Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Ações parciais de grupos sobre anéis: o skew anel de grupo parcial e o subanel dos invariantes.

por

João Roberto Lazzarin

Agosto de 2006

Tese submetida por João Roberto Lazzarin* como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero

Banca Examinadora:

Dr. Antônio Paques

Dr. Mikhajolo Dokuchaev

Dr. Eduardo do Nascimento Marcos

Dr. Wagner Oliveira Cortes

Data de Defesa: 18 de agosto de 2006

*Bolsista do CNPq de 09/2003 a 02/2006 e 07/2006 a 08/2006 e da Capes de 03/2006 a 06/2006.

A meu filho Mauricio.

Agradecimentos

A minha esposa Kátia que sempre me incentivou.

Ao professor Miguel Ferrero que soube conduzir-me na direção certa.

Aos professores: Oscar Janesch, Paul Otterson, Antônio Paques, Leonardo Bonorino, Wagner Cortes, Christian Lomp, Paula Lomp, Alveri Sant'Ana e Denilson Gomes pela ajuda direta ou indireta.

A secretária da PPGMAT Rosane Reginatto, sempre atenta a vida burocrática dos alunos.

Aos familiares e amigos: Kamylle, Santina, José Arão, Carla, Rosa Maria, Henrique Severino, Jorge Elias, Albertina, Katy Regina, Carlos Augusto, Mauri Bellei, Carlos Cezário, Rodolfo e Renne. Todos diretamente atentos ao que eu fazia.

Aos colegas que sempre apareciam com boas sugestões para lidar com a vida de doutorando: Virginia, Ari, Edson Figueiredo, Edson Werle, Edilson Miranda, Giselle, Jesus, Bárbara, Leandro, Lucinéia, Fidelis, Carmen, Pedro, Edite, Luciane e Paulo.

Agradecimento as instituições: CNPq, CAPES, UFSM, UFRGS e FCUP(Portugal).

Resumo

Ações parciais de grupos sobre anéis: o skew anel de grupo parcial e o subanel dos invariantes.

Neste trabalho consideramos uma ação parcial α de um grupo G sobre um anel com unidade R, que admite uma envolvente T. Provamos que muitas das propriedades de R são transferíveis para T e vice-versa (por exemplo: artinianidade, semisimplicidade, etc). Também provamos que muitas propriedades bem conhecidas para ações (globais) de grupos sobre anéis, podem ser generalizadas para o caso parcial. Dentre estas, para o skew anel de grupo parcial $R *_\alpha G$, provamos duas versões do famoso teorema de Maschke e estabelecemos fórmulas envolvendo radicais hereditários. Artinianidade, noetherianidade, semisimplicidade, von Neumann regularidade, questões sobre dimensão uniforme e sobre anéis de Goldie são estudadas para $R *_\alpha G$ e para o subanel invariante sob a ação parcial R^α. Finalizamos, construindo um contexto de Morita entre R^α e $R *_\alpha G$, estabelecendo condições para que estes anéis sejam Morita equivalentes.

Abstract

Partial actions of groups on rings: the parcial skew group ring and the invariant subring.

In this work we consider a partial action α of a group G on a ring with identity R, which possesses one enveloping T. We prove that many of the properties of R can be transfered to T, and vice-versa. (for example: artinianity, semisimplicity, etc). We prove also that many well-known properties about (global) actions of groups on rings can be generalized for partial actions. Therewith, for the parcial skew group ring $R *_\alpha G$, we prove two versions of well-known Maschke theorem and formulas involving hereditary radicals. Artinianity, noetherianity, semi-simplicity, von Neumann regularity and questions about uniform dimension and Goldie rings are studied for $R *_\alpha G$ and for the subring of invariants R^α. We also construct a Morita context for R^α and $R *_\alpha G$, establishing conditions for that rings to be Morita equivalents.

Sumário

Introdução

O conceito de ação parcial de grupos apareceu independentemente em várias áreas da matemática. Na teoria de álgebras de operadores, este conceito proporcionou o aparecimento de poderosas ferramentas, gerando uma série de novas descobertas (ver por exemplo:[1],[14] e [15]).

Dada uma ação parcial sobre um objeto, é natural perguntar se esta não é uma restrição de uma ação global definida sobre um objeto maior. Tal ação global é chamada de ação envolvente. Ações envolventes foram consideradas inicialmente por F. Abadie em sua tese de Doutorado, em 1999 (ver também [1]).

O conceito de ações parciais foi introduzido, já num contexto puramente algébrico, por M. Dokuchaev e R. Exel no artigo [11]. Nesse mesmo trabalho encontramos condições necessárias e suficientes para que uma ação parcial tenha envolvente. Os artigos [10] e [16] também tratam, num ponto de vista puramente algébrico, de condições para existência de envolventes para uma ação parcial.

A existência de uma envolvente para uma ação parcial passa a ter papel importante na obtenção de generalizações de resultados conhecidos das ações globais para o caso parcial. Os primeiros trabalhos que utilizam-se da envolvente para obtenção de generalizações de resultados aparecem em trabalhos recentes na teoria de Galois (ver: [12]) e na teoria de skew anéis de polinômios parciais (ver: [6] e [7]).

O skew anel de grupo parcial foi introduzido em [11], onde provou-se que este anel nem sempre é associativo. Porém, nos casos em que existe uma envolvente, ele está mergulhado no skew anel de grupo da envolvente, herdando deste, a associatividade. Por sua vez, em [12] encontramos pela primeira vez, o conceito de subanel dos elementos invariantes parciais, juntamente com o conceito de traço parcial. Seus autores introduziram nesse artigo, a noção de extensão galoisiana parcial e desenvolveram uma teoria de Galois para este tipo de extensão, na qual a ação parcial tem uma envolvente.

Há muita literatura que trata de propriedades referentes ao skew anel de grupo global e do anel dos elementos invariantes sob ações globais (ver por exemplo:[4], [19], [22], [24] and [26]). A questão natural então é saber quais dessas bem conhecidas propriedades, poderão ser transferidas para o caso das ações parciais com envolvente. Trabalhar estas questões é o eixo central de nossa tese.

Este trabalho tentará, na medida do possível, ser auto-suficiente. No Capítulo 1, trataremos das principais definições e resultados que necessitaremos, tanto para ações globais quanto para ações parciais. Muitas definições e resultados, principalmente os que se referem a ações globais são bem conhecidos. Mesmo assim, em cada caso daremos ao menos uma referência para possíveis consultas de detalhes. Também no Capítulo 1, fixaremos notações que serão usadas ao longo de toda a tese.

O anel envolvente de uma ação parcial, quando existe, pode ser expresso como uma soma de ideais. Estes ideiais são todos isomorfos ao anel sob o qual a ação parcial está agindo. Portanto o anel envolvente é apenas um caso particular de um anel $T = \sum_i A_i$, onde cada A_i é um ideal de T. No Capítulo 2, provaremos que, sob certas condições, propriedades como: artinianidade (noetherianidade) à esquerda, semisimplicidade, semiprimidade, von Neumann regularidade, dentre outras, são todas transferíveis de T para os ideais A_i e vice-versa. Com isso podemos levantar à envolvente tais propriedades, e em seguida transferirmos as propriedades válidas para ações globais, ao caso parcial. Finalizamos o capítulo com um estudo sobre o que chamaremos de ação parcial induzida por um ideal invariante sob uma ação parcial.

O Capítulo 3 é dedicado ao skew anel de grupos parcial $R *_\alpha G$, onde α denota a ação parcial de um grupo G sobre um anel R. Dentre as propriedades transferidas do caso global ao parcial, destacamos duas versões do bem conhecido Teorema de Maschke. Por exemplo, numa delas provamos que $R *_\alpha G$ é semisimples, sempre que R for semisimples e o traço parcial da unidade tem inverso em R. Fórmulas que envolvem o radical de Jacobson, denotado por J(.), dos anéis R e $R *_\alpha G$, como por exemplo:

$$J\left(R *_\alpha G\right)^{|G|} \subseteq J\left(R\right) *_\alpha G \subseteq J\left(R *_\alpha G\right),$$

são provadas ainda nesse capítulo. Questões como artinianidade (noetherianidade) à esquerda, semisimplicidade, semiprimidade e von Neumann regularidade envolvendo o skew anel de grupo parcial também são estudadas neste capítulo.

O subanel de R formado pelos elementos invariantes pela ação parcial α, denotado por R^α, tem suas propriedades estudadas no Capítulo 4. Em destaque, provamos que para um grupo finito que age pela ação parcial α sobre um anel R, que possui envolvente, então R^α é isomorfo ao subanel formado pelos elementos invariantes pela ação global envolvente. Isso faz com que propriedades conhecidas deste último, possam ser transferidas para o primeiro. Provamos também que se R é semiprimo e o traço parcial da unidade tem inverso em R, então R^α é semiprimo, e além disso, todo ideal unilateral não nulo que é invariante sob α, tem sua imagem pelo traço parcial também não nula. Estabelecemos fórmulas envolvendo os radicais de Jacobson e primo. Por exemplo: $J\left(R^\alpha\right) = J\left(R\right) \cap R^\alpha$, sempre que a ordem do grupo tem inverso em R. Para o radical primo, vale uma fórmula análoga desde que o traço parcial da unidade não for um divisor de zero em R. A partir de fórmulas como estas, transferimos de R para R^α propriedades como semisimplicidade e semiprimidade. Outras questões como artinianidade (noetherianidade) à esquerda, dimensão uniforme e sobre anéis de Goldie são estudadas ao longo deste capítulo.

Finalmente, no Capítulo 5, inspirados em grande parte pelo artigo de Mirian

Cohen [4], estabelecemos algumas relações entre o subanel dos elementos invariantes parcial e o skew anel de grupo parcial, incluindo aqui a construção de um contexto de Morita para estes anéis. Finalizamos o capítulo com algumas condições suficientes para que tal contexto produza uma equivalência de Morita entre estes anéis.

Em toda a tese, todas as propriedades envolvendo módulos serão estudadas para módulos à esquerda. Porém salientamos que elas podem ser obtidas quase sem esforço adicional, para módulos à direita. Nossas ações parciais sempre agirão sobre anéis não necessariamente comutativos mas com unidade. As notações utilizadas serão fixadas previamente, a medida em que aparecerem no texto.

Capítulo 1

Pré-requisitos

1.1 Ações globais

Nesta seção, T denota um anel com unidade 1_T e $Aut(T)$ denota o grupo de todos os automorfismos de T. Iremos considerar sempre um grupo $G \subseteq Aut(T)$, dizendo assim que o grupo G age (globalmente) sobre o anel T. As vezes utilizaremos a notação (T, β), onde $\beta := \{\beta_g : T \to T : g \in G\}$, para destacar uma ação do grupo G sobre o anel T. Por uma questão de simplificação, muitas vezes confundiremos a ação com o próprio grupo e para cada $g \in G$, o automorfismo $\beta_g : T \to T$ será denotado simplesmente por $g : T \to T$. Observemos que o elemento neutro do grupo G, sempre age sobre T como o automorfismo identidade. Um subconjunto A de T é dito ser G-invariante, se $g(A) \subseteq A$, para todo $g \in G$. Sendo G um grupo, temos em imediato que $g(A) = A$, para todo $g \in G$. Denotaremos o subanel dos elementos invariantes de T pela ação de G, por T^G, isto é,

$$T^G = \{t \in T : g(t) = t, \text{ para todo } g \in G\}.$$

Se I é um ideal G-invariante de T, então existe uma ação global induzida sobre T/I definida por $\overline{g}(t + I) = g(t) + I$, para todo $g \in G$. Cada $\overline{g}$ é um automorfismo de $\overline{T} := T/I$, e $\overline{G} = \{\overline{g} : g \in G\} \subseteq Aut(\overline{T})$. Se G for finito, denotaremos por $|G|$, a ordem do grupo G. Também neste caso, podemos definir a aplicação traço (global), $tr_G(t) = \sum_{g\in G} g(t)$, para todo $t \in T$. É fácil ver que $tr_G(t) \in T^G$, para todo $t \in T$. Vale ainda que se $|G|^{-1} \in T$, então $tr_G(T) = T^G$. E desde que traços são preservados sobre imagens homomórficas, temos que $\overline{T}^{\overline{G}} = \overline{T^G}$, sempre que $tr_G(T) = T^G$.

O skew anel de grupo (global) de uma ação global (T, β), denotado por $T *_\beta G$, é definido como sendo um T-módulo livre à esquerda com base $\{g : g \in G\}$; isto é,

$$T{*_\beta}G = \left\{ \sum_{g\in G} t_g g : t_g \in T, \text{ e } t_g \neq 0, \text{ para somente um quantidade finita de } g \in G \right\}.$$

A soma em $T *_\beta G$ é definida de forma natural e o produto definido por:

$$ag.bh = ag(b)gh,$$

para todo $a, b \in T$ e todo $g, h \in G$.

1.2 Ações parciais

1.2.1 Definindo uma ação parcial

Os detalhes do que se seguem poderão ser encontrados nas referências [11] ou [12]. Usaremos sempre R, para denotar um anel com unidade 1_R e G para denotar um grupo com unidade 1 (ou 1_G quando houver chance de confusão). Começaremos lembrando a definição de ação parcial de um grupo G sobre um anel R.

Definição 1.2.1 *Seja G um grupo com unidade 1 e seja R um anel. Uma ação parcial α de G sobre R, é uma coleção de ideais D_g de R, com $g \in G$ e isomorfismos $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$, tais que para todo $g, h \in G$ valem:*

(i) $D_1 = R$ e α_1 é a aplicação identidade de R.

(*ii*) $D_{(gh)^{-1}} \supseteq \alpha_h^{-1}\left(D_h \cap D_{g^{-1}}\right)$.

(*iii*) $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$, *para* $x \in \alpha_h^{-1}\left(D_h \cap D_{g^{-1}}\right)$.

As condições (ii) e (iii) estabelecem que a aplicação α_{gh} é uma extensão da aplicação $\alpha_g \circ \alpha_h$ e que $\alpha_{g^{-1}} = \alpha_g^{-1}$, para todo $g \in G$.

A condição (ii) pode ser trocada por uma aparentemente mais forte condição, isto é, as condições $(i) - (iii)$ são equivalentes às seguintes três condições:

(i') $D_1 = R$ e α_1 é a aplicação identidade de R.

(ii') $D_g \cap D_{gh} = \alpha_g\left(D_{g^{-1}} \cap D_h\right)$.

(iii') $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$ para $x \in \alpha_h^{-1}\left(D_h \cap D_{g^{-1}}\right)$.

Usaremos sempre a notação (R, α) ou simplesmente α, para indicar uma ação parcial sobre o anel R. Salvo menção em contrário assumiremos, em nossas ações parciais, que cada D_g $(g \in G)$ é gerado por um idempotente central 1_g, que pode ser zero, isto é, cada D_g é um subanel com identidade 1_g, e assim, $D_g = R1_g = 1_gR$ e $D_g \cap D_h = 1_g1_hR$ para todo $g, h \in G$. Na seção 4 de [11], podemos encontrar duas identidades que nos serão úteis futuramente. Dados $g, h \in G$ e $x \in R$, então valem:

$$\alpha_g\left(1_{g^{-1}}1_h\right) = 1_g1_{gh}. \tag{1.1}$$

e

$$\alpha_h\left(\alpha_g\left(x1_{g^{-1}}\right)1_{h^{-1}}\right) = \alpha_{hg}\left(x1_{g^{-1}h^{-1}}\right)1_h. \tag{1.2}$$

1.2.2 A envolvente de uma ação parcial

A envolvente de uma ação parcial α é uma ação global β, onde cada isomorfismo $g = \beta_g$, para $g \in G$, restrito ao ideal $D_{g^{-1}}$ é exatamente a α_g. As propriedades da envolvente bem como o conceito de equivalência entre duas ações envolventes que citaremos abaixo podem ser encontradas com detalhes em [11].

Definição 1.2.2 *Uma ação (global) β de um grupo G sobre um anel T é dita ser uma envolvente da ação parcial α de G sobre um anel R, se existe um isomorfismo de anéis φ de R sobre um ideal de T, tal que para todo $g \in G$, satisfaz:*

(i) $\varphi(D_g) = \varphi(R) \cap g(\varphi(R))$.

(ii) $\varphi \circ \alpha_g(x) = g \circ \varphi(x)$ *para todo* $x \in D_{g^{-1}}$.

Denotaremos sempre por (T, β), ou simplesmente por T, essa envolvente, que é única, a menos de equivalências. Em resumo, quando a envolvente T existe, valem as seguintes propriedades:

1. $T = \sum_{g \in G} g(R)$.
2. $D_g = R \cap g(R)$.
3. $\alpha_g = g \mid_{D_{g^{-1}}}$.

Observemos que a propriedade 1. acima, fornece uma relação bastante favorável para transportamos propriedades de R para T, e vice-versa. No entanto, a existência de uma unidade para T, nos é restringida, por esta mesma propriedade. Se cada D_g tiver uma unidade, ela sempre será denotada por 1_g. Assim, por 2. acima, temos que $1_g = g(1_R)1_R$. A existência de uma unidade em cada D_g, nos é relevante, por ser condição necessária e suficiente para a existência e unicidade da envolvente, como mostra o próximo resultado.

Teorema 1.2.3 *(Teorema 4.5, em [11]) Seja R um anel com unidade. Então uma ação parcial α de um grupo G sobre R possui uma ação global envolvente β se, e somente se, cada ideal D_g $(g \in G)$ é um anel com unidade. Além disso, se β existe, ela é única a menos de equivalências.*

Exemplo 1.2.4 *1.* Toda ação global é uma ação parcial com envolvente.

2. Sejam um grupo G que age (globalmente) sobre um anel T e R um ideal de T. Para todo $g \in G$, tome $D_g := R \cap g(R)$. Defina $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$, como uma restrição de g em $D_{g^{-1}}$. Então α é uma ação parcial de G sobre R. Se R é um ideal gerado por um idempotente central distinto da unidade de T, então cada D_g tem unidade e α é uma ação não global, que tem envolvente contida em T.

1.3 O skew anel de grupo parcial

Um outro ganho com a existência de uma envolvente é que o skew anel de grupo parcial, que definiremos a seguir, é associativo. Os detalhes desta seção estão feitos em [11].

Definição 1.3.1 *O skew anel de grupo parcial correspondente a α, denotado por $R *_\alpha G$, é o conjunto de todas as somas formais*

$$\sum_{g \in G} a_g \delta_g : a_g \in D_g$$

onde δ_g são símbolos. A adição é definida pontualmente, enquanto que a multiplicação é dada pela seguinte regra:

$$a_g \delta_g a_h \delta_h = \alpha_g \left(\alpha_{g^{-1}} \left(a_g \right) a_h \right) \delta_{gh}.$$

Nem sempre $R *_\alpha G$ é um anel associativo. Mas existem condições suficientes para que isso ocorra, uma delas é o fato de α ter envolvente, como vemos no seguinte resultado:

Teorema 1.3.2 *Se (T, β) é uma ação envolvente da ação parcial (R, α), então o skew anel de grupo parcial $R *_\alpha G$, está mergulhado em $T *_\beta G$. Em particular, $R *_\alpha G$ é associativo.*

Outra condição suficiente para termos associatividade no skew anel de grupo parcial é o fato de R ser semiprimo. Neste caso a associatividade de $R *_\alpha G$ independe da ação parcial.

Teorema 1.3.3 *Se R é semiprimo, então o skew anel de grupo parcial $R *_\alpha G$ é sempre associativo.*

Lembremos da seção 18, do capítulo 7 de [21] que um *contexto de Morita* é uma sêxtupla $(A, B, V, W, \Gamma, \Gamma')$, onde:

1. A e B são anéis,
2. V é um (A,B)-bimódulo e W é um (B,A)-bimódulo,
3. $\Gamma : V \otimes_B W \to A$ e $\Gamma' : W \otimes_A V \to B$ são homomorfismos de bimódulos

que satisfazem as chamadas *condições de associatividade*:

$$v_1\Gamma'(w \otimes v_2) = \Gamma\,(v_1 \otimes w)\,v_2,$$

para todo $v_1, v_2 \in V$ e $w \in W$ e

$$\Gamma'(w_1 \otimes v)w_2 = w_1\Gamma\,(v \otimes w_2)$$

para todo $v \in V$ e $w_1, w_2 \in W$.

Diremos que os anéis A e B são *Morita equivalentes*, se no contexto de Morita, Γ e Γ' forem sobrejetoras. Isto equivale a dizer que as suas respectivas categorias de módulos à esquerda são equivalentes. Quando isso ocorre, todas as propriedades que podem ser caracterizadas via módulo à esquerda, (chamadas de *Morita invariantes*) são transferíveis de A para B e vice-versa. As principais propriedades Morita invariantes que aparecem nesse trabalho são: artinianidade, noetherianidade, semisimplicidade, von Neumann regularidade e propriedades de radicais (semiprimidade, J-semisimplicidade, etc).

