o coco e o bambu, podem ser utilizadas como reforço de matrizes cimentícias, agregando a estas diferentes características. As melhorias provocadas pela inserção de fibras dependem tanto das características da matriz, quanto das fibras. De acordo com estudos recentes (Bernardi, 2003), constata-se que as fibras de menor diâmetro, denominadas microfibras, atuam em conjunto com a matriz desde o início do carregamento. Já as fibras de maior diâmetro e rigidez, que recebem a denominação de macrofibras,

como as fibras metálicas, passam a contribuir principalmente na fase de pós-fissuração do compósito (Garcez, 2005).

Entre as fibras citadas para reforço do concreto, aponta-se as fibras de aço como uma das mais largamente empregadas e comercializadas, razão pela qual foi escolhida como objeto de estudo desta pesquisa.

Este material, aqui chamado de Concreto Reforçado com Fibras de Aço, CRFA, vem sendo aplicado, segundo Ferreira (2002), em uma série de obras de engenharia como, por exemplo, obras hidráulicas, pavimentos viários rígidos, túneis e pisos industriais, uma vez que o material pode produzir estruturas mais duráveis, esbeltas e, em consequência, obras mais econômicas.

Nos concretos sem o reforço de fibras, a propagação incontrolada da fissura ocorre logo após o seu aparecimento. Já nos CRFA, as fissuras são “costuradas” pelas fibras de tal forma que os mecanismos de transferência de tensões entre as faces da fissura conferem ao compósito a capacidade de suportar cargas em níveis de deslocamento muito superiores àqueles onde a fissuração da matriz é verificada. Já o fraturamento ocorrerá somente após a dissipação de uma parcela substancial de energia normalmente envolvida com o processo de arrancamento, ou *pull-out*, das fibras de aço (Ferreira, 2002).

Segundo Garcez (2005), as fibras também podem se constituir em um importante fator para controlar a fissuração das estruturas de concreto submetidas a cargas de elevada energia aplicadas em um curto espaço de tempo. Isto permite construir compósitos mais adequados para utilização em situações onde haja perigo de quedas ou choque de objetos. Portanto, torna-se necessário o aprofundamento dos conhecimentos relativos ao comportamento deste material frente à fissuração de estruturas submetidas a cargas dinâmicas.

Apesar de um número significativo de publicações de estudos experimentais dos mais diversos tipos de elementos estruturais reforçados com fibras de aço estarem disponíveis, observa-se uma forte carência sob o ponto de vista das simulações numéricas no domínio do tempo. No Capítulo 2 é feita uma breve revisão sobre o tema.

Neste contexto e com o objetivo de aprofundar os conhecimentos relativos ao comportamento do CRFA frente à cargas impulsivas e estáticas, o presente trabalho propõe a aplicação do Método dos Elementos Discretos (MED) como ferramenta numérica para resolver os problemas necessários, sejam eles de natureza dinâmica ou estática.

Justifica-se a escolha do MED devido às suas características que propiciam uma análise dinâmica não-linear que leva em conta as propriedades mecânicas do material para ações de curta duração, a velocidade de aplicação das cargas sob forma de diagramas força-tempo e a distribuição aleatória das propriedades mecânicas do concreto.

1.2 OBJETIVOS

Além de aprofundar os conhecimentos já referenciados, o objetivo principal do trabalho foi promover as alterações necessárias no algoritmo do Método dos Elementos Discretos com o intuito de simular o comportamento do Concreto Reforçado com Fibras de Aço. Após, objetivos específicos foram formulados a partir de recomendações e conclusões encontradas na dissertação de Garcez (2005):

- Avaliação dos efeitos das condições de contorno nas simulações numéricas;
- Determinação do ganho de tenacidade e das cargas de ruptura de placas de concreto reforçadas com vários teores de fibras;
- Simulação do ensaio de queda de esfera em placas de concreto reforçado com fibras.
- Comparação dos padrões de fissuração com ensaios experimentais, especificamente, os de Garcez (2005);

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta dissertação é dividida em sete capítulos, sendo o Capítulo 1 relativo à introdução do assunto e à apresentação dos objetivos.

No Capítulo 2, denominado Conceitos Fundamentais, é realizada uma revisão bibliográfica sobre aspectos teóricos do Concreto Reforçado com Fibras de Aço, apresentando suas principais propriedades mecânicas e seus princípios de funcionamento. É realizada também uma revisão teórica do Método dos Elementos Discretos e de outros métodos empregados na simulação numérica do material.

No Capítulo 3, Implementação da Distribuição Aleatória das Fibras, são apresentadas as mudanças realizadas no algoritmo do Método dos Elementos Discretos que visaram a simulação do material em estudo.

No Capítulo 4, são apresentados os estudos relativos às condições de contorno dos ensaios.

No Capítulo 5 é estudado o Ensaio de Tenacidade e são apresentados os resultados obtidos com a aplicação do Método Numérico.

No Capítulo 6 o objetivo é a simulação do Concreto Reforçado com Fibras de Aço sob ação de cargas impulsivas.

O Capítulo 7 apresenta as conclusões desta dissertação e são apontadas sugestões para estudos futuros sobre o tema abordado.

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

2.1 ASPECTOS TEÓRICOS DO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO

2.1.1 Considerações iniciais

Tendo em vista que um dos objetivos da presente dissertação é o de desenvolver um modelo numérico que simule o comportamento do concreto reforçado com fibras de aço, considera-se necessário revisar, inicialmente, o funcionamento da interação fibra-matriz. Neste item serão abordados, de forma genérica, as principais propriedades que regem o material em estudo na presente pesquisa.

2.1.2 Objetivos do uso das fibras

O concreto de cimento Portland pode ser visto como um compósito formado por três componentes principais: pasta de cimento, agregados miúdos e agregados graúdos. Em função da natureza destes componentes principais e de suas proporções, o

compósito é capaz de apresentar uma grande variação de suas propriedades (Garcez, 2005).

Nos últimos tempos, os concretos com resistência à compressão normal, na ordem de até 50MPa, vêm sendo gradativamente substituídos pelos concretos de alta resistência, cujos valores variam entre 50 e 150MPa. Estudos recentes apontam a possibilidade de produzir os concretos de ultra-alta-resistência, que atingem valores de f_{ck} superiores a 150MPa. (Resende, 2003).

Entretanto, Mehta e Monteiro (1994) explicam que o bom comportamento da matriz cimentícia fica comprometido por sua limitada resistência à tração. Antes mesmo de ser submetido a tensões externas, o concreto normalmente contém microfissuras na zona de transição entre a matriz e os agregados graúdos. Desta forma, pouca energia é necessária para que ocorra o aumento destas fissuras, justificando a ruptura frágil do material.

Como será visto adiante, ao adicionar fibras à matriz cimentícia promove-se meios de transferência de tensões através das fissuras, aumentando a tenacidade do material, proporcionando mecanismos de absorção, relacionados com o desligamento e o arrancamento de fibras que formam pontes nas fissuras. Desta forma a eficácia das fibras na melhoria das propriedades mecânicas da matriz frágil de cimento é obtida pelos mecanismos pelos quais a força é transferida para as fibras e pelo efeito de “costura” das fissuras, proporcionado pelas fibras em estágios avançados de carregamento (Holanda, 2002). Estes dois aspectos, transferências de tensões para as fibras e efeito de “costura”, serão estudados separadamente no item 2.1.4, sob os títulos de *comportamento pré-fissuração* e *comportamento pós-fissuração*.

Quando o concreto é submetido à tração ou à flexão, as tensões se concentram rapidamente nas extremidades das microfissuras existentes, provocando uma propagação incontrolada delas, tendo como provável consequência uma ruína frágil do material (Holanda, 2002).

No CRFA, as fissuras avançam em direção às fibras e estas, por sua vez, se opõem a tendência de propagação das fissuras na matriz. O resultado é que se torna

necessário mais energia para que ocorra a abertura das fissuras, tornando a ruptura menos frágil em função da ocorrência de deformação plástica da fibra, propiciando eventual ganho de ductibilidade da estrutura. Com isso, a primeira fissura não leva o compósito à ruína, ou seja, há um aumento da resistência do material à fissuração.

A Figura 2.1, a seguir, apresenta, esquematicamente, o mecanismo de reforço proporcionado pela adição de fibras à matriz cimentícia.

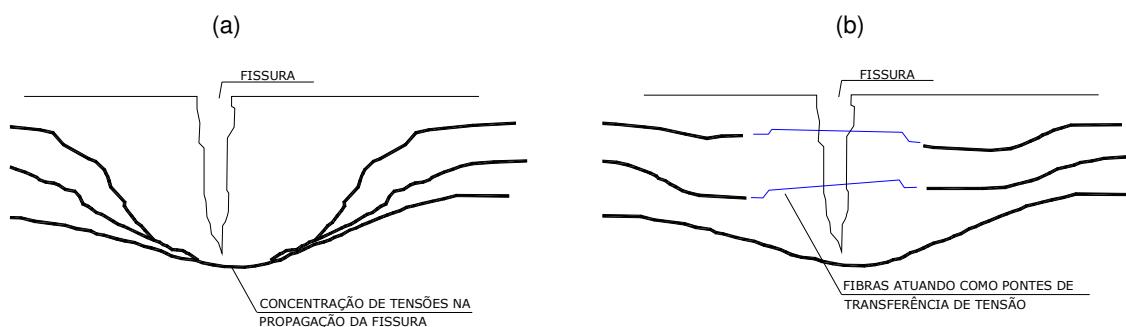


Figura 2.1: (a) Mecanismo de concentração de tensões na tração no extremo das microfissuras; (b) mecanismo de reforço das fibras atuando como ponte de transferência de tensões. (Nunes e Agopyan, 1998 *apud* Garcez, 2005).

Mehta e Monteiro (1994) argumentam que concretos reforçados com fibras não apresentam melhora substancial na resistência a tração em relação a misturas sem fibras. No entanto, as deformações de tração na ruptura certamente aumentam. A eficiência do reforço com fibras se traduz em um incremento na capacidade de absorção de energia do compósito. Como será visto no Capítulo 5, o índice capaz de indicar a capacidade de absorção de energia de um determinado material, para um determinado nível de deslocamento, é denominado tenacidade, que é também definido pela área sob o diagrama carga deslocamento. (Ferreira, 2002)

2.1.3 Comportamento no Estado Fresco

Cita-se como o efeito mais marcante da adição de qualquer fibra no estado fresco das misturas de concreto a redução da trabalhabilidade, isto porque as fibras atuam

como uma adição inerte, provocando o intertravamento da mistura. Esta redução é influenciada pelo fator de forma da fibra, pela geometria da fibra, pela fração volumétrica adicionada, pelo traço do concreto e pelas características da interface fibra-matriz (ACI, 1996) e, portanto, algumas adaptações na dosagem das matrizes podem ser exigidas, de maneira, que seja assegurada uma adequada dispersão das fibras adicionadas, validando a hipótese da formação de uma rede tridimensional que garanta propriedades homogêneas ao compósito. (Garcez, 2005)

Uma vez que o presente trabalho visa simulações numéricas, eventuais dificuldades com lançamento, adensamento e acabamento do concreto não entram em questão. De qualquer forma serão seguidas as recomendações, quanto ao volume de fibras, feitas pelo ACI 544.1R-96 (1996), ver Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Recomendações para dosagem de concretos reforçados com fibras de aço (ACI, 1996)

	Granulometria		
	9mm	19mm	38mm
Cimento (kg/m ³)	356-593	297-534	279-415
Relação a/c	0,35-0,45	0,35-0,50	0,35-0,55
Porcentagem de finos	45-60	45-55	40-55
Porcentagem de ar incorporado	4-8	4-6	4-5
Volume de Fibras (kg/m ³)			
Fibras deformadas	31-78	24-63	16-55
Fibras lisas	63-157	47-126	31-110

2.1.4 Mecanismos de transferência de tensões

As fibras são adicionadas ao concreto para promover, após a fissuração, duas funções básicas: aumentar a resistência do compósito superando a resistência da matriz, garantindo um meio de transferência de tensões e cargas ao longo das

fissuras e, a mais importante, aumentar a tenacidade do compósito garantindo um mecanismo de absorção de energia que está relacionado com o processo de deslocamento e arrancamento das fibras entrelaçadas ao longo da fissura. (Bentur e Mindess, 1990 *apud* Gava, 2004)

Estes efeitos no concreto com o emprego das fibras ocorrem porque, ao utilizar-se fibras com rigidez muito superior à da matriz de concreto, durante o carregamento do compósito, a matriz irá fissurar primeiro e, então, toda a carga será suportada pelas fibras. As fibras suportam este carregamento adicional de forma contínua levando a fissuração múltipla e ao aumento da deformação e energia de ruptura do compósito (Allen, 1971 *apud* Gava 2004).

É possível dividir a interação fibra-matriz em dois estágios distintos: o de pré-fissuração e o de pós-fissuração.

2.1.4.1 Comportamento pré-fissuração

Segundo Holanda (2002), antes da fissuração, a transferência de tensão por aderência é o mecanismo dominante. Os deslocamentos longitudinais da fibra e da matriz na interface são geometricamente compatíveis. Devido à diferença de rigidez entre as fibras e a matriz, aparecem tensões tangenciais ao longo da superfície de contato, que auxiliam na transferência, de parte da força aplicada, para as fibras. A distribuição de tensões tangenciais resultantes, ao longo da interface fibra-matriz, não é linear, como pode ser observado na Figura 2.2.

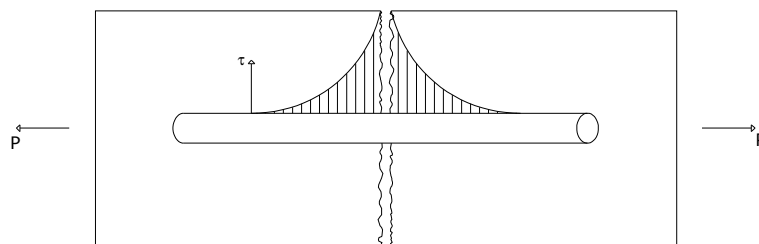


Figura 2.2 – Representação das tensões de cisalhamento na interface fibra-matriz imediatamente após a fissura (Bentur e Mindess, 1990 *apud* Garcez, 2005)

Quando as tensões tangenciais na interface, devidas ao carregamento excedem a tensão de aderência entre a fibra e a matriz (τ_{au}), inicia-se o processo de desligamento da fibra da matriz, com o surgimento de tensões de atrito na interface da zona de desligamento. Aos poucos, então, ocorre a transição de transferência de tensão por aderência para transferência por tensão de atrito, conforme mostra a Figura 2.3. A tensão máxima da interface ao atrito denomina-se (τ_{fu}), valor que permanece constante após o escorregamento da fibra, como mostrado na Figura 7.

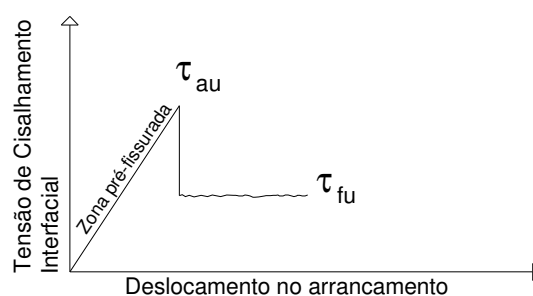


Figura 2.3 – Tensões de cisalhamento na interface fibra-matriz após desligamento parcial das fibras (Holanda, 2002)

2.1.4.2 Comportamento pós-fissuração

Holanda (2002) explica que após a fissuração, o mecanismo dominante na transferência de tensões da matriz para as fibras passa a ser o atrito. A tensão de atrito é uma tensão tangencial distribuída ao longo da interface fibra-matriz. Contudo, além das tensões tangenciais que ocorrem paralelas a interface fibra-matriz, devem ser consideradas as tensões normais, resultantes de alterações de volumes, de carregamentos biaxiais e triaxiais e do efeito de Poisson.

Com o aumento da carga ocorrem deslocamentos relativos entre a fibra e a matriz, ou seja, as fibras passam a sofrer um processo de arrancamento. O gasto energético para arrancamento da fibra é muito elevado, justificando a alta tenacidade do compósito (Nunes e Agopyan, 1998).

O incremento do carregamento externo provoca o aumento das fissuras, de tal forma que ocorre a separação da matriz em vários segmentos. As fibras, então, passam a

formar pontes de ligação entre as bordas destes segmentos, dando origem as chamadas “costuras” das fissuras. Na fissura, podem ser identificados três trechos, onde as transferências de tensões ocorrem de maneira distinta, como mostra a Figura 2.4.

- Trecho livre de tração, onde a matriz se encontra fissurada e as fibras se romperam ou escorregaram da matriz;
- Trecho de “costura” das fissuras pelas fibras, no qual a tensão é transferida por atrito das fibras;
- Trecho de microfissuração da matriz, mas com suficiente continuidade e engrenamento dos agregados para que ocorra transferência de tensão pela própria matriz.

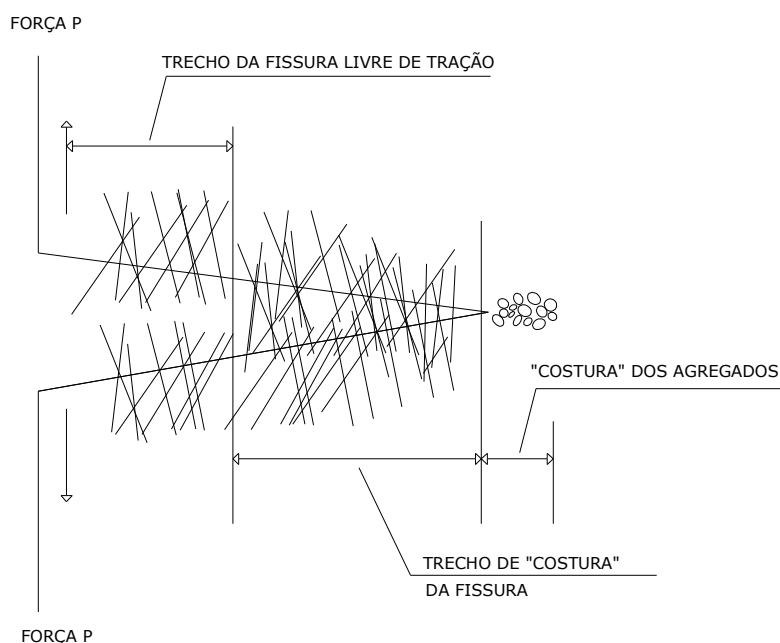


Figura 2.4 – Representação das zonas de transferência de tensões ao longo de uma fissura (Bentur e Mindess, 1990)

Considerando este mecanismo, pode-se concluir que, quanto maiores as fibras, maior a possibilidade de que as mesmas tenham comprimentos de ancoragem suficientes de cada lado da fissura.

2.1.5 Outros fatores influentes

Entre os principais parâmetros que influenciam na interação fibra-matriz, cita-se o fator de forma. Define-se fator de forma como sendo a relação entre o comprimento da fibra e o seu diâmetro. Assim, um aumento do fator de forma significa ou o aumento do comprimento da fibra ou a diminuição do seu diâmetro. Segundo Mehta e Monteiro (1994), um maior fator de forma pode tanto significar uma melhora na resistência ao arrancamento da fibra, pelo aumento do comprimento de ancoragem, como um aumento no número de fibras que podem interceptar uma fissura, decorrente da utilização de um maior número de fibras delgadas.

Outro fator de extrema importância é o comprimento crítico das fibras. Este parâmetro é definido por Bentur e Mindess (1990, *apud* Garcez, 2005) como sendo o menor comprimento necessário para o desenvolvimento de tensões nas fibras, iguais à sua resistência. Segundo Garcez (2005) o comprimento crítico pode ser calculado pela Equação 2.1, em função da transferência da tensão tangencial de atrito entre a matriz e a fibra:

$$\ell_c = \frac{\sigma_{fu}}{\tau_{fu}} r \quad (2.1)$$

onde:

σ_{fu} é a tensão última à tração da fibra

τ_{fu} é máxima tensão tangencial de atrito

r é o raio da fibra

Quando o comprimento da fibra embutido na matriz é menor do que o crítico, a ancoragem não é suficiente para gerar tensões de escoamento ou de ruptura nas fibras. Nesta situação, com o aumento da deformação e, conseqüentemente, da abertura de fissura, a fibra que está atuando como ponte de transferência de tensões será mais facilmente arrancada do lado que possuir o menor comprimento embutido (Figueiredo, 2000), funcionando de forma ineficaz.

Outro aspecto que merece destaque é o teor de fibras por metro cúbico de concreto empregado no reforço. A Figura 2.5 ilustra esta questão, exemplificando como a adição de fibras pode modificar o gráfico de tensão-deformação.

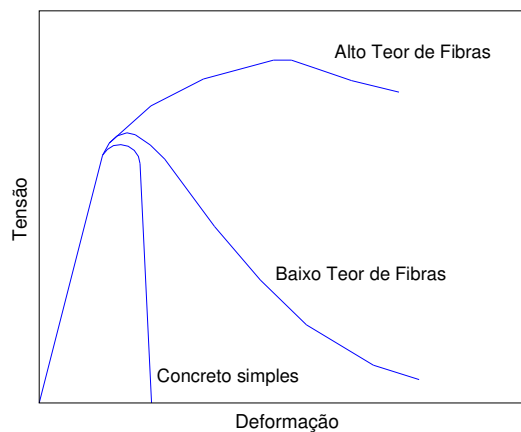


Figura 2.5 – Figuras típicas de tensão de tração *versus* deformação para volumes variáveis de fibras (Bentur e Mindess, 1990, *apud* Garcez, 2005).

Mudanças significativas no comportamento estrutural do material, no estágio pré-fissuração, somente serão observadas quando utilizadas técnicas que garantam a adição de altos volumes de fibras (Garcez, 2005).

Observa-se ainda que quando os volumes de fibras incorporados são elevados, ocorre tanto o incremento de tenacidade, como da resistência última dos elementos.

Outras questões como o módulo de elasticidade das fibras, distribuição e ancoragem das fibras e volume crítico não serão apresentados aqui mas podem ser consultados em Hannant (1978), Chen (1982), Bentur e Mindess (1990), Nunes e Agopyan (1998), Figueiredo (2000) e Garcez (2005).

2.1.6 Principais efeitos da adição das fibras

Os efeitos da adição de fibras ao concreto são resumidos por Mindess (1995)

- As fibras têm pouco ou nenhum efeito na resistência estática do concreto reforçado com baixos teores de fibras, isto é, nas resistências à tração,

compressão ou flexão; similarmente têm pouco efeito na resistência ao cisalhamento, à torção ou à abrasão.

- As fibras são efetivas na melhoria das propriedades dinâmicas do concreto, particularmente na resistência à fadiga e no comportamento sobre carregamento de impacto. Cachim et. al. (2002) explicam que o mecanismo de fadiga pode ser atribuído a deterioração progressiva da região entre os agregados graúdos e a pasta de cimento ou então pelo desenvolvimento de fissuras existentes na pasta de cimento. Estes mecanismos podem ocorrer juntos ou separados o que ilustra a complexidade do mecanismo de fadiga.
- As fibras aumentam consideravelmente a tenacidade ou a energia à fratura do concreto.
- As fibras podem melhorar a componente mecânica de aderência entre o concreto e as barras de reforço convencionais tanto em carregamentos estáticos quanto em carregamentos dinâmicos, porque as fibras atuam como inibidoras da propagação das fissuras oriundas da deformação das barras de aço.
- As fibras não têm muito efeito sobre a fluência do concreto, contudo apresentam considerável influência sobre a retração, principalmente as fibras de polipropileno.
- As fibras, principalmente para altos teores, podem reduzir a permeabilidade do concreto, porém este efeito não é muito significativo.

2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS

A mecânica do contínuo apresenta limitações, quando se produz a fratura do material, porque neste caso, o que até agora era suposto contínuo, deixa subitamente de ser, comprometendo uma hipótese básica da teoria. Alguns esforços têm sido realizados para trabalhar com fratura e fragmentação dentro do campo da

mecânica do contínuo, entre os quais cita-se a teoria da mecânica do dano contínuo apresentada por Kachanov (1966). No entanto, quando os objetos de pesquisa são materiais suscetíveis de sofrerem fratura, resulta interessante também utilizar uma teoria que deixe a hipótese da continuidade de lado (Rios, 2002a).

O Método dos Elementos Discretos propõe a representação do meio contínuo através de barras de treliça espacial unidas nos seus extremos formando arranjos cúbicos, estabelecendo-se em cada um dos vértices as correspondentes equações de equilíbrio e integrando numericamente no tempo para obter o comportamento ao longo de um certo período de um corpo sólido. Pela condição acima mencionada, esta formulação é extremamente vantajosa nos casos onde é envolvida fratura de materiais frágeis, como é o caso do concreto, cerâmicas, etc. Nestes casos, o esquema de fratura é conseguido desativando barras que tenham atingido seu limite de resistência, o que resulta em uma operação muito simples (Rios, 2002a).

Rios (2002a) ainda explica que embora tenha sido destacada a importância deste método no estudo de materiais frágeis, seu uso não se encontra restringido a esses casos, tendo sido aplicado com sucesso em materiais com comportamento dúctil e em materiais heterogêneos como o caso do concreto armado e do concreto reforçado com fibras.

