

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Sobre a semiprimitividade e a semiprimalidade
do produto smash parcial

Tese de Doutorado

Rafael Cavalheiro

Porto Alegre, 26 de agosto de 2013

Tese submetida por Rafael Cavalheiro¹ como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana

Banca examinadora:

Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana (UFRGS, Orientador)

Prof. Dr. Antonio Paques (UFRGS)

Prof. Dr. Dirceu Bagio (UFSM)

Prof. Dr. Ivan Chestakov (USP)

Prof. Dr. Mikhajolo Dokuchaev (USP)

¹Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Resumo

Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e semissimples sobre um corpo \mathbb{k} e A um H -módulo álgebra parcial. Neste trabalho estudamos a questão da semiprimitividade e da semiprimalidade do produto smash parcial, por meio do estudo do H -radical primo e do H -radical de Jacobson de A e suas relações com o radical primo e o radical de Jacobson de $A\#H$, respectivamente. Em particular, mostramos que se A é H -semiprimitivo, então $A\#H$ é semiprimitivo quando, todo A -módulo à direita simples tem dimensão finita, ou A é PI-álgebra que é afim sobre \mathbb{k} e \mathbb{k} é perfeito, ou A é localmente finito. Além disso, demonstramos também que $A\#H$ é semiprimo quando A é uma PI-álgebra H -semiprima, generalizando os principais resultados de [18] e [17].

Abstract

Let H be a finite-dimensional semisimple Hopf algebra over a field \mathbb{k} and A a partial H -module algebra. In this work we discuss the semiprimitivity and the semiprimality of the partial smash product problem, studying the H -prime and the H -Jacobson radicals of A and its relations with the prime and the Jacobson radicals of $\underline{A\#H}$, respectively. In particular, we prove that if A is H -semiprimitive, then $\underline{A\#H}$ is semiprimitive provided that all irreducible right representations of A are finite-dimensional, or A is a PI-algebra that is affine over \mathbb{k} and \mathbb{k} is a perfect field, or A is locally finite. Moreover, we prove that $\underline{A\#H}$ is semiprime provided that A is an H -semiprime PI-algebra, generalizing the main results of [18] and [17].

Sumário

Introdução	1
1 Pré-requisitos	4
1.1 (Co)álgebras e (co)módulos	4
1.2 Álgebras de Hopf e produto smash parcial	13
1.3 PI álgebras	23
2 Ideais H-estáveis e (A, H)-módulos parciais	26
2.1 Ideais H -estáveis	26
2.2 (A, H) -módulos parciais	33
3 O H-radical primo e o H-radical de Jacobson	39
3.1 Ideais H -primos, ideais H -semiprimos e o H -radical primo	39
3.2 (A, H) -módulos parciais simples, ideais H -primitivos e H -radical de Jacobson	49
4 Sobre a semiprimitividade e a semiprimalidade do produto smash parcial	57
5 Resultados adicionais	64
Referências	68

Introdução

Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo \mathbb{k} e A um H -módulo álgebra. Uma questão importante na teoria de ações de álgebras de Hopf é saber quando o produto smash $A\#H$ é semiprimo. Se A é semiprimo, então é conhecido que $A\#H$ é semiprimo nos seguintes casos: se $H = \mathbb{k}G$ e $|G|^{-1} \in \mathbb{k}$ [12], ou se $H = (\mathbb{k}G)^*$ [6]. Em ambos os casos H é semissimples. Isto sugere a seguinte questão (proposta por Cohen e Fishman em [5]):

Questão 1. *Se H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita e semissimples e A é um H -módulo álgebra semiprimo, então $A\#H$ é semiprimo?*

Observamos que a hipótese de semissimplicidade na questão acima é necessária, como mostra o Exemplo 4.12. Algumas respostas positivas foram dadas para esta questão, assumindo certas hipóteses adicionais em H ou em A (ver por exemplo [19], [18] e [17]).

Uma outra questão relacionada com esta, e que exige hipóteses mais fracas sobre A , foi tratada por Linchenko, Montgomery e Small em [18] e, posteriormente, por Linchenko e Montgomery em [17]:

Questão 2. *Se H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita e semissimples sobre um corpo \mathbb{k} e A é um H -módulo álgebra H -semiprimo, então $A\#H$ é semiprimo?*

Estes últimos autores referidos atacaram a questão acima estudando a estabilidade do radical de Jacobson. Naturalmente, surge assim, a questão similar em relação a semiprimidade do produto smash:

Questão 3. *Se H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita e semissimples sobre um corpo \mathbb{k} e A é um H -módulo álgebra H -semiprimo, então $A\#H$ é semiprimo?*

Utilizando o estudo da estabilidade do radical de Jacobson, os autores em [18] respondem positivamente a Questão 3 quando \mathbb{k} tem característica 0 e, A é uma PI-álgebra que é afim ou algébrica sobre \mathbb{k} , ou todos os A -módulos simples tem dimensão finita, ou A é localmente finito; se \mathbb{k} tem característica positiva, então hipóteses adicionais são

assumidas. Em [17] os autores mostram que a resposta da Questão 2 é ‘sim’, desde que A seja uma PI-álgebra.

As ações parciais de grupos foram introduzidas na teoria de álgebras de operadores, no estudo de C^* -álgebras geradas por isometrias parciais em um espaço de Hilbert [10]. Em [8] ações parciais de grupos são definidas axiomaticamente e em [4] os autores estendem essas definições para o contexto de ações parciais de álgebras de Hopf. Desde então muitos trabalhos tem sido publicados nesta área e as ações parciais se tornaram um tema de interesse independente na teoria de anéis. Vários avanços foram conseguidos neste assunto, como por exemplo teoria de Galois (ver por exemplo [9] e [4]), teoria de Morita (ver por exemplo [2] e [1]) e representações parciais (ver por exemplo [8] e [3]).

No presente trabalho generalizamos os principais resultados de [18] e [17] para o contexto de ações parciais de álgebras de Hopf. Mais precisamente, consideramos uma álgebra de Hopf de dimensão finita e semissimples H sobre um corpo \mathbb{k} e A um H -módulo álgebra parcial. Mostramos que se A é H -semiprimitivo, então $\underline{A\#H}$ é semiprimitivo quando: todo A -módulo à direita simples tem dimensão finita (Teorema 4.2); ou A é PI-álgebra que é afim sobre \mathbb{k} e \mathbb{k} é perfeito (Teorema 4.4); ou A é localmente finito (Teorema 4.7). Diferente de [18], não assumimos hipótese adicionais quando \mathbb{k} tem característica positiva, com exceção do segundo caso. Também mostramos que $\underline{A\#H}$ é semiprimo quando A é H -semiprimo e satisfaz uma identidade polinomial (Teorema 4.10). Para esta finalidade, estudamos os conceitos de H -radical primo e H -radical de Jacobson de um H -módulo álgebra parcial.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1 tratamos dos pré-requisitos minimamente necessários para o entendimento do texto. Referências para um aprofundamento em cada assunto são dadas oportunamente.

No Capítulo 2 tratamos dos conceitos de ideais H -estáveis e (A, H) -módulos parciais. Estes conceitos são adaptações, para o caso de ações parciais, dos conceitos de ideais H -estáveis e (A, H) -módulos estudados, por exemplo, em [11], [24] e [26] no caso de ações globais.

No Capítulo 3 tratamos dos conceitos de H -radical primo e H -radical de Jacobson. Estes conceitos são generalizações dos conceitos de radical primo e radical de Jacobson e aparecem naturalmente no estudo de ideais H -estáveis e (A, H) -módulos parciais.

No Capítulo 4 aplicamos os resultados estabelecidos nos Capítulos 2 e 3 ao estudo da simiprimitividade e da semiprimalidade do produto smash parcial.

No Capítulo 5 apresentamos um resultado sobre a relação entre o radical de Jacobson de um H -módulo álgebra parcial e o radical de Jacobson do produto smash parcial, quando H é pontuada. Este é uma generalização, para o caso de ações parciais, de um resultado apresentado em [21] para o produto cruzado global.

1 *Pré-requisitos*

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados já conhecidos que serão úteis no desenvolvimento do trabalho. Na primeira seção descrevemos o conceito de coálgebras por meio da dualização da definição de álgebras. Da mesma forma, apresentamos o conceito de comódulos, homomorfismo de coálgebras, homomorfismo de comódulos, cossemisimplicidade, entre outros. Na segunda seção descrevemos os conceitos e algumas propriedades das álgebras de Hopf e de produtos smash parciais, estruturas sobre as quais trabalharemos no texto. Na terceira seção fazemos uma breve apresentação das PI-álgebras, dando ênfase a certos resultados sobre estas estruturas, as quais serão úteis no desenvolvimento deste trabalho.

1.1 (Co)álgebras e (co)módulos

Seja \mathbb{k} um corpo. Uma álgebra sobre \mathbb{k} (ou uma \mathbb{k} -álgebra, ou simplesmente uma álgebra) é um \mathbb{k} -espaço vetorial que é também um anel (associativo) tal que estas duas estruturas são *compatíveis*. A compatibilidade significa que (a soma de A como anel é a mesma como \mathbb{k} -espaço vetorial e) para quaisquer $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{k}$

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b).$$

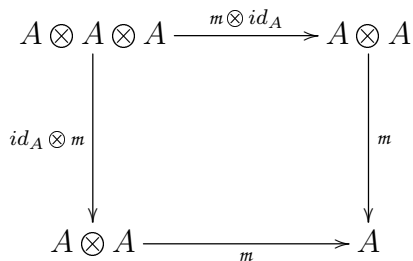
Em particular, se A tem unidade 1_A podemos identificar \mathbb{k} com o subanel $\mathbb{k}1_A \subseteq A$.

Observação 1.1.1. *Neste trabalho, a menos que seja mencionado o contrário, toda álgebra tem unidade.*

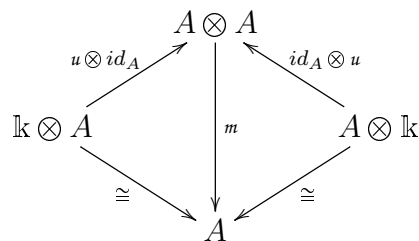
Isso é o mesmo que dizer que existem duas aplicações \mathbb{k} -lineares, chamadas de multiplicação $m : A \otimes_{\mathbb{k}} A \rightarrow A$ e unidade $u : \mathbb{k} \rightarrow A$, tais que os seguintes diagramas são

comutativos:

a) associatividade



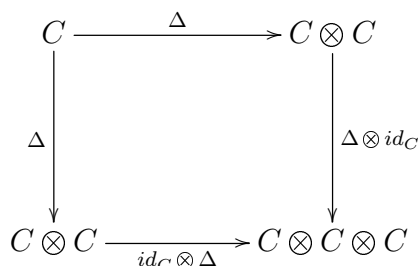
b) unidade



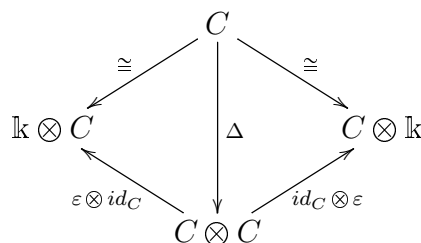
Esta definição de álgebra, utilizando diagramas, torna natural a definição de coálgebra por meio da *dualização*.

Definição 1.1.2. Uma coálgebra sobre \mathbb{k} (ou uma \mathbb{k} -coálgebra, ou simplesmente uma coálgebra) é um \mathbb{k} -espaço vetorial C junto com duas aplicações \mathbb{k} -lineares, chamadas de comultiplicação $\Delta : C \rightarrow C \otimes_{\mathbb{k}} C$ e counidade $\varepsilon : C \rightarrow \mathbb{k}$, tais que os seguintes diagramas são comutativos

a) coassociatividade



b) counidade



Como de costume, faremos uso da *notação sigma*: para $c \in C$ denotaremos $\Delta(c) = \sum_{(c)} c_1 \otimes c_2$, ou simplesmente $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$. Assim, a coassociatividade significa que, para todo $c \in C$, temos

$$((\Delta \otimes id_C) \circ \Delta)(c) = \sum c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22} = ((id_C \otimes \Delta) \circ \Delta)(c).$$

Tal elemento é então escrito como $\Delta^2(c) = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$. Analogamente, a propriedade da counidade significa que

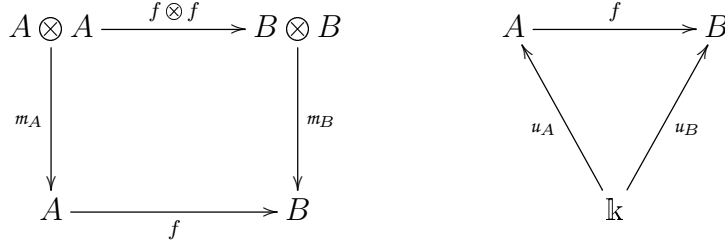
$$\sum \varepsilon(c_1)c_2 = c = \sum c_1\varepsilon(c_2)$$

para todo $c \in C$. Mais detalhes sobre a notação sigma pode ser encontrada em [7].

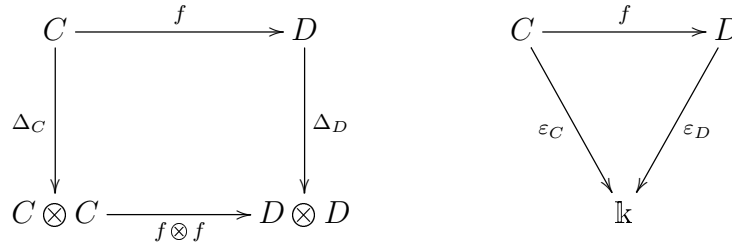
Exemplo 1.1.3. Seja $\gamma : \mathbb{k} \otimes \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$ o isomorfismo natural. Então $(\mathbb{k}, \gamma, id_{\mathbb{k}})$ é uma

álgebra e $(\mathbb{k}, \gamma^{-1}, id_{\mathbb{k}})$ é uma coálgebra.

Sejam (A, m_A, u_A) e (B, m_B, u_B) álgebras (sobre \mathbb{k}). Uma aplicação \mathbb{k} -linear $f : A \rightarrow B$ é chamada homomorfismo de álgebras se preserva a unidade e a multiplicação, ou seja, se $f(1_A) = 1_B$ e $f(xy) = f(x)f(y)$, para quaisquer $x, y \in A$. Isso é o mesmo que dizer que os seguintes diagramas são comutativos:



Definição 1.1.4. Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ coálgebras (sobre \mathbb{k}). Uma aplicação \mathbb{k} -linear $f : C \rightarrow D$ é chamada homomorfismo de coálgebras se os seguintes diagramas são comutativos:



Ou seja,

$$(f \otimes f)(\Delta_C(c)) = \sum_{(c)} f(c_1) \otimes f(c_2) = \sum_{(f(c))} f(c)_1 \otimes f(c)_2 = \Delta_D(f(c))$$

e

$$\varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon_C(c)$$

para qualquer $c \in C$.

Quando um \mathbb{k} -espaço vetorial H tem uma estrutura de álgebra e uma estrutura de coálgebra, e estas estruturas são *compatíveis* (no sentido de 1.1.5), dizemos que H é uma biálgebra.

Mais precisamente, se A e B são \mathbb{k} -álgebras, então $A \otimes_{\mathbb{k}} B$ tem uma estrutura natural de \mathbb{k} -álgebra com multiplicação

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb')$$

para $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$, e unidade $1_A \otimes 1_B$.

Analogamente, se $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ são \mathbb{k} -coálgebras, então $C \otimes_{\mathbb{k}} D$ tem uma estrutura natural de \mathbb{k} -coálgebra, com comultiplicação $\Delta_{C \otimes D} = (id_C \otimes \tau \otimes id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)$ e counidade $\varepsilon_{C \otimes D} = \gamma \circ (\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D)$, onde a função twist $\tau : C \otimes D \rightarrow D \otimes C$ é dada por $\tau(c \otimes d) = d \otimes c$, para $c \in C$ e $d \in D$, e $\gamma : \mathbb{k} \otimes \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$ é o isomorfismo natural. Ou seja,

$$\Delta_{C \otimes D}(c \otimes d) = \sum_{(c), (d)} c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2$$

e

$$\varepsilon_{C \otimes D}(c \otimes d) = \varepsilon_C(c) \varepsilon_D(d)$$

para $c \in C$ e $d \in D$ (ver [7, Proposition 1.4.20]).

Proposição-Definição 1.1.5. (ver [7, Proposition 4.1.1]) *Seja H um \mathbb{k} -espaço vetorial tal que (H, m, u) é uma \mathbb{k} -álgebra e (H, Δ, ε) é uma \mathbb{k} -coálgebra. Então são equivalentes:*

- (1) Δ e ε são homomorfismos de \mathbb{k} -álgebras.
- (2) m e u são homomorfismos de \mathbb{k} -coálgebras.

Nesse caso dizemos que $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra (ou simplesmente que H é uma biálgebra).

Exemplo 1.1.6. (ver [7, Example 4.1.5])

- (1) *Seja $\gamma : \mathbb{k} \otimes \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$ o isomorfismo natural. Então $(\mathbb{k}, \gamma, id_{\mathbb{k}}, \gamma^{-1}, id_{\mathbb{k}})$ é uma biálgebra.*
- (2) *Seja G um grupo (multiplicativo). Então a álgebra de grupo $\mathbb{k}G$ é uma biálgebra via $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\varepsilon(g) = 1$, para $g \in G$.*

Definição 1.1.7. *Sejam H e L biálgebras (sobre \mathbb{k}). Uma aplicação \mathbb{k} -linear $f : H \rightarrow L$ é chamada homomorfismo de biálgebras, se é homomorfismo de álgebras e homomorfismo de coálgebras.*

Como de costume, se V é um \mathbb{k} -espaço vetorial, denotaremos $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$ o espaço dual. Se W é outro \mathbb{k} -espaço vetorial, então cada aplicação \mathbb{k} -linear $\phi : V \rightarrow W$ induz uma aplicação \mathbb{k} -linear $\phi^* : W^* \rightarrow V^*$ dada por

$$\phi^*(\psi)(v) = \psi(\phi(v))$$

para $\psi \in W^*$ e $v \in V$.

Também temos uma aplicação \mathbb{k} -linear natural $\Psi : V^* \otimes W^* \rightarrow (V \otimes W)^*$ dada por

$$\Psi(\varphi \otimes \psi)(v \otimes w) = \varphi(v)\psi(w)$$

para $\varphi \in V^*$, $\psi \in W^*$, $v \in V$ e $w \in W$ (estendida por linearidade). Em geral Ψ é somente injetiva. Porém, se V e W têm dimensão finita então Ψ é um isomorfismo (ver [7, Corollary 1.3.5]).

Em particular, quando $C = V = W$ é uma coálgebra, Δ induz uma multiplicação em C^* via restrição de Δ^* ao subespaço $C^* \otimes C^* \cong \Psi(C^* \otimes C^*) \subseteq (C \otimes C)^*$. Temos

$$\Delta^*(\Psi(\varphi \otimes \psi))(c) = \Psi(\varphi \otimes \psi)(\Delta(c)) = \sum \varphi(c_1)\psi(c_2)$$

para $\varphi, \psi \in C^*$ e $c \in C$, e $(C^*, \Delta^* \circ \Psi, \varepsilon^*)$ é uma álgebra (ver [7, Proposition 1.3.6]).

Analogamente, se $A = V = W$ é uma álgebra de dimensão finita então m^* induz uma comultiplicação $\Psi^{-1} \circ m^* : A^* \rightarrow A^* \otimes A^*$, e $(A^*, \Psi^{-1} \circ m^*, u^*)$ é uma coálgebra (ver [7, Proposition 1.3.9]).

Além disso, vale também o seguinte resultado.

Proposição 1.1.8. (ver [7, Propositions 1.3.12 e 4.1.6])

- (1) Se $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra de dimensão finita, então $(H^*, \Delta^* \circ \Psi, \varepsilon^*, \Psi^{-1} \circ m^*, u^*)$ é uma biálgebra.
- (2) Se $f : H \rightarrow L$ é um homomorfismo de biálgebras, então $f^* : L^* \rightarrow H^*$ é um homomorfismo de biálgebras.

Outra observação importante é que se V tem dimensão finita então existe um isomorfismo natural

$$\begin{aligned} \Phi_V : V &\rightarrow V^{**} \\ v &\mapsto \hat{v} \end{aligned}$$

onde $\hat{v}(\varphi) := \varphi(v)$, para $v \in V$ e $\varphi \in V^*$.

Proposição 1.1.9. (ver [7, Proposition 1.3.14]) Se H é uma biálgebra de dimensão finita, então Φ_H é um isomorfismo de biálgebras.

Seja A uma \mathbb{k} -álgebra. Um A -módulo à esquerda é um \mathbb{k} -espaço vetorial M junto com uma aplicação \mathbb{k} -linear

$$\begin{aligned}\zeta : A \otimes_{\mathbb{k}} M &\rightarrow M \\ a \otimes m &\mapsto am\end{aligned}$$

tal que $1_A m = m$ e $(ab)m = a(bm)$, para quaisquer $a, b \in A$ e $m \in M$. Isso é equivalente a comutatividade dos seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes M & \xrightarrow{m \otimes id_M} & A \otimes M \\ \downarrow id_A \otimes \zeta & & \downarrow \zeta \\ A \otimes M & \xrightarrow{\zeta} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{k} \otimes M & \xrightarrow{u \otimes id_M} & A \otimes M \\ \searrow \cong & & \downarrow \zeta \\ & & M \end{array}$$

Definição 1.1.10. *Seja C uma \mathbb{k} -coálgebra. Um C -comódulo à direita é um \mathbb{k} -espaço vetorial M junto com uma aplicação \mathbb{k} -linear $\rho : M \rightarrow M \otimes_{\mathbb{k}} C$, tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho} & M \otimes C \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho \otimes id_C \\ M \otimes C & \xrightarrow{id_M \otimes \Delta} & M \otimes C \otimes C \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho} & M \otimes C \\ \searrow \cong & & \downarrow id_M \otimes \varepsilon \\ & & M \otimes \mathbb{k} \end{array}$$

Na notação sigma ($\rho(m) = \sum m_0 \otimes m_1$, para $m \in M$) a comutatividade do primeiro diagrama significa que, para todo $m \in M$,

$$((\rho \otimes id_C) \circ \rho)(m) = \sum m_{00} \otimes m_{01} \otimes m_1 = \sum m_0 \otimes m_{11} \otimes m_{12} = ((id_M \otimes \Delta) \circ \rho)(m).$$

Tal elemento é então escrito $\sum m_0 \otimes m_1 \otimes m_2$. Já a comutatividade do segundo diagrama significa que, para todo $m \in M$,

$$\sum m_0 \varepsilon(m_1) = m.$$

As definições de A -módulo à direita e C -comódulo à esquerda são análogas.