O próximo resultado estabelece uma equivalência de Morita entre $R*_\alpha G$ e $T*_\beta G$, o que permite transferirmos propriedades conhecidas para skew anéis de grupo global ao skew anel de grupo parcial.

Teorema 1.3.4 *(Teorema 5.4, em [11])Se a envolvente T tem unidade, então $R*_\alpha G$ e $T*_\beta G$ são Morita equivalentes.*

Usamos a notação $A \overset{M}{\simeq} B$, para indicar que os anéis A e B são Morita equivalentes.

1.4 O subanel dos invariantes parciais

A definição do subanel dos invariantes pela ação parcial foi estabelecida pela primeira vez em [12], todos os detalhes desta seção podem ser vistos nesta mesma referência. Observemos que aqui toda ação parcial (R, α) tem uma envolvente (T, β), o que equivale, segundo o Teorema 1.2.3, que cada ideal D_g tem uma unidade 1_g, para todo $g \in G$.

Definição 1.4.1 *O subanel dos elementos invariantes de R sob a ação parcial α, denotado por R^α, é definido por:*

$$R^\alpha = \{x \in R : \alpha_g(xa) = x\alpha_g(a) \text{ para todo } g \in G \text{ e todo } a \in D_{g^{-1}}\}.$$

Desde que $1_g \in D_g$, para todo $g \in G$, podemos reduzir R^α a :

$$R^\alpha = \{x \in R : \alpha_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g, \text{ para todo } g \in G\}.$$

Para G finito podemos considerar a aplicação traço parcial, definida por:

$$tr_\alpha(r) = \sum_{g \in G} \alpha_g(r1_{g^{-1}}),$$

para todo $r \in R$. Naturalmente, pode-se provar que $tr_\alpha(r) \in R^\alpha$. Lembrando que da seção 1.1, temos que $tr_G(t) = \sum_{g \in G} g(t)$ é a aplicação traço (global) agindo em T, podemos relacionar estas duas aplicações do seguinte modo:

Proposição 1.4.2 *(Lema 2.1, em [12])Para um grupo finito G, valem as seguintes afirmações:*

1. $tr_\alpha : R \to R^\alpha$ *é R^α-linear à direita e à esquerda.*

2. $tr_\alpha (r) = tr_G (r)\, 1_R$, *para todo $r \in R$.*

3. $tr_G (T) = tr_G (R)$.

Um corolário que sai imediato desse resultado:

Corolário 1.4.3 *Para um grupo finito G, temos que tr_G é sobrejetor se, e somente se, tr_α é sobrejetor.*

Para um grupo finito G, denote os elementos de G por $G = \left\{1 = g_1, ..., g_{|G|}\right\}$, então a envolvente tem unidade, que pode ser expressa por:

$$1_T = \sum_{1\leq l\leq |G|} \sum_{i_1<i_2<...<i_l} (-1)^{l+1} g_{i_1} (1_R) ... g_{i_{l-1}} (1_R)\, g_{i_l} (1_R)\,, \tag{1.3}$$

(provaremos isto num contexto mais geral no capítulo 2). Ainda em [12], podemos encontrar a seguinte aplicação que nos será útil no capítulo 4:

Definição 1.4.4 $\Psi : R^\alpha \to T^G$ *definida por*

$$\Psi (x) = \sum_{1\leq l\leq |G|} \sum_{i_1<i_2<...<i_l} (-1)^{l+1} g_{i_1} (1_R) ... g_{i_{l-1}} (1_R)\, g_{i_l} (x)\,.$$

Pode-se provar que Ψ é um homomorfismo de anéis (Ver detalhes em [12]). No capítulo 4, provaremos que Ψ é um isomorfismo de anéis, no caso em que G é um grupo finito.

1.5 Resultados conhecidos para ações globais

Os resultados que se seguem dizem respeito a uma ação global β de um grupo G sobre um anel T com unidade denotada por 1_T. Lembremos algumas definições básicas que serão utilizadas ao longo desse trabalho. Diremos que um anel T é *artiniano* (*noetheriano*) à *esquerda* se toda cadeia descendente (ascendente) de ideais à esquerda de T for estacionária. Denotando por U(T) o conjunto das unidades do anel T, o *radical de Jacobson* de um anel T, denotado por J(T), que é a interseção de todos os ideais maximais à esquerda de T também pode ser caracterizado por $J(T) = \{t \in T : 1_T - xty \in U(T), \text{ para todo } x, y \in T\}$. Diremos ainda que um anel T é J*-semisimples* se seu radical de Jacobson for nulo e desde que T é um anel com unidade, diremos que T é um anel *semisimples* se T é um anel J-semisimples e artiniano à esquerda.

1.5.1 Sobre o skew anel de grupo (global)

Listaremos aqui uma série de resultados conhecidos referentes ao skew anel de grupo (global).

Condições de cadeia e Teorema de Maschke

Dizemos que um ideal I de um anel T é *nilpotente* se existe $n > 0$, tal que $I^n = 0$ e que um anel T é *semiprimário* se seu radical de Jacobson $J(T)$ é nilpotente e o quociente $T/J(T)$ for um anel semisimples. A partir dessa definição, o importante teorema devido a Hopkins-Levitzki (ver Teorema 4.15, em [20]), garante o seguinte resultado:

Teorema 1.5.1 *Seja T um anel com unidade. Então T é artiniano à esquerda se, e somente se, T é noetheriano à esquerda e semiprimário.*

Sobre as condições de cadeia sobre o skew anel de grupo, temos (ver: [19]):

Teorema 1.5.2 *Seja G é um grupo finito. Se T é artiniano (noetheriano) à esquerda, então $T *_\beta G$ é artiniano (noetheriano) à esquerda.*

Veremos agora o bastante conhecido Teorema de Maschke (que pode ser encontrado em vários livros, ver por exemplo [24],[26] ou [19]).

Teorema 1.5.3 *(Teorema de Maschke) Seja G um grupo finito, tal que $|G|^{-1} \in T$. Se W é um submódulo de um $T *_\beta G$-módulo à esquerda V, que tem complementar em V como T-módulo à esquerda, então W tem complementar em V como $T *_\beta G$-módulo à esquerda.*

Um corolário imediato desse Teorema é o seguinte:

Corolário 1.5.4 *Seja G um grupo finito. Se T é semisimples e $|G|^{-1} \in T$, então $T *_\beta G$ é semisimples.*

Radicais hereditários

A definição de radical hereditário vem do Teorema 48, página 125 de [9]:

Teorema 1.5.5 *Para um radical rad. São equivalentes*

(a) Se I é um ideal de T e $T = rad\,(T)$, então $I = rad\,(I)$.

(b) Para todo anel T e todo ideal I de T, tem-se $rad(I) = I \cap rad(T)$.

No caso do radical satisfazer as equivalências acima, dizemos que o radical é *hereditário.*

Exemplo 1.5.6 L*istaremos alguns exemplos de radicais hereditários com suas notações usuais. A prova de que eles são hereditários estão feitas nas referências indicadas.*

1. *O radical de Jacobson: $J(T)$, já definido no começo da seção 1.5. (ver [17], pg 45).*

2. *O radical primo:* $Nil_*(T)$ *que é definido como sendo a interseção de todos os ideais primos de* T*. (ver [9], pg 141).*

3. *O nil radical superior :* $Nil^*(T)$ *que é definido como a soma de todos os ideais nil de* T*. (Lembre-se: um ideal de* T *é nil quando todos os seus elementos são nilpotentes). (ver [9], pg 135).*

4. *O radical de Brown-Mccoy:* $BM(T)$ *que é definido como sendo a interseção de todos os ideais maximais de* T*. (Lembre-se: essa definição é para anéis com unidade) (ver [9], pg 135).*

Um resultado que vale para todo radical de anéis (ver Proposição 7.16, página 54, em [19] e exemplo 10.17, página 169, em [20]), é o seguinte:

Proposição 1.5.7 *Seja rad um radical. Se* $f : A \to B$ *é um epimorfismo de anéis, então* $f\left(rad\left(A\right)\right) \subseteq rad\left(B\right)$*. Em particular se* f *é um isomorfismo de anéis, então* $f(rad(A)) = rad(B)$*.*

O radical de Jacobson

Lembremos da seção 1.5, que um anel é dito ser J-semisimples se seu radical de Jacobson J(T) for nulo. O Teorema 4.2, da página 30, em [26], nos dá o seguinte resultado, em relação ao radical de Jacobson:

Teorema 1.5.8 *Se* G *é finito, então*

$$J\left(T *_\beta G\right)^{|G|} \subseteq J\left(T\right) *_\beta G \subseteq J\left(T *_\beta G\right).$$

Além disso, se $|G|^{-1} \in T$*, então* $J\left(T *_\beta G\right) = J(T) *_\beta G$*.*

Os ideais primos e o radical primo

A proposição 10.16 da página 169 em [20], nos dá as seguintes caracterizações para um anel semiprimo:

Proposição 1.5.9 *Para todo anel T, são equivalentes:*

1. *T é um anel semiprimo.*

2. *O radical primo de T é nulo.*

3. *T não tem ideais nilpotentes não nulos.*

4. *T não tem ideais nilpotentes não nulos à esquerda.*

Dado um $m > 0$, dizer que um anel T não tem m-torção aditiva, significa dizer que dado $0 \neq t \in T$, temos $mt \neq 0$. Sobre a semiprimidade de um skew anel de grupo, o Teorema 6.10.4, em [5], nos garante que:

Teorema 1.5.10 *Seja G um grupo finito. Se T é um anel semiprimo sem $|G|$-torção aditiva, então $T *_\beta G$ é semiprimo.*

Dizemos que um ideal G-invariante I de T é *G-primo* se, para ideais G-invariantes $A, B \subseteq I$, a inclusão $AB \subseteq I$, implicar $A \subseteq I$ ou $B \subseteq I$. Com isto, o Lema 14.1 da página 132, em [26], nos dá uma caracterização dos ideais primos de $T *_\beta G$, através dos ideais G-primos de T:

Lema 1.5.11 *1. Se A é um ideal primo de $T *_\beta G$, então $A \cap T$ é um ideal G-primo de T.*
2. Se I é um ideal G-primo de T, então $I = A \cap T$, para algum A ideal primo de $T *_\beta G$.

von Neumann regularidade

Teorema 1.5.12 *Para todo anel T, são equivalentes:*

1. *Para todo $t \in T$, existe $x \in T$, tal que $t = txt$.*

2. *Todo ideal principal à esquerda é gerado por um idempotente.*

3. *Todo ideal principal à esquerda é um somando direto de* $_TT$.

4. *Todo ideal finitamente gerado à esquerda é gerado por um idempotente.*

5. *Todo ideal finitamente gerado à esquerda é um somando direto de* $_TT$.

Observe que a equivalência 1. acima, permite enunciar o mesmo teorema para ideais à direita. Diremos que um anel T é *von Neumann regular* (vNr, para encurtar) se T satisfaz as condições do teorema acima.

O lema a seguir, é imediato do Lema 1.3 da página 2, em [18]:

Lema 1.5.13 *Seja* I *um ideal de um anel* T. *O anel* T *é* vNr *se, e somente se,* I *e* T/I *são anéis* vNr.

Seja H um subgrupo de G. Então a restrição da ação β a elementos de H fornece uma ação (global) sobre T, que denotaremos por β_H. A Proposição 17.2, em [26], que relataremos a seguir, estabelece condições para que o skew anel $T *_{\beta_H} H$ seja vNr, sempre que $T *_\beta G$ o for e reciprocamente.

Proposição 1.5.14 *Seja* G *um grupo finito e* H *um subgrupo de* G.

1. *Se* $T *_\beta G$ *é* vNr, *então* $T *_{\beta_H} H$ *é* vNr.

2. *Suponha que o índice de* H *é invertível em* T. *Se* $T *_{\beta_H} H$ *é* vNr, *então* $T *_\beta G$ *é* vNr.

1.5.2 Sobre o anel dos invariantes pela ação global

Condições de cadeia

O Corolário 1.12 página 14 de [24], nos dá informações sobre as condições de cadeia do subanel T^G:

Teorema 1.5.15 *Sejam G um grupo finito tal que $|G|^{-1} \in T$, I um ideal à esquerda de T que é G-invariante e $J := I \cap T^G$.*

1. *Se T/I é um T-módulo artiniano (noetheriano) à esquerda, então T^G/J é um T^G-módulo artiniano (noetheriano) à esquerda.*

2. *Se T/I tem uma série de composição de comprimento k como um T-módulo, então T^G/J tem uma série de composição de comprimento menor ou igual a k.*

O radical de Jacobson

O Teorema 1.14 de [22], nos dá condições suficientes para que T^G seja J-semisimples:

Teorema 1.5.16 *Seja G um grupo finito que age (globalmente) sobre um anel T. Então,*

$$|G|J(T^G) \subseteq J(T).$$

Em particular, se T é J-semisimples sem $|G|$-torção, então T^G é J-semisimples.

Os Teoremas 1.14 e 1.15, encontrados nas páginas 14 e 15 respectivamente, em [24], dizem respeito ao radical de Jacobson e a semisimplicidade de T^G:

Teorema 1.5.17 *Seja G um grupo finito que age (globalmente) sobre um anel T, tal que $|G|^{-1} \in T$. Então,*

$$J(T^G) = J(T) \cap T^G.$$

Lembrando que um anel é semisimples se for artiniano e J-semisimples podemos tomar $I = \{0\}$ no Teorema 1.5.15 e usarmos o Teorema 1.5.16 (ou o Teorema 1.5.17), obtendo:

Teorema 1.5.18 *Seja G um grupo finito que age (globalmente) sobre um anel T. Se T é um anel semisimples e $|G|^{-1} \in T$, então T^G é semisimples.*

O radical primo

Dados $n \geq m \geq 0$, usaremos a notação C_n^m, para indicar o número máximo de combinações de n elementos tomados m à m. A seguinte proposição (Proposição 1.3, página 8 em [24]) é bastante útil quando a imagem de algum ideal pela aplicação traço for nilpotente. Observemos antes que se J é um ideal de T, então $tr_G(J) = \{\sum_{i=1}^{n} tr_G(x_i) :$ para $n > 0$ e $x_1, \ldots, x_n \in J\}$ é um ideal do anel T^G. Além disso, se J é G-invariante, temos $tr_G(J) \subseteq J$.

Proposição 1.5.19 *Sejam J um ideal de T que é G-invariante, $d > 0$ e $\lambda = f(|G|) + 1$, onde $f(n) = \prod_{m=1}^{n} (C_n^m + 1)$, para todo $n \geq 0$. Então*

$$(|G|\, J)^{\lambda^d} \subseteq |G|\, J'\, (tr_G(J))^d\, J,$$

onde J' é J acrescido de uma unidade.

Consequências da proposição acima, é o Teorema 1.4 e seu Corolário 1.5, encontrados na página 9 em [24], que permitem concluir que se T é semiprimo sem $|G|$-torção aditiva, então o subanel T^G também é semiprimo.

Teorema 1.5.20 . *Se T não tem $|G|$-torção aditiva e J é um ideal à esquerda de T que é G-invariante, onde $tr_G(J)$ é nilpotente de índice d, então J é nilpotente de índice no máximo $(f(|G|) + 1)^d$ (f como na Proposição 1.5.19).*

Teorema 1.5.21 *Seja T semiprimo sem $|G|$-torção aditiva. Então:*

1. *T^G é semiprimo.*

2. *Se A é um ideal à esquerda (direita) G-invariante e não nulo, então $tr_G(A) \neq 0$.*

Definição 1.5.22 *Um grupo G é dito ter traço (global) não-degenerado sobre o anel T se satisfaz as propriedades 1. e 2. do teorema acima.*

O Teorema 1.9 página 12 de [24], relaciona os radicais primos dos anéis T e T^G:

Teorema 1.5.23 *Seja G um grupo finito. Se T não tem $|G|$-torção, então*

$$Nil_*(T^G) = Nil_*(T) \cap T^G.$$

Anéis de Goldie

Seja M um T-módulo à esquerda e N um submódulo de M. Diremos que N é essencial em M se, dado qualquer submódulo não nulo L de M, tivermos $N \cap L \neq 0$. Usaremos a notação $N <_e M$ para indicar que N é um submódulo essencial de M. O submódulo singular à esquerda é dado por $Z({}_TM) = \{a \in M : Ea = 0, \text{ para algum ideal essencial à esquerda} E \text{de } T\}$. Usaremos a notação $Z(T)$ para indicar $Z({}_TT)$, o ideal singular à esquerda de T.

Um T-módulo à esquerda M, é dito ter dimensão uniforme infinita se ele contém uma soma direta infinita de T-submódulos, não nulos à esquerda. Do contrário, pode-se provar que existe um número inteiro $n > 0$, tal que existe em M uma soma direta de n submódulos não nulos à esquerda e que toda soma direta de T-submódulos não nulos à esquerda de M, tem no máximo n parcelas. Tal número é chamado de dimensão uniforme de M e em qualquer caso, utilizamos a notação $udim\,{}_TM$. Podemos ter portanto $udim\,{}_TM = \infty$. Por comodidade usaremos a notação $udim\,T$ para indicar $udim\,{}_TT$.

Seja $A \subseteq T$, denotemos por $ran_T(A) := \{t \in T : At = 0\}$ o *anulador à direita de A em T* e por $lan_T(A) := \{t \in T : tA = 0\}$ *o anulador à esquerda de A em T*. Diremos que um anel satisfaz a *condição das cadeias ascendentes para anuladores à esquerda*, se toda cadeia ascendente de ideais anuladores à esquerda for estacionária. Seja $A \subseteq T$, Diremos que um elemento $x \in T$ é *regular* se o ideal anulador à esquerda $lan_T(x) = lan_T(\{x\})$ e seu anulador à direita $ran_T(x) = ran_T(\{x\})$ são ambos nulos, isto é, $x \in T$ é regular se, e somente se, não for um *divisor de zero* em T. Sobre anuladores e ideais essenciais, na página 57, em [23], podemos encontrar a seguinte ferramenta que é relevante na prova do Teorema de Goldie e que usaremos futuramente:

Proposição 1.5.24 *Sejam T um anel semiprimo tal que $udim\, T < \infty$, com $Z(T) = 0$, e E um ideal essencial à esquerda de T. Então valem:*

1. *E contém um elemento c tal que $lan_T(c) \cap E = 0$.*

2. *E é essencial se, e somente se, E contém um elemento regular de T.*

Definição 1.5.25 *Dizemos que um anel com unidade T é um anel de Goldie à esquerda se $udim\, T < \infty$ e T satisfaz a condição das cadeias ascendentes para anuladores à esquerda.*

Finalmente, o Teorema 3.6 da página 58, em [23], nos dá a seguinte versão do Teorema de Goldie:

Teorema 1.5.26 *(Teorema de Goldie). As seguintes condições sobre um anel T são equivalentes:*

1. *T é um anel de Goldie à esquerda semiprimo.*

2. *T é um anel semiprimo, $Z(T) = 0$ e $udim\, T < \infty$.*

Listaremos agora outros resultados sobre ideais essenciais e dimensão uniforme que necessitaremos. Iniciamos com o Lema 5.1.1, página 9 de [24], que nos dá uma maneira de obtermos ideais essenciais à esquerda em T^G a partir de ideais essenciais à esquerda de T:

Proposição 1.5.27 *Seja G um grupo que tem traço (global) não-degenerado sobre T. Se $E' <_{e\ T} T$, então $E' \cap T^G <_{e\ T^G} T^G$.*

Ainda referente a grupos que tem traço não-degenerado sobre T, temos o Teorema 5.3 da página 71 e o Corolário 5.4 da página 73, em [24]. Antes de enunciá-los, observemos que a notação $Q(T)$ indicará sempre o anel clássico de quocientes à esquerda, ou seja, $Q(T) = \{a^{-1}b : a, b \in T$ e a não é um divisor de zero em $T\}$. Dado um T-módulo à esquerda M, denotaremos por $Q(_TM)$ ao módulo clássico de quocientes à esquerda, isto é, $Q(_TM) = Q(T) \otimes_T M$ e que U(T) sempre denota o conjunto das unidades do anel T.