2.2.1 Revisão do Método

Como antecedente deste enfoque cabe mencionar o trabalho de Hrennikoff (1941) que propõe a representação do contínuo mediante arranjos de bielas de rigidez equivalente. Mais recentemente Absi (1971) desenvolveu a mesma idéia realizando aplicações aos estudos de fundações de base elástica e na representação de muros em prédios altos através de arranjos de barras com rigidez equivalente. Também cabe destacar os trabalhos de Cundall e Strack (1977) para realizar estudos mecânicos geotécnicos com materiais granulares. O método proposto por Cundall e Strack (1977) (método dos elementos distintos) baseia-se em realizar a integração

explícita das equações de movimento de uma estrutura formada por partículas rígidas com massas conectadas entre si, mediante molas e amortecedores.

Este método pode ser aplicado facilmente na simulação não só de materiais contínuos, como também para representar estruturas descontínuas. Isto se deve ao fato de que, antes da fratura, surgem forças de tração, de compressão e corte entre as partículas adjacentes. Mas, após a falha, desaparecem as forças de tração entre as partículas contíguas afastadas pela descontinuidade (Rios, 2002a).

No estudo de materiais heterogêneos frágeis, como o concreto, foram aplicadas com sucesso diferentes versões do método dos elementos discretos. Schlangen (1993) realiza uma revisão bastante completa sobre os mesmos.

Também na física teórica, em estudos relacionados com a física, no estudo de estruturas cristalinas de materiais acoplando ou não efeitos térmicos podem-se encontrar alguns desenvolvimentos empregando os elementos discretos; como por exemplo em Ostoja-Starzenski (1995).

No item 2.2.1.1, resume-se, do trabalho de Rios (2002a), um estudo mais aprofundado da formulação utilizada neste trabalho.

2.2.1.1 Formulação empregada neste trabalho

2.2.1.1.1 Cálculo das rigidezes equivalentes das barras

O modelo adotado é devido a Nayfeh e Hefzy (1978), mas estes autores tinham interesse no sentido oposto, isto é, a representação de painéis formados por módulos e treliças espaciais, empregados na indústria aeronáutica, através de um meio contínuo equivalente. Isto possibilita uma discretização com um número menor de graus de liberdade, o que se traduz em uma redução substancial do esforço computacional.

Utilizando a idéia antes mencionada, foram desenvolvidas formulações para determinar as propriedades mecânicas equivalentes do sólido fictício. No trabalho de Nayfeh e Hefzy (1978), se realiza este estudo para dois tipos de arranjos básicos de barras (octaédrico e cúbico). Noor & Mikulas (1988), apresentam uma comparação do comportamento dinâmico calculado entre a estrutura discretizada com diversos arranjos de barras, e ela considerada como contínua, constatando-se uma boa correlação entre os resultados (Rios, 2002a).

Hayashi (1982) percorre o caminho inverso; ou seja, a partir de um sólido elástico ortotrópico com constantes conhecidas, são obtidas as propriedades das barras de treliça espacial para o arranjo cúbico que se apresenta na Figura 2.5.

A seguir, apresenta-se em forma resumida, as deduções que permitem chegar, das constantes elásticas de um sólido, às rigidezes equivalentes das barras para o módulo cúbico apresentado na Figura 2.5, as quais foram desenvolvidas na dissertação de Hayashi (1982) e no trabalho de Nayfeh e Hefzy (1978).

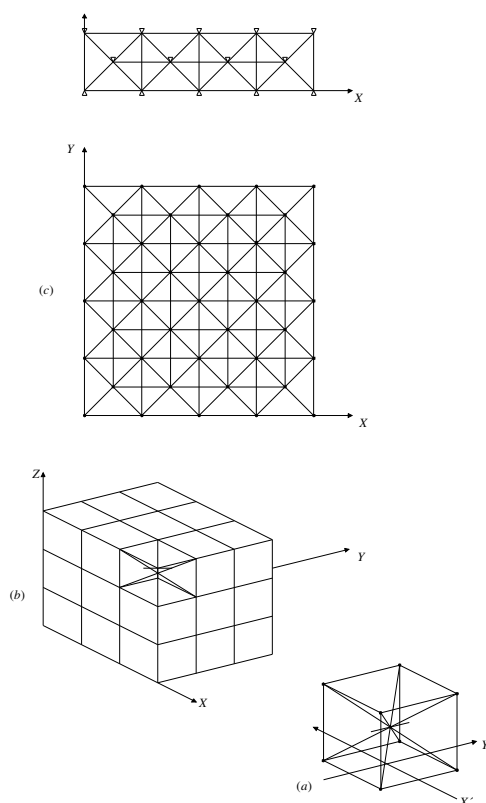


Figura 2.5 – Módulo cúbico apresentado por Nayfeh & Hefzy (1979) e utilizado nos trabalhos de Hayashi (1982), Rocha (1989) e Rios (2002a). a) Módulo Cúbico b) e c) composição de prismas

A relação constitutiva de um corpo elástico arbitrário, em notação indicial, pode-se escrever como segue:

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (i, j = 1 \cdots 6) \quad (2.2)$$

No caso do corpo anisotrópico e elástico, a matriz das constantes elásticas, C_{ij} , fica definida conhecendo 21 parâmetros independentes. Se o material é isotrópico, é possível realizar simplificações que permitem expressar a matriz C_{ij} em função de apenas duas constantes independentes. Neste último caso, pode-se escrever C_{ij} como segue:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

onde C_{11}, C_{12}, C_{44} são funções do módulo de elasticidade longitudinal, E , e do coeficiente de Poisson, ν .

As constantes elásticas C_{ij} podem ser transformadas de um sistema de coordenadas ortogonal cartesiano x para outro \bar{x}_i ($i = 1 \cdots 3$) através de uma equação do tipo:

$$\bar{\varphi}_{ij} = f(\varphi_{ij}, \alpha_{kl}) \quad (k, l = 1 \cdots 3) \quad e \quad (i, j = 1 \cdots 6) \quad (2.4)$$

onde α_{kl} são os co-senos diretores entre os sistemas de referência x e \bar{x} ; φ_{ij} e $\bar{\varphi}_{ij}$ são as constantes elásticas referidas aos sistemas de referência x e \bar{x}_i respectivamente. A expressão para $\bar{\varphi}_{ij}$ e mais detalhes sobre este desenvolvimento são encontrados na tese de Hayashi (1982) e em Nayfeh & Hefzy (1978).

Se todas as barras possuem o mesmo módulo de elasticidade E , cada conjunto de elementos paralelos definirá um contínuo com uma propriedade unidirecional efetiva,

que será referida como φ_{11} . Como φ_{11} é tomado como um valor médio ponderado de tal propriedade com relação a área de influência da barra, em um determinado conjunto de barras paralelas seu valor dependerá do espaçamento entre estas barras.

O módulo cúbico da Figura 2.5 possui dois valores diferentes para φ_{11} , um correspondente às barras que são normais às faces φ_{11}^n e o outro correspondente às barras diagonais φ_{11}^d .

Para uma estrutura cúbica, o valor do parâmetro φ_{11}^n pode ser facilmente determinado projetando a área das barras numa face do cubo como se mostra na Figura 2.5.

Então, em cada face do módulo cúbico de área (L_c^2) se tem a contribuição de duas barras normais inteiras. Dessa forma, cada elemento tem uma área efetiva de contribuição igual a ($L_c^2/2$). Por isso, a relação entre a rigidez da barra EA_n e a área efetiva de contribuição da mesma fornece o valor médio da propriedade unidirecional efetiva na direção das barras normais às faces do módulo φ_{11}^n :

$$\varphi_{11}^n = \frac{EA_n}{L_c^2/2} \quad (2.5)$$

Em forma similar se procede para obter o valor médio da propriedade unidirecional na direção das barras diagonais em relação às faces do módulo cúbico φ_{11}^d . Deve-se também determinar a área efetiva de contribuição de cada diagonal. Logo, o φ_{11}^d é dado pela expressão:

$$\varphi_{11}^d = \frac{\sqrt{3} \cdot EA_n}{L_c^2} \quad (2.6)$$

A partir de φ_{11}^n e φ_{11}^d , é possível obter $\overline{\varphi_{ij}}$, que é a matriz de rigidez de um sólido equivalente a um arranjo de módulos cúbicos como os definidos na figura (2.5a).

Levando em conta que a cada nó genérico concorrem 7 barras (3 normais + 4 diagonais), a matriz $\overline{\varphi}_{ij}$ poderá ser expressa como segue:

$$\overline{\varphi}_{ij} = \sum_{i=1}^3 f_i(\varphi_{i1}^n, \alpha_{kl}^n) + \sum_{j=1}^4 f_j(\varphi_{i1}^d, \alpha_{kl}^d) \quad (k, l = 1 \dots 3) \quad (2.7)$$

onde α_{ikl}^n e α_{jkl}^d são os co-senos diretores dos sistemas cartesianos \overline{x}, x_I^n e \overline{x}, x_J^d respectivamente.

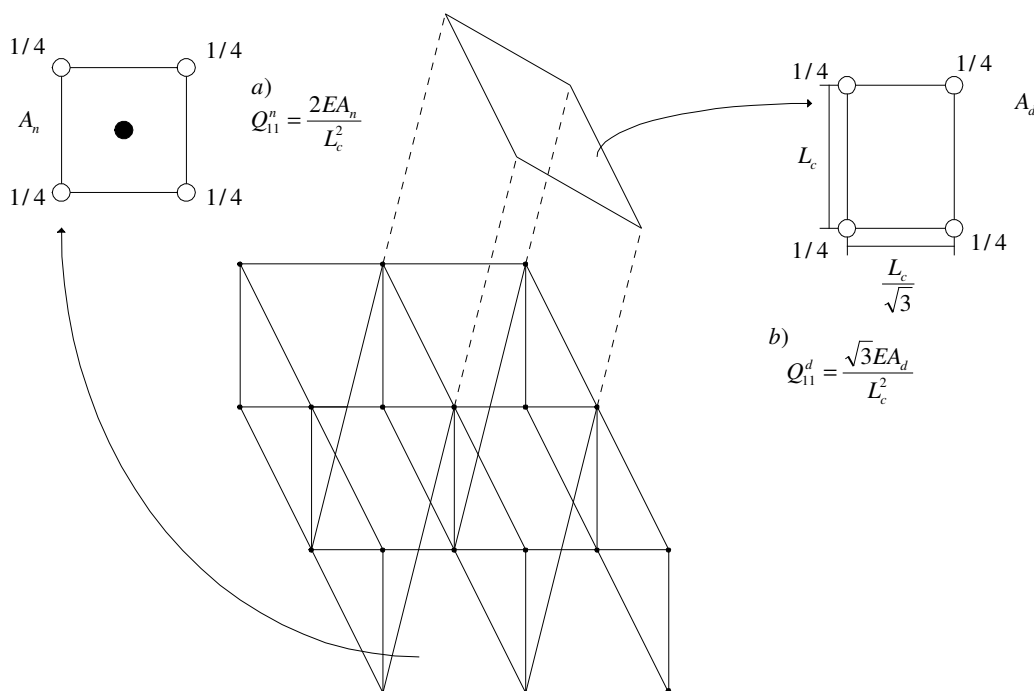


Figura 2.6 – Cálculo da área efetiva para as barras normais (a), e diagonais (b) do módulo cúbico

Substituindo as expressões (2.5), (2.6) em (2.7), e trabalhando algebricamente se obtém:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \varphi_{11}^n \left(1 + \frac{4}{9} \delta \right) \\
C_{12} &= \varphi_{11}^n \left(\frac{4}{9} \delta \right) \\
C_{44} &= \varphi_{11}^n \left(\frac{4}{9} \delta \right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

onde

$$\delta = \frac{\varphi_{11}^d}{\varphi_{11}^n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{A_d}{A_n} \tag{2.9}$$

Substituindo as expressões de C_{ij} na matriz obtém-se:

$$C_{ij} = \frac{2EA_n}{L_c^2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{4\delta}{9} & \frac{4\delta}{9} & \frac{4\delta}{9} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 + \frac{4\delta}{9} & \frac{4\delta}{9} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 + \frac{4\delta}{9} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{4\delta}{9} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{4\delta}{9} & 0 \\ & & & & & \frac{4\delta}{9} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

que é a expressão proposta por Nayfeh & Hefzy (1978), onde A_n e A_d são dados do problema. As constantes elásticas E , ν e G podem ser obtidas para o contínuo equivalente a partir dos correspondentes C_{ij} da expressão anterior, como segue:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1} \sigma_1 - \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_2 - \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_3 \\
\varepsilon_2 &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_1 + \frac{1}{E_2} \sigma_2 - \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_3 \\
\varepsilon_3 &= \frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_1 - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_2 + \frac{1}{E_3} \sigma_3
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_4 &= \frac{1}{G_{23}} \sigma_4 \\
\varepsilon_5 &= \frac{1}{G_{13}} \sigma_5 \\
\varepsilon_6 &= \frac{1}{G_{12}} \sigma_6
\end{aligned} \tag{2.12}$$

As expressões anteriores podem ser escritas em forma matricial da seguinte maneira:

$$\varepsilon_i = A_{ij} \sigma_j \tag{2.13}$$

de onde se obtém que:

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, a_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_2}, a_{44} = \frac{1}{G_{23}} \tag{2.14}$$

Comparando (2.2) e (2.13) se conclui que:

$$A_{ij} = C_{ij}^{-1} \tag{2.15}$$

Realizando esta inversão é possível obter os coeficientes a_{11} , a_{12} e a_{44} em termos de C_{11}, C_{12}, C_{44} e a partir de (2.14) e (2.10)

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{2EA_n \left(1 + \frac{12\delta}{9}\right)}{L_c^2 \left(1 + \frac{8\delta}{9}\right)} \\
\nu_{12} &= \frac{4\delta}{9 + 8\delta} \\
G_{13} &= \frac{2EA_n 4\delta}{L_c^2 9}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Como o que interessa no método dos elementos discretos é obter as rigidezes das barras (EA_n) e (EA_d) em função das propriedades elásticas do sólido que representa E, ν , simplesmente isolamos tais valores da Equação (2.16), obtendo:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{9\nu}{(4-8\nu)} \\ EA_n &= \frac{L_c^2}{2} \frac{(9+8\delta)}{(9+12\delta)} E \\ EA_d &= \frac{2EA_n}{\sqrt{3}}\end{aligned}\tag{2.17}$$

Estas expressões são válidas se o módulo básico de barras é o cúbico mostrado na Figura 2.5.

Para uma célula básica de forma diferente, deverão ser obtidas novas relações. Bush *et al* (1977) e Noor & Milukas (1988) apresentam estas relações para tetraedros, enquanto outros autores propõem realizar o cálculo das rigidezes das barras diretamente por calibração numérica. Schlangen (1993) faz uma revisão bibliográfica de vários tipos de arranjos utilizados na modelagem de estruturas de concreto.

Em Ostoja-Starzenski (1995) também se apresenta o cálculo de propriedades equivalentes das barras para o caso em que existe ortotropia utilizando células tetraédricas.

2.2.1.1.2 Solução da equação de movimento

A equação de movimento para o modelo teórico é dada pela seguinte expressão:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + \vec{F}_r(t) - \vec{P}(t) = 0\tag{2.18}$$

onde x representa um vetor de deslocamentos nodais, M a matriz de massas nodais (diagonal); \dot{x} representa um vetor de velocidades; \ddot{x} representa um vetor de acelerações; C é uma matriz de amortecimento, também considerada diagonal, e $\vec{F}_r(t) - \vec{P}(t)$ representa a diferença entre o vetor de forças reativas $\vec{F}_r(t)$ e o vetor de forças externas $\vec{P}(t)$, sendo que estas forças atuam sobre os nós do modelo.

Para cada nó i do modelo se verifica que

$$\vec{F}_r^i = \sum_{b=1}^k \vec{F}_r^b \quad (2.19)$$

sendo k o número de barras que concorrem no nó i . A força interna em cada barra, F_r^b , é obtida a partir de uma equação constitutiva elementar, que pode-se expressar como segue:

$$F_r^b = \text{const}(\varepsilon_b) \quad (2.20)$$

sendo que ε_b representa a deformação da barra b e const será uma função que dependerá do tipo de material a modelar.

A equação do movimento matricial (2.17) é desacoplada e, por isso, pode ser integrada no tempo mediante um esquema explícito.

O amortecimento é proporcional a massa de tal forma que:

$$C = MD_f \quad (2.21)$$

sendo D_f uma constante vinculada ao coeficiente de amortecimento crítico, ξ_n , como segue:

$$D_f = \xi_n 2\pi f_n \quad (2.22)$$

onde f_n representa a frequência natural de vibração do modo n expressa em [Hz], o modo n é aquele em que a estrutura dissipa mais energia (em geral é o modo fundamental de vibração da estrutura).

A determinação do valor de D_f é um aspecto delicado do modelo, que deve ser mais estudado por diversas razões.

Além do amortecimento do material que é, em geral, difícil de se determinar, deve-se incluir dentro de D_f um certo amortecimento artificial com dois objetivos principais:

- a) Eliminar as frequências de vibração mais altas do modelo, as quais não são de interesse e dificultam a interpretação de resultados.
- b) No caso em que são aplicadas excitações em formas súbitas, também é necessário colocar um certo grau de amortecimento para suavizar a frente da onda de choque, distribuindo-a entre vários elementos e prevenindo, assim, o colapso dos mesmos sobre a ação de gradientes muito fortes.

Este amortecimento numérico tem sido muito estudado havendo até expressões fechadas propostas por diferentes autores. Um claro tratamento sobre o tema pode-se encontrar no manual teórico do programa Abaqus/Explicit (1995). Os amortecimentos numéricos mencionados são conhecidos na literatura como “linear and quadratic bulk viscosity”.

Um dos pontos que devem ser melhorados no programa é a separação deste amortecimento numérico do amortecimento do material, para facilitar sua avaliação.

2.2.1.1.3 Determinação do incremento crítico de integração

Uma desvantagem dos métodos explícitos de integração das equações de movimento, é que são apenas condicionalmente estáveis, isto é, o intervalo de integração Δt deve ser menor que um valor crítico Δt_{crit} , a partir do qual o processo resulta instável. O método de diferenças finitas centrais foi escolhida porque, dentre outras vantagens, apresenta, em problemas lineares, o menor intervalo crítico no grupo dos métodos explícitos (Rios, 2002a).

Por outro lado, em problemas de impacto e cargas impulsivas com possibilidade de fratura, a descrição das ações e do processo de ruptura do material exige o uso de

intervalos de integração pequenos, às vezes da ordem de Δt_{crit} , o que naturalmente elimina a desvantagem do método em relação a procedimentos implícitos (Rios, 2002a).

Em relação a determinação de Δt_{crit} , pode ser encontrada em Flanagan e Belytschko (1984) uma discussão sobre o tema. Essencialmente se tem que Δt_{crit} é função da maior frequência de vibração do modelo $f_{máx}$, que depende de vários parâmetros como o comprimento característico do elemento utilizado na discretização L_o , e da velocidade de propagação da onda de compressão C_ρ .

No modelo teórico em estudo, se utiliza um critério simples que se mostra a seguir

$$\Delta t_{crit} \leq 0,6 \frac{L_c}{C_\rho} \quad (2.23)$$

onde $L_o = L_c$ e $C_\rho = \sqrt{E/\rho}$.

2.2.1.1.4 Critérios de Ruptura Empregados

Foram utilizados critérios de ruptura para o concreto e para as fibras de aço conforme descrito nos itens a e b, a seguir.

a) Concreto

O critério de ruptura utilizado para estudo de materiais não-dúcteis e não-homogêneos foi implementado inicialmente por Rocha (1989) e posteriormente utilizado por Iturrioz (1995) e Rios (2002a). Este se baseia na relação constitutiva elementar bilinear mostrada na Figura 2.7.

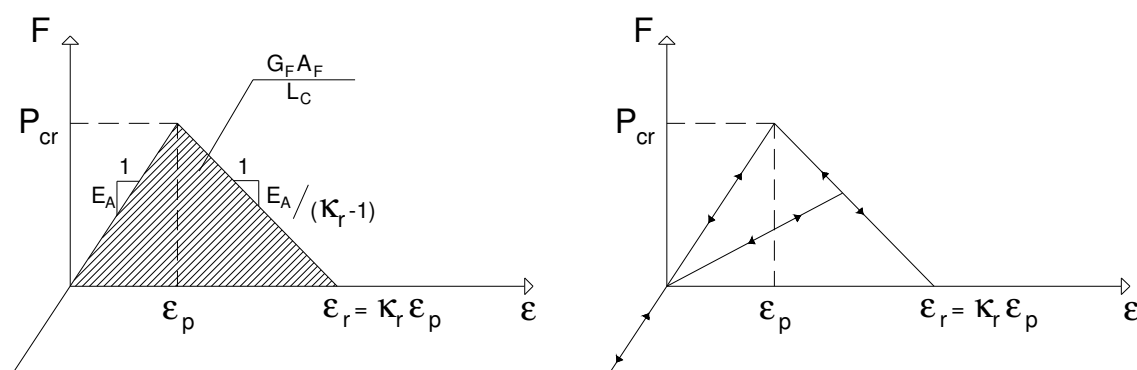


Figura 2.7 – Relação constitutiva elementar implementada por Rocha (1989).

A relação bilinear representa a relação $(F - \varepsilon)$, cujos parâmetros têm os seguintes significados:

- F é a força axial resultante da barra, função da deformação ε , sendo a carga crítica P_{cr} associada à deformação crítica ε_p ;
- E_A é a rigidez axial das barras normais e diagonais, obtidas a partir das constantes dos materiais;
- L_c é o comprimento dos elementos normais;
- A_f é a área de influência da barra, ou seja, a área transversal formada com sua ruptura, podendo ser expressa na forma $A_f = c_A L_c^2$, onde c_A é o coeficiente geométrico próprio do modelo cúbico, igual a 0,1385;
- k_r é um parâmetro chamado de parâmetro de ductilidade, que permite calcular a deformação para a qual a barra não transmite mais esforços de tração. É função de c_A , L_c e R_f , que será definido no item 2.2.1.1.5.

Rios (2002a) salienta que ε_p , E , P_{cr} , R_f e G_F são consideradas propriedades exclusivas do material, enquanto A_f e L_c são propriedade exclusivas do modelo. Já k_r e E_A dependem tanto do modelo como do material.

Rios (2002a) salienta que a energia de fratura, G_F , deve ser introduzida como uma propriedade do material, de modo tal que se cumpra a seguinte condição:

$$G_F = l \int_0^{\varepsilon_r} \sigma d\varepsilon \quad (2.24)$$

Rios (2002a) cita também que, quando um elemento rompe, toda energia de deformação acumulada nele é consumida no processo de fratura. Isto não é o que acontece na realidade, pois parte da energia de deformação é preservada sob as formas de energia cinética (vibrações induzidas) e energia elásticas, nas duas partes em que o elemento se divide. Como não é possível levar em conta esta subdivisão em um elemento isolado (pois as massas são concentradas nos nós e não ao longo do seu comprimento), isto resulta numa restrição em termos de um valor máximo para o comprimento L_c .

b) Fibras de Aço

Como critério de ruptura do aço, foi utilizada a relação constitutiva apresentada na Figura 2.8. Salienta-se que os comportamento na tração e na compressão são idênticos.

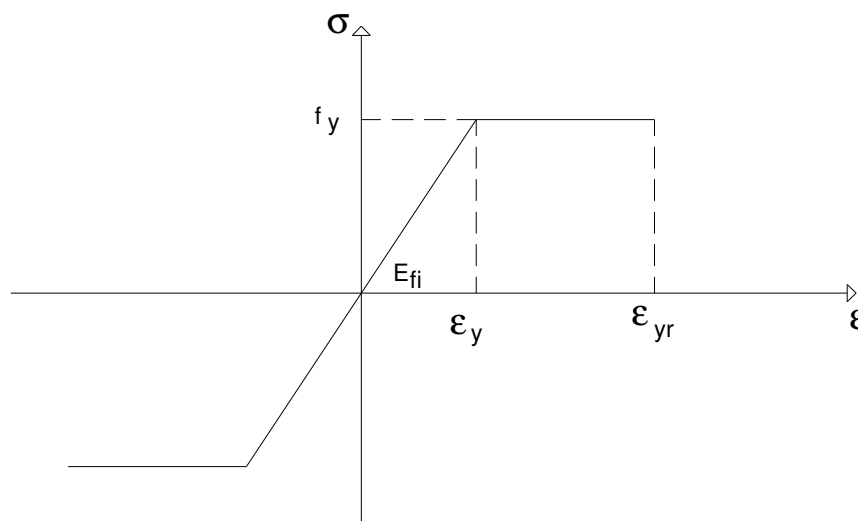


Figura 2.8 – Relação constitutiva para o aço

Da relação ($\sigma - \varepsilon$) apresentada na Figura 2.8, retira-se:

- f_y é a tensão de escoamento do aço (1000 N/mm^2)

- E_{fi} é o módulo de elasticidade do aço (200 GPa)
- ε_y é deformação específica de escoamento do aço
- ε_{yr} é deformação específica de ruptura do aço

Os valores indicados acima são recomendações do fabricante. A deformação específica de ruptura utilizada foi de 30%.