Proposição 1.1.11. (ver [23, Lemma 1.6.4]) *Sejam A uma álgebra de dimensão finita e C uma coálgebra.*

- (1) Se M é um C -comódulo à direita (resp. à esquerda), então M é um C^* -módulo à esquerda (resp. à direita).
- (2) Se M um A -módulo à esquerda (resp. à direita), então M é um A^* -comódulo à direita (resp. à esquerda).

Lembrando que se H é uma biálgebra de dimensão finita, então $H \cong H^{**}$ como biálgebra, segue imediatamente o seguinte resultado.

Corolário 1.1.12. *Seja H uma biálgebra de dimensão finita. Então, M é um H -comódulo à direita (resp. à esquerda) se e somente se M é um H^* -módulo à esquerda (resp. à direita).*

Sejam (M, ζ_M) e (N, ζ_N) A -módulos à esquerda. Uma aplicação \mathbb{k} -linear $f : M \rightarrow N$ é chamada homomorfismo de A -módulos se

$$f(am) = af(m)$$

para quaisquer $a \in A$ e $m \in M$. Isso significa que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} A \otimes M & \xrightarrow{id_A \otimes f} & A \otimes N \\ \zeta_M \downarrow & & \downarrow \zeta_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Dualizando o diagrama acima, temos naturalmente a seguinte definição.

Definição 1.1.13. *Sejam (M, ρ_M) e (N, ρ_N) C -comódulos à direita. Uma aplicação \mathbb{k} -linear $f : M \rightarrow N$ é chamada homomorfismo de C -comódulos se o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \rho_M \downarrow & & \downarrow \rho_N \\ M \otimes C & \xrightarrow{f \otimes id_C} & N \otimes C \end{array}$$

Ou seja,

$$(f \otimes id_C)(\rho_M(m)) = \sum_{(m)} f(m_0) \otimes m_1 = \sum_{(f(m))} f(m)_0 \otimes f(m)_1 = \rho_N(f(m)),$$

para todo $m \in M$.

Sejam A uma álgebra e M um A -módulo (à direita ou à esquerda). A é chamada simples se não possui ideais (bilaterais) próprios (ou seja, diferente de 0 e A) e M é chamado simples (ou irreduzível) quando $M \neq 0$ e não tem submódulos próprios. Ainda, M é chamado semissimples (ou completamente redutível) quando é soma direta de submódulos simples (ou equivalentemente, todo submódulo de M é um somando direto) e A é chamada semissimples se é semissimples como A -módulo (à direita ou à esquerda).

No caso de coálgebras temos a seguinte definição.

Definição 1.1.14. *Sejam C uma coálgebra e M um C -comódulo.*

(1a) *C é chamada simples se não possui subcoálgebra própria.*

(1b) *C é chamada cossemisimples se é soma direta de subcoálgebras simples.*

(2a) *M é chamado simples (ou irreduzível) se $M \neq 0$ e não possui subcomódulo próprio.*

(2b) *M é chamado cossemisimples (ou completamente redutível) se é soma direta de subcomódulos simples.*

É conhecido que A é semissimples se e somente se todo A -módulo à esquerda (ou à direita) é semissimples (ver [16, Theorem 2.5]). Vale o resultado dual.

Proposição 1.1.15. (ver [23, Lemma 2.4.3]) *Seja C uma coálgebra. Então C é cossemisimples se e somente se todo C -comódulo à direita (ou à esquerda) é cossemisimples.*

Combinando este resultado com a Proposição 1.1.12 obtemos o seguinte.

Corolário 1.1.16. *Seja H uma biálgebra de dimensão finita. Então H é semissimples se e somente se H^* é cossemisimples.*

Finalizamos a seção descrevendo alguns resultados que envolvem o radical primo $P(A)$ e o radical de Jacobson $J(A)$ de uma \mathbb{k} -álgebra A .

Assumiremos conhecido as definições e caracterizações de $P(A)$ e $J(A)$, bem como os conceitos mais básicos envolvidos nesse assunto: ideais primos, ideais semiprimos, ideais primitivos, etc. O leitor que não estiver familiarizado com tais conceitos pode

consultar [16], páginas 53 a 56, 165 a 169, 182 e 183, ou outra referência pertinente. Em particular, diremos que A é semiprimo se $P(A) = 0$, e que A é semiprimativo se $J(A) = 0$. Também assumiremos familiaridade com o conceito de artinianidade (ver, por exemplo, [16], páginas 20 a 22).

Proposição 1.1.17. (ver [16, Theorems 4.14 e 10.24]) *Uma álgebra é semissimples se e somente se é semiprimativa e artiniana à esquerda (ou à direita), se e somente se é semiprima e artiniana à esquerda (ou à direita).*

Proposição 1.1.18. (ver [16, Theorem 4.12]) *Se A é artiniana à esquerda ou à direita (em particular se A tem dimensão finita), então $J(A)$ é nilpotente.*

Seja A uma \mathbb{k} -álgebra. Dizemos que um elemento $a \in A$ é algébrico de grau n , quando existem $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{k}$ tais que $a^n + \alpha_{n-1}a^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0$. Dizemos que A é algébrica, quando todo elemento de A é algébrico.

Uma \mathbb{k} -álgebra A é chamada localmente finita, se toda subálgebra de A gerada por uma quantidade finita de elementos tem dimensão finita. Em particular, toda \mathbb{k} -álgebra localmente finita é algébrica. De fato, se $x \in A$ está contido numa subálgebra de dimensão n , então os elementos x, x^2, \dots, x^{n+1} são linearmente dependentes, o que implica que x é algébrico, como se vê facilmente.

Proposição 1.1.19. (ver [16, Corollary 4.19]) *Se a \mathbb{k} -álgebra A é algébrica (em particular se A é localmente finita), então $J(A)$ é o maior ideal nil de A .*

Proposição 1.1.20. (ver [16, Theorems 5.10 e 10.18]) *Seja $A[t]$ o anel de polinômios em uma variável sobre a álgebra A .*

- (1) *Seja $N = A \cap J(A[t])$. Então N é um ideal nil de A e $J(A[t]) = N[t]$.*
- (2) *$A[t]$ é primo (respectivamente semiprimo) se e somente se A é primo (respectivamente semiprimo).*

Seja \mathbb{k} um corpo. Um polinômio irredutível de $\mathbb{k}[t]$ é dito separável sobre \mathbb{k} se ele não tem raízes múltiplas no seu corpo de raízes. Um polinômio arbitrário de $\mathbb{k}[t]$ é dito separável sobre \mathbb{k} se todos os seus fatores irredutíveis em $\mathbb{k}[t]$ são separáveis sobre \mathbb{k} . Se $\mathbb{k} \subseteq \mathbb{F}$ é uma extensão de corpos, então um elemento $\alpha \in \mathbb{F}$ é dito separável sobre \mathbb{k} se ele

for raiz de algum polinômio separável de $\mathbb{k}[t]$. Uma extensão algébrica de corpos $\mathbb{k} \subseteq \mathbb{F}$ é dita separável se todo $\alpha \in \mathbb{F}$ é separável sobre \mathbb{k} .

Proposição 1.1.21. (ver [16, Theorems 5.14 e 5.17]) *Seja A uma \mathbb{k} -álgebra. Para qualquer extensão de corpos $\mathbb{k} \subseteq \mathbb{F}$ tem-se $A \cap J(A \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F}) \subseteq J(A)$. Se $\mathbb{k} \subseteq \mathbb{F}$ é uma extensão algébrica então $A \cap J(A \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F}) = J(A)$. Se $\mathbb{k} \subseteq \mathbb{F}$ é uma extensão algébrica e separável então $J(A \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F}) = J(A) \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F}$.*

Uma álgebra A é dita um produto subdireto das álgebras $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ quando valem as seguintes condições:

- (i) A é uma subálgebra do produto cartesiano $\prod_{\lambda} A_\lambda$;
- (ii) $\pi_\lambda(A) = A_\lambda$, para toda projeção canônica $\pi_\lambda : \prod_{\lambda} A_\lambda \rightarrow A_\lambda$.

Proposição 1.1.22. (ver [13, Theorem 1.1.5]) *Uma álgebra A é (isomorfa a) um produto subdireto das álgebras $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ se e somente se existe uma família de ideais $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ em A , tais que $\bigcap I_\lambda = 0$ e $A_\lambda \cong A/I_\lambda$.*

Proposição 1.1.23. (ver [13, Proposition 2.3.4]) *Um produto subdireto de álgebras semi-primitivas é semiprimitiva.*

1.2 Álgebras de Hopf e produto smash parcial

Nesta seção apresentamos um pouco da teoria de álgebras de Hopf, ações e coações parciais e produto smash parcial. Também apresentamos alguns resultados já conhecidos sobre o assunto. Como na seção anterior, \mathbb{k} denotará um corpo.

Sejam A uma \mathbb{k} -álgebra e C uma \mathbb{k} -coálgebra. O espaço vetorial $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(C, A)$ tem uma estrutura de \mathbb{k} -álgebra, com multiplicação dada pelo *produto convolução*:

$$(\varphi * \psi)(c) := \sum \varphi(c_1)\psi(c_2)$$

para $c \in C$ e $\varphi, \psi \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(C, A)$. A unidade da álgebra $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(C, A)$ é o elemento $u \circ \varepsilon$, onde u é a unidade de A e ε é a counidade de C (ver [7, pg 151]).

Em particular, quando $A = C = H$ é uma biálgebra, faz sentido indagar se existe $S \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(H, H)$ que seja inversa da aplicação identidade id_H , com respeito ao produto convolução. No caso afirmativo chamamos S de *antípoda* de H .

Definição 1.2.1. *Uma álgebra de Hopf é uma biálgebra que possui antípoda.*

Na notação sigma, $S * id_H = u \circ \varepsilon = id_H * S$ significa que

$$\sum S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H = \sum h_1S(h_2)$$

para todo $h \in H$.

Exemplo 1.2.2. (ver [7, pg 158]) *Seja G um grupo. Já mencionamos no Exemplo 1.1.6 que $H = \mathbb{k}G$ é uma biálgebra. Se considerarmos a aplicação $S : H \rightarrow H$, definida por $S(g) = g^{-1}$, estendida por linearidade, vemos facilmente que S é uma antípoda de H . Em particular, se $G = \{e\}$ tem apenas o elemento neutro, então $\mathbb{k}G \cong \mathbb{k}$ é uma álgebra de Hopf com antípoda $S = id_{\mathbb{k}}$.*

Na Seção anterior, já observamos que se H uma biálgebra de dimensão finita então H^* tem uma estrutura de biálgebra (Proposição 1.1.8). A proposição seguinte amplia esse resultado para álgebras de Hopf.

Proposição 1.2.3. (ver [7, Proposition 4.2.11]) *Se H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S , então H^* é uma álgebra de Hopf com antípoda S^* .*

Exemplo 1.2.4. (ver [7, pg 159]) *Seja G um grupo finito e seja $H = \mathbb{k}G$. Segue do Exemplo 1.2.2 e da Proposição 1.2.3 que H^* é uma álgebra de Hopf. Se $\{p_x\}_{x \in G} \subseteq H^*$ é a base dual de G , então, para quaisquer $g \neq h$ em G ,*

$$p_g^2 = p_g, \quad p_g p_h = 0 \quad e \quad 1_{H^*} = \sum_{x \in G} p_x.$$

A estrutura de coálgebra de H^* é dada por

$$\Delta(p_g) = \sum_{x \in G} p_x \otimes p_{x^{-1}g} = \sum_{x \in G} p_{gx^{-1}} \otimes p_x \quad e \quad \varepsilon(p_g) = \delta_{1,g},$$

para $g \in G$, e a antípoda de H^* é dada por $S(p_g) = p_{g^{-1}}$, para $g \in G$.

Se H é uma \mathbb{k} -álgebra de Hopf e $\mathbb{k} \subseteq \mathbb{F}$ é uma extensão de corpos, então $\mathcal{H} := H \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F}$ tem uma estrutura de \mathbb{F} -álgebra de Hopf. Por definição, a multiplicação em \mathcal{H} é dada por

$$(h \otimes_{\mathbb{k}} \alpha)(g \otimes_{\mathbb{k}} \beta) = (hg) \otimes_{\mathbb{k}} (\alpha\beta), \quad \forall h, g \in H, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},$$

e, conseqüentemente, a unidade é $1_{\mathcal{H}} = 1_H \otimes_{\mathbb{k}} 1_{\mathbb{F}}$. A comultiplicação é dada por

$$\Delta_{\mathcal{H}}(h \otimes_{\mathbb{k}} \alpha) = \sum (h_1 \otimes_{\mathbb{k}} \alpha) \otimes_{\mathbb{F}} (h_2 \otimes_{\mathbb{k}} 1_{\mathbb{F}}) = \sum (h_1 \otimes_{\mathbb{k}} 1_{\mathbb{F}}) \otimes_{\mathbb{F}} (h_2 \otimes_{\mathbb{k}} \alpha), \quad \forall h \in H, \forall \alpha \in \mathbb{F},$$

e a counidade por

$$\varepsilon_{\mathcal{H}}(h \otimes_{\mathbb{k}} \alpha) = \varepsilon_H(h)\alpha, \quad \forall h \in H, \forall \alpha \in \mathbb{F}.$$

A antípoda de \mathcal{H} é dada por

$$S_{\mathcal{H}}(h \otimes_{\mathbb{k}} \alpha) = S_H(h) \otimes_{\mathbb{k}} \alpha, \quad \forall h \in H, \forall \alpha \in \mathbb{F},$$

onde S_H é a antípoda de H (ver [7, Exercise 4.2.17]).

Proposição 1.2.5. (ver [23, Corollary 2.2.2]) *Seja H uma \mathbb{k} -álgebra de Hopf de dimensão finita e seja $\mathbb{k} \subseteq \mathbb{F}$ uma extensão de corpos. Se H é semissimples, então $H \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F}$ é uma \mathbb{F} -álgebra de Hopf semissimples.*

Apresentamos agora o conceito de H -módulo álgebra parcial, uma generalização do conceito de H -módulo álgebra, e que foi introduzido na literatura por Caenepeel e Janssen em [4].

Definição 1.2.6. *Uma ação parcial (à esquerda) de uma álgebra de Hopf H sobre uma álgebra A é uma aplicação \mathbb{k} -linear*

$$\begin{aligned} \xi : H \otimes A &\rightarrow A \\ h \otimes a &\mapsto h \cdot a \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes condições:

- (i) $1_H \cdot a = a$
- (ii) $h \cdot (a(g \cdot b)) = \sum (h_1 \cdot a)((h_2 g) \cdot b)$

para quaisquer $a, b \in A$ e $h, g \in H$. Neste caso, dizemos que A é um H -módulo álgebra parcial (à esquerda).

Como estamos supondo que A tem unidade, a condição (ii) da Definição 1.2.6 pode ser substituída pelas condições (a) e (b) abaixo:

$$(a) \quad h \cdot (ab) = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$$

$$(b) \quad h \cdot (g \cdot b) = \sum (h_1 \cdot 1_A)((h_2 g) \cdot b)$$

para quaisquer $a, b \in A$ e $h, g \in H$. Claramente vale (ii) se e somente se valem (a) e (b).

Notemos que se A é um H -módulo álgebra parcial, então

$$h \cdot 1_A = \varepsilon(h)1_A, \quad \forall h \in H \quad \iff \quad h \cdot (g \cdot a) = (hg) \cdot a, \quad \forall a \in A, \forall h, g \in H.$$

De fato, se vale a igualdade da esquerda, então a condição (b) acima implica que, para $a \in A$ e $h, g \in H$,

$$h \cdot (g \cdot b) = \sum (h_1 \cdot 1_A)((h_2 g) \cdot b) = \sum 1_A((\varepsilon(h_1)h_2 g) \cdot b) = (hg) \cdot b.$$

Reciprocamente, se vale a igualdade da direita, então a condição (a) acima implica que, para todo $h \in H$,

$$\begin{aligned} h \cdot 1_A &= \sum (h_1 \cdot 1_A)(\varepsilon(h_2) \cdot 1_A) \\ &= \sum (h_1 \cdot 1_A)((h_2 S(h_3)) \cdot 1_A) \\ &= \sum (h_1 \cdot 1_A)(h_2 \cdot (S(h_3) \cdot 1_A)) \\ &= \sum h_1 \cdot (1_A(S(h_2) \cdot 1_A)) \\ &= \sum h_1 \cdot (S(h_2) \cdot 1_A) \\ &= \sum (h_1 S(h_2)) \cdot 1_A \\ &= \varepsilon(h)1_A. \end{aligned}$$

Neste caso A é um H -módulo álgebra (conforme [7, Definition 6.1.1]), e dizemos que ξ é uma ação global, ou que H age globalmente em A . Por outro lado, essas igualdades deixam claro que todo H -módulo álgebra é um H -módulo álgebra parcial.

Se H uma \mathbb{k} -álgebra de Hopf e A é um H -módulo álgebra parcial, então, para qualquer extensão de corpos $\mathbb{k} \subseteq \mathbb{F}$, $\mathcal{A} := A \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F}$ tem uma estrutura natural de \mathcal{H} -módulo álgebra parcial, onde $\mathcal{H} := H \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F}$. Por definição, a ação parcial de \mathcal{H} em \mathcal{A} é dada por

$$(h \otimes \alpha) \cdot (a \otimes \beta) := (h \cdot a) \otimes (\alpha\beta)$$

para $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $a \in A$ e $h \in H$.

Exemplo 1.2.7. Consideremos a álgebra de Hopf $H = \mathbb{k}$ (Exemplo 1.2.2). Então toda \mathbb{k} -álgebra A é um H -módulo álgebra (ação global), com ação de H em A dada pela estrutura de \mathbb{k} -espaço vetorial de A .

Exemplo 1.2.8. [3, Proposition 1] Seja B um H -módulo álgebra (ação global), e seja A um ideal à direita de B com unidade 1_A . Então, A torna-se um H -módulo álgebra parcial via

$$h \cdot a = 1_A(h \triangleright a),$$

para $a \in A$ e $h \in H$, onde \triangleright indica a ação de H em B .

Exemplo 1.2.9. [2, pg 5] Como caso particular do Exemplo 1.2.8, consideremos um grupo finito G e a álgebra de Hopf $H = (\mathbb{k}G)^*$ como no Exemplo 1.2.4. Então, $B = \mathbb{k}G$ é um H -módulo álgebra (ação global) via

$$p_g \triangleright h = \delta_{g,h}h, \quad \forall g, h \in G.$$

Seja N um subgrupo normal de G , $N \neq \{1_G\}$, tal que $\text{char } \mathbb{k} \nmid |N|$, e seja $e_N \in B$ o idempotente central

$$e_N = \frac{1}{|N|} \sum_{n \in N} n.$$

Para quaisquer $g, x \in G$, temos

$$\begin{aligned} p_g \triangleright (e_N x) &= \sum_{h \in G} (p_{gh^{-1}} \triangleright e_N)(p_h \triangleright x) \\ &= \sum_{h \in G} (p_{gh^{-1}} \triangleright e_N) \delta_{h,x} x \\ &= (p_{gx^{-1}} \triangleright e_N) x \\ &= \frac{1}{|N|} \sum_{n \in N} (p_{gx^{-1}} \triangleright n) x. \end{aligned}$$

Assim, o ideal $A = e_N B$ é uma \mathbb{k} -álgebra com unidade $1_A = e_N$, e a ação induzida de H em A é tal que, para $g \in N$,

$$p_g \cdot e_N = e_N(p_g \triangleright e_N) = (1/|N|)g \neq \delta_{1,g}e_N = \varepsilon(p_g)e_N.$$

Em particular, a ação parcial de H em A não é global.

Exemplo 1.2.10. [9, Example 6.1] Seja B uma \mathbb{k} -álgebra qualquer e seja

$$A = B \times B \times B = Be_1 \oplus Be_2 \oplus Be_3,$$

onde $e_1 = (1_B, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1_B, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1_B)$. Se $G = \{1_G, g, g^2, g^3\}$ é o grupo cíclico de ordem 4, então $H = \mathbb{k}G$ age parcialmente em A via

$$\begin{aligned} g \cdot e_1 &= 0, & g \cdot e_2 &= e_1, & g \cdot e_3 &= e_2, \\ g^2 \cdot e_1 &= e_3, & g^2 \cdot e_2 &= 0, & g^2 \cdot e_3 &= e_1, \\ g^3 \cdot e_1 &= e_2, & g^3 \cdot e_2 &= e_3, & g^3 \cdot e_3 &= 0. \end{aligned}$$

No estudo de H -módulos álgebra parciais, uma subálgebra importante é a subálgebra dos elementos invariantes pela ação de H .

Definição 1.2.11. *Seja A um H -módulo álgebra parcial. Definimos a subálgebra dos elementos invariantes por*

$$A^H = \{a \in A ; h \cdot a = a(h \cdot 1_A), \forall h \in H\}.$$

A demonstração de que A^H é uma subálgebra é imediata: para $a, b \in A$ e $h \in H$

$$h \cdot (ab) = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b) = \sum a(h_1 \cdot 1_A)(h_2 \cdot b) = a(h \cdot b) = ab(h \cdot 1_A),$$

e

$$h \cdot 1_A = 1_A(h \cdot 1_A).$$

Quando A é H -módulo álgebra (ação global), nós denotamos a subálgebra dos invariantes por A^H . Nesse caso

$$A^H = \{a \in A ; h \cdot a = \varepsilon(h)a, \forall h \in H\}$$

conforme [7, Definition 6.1.5].