Teorema 1.5.28 *Seja G um grupo que tem traço (global) não-degenerado sobre T. Então valem:*

1. *$udim\, T < \infty$ se, e somente se, $udim\, T^G < \infty$. Neste caso*

$$udim\, T^G \leq udim\, T \leq |G| udim\, T^G.$$

2. *Se $x \in T^G$ é regular em T^G, então x é regular em T.*

3. *$Z(T) \cap T^G \subseteq Z(T^G)$.*

4. *T é um anel de Goldie à esquerda se, e somente se, T^G é um anel de Goldie à esquerda . Neste caso, $Q(T)^G = Q(T^G)$ e $Q(T) =_{reg(T^G)} T$, a localização de T no conjunto $reg(T^G)$, formado pelos elementos regulares de T^G.*

Uma consequência disso é o Corolário 5.4 da página 73, em [24]:

Corolário 1.5.29 *Sejam T é um anel semiprimo e G um grupo que tem traço não-degenerado sobre T. Então T é semisimples se, e somente se, T^G é semisimples.*

Juntando este Corolário com o Teorema 1.5.21, obtemos o Teorema 26.7 da página 269, em [26]:

Teorema 1.5.30 *Seja T um anel semiprimo sem $|G|$-torção aditiva. Então T é semisimples se, e somente se, T^G é semisimples.*

1.5.3 Outros resultados

Exibiremos aqui alguns outros resultados que usaremos ao longo do texto. Iniciando com o bem conhecido Lema de Nakayama, cuja prova pode ser encontrada na página 64, em [20]:

Teorema 1.5.31 *(Lema de Nakayama):Seja V um T-módulo à esquerda finitamente gerado. Se $J(T)V = V$, então $V = 0$.*

Seja A um anel. Dado um A-módulo à direita (esquerda) M, usaremos a notação $End_A(M)$ para indicar o anel dos A-endomorfismos à direita (esquerda) de M. Dizemos que um A-módulo à direita (esquerda) M é um *gerador* para a categoria de A-módulos à direita (esquerda), se existe um epimorfismo de módulos à direita (esquerda) de alguma soma direta de cópias de M sobre A. Sobre este assunto, na página 190 em [13], podemos encontrar o seguinte resultado, que é conhecido como sendo um dos teoremas de Morita:

Teorema 1.5.32 *Sejam M um A-módulo à direita e $B = End_A(M)$ e consideremos de modo natural, M como um B-módulo à esquerda. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *M é um gerador para a categoria dos A-módulos à direita.*

2. *M é um B-módulo à esquerda, finitamente gerado projetivo e $A = End_B(M)$.*

O Teorema 20, juntamente com o Corolário 23, encontrados nas páginas 293-295 em [3], podem ser resumidos no seguinte resultado:

Teorema 1.5.33 *Sejam A e B anéis, V um $(A;B)$-bimódulo e W um $(B;A)$-bimódulo e sejam ainda, $\Gamma : V \otimes_B W \to A$ e $\Gamma' : W \otimes_A V \to B$, aplicações tais que $(A, B, V, W, \Gamma, \Gamma')$ é um contexto de Morita. Então valem:*

1. *$\Gamma(V \otimes rad(B)W) \subseteq rad(A)$.*

2. $\Gamma'(W \otimes rad(A)V) \subseteq rad\,(B)\,.$

Em ambos os casos rad indica um dos seguintes radicais: Primo, Jacobson, Nil ou localmente nilpotente.

Seja G um grupo finito agindo (globalmente) sobre o anel T. Dizemos que T é uma G-extensão galoisiana de T^G, se

1. $T^G = tr_G(T)$.

2. existem $x_i, y_i \in T$, $1 \leq i \leq n$, tal que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i g\,(y_i) = \begin{cases} 1 \text{ se } g = 1 \\ 0 \text{ se } g \neq 1 \end{cases}$, para todo $g \in G$.

Para extensões galoisianas, o Lema 1.25 de [4], nos dá o seguinte resultado:

Teorema 1.5.34 *Seja T um anel semiprimo que é uma G-extensão galoisiana de T^G. Então T^G é Morita equivalente a $T *_\beta G$. Em particular valem:*

1. *T é finitamente gerado, fiel e projetivo como um T^G-módulo à esquerda e um $T *_\beta G$-módulo à esquerda.*

2. $T *_\beta G \backsimeq End_{T^G}\,(T)$ *e* $T^G \backsimeq End_{T *_\beta G}\,(T)\,;$ $T *_\beta G \backsimeq {}_{T *_\beta G}\,(T \otimes_{T^G} T)$ *e* $T^G \backsimeq {}_{T^G}\left(T \otimes_{T *_\beta G} T\right)$.

3. *T^G é somando direto de ${}_{T^G}T \ \ (T_{T^G})$.*

Seja α uma ação parcial de um grupo finito G sobre um anel não comutativo R. A Definição 3.1 e Observação 3.5, em [12], nos dá a definição de extensão galoisiana parcial:

Definição 1.5.35 *Dizemos que R é uma extensão galoisiana parcial de R^α, com ação parcial α (uma α-extensão de Galois, para encurtar), se*

1. $R^\alpha = tr_\alpha(R)$

2. existem $x_i, y_i \in R$, $i = 1, ..., n$ tal que $\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_g (y_i 1_{g^{-1}}) = \begin{cases} 1 \text{ se } g = 1 \\ 0 \text{ se } g \neq 1 \end{cases}$, para todo $g \in G$.

O resultado que une estas definições provêm do Teorema 3.3, em [12] e do Corolário 1.4.3:

Teorema 1.5.36 *Se α é uma ação parcial de um grupo finito G sobre um anel R, com envolvente T. Então, são equivalentes:*

1. *T é uma G-extensão de Galois (global) de T^G.*

2. *R é uma α-extensão de Galois parcial de R^α.*

Capítulo 2

Resultados Gerais

Dividimos este capítulo em duas partes. Na primeira parte consideramos anéis que são somas de ideais. Em particular, sendo a envolvente de uma ação parcial uma soma de ideais determinados pelo anel dado, estes resultados permitirão transferir propriedades entre este e sua envolvente. Na outra parte, definimos ações parciais induzidas de uma ação parcial dada sobre um fator do anel por um ideal I, quando o ideal I satisfaz certa condição de invariância a respeito dessa ação parcial.

2.1 Anéis que são somas de ideais

Sejam L um conjunto de índices qualquer, T um anel (possivelmente sem unidade) e $\{A_i\}_{i\in L}$ uma família de ideais de T, onde cada A_i tem unidade, que denotamos por 1_i, e $T = \sum_{i\in L} A_i$. Nosso objetivo é estudar algumas propriedades que podemos transferir dos A_i para T e vice-versa. Iniciaremos com uma observação sobre a notação no caso de L ser finito.

Observação 2.1.1 Para $T = \sum_{i\in L} A_i$, as vezes, abusaremos da linguagem usando a expressão "L é finito" para indicar que existem $n > 0$ e índices $i_1, i_2, ..., i_n \in L$ tais que

$T = \sum\limits_{k=1}^{n} A_{i_k}$. Quando não houver margem para dúvidas, escreveremos simplesmente $L = \{1, 2, ..., n\}$ e $T = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$.

2.1.1 Uma unidade para T

Lema 2.1.2 *Seja $T = \sum\limits_{i \in L} A_i$ um anel onde cada ideal A_i tem unidade 1_i. Então,*

1. *Para $i \in L$, $1_i \in C(T)$ (o centro de T) e $1_i T = T 1_i = A_i$.*

2. *T tem unidade $\Leftrightarrow$ L é finito. Neste caso, existe $n > 0$, tal que $L = \{1, 2, ..., n\}$ e $T = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$. Ainda, a unidade 1_T de T pode ser expressa por:*

$$1_T = \sum_{1 \le l \le n} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_l} (-1)^{l+1} 1_{i_1} 1_{i_2} \ldots 1_{i_{l-1}} 1_{i_l}. \tag{2.1}$$

Tal elemento ainda pode ser expresso como uma soma de idempotentes ortogonais centrais de T, isto é,

$$1_T = e_1 + e_2 + \cdots + e_n \tag{2.2}$$

onde $e_1 = 1_1, e_j = (1_T - 1_1)(1_T - 1_2) \cdots (1_T - 1_{j-1}) 1_j$ para $2 \le j \le n$.

Prova.

1. Para $t \in T$, temos $t1_i \in TA_i \subseteq A_i$ e $1_i t \in A_i T \subseteq A_i$, assim $t1_i = 1_i (t1_i) = (1_i t) 1_i = 1_i t$, além disso $A_i = 1_i A_i \subseteq 1_i T \subseteq A_i T \subseteq A_i$.

2. No caso de L ser finito, provaremos a fórmula acima descrita para 1_T, usando indução sobre n, bastando para isso, observarmos que $\sum\limits_{i=1}^{j} A_i$ é um ideal de T, para todo $j = 1, \ldots, n$. O caso $n = 1$ é trivial e se o lema vale para $n - 1$, então

$$1_{T_{n-1}} = \sum_{1 \le l \le n-1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_l < n} (-1)^{l+1} 1_{i_1} 1_{i_2} \ldots 1_{i_{l-1}} 1_{i_l}$$

é a unidade do ideal $T_{n-1} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} A_i$ e já que todo elemento de $T = T_{n-1} + A_n$ é da forma $a + b$, onde $a \in T_{n-1}$ e $b \in A_n$, facilmente obtemos

$$(1_n + 1_{T_{n-1}} - 1_n 1_{T_{n-1}})(a + b) = a + b.$$

Resta provarmos que 1_T dado em (2.1) satisfaz

$$1_n + 1_{T_{n-1}} - 1_n 1_{T_{n-1}} = 1_T.$$

Observando que $1_T - 1_{T_{n-1}}$ tem todos os termos em que 1_n não aparece cancelados, então

$$1_T - 1_{T_{n-1}} = 1_n - 1_{T_{n-1}} 1_n$$

que é exatamente o que precisávamos. Do mesmo modo podemos provar que

$$1_T = e_1 + \cdots + e_n$$

é unidade de T. Observemos que

$$e_i e_j = (1_T - 1_1)...(1_T - 1_{i-1})1_i(1_T - 1_1)...(1_T - 1_{j-1})1_j,$$

portanto

$$e_i^2 = (1_T - 1_1)^2(1_T - 1_2)^2 \dots (1_T - 1_{i-1})^2 1_i^2 = (1_T - 1_1)(1_T - 1_2) \dots (1_T - 1_{i-1})1_i = e_i;$$

e para $i \neq j$, digamos, $i < j$, temos 1_i fator de e_i, $(1_T - 1_i)$ fator de e_j e $e_i(1_T - 1_i) = 0$, portanto $e_i e_j = 0$. Reciprocamente, se T tem unidade 1_T, então existirão $n > 0$ e índices $i_1, i_2, ..., i_n \in L$ tais que $1_T = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n}$ para certos $a_{i_k} \in A_{i_k}$, $k = 1, 2, ..., n$. É fácil concluir que $T = \sum_{k=1}^{n} A_{i_k}$.

■

Observação 2.1.3 Seja $T = \sum_{i\in L} A_i$, onde cada ideal A_i tem unidade 1_i. Então, para $n > 0$ e $j_1, j_2, ..., j_n \in L$, o ideal $T_{(j_1,j_2,...,j_n)} := \sum_{k=1}^{n} A_{j_k}$ é um anel com unidade que pode ser expressa por:

$$1_{T_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}} = \sum_{1\le l\le n} \sum_{j_{i_1}<j_{i_2}<\ldots<j_{i_l}} (-1)^{l+1} 1_{j_{i_1}} 1_{j_{i_2}} \ldots 1_{j_{i_l}}, \tag{2.3}$$

ou ainda por:

$$1_{T_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}} = \sum_{k=1}^{n} e_k, \tag{2.4}$$

onde $e_1 = 1_{i_1}$ e $e_k = (1_{T_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}} - 1_{j_1})(1_{T_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}} - 1_{j_2}) \cdots (1_{T_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}} - 1_{i_{k-l}})1_{i_k}$ para $2 \le k \le n$, são idempotentes ortogonais centrais de T. A demonstração de tais fatos é inteiramente análoga a demonstração que fizemos para provar (2.1), portanto não a repetiremos aqui.

De agora em diante

Lema 2.1.4 *Seja $T = \sum_{i\in L} A_i$, onde cada A_i tem unidade 1_i. Então, para cada $i \in L$, valem:*

1. *Se A é um ideal à esquerda de T, então $A1_i$ é um ideal à esquerda de A_i.*
2. *Se B é um ideal à esquerda de A_i, então B é um ideal à esquerda de T.*
3. *Se A é um ideal à esquerda de T, então $A1_i = A \cap A_i$.*
4. *Se A, B são ideais à esquerda de T, tais que $A1_i = B1_i$ para todo $i \in L$, então $A = B$. Em particular, se $A.1_i = 0$ para todo $i \in L$, então $A = 0$.*
5. *E_i é um ideal essencial de A_i para todo $i \in L$, então $E := \sum_{i\in L} E_i$ é essencial em T.*

O mesmo vale para ideais à direita ou bilaterais.

Prova. 1. $A1_i \subseteq T1_i \subseteq TA_i \subseteq A_i$ e $A1_iA_i \subseteq AA_i1_i \subseteq AT1_i \subseteq A1_i$.

2. Seja B um ideal à direita de A_i, então, pelo Lema 2.1.2, $BT = (B1_i)\,T = B\,(1_iT) = BA_i \subseteq B$.

3. $A1_i \subseteq AA_i \subseteq A \cap A_i = (A \cap A_i)\,1_i \subseteq A1_i$.

4. Seja $a \in A$. Como $A \subseteq T$, existe $n > 0$, tal que $a = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{j_k}$, para certos $a_{j_k} \in A_{j_k}$, $k = 1, ..., n$. Considere $1_{T_{(j_1, j_2, ..., j_n)}} = \sum_{k=1}^{n} e_k$, como em (2.4), assim $a = a1_{T_{(j_1, j_2, ..., j_n)}} = ae_1 + ae_2 + \cdots + ae_n$. Desde que $ae_k \in A1_{i_k} = B1_{i_k}$ para todo k, então $a \in B$. De modo análogo, provamos que todo elemento de B é elemento também de A.

5. Seja $0 \neq a \in I$ um ideal à esquerda de T. Neste caso, existem $n > 0$ e índices $j_1, j_2, ..., j_n \in L$ tais que $a = \sum_{k=1}^{n} a_{j_k}$. Tomando $1_{T_{(j_1, j_2, ..., j_n)}} = \sum_{k=1}^{n} e_k$, como em (2.4), temos $a = a1_{T_{(j_1, j_2, ..., j_n)}} = ae_1 + ae_2 + \cdots + ae_n$. Desde que $a \neq 0$, temos que $ae_k \neq 0$ para algum k, e para este k, o ideal $Ie_k \neq 0$. Sendo E_{j_k} essencial em A_{j_k}, segue-se que $0 \neq Ie_k \cap E_{j_k} \subseteq I \cap E_{j_k} \subseteq I \cap E$. ■

2.1.2 Transferindo propriedades

Se $T = \sum\limits_{i \in L} A_i$ onde cada A_i é noetheriano ou artiniano à esquerda, não podemos concluir daí que T é noetheriano ou artiniano à esquerda. Por exemplo, como uma soma arbitrária de ideais de T é ainda um ideal de T, então no caso de T ser uma soma direta de infinitos ideais bilaterais A_i, todos distintos e não nulos, uma cadeia crescente $L_1 \subsetneqq L_2 \subsetneqq L_3 \cdots$ de subconjuntos de L nos dá uma cadeia crescente de ideais à esquerda (e à direita) de T, $\sum\limits_{i \in L_1} A_i \subsetneqq \sum\limits_{i \in L_2} A_i \subsetneqq \cdots$, que não é estacionária. Do mesmo modo, podemos construir uma cadeia descendentes de ideais à esquerda que não seja estacionária. No entanto, vale o seguinte resultado:

Proposição 2.1.5 *Seja $T = \sum_{i \in L} A_i$, onde cada ideal A_i tem unidade 1_i. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. T é artiniano (noetheriano) à esquerda .

2. $\exists\ i_1, ...i_n \in L$, tais que $T = \sum_{k=1}^{n} A_{i_k}$, onde cada A_{i_k} é artiniano (noetheriano) à esquerda.

3. T tem unidade e cada A_i é artiniano (noetheriano) à esquerda.

Prova. $2 \Rightarrow 1$) Sejam $T = \sum_{i=1}^{n} A_i$, onde cada A_i artiniano à esquerda, e

$$T_1 \supseteq T_2 \supseteq T_3 \supseteq \cdots$$

uma cadeia descendente de ideais à esquerda de T. Então, para cada $i = 1, ..., n$, temos que

$$T_1 1_i \supseteq T_2 1_i \supseteq T_3 1_i \supseteq \cdots$$

é uma cadeia descendente de ideais à esquerda do anel artiniano A_i, portanto é estacionária. Como existem finitos índices i, existe um $n_0 > 0$, tal que $T_j 1_i = T_k 1_i$, para $k, j \geq n_0$ e $i = 1, 2, ..., n$. Portanto, pelo item 4 do Lema 2.1.4, temos $T_j = T_k$ para $k, j \geq n_0$. Isso mostra que T é artiniano sempre que cada A_i o for. De modo inteiramente análogo, prova-se que a noetherianidade à esquerda dos A_i implica T noetheriano à esquerda.

$1 \Rightarrow 2$) Pelo Lema 2.1.4 item 2., para $i = 1, ..., n$, cada ideal à esquerda A_i é também ideal à esquerda de T. Portanto, se T é artiniano (noetheriano) à esquerda, então A_i é artiniano (noetheriano) à esquerda.

Provaremos agora que, para T noetheriano existem $i_1, ...i_n \in L$, tais que $T = \sum_{k=1}^{n} A_{i_k}$. Suponhamos que o afirmado não vale, então podemos escolher $i_1 \in L$ tal que $T \neq A_{i_1}$; em seguida escolhamos $i_2 \in L - \{i_1\}$, tal que $T \supsetneqq A_{i_1} + A_{i_2} \supsetneqq A_{i_1}$. Seguindo deste modo, podemos construir uma cadeia ascendente não estacionária de ideais

$$A_{i_1} \subsetneqq A_{i_1} + A_{i_2} \subsetneqq A_{i_1} + A_{i_2} + A_{i_3} \subsetneqq \cdots$$

contradizendo o fato de T ser noetheriano. Agora se T é artiniano, então, pelo que vimos acima, cada A_i é artiniano. Como cada A_i tem unidade, podemos aplicar o Teorema 1.5.1 e obter que cada A_i é noetheriano, consequentemente, T é noetheriano, e assim sendo, vale o afirmado também neste caso.

$2 \Leftrightarrow 3$) Imediato do item 2. do Lema 2.1.2. ■

Provaremos agora, alguns resultados sobre radicais hereditários (ver 1.5.5). Dado um radical rad, dizemos que um anel T é *rad-semisimples* quando rad(T)=0.

Proposição 2.1.6 *Sejam $T = \sum_{i \in L} A_i$, onde cada ideal A_i tem unidade 1_i, e rad um radical hereditário. Então, T é rad-semisimples se, e somente se, para todo $i \in L$, A_i é rad-semisimples.*

Prova. Pelo Teorema 1.5.5, para todo $i \in L$, $rad(A_i) = rad(T) \cap A_i$. Segue-se imediato que $rad(T) = 0$ implica $rad(A_i) = 0$. Reciprocamente, se para todo $i \in L$, $rad(A_i) = 0$, então $0 = rad(A_i) = rad(T) \cap A_i = rad(T)1_i$, para todo $i \in L$. Logo, pelo Lema 2.1.4 item 4, temos $rad(T) = 0$. ■

Dentre os radicais hereditários, destacamos o radical de Jacobson (indicado por J) e o radical primo no seguinte resultado imediato:

Corolário 2.1.7 *Seja $T = \sum_{i \in L} A_i$, onde cada ideal A_i tem unidade 1_i. Então*

1. *T é J-semisimples se, e somente se, para todo $i \in L$, A_i é J-semisimples.*
2. *T é semiprimo se, e somente se, para todo $i \in L$, A_i é semiprimo.*

Prova. O Exemplo 1.5.6, garante que os radicais de Jacobson e primo são hereditários. Logo a demonstração sai imediata da Proposição 2.1.6 e do item 2 da Proposição 1.5.9. ■

Outra consequência é a seguinte:

Teorema 2.1.8 *Seja* $T = \sum_{i \in L} A_i$*, onde cada ideal* A_i *tem unidade* 1_i*. São equivalentes:*

1. T *tem unidade e é semisimples.*

2. $\exists i_1, ...i_n \in L$*, tais que* $T = \sum_{k=1}^{n} A_{i_k}$*, onde cada* A_{i_k} *é semisimples.*

Prova. Lembremos que para anéis com unidade, ser semisimples equivale a ser J-semisimples e artiniano à esquerda. Desde cada A_i tem unidade e que no Item 2, o fato de L ser finito, implica, pelo Lema 2.1.2, que T é também um anel com unidade, então T é J-semisimples e artiniano à esquerda se, e somente se, L é finito e cada A_i é J-semisimples e artiniano à esquerda. Mas isto é justamente o que afirma a Proposição 2.1.5 juntamente com o Corolário 2.1.7. ■

Observação 2.1.9 Quando T é primo a situação se restringe muito. De fato, T é primo se, e somente se, $\exists\ j \in L$, tal que A_j é primo e $T = A_j$. Com efeito, sejam $i, j \in L$. Os ideais $T 1_i 1_j$ e $T(1_i - 1_j)$ são tais que $T 1_i 1_j T(1_i - 1_j) = T^2 1_i 1_j (1_i - 1_j) = 0$. Sendo T anel primo, temos $T 1_i 1_j = 0$ ou $T(1_i - 1_j) = 0$. O primeiro caso implica que $A_i = 0$ ou $A_j = 0$. O segundo caso implica que $A_i = A_j$. A recíproca é imediata.