2.2.1.1.5 Inclusão da não homogeneidade do material através da aleatorização das propriedades

No estudo de materiais como concreto, é necessário incluir a não homogeneidade do material no modelo. Isto pode ser feito introduzindo a aleatoriedade na definição das propriedades geométricas, nas propriedades mecânicas ou em ambas. Uma recompilação completa sobre várias formas de incorporar a não-homogeneidade pode ser encontrada no trabalho de Schlangen (1993).

No modelo apresentado originalmente por Rocha (1989), incorpora-se a aleatorização definindo a energia específica de fratura G_f como um campo aleatório. Posto que G_f define indiretamente a resistência local à propagação da fratura, isto implica, naturalmente, numa resistência variável através do volume, característica que deseja conferir ao modelo. Isto fica evidente ao observar a equação (2.25), onde ε_p é função de G_f .

$$\varepsilon_p = \left[\frac{G_f}{E'} \right]^{1/2} R_f \quad (2.25)$$

Onde R_f é o fator de Falha, que permite incorporar todas as características que dão origem ao processo de ruptura do elemento com um único parâmetro.

Baseando-se nas hipóteses feitas anteriormente, pode-se introduzir o aspecto aleatório no modelo através de uma função de distribuição de probabilidades para G_f .

A definição das características do campo aleatório associado a G_f está vinculada a um comprimento de correlação que, para simplificar a implementação numérica, foi adotado igual ao comprimento do módulo básico crítico L_c . Isto é uma limitação na implementação numérica, pois vincula a discretização às características do material empregado. No caso do concreto, o comprimento é adotado aproximadamente igual ao dobro do tamanho máximo do agregado. É possível, mediante uma modificação do método de simulação, tornar independente o comprimento de correlação do comprimento de discretização do modelo, mas isto não foi considerado neste trabalho.

No modelo atual, o campo aleatório G_f é gerado admitindo uma distribuição de probabilidade Weibull com dois parâmetros, dada pela expressão:

$$f_w(G_f) = 1 - e^{-\left[\left(\frac{G_f}{\beta}\right)^\gamma\right]} \quad (2.26)$$

onde β e γ são, respectivamente, os parâmetros de escala e de forma. Estes parâmetros podem ser expressos em termos do valor esperado, $E_{[G_f]}$, e do coeficiente de variação, $CVA_{[G_f]}$, que são os parâmetros de entrada no programa computacional. Maiores informações sobre a aleatorização podem ser obtidas no trabalho de Rocha (1989).

2.3 REVISÃO DE OUTROS MÉTODOS NUMÉRICOS JÁ EMPREGADOS

Murugappan *et al* (1994) demonstram uma formulação em elementos finitos para análise do concreto reforçado com fibras. O estudo é direcionado para vigas, predominantemente sob flexão e trabalha com a alteração das relações constitutivas

do material para simular o ganho de resistência pós-fissuração. Uma boa correlação entre resultados experimentais e numéricos foi encontrada por esses autores.

Mais tarde, Al-Ta'an e Ezzadeen (1995) propuseram um procedimento numérico baseado no método dos elementos finitos para análise não-linear do concreto reforçado com fibras, obtendo como resposta os deslocamentos, tensões e propagação das fissuras. Neste trabalho o efeito das fibras é aplicado a partir de alterações nas relações constitutivas do concreto, assumindo uma distribuição uniforme das fibras.

Na Figura 2.9a, é apresentado o modelo constitutivo adotado para o concreto comprimido. Consiste em uma porção ascendente parabólica e porção pós-pico bilinear. Já no esquema da Figura 2.9b, observa-se o modelo constitutivo para o concreto reforçado sob tensões de tração.

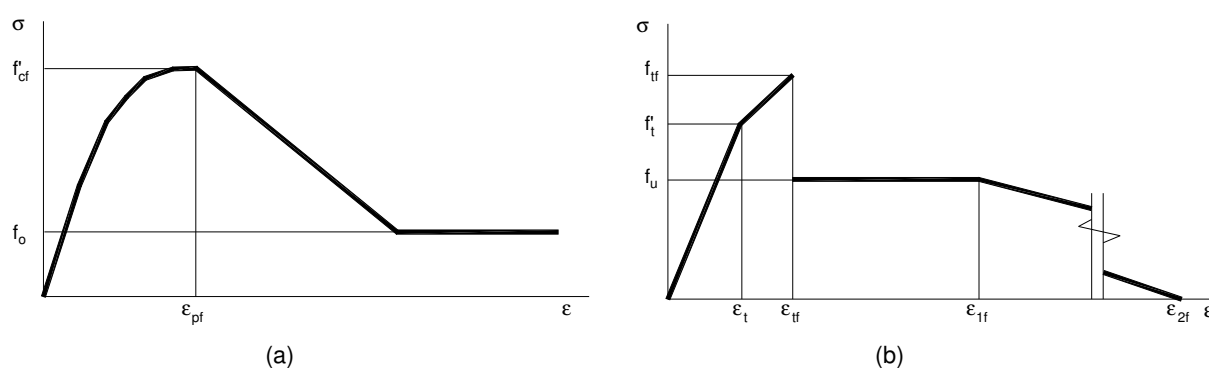


Figura 2.9 – Modelos constitutivos adotados por Al-Ta'an e Ezzadeen (1995) para simular o comportamento do concreto reforçado com fibras.

Ferreira (2002) apresenta um modelo com base nos conceitos clássicos da Mecânica da Fratura Clássica Linear. Computacionalmente implementado, o modelo é utilizado para análise das respostas de fraturamentos de rochas, dos concretos convencionais, dos concretos de alta resistência e do concreto reforçado com fibras de aço com diversos teores de fibras incorporados à matriz. Paralelamente, uma

nova ferramenta numérica, em fase preliminar de desenvolvimento e destinada à automação da análise da tenacidade à flexão, é apresentada.

Cachim *et al* (2002) apresentam um modelo numérico, baseado na teoria da viscoplasticidade, para simular comportamento do concreto reforçado com fibras na fadiga à flexão.

Padmarajaiah e Ramaswamy (2002) analisam vigas de concreto protendido com reforço de fibras de aço a partir do método dos elementos finitos. Pela primeira vez é modelado o efeito de aderência entre o concreto e as fibras de aço além do efeito de “costura” nas fissuras. Os resultados obtidos são satisfatórios tanto do ponto de vista do diagrama carga *versus* deslocamento quanto do esquema de ruptura.

Venturini *et al* (2003) apresentam uma formulação alternativa para o Método dos Elementos de Contorno baseada em um técnica denominada “sub-region technique” onde as fibras são tratadas como sub-regiões muito finas. Os resultados apontaram que o modelo se mostrou bastante preciso para os testes realizados.

Désir e Schwan (2003) apresentam um trabalho denominado “Simulação numérica de matriz de concreto reforçada com fibras de aço”. Neste trabalho, o comportamento da matriz fibra-concreto, definido através de uma lei constitutiva distinta para cada material, é implementado num programa de elementos finitos onde os elementos obedecem a um comportamento elasto-frágil. As características mecânicas consideradas são o módulo de elasticidade e a resistência a tração, características essas aleatórias em função da heterogeneidade do concreto. Nessa implementação faz-se a introdução da fibra a medida que ocorre a abertura da fissura através da inclusão de um elemento de barra na malha de elementos finitos, interrompendo desta forma a propagação da fissura. Os autores pretendem, assim, que o concreto reforçado com fibras de aço passe a apresentar um comportamento de fissuração distribuída, caracterizado pelas múltiplas fissuras distribuídas por todo o volume da estrutura.

Battista *et al* (2004) lançam mão do código em elementos finitos DIANA¹ para simular numericamente o *ConAD*, Concreto de Altíssimo Desempenho, concreto que recebe reforços fibrosos multi-escala, aditivos minerais e químicos apropriados para obter as propriedades químicas desejadas. O trabalho é baseado em aplicação de relações constitutivas obtidas a partir de ensaios experimentais.

Souza *et al* (2005) modelam vigas de concreto armado, com e sem fibras, utilizando também o programa computacional DIANA. Os modelos de material para o concreto incluem efeitos de fissuração, armadura embutida ou combinação destes. O concreto incorpora um modelo de fissuração que é válido para combinação de carregamentos no qual pelo menos uma componente de tensão é envolvida. O modelo de plasticidade é utilizado para descrever o comportamento a estados de baixas tensões de compressão. Para análise não linear de concreto armado, o conceito da energia da fratura é utilizado para se obter um diagrama tensão-deformação aproximado para os elementos, representando a fissuração distribuída. O início da fissuração é baseada no critério da máxima resistência à tração. Para retratar o comportamento do concreto, foram utilizados os gráficos tensão *versus* deformação dados por Lopes (2005) para obtenção da energia de fratura (Souza *et al*, 2005).

¹ DIANA, marca registrada por TNO-IBBC e avaliada pelo instituto TNO para materiais de construção e estruturas. É um programa computacional comercial baseado no método dos elementos finitos para análise de estruturas tridimensionais.

3 IMPLEMENTAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO ALEATÓRIA DAS FIBRAS

Neste capítulo serão apresentadas as alterações realizadas no algoritmo do programa computacional que buscaram simular, da melhor maneira possível, o comportamento do concreto reforçado com fibras.

3.1 DISPERSÃO DAS FIBRAS DE AÇO NA MATRIZ DE CONCRETO

Garcez (2005) lançou mão do Método dos Elementos Discretos para simular o comportamento de placas de concreto reforçado com fibras de aço, sob ação de cargas impulsivas. Para tanto, realizou apenas uma adaptação em um dos parâmetros de entrada do programa: o aumento da energia específica de fratura (G_F) do material objetivando aumentar a tenacidade do modelo. Os resultados se mostraram promissores apesar de não representarem fielmente o comportamento do concreto reforçado com fibras. Foram apontadas como prováveis causas da discordância, a vinculação empregada, apoios fixos ao invés do neoprene, e a discretização do modelo utilizado.

Conforme já foi apresentado, o Método dos Elementos Discretos propõe a representação do meio contínuo através de um sistema tridimensional do tipo treliça onde as massas encontram-se concentradas nos nós e as barras funcionam como molas axiais (Hayashi, 1982).

Quando o Método dos Elementos Discretos é utilizado para simular o comportamento do concreto simples, estas barras (molas axiais) obedecem às propriedades mecânicas típicas do concreto.

No presente trabalho é proposta a representação do CRFA a partir da substituição de barras que representam o concreto, por barras que obedecem às propriedades do aço. Na Figura 3.1a observa-se um modelo, em elementos discretos, em que todas as barras representam um único material, no caso o concreto. Já na Figura 3.1b algumas destas barras são substituídas por barras que representam o aço.

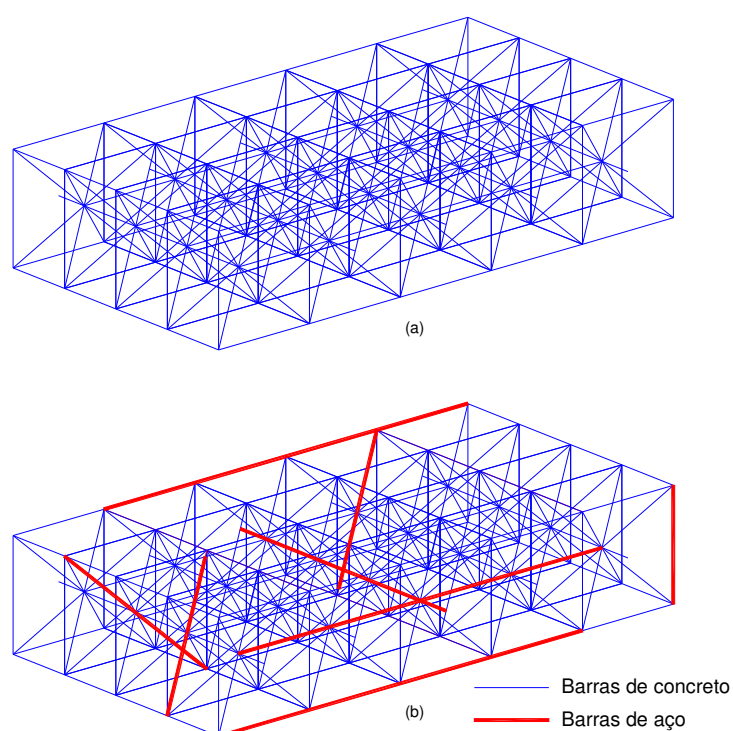


Figura 3.1 – Proposta de substituição de barras que representam o concreto (azul) por barras que representam as fibras de aço (vermelho)

As barras que representam as fibras podem estar orientadas nas direções x , y , z , e nas diagonais dos módulos cúbicos do modelo discreto discutido no Capítulo 2.

Salienta-se que, buscando representar a realidade, as barras de concreto são substituídas por barras de aço a partir de uma distribuição aleatória, como será visto a seguir.

3.1.1 Geração de números pseudoaleatórios

O ponto de partida para produzir a dispersão das fibras de aço foi a geração de números aleatórios.

Uma vez que o Método dos Elementos Discretos foi desenvolvido computacionalmente em Fortran, optou-se por utilizar a biblioteca *RNUND* disponível para esta linguagem (IMSL FORTRAN Numerical Libraries).

Esta biblioteca se caracteriza por gerar números a partir de uma distribuição uniforme discreta a partir dos inteiros $1, 2, \dots, K$. Um inteiro aleatório é gerado multiplicando K por um número aleatório entre 0 e 1, somando 1,0 e truncando o resultado para tornar o número inteiro.

Os parâmetros de entrada para *RNUND* são (NR, K) onde:

- NR é o total de números aleatórios a serem gerados
- K é o parâmetro da distribuição discreta uniforme, de tal forma que os inteiros $1, 2, \dots, K$ ocorrem com igual probabilidade.

Observando de maneira prática, K é o número total de barras do modelo e NR é o número de barras que deverão ser “transformadas” em fibras de aço.

A seguir, na Figura 3.2 observa-se o resultado da implementação da rotina. Em azul, as barras de concreto, representando a matriz cimentícia e, em vermelho, as barras de aço, dispersas aleatoriamente segundo o critério exposto. Trata-se de um modelo inicial que como será visto no item 3.1.2 necessita de ajustes para representação correta do tamanho das fibras.

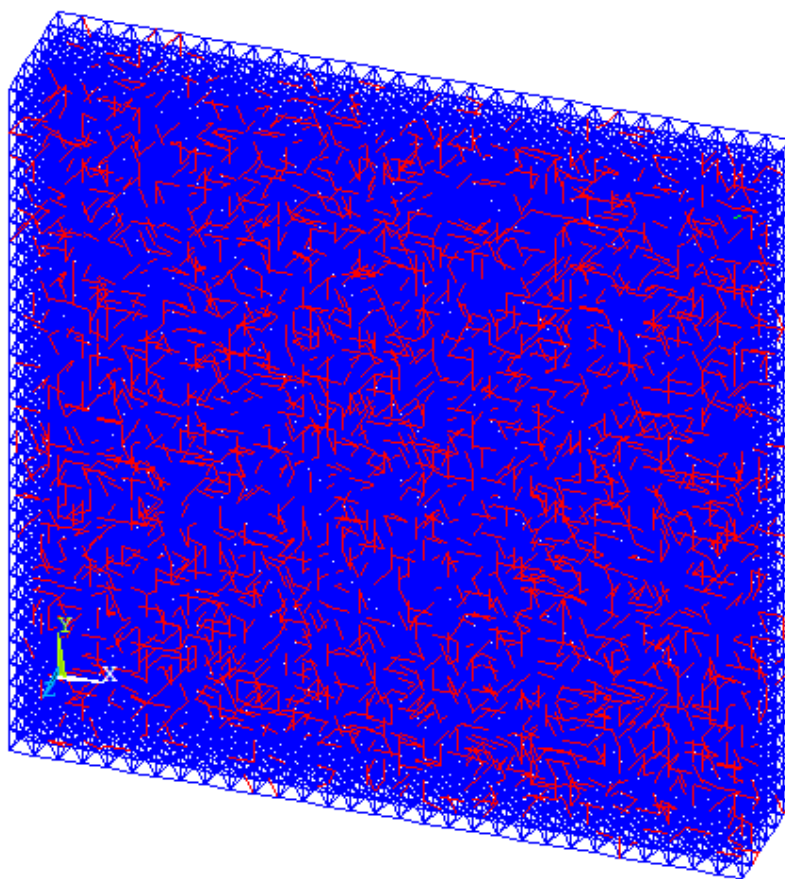


Figura 3.2 – Modelo discreto inicial: comprimento das fibras não ajustado

3.1.2 Ajuste do tamanho das fibras

Ao analisar o procedimento apresentado no item anterior observa-se uma limitação da implementação realizada. Uma vez que cada barra sorteada representa uma fibra, o comprimento das fibras acaba sendo função do comprimento das barras do modelo.

Como já foi apresentado, cada uma destas barras possui dimensão L_c quando estas estão posicionadas nas direções x , y e z ; e $\sqrt{3}/2L_c$ para os casos em que a barra for uma diagonal.

Considerando-se que um determinado modelo simulado possua uma discretização em que a dimensão de cada barra do módulo cúbico, L_c , mede 2 cm e deseja-se

simular fibras de 6 cm, surge a necessidade de alinhar três barras contíguas. Para tanto, surge a necessidade de uma adaptação no programa para que este selecione barras vizinhas às previamente sorteadas a fim de atingir o comprimento desejado.

Na Figura 3.3a, observa-se que o programa escolheu, aleatoriamente, uma barra do modelo. No entanto, esta barra possui dimensão inferior ao tamanho da fibra que deseja-se simular. Para atingir o comprimento, o programa seleciona uma barra acima e uma barra abaixo da sorteada, obtendo desta forma, os 6cm buscados (Figura 3.3b).

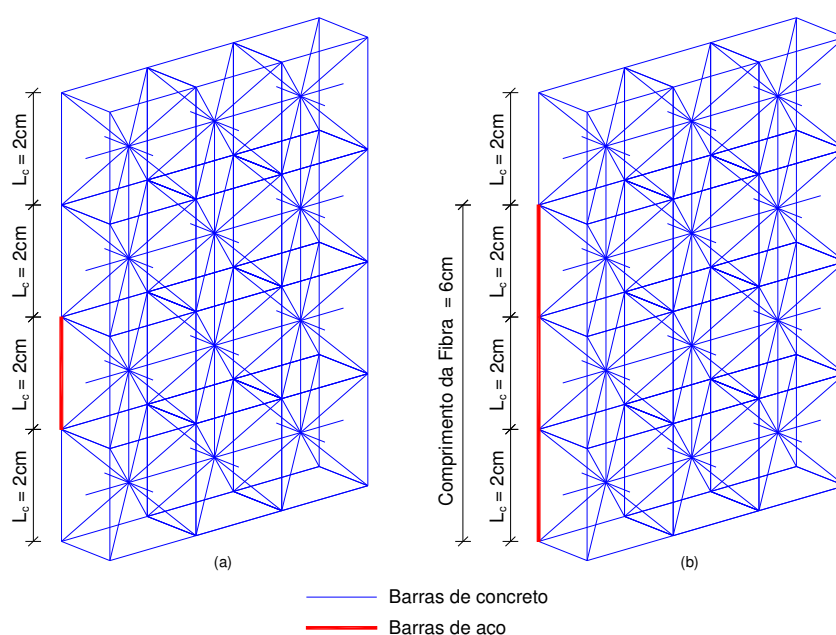


Figura 3.3 – Esquema do procedimento aplicado para ajustar o tamanho das fibras.

O ponto de partida para a realização deste ajuste é o esquema de numeração das barras utilizados pelo MED.

Nos esquemas abaixo, M é o número de nós na direção x , N é o número de nós na direção y e L é o número de nós na direção z .

As primeiras barras numeradas são as que ligam os nós de canto de cada elemento em cada uma das direções:

- *Barras que ligam os nós de canto de cada elemento*
 - Número de barras em x: $(M - 1) \cdot N \cdot L$
 - Número de barras na direção y: $(N - 1) \cdot M \cdot L$
 - Número de barras na direção z: $(L - 1) \cdot M \cdot N$

A seguir, são numeradas as barras que ligam entre si os nós centrais de cada elemento.

- *Barras que ligam os nós centrais de cada elemento*
 - Número de barras, nós centrais em x: $(M - 2) \cdot (N - 1) \cdot (L - 1)$
 - Número de barras, nós centrais em y: $(M - 1) \cdot (N - 2) \cdot (L - 1)$
 - Número de barras, nós centrais em z: $(M - 1) \cdot (N - 1) \cdot (L - 2)$

Por fim, as barras diagonais ligando o nó central a cada um dos 8 nós do elemento cúbico.

- *Barras diagonais*
 - Número de barras diagonais: $[(M - 1) \cdot (N - 1) \cdot (L - 1)] \cdot 8$

Lançando mão deste sistema de numeração foi possível realizar o ajuste do tamanho das fibras. As Figuras 3.4, 3.5 e 3.6 apresentam as barras agrupadas nas direções x, y e z.

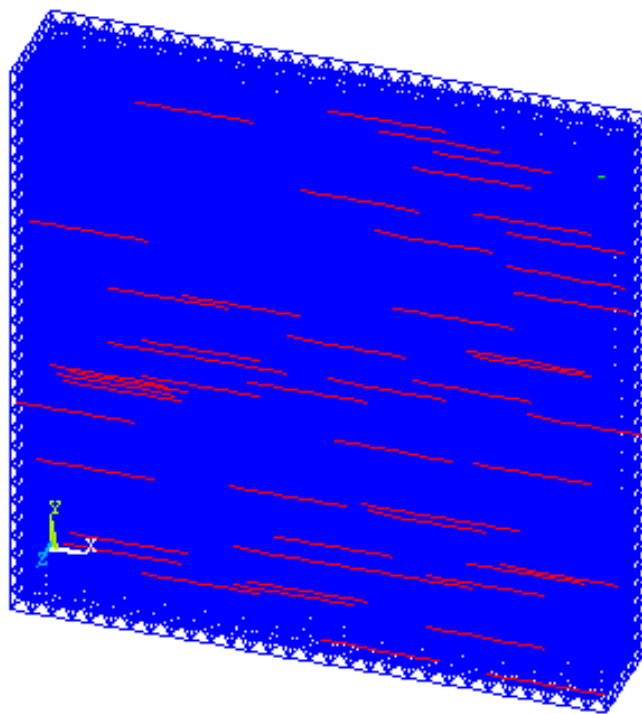


Figura 3.4 – Barras ajustadas na direção x.

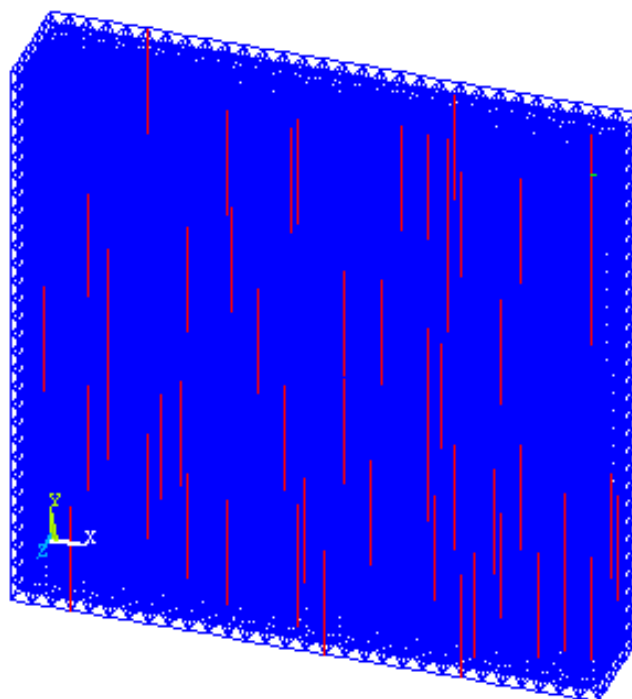


Figura 3.5 – Barras ajustadas na direção y.

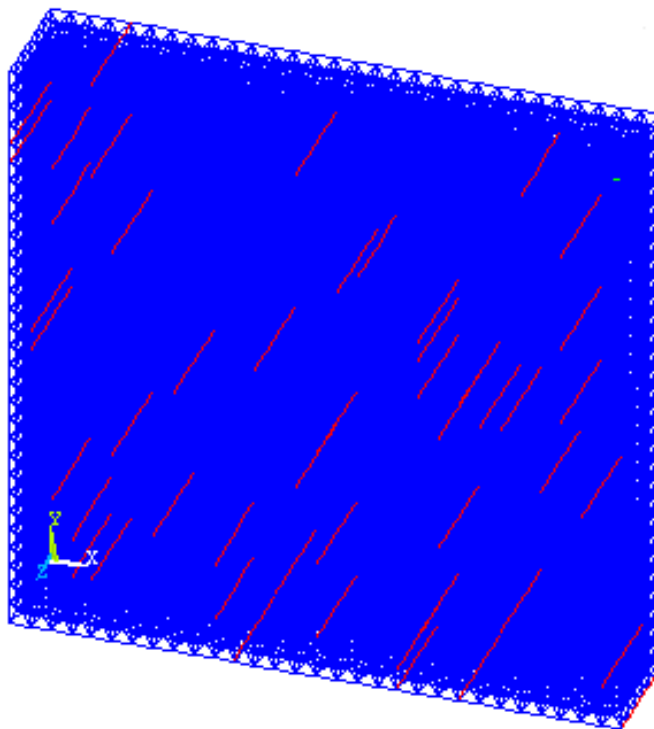


Figura 3.6 – Barras ajustadas na direção z.