Mais adiante vamos precisar do seguinte resultado, para o qual não encontramos nenhuma referência na literatura.

Proposição 1.2.12. *Seja A um H -módulo álgebra parcial. Se $a \in A^H$ é invertível em A , então $a^{-1} \in A^H$.*

Demonstração. Para todo $h \in H$

$$\begin{aligned}
h \cdot a^{-1} &= a^{-1}a(h \cdot (1_A a^{-1})) \\
&= a^{-1} \sum a(h_1 \cdot 1_A)(h_2 \cdot a^{-1}) \\
&= a^{-1} \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot a^{-1}) \\
&= a^{-1}(h \cdot (a a^{-1})) \\
&= a^{-1}(h \cdot 1_A).
\end{aligned}$$

□

Dualizando a definição de H -módulo álgebra parcial temos a definição de H -comódulo álgebra parcial.

Definição 1.2.13. *Uma coação parcial (à direita) de uma álgebra de Hopf H sobre uma álgebra R é uma aplicação \mathbb{k} -linear $\rho : R \rightarrow R \otimes H$ que satisfaz as seguintes condições*

- (i) $(id_R \otimes \varepsilon)(\rho(x)) = x$
- (ii) $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$
- (iii) $\rho^2(x) := (\rho \otimes id_H)(\rho(x)) = [\rho(1_R) \otimes 1_H][(id_R \otimes \Delta)(\rho(x))]$

para quaisquer $x, y \in R$. Neste caso dizemos que R é um H -comódulo álgebra parcial (à direita).

Na notação sigma, as condições acima significam que

- (i) $\sum x_0 \varepsilon(x_1) = x$
- (ii) $\sum (xy)_0 \otimes (xy)_1 = \sum x_0 y_0 \otimes x_1 y_1$
- (iii) $\sum x_{00} \otimes x_{01} \otimes x_1 = \sum 1_0 x_0 \otimes 1_1 x_{11} \otimes x_{12}$

para quaisquer $x, y \in R$.

Analogamente ao caso de ações parciais, notamos que se, além das condições acima, também vale

$$\rho(1_R) = 1_R \otimes 1_H,$$

então R é um H -comódulo álgebra (conforme [7, Definition 6.2.1]). De fato, aplicando esta condição em (iii), obtemos imediatamente que $(\rho \otimes id_H) \circ \rho = (id_R \otimes \Delta) \circ \rho$. Neste caso dizemos que ρ é uma coação global. Por outro lado, é imediato verificar que todo H -comódulo álgebra é um H -comódulo álgebra parcial.

Definição 1.2.14. *Seja R um H -comódulo álgebra parcial. Definimos a subálgebra dos elementos coinvariantes por*

$$R^{coH} = \left\{ x \in R ; \rho(x) = (x \otimes 1_H)\rho(1_R) = \sum x 1_0 \otimes 1_1 \right\}.$$

O fato que R^{coH} é uma subálgebra de R é consequência imediata de (ii): para $x, y \in R^{coH}$

$$\begin{aligned} \rho(xy) &= \rho(x)\rho(y) = (x \otimes 1_H)\rho(1_R)\rho(y) = (x \otimes 1_H)\rho(y) \\ &= (x \otimes 1_H)(y \otimes 1_H)\rho(1_R) = ((xy) \otimes 1_H)\rho(1_R), \end{aligned}$$

e, além disso,

$$\rho(1_R) = (1_R \otimes 1_H)\rho(1_R).$$

Quando R é H -comódulo álgebra (coação global), nós denotamos a subálgebra dos elementos coinvariantes de R por R^{coH} . Nesse caso

$$R^{coH} = \{x \in R ; \rho(x) = (x \otimes 1_H)\}$$

conforme [7, Definition 6.2.3].

Analogamente ao que foi feito na Proposição 1.2.12, podemos mostrar o seguinte.

Proposição 1.2.15. *Seja R um H -comódulo álgebra parcial. Se $x \in R^{coH}$ é invertível em R , então $x^{-1} \in R^{coH}$.*

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} \rho(x^{-1}) &= (1_R \otimes 1_H)\rho(1_R x^{-1}) \\ &= (x^{-1} \otimes 1_H)(x \otimes 1_H)\rho(1_R)\rho(x^{-1}) \\ &= (x^{-1} \otimes 1_H)\rho(x)\rho(x^{-1}) \\ &= (x^{-1} \otimes 1_H)\rho(xx^{-1}) \\ &= (x^{-1} \otimes 1_H)\rho(1_R). \end{aligned}$$

□

Finalizamos esta seção considerando o produto smash parcial. Este conceito, juntamente com o conceito de ações parciais de álgebras de Hopf, foi introduzido na literatura por Caenepeel e Janssen em [4]. Seja A um H -módulo álgebra parcial. No espaço vetorial $A \otimes H$, definimos a seguinte multiplicação:

$$(a \otimes h)(b \otimes g) = \sum a(h_1 \cdot b) \otimes h_2g$$

para $a, b \in A$ e $h, g \in H$. Essa multiplicação é associativa e distributiva em relação a soma usual de $A \otimes H$, introduzindo assim uma estrutura de “álgebra” em $A \otimes H$. Denotaremos essa estrutura por $A\#H$ e seus elementos (geradores) por $a\#h$ em vez de $a \otimes h$. Em geral $A\#H$ não tem unidade, a menos que a ação de H em A seja uma ação global (ver [7, Proposition 6.1.7]). Por isso consideramos o seguinte subespaço de $A\#H$:

$$\underline{A\#H} = (A\#H)(1_A\#1_H),$$

gerado pelos elementos da forma

$$\underline{a\#h} := (a\#h)(1_A\#1_H) = \sum a(h_1 \cdot 1_A)\#h_2.$$

Como se vê facilmente, a multiplicação descrita acima, restrita ao subespaço $\underline{A\#H}$, o torna uma \mathbb{k} -álgebra com unidade $\underline{1_A\#1_H} = 1_A\#1_H$.

Definição 1.2.16. *Seja A um H -módulo álgebra parcial. O produto smash parcial de A por H é a \mathbb{k} -álgebra*

$$\underline{A\#H} = (A\#H)(1_A\#1_H).$$

Claramente, se A é um H -módulo álgebra (ação global) então $\underline{A\#H} = A\#H$.

Observamos ainda que temos um monomorfismo natural de álgebra

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow \underline{A\#H} \subseteq A\#H \\ a &\mapsto \underline{a\#1_H} = a\#1_H. \end{aligned}$$

Assim, podemos identificar A com a subálgebra $f(A) = \underline{A\#1_H} = A\#1_H$ de $\underline{A\#H}$.

Em [20], o autor já observa que o produto smash parcial $\underline{A\#H}$ é um H -comódulo álgebra. Abaixo descrevemos como isso acontece.

O espaço vetorial $A\#H \cong A \otimes H$ torna-se um H -comódulo à direita via $\rho = id_A \otimes \Delta$

(ver [7, Example 2.1.6]):

$$\begin{aligned}\rho : A\#H &\rightarrow A\#H \otimes H \\ a\#h &\mapsto a\#h_1 \otimes h_2.\end{aligned}$$

Esta aplicação é multiplicativa: para $a, b \in A$ e $h, g \in H$,

$$\begin{aligned}\rho((a\#h)(b\#g)) &= \rho\left(\sum a(h_1 \cdot b)\#h_2g\right) \\ &= \sum a(h_1 \cdot b)\#h_2g_1 \otimes h_3g_2 \\ &= \sum (a\#h_1)(b\#g_1) \otimes h_2g_2 \\ &= \sum (a\#h_1 \otimes h_2)(b\#g_1 \otimes g_2) \\ &= \rho(a\#h)\rho(b\#g).\end{aligned}$$

Em particular, isso implica que $\underline{A\#H}$ é um H -subcomódulo de $A\#H$: para $a \in A$ e $h \in H$,

$$\begin{aligned}\rho(\underline{a\#h}) &= \rho((a\#h)(1_A\#1_H)) \\ &= \rho(a\#h)\rho(1_A\#1_H) \\ &= \sum (a\#h_1 \otimes h_2)(1_A\#1_H \otimes 1_H) \\ &= \sum (a\#h_1)(1_A\#1_H) \otimes h_2 \\ &= \sum \underline{a\#h_1} \otimes h_2 \in \underline{A\#H} \otimes H.\end{aligned}$$

Como $\rho(1_A\#1_H) = 1_A\#1_H \otimes 1_H$ segue que $\underline{A\#H}$ é um H -comódulo álgebra (coaço global) via restrição $\rho|_{\underline{A\#H}}$.

Provemos agora que $(\underline{A\#H})^{coH} = A$. A inclusão $A \subseteq (\underline{A\#H})^{coH}$ é imediata da definição de ρ . Por outro lado, seja $u \in (\underline{A\#H})^{coH} \subseteq A\#H$. Então $u = \sum_i a_i\#h_i$, para certos $a_i \in A$ e $h_i \in H$, e

$$\sum_i a_i\#h_i \otimes 1_H = u \otimes 1_H = \rho(u) = \sum_i \sum_{(h_i)} a_i\#h_{i1} \otimes h_{i2}.$$

Podemos supor ainda que $\{a_i\}$ é um conjunto linearmente independente, o que implica $\sum_{(h_i)} h_{i1} \otimes h_{i2} = h_i \otimes 1_H$, para todo i . Aplicando $\varepsilon \otimes id_H$ nesta igualdade obtemos, para todo i ,

$$h_i = \sum_{(h_i)} \varepsilon(h_{i1})h_{i2} = \varepsilon(h_i)1_H.$$

Portanto $u = \sum_i a_i\#h_i = \sum_i \varepsilon(h_i)a_i\#1_H \in A$.

Se H tem dimensão finita, então a estrutura de H -comódulo álgebra (à direita),

descrita acima, induz uma estrutura de H^* -módulo álgebra (à esquerda) em $\underline{A\#H}$, com ação dada por

$$\varphi \rightarrow (\underline{a\#h}) := \sum \underline{a\#h_1} \varphi(h_2),$$

para $a \in A$, $h \in H$ e $\varphi \in H^*$. Além disso, $(\underline{A\#H})^{H^*} = (\underline{A\#H})^{coH} = A$ (ver [7, Proposition 6.2.4]).

1.3 PI álgebras

Nesta seção faremos uma breve discussão sobre PI-álgebras. Essas estruturas são os principais objetos das aplicações dos estudos feitos aqui. Abaixo listamos alguns exemplos e algumas propriedades que serão importantes para o desenvolvimento do trabalho. O leitor interessado em mais detalhes sobre o assunto pode consultar [14], [15], [22] ou [25].

Seja A uma \mathbb{k} -álgebra. Dizemos que um polinômio $0 \neq f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in \mathbb{k}\langle x_1, x_2, \dots \rangle$ é uma identidade polinomial para A , ou que A satisfaz a identidade polinomial f , quando, para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$, $f(a_1, \dots, a_n) = 0$.

Definição 1.3.1. *Uma PI-álgebra é uma álgebra que satisfaz uma identidade polinomial.*

Exemplos 1.3.2. (1) *Toda álgebra comutativa satisfaz a identidade polinomial*

$$[x_1, x_2] := x_1x_2 - x_2x_1.$$

(2) (ver [25, pg 10]) *A álgebra exterior (ou álgebra de Grassman) satisfaz a identidade polinomial*

$$[[x_1, x_2], x_3] = (x_1x_2 - x_2x_1)x_3 - x_3(x_1x_2 - x_2x_1).$$

Proposição 1.3.3. (ver [22, Corollary 13.4.9]) *Sejam $A \subseteq B$ uma extensão de álgebras tal que B é finitamente gerado como A -módulo. Se A é PI-álgebra, então B também é PI-álgebra.*

Como consequência da Proposição 1.3.3 e do Exemplo 1.3.2, toda álgebra finitamente gerada sobre seu centro (em particular, toda álgebra de dimensão finita) é uma PI-álgebra.

Proposição 1.3.4. (ver [25, Theorem 6.1.1]) *O produto tensorial de PI-álgebras é PI-álgebra.*

Em particular, se a \mathbb{k} -álgebra A é uma PI-álgebra, então o anel de polinômios em uma variável $A[t] \cong A \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[t]$ é PI-álgebra (pois $\mathbb{k}[t]$ é comutativo).

Exemplo 1.3.5. (ver [25, pg 9]) *Dizemos que uma álgebra A é algébrica de grau limitado, quando existe um inteiro $n \geq 1$, tal que todo elemento de A é algébrico de grau $\leq n$. Toda álgebra algébrica de grau limitado é uma PI-álgebra.*

Proposição 1.3.6. (ver [14, Theorem 6.4.3]) *Toda PI-álgebra algébrica é localmente finita.*

Proposição 1.3.7. (ver [22, Corollary 13.2.6]) *O radical primo de uma PI-álgebra é seu maior ideal à direita nil.*

Uma \mathbb{k} -álgebra A é chamada afim se é finitamente gerada (como \mathbb{k} -álgebra), ou seja, se existem $a_1, \dots, a_n \in A$ tais que $A = \mathbb{k}\langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

Proposição 1.3.8. (ver [25, Corollary 4.4.6], [16, Corollary 4.19] e [15, Theorem 3, pg 36]) *Seja A uma PI-álgebra que é afim ou algébrica sobre \mathbb{k} . Então $J(A)$ é localmente nilpotente. Em particular, $J(A) = P(A)$.*

Proposição 1.3.9. (ver [18, Lemma 3.7]) *Seja \mathbb{k} um corpo algebricamente fechado. Se A é uma \mathbb{k} -álgebra afim que satisfaz uma identidade polinomial de grau d então, para todo A -módulo simples V , tem-se $\dim_{\mathbb{k}} V \leq d/2$.*

Encerramos a seção descrevendo um resultado, devido a V. Linchenko e S. Montgomery, sobre H -módulos álgebra que satisfazem uma identidade polinomial. Dele decorre um fato sobre H -módulos álgebra localmente finitos (Lema 4.6), útil no estudo da semi-primitividade do produto smash parcial como veremos no Capítulo 4.

Proposição 1.3.10. [17, Corollary 3.2] *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita cossemisimples e seja A um H -módulo álgebra (ação global) satisfazendo uma identidade polinomial. Se I é um ideal nil de A , então*

$$H \cdot I := \left\{ \sum h_i \cdot x_i ; h_i \in H, x_i \in I \right\} \subseteq J(A).$$

Como toda álgebra A de dimensão finita é uma PI-álgebra e $J(A)$ é nilpotente (Proposição 1.1.18), segue imediatamente o seguinte resultado.

Corolário 1.3.11. *Seja H uma álgebra de Hopf cossemisimples e A um H -módulo álgebra (ação global). Se A e H têm dimensão finita, então $H \cdot J(A) \subseteq J(A)$.*

2 Ideais H -estáveis e (A, H) -módulos parciais

Sejam H uma álgebra de Hopf sobre um corpo \mathbb{k} e A um H -módulo álgebra parcial. Em [11] e [26], os autores exploram os conceitos de ideais H -estáveis de A e (A, H) -módulos no estudo de “ H -radicais”, quando a ação de H em A é global. Tais conceitos podem ser adaptados para o caso de ações parciais. Nos Capítulos 2 e 3, exploramos esses conceitos no estudo do H -radical primo e do H -radical de Jacobson de A (quando a ação de H em A é parcial). O principal objetivo destes dois capítulos é estabelecer uma relação entre o H -radical primo de A e o H^* -radical primo de $\underline{A\#H}$ e uma relação entre o H -radical de Jacobson de A e o H^* -radical de Jacobson de $\underline{A\#H}$, quando H tem dimensão finita.

Em todo este capítulo H denotará uma álgebra de Hopf sobre um corpo \mathbb{k} e A um H -módulo álgebra parcial.

2.1 Ideais H -estáveis

Nosso objetivo, nesta seção, é estabelecer alguns fatos sobre ideais H -estáveis de A . O mais importante deles é a relação entre os ideais H -estáveis de A e os ideais de $\underline{A\#H}$ que são H -submódulos (Teorema 2.1.6), os quais, no caso de H ter dimensão finita, são os ideais H^* -estáveis de $\underline{A\#H}$ (Corolário 2.1.7).

Definição 2.1.1. *Seja A um H -módulo álgebra parcial. Um ideal à direita (resp. à esquerda) I de A é chamado H -estável quando $H \cdot I \subseteq I$.*

Já observamos na Seção 1.2 que, quando a ação de H em A é global, A é um H -módulo. Claramente, nesse caso, os ideais (à direita ou à esquerda) H -estáveis de A são exatamente aqueles que são H -submódulos de A .

Exemplo 2.1.2. *Seja A uma \mathbb{k} -álgebra e seja $H = \mathbb{k}$. Já mencionamos no Exemplo 1.2.7 que A é um H -módulo álgebra. Claramente, todos os ideais (à esquerda ou à direita) de A são H -estáveis. Assim, o conceito de ideal H -estável é, de certa forma, uma generalização do conceito de ideal de uma álgebra qualquer.*

Seja I um ideal H -estável de A . Então a ação de H em A induz uma ação de H no quociente A/I , dada por

$$h \cdot (a + I) := (h \cdot a) + I$$

para $h \in H$ e $a \in A$. Claramente esta ação define uma estrutura de H -módulo álgebra parcial em A/I . Além disso, temos o seguinte isomorfismo:

$$\underline{(A\#H)} / \underline{(I\#H)} \cong \underline{(A/I)\#H},$$

onde $\underline{I\#H} := \{ \sum \underline{x_i\#h_i}; x_i \in I, h_i \in H \}$. Para ver isto, consideremos a projeção natural

$$\begin{aligned} \pi : A\#H &\rightarrow (A/I)\#H \\ a\#h &\mapsto \bar{a}\#h \end{aligned}$$

Esta aplicação preserva a multiplicação: para $a, b \in A$ e $h, g \in H$

$$\begin{aligned} \pi((a\#h)(b\#g)) &= \pi(\sum a(h_1 \cdot b)\#h_2g) \\ &= \sum \overline{a(h_1 \cdot b)}\#h_2g \\ &= \sum \bar{a}(h_1 \cdot \bar{b})\#h_2g \\ &= (\bar{a}\#h)(\bar{b}\#g) \\ &= \pi(a\#h)\pi(b\#g). \end{aligned}$$

Consideremos agora a restrição $\pi|_{\underline{A\#H}}$. Temos

$$\begin{aligned} \pi(\underline{a\#h}) &= \pi(\sum a(h_1 \cdot 1_A)\#h_2) \\ &= \sum \overline{a(h_1 \cdot 1_A)}\#h_2 \\ &= \sum \bar{a}(h_1 \cdot \bar{1}_A)\#h_2 \\ &= \underline{\bar{a}\#h} \in \underline{(A/I)\#H} \end{aligned}$$

para quaisquer $a \in A$ e $h \in H$, portanto está bem definida a projeção

$$\begin{aligned} \bar{\pi} : \underline{A\#H} &\rightarrow \underline{(A/I)\#H} \\ \underline{a\#h} &\mapsto \underline{\bar{a}\#h} \end{aligned}$$

Por ser uma restrição de π , a aplicação $\bar{\pi}$ também preserva a multiplicação, donde segue que $\bar{\pi}$ é um homomorfismo de álgebras.

Claramente $\bar{\pi}$ é sobrejetiva. Provemos que

$$\ker \bar{\pi} = (\ker \pi) \cap (A\#H) = \underline{I\#H}.$$

A inclusão $\underline{I\#H} \subseteq \ker(\bar{\pi})$ é evidente. Por outro lado, seja $u \in \ker \bar{\pi} \subseteq A\#H$. Temos $u = \sum x_i\#h_i$ para certos $\{x_i\} \subseteq A$ e $\{h_i\} \subseteq H$. Podemos supor que $\{h_i\}$ é um conjunto linearmente independente, então $\sum \bar{x}_i\#h_i = \pi(u) = \bar{\pi}(u) = 0$ implica $x_i \in I$, para todo i . Como $u \in \underline{A\#H}$, segue que $u = u(1_A\#1_H) = \sum x_i\#h_i \in \underline{I\#H}$. Isso prova que $\ker \bar{\pi} = \underline{I\#H}$, e portanto $(A\#H)/(\underline{I\#H}) \cong (A/I)\#H$ como tínhamos afirmado.

Uma das consequências desse isomorfismo é o seguinte resultado.

Proposição 2.1.3. *Se o H -módulo álgebra parcial A é um produto subdireto de H -módulos álgebra parciais $A_\alpha \cong A/I_\alpha$, onde $\{I_\alpha\}$ é uma família de ideais H -estáveis de A tal que $\bigcap I_\alpha = 0$, então $R := \underline{A\#H}$ é (isomorfo a) o produto subdireto das álgebras $R_\alpha := \underline{A_\alpha\#H}$.*

Demonstração. Conforme observado acima, para cada α temos um isomorfismo natural $R/(\underline{I_\alpha\#H}) \cong R_\alpha$. Pela Proposição 1.1.22, basta então provar que $\bigcap (\underline{I_\alpha\#H}) = 0$. Mas como

$$\underline{I_\alpha\#H} \subseteq \sum I_\alpha(H \cdot 1_A)\#H \subseteq I_\alpha\#H$$

para todo α , é suficiente demonstrar que $\bigcap (I_\alpha\#H) = 0$.

Para isso tomemos $u \in \bigcap (I_\alpha\#H) \subseteq A\#H$ e escrevamos $u = \sum x_i\#h_i$, com $\{x_i\} \subseteq A$ e $\{h_i\} \subseteq H$. Podemos supor que $\{h_i\}$ é linearmente independente, o que implica $x_i \in I_\alpha$ para todo i e todo α . Então, cada $x_i \in \bigcap I_\alpha = 0$ e portanto $u = 0$. Logo $\bigcap (I_\alpha\#H) = 0$. \square

Conforme veremos no Capítulo 4, esta proposição será útil no estudo da semiprimitividade do produto smash parcial pelo fato do produto subdireto de álgebras semiprimitivas ser semiprimitiva.