Outra propriedade que podemos transferir dos A_i para T é a von Neumann regularidade (vNr, para encurtar - ver definição antes do Lema 1.5.13). O resultado que segue não exige que cada A_i tenha unidade.

Lema 2.1.10 *Sejam* T *um anel e* $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ *uma família finita de ideais de* T *que sejam* vNr *como anéis, então* $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$ *é* vNr*.*

Prova. Basta provarmos o caso $n = 2$ e usar indução. Como $\frac{A_1 + A_2}{A_2} \cong A_1$ e A_2 são vNr, segue-se direto do Lema 1.5.13, que $A_1 + A_2$ é vNr. ■

Proposição 2.1.11 *Seja* $T = \sum_{i \in L} A_i$, *então*

$$T \text{ é } vNr \Leftrightarrow \text{para todo } i \in L, A_i \text{ é } vNr.$$

Prova. $\Rightarrow$) É imediato do Lema 1.5.13.

$\Leftarrow$) Sendo L um conjunto, podemos bem ordená-lo e definir: $T_1 = A_1$, $T_\lambda = T_{\lambda-1} + A_\lambda$, se λ não for um ordinal limite, e por fim, $T_\lambda = \sum\limits_{\mu<\lambda} T_\mu$ se λ é ordinal limite. Desta forma deve existir um ordinal λ_0, tal que

$$T = T_{\lambda_0}.$$

Portanto, provando que para todo ordinal λ, T_λ é vNr, teremos provado o resultado. Para isso usaremos indução transfinita. Para $\lambda = 1$, $T_1 = A_1$, que por hipótese é vNr. Seja λ um ordinal, tal que T_μ seja vNr, para todo $\mu < \lambda$. Se λ não for ordinal limite, então, como $T_{\lambda-1}$ e A_λ são vNr, pelo Lema 2.1.10, $T_\lambda = T_{\lambda-1} + A_\lambda$ também é vNr. Se λ for ordinal limite, então cada elemento $t \in T_\lambda$ pertence a $T_{\mu_1} + T_{\mu_2} + \cdots + T_{\mu_n}$, que pelo Lema 2.1.10 é vNr, portanto existe $x \in T_{\mu_1} + T_{\mu_2} + \cdots + T_{\mu_n} \subseteq T_\lambda$, tal que $t = xtx$. Logo, também nesse caso, T_λ é vNr. ■

2.1.3 A dimensão uniforme T

Veremos agora alguns resultados para anéis semiprimos que usaremos para provar propriedades referentes aos anéis de Goldie (ver Definição 1.5.25). De agora até o final da tese, dado um anel A e um A-módulo à esquerda M, utilizaremos a notação $N <\ _AM$, para indicar que N é um A-submódulo à esquerda de M. Continuaremos a usar a notação $<_e$ para indicar submódulos essenciais.

Lema 2.1.12 *Sejam* A *um anel semiprimo, que é um ideal de um anel* T *com* $A = T.1_A$, *e* ε *um idempotente central de* T.

1. *Se* $E <_e {}_AA$, *então* $E\varepsilon <_e {}_{A\varepsilon}A\varepsilon$.

2. Se $H <_e {}_T T$, então $H \cap A <_e {}_A A$.

3. $udim_{A\varepsilon} A\varepsilon \leq udim_A A$.

4. $udim_{A\varepsilon} A\varepsilon = udim_T A\varepsilon$.

Prova. 1. Sendo A semiprimo, basta mostrarmos que $lan_{A\varepsilon}(E\varepsilon) = 0$, para $E <_e {}_A A$. Com efeito, se $a\varepsilon \in A\varepsilon$ é tal que $a\varepsilon E\varepsilon = 0$, então $0{=}a\varepsilon\varepsilon E = a\varepsilon E$. Sendo que $a\varepsilon \in A$ e $lan_A(E) = 0$, então $a\varepsilon = 0$.

2. Se $0 \neq J < {}_A A$, então $TJ \subseteq T(1_A J) = AJ \subseteq A$, isto é, J também é ideal de T. Portanto $J \cap H \neq 0$. Desde que, $J \cap (H \cap A) = J \cap H$, segue-se o resultado.

3. Se $\sum\limits_{i=1}^{n} J_i\varepsilon$ é uma soma direta de ideais à esquerda em $A\varepsilon$, então, já que cada $J_i\varepsilon < {}_A A$ para todo i, segue-se que $\sum\limits_{i=1}^{n} J_i\varepsilon$ é uma soma direta de ideais à esquerda em A.

4. Os T-submódulos à esquerda de $A\varepsilon$ coincidem com os $A\varepsilon$-submódulos à esquerda de $A\varepsilon$. Com efeito, se $J < {}_{A\varepsilon} A\varepsilon$, então $TJ = T(1_A J) = AJ = A\varepsilon J \subseteq J$. A recíproca é imediata pois $A\varepsilon \subseteq T$. ■

Corolário 2.1.13 *Seja $T = \sum_{i=1}^{n} A_i$ um anel semiprimo, onde cada ideal A_i tem unidade 1_i. Se $E_i <_e {}_{A_i} A_i$, então*

$$E := \sum_{i=1}^{n} E_i e_i <_e {}_T T,$$

onde $e_1 = 1_1, e_j = (1_T - 1_1)(1_T - 1_2)\cdots(1_T - 1_{j-1})1_j$ para $2 \leq j \leq n$.

Prova. Seja $0 \neq a \in I < {}_T T$. Como $a \in T$, temos por (2.4) que

$$a = ae_1 + ae_2 + ... + ae_n,$$

onde $e_1 = 1_1, e_j = (1_T - 1_1)(1_T - 1_2)\cdots(1_T - 1_{j-1})1_j$ para $2 \leq j \leq n$. Como $a \neq 0$, então $ae_i \neq 0$ para ao menos um $i \in \{1, ..., n\}$. O Corolário 2.1.7, garante que esse

A_i é semiprimo. Assim podemos aplicar o Lema 2.1.12 a este ideal e obter que E_ie_i é essencial em A_ie_i. Como $0 \neq ae_i \in A_iae_i$, segue-se que

$$0 \neq E_ie_i \cap A_iae_i \subseteq E \cap I,$$

o que prova que E é essencial em T. ■

Lembremos da seção 1.5.2, que $Z(A)$ denota o ideal singular à esquerda de um anel A.

Proposição 2.1.14 *Seja $T = \sum_{i=1}^{n} A_i$ um anel semiprimo, onde cada ideal A_i tem unidade 1_i. Então*

$$Z(A_i) = Z(T) \cap A_i = Z(T) .1_i.$$

para todo $i = 1, ..., n$.

Prova. A segunda igualdade é imediata do item 3 do Lema 2.1.4. Para a primeira igualdade, podemos considerar, sem perda da generalidade, que $i = 1$ e tomar $a \in Z(A_1)$. Então existe $E_1 <_e {}_{A_1}A_1$ tal que $E_1a = 0$. Pelo Corolário 2.1.13, o ideal $E' := E_1e_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} A_ie_i$ é essencial em ${}_TT$ e satisfaz $E'a = E_1a = 0$. Portanto $a \in Z(T) \cap A_1 = Z(T) .1_1$.

Reciprocamente, se $a \in Z(T) \cap A_i$, para certo $i = 1, ..., n$, então existe $H <_e {}_TT$ tal que $Ha = 0$. Pelo item 2. do Lema 2.1.12, temos $H \cap A_i = H.1_i <_e A_i$. Segue-se do fato de que $(H \cap A_i)\, a \subseteq Ha = 0$, que $a \in Z(A_i)$. ■

2.2 Propriedades da envolvente

Aqui, R é um anel com unidade 1_R e $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g,\ g \in G\}$ uma ação parcial de um grupo G sobre o anel R, onde cada D_g tem unidade 1_g. Nestas condições, o Teorema 1.2.3, garante a existência de uma envolvente que denotaremos sempre por (T, β) ou simplesmente por T.

2.2.1 Propriedades gerais

Desde que $T = \sum_{g \in G} g(R)$ e cada $g(R)$ é um ideal de T, então estaremos em condições de aplicar os resultados da seção anterior e obtermos de forma imediata os resultados que se seguem. Em algumas demonstrações usaremos a notação $G = \{g_1 = 1, g_2, ..., g_n\}$ para indicar que G é um grupo finito de ordem $|G| = n > 0$, que foi previamente ordenado de modo que o primeiro elemento é a unidade do grupo. Usaremos a notação C(A) para indicar o centro de um anel A.

Lema 2.2.1 *Para a envolvente T sempre valem:*

1. *Para todo $g \in G$, $g(1_R) \in \mathrm{C}(T)$.*

2. *Para $G = \{g_1 = 1, g_2, ..., g_n\}$, a envolvente tem unidade que pode ser expressa por*

$$1_T = \sum_{1 \leq l \leq |G|} \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_l} (-1)^{l+1} g_{i_1}(1_R) ... g_{i_{l-1}}(1_R) g_i(1_R). \tag{2.5}$$

Ou ainda por:

$$1_T = e_1 + e_2 + \cdots + e_n \tag{2.6}$$

onde $e_1 = 1_R, e_j = (1_T - 1_R)(1_T - g_2(1_R)) \cdots (1_T - g_{j-1}(1_R))g_j(1_R)$, para $2 \leq j \leq n$, são idempotentes centrais ortogonais.

Prova. 1. Podemos simplesmente aplicar o item 1 do Lema 2.1.2, ou verificar diretamente: Seja $g \in G$. Para $t \in T$ existe um $t' \in T$, tal que $t = g(t')$. Como $t'.1_R = 1_R.t'.1_R = 1_R.t'$, então, $tg(1_R) = g(t')g(1_R) = g(1_R)g(t') = g(1_R)t$.
2. Imediata do item 2 do Lema 2.1.2. ■

Teorema 2.2.2 *Seja G um grupo finito Então valem:*

1. *R é artiniano (noetheriano) à esquerda se, e somente se, T é artiniano (noetheriano) à esquerda.*

2. R é semisimples se, e somente se, T é semisimples.

Prova. Em todos os casos, levaremos em conta que $R \simeq g\,(R)$ para todo $g \in G$, portanto as propriedades de R são transferidas a todos os $g\,(R)$ e também que $T = \sum\limits_{g \in G} g(R)$. Assim sendo:
1. Imediata da Proposição 2.1.5.
2. Imediata do Teorema 2.1.8. ■

No exemplo abaixo usamos a notação $\mathbb{Z}$ para indicar o conjunto dos números inteiros.

Exemplo 2.2.3 Seja $R = Ke_1 \bigoplus Ke_2$, onde K é um corpo qualquer e e_1, e_2 são idempotentes centrais ortogonais. Considere G um grupo cíclico infinito gerado por g, que age parcialmente sobre R, pela ação parcial α, definida do seguinte modo: $\alpha_1 = id_R$ e $\alpha_{g^{\pm n}} : \underset{e_2 \mapsto e_2}{Ke_2 \to Ke_2}$, para todo $n > 0$. Considere $\{e_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, um conjunto de idempotentes centrais ortogonais e faça G agir (globalmente) sobre $T = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}} Ke_i$ do seguinte modo: $g\,(e_n) = e_{n+1}$ para $|n| \geq 3$ ou $n = 0, -1, -2; g(e_1) = e_3$ e $g(e_2) = e_2$. Não é difícil ver que $T = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}} Ke_i$ é uma envolvente para α. Obviamente T não é semisimples nem artiniano à esquerda e nem noetheriano à esquerda, apesar de R ter todas essas características.

Teorema 2.2.4 *Sejam G um grupo arbitrário e rad um radical hereditário. Então valem:*

1. R é rad-semisimples se, e somente se, T é rad-semisimples.

2. R é primo se, e somente se, T é primo e $T = R$. Neste caso, a ação α é global.

3. R é von Neumann regular se, e somente se, T é von Neumann regular.

Prova. 1. Imediata da Proposição 2.1.6.

2. Imediata da Observação 2.1.9, desde que se $T = g(R)$, para certo $g \in G$, então

$R = g^{-1}(T) = T$, e assim sendo, $D_g = g(R) \cap R = R$.

3. Imediata da Proposição 2.1.11. ■

Corolário 2.2.5 *Para G arbitrário, valem:*

1. *R é J-semisimples se, e somente se, T é J-semisimples.*

2. *R é semiprimo se, e somente se, T é semiprimo.*

Prova. Imediata do Teorema 2.2.4 item 1. ■

2.2.2 Sobre dimensão uniforme e anéis de Goldie

Nesta seção o grupo G sempre age parcialmente por uma ação parcial α, sobre um anel semiprimo R. Portanto, pelo Corolário 2.2.5, sua envolvente T também é um anel semiprimo. O objetivo aqui, é provar que R é um anel de Goldie à esquerda se, e somente se, a envolvente T é anel de Goldie à esquerda. Lembremos da Seção 1.5.2, que as notações $A <_e B$ e $udim\, A$ indicam que A é um submódulo essencial de B e a dimensão uniforme do módulo à esquerda ${}_AA$, respectivamente. O seguinte resultado é um corolário imediato dos resultados da seção 2.1:

Corolário 2.2.6 *Seja R um anel semiprimo. Se $E <_e {}_RR$, então $\sum_{g\in G} g(E) <_e {}_TT$. Em particular, Para um grupo finito $G = \{g_1 = 1, g_2, ..., g_n\}$, temos*

$$E' = \sum_{i=1}^{n} g_i(E)\, e_i <_e {}_TT,$$

onde $e_1 = 1_R, e_j = (1_T - 1_R)(1_T - g_2(1_R)) \cdots (1_T - g_{j-1}(1_R))g_j(1_R)$ para $2 \le j \le n$.

Prova. Imediata do item 5 do Lema 2.1.4 e do Corolário 2.1.13. ■

Lembremos que Z(A) denota o ideal singular à esquerda do anel A.

Proposição 2.2.7 *Seja G um grupo finito. Então*

$$Z\,(g(R)) = Z\,(T)\,g(1_R)$$

para todo $g \in G$.

Prova. Imediata da Proposição 2.1.14. ■

Proposição 2.2.8 *Seja G um grupo finito. Então*

$$udim\,R \leq udim\,T \leq |G|\,udim\,R.$$

Prova. A primeira desigualdade é imediata desde que ideais de R são ideais de T. Vamos a prova da segunda desigualdade. Pelo item 4 do Lema 2.1.12, temos $udim_T g(R) = udim\,g(R) = udim\,R$, para todo $g \in G$. Por sua vez, do item 3 do mesmo lema, temos que se ε é um idempotente central em T, então $udim\,g\,(R)\,\varepsilon \leq udim\,g\,(R) = udim\,R$, para todo $g \in G$. Usando estas desigualdades e o fato de que $T = \bigoplus_{i=1}^{n} g_i\,(R)\,e_i$, temos

$$\begin{aligned} udim\,T &= udim_T \bigoplus_{i=1}^{n} g_i\,(R)\,e_i = \sum_{i=1}^{n} udim_T\,g_i\,(R)\,e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} udim\,g_i\,(R)\,e_i \leq \sum_{i=1}^{n} udim\,g_i\,(R) \\ &= n.udim\,R = |G|\,udim\,R, \end{aligned}$$

provando assim, que a segunda desigualdade também é verdadeira. ■

Teorema 2.2.9 *Seja G um grupo finito. R é um anel de Goldie à esquerda se, e somente se, T é um anel de Goldie à esquerda.*

Prova. Lembremos que, do Corolário 2.2.5 item 2, R é semiprimo se e somente se, T é semiprimo e que assim, basta verificar em cada caso, que a dimensão uniforme é finita e que o módulo singular é nulo. A Proposição 2.2.8 acima, garante que $udim\, R$ é finita se, e somente se, $udim\, T$ é finita. Verifiquemos então o que ocorre com os respectivos módulos singulares.

Se $Z(R) = 0$, então $Z(g(R)) = 0$ para todo $g \in G$. Temos, pela Proposição 2.2.7, que $Z(T)g(1_R) = Z(g(R)) = 0$, para todo $g \in G$. Segue-se por (2.5) que $Z(T) = Z(T).1_T = 0$. Reciprocamente, se $Z(T) = 0$, então, pela mesma Proposição 2.2.7, $Z(R) = Z({}_T T).1_R = 0$. ■

2.2.3 Um lema importante

Agora veremos um lema que será bastante útil nos capítulos 2 e 3. Antes observemos o seguinte:

Observação 2.2.10 Desde que a envolvente $T = \sum_{g \in G} g(R)$, se tomarmos $n > 0$ e escolhermos n elementos de G, digamos, $g_1, ..., g_n$ e fixarmos essa ordenação, então, como vimos na observação 2.1.3, o ideal de T definido por $T_{(g_1,...,g_n)} := \sum_{i=1}^{n} g_i(R)$ tem unidade expressa por:

$$1_{T_{(g_1,...,g_n)}} = \sum_{1 \le l \le n} \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_l} (-1)^{l+1} g_{i_1}(1_R) ... g_{i_{l-1}}(1_R)\, g_{i_l}(1_R). \tag{2.7}$$

Tal unidade também pode ser expressa como uma soma de idempotentes centrais ortogonais de $T_{(g_1,...,g_n)}$.

Lembremos que a notação U(A) indica o subconjunto das unidades de um anel A.

Lema 2.2.11 *Sejam G um grupo (não necessariamente finito) que age parciamente sobre um anel R que tem envolvente T e $m > 0$. Então valem:*

1. *T não tem m-torção aditiva se, e somente se, R não tem m-torção aditiva.*

   Se T tem unidade 1_T, então:

2. $m1_T \in U(T)$ *se, e somente se,* $m1_R \in U(R)$.

Prova. 1. Desde que $R \subseteq T$, então o fato de T não ter m-torção aditiva implica imediato que R não a tem. Agora se R não tem m-torção aditiva então para todo $g \in G$, $g(R)$ também não tem. De fato, se para algum $r \in R$, $0 = mg(r) = g(mr)$, então $mr = 0$ e assim, $r = 0$. Agora seja $t \in T$, tal que $mt = 0$, então $mtg\,(1_R) = 0$, para todo $g \in G$ e desde que $tg\,(1_R) \in g\,(R)$ (estes são ideais de T), então

$$tg\,(1_R) = 0, \tag{2.8}$$

para todo $g \in G$. Como $t \in T = \sum_{g \in G} g(R)$, então existem $g_1, ..., g_n \in G$ tais que $t \in T_(g_1, ..., g_n) = \sum_{i=1}^{n} g(R)$. Pelas identidades (2.7) e (2.8), temos $t = t1_{T_{(g_1,...,g_n)}} = 0$.
2. Desde que $m1_T$ e $m1_R$ são centrais, basta investigarmos se estes possuem inverso à direita em ambos os casos. Considere $t \in T$ tal que $(m1_T)\,t = 1_T$. Multiplicando ambos os lados dessa igualdade por 1_R, obtemos $m1_T t1_R = 1_R$, e sendo 1_R central, temos $m1_R\,(t1_R) = 1_R$. Desde que $t1_R \in R$, segue-se o resultado.
Para a recíproca, observe que se $1_T \in T = \sum_{g \in G} g(R)$, então existem $n > 0$ e $g_1, ..., g_n \in G$ tais que $T = \sum_{i=1}^{n} g_i(R)$. Segue-se de (2.7), que $1_T = 1_{T_{(g_1,...,g_n)}}$. Nestes termos, não há perdas na generalidade da prova, se considerarmos $G = \{g_1 = 1, g_2, ..., g_n\}$.