3.1.3 Aleatorização da dispersão das fibras

Em laboratório é impossível modelar dois corpos de prova com a mesma distribuição de fibras uma vez que estas são misturadas ao concreto, em betoneira, gerando uma distribuição aleatória.

Desta forma, é importante que cada vez que um modelo numérico é gerado este possua uma configuração de distribuição de fibras diferente. Para tanto, decidiu-se utilizar junto à biblioteca *RNUND*, explicada no item 3.1.1, outra biblioteca disponível para Fortran, denominada *RNSET* cujo objetivo é a geração da semente para a geração dos números aleatórios.

Utilizando uma semente diferente em cada simulação é possível obter diferentes distribuições das fibras na matriz de concreto (Figura 3.7), representando adequadamente o que acontece durante os processos de concretagem.

No Capítulo 5, dedicado aos ensaios de tenacidade, é possível observar que variações nas distribuições das fibras produzem resultados significativamente diferentes.

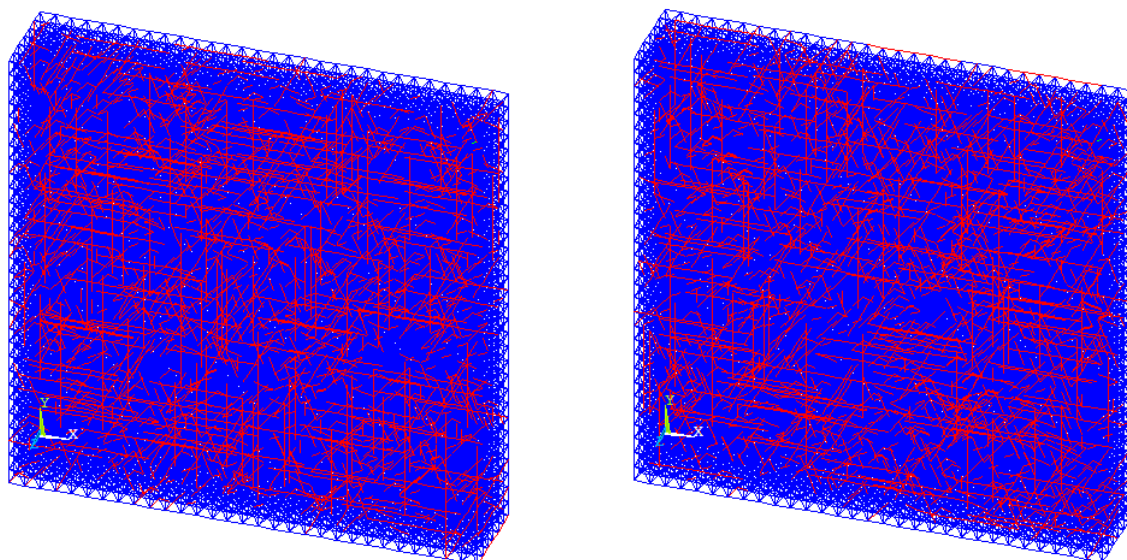


Figura 3.7 – Dois esquemas de distribuição de fibras gerados a partir de sementes diferentes. Diferenciação no posicionamento leva a resultados diferentes.

3.1.4 Aplicação das relações constitutivas e outras alterações

Desta forma, após a escolha aleatória das barras que deverão representar fibras de aço e da seleção das barras contíguas com o propósito de ajustar o comprimento das fibras, o programa cria um vetor onde são armazenadas todas as barras que representarão fibras de aço.

O vetor é então processado pelas subrotinas envolvidas no cálculo dos deslocamentos e das solicitações nas barras bem como na aplicação das relações constitutivas. O vetor também passa pela subrotina de tratamento gráfico, onde são definidos os aspectos gráficos das imagens de saída do programa.

3.1.5 Fluxograma

A seguir, é apresentado esquematicamente os passos para a implementação da distribuição aleatória das fibras de aço.

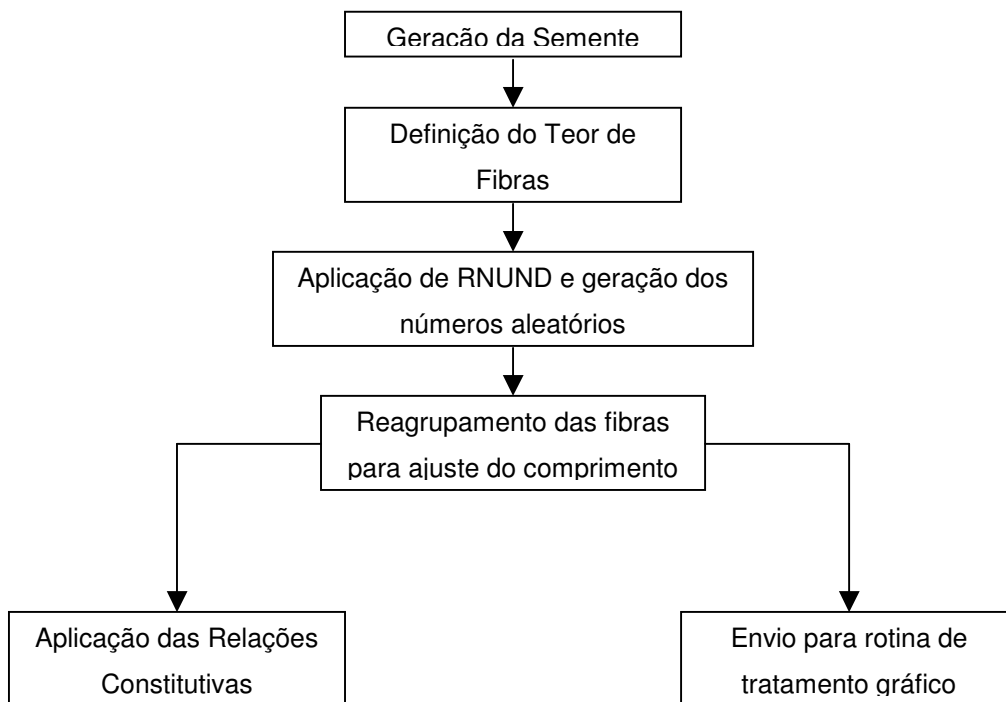


Figura 3.8 – Fluxograma da metodologia para obtenção da distribuição aleatória

4 IMPLEMENTAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Conforme já citado no Capítulo 3, Garcez (2005) utilizou o Método dos Elementos Discretos para simular placas de concreto reforçado com fibras de aço, obtendo porém, resultados que não se aproximavam adequadamente aos resultados obtidos experimentalmente. Em suas conclusões, apontou como uma das causas prováveis das divergências encontradas entre os resultados numéricos e os experimentais a questão relativa à vinculação do modelo em elementos discretos. O objetivo deste capítulo é verificar se há realmente alguma influência das condições de vinculação no comportamento dinâmico das placas, procurar alternativas para a simulação das condições de contorno, simular numericamente e comparar com resultados experimentais.

4.1 ALTERAÇÕES PROPOSTAS

A Figura 4.1 apresenta a geometria das placas ensaiadas por Garcez (2005) bem como a vinculação utilizada. Observa-se que foi utilizada uma banda de elastômetro (neoprene) de 3 centímetros de largura em todo o bordo da placa. Naturalmente, este tipo de vinculação não restringe totalmente os deslocamentos verticais do elemento estrutural, nem seus movimentos laterais.

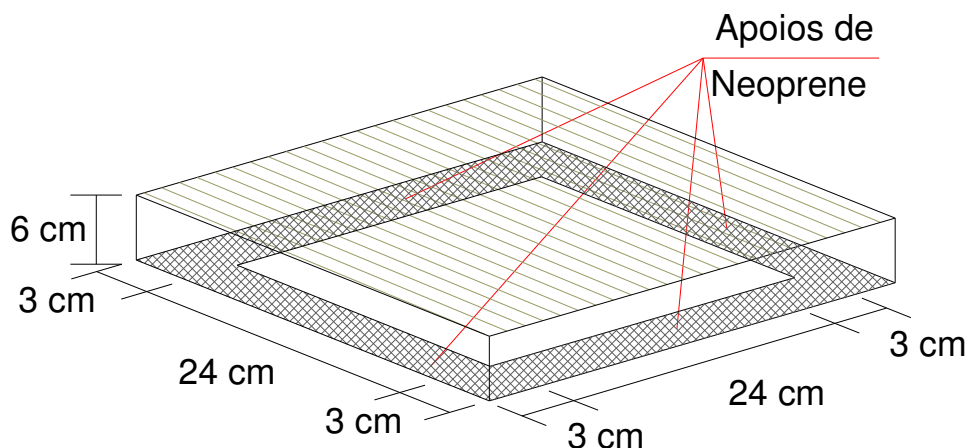


Figura 4.1 – Modelo ensaiado por Garcez 2005.

No entanto, Garcez (2005) utilizou a vinculação apresentada na Figura 4.2 em que os nós, em uma faixa de 3 cm contados a partir do contorno, são fixos. Uma análise estrutural da placa permite concluir que surgem pelo menos duas grandes divergências. Em primeiro lugar, não é permitido o deslocamento vertical que ocorre com o uso do neoprene. Em segundo lugar, ao receber um carregamento no seu centro, algumas regiões da placa, como, por exemplo, os cantos, acabam reagindo com um movimento no sentido contrário. Ao fixar os nós nestas regiões, acaba-se por criar uma vinculação que não é o apoio simples aproximando-se, na realidade, de um engaste.

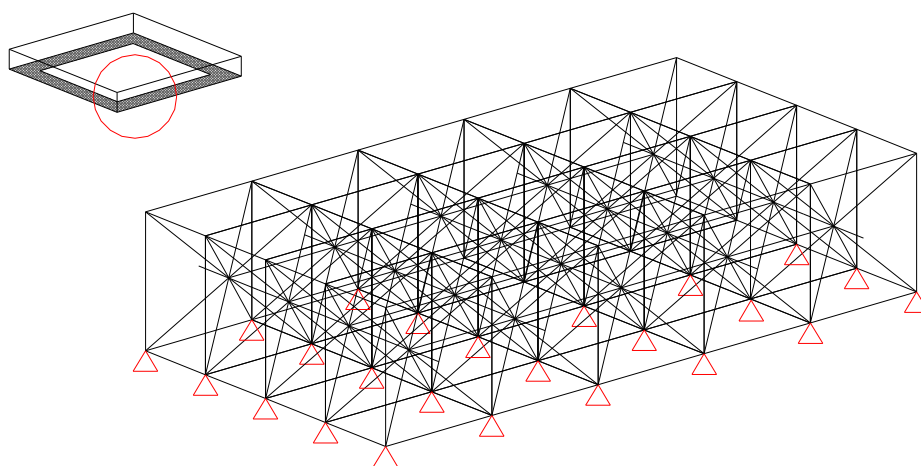


Figura 4.2 – Nós fixos no contorno

Por esse motivo foi proposta a alternativa apresentada neste capítulo que tem por objetivo evidenciar ou não a influência da flexibilidade dos apoios na resposta da placa ensaiada. Assim foram substituídos os apoios fixos por molas lineares elásticas na direção vertical, enquanto, a direção horizontal foi deixada livre. A Figura 4.3. mostra os apoios fixos substituídos por tais molas.

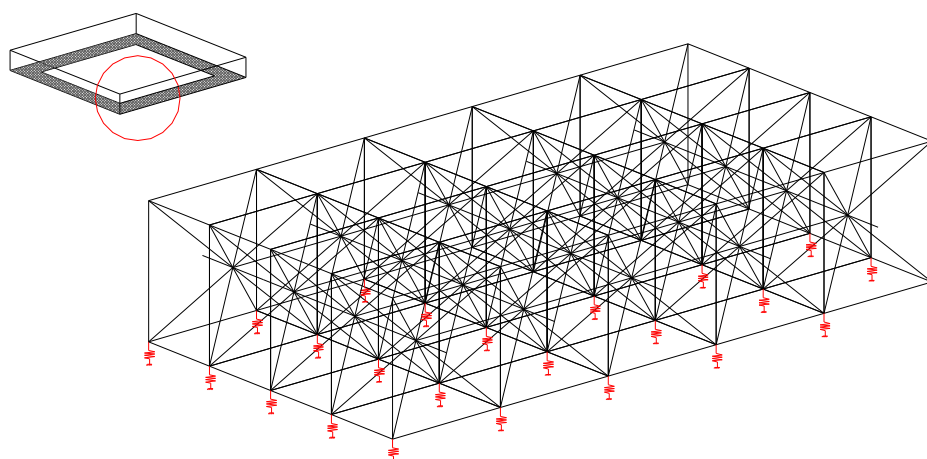


Figura 4.3 – Substituição dos apoios fixos por molas

No item 4.2 será visto que esta mudança na vinculação corrige diferenças na carga de pico encontrada no diagrama carga *versus* deslocamento.

4.2 SIMULAÇÕES

Será utilizado para analisar o efeito das condições de contorno o ensaio de tenacidade, cujos fundamentos estão detalhados no Capítulo 5 onde este assunto é estudado mais a fundo, ficando para este capítulo apenas a análise da influência das condições de apoio.

Neste item, portanto, placas com mesmas propriedades mecânicas, indicadas na Tabela 4.1, são submetidas ao mesmo ensaio, variando apenas a constante elástica das molas. Adianta-se, que o ensaio de tenacidade neste trabalho, consiste na aplicação de um deslocamento, na taxa de 0,3 mm/min (ver Capítulo 5), nos nós localizados em uma região de 1,5 cm de raio no centro da placa, conforme Figura

4.4. A fibra utilizada em todas as simulações foi a do tipo 80/60 com teor de 45 kg/m³.

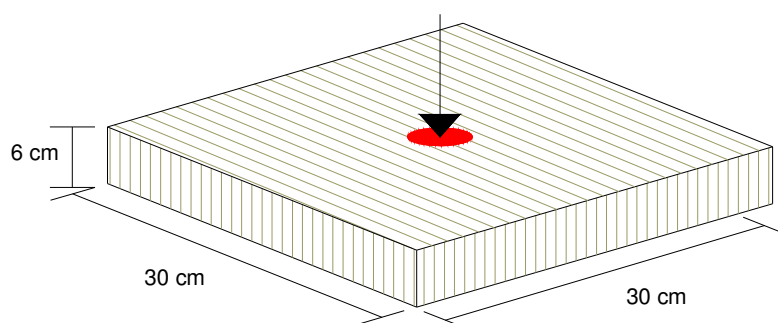


Figura 4.4 – Deslocamentos aplicados em um raio de 1,5 cm

Tabela 4.1 – Propriedades mecânicas utilizadas na simulação numérica.

Massa específica - ρ (kg/m ³)	2400
Módulo de Elasticidade do Concreto - E_{ct} (GPa)	32,0
Módulo de Elasticidade das Fibras - E_{fi} (Gpa)	200,0
Coefficiente de Poisson - ν	0,20
Resistência à tração concreto - f_t (Mpa)	3,14
Energia de Fratura - G_F (N/m)	180,0
Fator de Falha - R_f – Rocha (1989)	1,211
Coefficiente de Variação ϵ_p	15%
Teor de fibras (kg/m ³)	45

Em LDEC (1997) é realizado um estudo sobre avaliação de forças de impacto em estruturas com absorvedores de choque do tipo neoprene. Do gráfico apresentado na Figura 4.5 conclui-se que a rigidez deste tipo de estrutura de borracha, para pequenos deslocamentos, varia entre, aproximadamente, 2500 kN/m e 3500 kN/m.

Assim, os ensaios foram realizados em placas apoiadas sobre quatro apoios distintos. Em primeiro lugar, apoios fixos, como os empregados por Garcez (2005) e na seqüências, apoios elásticos com rigidez, k , de 1000, 2500 e 5000 kN/m. Cada um destes modelos foi ensaiado seis vezes para observar a variabilidade dos

ensaios. Mais uma vez, cita-se que esta variabilidade é devida à aleatorização das propriedades do material, tratada no item 2.2.1.1.5 e também à aleatorização da dispersão das fibras, tratada no item 3.1.3.

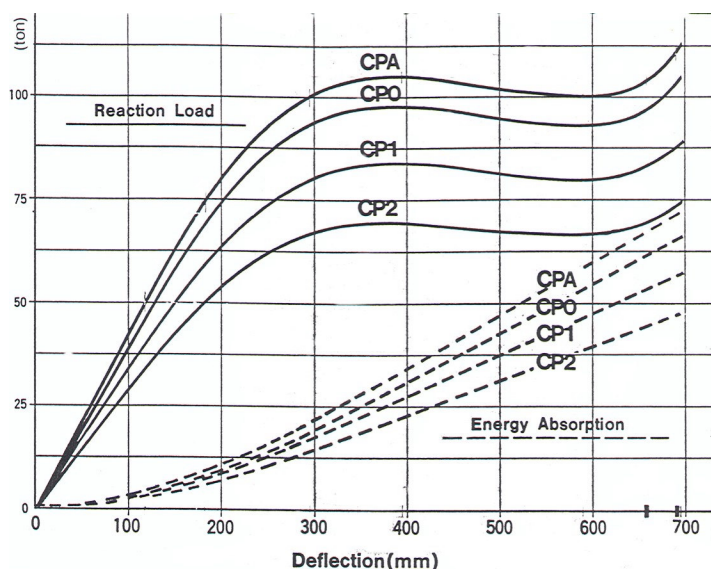


Figura 4.5 – Curvas Carga *versus* Deslocamento para absorvedores de choque do tipo neoprene (LDEC, 1997).

Nas figuras 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9 observa-se as curvas carga *versus* deslocamento para as placas apoiadas sobre apoios fixos, e com k de 5000, 2500 e 1000 kN/m, respectivamente.

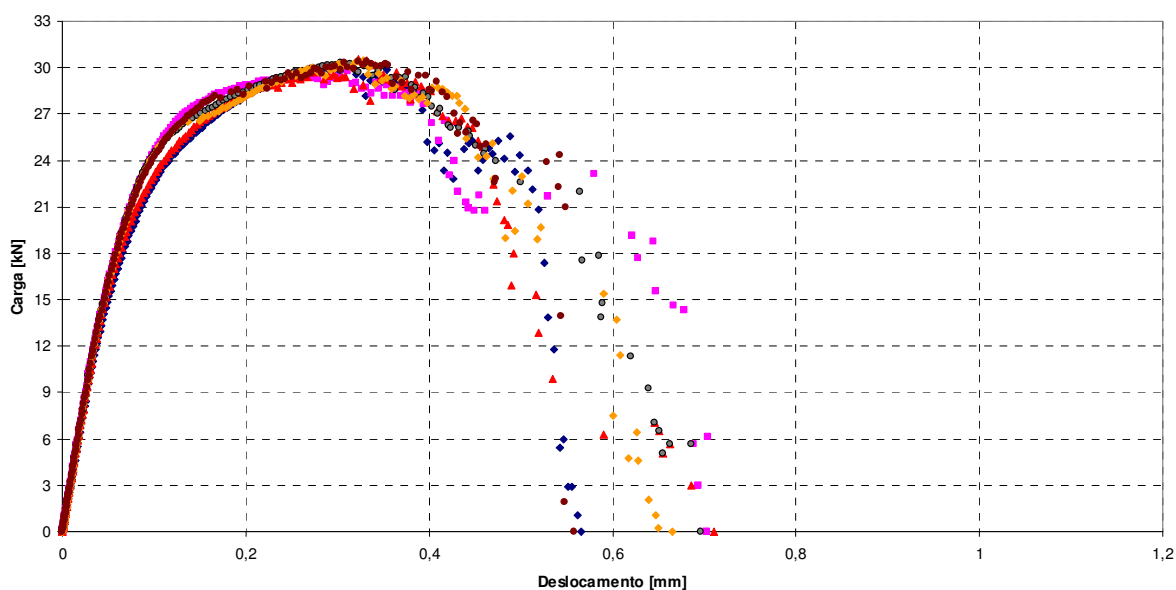


Figura 4.6 – Diagrama carga *versus* deslocamento: apoios fixos.

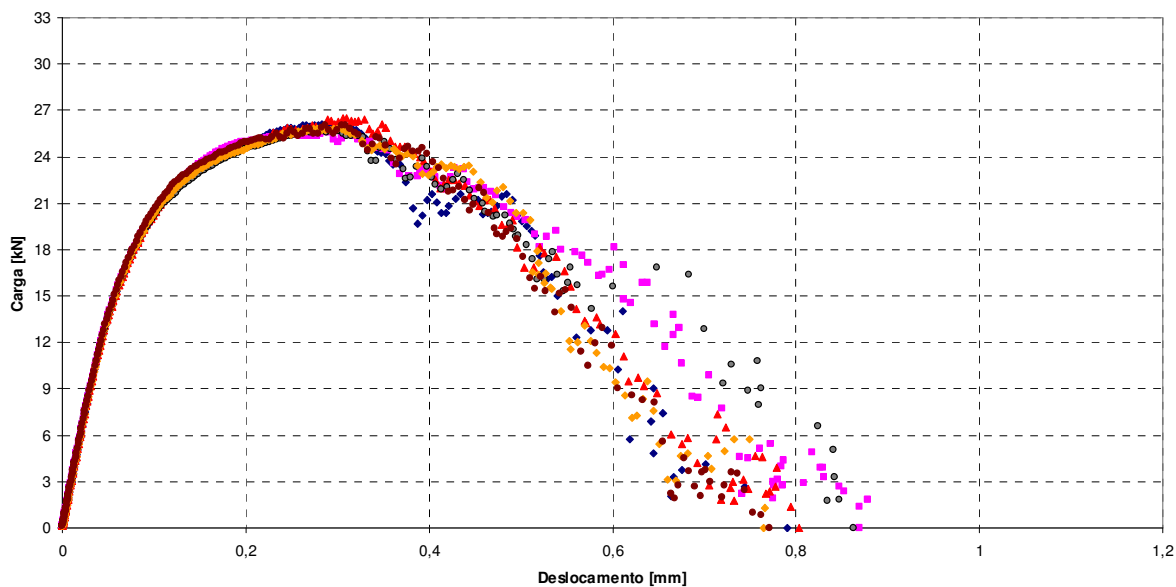


Figura 4.7 – Diagrama carga *versus* deslocamento
 $k=5000\text{kN/m}$.

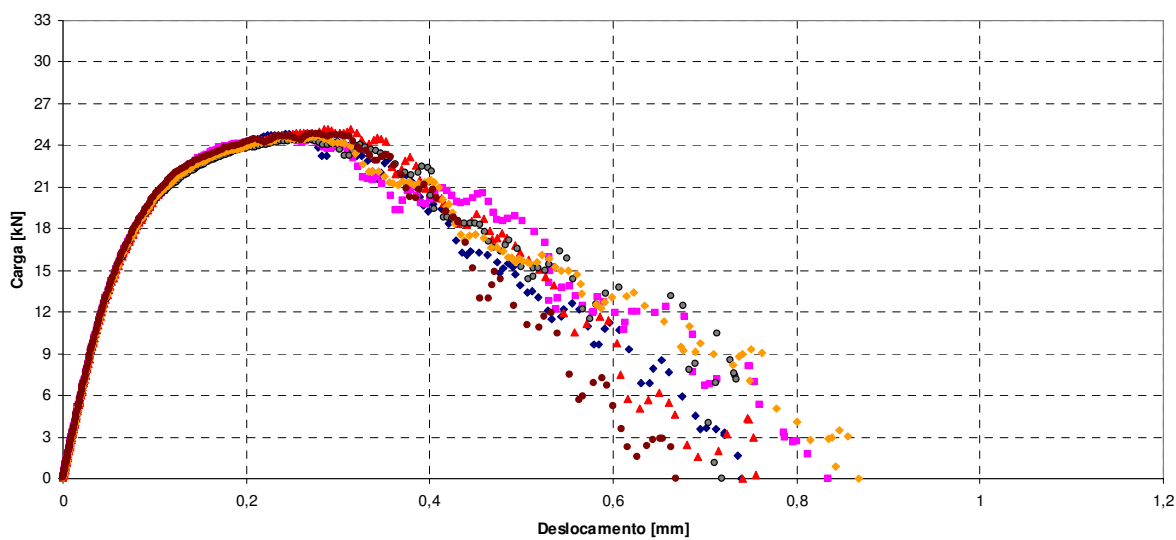


Figura 4.8 – Diagrama carga *versus* deslocamento
 $k=2500\text{kN/m}$.