Dado um subespaço vetorial $X \subseteq A$, denotaremos

$$(X : H) = \{x \in X ; h \cdot x \in X, \forall h \in H\}.$$

Proposição 2.1.4. *Seja I um ideal de A . Então $(I : H)$ é o maior ideal H -estável de A contido em I . Em particular, I é H -estável se e somente se $(I : H) = I$.*

Demonstração. Para quaisquer $x \in (I : H)$, $a \in A$ e $h \in H$ temos

$$h \cdot (ax) = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot x) \in AI \subseteq I$$

e

$$h \cdot (xa) = \sum (h_1 \cdot x)(h_2 \cdot a) \in IA \subseteq I$$

portanto $ax, xa \in (I : H)$. Isso mostra que $(I : H)$ é um ideal. Para obter a H -estabilidade de $(I : H)$, consideremos $x \in (I : H)$ e $g \in H$. Então, para qualquer $h \in H$,

$$h \cdot (g \cdot x) = \sum (h_1 \cdot 1_A)((h_2 g) \cdot x) \in AI \subseteq I,$$

portanto $g \cdot x \in (I : H)$. Como x e g são arbitrários, segue que $H \cdot (I : H) \subseteq (I : H)$, ou seja, $(I : H)$ é H -estável.

Suponhamos agora que J é um ideal H -estável contido em I . Então $H \cdot J \subseteq J \subseteq I$, o que implica $J \subseteq (I : H)$. Logo $(I : H)$ é o maior ideal H -estável contido em I . \square

Se I é um ideal à esquerda, a mesma demonstração dada acima (ou parte dela) serve para concluir que, também nesse caso, $(I : H)$ é o maior ideal à esquerda H -estável contido em I . Porém, se I é ideal à direita mas não à esquerda, então a demonstração acima serve apenas para concluir que $(I : H)$ é um ideal à direita (contido em I), mas não podemos garantir a H -estabilidade de $(I : H)$ pela igualdade $h \cdot (g \cdot x) = \sum (h_1 \cdot 1_A)((h_2 g) \cdot x)$. No entanto, vale ressaltar que se I é um ideal à direita, sempre existe o maior ideal à direita H -estável contido em I (pois soma de ideais à direita H -estáveis ainda é ideal à direita H -estável). Tal ideal, evidentemente, deve estar contido em $(I : H)$.

Em alguns trabalhos, como por exemplo em [2], os autores assumem a seguinte “condição de simetria”:

$$h \cdot (g \cdot a) = \sum ((h_1 g) \cdot a)(h_2 \cdot 1_A), \quad \forall a \in A, \quad \forall h, g \in H.$$

Nesse caso, seguindo passos análogos aos da demonstração da Proposição 2.1.4, vê-se facilmente que, se I é um ideal à direita de A , então $(I : H)$ é o maior ideal à direita H -estável de A contido em I .

Proposição 2.1.5. *Se \mathcal{I} é um ideal de $\underline{A\#H}$, então $\mathcal{I} \cap A$ é um ideal H -estável de A .*

Demonstração. O fato de $\mathcal{I} \cap A$ ser um ideal de A segue imediatamente do fato de \mathcal{I} ser ideal de $\underline{A\#H}$ e $A \cong \underline{A\#1_H}$ ser uma subálgebra de $\underline{A\#H}$. Quanto a H -estabilidade,

observemos que, para quaisquer $x \in \mathcal{I} \cap A$ e $h \in H$, temos

$$\begin{aligned} \underline{h \cdot x \# 1_H} &= \sum h_1 \cdot x \# \varepsilon(h_2) 1_H \\ &= \sum (h_1 \cdot x)(h_2 \cdot 1_A) \# h_3 S(h_4) \\ &= \sum (h_1 \cdot x \# h_2)(1_A \# S(h_3)) \\ &= \sum (\underline{1_A \# h_1})(\underline{x \# 1_H})(\underline{1_A \# S(h_2)}) \in \mathcal{I}, \end{aligned}$$

portanto, $h \cdot x \in \mathcal{I} \cap A$. Logo $\mathcal{I} \cap A$ é ideal H -estável de A . \square

Demonstramos agora o principal resultado dessa seção. Ele generaliza, para o caso de ações parciais, um resultado já conhecido sobre ações globais (isso segue de [24, Lemma 1.3], pois se a ação de H em A é global, então a extensão $A \subseteq A \# H$ é H -Galois fielmente plana). Lembremos da Seção 1.2, que a estrutura de H -comódulo álgebra (coaçoão global) de $\underline{A \# H}$ é dada por

$$\begin{aligned} \underline{A \# H} &\rightarrow \underline{A \# H} \otimes H \\ \underline{a \# h} &\mapsto \underline{a \# h_1} \otimes h_2. \end{aligned}$$

Teorema 2.1.6. *Sejam H uma álgebra de Hopf e A um H -módulo álgebra parcial. Existem bijeções*

$$\{\text{Ideais } H\text{-estáveis de } A\} \xrightleftharpoons[\Psi]{\Phi} \{\text{Ideais de } \underline{A \# H} \text{ que são } H\text{-subcomódulos}\}$$

dadas por $\Phi(I) = \underline{I \# H}$ e $\Psi(\mathcal{I}) = \mathcal{I} \cap A$, tais que $\Psi = \Phi^{-1}$. Estas funções preservam inclusão, soma, produto (finito) e interseção.

Demonstração. Denotaremos $R = \underline{A \# H}$. Sejam I um ideal H -estável de A e \mathcal{I} um ideal de R que é um H -subcomódulo. Para quaisquer $a, b \in A$, $x \in I$ e $h, g, k \in H$, temos

$$(\underline{a \# h})(\underline{x \# g})(\underline{b \# k}) = \sum a(h_1 \cdot x)((h_2 g_1) \cdot b) \# h_3 g_2 k \in \underline{(A(H \cdot I)A) \# H} \subseteq \underline{I \# H}.$$

Assim, $R(\underline{I \# H})R \subseteq \underline{I \# H}$, donde $\underline{I \# H}$ é ideal de R . Além disso, é claro que $\underline{I \# H}$ é H -subcomódulo de R , portanto Φ está bem definida. Por outro lado, $\mathcal{I} \cap A$ é um ideal H -estável de A pela Proposição 2.1.5. Assim, Ψ também está bem definida.

Provemos que $I = \underline{I \# H} \cap A = \Psi(\Phi(I))$. A inclusão $I \subseteq \underline{I \# H} \cap A$ é evidente. Para ver que $\underline{I \# H} \cap A \subseteq I$, fixemos uma base $\{h_i\}$ de H que contenha 1_H , e tomemos

arbitrariamente um elemento

$$u \in \underline{I\#H} \cap A \subseteq (I\#H) \cap A \subseteq A\#H.$$

Então u se escreve de maneira única como $u = \sum_i x_i \# h_i$, com $\{x_i\} \subseteq A$. O fato de $\{h_i\}$ ser uma base de H implica que $\{x_i\} \subseteq I$, e o fato de 1_H pertencer a essa base e $u \in A = A\#1_H$, implica que $x_i = 0$ se $h_i \neq 1_H$. Portanto $u \in I$.

Agora provemos que $\mathcal{I} = \underline{(\mathcal{I} \cap A)\#H} = \Phi(\Psi(\mathcal{I}))$. A inclusão $\underline{(\mathcal{I} \cap A)\#H} \subseteq \mathcal{I}$ é trivial. Por outro lado, para $\sum_i \underline{x_i \# h_i} \in \mathcal{I}$, temos

$$\sum_i \underline{x_i \# h_i} = \sum_i \sum_{(h_i)} \sum_{(h_{i1})} (x_i \# h_{i11}) (\underline{1_A \# S(h_{i12})}) (\underline{1_A \# h_{i2}}).$$

Como \mathcal{I} é um H -subcomódulo de R , temos

$$\sum_i \sum_{(h_i)} \sum_{(h_{i1})} \underline{x_i \# h_{i11}} \otimes h_{i12} \otimes h_{i2} \in \mathcal{I} \otimes H \otimes H$$

assim, podemos assumir que $\sum_i \underline{x_i \# h_{i11}} \in \mathcal{I}$, donde segue que

$$\sum_i \underline{x_i (h_{i1} \cdot 1_A) \# 1_H} = \sum_i \sum_{(h_{i1})} (x_i \# h_{i11}) (\underline{1_A \# S(h_{i12})}) \in \mathcal{I} \cap A$$

e portanto

$$\sum_i \underline{x_i \# h_i} = \sum_i \sum_{(h_i)} \underline{x_i (h_{i1} \cdot 1_A) \# 1_H} (\underline{1_A \# h_{i2}}) \in (\mathcal{I} \cap A) (\underline{A\#H}) \subseteq \underline{(\mathcal{I} \cap A)\#H}.$$

Isso mostra que Φ e Ψ são inversa uma da outra. Provemos agora que ambas preservam inclusão, soma, produto (finito) e interseção. Notemos que soma, produto e interseção de ideais H -estáveis de A (resp. H -subcomódulos de $\underline{A\#H}$) é ideal H -estável (resp. H -subcomódulo). A respeito da inclusão, a afirmação é clara da própria definição de Φ e Ψ . Quanto a soma, produto e interseção, fixemos uma família $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de ideais H -estáveis de A e uma família $\{\mathcal{I}_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$ de ideais de $\underline{A\#H}$ que são H -subcomódulos.

A igualdade

$$\Phi \left(\sum I_\alpha \right) = \underline{(\sum I_\alpha)\#H} = \sum \underline{I_\alpha \# H} = \sum \Phi(I_\alpha)$$

é evidente. Como consequência, temos também

$$\Psi \left(\sum \mathcal{I}_\beta \right) = \Psi \left(\sum \Phi(\Psi(\mathcal{I}_\beta)) \right) = \Psi \left(\Phi \left(\sum \Psi(\mathcal{I}_\beta) \right) \right) = \sum \Psi(\mathcal{I}_\beta).$$

Logo Φ e Ψ preservam somas.

Quanto ao produto, observemos primeiro que, se I é um ideal H -estável de A , então $\underline{I\#H} = IR$ (em particular, IR é ideal de R). Isso segue imediatamente do fato de que, para quaisquer $a \in A$, $x \in I$ e $h \in H$,

$$(\underline{x\#1_H})(\underline{a\#h}) = \underline{xa\#h} \in \underline{IA\#H} = \underline{I\#H}$$

e

$$\underline{x\#h} = (\underline{x\#1_H})(\underline{1_A\#h}) \in IR.$$

Assim, fixados $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$, temos

$$\begin{aligned} \Phi(I_{\alpha_1}I_{\alpha_2}) &= \underline{(I_{\alpha_1}I_{\alpha_2})\#H} = (I_{\alpha_1}I_{\alpha_2})R = I_{\alpha_1}(I_{\alpha_2}R) = I_{\alpha_1}(RI_{\alpha_2}R) \\ &= (I_{\alpha_1}R)(I_{\alpha_2}R) = \underline{(I_{\alpha_1}\#H)(I_{\alpha_2}\#H)} = \Phi(I_{\alpha_1})\Phi(I_{\alpha_2}) \end{aligned}$$

(onde a quarta igualdade segue do fato de $I_{\alpha_2}R$ ser ideal de R). Com isso obtemos também que, para $\beta_1, \beta_2 \in \Gamma$,

$$\Psi(\mathcal{I}_{\beta_1}\mathcal{I}_{\beta_2}) = \Psi\left(\Phi(\Psi(\mathcal{I}_{\beta_1}))\Phi(\Psi(\mathcal{I}_{\beta_2}))\right) = \Psi\left(\Phi(\Psi(\mathcal{I}_{\beta_1})\Psi(\mathcal{I}_{\beta_2}))\right) = \Psi(\mathcal{I}_{\beta_1})\Psi(\mathcal{I}_{\beta_2}).$$

Claramente, por indução, esse resultado se estende ao produto de uma quantidade finita qualquer de ideais H -estáveis (resp. H -subcomódulos).

Finalmente mostremos que Φ e Ψ preservam interseção. Claramente

$$\Psi\left(\bigcap \mathcal{I}_{\beta}\right) = \left(\bigcap \mathcal{I}_{\beta}\right) \cap A = \bigcap (\mathcal{I}_{\beta} \cap A) = \bigcap \Psi(\mathcal{I}_{\beta}),$$

e disso segue que

$$\Phi\left(\bigcap I_{\alpha}\right) = \Phi\left(\bigcap \Psi(\Phi(I_{\alpha}))\right) = \Phi\left(\Psi\left(\bigcap \Phi(I_{\alpha})\right)\right) = \bigcap \Phi(I_{\alpha}).$$

Isso completa a demonstração. \square

Pelo Corolário 1.1.12, se H tem dimensão finita, um subespaço vetorial de $\underline{A\#H}$ é um H -subcomódulo se e somente é um H^* -submódulo. Como a ação de H^* em $\underline{A\#H}$ é uma ação global, segue imediatamente da observação feita após a Definição 2.1.1 o seguinte resultado.

Corolário 2.1.7. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A um H -módulo álgebra parcial. Existem bijeções*

$$\{\text{Ideais } H\text{-estáveis de } A\} \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \{\text{Ideais } H^*\text{-estáveis de } \underline{A\#H}\}$$

dadas por $\Phi(I) = \underline{I\#H}$ e $\Psi(\mathcal{I}) = \mathcal{I} \cap A$, tais que $\Psi = \Phi^{-1}$. Estas funções preservam inclusão, soma, produto (finito) e interseção.

2.2 (A, H) -módulos parciais

Como na seção anterior, H denotará uma álgebra de Hopf sobre um corpo \mathbb{k} e A um H -módulo álgebra parcial. Nesta seção apresentamos o conceito de (A, H) -módulo parcial. Este conceito é, num certo sentido, uma generalização do conceito de A -módulo (ver Exemplo 2.2.2) e permite entender um pouco melhor a relação entre A e $\underline{A\#H}$ como veremos mais adiante. A Definição 2.2.1, assim como a Proposição 2.2.4, nos foram apresentados por A. Paques e A. Sant'Ana (comunicação oral).

Definição 2.2.1. *Seja M um A -módulo à direita (resp. à esquerda). Dizemos que M é um (A, H) -módulo parcial à direita (resp. à esquerda), se existe uma aplicação \mathbb{k} -linear $M \otimes H \rightarrow M$, dada por $m \otimes h \mapsto m \blacktriangleleft h$ (resp. $H \otimes M \rightarrow M$, dada por $h \otimes m \mapsto h \blacktriangleright m$), que satisfaz as seguintes condições:*

- (i) $m \blacktriangleleft 1_H = m$ (resp. $1_H \blacktriangleright m = m$)
- (ii) $((m \blacktriangleleft h)a) \blacktriangleleft g = \sum(m(h_1 \cdot a)) \blacktriangleleft (h_2g)$ (resp. $h \blacktriangleright (a(g \blacktriangleright m)) = \sum(h_1 \cdot a)((h_2g) \blacktriangleright m)$).

para quaisquer $m \in M$, $a \in A$ e $h, g \in H$.

Claramente vale a propriedade (ii) se e somente se valem (a) e (b) abaixo:

- (a) $(m \blacktriangleleft h)a = \sum(m(h_1 \cdot a)) \blacktriangleleft h_2$ (resp. $h \blacktriangleright (am) = \sum(h_1 \cdot a)(h_2 \blacktriangleright m)$)
- (b) $(m \blacktriangleleft h) \blacktriangleleft g = \sum(m(h_1 \cdot 1_A)) \blacktriangleleft (h_2g)$ (resp. $h \blacktriangleright (g \blacktriangleright m) = \sum(h_1 \cdot 1_A)((h_2g) \blacktriangleright m)$).

para quaisquer $m \in M$, $a \in A$ e $h, g \in H$.

A Proposição 2.2.4 justifica nosso interesse nessas estruturas.

Exemplo 2.2.2. *Seja A uma \mathbb{k} -álgebra e seja $H = \mathbb{k}$. Já mencionamos no Exemplo 1.2.7 que A é um H -módulo álgebra. Claramente, todos os A -módulos (à direita ou à esquerda) são (A, H) -módulos parciais. Assim, o conceito de (A, H) -módulo parcial é, de certa forma, uma generalização do conceito de módulo sobre uma álgebra qualquer.*

Se A é um H -módulo álgebra parcial, então o próprio A é um (A, H) -módulo parcial à esquerda. Mais geralmente, se I é um ideal à esquerda H -estável de A , então I e A/I são (A, H) -módulos parciais à esquerda. A Proposição 2.2.4 fornece exemplos de (A, H) -módulos parciais à direita. Também, na Seção 3.2 veremos como podemos construir (A, H) -módulos parciais à direita a partir de um A -módulo à direita dado.

Como de costume, se M é um A -módulo (em particular, um (A, H) -módulo parcial), denotaremos por $(0 : M)_A$, ou simplesmente $(0 : M)$, o anulador de M em A . Ou seja,

$$(0 : M) = \{a \in A ; Ma = 0\} \quad (\text{resp. } (0 : M) = \{a \in A ; aM = 0\})$$

para M um A -módulo à direita (resp. à esquerda). Quando $(0 : M) = 0$ diremos que M é fiel.

Proposição 2.2.3. *Se M é um (A, H) -módulo parcial (à direita ou à esquerda), então $(0 : M)$ é um ideal H -estável de A .*

Demonstração. Já sabemos da teoria de módulos que $(0 : M)$ é um ideal de A . Provemos que $(0 : M)$ é H -estável. Para quaisquer $m \in M$, $x \in (0 : M)$ e $h \in H$, temos

$$\begin{aligned} m(h \cdot x) &= \sum (m(h_1 \cdot x)) \blacktriangleleft (\varepsilon(h_2)1_H) \\ &= \sum (m(h_1 \cdot x)) \blacktriangleleft (h_2 S(h_3)) \\ &= \sum ((m \blacktriangleleft h_1)x) \blacktriangleleft S(h_2) \in (Mx) \blacktriangleleft H = 0 \end{aligned}$$

se M é (A, H) -módulo parcial à direita e

$$\begin{aligned} (h \cdot x)m &= \sum (h_1 \cdot x)((\varepsilon(h_2)1_H) \blacktriangleright m) \\ &= \sum (h_1 \cdot x)((h_2 S(h_3)) \blacktriangleright m) \\ &= \sum h_1 \blacktriangleright (x(S(h_2) \blacktriangleright m)) \in H \blacktriangleright (xM) = 0 \end{aligned}$$

se M é (A, H) -módulo parcial à esquerda. Logo $H \cdot (0 : M) \subseteq (0 : M)$, e portanto $(0 : M)$ é H -estável. \square

Sejam M um (A, H) -módulo parcial à direita (resp. à esquerda) e $I \subseteq A$ um ideal H -estável tal que $I \subseteq (0 : M)$. Então M tem uma estrutura natural de $(A/I, H)$ -módulo parcial à direita (resp. à esquerda).

A próxima proposição demonstra que todo (A, H) -módulo parcial tem uma estrutura natural de $\underline{A\#H}$ -módulo e, reciprocamente, todo $\underline{A\#H}$ -módulo tem uma estrutura

natural de (A, H) -módulo parcial.

Proposição 2.2.4. *Se M é um (A, H) -módulo parcial à direita (resp. à esquerda) então M é um $\underline{A\#H}$ -módulo à direita (resp. à esquerda), com ação dada por*

$$m(\underline{a\#h}) := (ma) \blacktriangleleft h \quad (\text{resp. } (\underline{a\#h})m := a(h \blacktriangleright m))$$

para $m \in M$, $a \in A$ e $h \in H$. Reciprocamente, se M é um $\underline{A\#H}$ -módulo à direita (resp. à esquerda) então M é um (A, H) -módulo parcial à direita (resp. à esquerda) com ações dadas por

$$\begin{aligned} ma &:= m(\underline{a\#1_H}) & (\text{resp. } am &:= (\underline{a\#1_H})m) \\ m \blacktriangleleft h &:= m(\underline{1_A\#h}) & (\text{resp. } h \blacktriangleright m &:= (\underline{1_A\#h})m) \end{aligned}$$

para $m \in M$, $a \in A$ e $h \in H$. Em qualquer caso tem-se

$$(0 : M)_A = (0 : M)_{\underline{A\#H}} \cap A.$$

Demonstração. Suponhamos que M é um (A, H) -módulo parcial à direita. Observamos primeiro que a aplicação

$$\begin{aligned} \zeta : M \otimes \underline{A\#H} &\rightarrow M \\ m \otimes \underline{a\#h} &\mapsto (ma) \blacktriangleleft h \end{aligned}$$

está bem definida (e é \mathbb{k} -linear). De fato, a regra $m \otimes \underline{a\#h} \mapsto (ma) \blacktriangleleft h$ é exatamente a composta das aplicações \mathbb{k} -lineares

$$\kappa : M \otimes \underline{A\#H} \cong M \otimes A \otimes H \xrightarrow{\varsigma \otimes id_H} M \otimes H \xrightarrow{\xi} M$$

onde ς e ξ são as ações de A e H em M , respectivamente. Assim, κ é uma aplicação \mathbb{k} -linear bem definida. Considerando a restrição de κ ao subespaço $M \otimes \underline{A\#H}$, temos

$$\kappa(m \otimes \underline{a\#h}) = \kappa(m \otimes \sum a(h_1 \cdot 1_A) \# h_2) = \sum (ma(h_1 \cdot 1_A)) \blacktriangleleft h_2 = ((ma) \blacktriangleleft h) 1_A = (ma) \blacktriangleleft h,$$

para quaisquer $m \in M$, $a \in A$ e $h \in H$. Assim, ζ é a restrição de κ ao subespaço $M \otimes \underline{A\#H}$, e portanto é uma aplicação \mathbb{k} -linear bem definida.

Provemos agora que ζ define uma estrutura de $\underline{A\#H}$ -módulo à direita em M . De fato, para quaisquer $m \in M$, $a, b \in A$ e $h, g \in H$, temos

$$m(\underline{1_A\#1_H}) = (m1_A) \blacktriangleleft 1_H = m$$

e

$$\begin{aligned}
(m(\underline{a\#h}))(\underline{b\#g}) &= (((ma) \blacktriangleleft h)b) \blacktriangleleft g \\
&= \sum (ma(h_1 \cdot b)) \blacktriangleleft (h_2g) \\
&= m\left(\sum \underline{a(h_1 \cdot b)\#h_2g}\right) \\
&= m((\underline{a\#h})(\underline{b\#g})).
\end{aligned}$$

Logo M é um $\underline{A\#H}$ -módulo à direita.