Assumamos que $m1_R \in U(R)$. Então existe um $x \in R$, tal que $m1_R x = 1_R$, e portanto para todo $g_i \in G$, temos

$$mg_i(x) = g_i(1_R), \tag{2.9}$$

para todo i=1,2,...,n. Agora considere e_i, para $i = 1, ..., n$, definidos por $e_1 = 1_R$ e $e_i = (1_T - g_1(1_R))(1_T - g_2(1_R)) \cdots (1_T - g_{i-l}(1_R))g_i(1_R)$, para $2 \leq i \leq n$. Multiplicando ambos os lados da expressão (2.9) por e_i, obtemos $mg_i(x)e_i = e_i$, para todo $i = 1, 2, ..., n$. Segue-se do Lema 2.2.1, que

$$m1_T \sum_{i=1}^{n} g_i(x) = \sum_{i=1}^{n} mg_i(x)e_i = \sum_{i=1}^{n} e_i = 1_T.$$

Logo $m1_T$ tem inverso á direita. ■

2.3 Ações parciais induzidas

O conceito de ideal invariante parcial também aparece nos artigos [6] e [7]. A partir desde tipo de ideal podemos construir o que chamaremos de ação parcial induzida. Nesta seção veremos algumas características deste tipo de ação parcial e provaremos que os radicais hereditários são ideais invariantes parciais, independentemente da ação parcial em questão.

2.3.1 Definindo uma Ação parcial induzida.

Seja G um grupo que age parcialmente sobre um anel R pela ação

$$\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g, g \in G\}.$$

Definição 2.3.1 *Diremos que um ideal I do anel R é invariante pela ação parcial α ou simplesmente, que I é um ideal α-invariante, se*

$$\alpha_g \left(I \cap D_{g^{-1}}\right) \subseteq I \cap D_g, \tag{2.10}$$

para todo $g \in G$.

Observe que (2.10) implica imediato em:

$$\alpha_g \left(I \cap D_{g^{-1}}\right) = I \cap D_g. \tag{2.11}$$

para todo $g \in G$. Para um ideal α-invariante I denotemos,

$$\overline{D}_g := \frac{I + D_g}{I},$$

para todo $g \in G$. Temos que $\overline{D}_g$ é um ideal do anel quociente R/I e

$$\overline{D}_g \simeq \frac{D_g}{I \cap D_g}, \tag{2.12}$$

para todo $g \in G$. Isso nos permite definir, a cada $g \in G$, um isomorfismo $\overline{\alpha}_g$ de $\overline{D}_{g^{-1}}$ sobre $\overline{D}_g$, do seguinte modo:

$$\overline{\alpha}_g\,(d+I) = \alpha_g\,(d) + I, \tag{2.13}$$

para todo $d \in D_{g^{-1}}$.

Observação 2.3.2 Seja $g \in G$. Desde que I é invariante pela ação de α_g.

1. Cada isomorfismo $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ induz um isomorfismo, $\frac{D_{g^{-1}}}{I \cap D_{g^{-1}}} \to \frac{D_g}{I \cap D_g}$. A composição desses isomorfismos

$$\overline{D}_{g^{-1}} \to \frac{D_{g^{-1}}}{I \cap D_{g^{-1}}} \to \frac{D_g}{I \cap D_g} \to \overline{D}_g$$

   verifica

$$d + I \mapsto d + (I \cap D_{g^{-1}}) \mapsto \alpha_g(d) + (I \cap D_g) \mapsto \alpha_g(d) + I.$$

   Isso garante que cada aplicação (2.13) está bem definida e é um isomorfismo entre ideais de R/I.

2. Seja $g \in G$. Para todo $a \in D_g^{-1}$, teremos $\overline{\alpha}_{g^{-1}}(\overline{\alpha}_g\,(a+I)) = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_g\,(a)) + I = a + I$. Analogamente, $\overline{\alpha}_g(\overline{\alpha}_{g^{-1}}\,(b+I)) = b + I$, para todo $b \in D_g$. Logo ${\overline{\alpha}_g}^{-1} = \overline{\alpha}_{g^{-1}}$. Usaremos esse fato, indiscriminadamente, no decorrer do texto.

Definição 2.3.3 *dada uma ação parcial $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g, g \in G\}$, diremos que um ideal I de R é α-distributivo, se*

$$(D_g + I) \cap (D_h + I) \subseteq (D_g \cap D_h) + I, \tag{2.14}$$

para todo $g, h \in G$.

É fácil ver que a inclusão (2.14), se existir, é de fato uma igualdade. Um anel R é dito ser um anel distributivo à esquerda se para quaisquer ideais à esquerda A, B e C em R, sempre valer $(A+B)\cap C = (A\cap C)+(B\cap C)$. Analogamente definimos anéis distributivos à direita (Para detalhes consultar [27]).

Exemplo 2.3.4 Seja (R,α) uma ação parcial.

1. Se R é um anel distributivo à esquerda (direita), então todo ideal de R é α-distributivo.

2. Se (R,α) tem envolvente, então todo ideal I de R é α-distributivo. Com efeito, sejam $g,h\in G$. Se $a+I=b+I$ para $a\in D_g$ e $b\in D_h$, então existe um $i\in I$ tal que $b=a+i$. Multiplicando-se b pela unidade 1_g de D_g, obtemos $b1_g=a+i'$, onde $i'=i1_g\in I$. Assim, $a+I=a+i'+I=b1_g+I\in(D_g\cap D_h)+I$.

Proposição 2.3.5 *Sejam $\alpha=\{\alpha_g : D_{g^{-1}}\to D_g, g\in G\}$ uma ação parcial de um grupo G sobre um anel R e I um ideal α-invariante de R que é α-distributivo. Então $\overline{\alpha} := \{\overline{\alpha}_g : \overline{D}_{g^{-1}}\to\overline{D}_g,\ g\in G\}$ é uma ação parcial de G sobre o anel quociente $\overline{R}=R/I$.*

Prova. Pela observação acima, cada $\overline{\alpha}_g$ está bem definida e é um isomorfismo entre ideais de R/I. Resta verificar as propriedades $(i)-(iii)$ da definição de ação parcial:

(i) Como $D_1=R$, segue-se que $\overline{D}_1=(I+R)/I=\overline{R}$ e $\overline{\alpha}_1(r+I)=\alpha_1(r)+I=r+I$, para todo $r\in R$, portanto $\overline{\alpha}_1=id_{\overline{R}}$.

(ii) Se $\overline{z}\in\overline{D}_h\cap\overline{D}_{g^{-1}}$, então $z\in(D_h+I)\cap(D_{g^{-1}}+I)$. Segue-se por (2.14) e pelo item (ii) da definição 1.2.1, que $z\in(D_h\cap D_{g^{-1}})+I\subseteq\alpha_h(D_{(gh)^{-1}})+I$. Logo $\overline{z}\in\overline{\alpha}_h(\overline{D}_{(gh)^{-1}})$.

(iii) Seja $\overline{z} \in \overline{\alpha}_{h^{-1}}\left(\overline{D}_h \cap \overline{D}_{g^{-1}}\right)$, então $\overline{z} \in \overline{\alpha}_{h^{-1}}\left((D_h + I) \cap (D_{g^{-1}} + I)\right)$. Por (2.14), temos $\overline{z} \in \overline{\alpha}_{h^{-1}}\left((D_h \cap D_{g^{-1}}) + I\right) = \alpha_{h^{-1}}\left(D_h \cap D_{g^{-1}}\right) + I$. Assim, $\overline{z} = d + I$, onde $d \in \alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}})$, e neste caso, pelo item (iii) definição 1.2.1, temos $\alpha_g\alpha_h(d) = \alpha_{gh}(d)$, e consequentemente,

$$\overline{\alpha}_g\overline{\alpha}_h(\overline{z}) = \alpha_g\alpha_h(d) + I = \alpha_{gh}(d) + I = \overline{\alpha}_{gh}(\overline{z}).$$

Como as propriedades $(i) - (iii)$ da Definição 1.2.1 são satisfeitas por $\overline{\alpha}$, segue-se o resultado. ■

Corolário 2.3.6 *Sejam $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g, g \in G\}$ uma ação parcial de um grupo G sobre um anel R com envolvente T e I um ideal α-invariante de R. Então $\overline{\alpha} := \{\overline{\alpha}_g : \overline{D}_{g^{-1}} \to \overline{D}_g,\ \ g \in G\}$ é ação parcial de G sobre o anel quociente $\overline{R} = R/I$.*

Prova. Imediata do Exemplo 2.3.4. ■

Para uma ação parcial induzida, usaremos a notação $\overline{\alpha}$ ou $\overline{\alpha}_I$, caso necessitemos enfatizar o ideal α-invariante I em questão.

Exemplo 2.3.7 Consideremos um anel qualquer K, e_1, e_2, e_3 idempotentes centrais ortogonais e $R = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3$. Faça o grupo cíclico finito $G = \{1, g, g^2\}$ agir parcialmente sobre R, por uma ação α, definida do seguinte modo: $\alpha_1 = id_R$, $\alpha_g : Ke_1 \to Ke_2$ definida por $e_1 \mapsto e_2$ e $\alpha_{g^2} : Ke_2 \to Ke_1$ definida por $e_2 \mapsto e_1$. Então (R, α) tem envolvente e $I = Ke_3$ é α-invariante. A ação parcial induzida por I é sobre o anel $\overline{R} = Ke_1 \oplus Ke_2$, onde $\overline{\alpha}_1 = id_{\overline{R}}$, $\overline{\alpha}_g : Ke_1 \to Ke_2$ é definida por $e_1 \mapsto e_2$ e $\overline{\alpha}_{g^2} : Ke_2 \to Ke_1$ é definida por $e_2 \mapsto e_1$.

O próximo exemplo mostra a relação entre a envolvente de uma ação parcial induzida a partir de um ideal G-invariante da envolvente. Antes faremos algumas observações necessárias.

Sejam $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g,\ g \in G\}$ uma ação parcial sobre um anel R com envolvente (T, β) e I um ideal de R. Observe que I é também um ideal de T, e se I for β-invariante, então

$$\alpha_g \left(I \cap D_{g^{-1}}\right) = g \left(I \cap D_{g^{-1}}\right) \subseteq I \cap D_g,$$

para todo $g \in G$. Logo I é um ideal α-invariante de R. O Corolário 2.3.6 garante que $\left(\overline{R}, \overline{\alpha}_I\right)$ está bem definida. O próximo exemplo mostra a relação existente entre a envolvente de $\left(\overline{R}, \overline{\alpha}_I\right)$ e o anel quociente T/I.

Exemplo 2.3.8 (Envolvente induzida) Sejam (R, α) uma ação parcial de um grupo G com envolvente (T, β) e I um ideal de R, que é β-invariante como ideal de T. Então $\overline{T} = T/I$ é o anel envolvente da ação parcial induzida $(R/I, \overline{\alpha}_I)$.

Já vimos acima que I é um ideal α-invariante de R, portanto, pelo Corolário 2.3.6, a ação parcial induzida $\overline{\alpha}_I$ está bem definida. Como, para $g \in G$, $\overline{D}_g$ possui unidade $\overline{1}_g$, segue-se pelo Teorema 1.2.3, que $\left(\overline{R}, \overline{\alpha}_I\right)$ tem envolvente. Vamos provar que a ação (global) induzida pelo ideal β-invariante I de T, definida pelos automorfismos $\overline{g} : \overline{T} \longrightarrow \overline{T}$, onde $\overline{g}\,(t + I) = g(t) + I$, para todo $t \in T$, constituem uma envolvente de $\overline{\alpha}_I$. Para isso, devemos verificar que (ver 1.2.2):

(a) $\overline{R}$ é ideal de $\overline{T}$.

(b) $\overline{D}_g = \overline{R} \cap \overline{g}\left(\overline{R}\right)$ para todo $g \in G$.

(c) $\overline{\alpha}_g(\overline{z}) = \overline{g}\,(\overline{z})$ para todo $\overline{z} \in \overline{D}_{g^{-1}}$ *e* $g \in G$.

De fato,

(a) Imediato, pois R é ideal de T.

(b) Primeiro observemos que $\overline{R} \cap \overline{g(R)} = ((R \cap g(R)) + I)/I$, pois, se $\overline{z} = r + I = g(s) + I$, para certos $r, s \in R$, então existe $i \in I \subseteq R$ tal que, $g(s) = r + i \in$

$R\cap g(R)$. Portanto, $\overline{z}\in((R\cap g(R))+I)/I$. Como a recíproca é imediata, segue-se o afirmado. Logo valem as seguintes igualdades:

$$\overline{D}_g=\frac{D_g+I}{I}=\frac{(R\cap g(R))+I}{I}=\overline{R}\cap\overline{g(R)}=\overline{R}\cap\overline{g}(\overline{R}).$$

(c) Sejam $g\in G$ e $\overline{z}=x+I\in\overline{D}_{g^{-1}}$, onde $x\in D_{g^{-1}}$, desde que $g|_{D_{g^{-1}}}=\alpha_g$, temos

$$\overline{\alpha}_g(\overline{z})=\overline{\alpha}_g(x+I)=\alpha_g(x)+I=g\,(x)+I=\overline{g}\,(x+I)=\overline{g}\,(\overline{z})\,.$$

2.3.2 O traço é preservado.

Seja G um grupo finito que age parcialmente sobre um anel R pela ação $\alpha=\{\alpha_g: D_{g^{-1}}\to D_g,\ \ g\in G\}$, onde para $g\in G$, D_g possui unidade 1_g. Isso garante que α tem envolvente, e pelo Corolário 2.3.6, temos que para todo ideal α-invariante I, a ação parcial induzida $\overline{\alpha}_I$ está bem definida. O próximo resultado mostra que a aplicação traço parcial, definida por $tr_\alpha(x)=\sum\limits_{g\in G}\alpha_g(x1_{g^{-1}})$, para todo $x\in R$, é preservada pela ação parcial induzida.

Proposição 2.3.9 *Sejam G um grupo finito que age parcialmente sobre um anel R por uma ação $\alpha=\{\alpha_g: D_{g^{-1}}\to D_g,\ \ g\in G\}$, onde cada D_g possui unidade 1_g, e I um ideal α-invariante de R. Considere a ação parcial induzida $\overline{\alpha}=\overline{\alpha}_I$. Então*

1. $\overline{R^\alpha}\subseteq\overline{R}^{\overline{\alpha}}$.

2. $tr_{\overline{\alpha}}(\overline{x})=\overline{tr_\alpha(x)}$, *para todo $x\in R$.*

3. *Se $R^\alpha=tr_\alpha\,(R)$, então $tr_{\overline{\alpha}}(\overline{R})=\overline{R}^{\overline{\alpha}}=\overline{R^\alpha}$.*

Prova. Observe que para todo $x\in R$ e todo $g\in G$, vale

$$\overline{\alpha}_g(\overline{x}\overline{1}_{g^{-1}})=\overline{\alpha}_g(x1_{g^{-1}}+I)=\alpha_g(x1_{g^{-1}})+I.$$

Portanto

1. Para $x \in R^{\alpha}$ e $g \in G$, temos $\alpha_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g$. Portanto

$$\overline{\alpha}_g(\overline{x}\overline{1}_{g^{-1}}) = \alpha_g(x1_{g^{-1}}) + I = x1_g + I = (x+I)\,(1_g + I) = \overline{x}\overline{1}_g.$$

Logo $\overline{R^{\alpha}} \subseteq \overline{R}^{\overline{\alpha}}$.

2. Para todo $x \in R$, temos

$$\begin{aligned} tr_{\overline{\alpha}}(\overline{x}) &= \sum_{g\in G} \overline{\alpha}_g(\overline{x}\overline{1}_{g^{-1}}) = \sum_{g\in G} (\alpha_g(x1_{g^{-1}}) + I) \\ &= \left[\sum_{g\in G} \alpha_g(x1_{g^{-1}})\right] + I = \overline{tr_{\alpha}(x)}. \end{aligned}$$

3. Como $1_R \in R^{\alpha} = tr_{\alpha}(R)$, existe $c \in R$, tal que $tr_{\alpha}(c) = 1_R$, e assim $tr_{\overline{\alpha}}(\overline{c}) = \overline{tr_{\alpha}(c)} = \overline{1}_R = 1_{\overline{R}}$. Portanto, dado $\overline{x} \in \overline{R}^{\overline{\alpha}}$, temos

$$\begin{aligned} tr_{\overline{\alpha}}(\overline{xc}) &= \sum_{g\in G} \overline{\alpha}_g\ (\overline{x}\,\overline{c}\overline{1}_{g^{-1}}) = \sum_{g\in G} \overline{x}\ \overline{\alpha}_g(\overline{c}\overline{1}_{g^{-1}}) \\ &= \overline{x}\sum_{g\in G} \overline{\alpha}_g(\overline{c}\overline{1}_{g^{-1}}) = \overline{x}tr_{\overline{\alpha}}(\overline{c}) = \overline{x}1_{\overline{R}} = \overline{x}, \end{aligned}$$

logo, $\overline{R}^{\overline{\alpha}} \subseteq tr_{\overline{\alpha}}(\overline{R})$. A recíproca vem dos itens anteriores, basta ver que $tr_{\overline{\alpha}}(\overline{R}) = \overline{tr_{\alpha}\,(R)} \subseteq \overline{R^{\alpha}} \subseteq \overline{R}^{\overline{\alpha}}$. Agora usando novamente o item 2., obtemos

$$\overline{R^{\alpha}} = \overline{tr_{\alpha}\,(R)} = tr_{\overline{\alpha}}(\overline{R}) = \overline{R}^{\overline{\alpha}},$$

provando assim, o item 3. ∎

2.3.3 O radicais hereditários são α-invariantes.

Seja rad um radical hereditário e G um grupo que age (globalmente) sobre um anel T, então rad(T) é um ideal G-invariante de T. Esta propriedade pode ser extendida para ações parciais, ou seja, independentemente da ação parcial α que age sobre o anel R, rad(R) é sempre um ideal α-invariante de R.

Proposição 2.3.10 *Seja rad um radical hereditário. Então rad(R) é α-invariante.*

Prova. Como $rad(R) = rad(T) \cap R$, temos que

$$rad(R) \cap D_g = rad(T) \cap R \cap D_g = rad(T) \cap D_g,$$

para todo $g \in G$. Desde que $rad(T)$ é G-invariante, segue-se que

$$\begin{aligned} \alpha_g(rad(R) \cap D_{g^{-1}}) &= \alpha_g(rad(T) \cap D_{g^{-1}}) = g(rad(T) \cap D_{g^{-1}}) \\ &\subseteq rad(T) \cap D_g = rad(R) \cap D_g, \end{aligned}$$

para todo $g \in G$. ■

Corolário 2.3.11 *Se α é uma ação parcial de um grupo G sobre um anel R. Então*

1. *O radical primo $Nil_*(R)$ é α-invariante.*

   Se (R, α) tem envolvente:

2. *Existe uma ação parcial induzida $\overline{\alpha}_{Nil_*(R)}$ sobre $\overline{R} = R/Nil_*(R)$. Em particular, o skew anel parcial $\overline{R} *_{\overline{\alpha}_{Nil_*(R)}} G$ é associativo.*

Prova. *1. $Nil_*(R)$ é hereditário, portanto pela Proposição 2.3.10, $Nil_*(R)$ é α-invariante.*
2. Se $Nil_*(R)$ α-invariante e α tem envolvente , a ação parcial induzida $\overline{\alpha}_{Nil_*(R)}$ está bem definida, e desde que $\overline{R} = R/Nil_*(R)$ é semiprimo, segue-se pelo Teorema 1.3.3, que $\overline{R} *_{\overline{\alpha}_{Nil_*(R)}} G$ é associativo. ■

De forma análoga, para o radical de Jacobson, podemos provar o seguinte corolário:

Corolário 2.3.12 *Se α é uma ação parcial de um grupo G sobre um anel R. Então*

1. *O radical de Jacobson $J(R)$ é α-invariante.*

   Se (R, α) tem envolvente:

2. *Existe uma ação parcial induzida $\overline{\alpha}_{J(R)}$ sobre $\overline{R} = R/J(R)$. Em particular, o skew anel parcial $\overline{R} *_{\overline{\alpha}_{J(R)}} G$ é associativo.*

Prova. Desde que o radical de Jacobson é hereditário e $R/J(R)$ é semiprimo. A demonstração segue-se imediata da Proposição 2.3.10 e do Teorema 1.3.3. $\blacksquare$

Capítulo 3

O skew anel de grupo parcial

Salvo menção em contrário, todos os resultados deste capítulo referem-se a uma ação parcial $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g, \ \ g \in G\}$ de um grupo finito G que age sobre um anel R, com envolvente T. Neste caso, conforme o Teorema 1.2.3, cada ideal D_g tem unidade que é sempre denotada por 1_g. Também neste caso, o skew anel de grupo parcial,

$$R *_\alpha G = \{\sum_{g \in G} a_g \delta_g : a_g \in D_g, \, g \in G\},$$

é associativo, conforme afirma o Teorema 1.3.2. Nosso objetivo aqui, é generalizar resultados válidos para skew anéis de grupo (global) para o caso parcial.