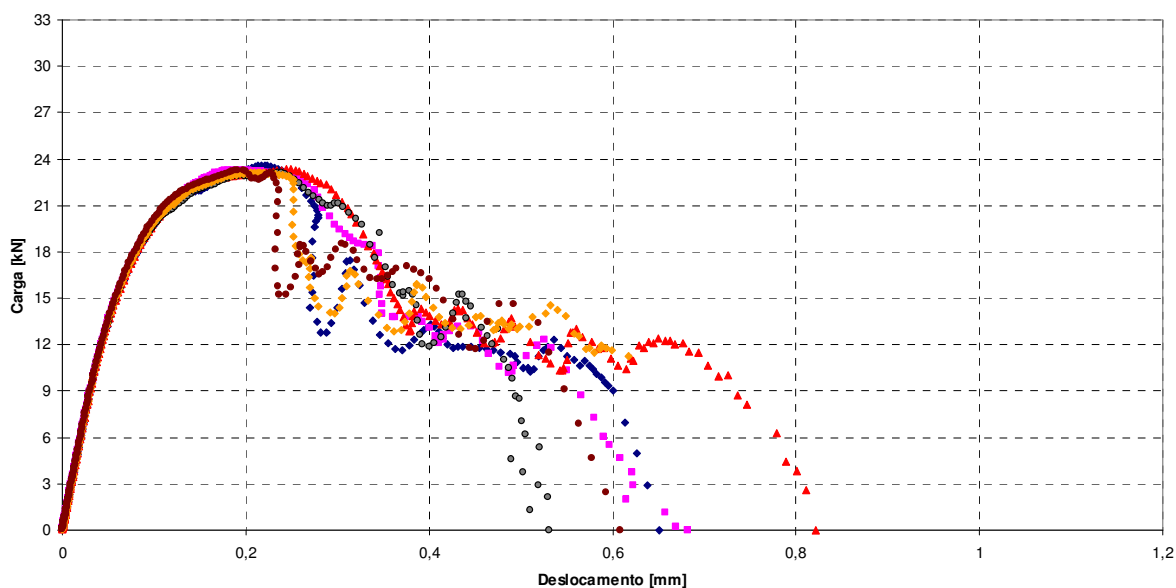


Figura 4.9 – Diagrama carga *versus* deslocamento
 $k=1000\text{kN/m}$.

A Figura 4.10 apresenta os resultados condensados em um único diagrama, utilizando uma média das seis simulações realizadas para cada modelo. Observa-se, claramente um incremento da carga de pico à medida que a rigidez dos apoios é aumentada.

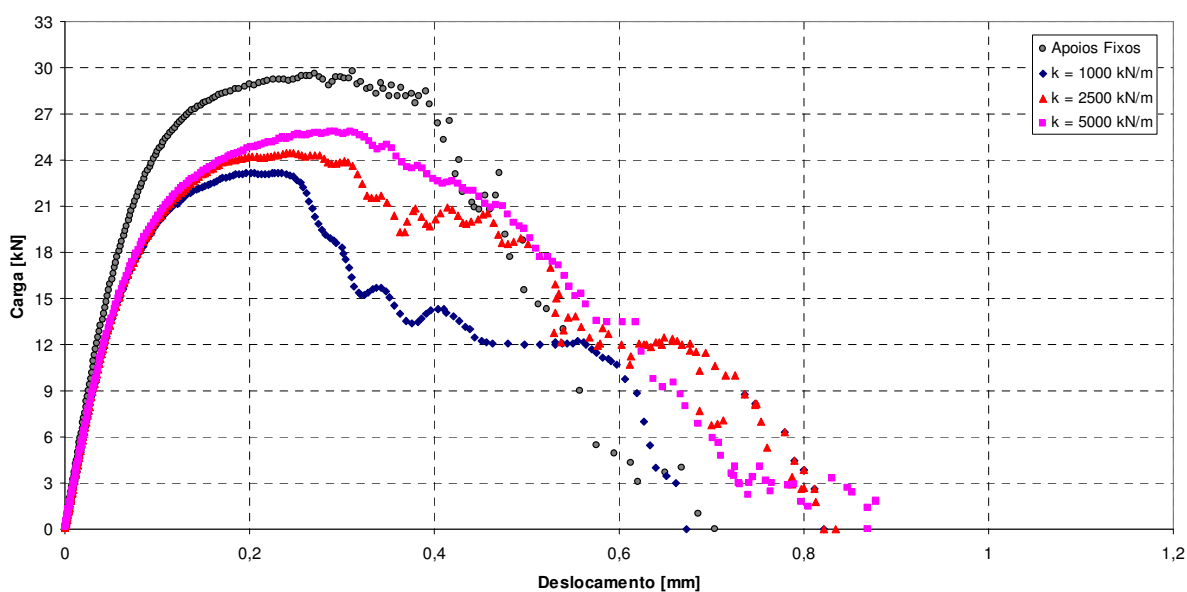


Figura 4.10 – Resumo das simulações com apoios variáveis.

A Tabela 4.2 apresenta a média das cargas de pico obtidas com os ensaios de tenacidade.

Tabela 4.2 – Cargas de pico

Constante elástica do apoio	Carga de Pico (kN)
Apoio Fixo	30,2
$k = 5.000 \text{ kN/m}$	26,5
$k = 2.500 \text{ kN/m}$	25,0
$k = 1.000 \text{ kN/m}$	23,8

Conclui-se o capítulo confirmando a hipótese levantada de que as condições de contorno utilizadas anteriormente eram inadequadas. Tal afirmação é sustentada pela Figura 4.10 e Tabela 4.2 onde se observa uma diferença superior a 20% entre as cargas obtidas com apoio fixo e apoio com rigidez de 1000 kN/m. Observa-se ainda que os apoios menos rígidos levaram a resultados menos estáveis que os demais.

Seguindo as recomendações de LDEC (1997) a rigidez a ser adotada nos ensaios dos próximos capítulos será a de 2500 kN/m. Acrescenta-se a esta recomendação o fato de Garcez (2005) ter obtido como carga de pico, em seus ensaios experimentais de tenacidade, valores na ordem de 25,2 kN.

5 SIMULAÇÃO DOS ENSAIOS DE TENACIDADE

5.1 TENACIDADE À FLEXÃO DO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO

As pastas de cimento são materiais que apresentam características de extrema fragilidade e, embora a adição de agregados miúdo e graúdo para a confecção de argamassas e concretos tenha dificultado o aparecimento e propagação de fissuras, estes dois materiais também apresentam um comportamento frágil quando comparado a outros materiais de construção, como o aço e a madeira. As fibras, que são materiais resistentes e dúcteis, quando adicionadas às argamassas e aos concretos, podem efetivamente inibir a rápida propagação das fissuras e, com isso, melhorar o esquema de ruptura frágil apresentada por estes materiais de características frágeis (Johnston, 1994).

Johnston (1994) ainda explica que ao evitar a rápida propagação de fissuras, as fibras fazem com que o concreto reforçado com fibras de aço deixe de apresentar uma característica frágil, e observa-se um aumento na área sob a curva carga *versus* deslocamento destes concretos. A propriedade caracterizada por tal área é comumente denominada de tenacidade e representa a capacidade de absorver energia do concreto reforçado com fibras de aço.

Segundo Gava (2004), uma série de experimentos vêm sendo desenvolvidos buscando caracterizar diretamente a capacidade de absorver energia do concreto

reforçado com fibras de aço, seja sob carregamento de compressão, flexão, tração ou impacto.

Para Gopalaratnam e Gettu (1995, *apud* Gava, 2004), os ensaios de flexão são os mais populares para determinar a capacidade de absorção de energia do material porque simulam melhor muitas condições de aplicação do CRFA e são mais simples de serem conduzidos do que os ensaios de tração direta.

Da mesma forma que Garcez (2005), o ensaio utilizado neste trabalho para determinar a tenacidade do concreto com diversos teores de fibras é o ensaio de flexão de placas. A geometria do modelo simulado é idêntica à apresentada na Figura 4.1, ou seja, placas de 30 x 30 x 6 cm.

Ao contrário do Capítulo 4 onde o objetivo da aplicação do ensaio de flexão era o de determinar a influência dos apoios, neste Capítulo o objetivo é o de avaliar a contribuição da adição de fibras de aço na tenacidade do concreto.

5.2 VELOCIDADE DE APLICAÇÃO DA CARGA

As simulações serão conduzidas com o controle de aplicação da carga por meio de uma velocidade de deslocamento constante.

Avaliando cinco diferentes velocidades de ensaio, que variaram de 0,075mm/min até 1,5mm/min, Johnston (1993) observou uma relação linear e crescente entre a resistência de primeira fissura e a velocidade, verificando um aumento de 16% da resistência de primeira fissura quando aumentou em 20 vezes a velocidade do ensaio. No entanto, para uma velocidade de até 0,5mm/min encontrou coeficientes de variação da resistência de primeira fissura da ordem de 5%.

Conforme já apresentado no item 4, o presente trabalho utilizará velocidades de aplicação de 0,3 mm/min ou 5,0E-06 m/s.

5.3 NÚMERO DE FIBRAS UTILIZADAS NOS MODELOS

A Tabela 5.1, a seguir, apresenta o número de barras do modelo em elementos discretos que foram substituídas por fibras de aço em cada um dos modelos. O total atingido para a placa em estudo é 76926 barras.

Tabela 5.1 – Número de barras “transformadas” em fibras de aço

Fibra	Teor	Número de barras de fibras
65/60	10	1108
65/60	30	3203
65/60	45	4766
65/60	60	6263
80/60	10	1443
80/60	30	4260
80/60	45	6263
80/60	60	8197

5.4 PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS MODELOS SIMULADOS

A Tabela 5.1 apresenta as propriedades mecânicas utilizadas nas simulações.

Tabela 5.2 – Propriedades Mecânicas

Propriedades mecânicas aplicadas	
Massa específica - Concreto (kg/m ³)	2400
Módulo de Elasticidade – Concreto (GPa)	32,0
Módulo de Elasticidade – Fibras (GPa)	200,0
Coefficiente de Poisson	0,20
Resistência a tração concreto (MPa)	3,14
Energia de Fratura (N/m)	180,0

Propriedades mecânicas aplicadas	
Fator de Falha R_f – Rocha (1989)	1,282
Coefficiente de Variação ϵ_p	15%
Rigidez do neoprene (kN/m)	2500

Salienta-se que os parâmetros módulo de elasticidade do concreto e resistência a tração do concreto foram retirados do trabalho de Garcez (2005). O módulo de elasticidade das fibras de aço é um dado fornecido pelo fabricante. A massa específica e coeficiente de Poisson são parâmetros conhecidos do concreto.

As barras de aço foram consideradas com um comportamento elasto-plástico perfeito. Para as barras que representam o concreto, uma energia de fratura maior que a medida em concreto sem armadura foi utilizada para reproduzir os resultados experimentais. Este fato já foi reportado na literatura técnica, indicando que a simples superposição das contribuições do aço e do concreto não é correta, pois existe uma interação entre ambos materiais que deve ser levada em conta (Linde, 1993 *apud* Iturrioz, 1995).

Todas as simulações de placas reforçadas com fibras de aço foram realizadas com uma energia de fratura de 180 N/m, valor apresentado por Iturrioz (1995), para o caso de concreto armado. No entanto, faz-se necessário um estudo mais apurado sobre quanto a mais deve ser atribuído a essa energia de fratura do concreto.

Desta forma, o único parâmetro que varia é o teor das fibras e, como será visto logo a seguir, também o tipo de fibra.

O fator de falha, visto no item 2.2.1.1.5 é uma função da deformação, ϵ_p , da energia de fratura, da resistência a tração e do módulo de elasticidade (ver Equação 2.24).

Autores como Iturrioz (1995) e Rios (2002a) apontam que, para os resultados de ensaios experimentais serem considerados aceitáveis, o coeficiente de variação deve atingir valores de no máximo 20%. No presente trabalho o valor utilizado foi de 15%.

Foram escolhidas para as simulações as fibras 65/60, de 60mm de comprimento e diâmetro de 0,90mm e a 80/60, de 60mm de comprimento e diâmetro de 0,75mm. A tabela a seguir apresenta as características das fibras:

Tabela 5.3 – Propriedades das fibras

Fibra	Comprimento (mm)	Diâmetro (mm)	Fator de Forma	Resistência do Arame (N/mm ²)	Número de fibras por kg
65/60	60	0,90	65	1000	3200
80/60	60	0,75	80	1100	4600

5.5 SIMULAÇÕES

Neste item serão apresentados os resultados das simulações realizadas em placas reforçadas com as fibras apresentadas na Tabela 5.3 com os teores de 10, 30, 45 e 60 kg/m³. Para cada um destes modelos é apresentado um diagrama carga *versus* deslocamento e uma tabela indicando a energia de fratura de cada uma das seis simulações realizadas.

5.5.1 Placa sem reforço - Testemunho

O primeiro modelo simulado e que servirá de base para comparação foi uma placa de concreto sem adição de fibras ou qualquer outro tipo de reforço. Esta placa será chamada na presente dissertação de placa testemunho.

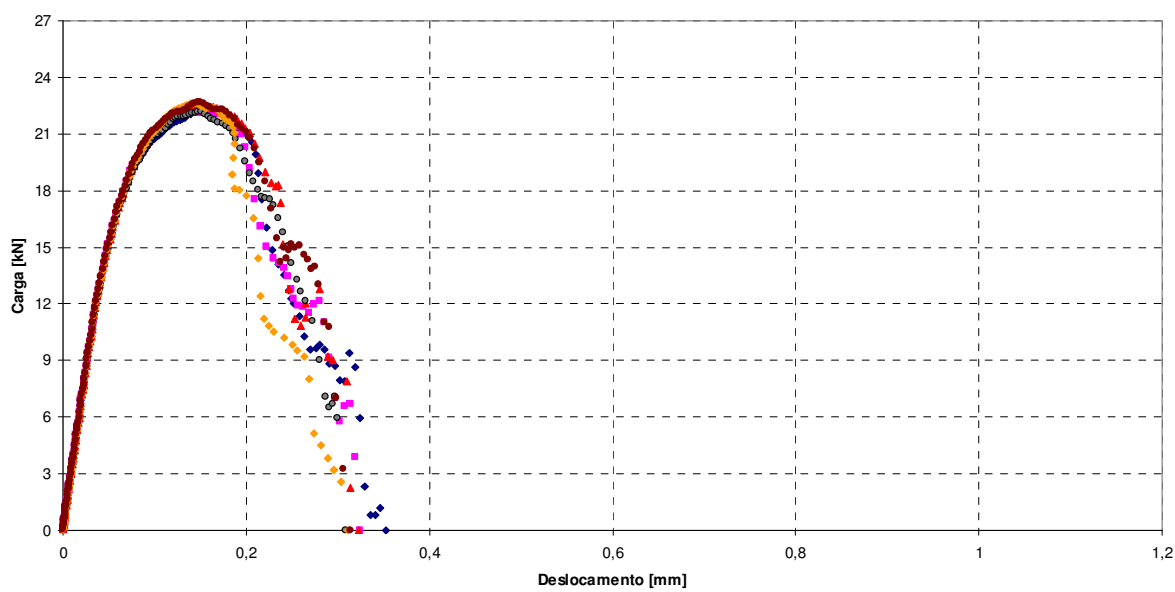


Figura 5.1 – Digrama carga *versus* deslocamento: placa sem reforço de fibras – testemunho.

Tabela 5.4 – Índice de tenacidade – Placa Testemunho

Fibra/Teor	Simulação	Tenacidade (kN.mm)
Testemunho 0 kg/m ³	1	4,46
	2	5,04
	3	4,97
	4	5,09
	5	5,12
	6	4,46
Média		4,86
Desvio padrão		0,31

5.5.2 Fibra 80/60

Para observar os efeitos causados pela adição de fibras de aço foram simulados três teores para as fibras 80/60 (60mm de comprimento e 0,75mm de diâmetro): 10, 30, 45 e 60 kg de fibras por metro cúbico de concreto.

5.5.2.1 Fibra 80/60 – Teor 10 kg/m³

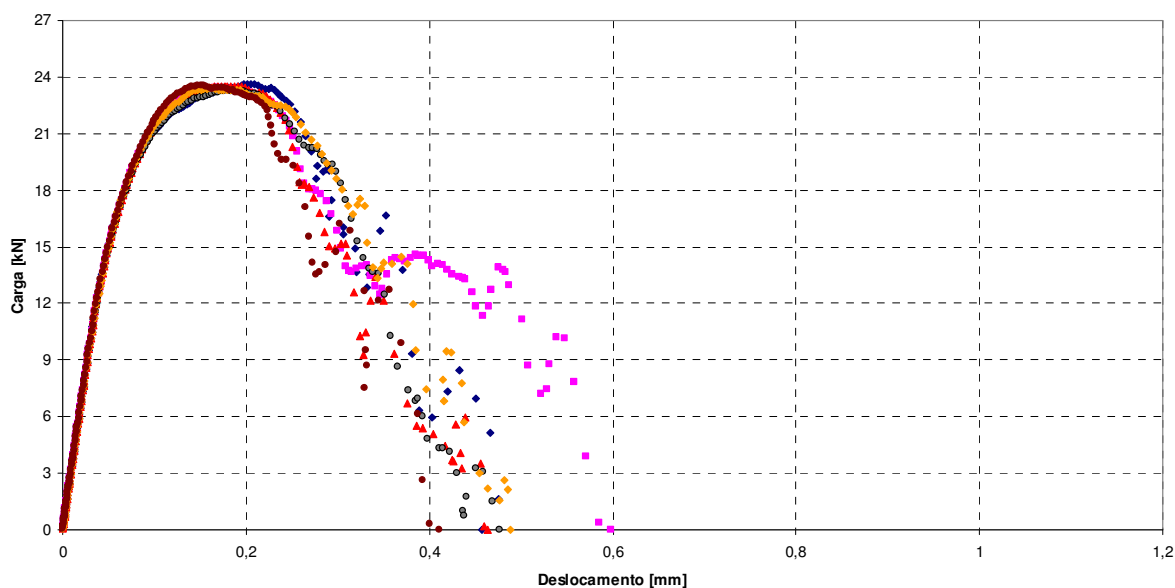


Figura 5.2 – Digrama carga *versus* deslocamento: placa com adição de 10kg/m³ de fibras de aço do tipo 80/60.

Tabela 5.5 – Índice de tenacidade – Fibras 80/60 – 10kg/m³

Fibra/Teor	Simulação	Tenacidade (kN.mm)
Fibra 80/60 10 kg/m ³	1	9,00
	2	7,57
	3	7,65
	4	7,11
	5	6,87
	6	6,51
Média		7,45
Desvio padrão		0,87

5.5.2.2 Fibra 80/60 – Teor 30 kg/m³

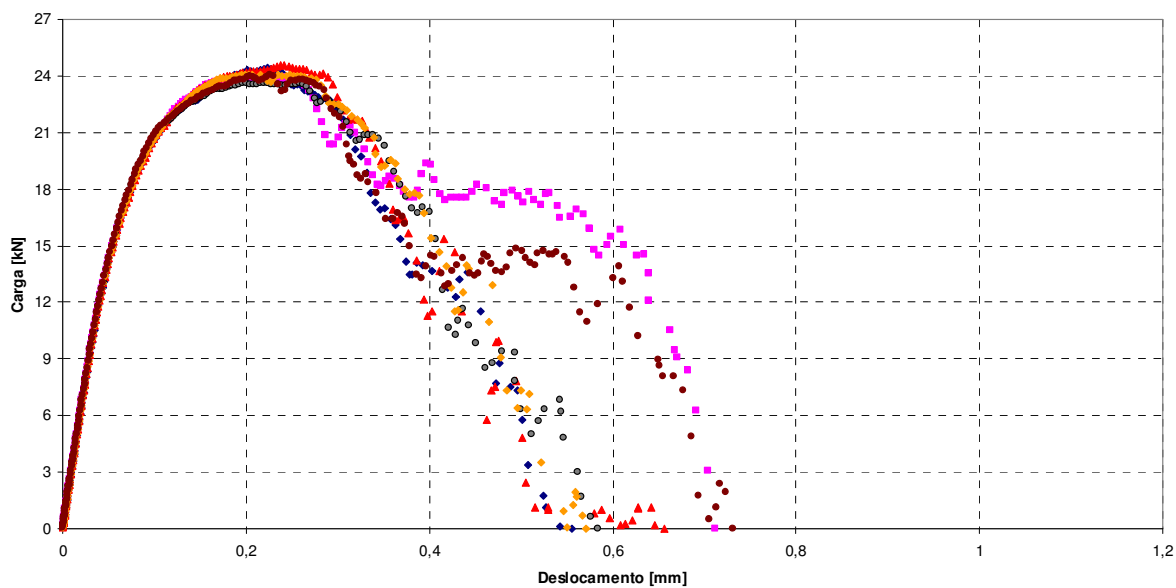


Figura 5.3 – Digrama carga *versus* deslocamento: placa com adição de 30kg/m³ de fibras de aço do tipo 80/60.

Tabela 5.6 – Índice de tenacidade – Fibras 80/60 – 30kg/m³

Fibra/Teor	Simulação	Tenacidade (kN.mm)
Fibra 80/60 30 kg/m ³	1	11,25
	2	12,41
	3	9,00
	4	9,23
	5	9,26
	6	8,87
Média		10,00
Desvio padrão		1,47

5.5.2.3 Fibra 80/60 – Teor 45 kg/m³

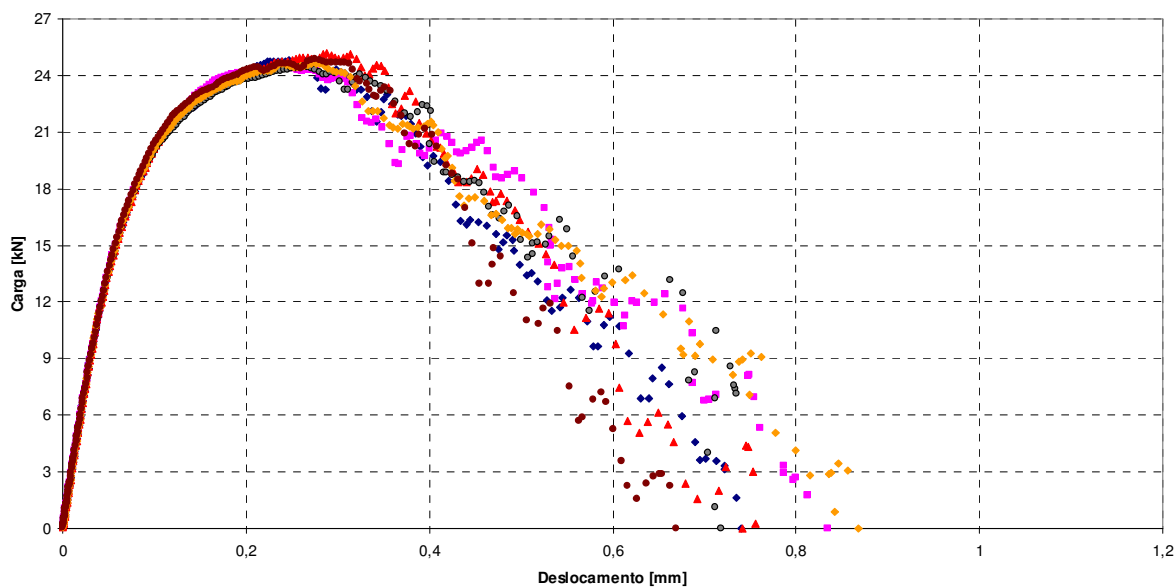


Figura 5.4 – Digrama carga *versus* deslocamento: placa com adição de 45 kg/m³ de fibras de aço do tipo 80/60.

Tabela 5.7 – Índice de tenacidade – Fibras 80/60 – 45 kg/m³

Fibra/Teor	Simulação	Tenacidade (kN.mm)
Fibra 80/60 45 kg/m ³	1	13,41
	2	13,16
	3	11,95
	4	11,78
	5	12,12
	6	10,81
Média		12,21
Desvio padrão		0,95

5.5.2.4 Fibra 80/60 – Teor 60 kg/m³

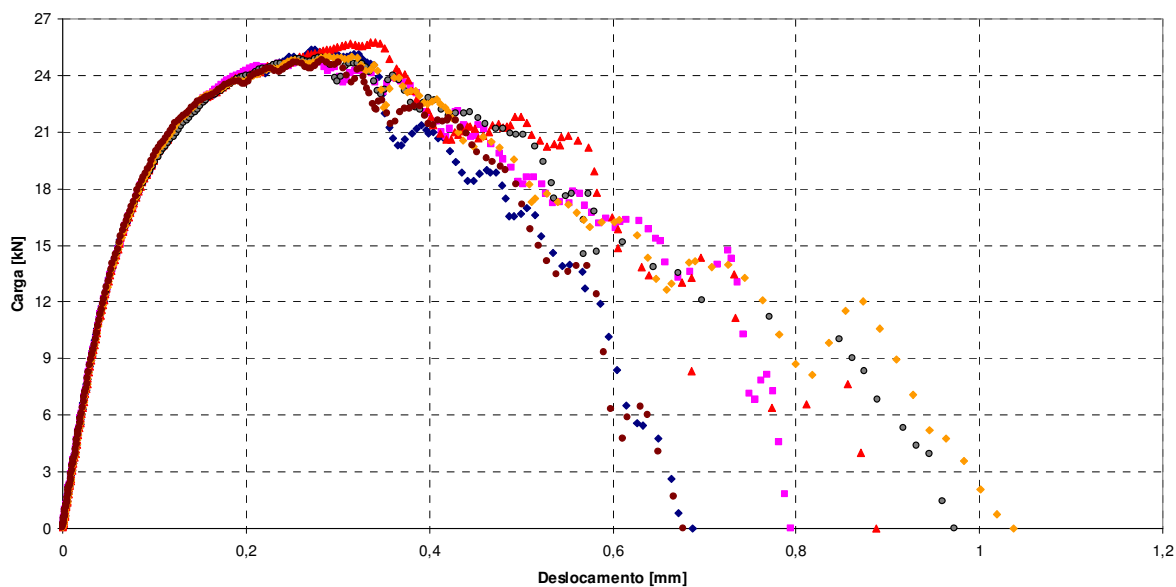


Figura 5.5 – Digrama carga *versus* deslocamento: placa com adição de 60 kg/m³ de fibras de aço do tipo 80/60.