Suponhamos agora que M é $\underline{A\#H}$ -módulo à direita. Também nesse caso temos que mostrar que as aplicações

$$\begin{aligned}
M \otimes A &\rightarrow M \\
m \otimes a &\mapsto m(\underline{a\#1_H})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
M \otimes H &\rightarrow M \\
m \otimes h &\mapsto m(\underline{1_A\#h})
\end{aligned}$$

estão bem definidas (e são \mathbb{k} -lineares). A primeira delas é trivial via identificação de A com a subálgebra $\underline{A\#1_H} \subseteq \underline{A\#H}$. Em particular, tal aplicação define uma estrutura de A -módulo à direita em M . Já a segunda é a composta das aplicações

$$\begin{aligned}
M \otimes H &\longrightarrow M \otimes A \otimes H \xrightarrow{id_M \otimes \pi} M \otimes \underline{A\#H} \xrightarrow{\zeta} M \\
m \otimes h &\mapsto m \otimes 1_A \otimes h
\end{aligned}$$

onde $\pi : A \otimes H \rightarrow \underline{A\#H}$ é a projeção canônica $\pi(a \otimes h) = (a\#h)(1_A\#1_H) = \underline{a\#h}$ e ζ é a ação de $\underline{A\#H}$ em M . As propriedades (i) e (ii) da Definição 2.2.1 seguem facilmente do fato de M ser um $\underline{A\#H}$ -módulo:

$$m \blacktriangleleft 1_H = m(\underline{1_A\#1_H}) = m$$

e

$$\begin{aligned}
((m \blacktriangleleft h)a) \blacktriangleleft g &= \left((m(\underline{1_A\#h}))(\underline{a\#1_H}) \right) (\underline{1_A\#g}) \\
&= m((\underline{1_A\#h})(\underline{a\#1_H})(\underline{1_A\#g})) \\
&= m\left(\sum \underline{h_1 \cdot a\#h_2g}\right) \\
&= \sum (m(h_1 \cdot a)) \blacktriangleleft (h_2g)
\end{aligned}$$

para quaisquer $m \in M$, $a \in A$ e $h, g \in H$. Logo M é um (A, H) -módulo parcial à direita.

Analogamente, se M é um (A, H) -módulo parcial à esquerda, então a aplicação

$$\begin{aligned} \underline{A\#H} \otimes M &\rightarrow M \\ \underline{a\#h} \otimes m &\mapsto a(h \blacktriangleright m) \end{aligned}$$

define uma estrutura de $\underline{A\#H}$ -módulo à esquerda em M : para quaisquer $m \in M$, $a, b \in A$ e $h, g \in H$

$$(\underline{1_A\#1_H})m = 1_A(1_H \blacktriangleright m) = m$$

e

$$\begin{aligned} (\underline{a\#h})((\underline{b\#g})m) &= a(h \blacktriangleright (b(g \blacktriangleright m))) \\ &= \sum a(h \cdot b)((h_2g) \blacktriangleright m) \\ &= \left(\sum \underline{a(h_1 \cdot b)\#h_2g} \right) m \\ &= ((\underline{a\#h})(\underline{b\#g}))m. \end{aligned}$$

Também, se M é $\underline{A\#H}$ -módulo à esquerda, então as aplicações

$$\begin{aligned} A \otimes M &\rightarrow M \\ a \otimes m &\mapsto (\underline{a\#1_H})m \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} H \otimes M &\rightarrow M \\ h \otimes m &\mapsto (\underline{1_A\#h})m \end{aligned}$$

definem uma estrutura de (A, H) -módulo parcial à esquerda: para quaisquer $m \in M$, $a, b \in A$ e $h, g \in H$

$$1_A m = 1_H \blacktriangleright m = (\underline{1_A\#1_H})m = m,$$

$$a(bm) = (\underline{a\#1_H})((\underline{b\#1_H})m) = ((\underline{a\#1_H})(\underline{b\#1_H}))m = (\underline{ab\#1_H})m = (ab)m,$$

e

$$\begin{aligned} h \blacktriangleright (a(g \blacktriangleright m)) &= (\underline{1_A\#h}) \left((\underline{a\#1_H})((\underline{1_A\#g})m) \right) \\ &= ((\underline{1_A\#h})(\underline{a\#1_H})(\underline{1_A\#g}))m \\ &= \left(\sum \underline{h_1 \cdot a\#h_2g} \right) m \\ &= (h_1 \cdot a)((h_2g) \blacktriangleright m). \end{aligned}$$

A igualdade $(0 : M)_A = (0 : M)_{\underline{A\#H}} \cap A$ é trivial. \square

Notemos que a Proposição 2.2.3 é também consequência da Proposição 2.1.5 e da igualdade $(0 : M)_A = (0 : M)_{\underline{A\#H}} \cap A$.

3 *O H -radical primo e o H -radical de Jacobson*

Sejam H uma álgebra de Hopf sobre um corpo \mathbb{k} e A um H -módulo álgebra parcial. Estudamos neste capítulo os conceitos de H -radical primo e H -radical de Jacobson de A . Estes conceitos são análogos aos conceitos de radical primo e radical de Jacobson de uma álgebra qualquer, e servem algumas vezes para obter propriedades do produto smash parcial, como veremos no Capítulo 4. Nosso principal objetivo neste capítulo é estabelecer relações entre o H -radical primo de A e o H^* -radical primo de $\underline{A\#H}$ e relações entre o H -radical de Jacobson de A e o H^* -radical de Jacobson de $\underline{A\#H}$, quando H tem dimensão finita.

Seguindo a notação do capítulo anterior, em todo este capítulo H denotará uma álgebra de Hopf sobre um corpo \mathbb{k} e A um H -módulo álgebra parcial.

3.1 Ideais H -primos, ideais H -semiprimos e o H -radical primo

Em [24] podemos encontrar as definições de ideal H -primo e ideal H -semiprimo de um H -módulo álgebra A . Tal definição pode ser considerada também quando a ação de H em A é parcial. Nesta seção estudamos estes conceitos e, a partir deles, definimos o H -radical primo de A . Nosso objetivo é obter uma relação entre o H -radical primo de A e o H^* -radical primo de $\underline{A\#H}$, quando H tem dimensão finita. Para isso, estabelecemos alguns resultados sobre ideais H -primos e ideais H -semiprimos, análogos aos resultados de [16], Seção 10.1, páginas 165 a 169, sobre ideais primos e ideais semiprimos. Em particular assumiremos familiaridade com os conceitos de m -sistema e n -sistema.

Começamos com a definição de ideal H -primo.

Definição 3.1.1. *Um ideal H -estável $\mathfrak{p} \subseteq A$ é chamado H -primo se $\mathfrak{p} \neq A$ e, para*

quaisquer ideais H -estáveis $I, J \subseteq A$,

$$IJ \subseteq \mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad I \subseteq \mathfrak{p} \quad \text{ou} \quad J \subseteq \mathfrak{p}.$$

Um exemplo de ideal H -primo é um ideal H -estável maximal $\mathfrak{m} \subsetneq A$ (cuja existência é assegurada pelo Lema de Zorn). De fato, se I e J são ideais H -estáveis que não estão contidos em \mathfrak{m} , então a maximalidade de \mathfrak{m} implica que $\mathfrak{m} + I = A = \mathfrak{m} + J$. Daí

$$A = (\mathfrak{m} + I)(\mathfrak{m} + J) \subseteq \mathfrak{m} + IJ,$$

e portanto $IJ \not\subseteq \mathfrak{m}$.

Proposição 3.1.2. *Para um ideal H -estável $\mathfrak{p} \subsetneq A$, são equivalentes:*

(1) \mathfrak{p} é H -primo;

(2) Para quaisquer $a, b \in A$,

$$A(H \cdot a)A(H \cdot b)A \subseteq \mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad a \in \mathfrak{p} \quad \text{ou} \quad b \in \mathfrak{p};$$

(3) Para quaisquer $a, b \in A$,

$$A(H \cdot a)A(H \cdot b) \subseteq \mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad a \in \mathfrak{p} \quad \text{ou} \quad b \in \mathfrak{p};$$

(4) Para quaisquer $a, b \in A$,

$$(H \cdot a)A(H \cdot b) \subseteq \mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad a \in \mathfrak{p} \quad \text{ou} \quad b \in \mathfrak{p};$$

(5) Para quaisquer ideais à esquerda H -estáveis $I, J \subseteq A$

$$IJ \subseteq \mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad I \subseteq \mathfrak{p} \quad \text{ou} \quad J \subseteq \mathfrak{p};$$

(5') Para quaisquer ideais à direita H -estáveis $I, J \subseteq A$

$$IJ \subseteq \mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad I \subseteq \mathfrak{p} \quad \text{ou} \quad J \subseteq \mathfrak{p}.$$

Demonstração. (1) \Rightarrow (2) Claramente os ideais $I := A(H \cdot a)A$ e $J := A(H \cdot b)A$ são H -estáveis. Como \mathfrak{p} é H -primo,

$$IJ = A(H \cdot a)A(H \cdot b)A \subseteq \mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad a \in I \subseteq \mathfrak{p} \quad \text{ou} \quad b \in J \subseteq \mathfrak{p}.$$

As implicações (2) \Rightarrow (3) e (3) \Rightarrow (4) são claras, das inclusões $(H \cdot a)A(H \cdot b) \subseteq A(H \cdot a)A(H \cdot b) \subseteq A(H \cdot a)A(H \cdot b)A$.

Provemos agora que (4) \Rightarrow (5). Para isso, sejam $I, J \subseteq A$ ideais à esquerda H -estáveis tais que $IJ \subseteq \mathfrak{p}$. Se $I \not\subseteq \mathfrak{p}$, fixemos $a \in I \setminus \mathfrak{p}$. Então, para todo $b \in J$, temos

$$(H \cdot a)A(H \cdot b) \subseteq I(AJ) \subseteq IJ \subseteq \mathfrak{p}.$$

Como $a \notin \mathfrak{p}$, a condição (4) implica que $b \in \mathfrak{p}$, para todo $b \in J$, ou seja, $J \subseteq \mathfrak{p}$. A implicação (4) \Rightarrow (5') é análoga, e as implicações (5) \Rightarrow (1) e (5') \Rightarrow (1) são triviais. \square

Chamaremos um subconjunto $\mathcal{M} \subseteq A$ de Hm -sistema, se $\mathcal{M} \neq \emptyset$ e, para quaisquer $a, b \in \mathcal{M}$, tem-se

$$A(H \cdot a)A(H \cdot b) \cap \mathcal{M} \neq \emptyset.$$

Observamos que em [26] o autor usa a nomenclatura H - m -sequência para ações globais, mas com significado levemente diferente. A nossa escolha da nomenclatura está baseada em [16].

A partir dessa definição podemos acrescentar outra caracterização de ideal H -primo, a qual segue imediatamente da condição (3) da Proposição 3.1.2.

Proposição 3.1.3. *Um ideal H -estável $\mathfrak{p} \subseteq A$ é H -primo se e somente se $A \setminus \mathfrak{p}$ é um Hm -sistema.*

Vale ainda uma espécie de “recíproca” desta proposição.

Proposição 3.1.4. *Seja $\mathcal{M} \subseteq A$ um Hm -sistema. Se $\mathfrak{p} \subseteq A$ é um ideal H -estável maximal com respeito a propriedade $\mathfrak{p} \cap \mathcal{M} = \emptyset$, então \mathfrak{p} é H -primo.*

Demonstração. Sejam $a, b \in A \setminus \mathfrak{p}$, e sejam $I := A(H \cdot a)A$ e $J := A(H \cdot b)A$. Como $\mathfrak{p} + I$ e $\mathfrak{p} + J$ são ideais H -estáveis, segue da maximalidade de \mathfrak{p} , que existem $x, y \in A$, tais que

$$x \in \mathcal{M} \cap (\mathfrak{p} + I) \quad \text{e} \quad y \in \mathcal{M} \cap (\mathfrak{p} + J).$$

Sendo \mathcal{M} um Hm -sistema, existem $c_i, d_i \in A$ e $h_i, g_i \in H$, $i = 1, \dots, n$, tais que

$$\sum_{i=1}^n c_i(h_i \cdot x)d_i(g_i \cdot y) \in \mathcal{M}.$$

Por outro lado, temos também

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i(h_i \cdot x)d_i(g_i \cdot y) &\in A(H \cdot (\mathfrak{p} + I))A(H \cdot (\mathfrak{p} + J)) \\ &\subseteq (\mathfrak{p} + I)(\mathfrak{p} + J) \\ &\subseteq \mathfrak{p} + IJ \end{aligned}$$

Como $\sum c_i(h_i \cdot x)d_i(g_i \cdot y) \notin \mathfrak{p}$ (pois $\mathfrak{p} \cap \mathcal{M} = \emptyset$) segue que

$$A(H \cdot a)A(H \cdot b)A = IJ \not\subseteq \mathfrak{p}.$$

Pelo item (2) da Proposição 3.1.2, segue que \mathfrak{p} é H -primo. \square

Definimos agora o H -radical de um ideal H -estável.

Definição 3.1.5. *Seja $I \subsetneq A$ um ideal H -estável. Chamaremos H -radical de I o conjunto*

$$\sqrt[H]{I} := \{x \in A; \text{ todo } Hm\text{-sistema que contém } x \text{ intersecta } I\}.$$

No caso particular em que $I = 0$, chamaremos $P_H(A) := \sqrt[H]{0}$ de H -radical primo de A .

Claramente $I \subseteq \sqrt[H]{I}$, para todo ideal H -estável $I \subsetneq A$. O que não fica claro da Definição 3.1.5, é que $\sqrt[H]{I}$ é também um ideal H -estável de A . Isso segue da seguinte proposição.

Proposição 3.1.6. *Seja $I \subsetneq A$ um ideal H -estável. Então $\sqrt[H]{I}$ é a interseção de todos os ideais H -primos de A que contêm I . Em particular $\sqrt[H]{I}$ é um ideal H -estável de A .*

Demonstração. Se $\mathfrak{p} \subseteq A$ um ideal H -primo que contém I , então o conjunto $A \setminus \mathfrak{p}$ é um Hm -sistema (Proposição 3.1.3) que não intersecta I . Daí

$$x \in \sqrt[H]{I} \Rightarrow x \notin A \setminus \mathfrak{p} \Rightarrow x \in \mathfrak{p}.$$

Logo, $\sqrt[H]{I}$ está contido na interseção de todos os ideais H -primos que contêm I .

Por outro lado, se $x \notin \sqrt[H]{I}$, então existe um Hm -sistema $\mathcal{M} \subseteq A$ tal que $x \in \mathcal{M}$ e $\mathcal{M} \cap I = \emptyset$. Pelo Lema de Zorn, existe um ideal H -estável $\mathfrak{p} \subseteq A$ contendo I , maximal com respeito a propriedade $\mathfrak{p} \cap \mathcal{M} = \emptyset$. Então \mathfrak{p} é um ideal H -primo (Proposição 3.1.4) que contém I mas que não contém x . Em particular, x não pertence a interseção dos ideais H -primos que contêm I . Logo, a interseção dos ideais H -primos que contêm I está contida em $\sqrt[H]{I}$. \square

Definimos agora ideal H -semiprimo.

Definição 3.1.7. Um ideal H -estável $\mathfrak{s} \subseteq A$ é chamado H -semiprimo se $\mathfrak{s} \neq A$ e, para qualquer ideal H -estável $I \subseteq A$,

$$I^2 \subseteq \mathfrak{s} \quad \Rightarrow \quad I \subseteq \mathfrak{s}.$$

Claramente todo ideal H -primo é H -semiprimo. Além disso, toda interseção de ideais H -semiprimos é H -semiprimo. Mostraremos agora que vale uma caracterização análoga a Proposição 3.1.2 para ideais H -semiprimos.

Proposição 3.1.8. Para um ideal H -estável $\mathfrak{s} \subsetneq A$, são equivalentes:

(1) \mathfrak{s} é H -semiprimo;

(2) Para qualquer $a \in A$,

$$A(H \cdot a)A(H \cdot a)A \subseteq \mathfrak{s} \quad \Rightarrow \quad a \in \mathfrak{s};$$

(3) Para qualquer $a \in A$,

$$A(H \cdot a)A(H \cdot a) \subseteq \mathfrak{s} \quad \Rightarrow \quad a \in \mathfrak{s};$$

(4) Para qualquer $a \in A$,

$$(H \cdot a)A(H \cdot a) \subseteq \mathfrak{s} \quad \Rightarrow \quad a \in \mathfrak{s};$$

(5) Para qualquer ideal à esquerda H -estável $I \subseteq A$

$$I^2 \subseteq \mathfrak{s} \quad \Rightarrow \quad I \subseteq \mathfrak{s};$$

(5') Para qualquer ideal à direita H -estável $I \subseteq A$

$$I^2 \subseteq \mathfrak{s} \quad \Rightarrow \quad I \subseteq \mathfrak{s}.$$

Demonstração. A demonstração desta proposição é análoga a demonstração da Proposição 3.1.2. (1) \Rightarrow (2) O ideal $I := A(H \cdot a)A$ é H -estável. Como \mathfrak{s} é H -semiprimo,

$$I^2 = A(H \cdot a)A(H \cdot a)A \subseteq \mathfrak{s} \quad \Rightarrow \quad a \in I \subseteq \mathfrak{s}.$$

As implicações (2) \Rightarrow (3) e (3) \Rightarrow (4) são claras, das inclusões $(H \cdot a)A(H \cdot a) \subseteq A(H \cdot a)A(H \cdot a) \subseteq A(H \cdot a)A(H \cdot a)A$.

Provemos agora que (4) \Rightarrow (5). Para isso, seja $I \subseteq A$ ideal à esquerda H -estável tal que $I^2 \subseteq \mathfrak{s}$. Para todo $a \in I$, temos

$$(H \cdot a)A(H \cdot a) \subseteq I(AI) \subseteq I^2 \subseteq \mathfrak{s}.$$

A condição (4) então implica que $a \in \mathfrak{s}$, para todo $a \in I$, ou seja, $I \subseteq \mathfrak{s}$. A implicação (4) \Rightarrow (5') é análoga, e as implicações (5) \Rightarrow (1) e (5') \Rightarrow (1) são triviais. \square

Chamaremos um subconjunto $\mathcal{N} \subseteq A$ de Hn -sistema, se $\mathcal{N} \neq \emptyset$ e, para qualquer $a \in \mathcal{N}$, tem-se

$$A(H \cdot a)A(H \cdot a) \cap \mathcal{N} \neq \emptyset.$$

De maneira análoga a caracterização de ideal H -primo a partir de Hm -sistemas, obtemos uma caracterização de ideal H -semiprimo a partir de Hn -sistemas. A proposição abaixo segue imediatamente da condição (3) da Proposição 3.1.8.

Proposição 3.1.9. *Um ideal H -estável $\mathfrak{s} \subseteq A$ é H -semiprimo se e somente se $A \setminus \mathfrak{s}$ é um Hn -sistema.*

Proposição 3.1.10. *Seja $\mathcal{N} \subseteq A$ um Hn -sistema e seja $\mathfrak{s} \subseteq A$ um ideal H -estável maximal com respeito a propriedade $\mathfrak{s} \cap \mathcal{N} = \emptyset$. Então \mathfrak{s} é H -semiprimo.*

Demonstração. Seja $a \in A \setminus \mathfrak{s}$ e seja $I := A(H \cdot a)A$. Como $\mathfrak{s} + I$ é ideal H -estável, segue da maximalidade de \mathfrak{s} , que existe $x \in A$, tal que

$$x \in \mathcal{N} \cap (\mathfrak{s} + I).$$

Sendo \mathcal{N} um Hn -sistema, existem $c_i, d_i \in A$ e $h_i, g_i \in H$, $i = 1, \dots, n$, tais que

$$\sum_{i=1}^n c_i(h_i \cdot x)d_i(g_i \cdot x) \in \mathcal{N}.$$

Por outro lado, temos também

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i(h_i \cdot x)d_i(g_i \cdot x) &\in A(H \cdot (\mathfrak{s} + I))A(H \cdot (\mathfrak{s} + I)) \\ &\subseteq (\mathfrak{s} + I)(\mathfrak{s} + I) \\ &\subseteq \mathfrak{s} + I^2 \end{aligned}$$

Como $\sum c_i(h_i \cdot x)d_i(g_i \cdot x) \notin \mathfrak{s}$ (pois $\mathfrak{s} \cap \mathcal{N} = \emptyset$) segue que

$$A(H \cdot a)A(H \cdot a)A = I^2 \not\subseteq \mathfrak{s}.$$

Pelo item (2) de 3.1.8, segue que \mathfrak{s} é H -semiprimo. \square

A seguinte proposição estabelece uma relação entre Hm -sistema e Hn -sistema.