3.1 A artinianidade (noetherianidade) de $R *_\alpha G$

Para ações globais, o Teorema 1.5.2 assegura que $T *_\beta G$ é artiniano (noetheriano) à esquerda, sempre que G for finito e T artiniano (noetheriano) à esquerda. Já que podemos transferir de R para T, artinianidade (noetherianidade) à esquerda sempre que G for um grupo finito, então temos a seguinte generalização:

Proposição 3.1.1 *Se R é artiniano (noetheriano) à esquerda, então $R *_\alpha G$ é artiniano (noetheriano) à esquerda.*

Prova. Se R é artiniano (noetheriano) à esquerda, então pela Proposição 2.2.2, T é artiniano (noetheriano) à esquerda. Por sua vez do Teorema 1.5.2, $T*_\beta G$ é artiniano (noetheriano) à esquerda. Levando-se em conta que para G finito, T tem unidade, então pelo Teorema 1.3.4, que afirma que $T *_\beta G$ e $R *_\alpha G$ são Morita equivalentes, temos que $R *_\alpha G$ é artiniano (noetheriano) à esquerda. ∎

3.2 Teoremas de Maschke

Para G finito, R é semisimples e $|G|^{-1} \in R$ se, e somente se, T é semisimples e $|G|^{-1} \in T$. O fato de $R *_\alpha G$ e $T *_\beta G$ serem Morita equivalentes, nos permite generalizar o Teorema de Maschke para ações parciais. Porém podemos ir mais além, para um $R *_\alpha G$-módulo V, é possível construir, a partir de uma R-projeção de um $R *_\alpha G$-submódulo de V, uma $R *_\alpha G$-projeção, como aparece nas provas usuais desse teorema no caso global. Vejamos essas duas versões desse importante teorema.

Teorema 3.2.1 ***(Teorema de Maschke parcial 1)*** *Se R é semisimples e $|G|^{-1} \in R$, então $R *_\alpha G$ é semisimples.*

Prova. Pela Proposição 2.2.2 e pelo Lema 2.2.11, temos que R é semisimples e $|G|^{-1} \in R$ se, e somente se, T semisimples e $|G|^{-1} \in T$. Aplicando o Teorema de Maschke (global) (Teorema 1.5.3) à envolvente, temos que neste caso, $T *_\beta G$ é semisimples. Pelo Lema 2.2.1, T tem unidade, então podemos aplicar o Teorema 1.3.4, que garante que $T *_\beta G$ e $R *_\alpha G$ são Morita equivalentes. Sendo semisimplicidade uma propriedade Morita invariante, segue-se o resultado. ∎

A seguinte generalização do Teorema de Maschke tem a demonstração inspirada na demonstração clássica deste teorema na versão global, encontrada por exemplo, em [20] ou [24].

Teorema 3.2.2 ***(Teorema de Maschke parcial 2)*** *Sejam V um $R *_\alpha G$-módulo à esquerda e W um $R *_\alpha G$-submódulo à esquerda de V. Se $\ell := tr_\alpha(1_R)^{-1} \in R$ e W*

tem complementar em V como R-submódulo à esquerda, então W tem complementar em V como $R *_\alpha G$-submódulo à esquerda.

Prova. Desde que $W < \oplus\, _R V$, existe uma R-projeção à esquerda, $\pi : V \to W$, onde $\pi(w) = w$, para todo $w \in W$. Defina uma aplicação γ sobre V do seguinte modo: $\gamma(v) = \ell \sum\limits_{g\in G} 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g v)$, para todo $v \in V$. É fácil ver que $\gamma(V) \subseteq W$.

Provaremos que γ é um $R*_\alpha G$-homomorfismo de módulos à esquerda, onde $\gamma(w) = w$ para todo $w \in W$. Seja $h \in G$ fixado e $v \in V$, então

$$\begin{aligned}
\ell^{-1}\gamma(1_h\delta_h v) &= \sum_{g\in G} 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g 1_h\delta_h v) = \sum_{g\in G} 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h)\,\delta_{gh} v) \\
&= \sum_{g\in G} 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h)\,\delta_1\pi(1_{gh}\delta_{gh} v) \\
&= \sum_{g\in G} \alpha_{g^{-1}}(1_g\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h))\,\delta_{g^{-1}}\pi(1_{gh}\delta_{gh} v) \\
&= 1_h\sum_{g\in G} 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(1_{gh}\delta_{gh} v).
\end{aligned}$$

Por outro lado, por (1.1) temos que, $\alpha_h(1_{h^{-1}}1_{g^{-1}}) = 1_h 1_{hg^{-1}}$, para todo $h, g \in G$, portanto

$$\begin{aligned}
\ell^{-1}1_h\delta_h\gamma(v) &= \sum_{g\in G} 1_h\delta_h 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g v) = \sum_{g\in G} \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(1_h)\,1_{g^{-1}})\,\delta_{hg^{-1}}\pi(1_g\delta_g v) \\
&= \sum_{g\in G} \alpha_h(1_{h^{-1}}1_{g^{-1}})\,\delta_{hg^{-1}}\pi(1_g\delta_g v) = \sum_{g\in G} 1_h 1_{hg^{-1}}\delta_{hg^{-1}}\pi(1_g\delta_g v) \\
&= 1_h\sum_{g\in G} 1_{hg^{-1}}\delta_{hg^{-1}}\pi(1_g\delta_g v) \overset{u=gh^{-1}}{=} 1_h\sum_{u\in G} 1_{u^{-1}}\delta_{u^{-1}}\pi(1_{uh}\delta_{uh} v) \\
&= 1_h\sum_{g\in G} 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(1_{gh}\delta_{gh} v),
\end{aligned}$$

logo

$$\gamma(1_h\delta_h v) = 1_h\delta_h\gamma(v). \tag{3.1}$$

Por sua vez, para todo $r \in R$ e $v \in V$, vale

$$\begin{aligned}
\ell^{-1}\gamma(rv) &= \sum_{g\in G} 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g r\delta_1 v) = \sum_{g\in G} 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(\alpha_g(1_{g^{-1}}r)1_g\delta_g v) \\
&= \sum_{g\in G} 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\alpha_g(1_{g^{-1}}r)\pi(1_g\delta_g v) = \sum_{g\in G} \alpha_{g^{-1}}(1_g\alpha_g(1_{g^{-1}}r))\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g v) \\
&= \sum_{g\in G} 1_{g^{-1}}r\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g v) = r\sum_{g\in G} 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g v) = \ell^{-1}r\gamma(v),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\gamma(rv) = r\gamma(v), \tag{3.2}$$

para todo $r \in R$ e $v \in V$. Por (3.1) e (3.2), temos

$$\gamma(r1_h\delta_h v) = r\gamma(1_h\delta_h v) = r1_h\delta_h\gamma(v),$$

para todo $r \in R$ e $h \in G$. Pela linearidade de π, segue-se que γ é $R*_\alpha G$-homomorfismo de módulos à esquerda. Finalmente, para $g \in G$ e $w \in W$, temos $\pi(1_g\delta_g w) = 1_g\delta_g w$, portanto

$$\begin{aligned}
\ell^{-1}\gamma(w) &= \sum_{g\in G} 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g w) = \sum_{g\in G} 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}1_g\delta_g w \\
&= \sum_{g\in G} \alpha_{g^{-1}}(1_g 1_g)\delta_{g^{-1}g} w = \sum_{g\in G} 1_g w = \ell^{-1}w.
\end{aligned}$$

Isso garante que γ é de fato um $R*_\alpha G$-projeção e sendo assim, W é um somando direto de ${}_{R*_\alpha G}V$. ■

Corolário 3.2.3 *Se R é semisimples e $tr_\alpha(1_R)^{-1} \in R$, então $R*_\alpha G$ é semisimples.*

Prova. Imediata do Teorema 3.2.2. ■

Os próximos exemplos mostram que as hipóteses nos teoremas acima são independentes.

Exemplo 3.2.4 (Exemplo de R semisimples tal que $|G|^{-1} \in R$ e $tr_\alpha(1_R)^{-1} \notin R$). Seja $R = \bigoplus_{i=1}^{3} Ke_i$, para $K = \mathbb{Z}_{15}$ e e_1, e_2 e e_3 idempotentes centrais em R. Faça $G = \{1, g, g^2, g^3 : g^4 = 1\}$ agir parcialmente sobre R da seguinte forma: $\alpha_1 = id_R$; $\alpha_g : Ke_2 \oplus Ke_3 \to Ke_1 \oplus Ke_2$, onde $e_2 \to e_1$ e $e_3 \to e_2$; $\alpha_{g^2} : Ke_1 \oplus Ke_3 \to Ke_1 \oplus Ke_3$, onde $e_1 \to e_3$ e $e_3 \to e_1$, e finalmente, $\alpha_{g^3} : Ke_1 \oplus Ke_2 \to Ke_2 \oplus Ke_3$, onde $e_1 \to e_2$ e $e_2 \to e_3$. Temos $tr_\alpha(1_R) = 3(e_1 + e_2 + e_3)$, portanto $5e_1 \in an_R(tr_\alpha(1_R))$, enquanto $|G| 1_R = 4(e_1 + e_2 + e_3)$ é tal que $(|G| 1_R)^2 = 1_R$.

Exemplo 3.2.5 (Exemplo de R semisimples tal que $tr_\alpha(1_R)^{-1} \in R$ e $|G|^{-1} \notin R$.) No exemplo anterior tomando $K = \mathbb{Z}_2$, temos $|G| 1_R = 41_R = 0$ e $tr_\alpha(1_R) = 3(e_1 + e_2 + e_3) = 1_R$.

Exemplo 3.2.6 (Existir c central em R tal que $tr_\alpha(c) = 1_R$, não é suficiente para $tr_\alpha(1_R)$ ser invertível.)No exemplo 3.2.4, tome $K = \mathbb{Z}$. Temos $tr_\alpha(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (x_1 + x_2 + x_3) 1_R$, portanto $tr_\alpha(e_1) = 1_R$ e $tr_\alpha(1_R) = 3.1_R$ não tem inverso em $\bigoplus_{i=1}^{3} \mathbb{Z}e_i$.

No entanto, podemos observar que

Observação 3.2.7 $tr_\alpha(1_R)^{-1} \in R \Leftrightarrow$ Existe $c \in R^\alpha$, tal que $tr_\alpha(c) = 1_R$. Com efeito, se $tr_\alpha(1_R)^{-1} = c$, então $ctr_\alpha(1_R) = tr_\alpha(1_R)c = 1_R$, daí $tr_\alpha(1_R) = tr_\alpha(tr_\alpha(1_R)c) = tr_\alpha(1_R)tr_\alpha(c)$, portanto $1_R = ctr_\alpha(1_R) = ctr_\alpha(1_R)tr_\alpha(c) = tr_\alpha(c)$. Além disso, $c \in R^\alpha$, pois para todo $g \in G$, $c1_g = c\alpha_g(tr_\alpha(1_R)c1_{g^{-1}}) = c\alpha_g(tr_\alpha(1_R)1_{g^{-1}})\alpha_g(c1_{g^{-1}}) = ctr_\alpha(1_R)\alpha_g(c1_{g^{-1}}) = \alpha_g(c1_{g^{-1}})$. Reciprocamente, se $c \in R^\alpha$ é tal que $tr_\alpha(c) = 1_R$, então $ctr_\alpha(1_R) = tr_\alpha(1_R)c = tr_\alpha(c) = 1_R$.

3.3 Sobre o radical de Jacobson e o radical primo de $R *_\alpha G$

O objetivo nesta seção é generalizar para o caso parcial, resultados bem conhecidos para skew anéis de grupo globais, como por exemplo o Teorema 1.5.8 que fornece uma fórmula envolvendo os radicais de Jacobson de T e $R*_\beta G$, e suas várias consequências e o Teorema 1.5.10 que estabelece condições para que $T *_\beta G$ seja semiprimo.

3.3.1 O radical de Jacobson

A idéias principais desta seção foram inspiradas nas construções feitas para ações globais encontradas no Capítulo 1 de [26]. Vamos estabelecer algumas relações entre os radicais de Jacobson de $R *_\alpha G$ e de R. O objetivo principal aqui é generalizar para ações parciais, o resultado do Teorema 1.5.8. Iniciaremos com algumas notações e definições que usaremos em toda seção.

Dado um subgrupo H do grupo G, podemos considerar a restrição de α à H,

$$\alpha_H = \{\alpha_h : D_{h^{-1}} \to D_h,\ h \in H\}.$$

É fácil ver que α_H é uma ação parcial de H sobre R, e que o skew anel de grupo parcial $R *_{\alpha_H} H$ é associativo, sempre que $R *_\alpha G$ o for. Além disso, se para $a = \sum_{g\in G} a_g\delta_g \in R *_\alpha G$, tomarmos o suporte de a, definido por:

$$sup\,(a) := \{g \in G : a_g \neq 0\},$$

teremos

$$R *_{\alpha_H} H = \{a \in R *_\alpha G : sup\,(a) \subseteq H\}. \tag{3.3}$$

Finalmente, observe que se I é um ideal α-invariante de R, então

$$I *_\alpha G := \{\sum_{g\in G} a_g\delta_g : a_g \in D_g \cap I\},$$

é um ideal de $R *_\alpha G$. Com efeito, $I *_\alpha G$ é um skew anel de grupo, que é de fato, subanel de $R *_\alpha G$ (possivelmente sem unidade). Não temos maiores problemas com a soma pontual, vejamos então o que ocorre com o produto em $I *_\alpha G$. Sejam $a\delta_g$ e $b\delta_h$ com $a \in D_g$ e $b \in D_h \cap I$. Assim sendo $a\delta_g b\delta_h = \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(a)\, b\right)\delta_{gh}$. Desde que I é α-invariante, $a \in D_g \cap I$ implica $\alpha_{g^{-1}}(a) \in D_{g^{-1}} \cap I$, portanto $\alpha_{g^{-1}}(a)\, b \in D_h \cap D_{g^{-1}} \cap I$ e $\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(a)\, b\right) \in \alpha_g\left(D_h \cap D_{g^{-1}}\right) \cap I$. Segue-se pelo item 2 da definição de ação parcial (Definição 1.2.1), que $\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(a)\, b\right) \in D_{gh} \cap I$. Assim $R *_\alpha G\,(I *_\alpha G) \subseteq I *_\alpha G$. De modo análogo provamos que $(I *_\alpha G)\, R *_\alpha G \subseteq I *_\alpha G$. Logo $I *_\alpha G$ é de fato ideal de $R *_\alpha G$.

O resultado que se segue, vale para um grupo arbitrário.

Lema 3.3.1 *Seja G um grupo arbitrário. Então, para o skew anel de grupo $R *_\alpha G$, valem as seguintes afirmações:*

1. *Se A é um ideal de $R *_\alpha G$, então $A \cap R$ é um ideal α-invariante de R, e ainda $(A \cap R) *_\alpha G \subseteq A$.*

2. *Se I é um ideal α-invariante de R, então $I *_\alpha G$ é um ideal de $R *_\alpha G$, com $(I *_\alpha G) \cap R = I$. Além disso*

$$\frac{R *_\alpha G}{I *_\alpha G} \backsimeq \left(\frac{R}{I}\right) *_{\bar{\alpha}_I} G.$$

Prova. 1. evidente que $A \cap R$ é um ideal de R. Para ver que ele é α-invariante, observe que se para $g \in G$, $a \in A \cap R \cap D_g$, então $\alpha_g\left(a1_{g^{-1}}\right) = \alpha_g\left(a1_{g^{-1}}\right) 1_g\delta_1 = \alpha_g\left(1_{g^{-1}}a\right)\delta_g 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}} = 1_g\delta_g a 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}} \in A \cap R \cap D_g$.

Para ver que $(A \cap R) *_\alpha G \subseteq A$, considere $\sum\limits_{g \in G} a_g\delta_g \in (A \cap R) *_\alpha G$. Neste caso, para cada $g \in G$, $a_g \in A \cap R$, portanto $a_g\delta_g = a_g 1_g \delta_g \in A$. Logo $\sum\limits_{g \in G} a_g\delta_g \in A$.
2. Já havíamos observado que $I *_\alpha G$ é um ideal de $R *_\alpha G$ e fácilmente se verifica que $(I *_\alpha G) \cap R = I$. Agora considere $\varphi : R *_\alpha G \to (R/I) *_{\bar{\alpha}_I} G$, definida linearmente por $\varphi(a\delta_g) = \overline{a}\delta_g$, para todo $g \in G$ e $a \in D_g$. Observe que $\varphi(0) = 0$ e que para

$a \in D_g$ e $b \in D_h$, temos $\varphi(a\delta_g b\delta_h) = \overline{\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b)}\delta_{gh} = (\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b) + I)\delta_{gh} = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b + I)\delta_{gh} = \alpha_g((\alpha_{g^{-1}}a) + I)(b + I))\delta_{gh} = \overline{a}\delta_g\overline{b}\delta_h = \varphi(a\delta_g)\varphi(b\delta_h)$. Sendo que $R \to R/I$ é sobrejetora, dado $\overline{a}\delta_g \in \left(\frac{R}{I}\right) *_{\overline{\alpha}_I} G$, existe $r \in R$, tal que $\overline{r} = \overline{a} \in R/I$ e $\varphi(r\delta_g) = \overline{a}\delta_g$. Logo φ é um epimorfismo de anéis cujo núcleo é $ker\varphi = \left\{\sum_{g\in G} a_g\delta_g : \overline{a}_g = 0\right\} = \left\{\sum_{g\in G} a_g\delta_g : a_g \in I\right\} = I *_\alpha G$. ■

O próximo resultado, não exige que G seja finito nem que a ação parcial tenha envolvente.

Lema 3.3.2 *Sejam G um grupo arbitrário que age parcialmente sobre um anel R e H um subgrupo de G. Então*

$$U(R *_{\alpha_H} H) = U(R *_\alpha G) \cap (R *_{\alpha_H} H).$$

Prova. Que $U(R *_{\alpha_H} H) \subseteq U(R *_\alpha G) \cap (R *_{\alpha_H} H)$ é imediato, pois $1_H = 1_G$ e assim sendo $1_R\delta_{1_H} = 1_R\delta_{1_G}$ é a unidade do subanel $R*_{\alpha_H}H$ de $R*_\alpha G$. Para a recíproca usaremos a projeção: $\pi : R *_\alpha G \to R *_{\alpha_H} H$, definida por $\pi\left(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\right) = \sum_{g\in H} a_g\delta_g$, para todo $\sum_{g\in G} a_g\delta_g \in R *_\alpha G$.

A aplicação π é um homomorfismo de $R*_{\alpha_H}H$-módulos à esquerda e à direita. Com efeito, Sejam $a \in D_g$ e $b \in D_h$, onde $g \in G$ e $h \in H$. Desde que $g \in H \Leftrightarrow gh \in H$, temos $\pi(a\delta_g b\delta_h) = a\delta_g b\delta_h = \pi(a\delta_g)b\delta_h$, sempre que $g \in H$ ou $\pi(a\delta_g b\delta_h) = 0 = \pi(a\delta_g)b\delta_h$, sempre que $g \notin H$. De modo análogo se prova o caso à esquerda.

Portanto, se $v \in U(R *_\alpha G) \cap (R *_{\alpha_H} H)$, então existe $u \in R *_\alpha G$, tal que $uv = vu = 1_R\delta_{1_G}$. Como $\pi(1_R\delta_{1_G}) = 1_R\delta_{1_G}$ e $1_G = 1_H \in H$, segue-se que $\pi(uv) = \pi(vu) = \pi(1_R\delta_{1_G})$, isto é, $\pi(u)v = v\pi(u) = 1_R\delta_{1_G}$. Logo $\pi(u)$ é inverso de v em $R *_{\alpha_H} H$. ■

O próximo resultado também não exige que G seja finito ou que a ação parcial tenha envolvente.