Tabela 5.8 – Índice de tenacidade – Fibras 80/60 – 60kg/m³

Fibra/Teor	Simulação	Tenacidade (kN.mm)
Fibra 80/60 60 kg/m ³	1	16,33
	2	14,46
	3	15,86
	4	15,33
	5	11,82
	6	11,84
Média		14,27
Desvio padrão		1,99

5.5.3 Fibra 65/60

5.5.3.1 Fibra 65/60 – Teor 10 kg/m³

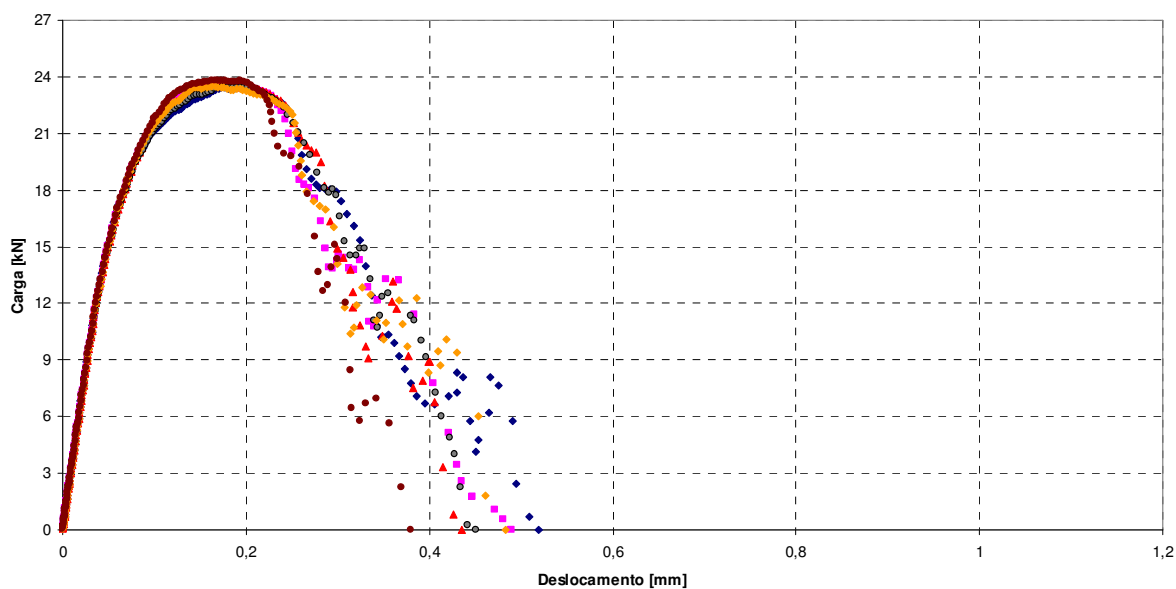


Figura 5.6 – Digrama carga *versus* deslocamento: placa com adição de 10kg/m³ de fibras de aço do tipo 65/60.

Tabela 5.9 – Índice de tenacidade – Fibras 65/60 – 10kg/m³

Fibra/Teor	Simulação	Tenacidade (kN.mm)
Fibra 65/60 10 kg/m ³	1	7,47
	2	7,32
	3	7,17
	4	7,19
	5	6,93
	6	6,09
Média		7,03
Desvio padrão		0,49

5.5.3.2 Fibra 65-60 – Teor 30kg/m³

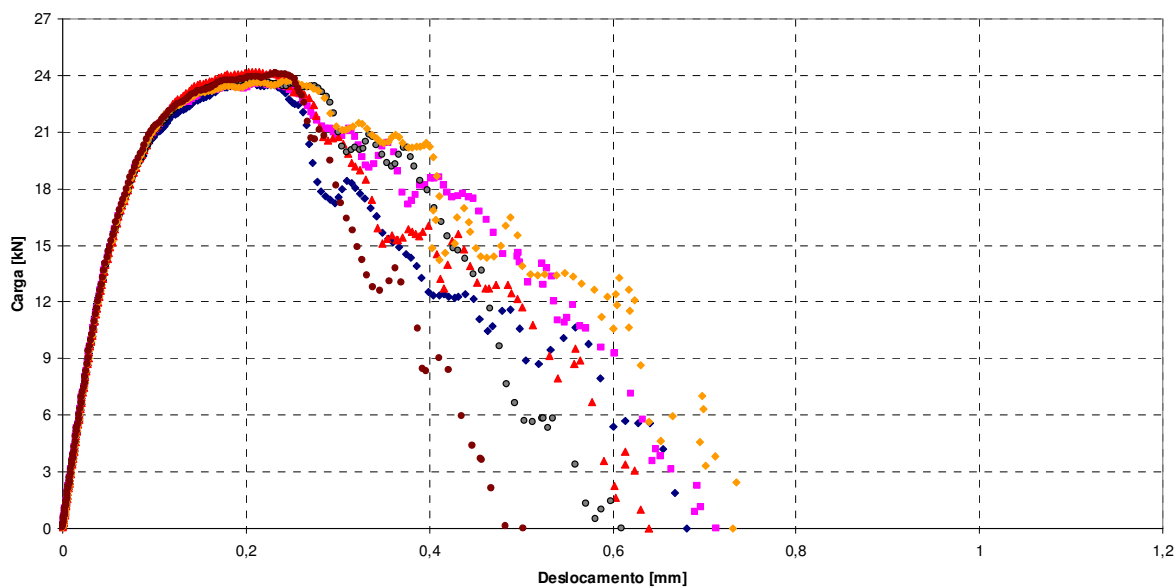


Figura 5.7 – Digrama carga *versus* deslocamento: placa com adição de 30kg/m³ de fibras de aço do tipo 65/60.

Tabela 5.10 – Índice de tenacidade – Fibras 65/60 – 30kg/m³

Fibra/Teor	Simulação	Tenacidade (kN.mm)
Fibra 80/60 30 kg/m ³	1	11,69
	2	11,06
	3	9,71
	4	7,62
	5	9,50
	6	9,87
Média		9,91
Desvio padrão		1,41

5.5.3.3 Fibra 65-60 – Teor 45 kg/m³

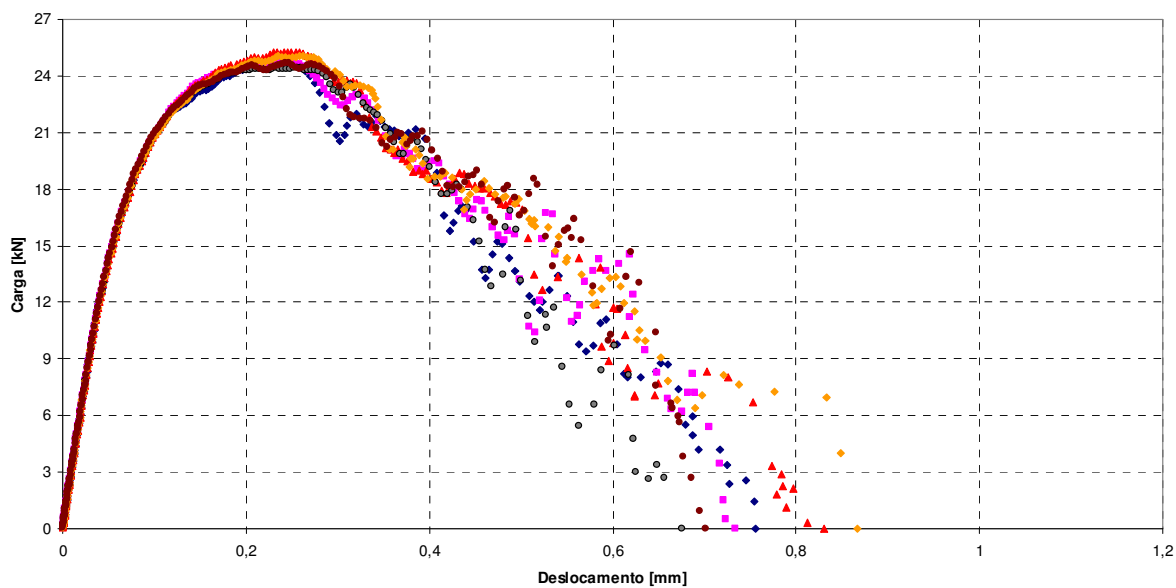


Figura 5.8 – Digrama carga *versus* deslocamento: placa com adição de 45 kg/m³ de fibras de aço do tipo 65/60.

Tabela 5.11 – Índice de tenacidade – Fibras 65/60 – 45 kg/m³

Fibra/Teor	Simulação	Tenacidade (kN.mm)
Fibra 80/60 45 kg/m ³	1	12,71
	2	13,39
	3	11,63
	4	12,15
	5	12,21
	6	10,91
Média		12,17
Desvio padrão		0,86

5.5.3.4 Fibra 65-60 – Teor 60 kg/m³

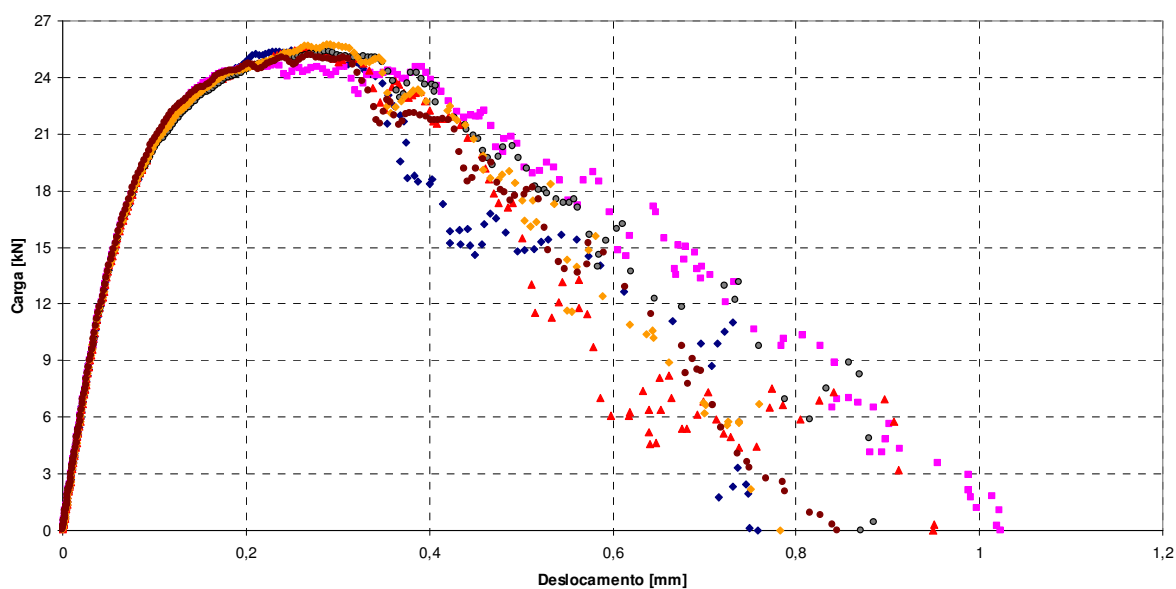


Figura 5.9 – Digrama carga *versus* deslocamento: placa com adição de 60 kg/m³ de fibras de aço do tipo 65/60.

Tabela 5.12 – Índice de tenacidade – Fibras 65/60 – 60 kg/m³

Fibra/Teor	Simulação	Tenacidade (kN.mm)
Fibra 80/60 60 kg/m ³	1	16,25
	2	12,93
	3	13,50
	4	15,20
	5	13,35
	6	13,31
Média		14,09
Desvio padrão		1,32

5.5.4 Resumo dos Resultados

A Tabela 5.12 mostra o resumo dos resultados obtidos no cálculo dos índices de tenacidade. Observa-se que a tenacidade cresce significativamente com o aumento do teor de fibras.

Tabela 5.13 – Resumo dos Resultados

Fibra/Teor		Tenacidade (kN.mm)	Desvio padrão	Incremento de Tenacidade
Testemunho	0	4,86	0,31	-
80/60	10	7,45	0,87	53%
	30	10,00	1,47	106%
	45	12,21	0,95	151%
	60	14,27	1,99	194%
65/60	10	7,03	0,49	44%
	30	9,91	1,41	104%
	45	12,17	0,86	150%
	60	14,09	1,32	189%

A Figura 5.10 apresenta o gráfico que mostra o incremento de tenacidade. Observa-se que os resultados obtidos para os modelos reforçados com fibras de maior fator de forma não apresentam desempenho significativamente superior.

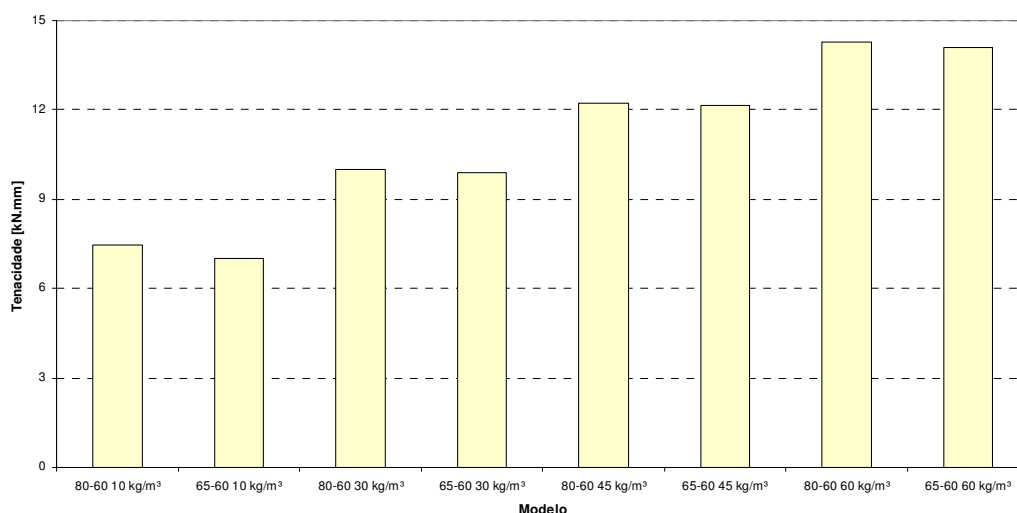


Figura 5.10 – Resumo dos resultados dos ensaios de tenacidade

5.5.5 Esquemas de Ruptura

Conforme já citado, o programa em que o Método dos Elementos Discretos está concebido, gera, em sua saída, imagens do modelo como as que serão vistas a seguir.

Apresentar neste item esquemas de ruptura de todos os modelos em vários instantes seria extensivo e desnecessário. Portanto, selecionou-se o modelo com fibras do tipo 80/60 com um teor de 45 kg/m³ para exemplificar a evolução da ruptura.

Nas figuras a seguir observa-se uma perspectiva, uma vista frontal do modelo e o ponto correspondente do diagrama carga *versus* deslocamento. O tempo de simulação decorrido é indicado na legenda.

Em azul, as barras de concreto; em amarelo, as barras de concreto que ultrapassaram a deformação crítica (Figura 2.7); em vermelho, as barras de aço e em verde as barras de aço que ultrapassaram a tensão de escoamento (Figura 2.8).

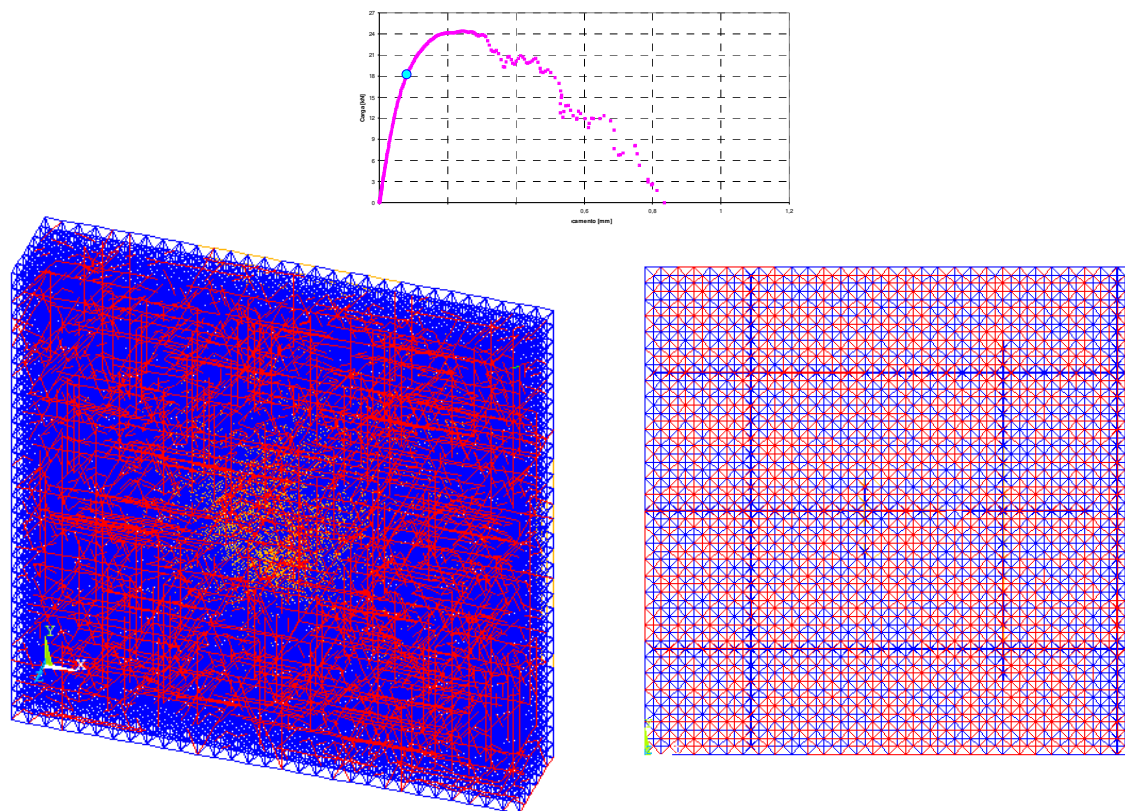


Figura 5.11 – Esquema de ruptura no instante 0,0075s

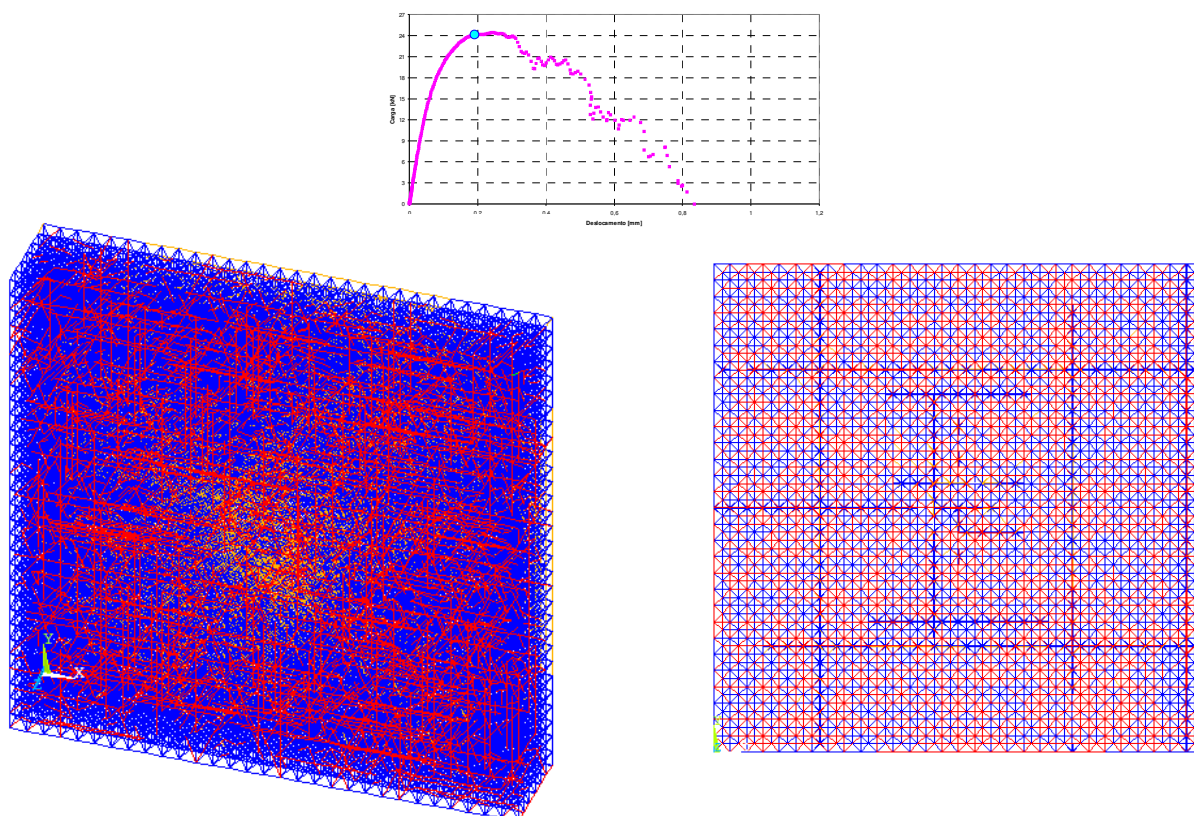


Figura 5.12 – Esquema de ruptura no instante 0,0105s

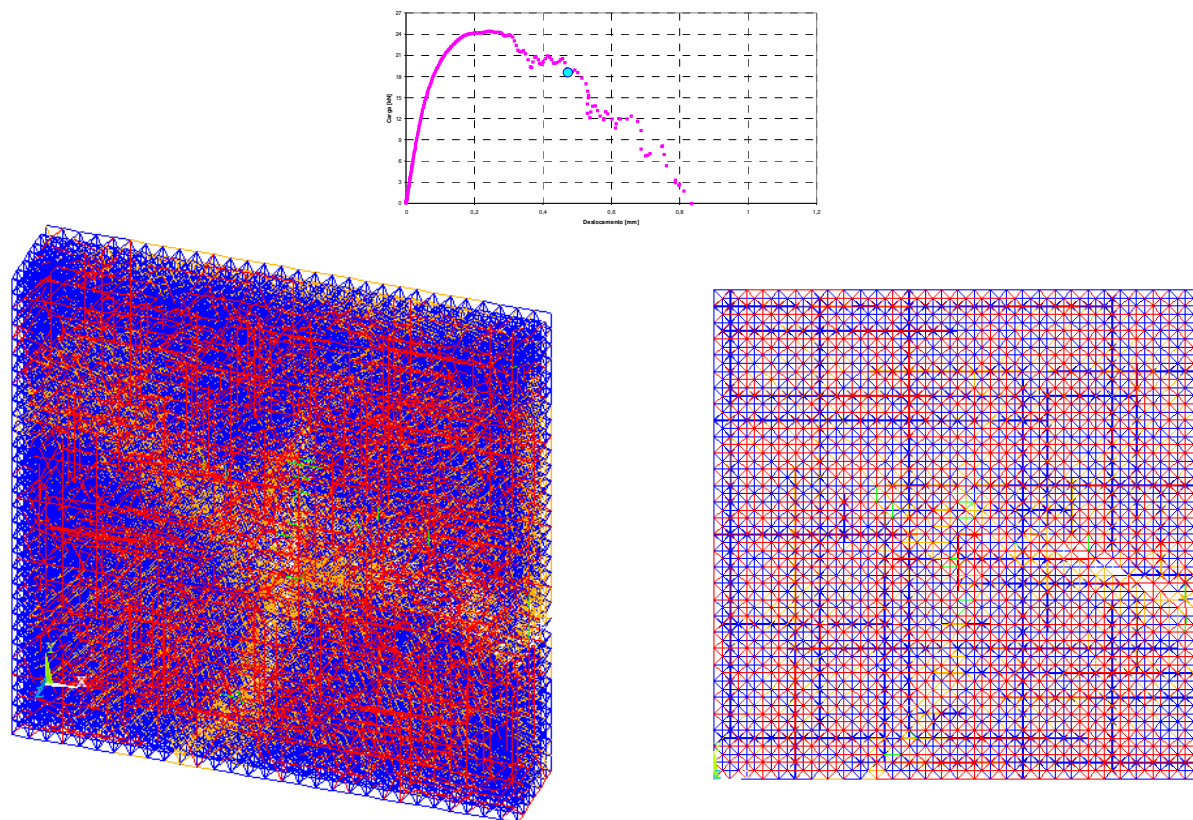


Figura 5.13 – Esquema de ruptura no instante 0,0135s

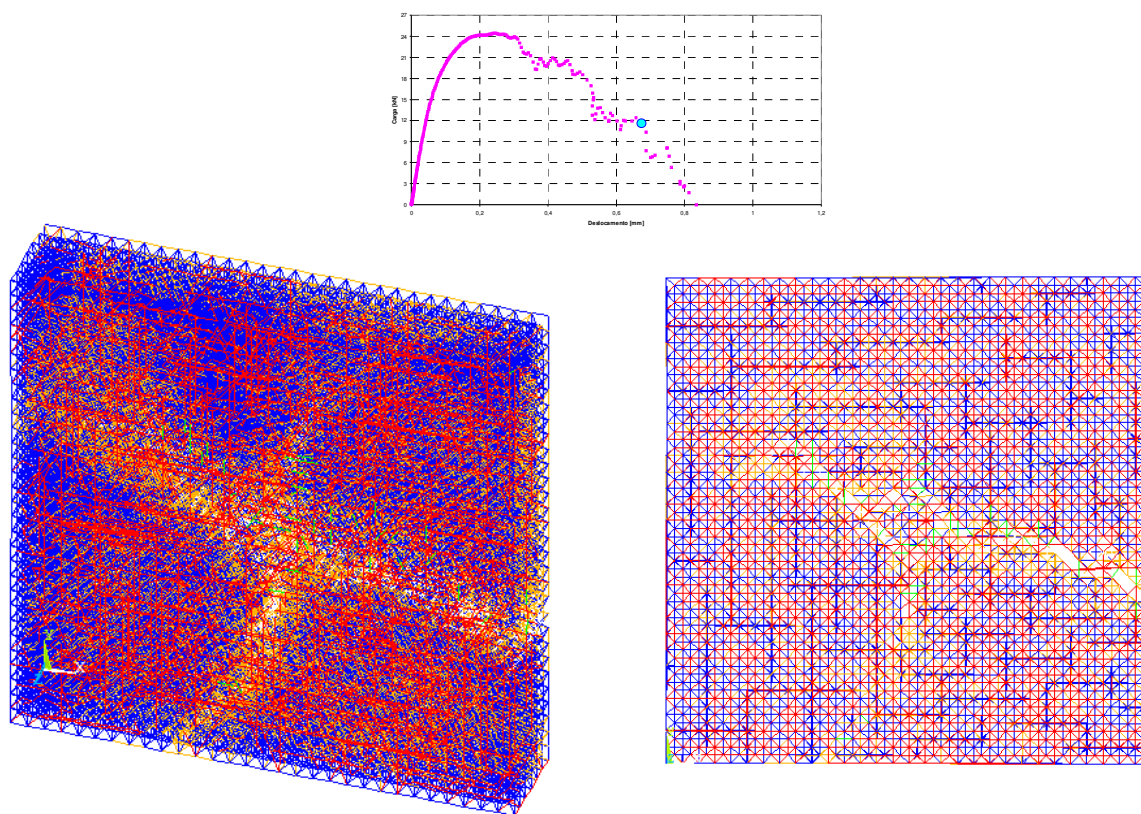


Figura 5.14 – Esquema de ruptura no instante 0,0145s

6 ENSAIOS DE IMPACTO

Entre as principais melhorias promovidas pela adição de fibras de aço ao concreto, destaca-se o aumento da performance frente a cargas de impacto. Como já mencionado oportunamente, tal comportamento deve-se, principalmente, ao fato de as fibras contidas no material dificultarem a propagação de fissuras após a aplicação dos carregamentos. No entanto, Johnston (1985, *apud Gava 2004*) verificou que os ensaios de impacto são de difícil reprodutibilidade dificultando sua normalização. Mehta e Monteiro (1994) argumentam que, apesar da existência de indicativos do bom desempenho dos concretos reforçados com fibras de aço ao impacto, a escassez de ensaios padronizados de resistência ao impacto torna difícil avaliar a real magnitude da melhoria provocada pela inserção de fibras.