Proposição 3.1.11. *Seja $\mathcal{N} \subseteq A$ um Hn -sistema. Então, para cada $a \in \mathcal{N}$, existe um Hm -sistema $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, tal que $a \in \mathcal{M}$. Em outras palavras, \mathcal{N} é igual a união dos Hm -sistemas contidos em \mathcal{N} .*

Demonstração. Seja $a \in \mathcal{N}$. Definimos $\mathcal{M} = \{a_1, a_2, \dots\}$ por indução. Tomamos $a_1 = a$. Agora, para $i \geq 1$, se $a_i \in \mathcal{N}$ então, existem $c_{i,l}, d_{i,l} \in A$ e $h_{i,l}, g_{i,l} \in H$, $l = 1, \dots, n_i$, tais que

$$a_{i+1} := \sum_{l=1}^{n_i} c_{i,l}(h_{i,l} \cdot a_i)d_{i,l}(g_{i,l} \cdot a_i) \in \mathcal{N}.$$

Provemos que \mathcal{M} é um Hm -sistema. Para isso, observemos primeiro que, para todo $t \geq 1$, temos

$$H \cdot a_{t+1} \subseteq H \cdot (A(H \cdot a_t)A(H \cdot a_t)) \subseteq A(H \cdot a_t),$$

o que implica

$$H \cdot a_{t'} \subseteq A(H \cdot a_t),$$

sempre que $t \leq t'$. Disso segue que, para quaisquer $i, j \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_{j+1} &\in A(H \cdot a_j)A(H \cdot a_j) \subseteq A(H \cdot a_i)A(H \cdot a_j) & \text{se } i \leq j \\ a_{i+1} &\in A(H \cdot a_i)A(H \cdot a_i) \subseteq A(H \cdot a_i)A(H \cdot a_j) & \text{se } i \geq j \end{aligned}$$

em particular,

$$A(H \cdot a_i)A(H \cdot a_j) \cap \mathcal{M} \neq \emptyset.$$

Logo, \mathcal{M} é um Hm -sistema, tal que $a \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. \square

Por meio desta relação entre Hm -sistemas e Hn -sistemas, obtemos que os ideais H -semiprimos de um H -módulo álgebra parcial são exatamente aqueles ideais H -estáveis que são H -radicais.

Proposição 3.1.12. *Para um ideal H -estável $\mathfrak{s} \subsetneq A$, são equivalentes:*

- (1) \mathfrak{s} é H -semiprimo;

(2) \mathfrak{s} é uma intersecção de ideais H -primos;

(3) $\mathfrak{s} = \sqrt[H]{\mathfrak{s}}$.

Demonstração. A implicação (3) \Rightarrow (2) é imediata da Proposição 3.1.6 e a implicação (2) \Rightarrow (1) é imediata das definições de ideais H -primo e H -semiprimo, conforme observação após a Definição 3.1.7. Provemos que (1) \Rightarrow (3). É claro da definição de $\sqrt[H]{\mathfrak{s}}$ que $\mathfrak{s} \subseteq \sqrt[H]{\mathfrak{s}}$. Por outro lado, se $a \notin \mathfrak{s}$, então, como \mathfrak{s} é H -semiprimo, $A \setminus \mathfrak{s}$ é um Hn -sistema (Proposição 3.1.9) que contém a . Pela Proposição 3.1.11, existe um Hm -sistema $\mathcal{M} \subseteq A \setminus \mathfrak{s}$, tal que $a \in \mathcal{M}$. Como $\mathcal{M} \cap \mathfrak{s} = \emptyset$, segue da definição de $\sqrt[H]{\mathfrak{s}}$, que $a \notin \sqrt[H]{\mathfrak{s}}$. \square

O seguinte corolário é imediato das Proposições 3.1.6 e 3.1.12.

Corolário 3.1.13. *Seja $I \subsetneq A$ um ideal H -estável. Então $\sqrt[H]{I}$ é o menor ideal H -semiprimo de A que contém I . Em particular $\sqrt[H]{\sqrt[H]{I}} = \sqrt[H]{I}$.*

Definição 3.1.14. *Um H -módulo álgebra parcial é dito H -primo (resp. H -semiprimo) quando 0 é ideal H -primo (resp. H -semiprimo).*

Proposição 3.1.15. *Para um H -módulo álgebra parcial A , são equivalentes:*

(1) A é H -semiprimo;

(2) $P_H(A) = 0$;

(3) A não tem ideal H -estável nilpotente não nulo;

(4) A não tem ideal à esquerda H -estável nilpotente não nulo;

(4') A não tem ideal à direita H -estável nilpotente não nulo;

Demonstração. A equivalência (1) \Leftrightarrow (2) é imediata do Corolário 3.1.13. Provemos que (1) \Rightarrow (4). Seja $I \subseteq A$ um ideal à esquerda H -estável nilpotente, e seja $n \geq 1$ o menor inteiro positivo tal que $I^n = 0$. Se fosse $n \geq 2$, teríamos $(I^{n-1})^2 = I^{2n-2} \subseteq I^n = 0$, o que implicaria $I^{n-1} = 0$ (pois 0 é H -semiprimo por hipótese), contrariando a minimalidade de n . Logo deve ser $n = 1$, ou seja, $I = 0$. A implicação (1) \Rightarrow (4') é análoga e as implicações (4) \Rightarrow (3) e (4') \Rightarrow (3) são triviais. Já a implicação (3) \Rightarrow (1) é imediata da definição de ideal H -semiprimo. \square

As próximas duas proposições estabelecem relações entre ideais primos e H -primos e entre ideais semiprimos e H -semiprimos. Como em [16], utilizaremos a notação \sqrt{I} para indicar o radical do ideal $I \subseteq A$, o qual é a interseção dos ideais primos de A que contêm I . No caso de ser $I = 0$, denotaremos $P(A) = \sqrt{0}$ o radical primo de A .

Proposição 3.1.16. *Se $\mathfrak{p} \subseteq A$ é um ideal primo (resp. semiprimo), então $(\mathfrak{p} : H)$ é um ideal H -primo (resp. H -semiprimo).*

Demonstração. Suponhamos que \mathfrak{p} é ideal primo. Se $I, J \subseteq A$ são ideais H -estáveis, então

$$IJ \subseteq (\mathfrak{p} : H) \subseteq \mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad I \subseteq \mathfrak{p} \quad \text{ou} \quad J \subseteq \mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad I \subseteq (\mathfrak{p} : H) \quad \text{ou} \quad J \subseteq (\mathfrak{p} : H),$$

pois $(\mathfrak{p} : H)$ é o maior ideal H -estável contido em \mathfrak{p} . Logo $(\mathfrak{p} : H)$ é H -primo. A demonstração da outra afirmação é análoga, basta tomar $J = I$. \square

A próxima proposição demonstra que, quando H tem dimensão finita, vale a recíproca da proposição acima para ideais H -semiprimos: todo ideal H -semiprimo de A é da forma $(\mathfrak{s} : H)$, para algum ideal semiprimo de $\mathfrak{s} \subseteq A$.

Proposição 3.1.17. *Suponhamos que H tem dimensão finita. Então, para um ideal H -estável $I \subsetneq A$, temos*

$$\sqrt[H]{I} = (\sqrt{I} : H).$$

Em particular, $P_H(A) = (P(A) : H)$ e A é H -semiprimo se e somente se $(P(A) : H) = 0$.

Demonstração. Como I é H -estável e está contido em \sqrt{I} , segue da Proposição 3.1.16 que $(\sqrt{I} : H)$ é um ideal H -semiprimo que contém I . A inclusão $\sqrt[H]{I} \subseteq (\sqrt{I} : H)$ segue então do Corolário 3.1.13.

Provemos agora que $\sqrt[H]{I}$ é o maior ideal H -estável contido em \sqrt{I} , ou seja, que se $J \subseteq A$ é um ideal H -estável, tal que $\sqrt[H]{I} \subsetneq J$, então $J \not\subseteq \sqrt{I}$. Para isso, começamos construindo uma sequência de ideais H -estáveis

$$J_0 \supseteq J_1 \supseteq J_2 \supseteq \dots$$

tais que, para todo $i \geq 0$, $J_{i+1} \subseteq J_i^2$ e $J_i \not\subseteq \sqrt[H]{I}$. Faremos isso por indução, da seguinte maneira. Tomamos $J_0 = J$, e para $i \geq 0$, suponhamos que J_i é um ideal H -estável tal que $J_i \not\subseteq \sqrt[H]{I}$. Então $J_i^2 \not\subseteq \sqrt[H]{I}$, pois $\sqrt[H]{I}$ é H -semiprimo. Tomando um elemento $0 \neq a_{i+1} \in J_i^2 \setminus \sqrt[H]{I}$ e definindo $J_{i+1} = A(H \cdot a_{i+1})A$, temos que J_{i+1} é um ideal H -estável contido em J_i^2 , tal que $J_{i+1} \not\subseteq \sqrt[H]{I}$.

Fixemos agora uma base $\{h_t\}_{1 \leq t \leq n}$ de H sobre \mathbb{k} , e consideremos a seguinte família de ideais:

$$\mathcal{F} := \{K \trianglelefteq A ; I \subseteq K \text{ e } J_i \not\subseteq K, \forall i \geq 1\}.$$

Temos $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $I \in \mathcal{F}$. Além disso, se $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{F}$ é uma cadeia, então $\mathcal{K} := \bigcup K_\lambda$ é uma cota superior para esta cadeia. De fato, se existisse $i \geq 1$, tal que $J_i \subseteq \mathcal{K}$, então, como $J_i = A(H \cdot a_i)A = \sum_t A(h_t \cdot a_i)A$, tomando $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, tais que $h_t \cdot a_i \in K_{\lambda_t}$, $1 \leq t \leq n$, teríamos $J_i \subseteq \sum_t K_{\lambda_t}$. Mas $\{K_\lambda\}_\lambda$ é uma cadeia, e portanto existiria $\lambda_0 \in \Lambda$, tal que $K_{\lambda_1}, \dots, K_{\lambda_n} \subseteq K_{\lambda_0}$, o que implicaria $J_i \subseteq K_{\lambda_0}$, uma contradição. Logo (\mathcal{K} é um ideal tal que $I \subseteq \mathcal{K}$ e) $J_i \not\subseteq \mathcal{K}$, para todo $i \geq 1$. Assim $\mathcal{K} \in \mathcal{F}$ é uma cota superior para a cadeia $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal $\mathfrak{p} \in \mathcal{F}$. Provemos que \mathfrak{p} é ideal primo. De fato, dados $a, b \in A \setminus \mathfrak{p}$, pela maximalidade de \mathfrak{p} , existem i_1, i_2 tais que $J_{i_1} \subseteq \mathfrak{p} + AaA$ e $J_{i_2} \subseteq \mathfrak{p} + AbA$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $i_1 \geq i_2$. Temos então

$$J_{i_1+1} \subseteq J_{i_1}^2 \subseteq J_{i_1}J_{i_2} \subseteq (\mathfrak{p} + AaA)(\mathfrak{p} + AbA) \subseteq \mathfrak{p} + AaAbA.$$

Como $J_{i_1+1} \not\subseteq \mathfrak{p}$ (pois $\mathfrak{p} \in \mathcal{F}$), segue que $AaAbA \not\subseteq \mathfrak{p}$. Logo \mathfrak{p} é ideal primo de A .

Como \mathfrak{p} é um ideal primo que contém I e $J = J_0 \not\subseteq \mathfrak{p}$ (pois $J_0 \supseteq J_1$ e $J_1 \not\subseteq \mathfrak{p}$), segue que $J \not\subseteq \sqrt{I}$. Isso demonstra que $\sqrt[\mathfrak{H}]{I} = (\sqrt{I} : H)$. \square

Finalizamos a seção estabelecendo uma relação entre os ideais H -primos (resp. H -semiprimos) de A e os ideais H^* -primos (resp. H^* -semiprimos) de $\underline{A\#H}$, quando H tem dimensão finita. Em particular, obtemos uma relação entre o H -radical primo de A e o H^* -radical primo de $\underline{A\#H}$, nesse caso.

Teorema 3.1.18. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A um H -módulo álgebra parcial. Então as restrições das funções Φ e Ψ , definidas no Corolário 2.1.7, são bijeções entre o conjunto dos ideais H -primos (resp. H -semiprimos) de A e o conjunto dos ideais H^* -primos (resp. H^* -semiprimos) de $\underline{A\#H}$. Em particular*

$$P_H(A) = P_{H^*}(\underline{A\#H}) \cap A \quad \text{e} \quad P_{H^*}(\underline{A\#H}) = \underline{P_H(A)\#H}.$$

e A é H -semiprimo se e somente se $\underline{A\#H}$ é H^ -semiprimo.*

Demonstração. Denotaremos $R = \underline{A\#H}$. Basta provar que, para qualquer ideal H -primo (resp. H -semiprimo) $\mathfrak{p} \subseteq A$, a imagem $\Phi(\mathfrak{p})$ é ideal H^* -primo (resp. H^* -semiprimo) de R e, para qualquer ideal H^* -primo (resp. H^* -semiprimo) $\mathfrak{P} \subseteq R$, a imagem $\Psi(\mathfrak{P})$ é ideal

H -primo (resp. H -semiprimo) de A . Isso segue facilmente do fato de Φ e Ψ preservarem inclusão e produto.

De fato, se $\mathfrak{p} \subseteq A$ é ideal H -primo e $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq R$ são ideais H^* -estáveis tais que $\mathcal{I}\mathcal{J} \subseteq \Phi(\mathfrak{p})$, então $\Psi(\mathcal{I})$ e $\Psi(\mathcal{J})$ são ideais H -estáveis de A tais que $\Psi(\mathcal{I})\Psi(\mathcal{J}) = \Psi(\mathcal{I}\mathcal{J}) \subseteq \Psi(\Phi(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$. Como \mathfrak{p} é H -primo, segue que $\Psi(\mathcal{I}) \subseteq \mathfrak{p}$, o que implica $\mathcal{I} = \Phi(\Psi(\mathcal{I})) \subseteq \Phi(\mathfrak{p})$, ou $\Psi(\mathcal{J}) \subseteq \mathfrak{p}$, o que implica $\mathcal{J} = \Phi(\Psi(\mathcal{J})) \subseteq \Phi(\mathfrak{p})$. Logo $\Phi(\mathfrak{p})$ é H^* -primo.

No caso de \mathfrak{p} ser H -semiprimo, demonstra-se a H^* -semiprimitividade de $\Phi(\mathfrak{p})$ da mesma maneira, apenas tomando $\mathcal{I} = \mathcal{J}$. Quanto as afirmações sobre Ψ , a demonstração é análoga. Com isso, as igualdades

$$P_H(A) = P_{H^*}(R) \cap A \quad \text{e} \quad P_{H^*}(R) = \underline{P_H(A) \# H}$$

seguem do fato de $P_H(A)$ ser a interseção dos ideais H -primos de A , $P_{H^*}(R)$ ser a interseção dos ideais H^* -semiprimos de R e Φ e Ψ preservarem interseções. \square

3.2 (A, H) -módulos parciais simples, ideais H -primitivos e H -radical de Jacobson

Nesta seção estudamos os conceitos de (A, H) -módulo parcial simples e ideal H -primitivo. Tais conceitos tornam natural a definição de H -radical de Jacobson. Nosso principal objetivo é estudar a relação entre o H -radical de Jacobson de A e o H^* -radical de Jacobson de $\underline{A \# H}$, quando H tem dimensão finita.

Definição 3.2.1. *Seja M um (A, H) -módulo parcial.*

- (1) M é chamado *simples* (ou *irredutível*) se $M \neq 0$ e não tem (A, H) -submódulo parcial próprio.
- (2) M é chamado *semisimples* (ou *completamente redutível*) se é soma direta de (A, H) -submódulos parciais simples.

A proposição seguinte segue imediatamente da Proposição 2.2.4.

Proposição 3.2.2. *Um \mathbb{k} -espaço vetorial M é um (A, H) -módulo parcial simples (resp. semisimples) se e somente se é um $\underline{A \# H}$ -módulo simples (resp. semisimples).*

O conceito de (A, H) -módulo parcial simples nos leva naturalmente ao conceito de ideais H -primitivos de A .

Definição 3.2.3. *Seja A um H -módulo álgebra parcial.*

- (i) *A é chamado H -primitivo à direita (resp. à esquerda) se existe um (A, H) -módulo parcial à direita (resp. à esquerda) simples e fiel.*
- (ii) *Um ideal H -estável $\mathcal{P} \subseteq A$ é chamado H -primitivo à direita (resp. à esquerda) se A/\mathcal{P} é um H -módulo álgebra parcial H -primitivo à direita (resp. à esquerda), ou seja, se \mathcal{P} é o anulador de um (A, H) -módulo parcial à direita (resp. à esquerda) simples.*

A seguinte proposição segue imediatamente das Proposições 2.2.4 e 3.2.2.

Proposição 3.2.4. *Um ideal H -estável $\mathcal{P} \subseteq A$ é H -primitivo à direita (resp. à esquerda) se e somente se $\mathcal{P} = \mathcal{P} \cap A$ para algum ideal primitivo à direita (resp. à esquerda) $\mathcal{P} \subseteq \underline{A\#H}$.*

Proposição 3.2.5. *Seja \mathcal{X} a família dos ideais H -primitivos à direita e \mathcal{Y} a família dos ideais H -primitivos à esquerda de A . Então*

$$\bigcap_{\mathcal{P} \in \mathcal{X}} \mathcal{P} = J(\underline{A\#H}) \cap A = \bigcap_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Y}} \mathcal{Q}.$$

Demonstração. Seja \mathcal{Z} a família dos ideais primitivos à direita de $\underline{A\#H}$. Pela proposição 3.2.4, temos que $\mathcal{P} \in \mathcal{X}$ se e somente se $\mathcal{P} = \mathcal{P} \cap A$, para algum $\mathcal{P} \in \mathcal{Z}$. Assim

$$\bigcap_{\mathcal{P} \in \mathcal{X}} \mathcal{P} = \bigcap_{\mathcal{P} \in \mathcal{Z}} (\mathcal{P} \cap A) = \left(\bigcap_{\mathcal{P} \in \mathcal{Z}} \mathcal{P} \right) \cap A = J(\underline{A\#H}) \cap A.$$

A outra igualdade se prova de maneira análoga. □

A partir desse resultado podemos definir o H -radical de Jacobson de A como a interseção dos ideais H -primitivos de A .

Definição 3.2.6. *Seja A um H -módulo álgebra parcial. Chamaremos H -radical de Jacobson de A o ideal H -estável*

$$J_H(A) = \bigcap_{\alpha} \mathcal{P}_{\alpha} = \bigcap_{\beta} \mathcal{Q}_{\beta},$$

onde $\{\mathcal{P}_\alpha\}$ é a família dos ideais H -primitivos à direita e $\{\mathcal{Q}_\beta\}$ é a família dos ideais H -primitivos à esquerda de A .

A seguinte definição é, então, natural.

Definição 3.2.7. *Um H -módulo álgebra parcial A é chamado H -semiprimitivo quando $J_H(A) = 0$.*

Assim, A é H -semiprimitivo se e somente se existe um (A, H) -módulo parcial à direita semissimples fiel se e somente se existe um (A, H) -módulo parcial à esquerda semissimples fiel. De fato, se $\{M_\lambda\}$ é a família dos (A, H) -módulos parciais à direita (resp. à esquerda) simples, então $J_H(A)$ é o anulador do (A, H) -módulo parcial à direita (resp. à esquerda) semissimples $\bigoplus_\lambda M_\lambda$.

O próximo resultado no qual estamos interessados afirma que, se $\mathcal{P} \subseteq A$ é ideal primitivo à direita, então $(\mathcal{P} : H)$ é ideal H -primitivo à direita (Proposição 3.2.9). Este resultado é análogo ao obtido para ideais H -primos e ideais H -semiprimos na Proposição 3.1.16.

Para demonstrar isto, precisaremos da seguinte construção de um (A, H) -módulo parcial à direita W a partir de um A -módulo à direita V , de modo que V seja (isomorfo a) um A -submódulo de W e, além disso, V gere W como (A, H) -módulo parcial.

Tomamos W o subespaço vetorial de $V \otimes_{\mathbb{k}} H$ gerado pelos elementos da forma

$$\sum v(k_1 \cdot x) \otimes k_2,$$

com $v \in V$, $x \in A$ e $k \in H$. Definimos a ação de A em W da seguinte maneira: para $v \in V$, $x, a \in A$ e $k \in H$,

$$\begin{aligned} \left(\sum v(k_1 \cdot x) \otimes k_2 \right) a &:= \sum v(k_1 \cdot x)(k_2 \cdot a) \otimes k_3 \\ &= \sum v(k_1 \cdot (xa)) \otimes k_2. \end{aligned}$$

É fácil perceber que esta ação define uma estrutura de A -módulo em W . Além disso, temos $V \cong V \otimes_{\mathbb{k}} 1_H \subseteq W$ como A -módulos, pois, para quaisquer $v \in V$ e $a \in A$,

$$(v \otimes 1_H)a = (v(1_H \cdot 1_A) \otimes 1_H)a = v(1_H \cdot 1_A)(1_H \cdot a) \otimes 1_H = v(1_H \cdot a) \otimes 1_H = va \otimes 1_H.$$

Definimos agora a ação de H em W , da seguinte maneira: para $v \in V$, $x \in A$ e

$k, h \in H$, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum v(k_1 \cdot x) \otimes k_2 \right) \blacktriangleleft h &:= \sum v(k_1 \cdot x) ((k_2 h_1) \cdot 1_A) \otimes k_3 h_2 \\ &= \sum v(k_1 \cdot (x(h_1 \cdot 1_A))) \otimes k_2 h_2. \end{aligned}$$

É claro que $w \blacktriangleleft 1_H = w$, para qualquer $w \in W$. Além disso, para quaisquer $v \in V$, $x, a \in A$ e $k, h, g \in H$, temos

$$\begin{aligned} \left(\left(\left(\sum v(k_1 \cdot x) \otimes k_2 \right) \blacktriangleleft h \right) a \right) \blacktriangleleft g &= \left(\left(\sum v(k_1 \cdot x) ((k_2 h_1) \cdot 1_A) \otimes k_3 h_2 \right) a \right) \blacktriangleleft g \\ &= \left(\sum v(k_1 \cdot x) ((k_2 h_1) \cdot a) \otimes k_3 h_2 \right) \blacktriangleleft g \\ &= \sum v(k_1 \cdot x) ((k_2 h_1) \cdot a) ((k_3 h_2 g_1) \cdot 1_A) \otimes k_4 h_3 g_2 \\ &= \sum v(k_1 \cdot (x(h_1 \cdot a))) ((k_2 h_2 g_1) \cdot 1_A) \otimes k_3 h_3 g_2 \\ &= \left(\sum v(k_1 \cdot (x(h_1 \cdot a))) \otimes k_2 \right) \blacktriangleleft (h_2 g) \\ &= \left(\left(\sum v(k_1 \cdot x) \otimes k_2 \right) (h_1 \cdot a) \right) \blacktriangleleft (h_2 g). \end{aligned}$$

Disso segue então que W é um (A, H) -módulo parcial à direita, que contém V como A -submódulo. Como W é gerado (como \mathbb{k} -espaço vetorial) por elementos da forma

$$\begin{aligned} \sum v(k_1 \cdot x) \otimes k_2 &:= \sum v(k_1 \cdot x) (k_2 \cdot 1_A) \otimes k_3 \\ &= \sum (v(k_1 \cdot x) \otimes 1_H) \blacktriangleleft k_2 \\ &= \sum ((v \otimes 1_H)(k_1 \cdot x)) \blacktriangleleft k_2 \in (VA) \blacktriangleleft H \subseteq V \blacktriangleleft H, \end{aligned}$$

$v \in V$, $x \in A$ e $k \in H$, fica claro que V gera W como (A, H) -módulo parcial.