Proposição 3.3.3 *Sejam α uma ação parcial de um grupo G sobre um anel R e H um subgrupo de G. Então*

$$J\left(R *_{\alpha_H} H\right) \supseteq J\left(R *_{\alpha} G\right) \cap \left(R *_{\alpha_H} H\right)$$

Prova. Seja $a \in J\left(R *_{\alpha} G\right) \cap \left(R *_{\alpha_H} H\right)$. Então $1_R - xay \in U\left(R *_{\alpha} G\right)$, para todo $x, y \in R *_{\alpha} G$. Em particular, para $x, y \in R *_{\alpha_H} H$, temos $1 - xay \in U\left(R *_{\alpha} G\right) \cap \left(R *_{\alpha_H} H\right) = U\left(R *_{\alpha_H} H\right)$ conforme o Lema 3.3.2. Logo $a \in J\left(R *_{\alpha_H} H\right)$. ■

Corolário 3.3.4 *Nas condições da Proposição acima, temos:*

$$J(R) \supseteq J\left(R *_{\alpha} G\right) \cap R.$$

Prova. Basta tomar $H = \{1_G\}$ e aplicar a Proposição 3.3.3. ■

Agora vamos em busca de uma recíproca para a inclusão do Corolário 3.3.4. O próximo lema também não requer restrições sob G, nem exige que a ação parcial tenha envolvente e é um caso particular do seguinte resultado: Seja B um subanel de um anel A. Dado um A-módulo à esquerda V que como B-módulo é noetheriano à esquerda, então V é também um A-módulo noetheriano à esquerda. Com efeito, se W um A-submódulo de V, então W é finitamente gerado como B-submódulo à esquerda, portanto existirão certos $w_1, ..., w_n \in W$, tais que $W = \sum Bw_i \subseteq \sum Aw_i \subseteq W$. Logo W é finitamente gerado também como A-submódulo.

Lema 3.3.5 *Seja G um grupo arbitrário que age parcialmente sobre um anel R. Se V é um $R *_{\alpha} G$-módulo que como R-módulo é noetheriano à esquerda, então V é noetheriano à esquerda também como $R *_{\alpha} G$-módulo.*

Prova. Imediata. ■

Voltemos as restrições impostas no começo do capítulo: G finito agindo parcialmente sobre um anel R, com envolvente.

Proposição 3.3.6 *Seja G um grupo finito. Se V é um R-módulo noetheriano à esquerda, então $(R *_\alpha G) \otimes_R V$ é um $R *_\alpha G$-módulo noetheriano à esquerda.*

Prova. Observemos que para cada $g \in G$, $D_g\delta_g$ é um R-submódulo de $R *_\alpha G$, portanto $R *_\alpha G = \sum_{g \in G} D_g\delta_g$ é uma soma direta de R-módulos. Portanto como R-módulos,

$$(R *_\alpha G) \otimes_R V = (\bigoplus_{g \in G} D_g\delta_g) \otimes_R V = \bigoplus_{g \in G} (D_g\delta_g \otimes_R V)\,.$$

Provaremos que cada $D_g\delta_g \otimes_R V$ é noetheriano à esquerda como R-módulo, provando assim, que $(R *_\alpha G) \otimes_R V$ é noetheriano à esquerda, como R-módulo. Como

$$\begin{aligned} 1_g\delta_g \otimes_R V \subseteq D_g\delta_g \otimes_R V &= R1_g\delta_g \otimes_R V = 1_g\delta_g\alpha_{g^{-1}}(R1_g) \otimes_R V \\ &= 1_g\delta_g \otimes_R \alpha_{g^{-1}}(R1_g)V \subseteq 1_g\delta_g \otimes_R V. \end{aligned}$$

Por sua vez, $(R *_\alpha G) \otimes_R V = \sum_{g \in G} 1_g\delta_g \otimes_R V$, onde $1_g\delta_g \otimes_R V$ é um R-submódulo à esquerda, de $(R *_\alpha G) \otimes_R V$, para todo $g \in G$, e $V \to 1_g\delta_g \otimes_R V$, definida por $v \mapsto 1_g\delta_g \otimes_R v$, para todo $v \in V$, é um homomorfismo de R-módulos à esquerda sobrejetor, então $1_g\delta_g \otimes_R V$ é imagem homomórfica de um R-módulo noetheriano à esquerda, portanto é noetheriano à esquerda. Logo, $D_g\delta_g \otimes_R V = 1_g\delta_g \otimes_R V$ é um R-módulo noetheriano à esquerda, e consequentemente, $(R *_\alpha G) \otimes_R V$ é um R-módulo noetheriano à esquerda. Finalmente, aplicando-se o Lema 3.3.5, teremos que $(R *_\alpha G) \otimes_R V$ é um $R *_\alpha G$-módulo noetheriano à esquerda. ∎

Como consequência, obtemos um prova mais simples para parte da Proposição 3.1.1:

Corolário 3.3.7 *Seja G um grupo finito. Se R é noetheriano à esquerda, então $R *_\alpha G$ é noetheriano à esquerda.*

Prova. Desde que $R *_\alpha G = (R *_\alpha G) \otimes_R R$, basta aplicar a proposição acima. ∎

Agora estamos em condições de enunciar e provar o resultado correspondente ao Teorema 1.5.8 para ações parciais com envolvente.

Teorema 3.3.8 *Seja α uma ação parcial de um grupo finito G sobre um anel R, com envolvente T. Então*

$$J\left(R *_\alpha G\right)^{|G|} \subseteq J\left(R\right) *_\alpha G \subseteq J\left(R *_\alpha G\right).$$

Prova. Como a Proposição 2.3.12 garante que $J(R)$ é α-invariante, segue-se pelo item 2 do Lema 3.3.1, que $J\left(R\right) *_\alpha G \lhd R *_\alpha G$ e $\left(J\left(R\right) *_\alpha G\right) \cap R = J\left(R\right)$.

Iniciaremos provando que $J\left(R\right) \subseteq J\left(R *_\alpha G\right)$. Seja V um $R *_\alpha G$-módulo simples à esquerda. Então V é um $R *_\alpha G$-módulo cíclico que como R-módulo, é finitamente gerado. De fato, sendo V é simples, $V \neq 0$, e assim, existe um $v \in V$ tal que $0 \neq \left(R *_\alpha G\right) v < {}_{R *_\alpha G}V$, portanto, como R-módulo, $V = \left(R *_\alpha G\right) v = \sum\limits_{g \in G} D_g \delta_g v = \sum\limits_{g \in G} R\left(1_g \delta_g v\right)$. Desde que cada $1_g \delta_g v \in V$, temos que V, como R-módulo, é finitamente gerado. Estamos agora, em condições de aplicar o Lema de Nakayama (Lema 1.5.31) para $V \neq 0$ e obtermos $J\left(R\right) V \neq V$.

Por sua vez, $J\left(R\right) V < {}_{R *_\alpha G}V$, pois para todo $g \in G$, $d \in D_g$ e $a \in J\left(R\right)$, temos $d\delta_g\left(av\right) = \left(d\delta_g a\right) v = \alpha_g\left(\alpha_g^{-1}\left(d\right) a\right) \delta_g v$. Como $\alpha_g^{-1}\left(d\right) a \in J\left(R\right) \cap D_{g^{-1}}$, então $\alpha_g\left(\alpha_g^{-1}\left(d\right) a\right) \in J\left(R\right) \cap D_g$, portanto $d\delta_g\left(av\right) \in \left(J\left(R\right) \cap D_g\right) 1_g \delta_g v \subseteq J\left(R\right) V$. Desde que V é simples como $R *_\alpha G$-módulo, segue-se que $J\left(R\right) V = 0$. Sendo V arbitrário, segue-se que $J\left(R\right) \subseteq J\left(R *_\alpha G\right)$. Esse fato acarreta $J\left(R\right) *_\alpha G \subseteq J\left(R *_\alpha G\right)$, pois se $a = \sum\limits_{g \in G} a_g \delta_g \in J\left(R\right) *_\alpha G$, então cada $a_g \in J\left(R\right) \subseteq J\left(R *_\alpha G\right)$ e consequentemente, $a_g 1_g \delta_g \in J\left(R *_\alpha G\right)$, para todo $g \in G$.

Para ver que $J\left(R *_\alpha G\right)^{|G|} \subseteq J\left(R\right) *_\alpha G$, considere um R-módulo simples à esquerda W. Então como vimos na demonstração da Proposição 3.3.6,

$$\left(R *_\alpha G\right) \otimes_R W = \left(\bigoplus_{g \in G} D_g \delta_g \otimes_R W\right) = \bigoplus_{g \in G} \left(1_g \delta_g \otimes_R W\right),$$

como R-módulos à esquerda. Desde que para todo $\sum_i a_i\delta_g \otimes_R 1_{g^{-1}} w_i \in D_g\delta_g \otimes_R 1_{g^{-1}} W$, vale

$$\begin{aligned}\sum_i a_i\delta_g \otimes_R 1_{g^{-1}} w_i &= \sum_i a_i\delta_g 1_{g^{-1}} \otimes_R w_i = \sum_{g\in G} a_i 1_g\delta_g 1_{g^{-1}} \otimes_R w_i \\ &= \sum_i a_i\delta_g \otimes_R w_i,\end{aligned}$$

segue-se que

$$D_g\delta_g \otimes_R W = D_g\delta_g \otimes_R 1_{g^{-1}} W,$$

para todo $g \in G$.

Para cada $g \in G$, denotemos por W^{α_g}, ao $\mathbb{Z}$-módulo $1_g W$, munido com o seguinte produto (escalar):

$$r \cdot v = \alpha_g\left(r 1_{g^{-1}}\right) v$$

para $r \in R$ e $v \in W^{\alpha_g}$. Como $1_R \cdot v = \alpha_g\left(1_R 1_{g^{-1}}\right) v = 1_g v = v$, para todo $v \in W^{\alpha_g}$ e $r \cdot (s \cdot v) = \alpha_g\left(r 1_{g^{-1}}\right) \alpha_g\left(s 1_{g^{-1}}\right) v = \alpha_g\left(rs 1_{g^{-1}}\right) v$, para todo $r, s \in R$ e $v \in W^{\alpha_g}$, fica fácil verificar que W^{α_g} é um R-módulo à esquerda.

Como um R-módulo à esquerda, $W^{\alpha_{g^{-1}}}$ é isomorfo ao R-módulo à esquerda, $D_g\delta_g \otimes_R 1_{g^{-1}} W$. Com efeito, a aplicação $\varphi : D_g\delta_g \times 1_{g^{-1}} W \to W^{\alpha_{g^{-1}}}$, definida por $\varphi\left(d\delta_g, 1_{g^{-1}} w\right) = d \cdot 1_{g^{-1}} w$ é R-balanceada, pois

$$\begin{aligned}\varphi\left(a\delta_g r, 1_{g^{-1}} w\right) &= \varphi\left(a\alpha_g\left(r 1_{g^{-1}}\right)\delta_g, 1_{g^{-1}} w\right) = a\alpha_g\left(r 1_{g^{-1}}\right) \cdot 1_{g^{-1}} w \\ &= \alpha_{g^{-1}}\left(a\alpha_g\left(r 1_{g^{-1}}\right)\right) 1_{g^{-1}} w = \alpha_{g^{-1}}(a) r 1_{g^{-1}} w \\ &= a \cdot r 1_{g^{-1}} w = \varphi\left(a\delta_g, r 1_{g^{-1}} w\right),\end{aligned}$$

para todo $a \in D_g, r \in R$ e $w \in W$. Da definição de produto tensorial, existe um homomorfismo de R-módulos à esquerda, $\phi : D_g\delta_g \otimes_R 1_{g^{-1}} W \to W^{\alpha_{g^{-1}}}$, que é de fato, um isomorfismo de R-módulos à esquerda. Para ver isso, seja $0 = \sum_i \alpha_{g^{-1}}(a_i 1_g) w_i \in W^{\alpha_{g^{-1}}}$,. Neste caso, $0 = \sum_i 1_g\delta_g \otimes \alpha_{g^{-1}}(a_i 1_g) w_i = \sum_i 1_g\delta_g \alpha_{g^{-1}}(a_i 1_g) \otimes 1_{g^{-1}} w_i = \sum_i a_i 1_g\delta_g \otimes 1_{g^{-1}} w_i$, assim, ϕ é injetora. Além disso, para $1_{g^{-1}} w \in 1_{g^{-1}} W$, temos

$\phi\left(1_g\delta_g \otimes 1_{g^{-1}}w\right) = \alpha_{g^{-1}}\left(1_g\right)1_{g^{-1}}w = 1_{g^{-1}}w$, mostrando assim que ϕ é também sobrejetora. Portanto, $D_g\delta_g \otimes_R W = D_g\delta_g \otimes_R 1_{g^{-1}}W \backsimeq W^{\alpha_{g^{-1}}}$, e assim sendo,

$$(R *_\alpha G) \otimes_R W = (\bigoplus_{g\in G} D_g\delta_g \otimes_R W) \cong \bigoplus_{g\in G} W^{\alpha_{g^{-1}}},$$

como R-módulos à esquerda.

Vale observar que, para cada $g \in G$, o $\mathbb{Z}$-módulo à esquerda $1_{g^{-1}}W$, munido com produto escalar usual: $r1_{g^{-1}}w$, para todo $r \in R$ e $w \in W$, é um R-módulo à esquerda. Observe também que $W^{\alpha_{g^{-1}}}$ e $1_{g^{-1}}W$, são iguais como $\mathbb{Z}$-módulos, porém, distintos como R-módulos à esquerda.

Agora, se W é um R-módulo simples à esquerda, então para o R-submódulo à esquerda 1_gW de W, temos $1_gW = 0$ ou $1_gW = W$. Assim, como $\mathbb{Z}$-módulos, $W^{\alpha_g} = (0)$ ou $W^{\alpha_g} = W$.

Provaremos que se $W^{\alpha_g} = W$ como $\mathbb{Z}$-módulos à esquerda, então W^{α_g} é simples como um R-módulo à esquerda. Com efeito, seja $X <\ _RW^{\alpha_g}$, então, para todo $x \in X$, temos $x = 1_gx$, assim, dado $r \in R$ existe um $r' \in R$ tal que $rx = r1_gx = \alpha_g\left(r'1_{g^{-1}}\right)x = r' \cdot x \in X$. Logo X é um R-submódulo à esquerda de W (no produto usual), e assim, $X = (0)$ ou $X = W = W^{\alpha_g}$.

Conclui-se que, se W é um R-módulo simples à esquerda, então para cada $g \in G$, $W^{\alpha_g} = (0)$ ou W^{α_g} é simples e $V := (R *_\alpha G) \otimes_R W$ é uma soma de $|G|$ R-módulos à esquerda, onde cada parcela é simples ou nula e assim, admite uma série de composição de comprimento menor ou igual à $|G|$, portanto admite uma série de composição de comprimento menor ou igual à $|G|$ como $R *_\alpha G$-módulo à esquerda, pois todo $R *_\alpha G$ -módulo à esquerda é um R-módulo à esquerda. Logo

$$J\left(R *_\alpha G\right)^{|G|} V = 0.$$

Agora considere $a = \sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g \in J\left(R *_\alpha G\right)^{|G|}$, e $w \in W$ um R-módulo simples à esquerda arbitrário. Temos $1_R\delta_1 \otimes w \in V$, então $0 = a\left(1_R\delta_1 \otimes w\right) = \sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g \otimes$

$w = \sum_{g \in G} a_g \delta_g \otimes 1_{g^{-1}} w \in \bigoplus_{g \in G} D_g \delta_g \otimes_R 1_{g^{-1}} W$. Portanto cada parcela em g, é tal que $a_g \delta_g \otimes 1_{g^{-1}} w = 0$ e aplicando ϕ acima definida, temos $0 = \phi\left(a_g \delta_g \otimes 1_{g^{-1}} w\right) = a_g \cdot w = \alpha_{g^{-1}}\left(a_g\right) w$, daí, $\alpha_{g^{-1}}\left(a_g\right) \in J(R)$. Desde que $J(R)$ é α-invariante, segue-se que $a_g \in J(R)$, para todo $g \in G$. Logo $J\left(R *_\alpha G\right)^{|G|} \subseteq J(R) *_\alpha G$. ∎

Corolário 3.3.9 *Se $tr_\alpha\left(1_R\right)^{-1} \in R$, então*

$$J\left(R *_\alpha G\right) = J(R) *_\alpha G.$$

Prova. Seja W um R-módulo simples à esquerda (que portanto é semisimples à esquerda). Desde que $tr_\alpha\left(1_R\right)^{-1} \in R$, vale o Teorema de Maschke parcial 2 (Teorema 3.2.2), e assim $V = \left(R *_\alpha G\right) \otimes_R W$ é um $R *_\alpha G$-módulo semisimples à esquerda. Isso implica que V é uma soma direta de R-módulos simples à esquerda, digamos $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$, onde cada V_λ é um R-módulo simples à esquerda. Como $J\left(R *_\alpha G\right) V_\lambda = 0$, para todo λ, segue-se que $J\left(R *_\alpha G\right) V = 0$. Usando argumentação análoga a que fizemos na demonstração do Teorema 3.3.8 acima, não é difícil concluir que $J\left(R *_\alpha G\right) \subseteq J(R) *_\alpha G$. Como a recíproca já foi provada no Teorema 3.3.8, segue-se o resultado. ∎

Corolário 3.3.10 *Nas condições do Teorema 3.3.8 valem:*

1. $J(R) = J\left(R *_\alpha G\right) \cap R$.
2. *$J(R)$ é nilpotente se, e somente se, $J\left(R *_\alpha G\right)$ é nilpotente.*

Prova. 1. Pelo Corolário 3.3.4, $J(R) \supseteq J\left(R *_\alpha G\right) \cap R$, e pelo que vimos na demonstração do teorema 3.3.8 acima, $J(R) \subseteq J\left(R *_\alpha G\right) \cap R$.

2. Suponha que $J(R)^l = 0$, para certo $l > 0$ e sejam $a_1\delta_1, ..., a_l\delta_l \in J(R) *_\alpha G$, então

$$\begin{aligned} a_1\delta_1 a_2\delta_2 ... a_l\delta_l &= a_1 \alpha_{g_1}\left(a_2 1_{g_1^{-1}}\right) \alpha_{g_1}\left(\alpha_{g_2}\left(a_3 1_{g_2^{-1}}\right) 1_{g_1^{-1}}\right) \\ & \quad ...\alpha_{g_1}\left(\alpha_{g_2}\left(\alpha_{g_3}\left(...\alpha_{g_{l-1}}\left(...a_l 1_{g_{l-1}^{-1}}\right) 1_{g_{l-2}^{-1}}\right)...\right) 1_{g_1^{-1}}\right) \delta_{\prod_{i=1}^{l} g_i}. \end{aligned}$$

Desde que $J(R)$ é α-invariante e $a_i \in J(R)$, para todo $i = 1, ..., l$, segue-se que $a_1\delta_1 a_2\delta_2 ... a_l\delta_l = 0\delta_{\prod_{i=1}^{l} g_i} = 0$, assim sendo $J(R){*_\alpha}G$ é nilpotente. Agora basta observar que pelo teorema acima, $J\left(R *_\alpha G\right)^{|G|} \subseteq J\left(R\right) *_\alpha G$, e temos $J\left(R *_\alpha G\right)$ nilpotente também. A recíproca é imediata do item 1. ■

3.3.2 O radical primo

Para o radical primo, temos o seguinte resultado que generaliza para ações parciais com envolvente o Teorema 1.5.10:

Teorema 3.3.11 *Seja G um grupo finito. Se R é semiprimo sem $|G|$-torção aditiva, então $R *_\alpha G$ é semiprimo.*

Prova. O Corolário 2.2.5, juntamente com o Lema 2.2.11, implicam que T é semiprimo sem $|G|$-torção aditiva. Pelo Teorema 1.5.10, temos que $T *_\beta G$ é semiprimo. Sendo que a semiprimaridade é uma propriedade Morita invariante, segue-se do Teorema 1.3.4, que $R *_\alpha G$ é semiprimo. ■

O próximo resultado nos dá uma caracterização dos ideais primos de $R *_\alpha G$, através dos ideais que chamaremos de α-primos de R, que são uma generalização do já conhecidos ideais G-primos. A demonstração de tal resultado segue literalmente os passos da demonstração do Lema 1.5.11, que é encontrada na página 364 de [23] ou na página 132 de [26].

Definição 3.3.12 *Diremos que um ideal α-invariante I, de R é α-primo se, para ideais α-invariantes $A, B \in R$, a inclusão $AB \subseteq I$ implicar $A \subseteq I$ ou $B \subseteq I$.*

Proposição 3.3.13 1. *Se A é um ideal primo de $R *_\alpha G$, então $A \cap R$ é um ideal α-primo de R.*

2. *Se I é um ideal α-primo de R, então existe um ideal primo A de $R *_\alpha G$, tal que $I = A \cap R$.*

Prova. A demonstração dessas afirmações são exatamente as mesmas feitas no caso global, visto que pelo Lema 3.3.1, se A é um ideal (bilateral) de $R *_\alpha G$, então $A \cap R$ é ideal α-invariante de R e $(A \cap R) *_\alpha G \subseteq A$. Temos ainda que se I é ideal α-invariante de R, então $I *_\alpha G$ é ideal de $R *_\alpha G$, com $(I *_\alpha G) \cap R = I$. ■

3.4 A regularidade de $R *_\alpha G$

Aqui trataremos sobre a von Neumann regularidade de $R *_\alpha G$. Nosso objetivo é generalizar o Teorema 1.5.14 para o caso de ações parciais com envolvente.