Garcez (2005), entre outros pesquisadores, afirma que o comportamento do concreto reforçado com fibras de aço pode ser avaliado através da ação de cargas de impacto induzidas mediante a aplicação de cargas explosivas, assim como através de equipamentos de queda de pesos, pelo uso do pêndulo de Charpy ou por ação de cargas dinâmicas de tração e compressão. O ACI 544.1 R6 (1996) indica que comparações entre o concreto reforçado e o concreto convencional podem ser feitas a partir da quantificação direta das diferenças de desempenho de ambos (resistência, deformação, tenacidade, entre outros), quando submetidos ao mesmo tipo de ensaio de impacto.

Nesta dissertação é seguida a metodologia de impactos usada por Garcez (2005), que consiste na avaliação do comportamento de placas de concreto reforçado com

fibras de aço submetido à ação de uma esfera de aço em queda livre de diferentes alturas até a ruptura.

6.1 DETERMINAÇÃO DAS CARGAS DE IMPACTO

O primeiro problema que se enfrenta na simulação numérica de um processo real ou experimental é o da determinação das variáveis a serem usadas, como por exemplo, propriedades geométricas e mecânicas e principalmente as condições e valores de carregamento. A correta definição das cargas em um problema de carregamento dinâmico é um tópico que exige muita atenção e cuidado uma vez que a mesma depende também das características da estrutura em análise.

Vários esquemas podem ser usados para determinar o carregamento que a queda de uma esfera realiza sobre uma placa de concreto. Entre eles, cita-se equações baseadas no equilíbrio energético, modelos numéricos (software) e ensaios específicos com células de cargas e sensores dinâmicos. A seguir é apresentada uma breve descrição de algumas das principais metodologias.

6.1.1 Medições experimentais

Uma das maneiras possíveis de se estimar as forças geradas pelo impacto de uma esfera seria a utilização de um sistema de medição experimental. Neste esquema, células de cargas dinâmicas são localizadas, em geral, na parte inferior da placa, sendo os valores da carga, assim como o tempo de aplicação de cada impacto registrados em dispositivos adequados como, por exemplo, mediante o uso placas de aquisição de dados. Principalmente devido a limitações de tempo, o presente trabalho não contemplou um programa experimental deste tipo.

6.1.2 Método do Fator de Impacto

Sawan e Abdel-Rohman (1985) apresentam o Método do Fator de Impacto como uma das formas possíveis de se estimar a carga causada por uma esfera atingindo uma placa de concreto. O método converte o peso da esfera em uma carga de impacto usando um magnificador chamado fator de impacto.

Neste método, um objeto em movimento colide com um corpo estacionário. Assume-se que:

- O corpo em movimento (esfera) é perfeitamente rígido;
- A placa tem um grau de liberdade e se desloca na mesma direção que a esfera se movimenta.
- O impacto é plástico e os dois corpos não se separam após o choque

A partir destas considerações, o fator de impacto pode ser deduzido, a partir dos princípios de conservação de energia:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{V_o^2}{g \delta_{st}} \right) \left[\frac{1}{1 + k_m \frac{Q_o}{Q}} \right]} \quad (6.1)$$

onde:

k_d = fator de impacto;

δ_{st} = deslocamento da placa devido ao carregamento estático Q (esfera);

k_m = fator de redução de massa (0,25);

Q_o = peso da placa;

V_o = velocidade da esfera no instante do impacto $V_o = \sqrt{2gh}$;

g = aceleração da gravidade;

h = altura da qual a esfera cai.

Desta forma, o comportamento da placa sob ação de uma carga de impacto é idêntico ao comportamento da mesma placa sob a ação de uma carga estática multiplicada pelo fator de impacto, k_d . Ou seja, se existe uma carga, Q , que cai de uma altura h , sobre a superfície de uma placa, então a força estática equivalente, agindo sobre a placa, é o peso, Q , multiplicado pelo fator de impacto.

$$P_{Eq} = k_d \cdot Q \quad (6.2)$$

Para a aplicação da Equação 6.1, o deslocamento estático, δ_{st} , foi determinado com o auxílio do método dos elementos discretos, aplicando-se uma carga constante de valor Q (peso da esfera).

Para um δ_{st} igual a 5,77E-08m, o carregamento equivalente encontrado, para diversas alturas de quedas, foi o seguinte:

Tabela 6.1 – Carregamento equivalente usando o Método do Fator de Impacto

h (cm)	10	30	60	80	100	150	200
k_d	890,6	1541,9	2180,1	2517,1	2814,2	3446,7	3979,5
P_{Eq} (kN)	8,72	15,1	21,3	24,7	27,6	33,8	38,9

No entanto, em Sawan e Abdel-Rohman (1986) é realizado um programa experimental que demonstra que os resultados obtidos com o Método do Fator de Impacto chegam a ser até 70% superiores aos resultados experimentais. Desta forma, os resultados apresentados na Tabela 6.1 são superestimados (limite superior).

6.1.3 Programas computacionais comerciais

Uma terceira alternativa para a definição das cargas de impacto é a utilização do programa computacional Working Model™ 3D 2.0. Esta ferramenta permite a modelagem de peças e sistemas estruturais a partir da definição da geometria e propriedades dos materiais tais como: massa específica, coeficiente de restituição (relação entre a velocidade relativa antes e depois de uma colisão, variando entre 0 e 1), coeficiente de atrito, constante de mola e amortecimento dos apoios. Esta metodologia foi anteriormente utilizada por Garcez (2005). A figura 6.1 apresenta uma imagem do programa e o diagrama carga *versus* tempo gerado.

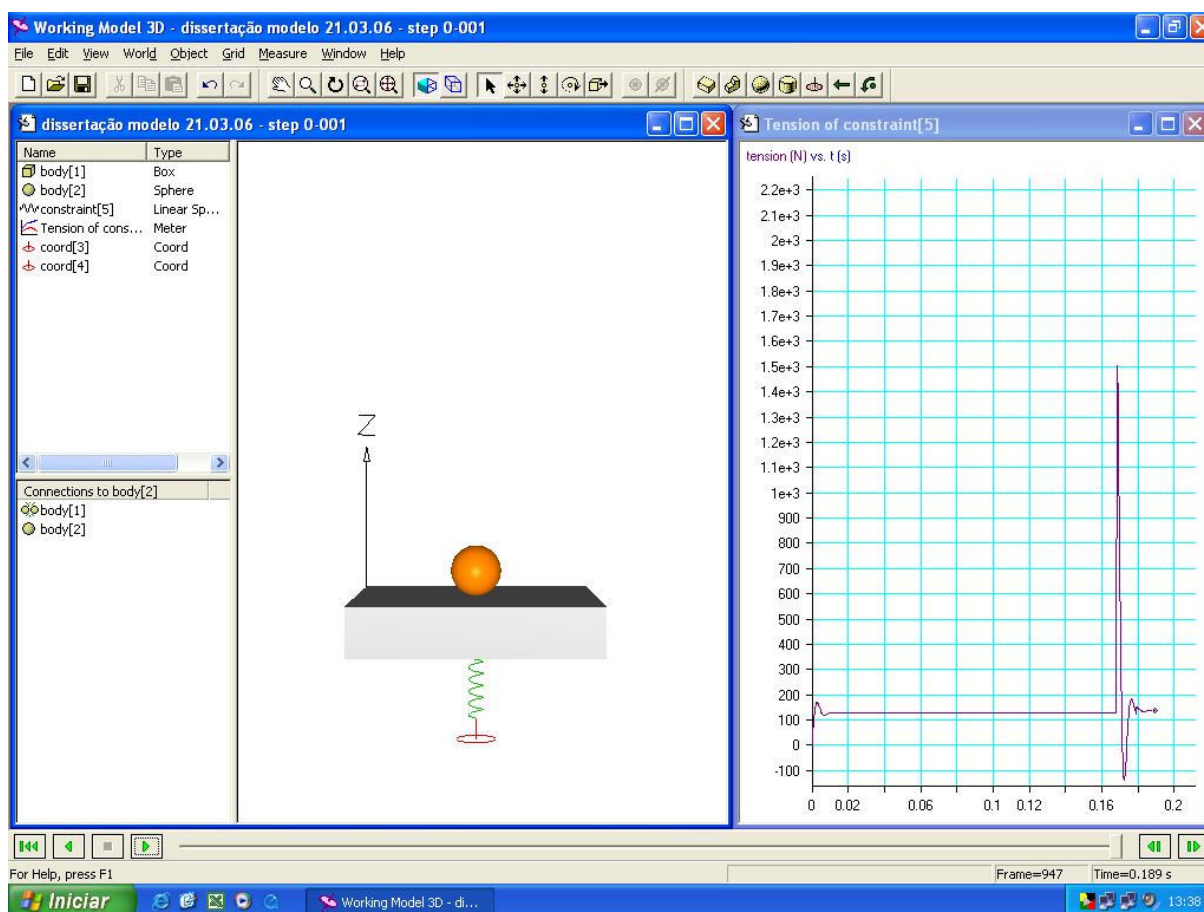


Figura 6.1 – Modelo gerado no Working Model™ e diagrama gerado pelo programa.

A Tabela 6.2 apresenta os carregamentos obtidos com o uso do programa.

Tabela 6.2 – Carregamento equivalente usando o software comercial Working Model™ 3D 2.0

h (cm)	10	30	60	80	100	150	200
P_{Eq} (kN)	0,85	1,8	2,8	3,3	3,7	4,6	5,5

Salienta-se que esta metodologia apresenta resultados com grande variabilidade a medida que são promovidas alterações em parâmetros de entrada, tais como, os coeficiente de restituição e as rigidezes das molas do apoio de neoprene. Assim, há a necessidade de um estudo adequado com os reais parâmetros usados. Destaca-se que alguns deles são de difícil obtenção e custos elevados.

6.1.4 Fórmulas obtidas a partir do Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

Para encontrar o valor da carga de impacto considera-se que: a esfera, em queda, e a placa, apoiada, após o impacto, movimentam-se na mesma direção; que o impacto é essencialmente plástico com os objetos não sofrendo deslocamentos em outras direções e, após o impacto, os objetos permanecem em contato com uma massa combinada ($m_1 + m_2$) e uma velocidade v_3 .

Pela conservação da quantidade de movimento:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_3 \quad (6.3)$$

A energia cinética dos dois objetos antes do impacto é:

$$E_0 = \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) \quad (6.4)$$

onde:

m_1 = massa da esfera (kg);

m_2 = massa da placa (kg);

v_1 = velocidade esfera antes do impacto (m/s);

v_2 = velocidade da placa antes do impacto, no caso 0 m/s.

E_0 = energia cinética antes do impacto (J).

Após o impacto a energia cinética é dada por:

$$E_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_3^2 \quad (6.5)$$

onde:

v_3 = velocidade após o impacto dos objetos (m/s);

E_1 = energia cinética após o impacto (J).

E, desta forma, a perda de energia durante o impacto

$$\Delta E = E_0 - E_1 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} (v_1 + v_2)^2 \quad (6.6)$$

Se $v_a = v_1 + v_2$, ou seja, a velocidade de aproximação dos objetos, a perda de energia é:

$$\Delta E = \frac{m_1 m_2 v_a^2}{2(m_1 + m_2)} \quad (6.7)$$

O trabalho realizado pela força F é igual à energia perdida no impacto (variação da energia cinética):

$$\Delta E = F \cdot s \quad (6.8)$$

onde:

F = força média agindo nos dois objetos no impacto (N);

s = deslocamento total

Finalmente:

$$F = \frac{m_1 m_2 v_a^2}{2(m_1 + m_2)s} \quad (6.9)$$

No entanto, o deslocamento, s , causado pela queda da esfera de uma determinada altura não foi medida experimentalmente o que dificulta a aplicação da Equação (6.9).

Verificou-se nas placas ensaiadas por Garcez (2005) que a deformação gerada ao fim dos ensaios (muitas quedas) atingiu no máximo 1,8mm de profundidade. Estimando-se que uma queda única de 2,0m de altura cause um “afundamento” de 1,3mm e aplicando-se o método apresentado neste item, o carregamento equivalente encontrado é de 12,5 kN.

6.1.5 Aplicação de velocidades

O formato em que o Método dos Elementos Discretos está programado, com uma rotina de integração explícita, permite que ao invés de utilizarem-se forças que sejam equivalentes às geradas durante um impacto, utilizem-se velocidades de deslocamento. Desta forma, os nós, que no presente trabalho recebem cargas, receberiam, durante um certo intervalo de tempo, deslocamentos segundo uma velocidade determinada. Esta metodologia não foi empregada nesta dissertação mas já foi utilizada em outros trabalhos em que o MED foi empregado.

6.2 ENSAIO DE PULSO ÚNICO

6.2.1 Objetivos

Como visto no item 6.1, a determinação da carga dinâmica é um assunto que deve ser cuidadosamente avaliado. Para uma queda de dois metros, o carregamento varia entre 5,5 kN, obtido no software comercial, e 38,9 kN obtido com o Método do Fator

de Impacto. Valores mais plausíveis resultam da metodologia que parte do princípio da conservação da quantidade de movimento.

O objetivo do presente item é determinar a capacidade de carga em um pulso único de duração de 0,016s que leva as placas reforçadas com diferentes teores de fibras à ruptura. Salienta-se que 0,016s é o tempo médio de duração do impacto de uma esfera de aço em uma placa de concreto. Esta “resistência” ao pulso único será uma primeira aproximação que guiará os ensaios de queda de esfera apresentados no item 6.3.

Para tanto, as placas, cuja geometria e propriedades mecânicas são idênticas às apresentadas no Capítulo 5, foram simuladas com 8 teores de fibras diferentes (10, 30, 45, 50, 60, 70, 85 e 100 kg/m³). Também foi ensaiada uma placa sem adição de fibras, que será chamada de placa testemunho. Os pulsos foram aplicados em uma área de 1,5 cm diâmetro.

O Capítulo 5 mostrou que modelos com mesmo teor de fibras por vezes geram resultados significativamente diferentes. Como já citado, estas diferenças se devem a aleatorização das propriedades mecânicas e do posicionamento das fibras na matriz de concreto. Por este motivo, neste item, cada modelo foi simulado três vezes como pode ser visto em 6.2.1.

6.2.2 Resultados

A Tabela 6.3 apresenta os pulsos de carga que provocam a ruptura das placas reforçadas com fibras em diversos teores (aqui chamado de “resistência” ao pulso único). Entende-se que a estrutura sofre ruptura no momento em que não transmite mais esforços para os apoios. Observa-se que a diferença entre a placa sem reforço de fibras e com o teor máximo ensaiado (100 kg/m³) é de cerca de 3kN, o que representa uma variação de aproximadamente 13%.

Tabela 6.3 – Resistência ao pulso de carga único

Teor de fibras (kg/m ³)	Resistência (kN)			Média (kN)
	Simulação 1	Simulação 2	Simulação 3	
0	21,70	22,00	21,50	21,73
10	21,50	22,40	22,10	22,00
30	21,80	22,60	22,65	22,35
45	22,20	23,30	23,10	22,86
50	22,60	23,40	23,25	23,08
60	22,60	23,80	23,90	23,43
70	23,70	24,10	23,65	23,81
85	23,20	24,95	24,10	24,08
100	24,10	24,90	24,40	24,46

A Figura 6.2 apresenta o gráfico da resistência ao pulso único em função do teor de fibras empregado. Os resultados obtidos servirão como ponto de partida para os ensaios realizados no item 6.3

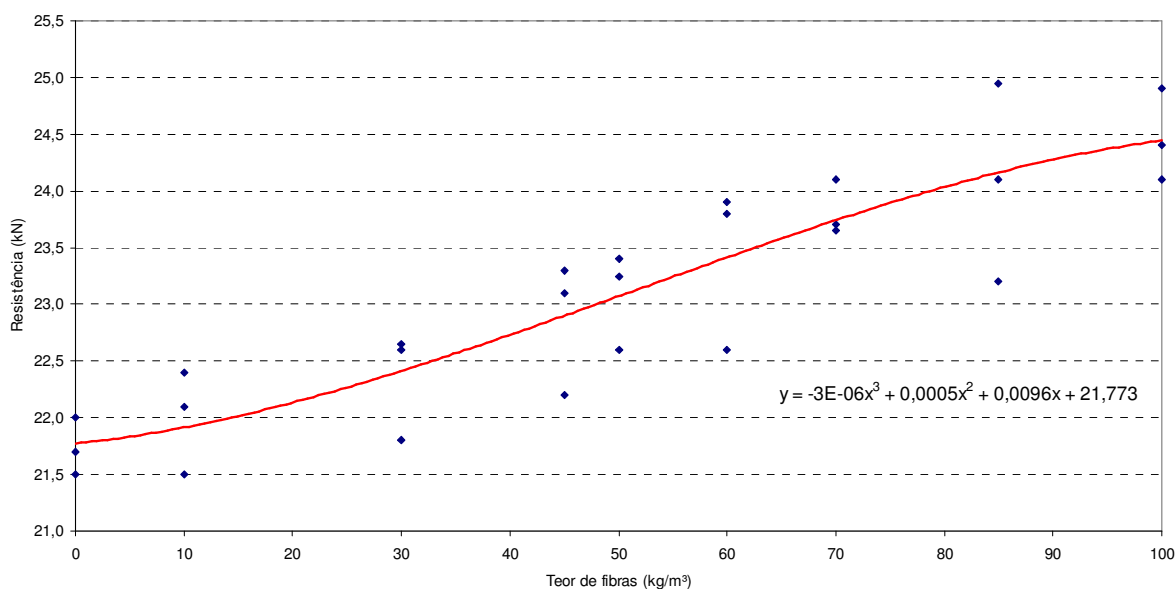


Figura 6.2 – Diagrama Resistência ao pulso *versus* Teor de fibras. Resultados de três simulações para cada teor e regressão encontrada.

6.3 ENSAIO DE QUEDA DE ESFERA

6.3.1 Esquema de Cargas

A fim de quantificar a melhoria causada pela adição de fibras nas placas de concreto, Garcez (2005) utilizou como método a acumulação de energia feita a partir das alturas de queda da esfera. Assim, para cada queda realizada, uma parcela de energia era somada.

No presente trabalho, no entanto, devido às incertezas citadas no item 6.1 tornou-se complicado precisar o carregamento estático equivalente gerado pela queda da esfera de aço de uma determinada altura. Conseqüentemente, determinar a energia necessária para causar a ruptura das placas reforçadas também fica fora de alcance.

Surge, então, a necessidade de utilizar uma metodologia diferenciada que gere, no mínimo, resultados que apontem qualitativamente as melhorias causadas pela adição de fibras ao concreto.

Para tanto, foi utilizado um esquema de aplicação de carga que inicia com pulsos de carga de baixa intensidade e que vão sofrendo acréscimos progressivos. Tal procedimento visa simular os ensaios realizados por Garcez (2005), onde a primeira queda era realizada a partir de uma altura, i.e., 10cm, a segunda queda a partir de uma altura de 20cm e assim sucessivamente, até atingir a ruptura do elemento estrutural. Entre cada pulso aplicado, a estrutura repousa por igual período.

Assim, do instante $t = 0s$ até $t = 0,016s$, duração de um pulso de impacto, é aplicada uma carga de 4kN no centro da placa. Após este período, de $t = 0,016s$ até $0,032s$ a estrutura é deixada em repouso para então receber um segundo pulso de carga com intensidade superior a do primeiro. O processo se repete até que a placa sofra a ruptura. O esquema detalhado de aplicação das cargas pode ser observado na Figura 6.3.

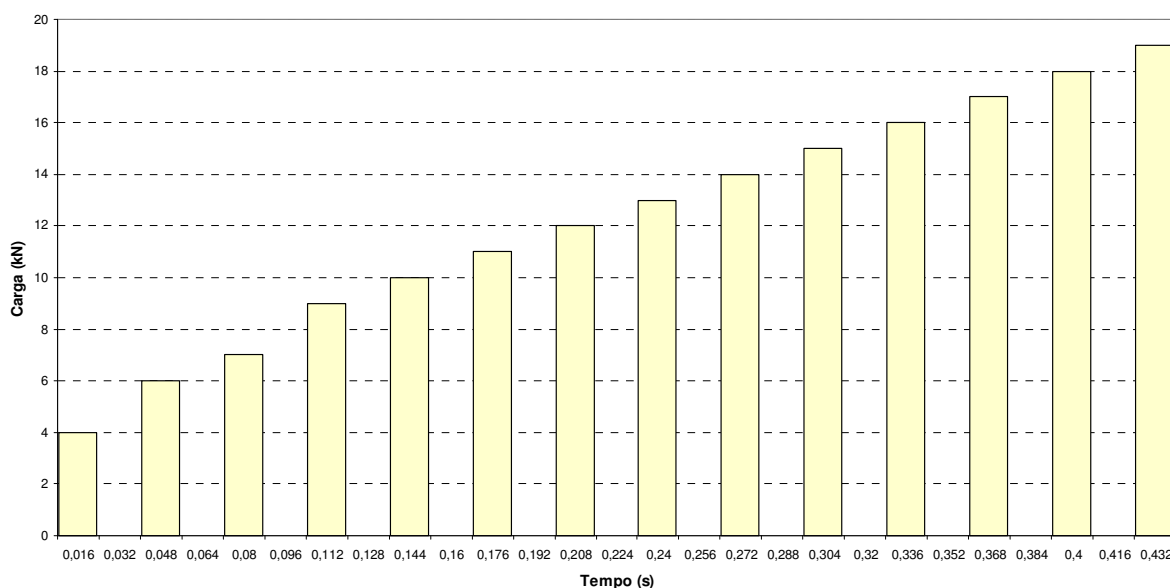


Figura 6.3 – Esquema de aplicação de cargas

6.3.2 Definição da região de aplicação da carga

Para a simulação das condições reais de aplicação de carga nas placas, áreas de contato diferenciadas precisam ser adotadas para a mesma queda de esfera, uma vez que o impacto da esfera provoca o aumento da seção ou aplicação da carga ao danificar o corpo-de-prova com a queda, aumentando a seção de aplicação da carga, como observado na Figura 6.4.