Estamos interessados no caso em que V é A -módulo simples.

Proposição 3.2.8. *Seja V é um A -módulo à direita simples. Então existe um (A, H) -módulo parcial à direita simples M , tal que V é (isomorfo a) um A -submódulo de M . Além disso, se H e V têm dimensão finita, então M também tem dimensão finita e vale*

$$\dim_{\mathbb{k}}(M) \leq (\dim_{\mathbb{k}}(H))(\dim_{\mathbb{k}}(V)).$$

Demonstração. Seja W um (A, H) -módulo parcial à direita, tal que V é (isomorfo a) um A -submódulo de W e V gera W como (A, H) -módulo parcial, ou seja, tal que $W = (VA) \blacktriangleleft H = V \blacktriangleleft H$. Como V é A -módulo simples, para qualquer $0 \neq u \in V$ temos $V = uA$, e portanto $W = (uA) \blacktriangleleft H$. Assim, qualquer elemento não nulo de V gera W como (A, H) -módulo parcial.

Consideremos a seguinte família de (A, H) -submódulos parciais de W :

$$\mathcal{F} = \{T \subsetneq W ; T \text{ é } (A, H)\text{-submódulo parcial e } T \cap V = 0\}.$$

O conjunto $\mathcal{F} \neq \emptyset$ pois $0 \in \mathcal{F}$. Uma aplicação simples do Lema de Zorn demonstra que existe $U \in \mathcal{F}$ maximal. Seja $M = W/U$. Como U é (A, H) -submódulo parcial de W , M tem uma estrutura natural de (A, H) -módulo parcial à direita, com ações de A e H em M dadas, respectivamente, por

$$(w + U)a = wa + U$$

e

$$(w + U) \blacktriangleleft h = (w \blacktriangleleft h) + U$$

para $w \in W$, $a \in A$ e $h \in H$. Além disso, como $U \cap V = 0$, temos uma inclusão natural de A -módulos

$$\begin{aligned} V &\hookrightarrow M = W/U \\ v &\mapsto \bar{v} = v + U \end{aligned}$$

Só nos falta mostrar que M é simples (como (A, H) -módulo parcial). De fato, qualquer (A, H) -submódulo parcial $0 \neq N \subseteq M$ é da forma T/U , para algum (A, H) -submódulo parcial $T \subseteq W$, tal que $U \subsetneq T$. Pela maximalidade de U , devemos ter $T \cap V \neq 0$. Então, tomando $0 \neq u \in T \cap V$, temos $W = (uA) \blacktriangleleft H$, conforme observado acima. Isso implica que

$$M = (\bar{u}A) \blacktriangleleft H \subseteq N \blacktriangleleft H \subseteq N.$$

Logo M é (A, H) -módulo parcial à direita simples, tal que V é (isomorfo a) um A -submódulo de M .

Como $W = V \blacktriangleleft H$, temos também $M = V \blacktriangleleft H$, donde segue imediatamente a última afirmação. \square

Como consequência temos o seguinte resultado.

Proposição 3.2.9. *Se $\mathcal{P} \subseteq A$ é um ideal primitivo à direita, então $(\mathcal{P} : H)$ é um ideal H -primitivo à direita.*

Demonstração. Como \mathcal{P} é ideal primitivo à direita, existe um A -módulo à direita simples V , tal que $\mathcal{P} = (0 : V)$. Pela Proposição 3.2.8, existe um (A, H) -módulo parcial à direita

simples M , tal que V é (isomorfo a) um A -submódulo de M . Então, basta provar que $I := (\mathcal{P} : H) = (0 : M)$. Ora, para quaisquer $v \in V$, $x \in I$ e $h \in H$, temos

$$(v \blacktriangleleft h)x = \sum (v(h_1 \cdot x)) \blacktriangleleft h_2 \in (V(H \cdot I)) \blacktriangleleft H \subseteq (V\mathcal{P}) \blacktriangleleft H = 0,$$

portanto $(V \blacktriangleleft H)I = 0$. Mas, pela (demonstração da) Proposição 3.2.8, $M = V \blacktriangleleft H$, donde $(\mathcal{P} : H) = I \subseteq (0 : M)$. Por outro lado, sendo $(0 : M)$ um ideal H -estável de A (Proposição 2.2.3), o qual está contido em \mathcal{P} pois $V \subseteq M$, concluímos que também vale $(0 : M) \subseteq (\mathcal{P} : H)$. Logo $(\mathcal{P} : H) = (0 : M)$ é um ideal H -primitivo à direita de A . \square

No restante da seção nos restringimos ao caso em que H tem dimensão finita. Esta hipótese permite obter mais detalhes sobre o H -radical de Jacobson de A . O primeiro resultado, conteúdo da próxima proposição, demonstra que, nesse caso, $J_H(A)$ é o maior ideal H -estável contido em $J(A)$. Este resultado é análogo ao obtido na Proposição 3.1.17 para o H -radical primo de A .

Proposição 3.2.10. *Suponhamos que H tem dimensão finita. Então*

$$J_H(A) = (J(A) : H).$$

Em particular, A é H -semiprimitivo se e somente se $(J(A) : H) = 0$.

Demonstração. Denotaremos $R = \underline{A\#H}$. Provemos primeiro que $J_H(A) \subseteq (J(A) : H)$. De fato, dado $x \in J_H(A)$, temos $x \in J(R)$, pela Proposição 3.2.5. Então, para quaisquer $y, z \in A$, o elemento $1_A - yxz$ é invertível em R , o que implica $1_A - yxz$ invertível em $R^{H^*} = R^{coH} = A$, pela Proposição 1.2.12. Portanto $x \in J(A)$. Isso mostra que $J_H(A) \subseteq J(A)$. Sendo $J_H(A)$ um ideal H -estável, segue que $J_H(A) \subseteq (J(A) : H)$.

Quanto a inclusão $(J(A) : H) \subseteq J_H(A)$, mostraremos que $\mathcal{J} := (J(A) : H) \subseteq (0 : M)$, para todo (A, H) -módulo parcial à esquerda simples M . Para isso, dado um (A, H) -módulo parcial à esquerda simples M , fixemos $0 \neq m \in M$. Então $A(H \blacktriangleright m)$ é um (A, H) -submódulo parcial não nulo de M , o que implica $A(H \blacktriangleright m) = M$ (pois M é (A, H) -simples). Sendo H de dimensão finita, segue que M é finitamente gerado como A -módulo (por exemplo, se $\{h_i\}_{1 \leq i \leq n}$ é uma base de H , então $M = A(H \blacktriangleright m) = \sum_i Am_i$, com $m_i := h_i \blacktriangleright m$). Como $\mathcal{J} \subseteq J(A)$, segue do Lema de Nakayama que $\mathcal{J}M \subsetneq M$. Por outro lado, sendo \mathcal{J} ideal H -estável, segue que $\mathcal{J}M$ é um (A, H) -submódulo parcial de M . Portanto $\mathcal{J}M = 0$ (pois M é (A, H) -simples), ou seja, $(J(A) : H) = \mathcal{J} \subseteq (0 : M)$. \square

Observamos que, se H tem dimensão finita e age globalmente em A , então a Proposição 3.2.10, combinada com a Definição 3.2.7, reobtem [18, Corollary 2.6 (2)].

A partir das Proposições 3.2.9 e 3.2.10 podemos demonstrar que, quando H tem dimensão finita, para obter $J_H(A)$ basta considerar a interseção dos ideais H -primitivos à direita de A da forma $(\mathcal{P} : H)$, com $\mathcal{P} \subseteq A$ ideal primitivo à direita. Este é o conteúdo da próxima proposição.

Proposição 3.2.11. *Seja X a família dos ideais primitivos à direita de A . Se H tem dimensão finita, então*

$$J_H(A) = \bigcap_{\mathcal{P} \in X} (\mathcal{P} : H).$$

Demonstração. Seja \mathcal{X} a família dos ideais H -primitivos à direita de A . Pela Proposição 3.2.9, para cada $\mathcal{P} \in X$, temos $(\mathcal{P} : H) \in \mathcal{X}$. Disso segue que

$$J_H(A) = \bigcap_{\mathcal{Q} \in \mathcal{X}} \mathcal{Q} \subseteq \bigcap_{\mathcal{P} \in X} (\mathcal{P} : H).$$

Por outro lado, é claro que $\bigcap_{\mathcal{P} \in X} (\mathcal{P} : H) \subseteq \bigcap_{\mathcal{P} \in X} \mathcal{P} = J(A)$. Como interseção de ideais H -estáveis é H -estável, segue que

$$\bigcap_{\mathcal{P} \in X} (\mathcal{P} : H) \subseteq (J(A) : H) = J_H(A)$$

pela Proposição 3.2.10. □

Finalizamos a seção estabelecendo uma relação entre o H -radical de Jacobson de A e o H^* -radical de Jacobson de $\underline{A\#H}$, quando H tem dimensão finita.

Teorema 3.2.12. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e A um H -módulo álgebra parcial. Então*

$$J_H(A) = J_{H^*}(\underline{A\#H}) \cap A \quad e \quad J_{H^*}(\underline{A\#H}) = \underline{J_H(A)\#H}.$$

Em particular A é H -semiprimitivo se e somente se $\underline{A\#H}$ é H^ -semiprimitivo.*

Demonstração. Denotaremos $R = \underline{A\#H}$. Sejam Φ e Ψ como no Corolário 2.1.7. Como $J_{H^*}(R)$ é H^* -estável, temos

$$J_{H^*}(R) = \Phi(\Psi(J_{H^*}(R))) = \underline{(J_{H^*}(R) \cap A)\#H}$$

Sendo $J_{H^*}(R) \subseteq J(R)$, segue então da Proposição 3.2.5 que

$$J_{H^*}(R) \subseteq \underline{(J(R) \cap A)\#H} = \underline{J_H(A)\#H}.$$

Por outro lado, também pela Proposição 3.2.5, $J_H(A) \subseteq J(R)$, donde segue que

$$\underline{J_H(A)\#H} = J_H(A)R \subseteq J(R)R = J(R).$$

Sendo $\underline{J_H(A)\#H}$ um ideal H^* -estável e H^* de dimensão finita, segue da Proposição 3.2.10 que

$$\underline{J_H(A)\#H} \subseteq (J(R) : H^*) = J_{H^*}(R).$$

Isso mostra a segunda igualdade. A primeira igualdade segue então facilmente:

$$J_H(A) = \Psi(\Phi(J_H(A))) = \underline{J_H(A)\#H} \cap A = J_{H^*}(R) \cap A.$$

□

4 *Sobre a semiprimitividade e a semiprimalidade do produto smash parcial*

Sejam H uma álgebra de Hopf sobre um corpo \mathbb{k} e A um H -módulo álgebra parcial. Neste capítulo aplicamos os resultados dos Capítulos 2 e 3 no estudo da semiprimitividade e da semiprimalidade do produto smash parcial. A maioria dos resultados abaixo generalizam, para o caso de ações parciais, os resultados sobre semiprimitividade do produto smash (global) de [18, Section 4], melhorando-os no caso da característica de \mathbb{k} ser positiva. Também apresentamos um resultado sobre a semiprimalidade do produto smash parcial (Teorema 4.10) que generaliza [17, Theorem 3.4], para ações parciais.

Observação 4.1. *Nos principais resultados deste capítulo assumimos que H é uma álgebra de Hopf semissimples. Isso implica, em particular, que H tem dimensão finita (ver [7, Lemma 5.3.1]).*

Teorema 4.2. *Sejam H uma álgebra de Hopf semissimples e A um H -módulo álgebra parcial, tal que todo A -módulo à direita simples tem dimensão finita. Se A é H -semiprimitivo, então $R = \underline{A\#H}$ é semiprimitivo.*

Demonstração. Seja $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ a família dos A -módulos à direita simples. Pela Proposição 3.2.8, para cada $\alpha \in \Lambda$, existe um (A, H) -módulo parcial à direita simples M_α , tal que V_α é (isomorfo a) um A -submódulo de M_α . Para cada $\alpha \in \Lambda$, denotemos $\mathcal{P}_\alpha := (0 : V_\alpha)$, $I_\alpha := (0 : M_\alpha) = (\mathcal{P}_\alpha : H)$ (conforme demonstração da Proposição 3.2.9) e $A_\alpha := A/I_\alpha$. Pela Proposição 3.2.11, temos

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha = J_H(A) = 0,$$

pois A é H -semiprimitivo. Assim, A é (isomorfo a) o produto subdireto dos H -módulos álgebra parciais A_α (Proposição 1.1.22). Pela Proposição 2.1.3, $R = \underline{A\#H}$ é (isomorfo

a) o produto subdireto das álgebras $R_\alpha := \underline{A_\alpha \# H}$. Assim, basta provar que cada R_α é semiprimitivo (Proposição 1.1.23).

Como cada V_α tem dimensão finita, segue da Proposição 3.2.8 que cada M_α também tem dimensão finita. Isso implica que cada A_α também tem dimensão finita (pois, sendo $I_\alpha = (0 : M_\alpha)$, temos uma inclusão natural de álgebras $A_\alpha = A/I_\alpha \subseteq \text{End}_{\mathbb{k}}(M_\alpha)$, e assim $\dim_{\mathbb{k}}(A_\alpha) \leq (\dim_{\mathbb{k}}(M_\alpha))^2$).

Como cada A_α é H -primitivo (portanto H -semiprimitivo), segue do Teorema 3.2.12 que cada R_α é H^* -semiprimitivo. Por outro lado, H^* é cossemisimples (Proposição 1.1.16) e cada R_α tem dimensão finita (pois A_α e H têm dimensão finita). Segue então do Corolário 1.3.11, que $J(R_\alpha)$ é H^* -estável. Assim, para cada α ,

$$J(R_\alpha) = (J(R_\alpha) : H) = J_{H^*}(R_\alpha) = 0$$

e portanto R_α é semiprimitivo. □

Para o próximo teorema precisaremos do seguinte lema.

Lema 4.3. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo \mathbb{k} e A um H -módulo álgebra parcial. Se $\mathbb{k} \subseteq \mathbb{F}$ é uma extensão de corpos algébrica e separável, então*

$$J_{H \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F}}(A \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F}) = J_H(A) \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F}.$$

Em particular, A é H -semiprimitivo se e somente se $A \otimes \mathbb{F}$ é $H \otimes \mathbb{F}$ -semiprimitivo.

Demonstração. Denotaremos $\overline{H} = H \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F}$ e $\overline{A} = A \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F}$. Pela Proposição 1.1.21, temos $J(\overline{A}) = J(A) \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F}$. Assim, para quaisquer $x \in J_H(A)$, $h \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$,

$$(h \otimes \alpha) \cdot (x \otimes \beta) = (h \cdot x) \otimes (\alpha\beta) \in J(A) \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F} = J(\overline{A}),$$

o que implica $J_H(A) \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F} \subseteq (J(\overline{A}) : \overline{H}) = J_{\overline{H}}(\overline{A})$ (Proposição 3.2.10).

Por outro lado, se $u \in J_{\overline{H}}(\overline{A}) \subseteq J(\overline{A}) = J(A) \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F}$, então existem $x_i \in J(A)$ e $\beta_i \in \mathbb{F}$, com $\{\beta_i\}$ linearmente independente sobre \mathbb{k} , tais que $u = \sum x_i \otimes \beta_i$. Assim, para qualquer $h \in H$,

$$\sum (h \cdot x_i) \otimes \beta_i = (h \otimes 1_{\mathbb{F}}) \cdot u \in J_{\overline{H}}(\overline{A}) \subseteq J(A) \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F}$$

(pois $J_{\overline{H}}(\overline{A})$ é \overline{H} -estável). Como $\{\beta_i\}$ é linearmente independente sobre \mathbb{k} , segue que cada $h \cdot x_i \in J(A)$. Isso mostra que $x_i \in (J(A) : H) = J_H(A)$, para todo i , e portanto $u \in J_H(A) \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F}$. Logo, também vale a inclusão $J_{\overline{H}}(\overline{A}) \subseteq J_H(A) \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F}$. □

Teorema 4.4. *Sejam H uma álgebra de Hopf semissimples sobre um corpo \mathbb{k} e A um H -módulo álgebra parcial H -semiprimo que satisfaz uma identidade polinomial. Se \mathbb{k} é perfeito e A é afim sobre \mathbb{k} , então $R = \underline{A\#H}$ é semiprimitivo.*

Demonstração. Nas hipóteses sobre A , temos $J(A)$ igual ao radical primo de A (Proposição 1.3.8). Assim A é, na realidade, H -semiprimitivo. Como \mathbb{k} é perfeito, se $\bar{\mathbb{k}}$ é o fecho algébrico de \mathbb{k} , então a extensão $\mathbb{k} \subseteq \bar{\mathbb{k}}$ é separável. Tomando $\mathbb{F} = \bar{\mathbb{k}}$ no Lema 4.3, temos que \bar{A} é \bar{H} -semiprimitivo, onde $\bar{H} = H \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}$ e $\bar{A} = A \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}$. Além disso, \bar{A} é PI-álgebra (Proposição 1.3.4) e \bar{A} é afim sobre $\bar{\mathbb{k}}$ (por exemplo, se $A = \mathbb{k}\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, então $\bar{A} = \bar{\mathbb{k}}\langle a_1 \otimes 1, \dots, a_n \otimes 1 \rangle$).

Pela Proposição 1.3.9, todo \bar{A} -módulo à direita simples tem dimensão finita. Segue então do Teorema 4.2 (e da Proposição 1.2.5), que $R \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}} \cong \underline{\bar{A}\#\bar{H}}$ é semiprimitivo. Logo R é semiprimitivo (Proposição 1.1.21). \square

Para o próximo resultado, precisaremos dos dois lemas seguintes.

Lema 4.5. *Sejam H uma álgebra de Hopf e A um H -módulo álgebra parcial. Se I é um ideal à direita de A , então $H \cdot I$ também é um ideal à direita.*

Demonstração. Para quaisquer $h \in H$, $x \in I$ e $a \in A$,

$$\begin{aligned} (h \cdot x)a &= \sum (h_1 \cdot x)(h_2 \cdot 1_A)((h_3 S(h_4)) \cdot a) \\ &= \sum (h_1 \cdot x)(h_2 \cdot (S(h_3) \cdot a)) \\ &= \sum h_1 \cdot (x(S(h_2) \cdot a)) \in H \cdot (IA) \subseteq H \cdot I. \end{aligned}$$

Logo $(H \cdot I)A \subseteq H \cdot I$, o que implica que $H \cdot I$ é ideal à direita. \square

Lema 4.6. *Sejam \mathcal{H} uma álgebra de Hopf de dimensão finita e \mathcal{A} um \mathcal{H} -módulo álgebra (ação global). Se \mathcal{H} é cossemissimples e \mathcal{A} é localmente finito, então $J(\mathcal{A})$ é \mathcal{H} -estável.*

Demonstração. Fixemos $y \in \mathcal{H} \cdot J(\mathcal{A})$. Então $y = \sum_i h_i \cdot x_i$, para certos $x_1, \dots, x_n \in J(\mathcal{A})$ e $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H}$. Como o subespaço vetorial $\sum_i \mathcal{H} \cdot x_i$ tem dimensão finita, ele gera uma subálgebra $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ de dimensão finita. Claramente $\mathcal{H} \cdot \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$, e portanto \mathcal{B} é um \mathcal{H} -módulo álgebra.

Sendo \mathcal{A} localmente finito, $J(\mathcal{A})$ é um ideal nil de \mathcal{A} (Proposição 1.1.19), donde segue que cada $\mathcal{B}x_i\mathcal{B} \subseteq J(\mathcal{A})$ é um ideal nil de \mathcal{B} , e portanto está em $J(\mathcal{B})$. Em particular,

cada $x_i \in J(\mathcal{B})$. Como \mathcal{B} tem dimensão finita, temos $\mathcal{H} \cdot J(\mathcal{B}) \subseteq J(\mathcal{B})$ (Corolário 1.3.11). Assim, $y = \sum_i h_i \cdot x_i \in J(\mathcal{B})$, e portanto y é nilpotente (Proposição 1.1.18).

Como $y \in \mathcal{H} \cdot J(\mathcal{A})$ é arbitrário, concluímos que $\mathcal{H} \cdot J(\mathcal{A})$ é um ideal à direita (Lema 4.5) nil de \mathcal{A} , e portanto está contido em $J(\mathcal{A})$, ou seja, $J(\mathcal{A})$ é \mathcal{H} -estável. \square

Teorema 4.7. *Sejam H uma álgebra de Hopf semissimples e A um H -módulo álgebra parcial H -semiprimitivo. Se A é localmente finito, então $\underline{A\#H}$ é semiprimitivo.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.12, $\underline{A\#H}$ é um H^* -módulo álgebra H^* -semiprimitivo. Além disso, H^* é cossemisimples (Proposição 1.1.16) e $\underline{A\#H}$ é localmente finito (se $x_1, \dots, x_n \in \underline{A\#H}$ e cada $x_i = \sum_j a_{ij}\#h_j$, então existe uma subálgebra $B \subseteq A$ de dimensão finita H -estável gerada por $(H \cdot 1_A)(H \cdot a_{ij})$, donde x_1, \dots, x_n pertencem a subálgebra de dimensão finita $\underline{B\#H} \subseteq \underline{A\#H}$). Pelo Lema 4.6, $J(\underline{A\#H})$ é H^* -estável. Logo

$$J(\underline{A\#H}) = (J(\underline{A\#H}) : H^*) = J_{H^*}(\underline{A\#H}) = 0$$

(Proposição 3.2.10) e $\underline{A\#H}$ é semiprimitivo. \square

Teorema 4.8. *Sejam H uma \mathbb{k} -álgebra de Hopf semissimples e A um H -módulo álgebra parcial H -semiprimo que satisfaz uma identidade polinomial. Se A é algébrica sobre \mathbb{k} , então $\underline{A\#H}$ é semiprimitivo.*

Demonstração. Pela Proposição 1.3.8 temos $J(A) = P(A)$, portanto A é, na realidade, H -semiprimitivo. Além disso, A é localmente finito pela Proposição 1.3.6, portanto o resultado segue imediatamente do Teorema 4.7. \square

Corolário 4.9. *Sejam H uma \mathbb{k} -álgebra de Hopf semissimples e A um H -módulo álgebra parcial. Se*

- (1) *todo A -módulo à direita simples tem dimensão finita, ou*
- (2) *\mathbb{k} é perfeito e A é uma PI-álgebra que é afim sobre \mathbb{k} , ou*
- (3) *A é localmente finito (em particular, se A é uma PI-álgebra que é algébrica sobre \mathbb{k}),*

então $J(\underline{A\#H}) = \underline{J_H(A)\#H}$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.12, $\underline{J_H(A)\#H} = J_{H^*}(A\#H) \subseteq J(A\#H)$. Por outro lado, $A/J_H(A)$ é H -semiprimitivo (e portanto H -semiprimo). Segue então dos Teoremas 4.2, 4.4 e 4.7, que

$$(\underline{A\#H})/(\underline{J_H(A)\#H}) \cong (\underline{A/J_H(A)})\#H$$

é semiprimitivo, o que implica $J(\underline{A\#H}) \subseteq \underline{J_H(A)\#H}$. \square

O próximo teorema generaliza [17, Theorem 3.4]. A demonstração segue praticamente os mesmos passos.

Teorema 4.10. *Sejam H uma álgebra de Hopf semissimples e A um H -módulo álgebra parcial que satisfaz uma identidade polinomial. Se A é H -semiprimo, então $\underline{A\#H}$ é semiprimo.*

Demonstração. Como A é PI-álgebra, se I é um ideal nil de A então $I \subseteq P(A)$ pela Proposição 1.3.7. Assim $(I : H) \subseteq (P(A) : H) = P_H(A) = 0$ pois A é H -semiprimo.

Claramente o anel de polinômios $A[t]$ torna-se um H -módulo álgebra parcial estendendo a ação de H por $h \cdot t := (h \cdot 1_A)t$. Além disso, para qualquer ideal I de A , $(I[t] : H) = (I : H)[t]$. De fato, para $p(t) = \sum a_i t^i \in (I[t] : H)$ temos $A(H \cdot p(t))A \subseteq I[t]$, o que implica $A(H \cdot a_i)A \subseteq I$, para cada i . Como cada $A(H \cdot a_i)A$ é ideal H -estável de A , segue que cada $a_i \in A(H \cdot a_i)A \subseteq (I : H)$, e portanto $p(t) \in (I : H)[t]$. Isso mostra a inclusão $(I[t] : H) \subseteq (I : H)[t]$. A inclusão $(I : H)[t] \subseteq (I[t] : H)$ é clara pois, pela definição da ação de H em t , $(I : H)[t]$ é um ideal H -estável contido em $I[t]$.

Pela Proposição 1.1.20, $J(A[t]) = N[t]$ para algum ideal nil N de A . Assim,

$$J_H(A[t]) = (J(A[t]) : H) = (N[t] : H) = (N : H)[t] = 0$$

pela observação acima, e portanto $A[t] \cong A \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[t]$ é um H -módulo álgebra parcial H -semiprimitivo que satisfaz uma identidade polinomial.

Pelo Teorema 3.2.12, o produto smash parcial $R := \underline{A[t]\#H}$ é H^* -semiprimitivo. Além disso, H^* é cossemisimples (Corolário 1.1.16) e R é PI-álgebra pois é finitamente gerado sobre $A[t]$ (Proposição 1.3.3). Pela Proposição 1.3.10, se \mathcal{I} é um ideal nilpotente de R então $H^* \cdot \mathcal{I} \subseteq J(R)$, o que implica $\mathcal{I} \subseteq (J(R) : H^*) = J_{H^*}(R) = 0$ (pois R é H^* -semiprimitivo). Isso mostra que $R = \underline{A[t]\#H} \cong \underline{A\#H}[t]$ é semiprimo, logo $\underline{A\#H}$ é semiprimo (Proposição 1.1.20). \square

Corolário 4.11. *Sejam H uma álgebra de Hopf semissimples e A um H -módulo álgebra parcial que satisfaz uma identidade polinomial. Então*

$$P(\underline{A\#H}) = \underline{P_H(A)\#H}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.18, $\underline{P_H(A)\#H} = P_{H^*}(\underline{A\#H}) \subseteq P(\underline{A\#H})$. Por outro lado, $A/P_H(A)$ é H -semiprimo (e satisfaz uma identidade polinomial). Segue então do Teorema 4.10, que

$$(\underline{A\#H})/(\underline{P_H(A)\#H}) \cong (\underline{A/P_H(A)})\#H$$

é semiprimo, o que implica $P(\underline{A\#H}) \subseteq \underline{P_H(A)\#H}$. \square

As hipóteses de H -semiprimitividade ou H -semiprimalidade sobre A nos teoremas acima são essenciais. De fato, pela Proposição 3.2.5 sempre temos $J_H(A) \subseteq J(\underline{A\#H})$, e portanto $\underline{A\#H}$ não será semiprimitivo se A não for H -semiprimitivo. Analogamente, se A não for H -semiprimo, então existirá um ideal H -estável nilpotente não nulo $I \subseteq A$, e daí $\underline{I\#H}$ será um ideal nilpotente não nulo de $\underline{A\#H}$. Em particular, $\underline{A\#H}$ não será semiprimo nesse caso. O exemplo abaixo ilustra que também a hipótese da semissimplicidade de H é necessária.

Exemplo 4.12. *Toda álgebra de Hopf H é, ela mesma, um H -módulo álgebra (ação global) via ação adjunta à esquerda:*

$$h \cdot k = \sum h_1 k S(h_2)$$

para $h, k \in H$ (ver [23, Definition 3.4.1, Example 4.1.9]). Consideremos o caso particular em que H é a álgebra de Sweedler:

$$H = \mathbb{k} \langle 1, g, x, gx \mid g^2 = 1, x^2 = 0, xg = -gx \rangle,$$

onde a comultiplicação é dada por $\Delta(g) = g \otimes g$, $\Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x$, $\Delta(gx) = gx \otimes g + 1 \otimes gx$, a counidade é dada por $\varepsilon(g) = 1$, $\varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(gx) = 0$, e a antípoda é dada por $S(g) = g$, $S(x) = -gx = xg$, $S(gx) = x$. Esta é uma álgebra de Hopf de dimensão 4 e os elementos $1, g, x, gx$ formam uma base de H sobre \mathbb{k} .

Não é difícil de ver que $I = \mathbb{k} \langle x, gx \rangle$ é um ideal nilpotente e H -estável (onde H age em H via ação adjunta à esquerda). Além disso, 1 e g são invertíveis, o que implica $I = P(A) = J(A)$. Assim, a ação induzida de H torna $A = H/I$ um H -módulo álgebra semiprimitivo (e portanto semiprimo). Porém, como H não é semissimples (ver [23,

Example 2.1.2 3), Corollary 2.2.4]), os Teoremas 4.2 e 4.10 não se aplicam. De fato, temos

$$A\#H = \mathbb{k}\langle \bar{1}\#1, \bar{1}\#g, \bar{1}\#x, \bar{1}\#gx, \bar{g}\#1, \bar{g}\#g, \bar{g}\#x, \bar{g}\#gx \rangle.$$

Um cálculo simples mostra que $\mathcal{I} = \mathbb{k}\langle \bar{1}\#x, \bar{1}\#gx, \bar{g}\#x, \bar{g}\#gx \rangle$ é um ideal nilpotente de $A\#H$. Em particular, $A\#H$ não é semiprimo (e portanto, também não é semiprimitivo).

Exemplo 4.13. *Sejam B , A e G como no Exemplo 1.2.10. Se B é uma álgebra semiprimitiva de dimensão finita, então A também é semiprimitiva de dimensão finita. Em particular, todo A -módulo simples tem dimensão finita. Segue então do Teorema 4.2 que o produto smash parcial $\underline{A\#H}$ é semiprimitivo. (Nesse caso o Teorema 4.10 também se aplica, já que em dimensão finita o radical de Jacobson e o radical primo coincidem.)*

5 Resultados adicionais

Sejam H uma álgebra de Hopf pontuada de dimensão finita e A um H -módulo álgebra parcial. No decorrer dos estudos realizados para conclusão deste trabalho obtemos, em paralelo, a seguinte relação entre os radicais de Jacobson de A e de $\underline{A\#H}$:

$$J(\underline{A\#H})^{\dim_{\mathbb{k}} H} \subseteq \underline{J(A)\#H}.$$

Como este resultado não contribuiu para os propósitos da pesquisa, resolvemos colocá-lo neste capítulo em separado. Os resultados apresentados neste capítulo são análogos para o produto smash parcial, aos principais resultados apresentados em [21, Section 1] para o produto cruzado global.

No que segue, H denotará uma álgebra de Hopf sobre um corpo \mathbb{k} e A denotará um H -módulo álgebra parcial. Também denotaremos por $T = A\#H$ e $R = \underline{A\#H}$.

Proposição 5.1. *Para qualquer A -módulo à direita V , o anulador $\text{ann}_R(V \otimes_A R)$ é o maior ideal de R contido em $\text{ann}_A(V)R$.*

Demonstração. Seja $\{e_i\}$ uma base de H sobre \mathbb{k} , e seja $x \in \text{ann}_R(V \otimes_A R) \subseteq R \subseteq T$, com $x = \sum a_i \# e_i$. Dado $v \in V$, temos

$$0 = (v \otimes (1_A \# 1_H))x = v \otimes \sum a_i \# e_i = \sum v a_i \otimes 1_A \# e_i,$$

e portanto $v a_i = 0$, para todo i (pois $\{1_A \# e_i\}$ é l.i.). Como isso vale para todo $v \in V$, segue que $a_i \in \text{ann}_A(V)$, para todo i , e portanto

$$x = x(1_A \# 1_H) = \sum a_i (1_A \# e_i) (1_A \# 1_H) \in \text{ann}_A(V)R.$$

Por outro lado, se \mathcal{I} é um ideal de R contido em $\text{ann}_A(V)R$ então

$$(V \otimes_A R)\mathcal{I} = V \otimes_A \mathcal{I} \subseteq V \otimes_A \text{ann}_A(V)R = V \text{ann}_A(V) \otimes_A R = 0$$

e portanto $\mathcal{I} \subseteq \text{ann}_R(V \otimes_A R)$. □

Definição 5.2. *Dados uma álgebra B e um B -módulo à direita M , o comprimento de Loewy de M é o menor inteiro t tal que $MJ(B)^t = 0$, ou ∞ se tal inteiro não existe.*

Proposição 5.3. *Se existe um limite superior finito d para os comprimentos de Loewy de todos os R -módulos $V \otimes_A R$, com V um A -módulo à direita simples, então $J(R)^d \subseteq J(A)R$.*

Demonstração. Se V é um A -módulo à direita simples, então $J(R)^d \subseteq \text{ann}_R(V \otimes_A R)$ por hipótese, e $\text{ann}_R(V \otimes_A R) \subseteq \text{ann}_A(V)R$ pela Proposição 5.1. Assim, se $\{e_i\}$ é uma base de H sobre \mathbb{k} , então

$$\begin{aligned} J(R)^d &\subseteq \bigcap_V (\text{ann}_A(V)R) \subseteq \bigcap_V (\text{ann}_A(V)T) \\ &= \bigcap_V \left(\text{ann}_A(V) \bigoplus_i A(1_A \# e_i) \right) = \bigcap_V \left(\bigoplus_i \text{ann}_A(V)(1_A \# e_i) \right) \\ &= \bigoplus_i \left(\bigcap_V \text{ann}_A(V) \right) (1_A \# e_i) = \bigoplus_i J(A)(1_A \# e_i) \\ &= J(A) \bigoplus_i A(1_A \# e_i) = J(A)T \end{aligned}$$

onde V percorre todos os A -módulos à direita simples. Portanto

$$J(R)^d = J(R)^d(1_A \# 1_H) \subseteq J(A)T(1_A \# 1_H) = J(A)R.$$

□

Lembremos que um elemento não nulo $x \in H$ é chamado *group-like* se $\Delta(x) = x \otimes x$. O conjunto dos elementos group-like de H é denotado por $G(H)$.

Dizemos que H é pontuada se toda subcoálgebra simples de H tem dimensão igual a 1, ou equivalentemente, se o coradical de H é igual a $G(H)$ (ver [23, Definition 5.1.5]).

Dado um A -módulo à direita M , denotaremos por $\ell(M)$ o comprimento de uma *serie de composição* de M (se tal serie não existe, então $\ell(M) = \infty$ por definição).

Teorema 5.4. *Sejam H uma álgebra de Hopf pontuada de dimensão finita e A um H -módulo álgebra parcial, tal que $G(H) \cdot 1_A \subseteq Z(A)$. Então, para qualquer A -módulo à direita V , $\ell((V \otimes_A R)_A) \leq \ell(V) \dim_{\mathbb{k}} H$. Consequentemente*

$$\ell((V \otimes_A R)_R) \leq \ell(V) \dim_{\mathbb{k}} H.$$

Demonstração. Seja $H_{-1} = 0 \subsetneq H_0 \subsetneq H_1 \subsetneq \dots \subsetneq H_t = H$ a filtração coradical de H . Para cada $0 \leq n \leq t$, $\Delta(H_n) \subseteq \sum_{i=0}^n H_i \otimes H_{n-i}$, o que implica que cada subespaço vetorial $\underline{A\#H_n}$ é um (A,A) -subbimódulo de $R = \underline{A\#H} \subseteq A\#H$. Assim, podemos definir uma cadeia de A -submódulos $W_n \subseteq (V \otimes_A R)_A$ por $W_n := V \otimes_A \underline{A\#H_n}$, $n = -1, 0, \dots, t$.

Sejam $\overline{W_n} := W_n/W_{n-1}$ e $\overline{H_n} := H_n/H_{n-1}$, para cada $0 \leq n \leq t$. Pelo Teorema de Taft-Wilson (ver [23, Theorem 5.4.1]), todo $h \in H_n$ pode ser escrito na forma $h = \sum_{x \in G} h_x$ com

$$h_x \in H_n, \quad \Delta(h_x) = x \otimes h_x \pmod{(H_n \otimes H_{n-1})}.$$

Assim, $\{h_x\}_{h \in H_n, x \in G}$ é um conjunto de geradores de H_n como \mathbb{k} -espaço vetorial e portanto $\{\underline{1_A\#h_x}\}_{h \in H_n, x \in G}$ é um conjunto de geradores do \mathbb{k} -espaço vetorial

$$\underline{1_A\#H_n} = (1_A\#H_n)(1_A\#1_H).$$

Consideremos um subconjunto $\beta \subseteq \{h_x\}_{h \in H_n, x \in G}$ cujas imagens no quociente

$$(\underline{1_A\#H_n})/(\underline{1_A\#H_{n-1}})$$

formam uma base desse \mathbb{k} -espaço vetorial. Para cada $h_x \in \beta$, consideremos V_{h_x} a imagem de

$$V \otimes_A \underline{A\#h_x} = V \otimes_A \underline{1_A\#h_x}$$

em $\overline{W_n}$. Então $\overline{W_n} = \bigoplus_{h_x \in \beta} V_{h_x}$ como \mathbb{k} -espaço vetorial.

Seja V um A -módulo à direita. Para cada $x \in G(H)$, denotemos por $1_x := x \cdot 1_A$. Então, cada $D_x := x \cdot A = 1_x A = A 1_x$ é um ideal de A gerado pelo idempotente central 1_x . Assim, para cada $x \in G(H)$, temos uma estrutura de A -módulo em $V_x := V D_x = V 1_x$ dada por $v 1_x \leftarrow a := v(x \cdot a)$. Além disso, sempre que V é simples, V_x é simples ou zero, portanto $\ell(V_x) \leq \ell(V)$ em geral. Ainda, para cada $v \in V$ e $a \in A$, como $\Delta(h_x) = x \otimes h_x \pmod{(H_n \otimes H_{n-1})}$

$$\begin{aligned} v \otimes \underline{1_A\#h_x} &= v \otimes \underline{x \cdot 1_A\#h_x} \pmod{(W_{n-1})} \\ &= v 1_x \otimes \underline{1_A\#h_x} \pmod{(W_{n-1})} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (v 1_x \otimes \underline{1_A\#h_x})a &= v 1_x \otimes \underline{x \cdot a\#h_x} \pmod{(W_{n-1})} \\ &= v(x \cdot 1_A)(x \cdot a) \otimes \underline{1_A\#h_x} \pmod{(W_{n-1})} \\ &= v(x \cdot a) \otimes \underline{1_A\#h_x} \pmod{(W_{n-1})} \end{aligned}$$

Assim, cada $V_{h_x} \cong V_x$ como A -módulo e por isso

$$\ell(\overline{W_n}) = \sum_{h_x \in \beta} \ell(V_{h_x}) \leq \ell(V) \dim_{\mathbb{k}} \overline{H_n}.$$

Logo $\ell((V \otimes_A R)_A) = \sum_{n=0}^t \ell(\overline{W_n}) \leq \ell(V) \dim_{\mathbb{k}} H$. □

Corolário 5.5. *Sejam H uma álgebra de Hopf pontuada de dimensão finita e A um H -módulo álgebra parcial, tal que $G(H) \cdot 1_A \subseteq Z(A)$. Então*

$$J(\underline{A \# H})^{\dim_{\mathbb{k}} H} \subseteq \underline{J(A) \# H}.$$

Demonstração. Se V é um A -módulo à direita simples, então $\ell((V \otimes_A R)_R) \leq \dim_{\mathbb{k}} H$, pelo Teorema 5.4. Por outro lado, é evidente que $\ell((V \otimes_A R)_R)$ é um limite superior para o comprimento de Loewy desse módulo. Assim o resultado segue da Proposição 5.3. □

Referências

- [1] F. Abadie, M. Dokuchaev, R. Exel, and J. J. Simón. Morita equivalence of partial group actions and globalization. <http://mtm.ufsc.br/exel/papers/moritaglob.pdf>, 2011.
- [2] M. M. S. Alves and E. Batista. Partial Hopf actions, partial invariants and a Morita context. *Algebra and Discrete Mathematics*, 3:1–19, 2009.
- [3] M. M. S. Alves and E. Batista. Enveloping actions for partial Hopf actions. *Communications in Algebra*, 38:2872–2902, 2010.
- [4] S. Caenepeel and K. Janssen. Partial (co)actions of Hopf algebras and partial Hopf-Galois theory. *Communications in Algebra*, 36:2923–2946, 2008.
- [5] M. Cohen and D. Fishman. Hopf algebra action. *Journal of Algebra*, 100:363–379, 1986.
- [6] M. Cohen and S. Montgomery. Group-graded rings, smash products and group actions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 282:237–258, 1984.
- [7] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, and S. Raianu. *Hopf algebras: an introduction*, volume 235 of *Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, 2001.
- [8] M. Dokuchaev and R. Exel. Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(5):1931–1952, 2005.
- [9] M. Dokuchaev, M. Ferrero, and Paques A. Partial actions and Galois theory. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 208:77–87, 2007.
- [10] R. Exel. Circle actions on C^* -algebras, partial automorphisms and generalized Pimsner-Voiculescu exact sequences. *J. Funct. Anal.*, 122(3):361–401, 1994.
- [11] J. R. Fisher. A Jacobson radical for Hopf module algebras. *Journal of Algebra*, 34:217–231, 1975.
- [12] J. W. Fisher and S. Montgomery. Semiprime skew group rings. *Journal of Algebra*, 52:241–247, 1978.
- [13] B. J. Gardner and Wiegandt R. *Radical theory of rings*, volume 261 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, 2004.
- [14] I. N. Herstein. *Noncommutative rings*, volume 15 of *The Carus Mathematical Monographs*. Mathematical Association of America, 1968.

-
- [15] N. Jacobson. *PI-algebras: an introduction*, volume 441 of *Lecture notes in mathematics*. Springer, 1975.
- [16] T. Y. Lam. *A first course in noncommutative rings*, volume 131 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, 2001.
- [17] V. Linchenko and S. Montgomery. Semiprime smash products and H-stable prime radicals for PI-algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135(10):3091–3098, Outubro 2007.
- [18] V. Linchenko, S. Montgomery, and L. W. Small. Stable Jacobson radicals and semi-prime smash products. *Bulletin London Math. Soc.*, 37(6):860–872, 2005.
- [19] C. Lomp. When is a smash product semiprime? A partial answer. *Journal of Algebra*, 275:339–355, 2004.
- [20] C. Lomp. Duality for partial group actions. *arXiv:0711.0849 [math.RA]*, Novembro 2007.
- [21] M. E. Lorenz and Lorenz M. Observations on crossed products and invariants of Hopf algebras. *Arch. Math*, 63:119–127, 1994.
- [22] J. C. McConnell and J. C. Robson. *Noncommutative noetherian rings*, volume 30 of *Graduate studies in mathematics*. American Mathematical Soc., 2001.
- [23] S. Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings*, volume 82 of *CBMS Lecture Notes*. American Mathematical Soc., 1993.
- [24] S. Montgomery and H. J. Schneider. Prime ideals in Hopf Galois extensions. *Israel Journal of Mathematics*, 112:187–235, 1999.
- [25] L. H. Rowen. *Polynomial identities in ring theory*, volume 84 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, 1980.
- [26] S. Zhang. The radicals of Hopf module algebras. *arXiv:math/0311522 [math.QA]*, Novembro 2003.