Foram então definidas duas áreas de contato, sendo cada queda considerada em um intervalo de 16 ms. Nos primeiros 8 ms de cada queda, a carga foi distribuída em um círculo de raio 0,5 cm, cuja área de contato é capaz de abranger um único ponto para aplicação da carga, localizada no centro da placa. Nos 8 ms posteriores, a carga foi distribuída em um círculo de raio 1,0 cm, atingindo cinco pontos para aplicação da carga.

Estas áreas de contato foram adotadas com base no tamanho dos elementos da discretização adotada, sendo estas, no entanto, superiores às áreas de contato reais do ensaio. (Garcez, 2005)

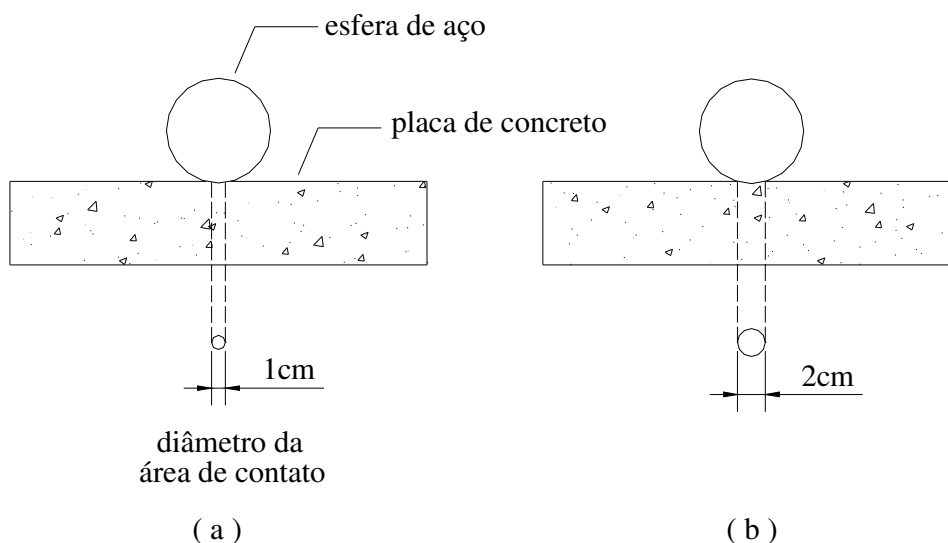


Figura 6.4 – Alteração da seção de aplicação de carga no decorrer do tempo. (a) correspondente aos primeiros 8 ms de contato e (b) atuante nos 7 ms posteriores (Garcez, 2005).

6.3.3 Resultados

A fim de observar as melhorias causadas pela adição de fibras foram simulados dois modelos com teores de fibras de 10 e 60 kg/m³.

Os ensaios realizados no item 6.2 mostraram resistências ao pulso único variando entre aproximadamente 21,5 e 24,5 kN. Assim, em um ensaio com um número maior de quedas, a ruptura do elemento estrutural deverá ocorrer com um carregamento inferior a estes valores. Esta hipótese, como será visto a seguir, foi satisfeita.

Na Figura 6.5 observa-se o comportamento da placa reforçada com 10 kg/m³ de fibras de aço. A ruptura ocorre no décimo pulso quando o elemento estrutural é submetido a uma carga de 15 kN. Já a placa com um teor de 60 kg/m³ (Figura 6.6) sofre a ruptura durante o décimo quarto pulso o que corresponde a um carregamento de 19 kN.

Tais resultados são de difícil comparação com trabalhos experimentais pelos motivos expostos anteriormente. Contudo, apontam que o modelo desenvolvido é sensível à adição de fibras mostrando melhorias de comportamento das placas de concreto sob ação de cargas impulsivas.

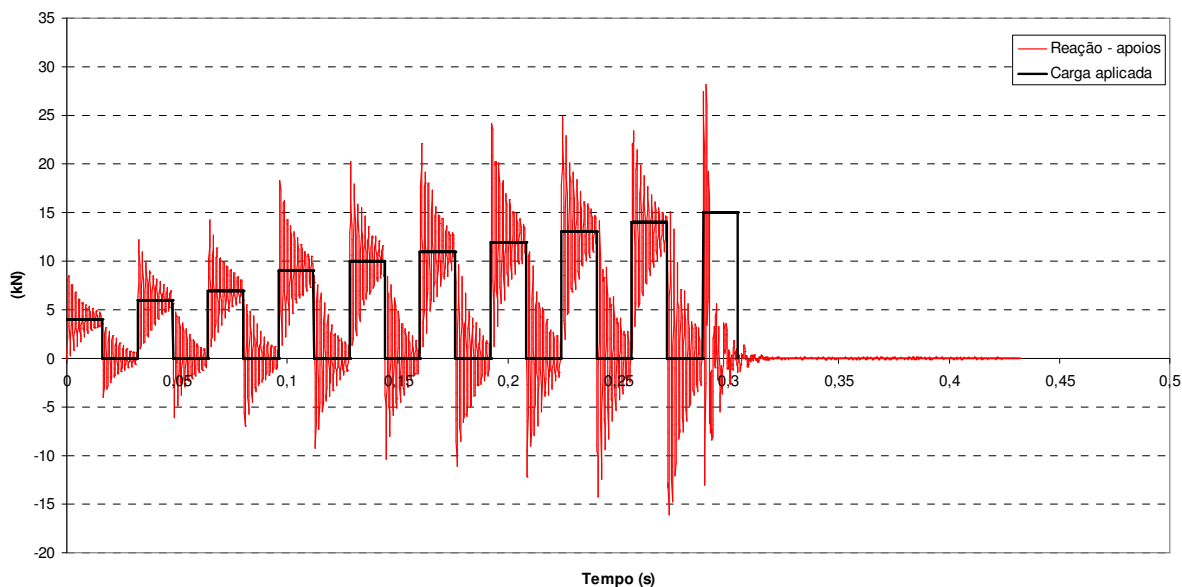


Figura 6.5 – Ensaio de “Queda de esfera”. Reação nos apoios *versus* Tempo. Teor de fibras: 10 kg/m³

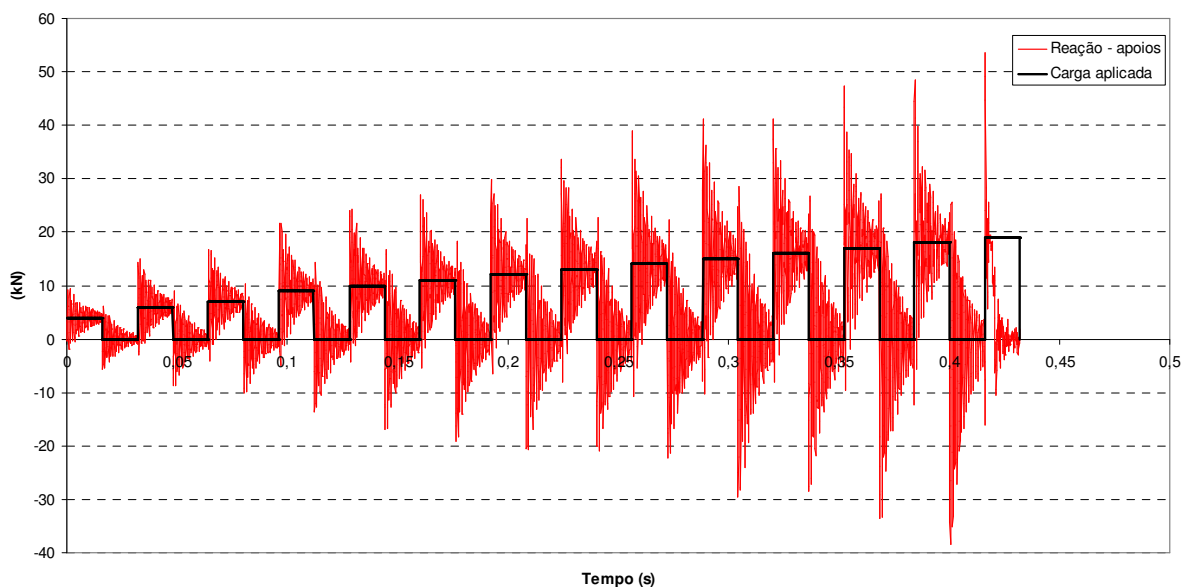


Figura 6.6 – Ensaio de “Queda de esfera”. Reação nos apoios *versus* Tempo. Teor de fibras: 60 kg/m³

6.3.4 Comparativo dos padrões de fissuração

As Figura 6.7 e 6.8, a seguir, demonstram a boa concordância obtida entre os padrões de fissuração obtidos numericamente e experimentalmente em ensaios de impacto. Em verde, as fibras de aço “costurando” as fissuras.

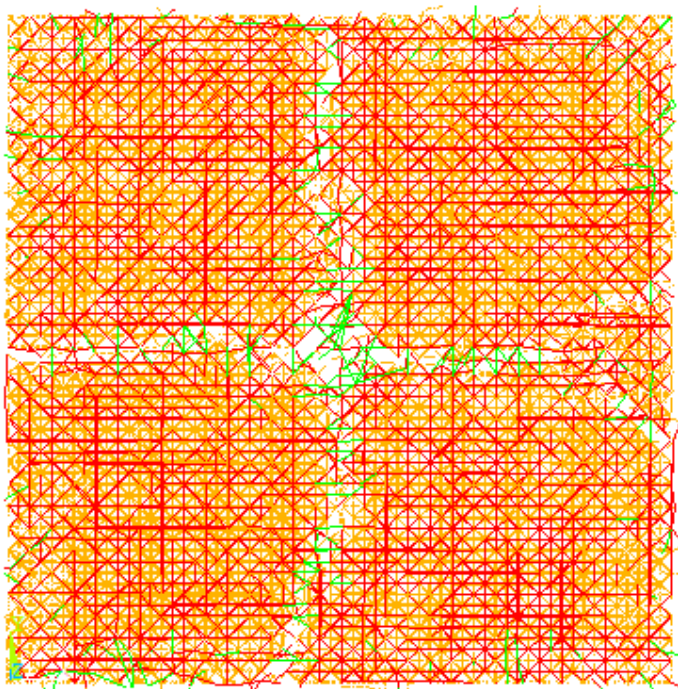


Figura 6.7 – Padrão de fissuração, simulação numérica.



Figura 6.8 – Padrão de fissuração, ensaio experimental (Garcez, 2005).

7 CONCLUSÕES

Neste capítulo serão apresentadas as principais conclusões extraídas desta pesquisa, obtidas a partir das simulações numéricas dos concretos reforçados com fibras de aço. Serão também apresentadas sugestões para trabalhos futuros na área de interesse.

No Brasil, a utilização de fibras de aço no concreto deu-se a partir do momento em que se passou a dispor de fibras produzidas especialmente para o reforço do concreto (Figueiredo, 1997). Atualmente, existem três fabricantes de fibras no mercado nacional. Mesmo sem normas ou especificações nacionais que forneçam algum tipo de controle para a utilização destas, sua aplicação no concreto vem crescendo rapidamente (Guimarães *et al*, 2001).

Desta forma, a produção de trabalhos científicos direcionados ao material em questão vem se expandindo rapidamente através de publicações que analisam as mais diversas propriedades mecânicas do compósito. No entanto, como já citado no Capítulo 2, as pesquisas voltadas à simulação numérica do concreto reforçado com fibras ainda são raras e, em geral, se utilizam de softwares comerciais baseados em elementos finitos.

Neste contexto e de posse do Método dos Elementos Discretos, cujas características já foram justificadas anteriormente, a presente dissertação procurou contribuir neste

sentido, buscando simular numericamente o comportamento do CRFA sob cargas estáticas e impulsivas.

Para tanto, foram necessárias algumas alterações no algoritmo do programa visando promover a dispersão das fibras de aço na matriz de concreto. Após, adaptou-se a energia de fratura (parâmetro de entrada) conforme já havia sido realizado por Garcez (2005). Finalizado o modelo, procedeu-se os ensaios de tenacidade e de impacto.

A hipótese levantada de que os apoios fixos utilizados anteriormente seriam equivocados foi confirmada nos ensaios realizados no Capítulo 4. O trabalho provou que não utilizando apoios elásticos, a estrutura se torna mais rígida atingindo, conseqüentemente, cargas de pico mais elevadas.

Os ensaios de tenacidade realizados apontaram que o modelo criado é sensível à aplicação de fibras já que ao aumentar o teor de fibras de aço obtém-se um incremento da área sob a curva carga *versus* deslocamento. Este incremento de tenacidade atinge, nos maiores teores simulados, a ordem dos 200% quando comparado ao concreto sem reforço.

Os ensaios estáticos confirmaram ainda que a influência mais significativa causada pela adição de fibras de aço ocorre no estágio de pós-fissuração dos compósitos. A resistência de pico sofreu pequenos acréscimos com o incremento do teor de fibras. O padrão de fissuração obtido com a simulação numérica teve excelente correspondência com os ensaios realizados por Garcez (2005).

Os objetivos traçados para os ensaios de impacto também foram bem sucedidos, apontando uma melhoria de comportamento frente a cargas impulsivas do elemento estrutural reforçado com fibras de aço.

A tentativa de realizar um comparativo com os ensaios experimentais de Garcez (2005) se torna difícil devido às discrepâncias encontradas no item 6.1 deste trabalho. Uma vez que existe uma grande variabilidade entre os resultados não é razoável associar uma altura de queda a um carregamento. Não possuindo estas alturas não é possível aplicar o método de acumulação de energia utilizado por

Garcez (2005). Assim, os resultados dos ensaios de impacto devem ser tomados de forma predominantemente qualitativa.

Desta forma, inicia-se as recomendações para trabalho futuros exatamente por este ponto. Um estudo mais adequado das características do ensaio a ser simulado numericamente é necessário. Desde as constantes elásticas dos apoios utilizados, passando pelas propriedades mecânicas do material, coeficientes de restituição e, finalmente, os carregamentos aplicados.

Outro ponto de grande importância a ser estudado é a questão interação fibra-matriz de concreto. O modelo criado nesta dissertação leva em conta esta relação a partir da energia de fratura do material, parâmetro de entrada do método. Contudo, uma implementação adequada das tensões de aderência entre a fibra e a matriz, além das tensões de arrancamento, permitiriam, por exemplo, a simulação de fibras com ganchos nas extremidades.

O presente trabalho não trabalhou com diferentes discretizações, sendo usado os elementos L_{co} , de dimensão igual a 1 cm. Acredita-se que aumentando o nível de discretização das estruturas analisadas sejam obtidos resultados diferentes. No entanto, para que isto seja realizado existe a necessidade de reduzir o esforço computacional necessário para realização da integração numérica.

REFERÊNCIAS

ABAQUS/Explicit. **The Theorie Manual internal (HKS distribution)** HIBITT, Karlson & Sorensen, INC, 1995.

ABSI, E. **Théorie des equivalences determination de quelques elements types**. Anales de L'Institut Technique du Balument et des Travau Public. No. 281, 83-86p. 1971.

AL-TAAN, S. A., EZZADEEN, N. A. **Flexural analysis of reinforced fibrous concrete members using the finite element method**. In: Computers & Structures, Vol. 56, No. 6, pp. 1065-1092, 1995.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 544.1R-96**: state-of-the-art report on fiber reinforced concrete. Detroit. MI, 1996.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 544.2R-89**: measurement for properties of fiber reinforced concrete. Detroit. MI, 1999a.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 544.3R-96**: considerations for steel fiber reinforced concrete. Detroit. MI, 1999b.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 544.4R-88**: design considerations for steel fiber reinforced concrete. Detroit. MI, 1988.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 544.3R-93**: manual of concrete practice: Guide for specifying proportioning, mixing, placing and finishing steel fiber reinforced concrete. Detroit. MI, 1993.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 13818**: placas cerâmicas para revestimento – especificações e métodos de ensaio, 1997.

BATTISTA, R. C., ROSA, J. I., FORMAGINI, S., TOLEDO FILHO, R. D., FAIRBAIRN, E. M. R. **Análise numérica de uma placa de concreto de altíssimo desempenho reforçado com fibras de aço**. COPPE – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004.

BENTUR, A., MINDESS, S. **Mechanics of fiber reinforced cementitious composites. In: Fiber reinforced cementitious composites.** London e New York: Elsevier Applied Science, 1990. p-89-131.

BERNARDI, S. T. **Avaliação do comportamento de materiais compósitos de matrizes cimentícias reforçadas com fibras de aramida Kevlar,** 2003. 164f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

BUSH, H. G., MIKULA, M. M., HEARD, W. L. **Some design considerations for large space structures.** AIAA Journal, Vol. 16, No. 4 – ASME, NY. (1977).

CACHIM, P. B., FIGUEIRAS, J. A., PEREIRA, P. A. A. **Numerical modelling of fibre-reinforced concrete fatigue in bending.** In: International Journal of Fatigue, Vol. 24, pp. 381-387, 2002.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. CEB-FIP Model Code 1990. CEB-FIP 1990. Lausanne, 1993.

CUNDALL, P. A., STRACK, D. L. **A discrete numerical model for granular assemblies.** Geotechnique 29, No. 1, pp. 47-65, 1977.

DÉSIR, J. M., SCHWAN, R. **Simulação numérica de matriz de concreto reforçada com fibras de aço.** In: V Simpósio EPUSP sobre estruturas de concreto, São Paulo, 2003.

FERREIRA, L. E. T. **Sobre a resistência ao fraturamento do concreto e do concreto reforçado com fibras de aço.** 2002. 261p. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2002.

FIGUEIREDO, A. D. **Parâmetros de Controle e Dosagem do Concreto Projetado com Fibras de Aço,** 1997. 342 f. Tese (Doutorado). Escola Politécnica – Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

FIGUEIREDO, A. D. **Concreto reforçado com fibras de aço.** São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Boletim Técnico, 2000.

FLANAGAN, D. P., BELYTSCHKO, T. **Eigenvalues and stable time steps for the uniform strain hexahedron and quadrilateral.** In: Journal of Applied Mechanics, V. 51, pp. 35-40, 1984.

GARCEZ, E. O. **Análise teórico-experimental do comportamento de concretos reforçados com fibras de aço submetidos a cargas de impacto.** 2005, 114 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2005.

GAVA, G., P. **Estimativa da capacidade resistente após a fissuração do concreto reforçado com fibras de aço.** Projeto de Pesquisa. Florianópolis, 2004.

GOPALARATNAM, V., GETTU, R. **On the characterization of flexural toughness in fiber reinforced concrete.** Cement & Concrete Composites, v. 17, p. 239-254, 1995.

GUIMARÃES, A. E. P.; *et al.* **Análise Experimental de Pilares de Concreto de Alta Resistência com Adição de Fibras Metálicas.** Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2001.

HANNANT, D. J. **Fiber cements and fiber concretes**. Guildford, United Kingdom: John Wiley & Sons, 1978.

HAYASHI, Y. **Sobre um modelo de discretização de estruturas tridimensionais aplicado em dinâmica não linear**, 1982. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 1982.

HOLANDA, K. M. A. **Análise dos mecanismos resistentes e das similaridades de efeitos da adição de fibras de aço na resistência e ductilidade à punção de lages-cogumelo e ao cisalhamento de vigas de concreto**. 2002. 302p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. São Carlos, 2002.

HRENNIKOFF, A. **Solution problems of elasticity by the framework method**. *Journal of Applied Mechanics*, 12, pp. 169-175, 1941.

ITURRIOZ, I. **Aplicação do método dos elementos discretos ao estudo de estruturas laminares de concreto armado**, 1995. 156f. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1995.

JOHNSTON, C. D. **Effects of testing rate and age on ASTM C 1018 toughness parameters and their precision for steel fiber-reinforced concrete**. *Cement, Concrete and Aggregates*, v. 15, n. 1, p. 50-58, 1993.

JOHNSTON, C. D. **Toughness of steel fiber reinforced concrete**. In: *Steel Fiber Concrete – US-Sweden Joint Seminar (NSF-STU)*, 1985. Stockholm, 1985.

JOHNSTON, C. D. **Effects of testing rate and age on ASTM C 1018 toughness parameters and their precision for steel fiber-reinforced concrete**. In: *Cement, Concrete and Aggregates*, V. 15, n.1, p.50-58, 1993.

JOHNSTON, C. D. **Fibre-reinforced cement and concrete**. In: MALHOTRA, V. M. *Advances in Concrete Technology – Second Edition*. Ottawa, Canada: CANMET, 1994.

KACHANOV, M. **Introduction to continuum damage mechanics**. Martin Nyhoff Publishes. 135p. Boston, 1966.

LDEC – LABORATÓRIO DE DINÂMICA ESTRUTURAL E CONFIABILIDADE. **Avaliação das forças de impacto do Navio Lake Marion sobre o Paramento PP2 do píer do terminal marítimo da Adubos Trevo**. Relatório Técnico. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1997.

LINDE, P. **Numerical modelling and capacity design of earthquake-resistant reinforced concrete wall**. Inst. Fur Baustatik und Konstruktion, Eth Zurich, Ag, Bericht. 200, 1993.

LOPES, M. M. **Substituição parcial de armaduras de flexão em vigas de concreto**. 2005. 130 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, 2005.

MEHTA, P. K., MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: estrutura, propriedades e materiais**. São Paulo: Pini, 1994.

MINDESS, S. **Fiber reinforced concrete: modern developments**. Vancouver, Canada: University of British Columbia, 1995. p. 1-11.

MINDESS, S.; YAN, Cheng. **Perforation of plain and fibre reinforced concretes subjected to low-velocity impact loading**. In: Cement and Concrete Research, Vol. 23, pp. 83-92, 1993.

MURUGAPPAN, K., TAN, K. H., PARAMASIVAM, P. **Finite element formulation for the analysis of reinforced fibrous concrete beams**. In: Finite elements in analysis and Design, Vol. 18, pp. 67-74, 1994.

NAYFEH, A. H. HEFZY, M. S. **Continuum modeling of three-dimensional truss-like space structures**, AIAA Journal, Vol. 16, No. 8, 1978.

NOOR, A. K., MIKULAS, M. M. **Continuum modeling of large lattice structures status and projections**. Springer Series in Computational Mechanics. Large Space Structures: Dynamic and Control. Springer, 1988.

NUNES, L. N., AGOPYAN, V. A. **Influência do fator de forma da fibra na tenacidade à flexão do concreto reforçado com fibras de aço**. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 1998.

OSTOJA-STARZENSKI, M. **Spring-networks in thermomechanics: Effective properties and fracture phenomena**. Applied Mechanics in the Americas, Vol. 3, pp. 179-184. Santa Fé, Argentina. 1995.

PADMARAJIAH, S. K.; RAMASWAMY, A. **A finite element assessment of flexural strength of prestressed concrete beams with fiber reinforcement**. In: Cement & Concrete Composites, Vol. 24, pp. 229–241, 2002.

RESENDE, F. M. **Influência das fibras de aço, polipropileno e sisal no amortecimento de concretos de resistência normal e alto desempenho**, 2003. 98 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

RIOS, R. D. **Aplicações do Método dos Elementos Discretos em Estruturas de Concreto**, 2002a. 151 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul Porto Alegre, 2002.

RIOS, R. D.; RIERA, j. d.; ITURRIOZ, I. **Uma Contribuição ao Entendimento do Efeito de Escala em Estruturas de Concreto**. In: MECÂNICA COMPUTACIONAL, Santa Fé-Paraná, Argentina, 2002b. v. 21, p. 979-991.

ROCHA, M. M. **Ruptura e Efeito de Escala em Materiais Não-Homogêneos**, 1989. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989.

SAWAN, J.; ABDEL-ROHMAN, M. **Impact Effect on Reinforced Concrete Slabs: Analytical Approach**. In: Journal of Structural Engineering, Vol. 111, No. 7, 1985. p. 1590-1601.

SAWAN, J.; ABDEL-ROHMAN, M. **Impact Effect on Reinforced Concrete Slabs: Experimental Approach**. In: Journal of Structural Engineering, Vol. 112, No. 9, 1986. p. 2057-2065.

SCHLANGEN, E. **Experimental and numerical analysis of fracture process in concrete**. Heron 38(3), pp 1-118, 1993.

SOUZA, M. B. S.; PRADO, A. A.; ARAÚJO, D. L., **Modelagem de vigas de concreto armado com e sem fibras metálicas via elementos finitos com análise não linear do material**. In: CONGRESSO DE PESQUISA, ENSINO E EXTENSÃO DA UFG - CONPEEX, 2., 2005, Goiânia. Anais eletrônicos do XIII Seminário de Iniciação Científica [CD-ROM], Goiânia: UFG, 2005.

VENTURINI, W. S.; LEITE, L. G. S.; CODA, H. B. **2D Dimensional solids reinforced by fiber and beams using the boundary element method**. In: XXIV IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 2003