Teorema 3.4.1 *Seja G um grupo finito. Se R um anel von Neumann regular e $|G|^{-1} \in R$, então $R *_\alpha G$ é von Neumann regular.*

Prova. Seja G um grupo finito. Se R é von Neumann regular e $|G|^{-1} \in R$, então, o Lema 2.2.11, juntamente com o Teorema 2.2.4, fornecem que T é von Neumann regular e que $|G|^{-1} \in T$. Estamos portanto, em condições de aplicar a Proposição 1.5.14, e assim, concluir que a $T *_\beta G$ é von Neumann regular. Como esse tipo de regularidade é Morita invariante, segue-se pelo Teorema 1.3.4, que $R *_\alpha G$ é von Neumann regular. ■

Agora provaremos um teorema que usa argumentação análoga ao Teorema de Maschke parcial 2 (Teorema 3.2.2). As demonstrações são inspiradas nas idéias que encontramos para o caso das ações globais no artigo [2] e na seção 17 do Capítulo 4 de [26].

Lema 3.4.2 *Seja G um grupo finito e R um anel von Neumann regular. Se I é um ideal principal à esquerda de $R *_\alpha G$, então I é um somando direto de ${}_R(R *_\alpha G)$.*

Prova. Observe que $R1_g1_h = D_g \cap D_h$, e que para $g, h \in G$ e $a \in D_g$, temos $a\delta_g D_h \delta_h = a1_g\delta_g R1_h\delta_h = a\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h R)\delta_{gh} = a\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h)\delta_{gh} = a1_{gh}R\delta_{gh}$. Assim, se $x = \sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g \in R *_\alpha G$ é tal que $I = x(R *_\alpha G)$, então

$$I = \sum_{g\in G}\sum_{h\in G} a_g\delta_g D_h\delta_h = \sum_{g\in G}\sum_{h\in G} a_g 1_{gh}R\delta_{gh} = \sum_{u\in G} I_{(h,u)}\delta_u$$

onde $I_{(h,u)} := \sum\limits_{h\in G} a_{uh^{-1}}1_u R$, para todo $u \in G$. Como R é von Neumann regular e cada $I_{(h,u)}$ é um ideal finitamente gerado de R, segue-se, pelo Teorema 1.5.12, que cada $I_{(h,u)}$ é um somando direto de ${}_RR$. Como $R *_\alpha G$ é livre como R-módulo à esquerda, segue-se o resultado. ∎

Teorema 3.4.3 *Seja G um grupo finito. Se R é um anel von Neumann regular, tal que $tr_\alpha(1_R)^{-1} \in R$, então $R *_\alpha G$ é von Neumann regular.*

Prova. Seja I um ideal principal à esquerda de $R *_\alpha G$. Pelo Lema 3.4.2, I é um somando direto de ${}_R(R *_\alpha G)$, portanto existe uma R-projeção $\pi : R *_\alpha G \to I$, onde $\pi(a) = a$, para todo $a \in I$. Definindo $\gamma(x) = tr_\alpha(1_R)^{-1} \sum\limits_{g\in G} 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g x)$, para todo $x \in R *_\alpha G$. Não é difícil ver que γ é uma $R *_\alpha G$-projeção e que $\gamma(a) = a$, para todo $a \in I$. Assim sendo, I é um somando direto de ${}_{R*_\alpha G}R *_\alpha G$. Segue-se da equivalência 3. do Teorema 1.5.12, que $R *_\alpha G$ é von Neumann regular. ∎

Capítulo 4

Subanéis dos elementos invariantes parciais

Salvo menção em contrário, todos os resultados deste capítulo referem-se a uma ação parcial $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g, \;\; g \in G\}$ de um grupo finito G que age sobre um anel R, com envolvente denotada (T, β) ou simplesmente por T. Neste caso, conforme o Teorema 1.2.3, cada ideal D_g tem unidade $1_g = g(1_R)1_R$. Também usaremos as notações R^α para o conjunto dos elementos invariantes pela ação parcial α, a saber:

$$R^\alpha = \{x \in R : \alpha_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g, \text{ para todo } g \in G\}.$$

É imediato verificar que R^α é de fato um subanel que preserva unidade de R. Usaremos ainda, a notação T^G para o subanel dos elementos invariantes de T, pela ação envolvente β, isto é:

$$T^G = \{t \in T : \; g(t) = t, \text{ para todo } g \in G\}.$$

4.1 O isomorfismo entre R^α e T^G

O objetivo nesta seção é provarmos que para um grupo finito G, os anéis R^α e T^G são isomorfos. Iniciaremos com algumas inclusões que são sempre verdadeiras mesmo para um grupo G infinito.

Proposição 4.1.1 *Para G arbitrário, valem as seguintes inclusões:*

$$T^G \cap R \subseteq T^G 1_R \subseteq R^\alpha.$$

Prova. Para a primeira incluso basta observar que

$$T^G \cap R = \left(T^G \cap R\right) 1_R \subseteq T^G 1_R.$$

Vamos então a segunda delas. Seja $t \in T^G$ e $g \in G$. Desde que $t1_{g^{-1}} \in D_{g^{-1}}$, então pelo item 3 da Definição 1.2.2, segue-se que

$$\alpha_g(t1_R 1_{g^{-1}}) = \alpha_g(t1_{g^{-1}}) = g(t)g(1_{g^{-1}}) = t1_R\alpha_g(1_{g^{-1}}) = t1_R 1_g.$$

Como $g \in G$ é arbitrário, temos $t1_R \in R^\alpha$. ■

O exemplo a seguir mostra que a primeira inclusão na Proposição 4.1.1 pode ser estrita.

Exemplo 4.1.2 Sejam K um anel qualquer, e_1, e_2 e e_3 idempotentes ortogonais centrais e $R = \bigoplus\limits_{i=1}^{3} Ke_i$. Tomemos $G = \{1, g, g^2 : g^3 = 1\}$ agindo parcialmente sobre R por uma ação parcial α definida do seguinte modo: $\alpha_1 = id_R$; $\alpha_g : Ke_1 \to Ke_2$, onde $e_1 \mapsto e_2$; $\alpha_{g^2} : Ke_2 \to Ke_1$, onde $e_2 \mapsto e_1$. Uma envolvente para α é dada por: $T = \bigoplus\limits_{i=1}^{6} Ke_i$, para $\{e_i{:}i = 1, ..., 6\}$ idempotentes ortogonais centrais, com ação global definida por $1_G = id_T$ e $g : T \to T$, onde $e_1 \mapsto e_2, e_2 \mapsto e_4, e_3 \mapsto e_5, e_4 \mapsto e_1, e_5 \mapsto e_6$ e $e_6 \mapsto e_3$. Com poucos cálculos obtemos, $R^\alpha = K(e_1 + e_2) \bigoplus Ke_3$, enquanto que, $T^G = K(e_1 + e_2 + e_4) \bigoplus K(e_3 + e_5 + e_6)$. Portanto $T^G.1_R = R^\alpha$, enquanto que $T^G \cap R = 0$, pois para que $\sum\limits_{i=1}^{6} a_i e_i \in R$, os coeficientes de e_4,e_5 e e_6 devem ser nulos. Logo $T^G \cap R \subsetneqq T^G 1_R = R^\alpha$.

De fato o exemplo acima é um caso particular do seguinte resultado:

Proposição 4.1.3 *Seja G um grupo arbitrário. São equivalentes:*

1. $T^G \cap R = T^G 1_R$ *e* T *tem unidade.*

2. $T = R$ *e* α *é uma ação global.*

Prova. Se $T^G \cap R = T^G.1_R$, então $1_R = 1_T 1_R \in T^G 1_R \subseteq T^G$, portanto $1_R = g(1_R)1_R = 1_g$, para todo $g \in G$. Portanto a ação é global. Reciprocamente, se a ação é global, então $1_T = 1_R$ e $R^\alpha = T^G$, daí $T^G 1_R = R^\alpha 1_R = R^\alpha \cap R = T^G \cap R$. ■

Para o caso de G ser um grupo finito, o próximo resultado prova que a segunda inclusão na Proposição 4.1.1 é de fato uma igualdade.

Teorema 4.1.4 *Para um grupo G finito, temos:*

$$R^\alpha = T^G 1_R.$$

Prova. Que $T^G 1_R \subseteq R^\alpha$, já foi provado na Proposição 4.1.1. Para provar a recíproca, usaremos a aplicação

$$\Psi\left(x\right) = \sum_{1 \leq l \leq n} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_l} (-1)^{l+1} g_{i_1}\left(1_R\right) g_{i_2}\left(1_R\right) \ldots g_{i_{l-1}}\left(1_R\right) g_{i_l}\left(x\right), \tag{4.1}$$

para todo $x \in R^\alpha$, definida em 1.4.4. Provaremos que dados $g \in G$, $x \in R^\alpha$ e

$$p = g_{i_1}\left(1_R\right) g_{i_2}\left(1_R\right) ... g_{i_{l-1}}\left(1_R\right) g_{i_l}\left(x\right),$$

então $g\left(p\right)$ é ainda uma parcela de $\Psi\left(x\right)$. Com efeito, como $i_1 < i_2 < ... < i_l$ são índices tomados em $\{1, ..., n = |G|\}$ e G é visto como o conjunto ordenado: $G = \{g_1 = 1_G, g_2, ..., g_n\}$. Então $g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_{l-1}}, g_{i_l}$ aparecem nesta lista de forma crescente e $g_{i_j} \neq g_{i_k}$, sempre que $j \neq k$. Assim,

$$g\left(p\right) = h_{i_1}\left(1_R\right) h_{i_2}\left(1_R\right) ... h_{i_{l-1}}\left(1_R\right) h_{i_l}\left(x\right),$$

onde $h_{i_j} = gg_{i_j}$, para $j = 1, ..., l$. Pelo Lema 2.2.1, $h_{i_j}(1_R)$ é central em T, isso nos permite reordenar $h_{i_1}(1_R)\, h_{i_2}(1_R) \ldots h_{i_{l-1}}(1_R)$ de forma que $h_{i_1}, h_{i_2}, ..., h_{i_{l-1}}$ apareçam na listagem G de forma crescente, portanto assumiremos daqui por diante que eles já estejam dispostos nessa ordem crescente. Agora, se $h_{i_{l-1}}$ aparecer na lista G antes de h_{i_l}, nada mais temos a fazer, pois nesse caso $g(p)$ é uma das parcelas de $\Psi(x)$. Senão, observando que para todo $x \in R^\alpha$ e todo $h \in G$,

$$\begin{aligned} h(x)1_R &= h(x)\, h(1_R)\, 1_R = h(x)\, 1_h = h(x)\, h(1_{h^{-1}}) \qquad (4.2) \\ &= h(x 1_{h^{-1}}) = \alpha_h(x 1_{h^{-1}}) = x 1_h = x 1_R h(1_R) = x h(1_R), \end{aligned}$$

segue-se por (4.2) e pelo fato de 1_R ser central em T, que

$$\begin{aligned} h_{i_{l-1}}(1_R)\, h_{i_l}(x) &= h_{i_l}\left(h_{i_l}^{-1} h_{i_{l-1}}(1_R)\, x\right) = h_{i_l}\left(1_R h_{i_l}^{-1} h_{i_{l-1}}(x)\right) \\ &= h_{i_{l-1}}(x)\, h_{i_l}(1_R). \end{aligned}$$

Assim, reordenando os $h_{i_1}(1_R), h_{i_2}(1_R), ..., h_{i_{l-2}}(1_R), h_{i_l}(1_R)$ se necessário, obtemos que

$$g(p) = h_{i_1}(1_R)\, h_{i_2}(1_R) \ldots h_{i_{l-2}}(1_R)\, h_{i_l}(1_R)\, h_{i_{l-1}}(x)$$

é uma das parcelas de $\Psi(x)$, pois $h_{i_1}, h_{i_2}, ..., h_{i_{l-2}}, h_{i_l}, h_{i_{l-1}}$ aparecem de forma crescente e não repetida na lista G.

Considerando que cada $g \in G$ é um isomorfismo, se p, p' são parcelas de $\Psi(x)$, então $p = p'$ se, e somente se, $g(p) = g(p')$. Portanto todas as parcelas de $g(\Psi(x))$ são parcelas de $\Psi(x)$ e vice-versa, isto é,

$$g(\Psi(x)) = \Psi(x).$$

Finalmente, se $x \in R^\alpha$, então, usando (4.2) temos

$$\begin{aligned} \Psi(x)\, 1_R &= \sum_{1 \le l \le n} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_l} (-1)^{l+1} g_{i_1}(1_R)\, g_{i_2}(1_R) \ldots g_{i_{l-1}}(1_R)\, g_{i_l}(x)\, 1_R \\ &= \sum_{1 \le l \le n} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_l} (-1)^{l+1} g_{i_1}(1_R)\, g_{i_2}(1_R) \ldots g_{i_{l-1}}(1_R)\, g_{i_l}(1_R)\, x \\ &= \Psi(1_R)\, x = 1_T x = x. \end{aligned}$$

Desde que $\Psi(x) \in T^G$, segue-se que $R^\alpha \subseteq T^G 1_R$. ■

Corolário 4.1.5 *Seja G um grupo finito. Então, os anéis T^G e R^α são isomorfos, via $\varphi : T^G \to R^\alpha$, definido por $\varphi(t) = t1_R$, para todo $t \in T^G$. O isomorfismo inverso é $\Psi : R^\alpha \to T^G$, definido em (4.1)*

Prova. A aplicação $\varphi : T^G \to R^\alpha$, definida por $\varphi(t) = t1_R$ é um isomorfismo de anéis. Com efeito, $\varphi(1_T) = 1_T 1_R = 1_R$ é a unidade de R^α; sendo $t, t' \in T^G$, temos $\varphi(t + t') = (t + t') 1_R = t1_R + t'1_R = \varphi(t) + \varphi(t')$ e $\varphi(t.t') = (t.t') 1_R = t1_R.t'1_R = \varphi(t) \varphi(t')$. Além disso, φ é injetora, pois para $t \in T^G$ tal que $t1_R = 0$, temos $g(t1_R) = 0$, para todo $g \in G$, e consequentemente $tg(1_R) = 0$ para todo $g \in G$. Portanto, $t = 1_T t = \Psi(1_R)t = 0$. A sobrejetividade sai imediata do teorema acima, pois dado $x \in R^\alpha$, então $\Psi(x) \in T^G$ é tal que $\Psi(x)1_R = x$.

Temos ainda que $\Psi(\varphi(t)) = \Psi(t1_R) = \Psi(1_R)t = 1_T t = t$, para todo $t \in T^G$, e reciprocamente, como vimos no Teorema 4.1.4 acima, para todo $x \in R^\alpha$, temos $\varphi(\Psi(x)) = x$. Logo Ψ é o isomorfismo inverso de φ. ■

Corolário 4.1.6 *Seja G um grupo finito. Se rad é um radical, então $rad(R^\alpha) = rad(T^G)1_R$.*

Prova. Desde que a aplicação $\varphi : T^G \to R^\alpha$, definida por $\varphi(t) = t1_R$, para todo $t \in T^G$ é um isomorfismo de anéis, segue-se pela Proposição 1.5.7 que $rad(T^G)1_R = \varphi(rad(T^G)) = rad(R^\alpha)$. ■

Exemplo 4.1.7 (Para um grupo G infinito, a inclusão $R^\alpha \subseteq T^G 1_R$ pode ser estrita.) Seja $0 \neq e_0$ um idempotente central e K um anel qualquer. Seja $R = Ke_0$ e $G =< g >$, grupo cíclico infinito. Tome $D_1 = R$ e $D_h = (0)$, para todo $1 \neq h \in G$ e faça G agir parcialmente sobre R, por uma ação α, do seguinte modo: $\alpha_1 = id_R$, $\alpha_h(0) = 0$, para todo $1 \neq h \in G$. É fácil ver que α é uma ação parcial e desde que $1_R = e_0$ e $1_{g^n} = 0$ para todo $0 \neq n \in \mathbb{Z}$, segue-se pelo Teorema 1.2.3, que α tem envolvente, que denotaremos por T. Observando que $0 = 1_{g^n} = 1_R g^n(1_R) = e_0 g^n(e_0)$, sempre que $n \neq 0$, então $g^n(e_0) = g^m(e_0)$ implica que $g^{n-m}(e_0) = e_0$, assim sendo $e_0 g^{n-m}(e_0) = e_0 \neq 0$, portanto $n = m$. Por outro lado, $g^n(e_0) \neq g^m(e_0)$, então $g^{n-m} \neq 1_G$, daí $e_0 g^{n-m}(e_0) = 0$, e assim, $g^{-m}(g^n(e_0) g^m(e_0)) = 0$, portanto $g^n(e_0) g^m(e_0) = 0$. Como para todo n, $g^n(e_0)$ é idempotente central, temos que $\{g^n(e_0) : n \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto de idempotentes centrais ortogonais. Denotando por $e_n = g^n(e_0)$, temos

$$T = \sum_{g \in G} g(R) = \sum_{g \in G} g(Ke_0) = \sum_{g \in G} Kg(e_0) = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} Ke_n.$$

Como $\alpha_{g^n}(ke_0.0) = ke_0.0$, para todo $0 \neq n \in \mathbb{Z}$, segue-se que $R^\alpha = R$. Por outro lado, desde que para todo $m, n \in \mathbb{Z}$, temos $g^n(e_m) = g^n(g^m(e_0)) = g^{n+m}(e_0) = e_{n+m}$, segue-se que para $t = \sum_{i=1}^{l} k_i e_{n_i} \in T^G$, é necessário que $t = g^n(t)$, assim sendo, é fácil concluir que $T^G = 0$. Logo $0 = T^G.1_R \subsetneqq R = R^\alpha$.

4.1.1 Consequências imediatas

Como consequências imediatas do Teorema 4.1.4 e de seu corolário, podemos generalizar o item 1. do Teorema 1.5.21 e o Teorema 1.5.18 para o caso de ações parciais de grupos finitos sobre anéis, com envolvente.

Teorema 4.1.8 *Se R é um anel semiprimo sem $|G|$-torção aditiva, então R^α é semiprimo.*

Prova. Se R é semiprimo sem $|G|$-torção aditiva, então pelo Corolário 2.2.5 e pelo Lema 2.2.11, T é semiprimo sem $|G|$-torção aditiva. Neste caso, vale o Teorema 1.5.21, que afirma que em tais condições T^G é semiprimo. Finalmente pelo Corolário 4.1.5, temos que R^α é semiprimo. ■

Teorema 4.1.9 *Se R é semisimples e $|G|^{-1} \in R$, então R^α é semisimples.*

Prova. Se R é semisimples e $|G|^{-1} \in R$, então pela Proposição 2.2.2 e pelo Lema 2.2.11, T é semisimples e $|G|^{-1} \in T$. Daí pelo Teorema 1.5.18, temos T^G semisimples, e finalmente pelo Teorema 4.1.4, temos R^α é semisimples. ■

4.2 α tem traço parcial não-degenerado

O objetivo nesta seção é generalizar o Teorema 1.5.21. Iniciaremos generalizando a Definição 1.5.22, e seguida, provaremos que toda ação parcial α de um grupo finito G sobre um anel semiprimo, se enquadra nessa definição. Lembremos que a aplicação traço parcial $tr_\alpha : R \to R^\alpha$, definida por $tr_\alpha(x) = \sum\limits_{g\in G} \alpha_g(x1_{g^{-1}})$, para todo $x \in R$, está bem definida quando α tem envolvente. As construções e resultados que se seguem são inspirados nas idéias feitas para o caso das ações globais, que são encontradas no capítulo 1 de [24].

Definição 4.2.1 *Dizemos que uma ação parcial α tem traço parcial não-degenerado sobre o anel R, se*

1. *R^α é semiprimo.*

2. *Se $0 \neq J$ é um ideal à esquerda de R, que é α-invariante, então $tr_\alpha(J) \neq 0$.*

Observe que para um ideal à esquerda J de R, $tr_\alpha(J) = \{\sum_l tr_\alpha(j_l) : j_l \in J\}$ é um ideal à esquerda de R^α, pois dado $a \in R^\alpha$ e $j \in J$, temos $atr_\alpha(j) = a \sum\limits_{g\in G} \alpha_g(j1_{g^{-1}}) = \sum\limits_{g\in G} \alpha_g(aj1_{g^{-1}}) \in tr_\alpha(J)$. Além disso, sempre que J for α-invariante, teremos $tr_\alpha(J) \subseteq J$.

Sabemos que no caso de haver envolvente (T, β), o skew anel de grupo parcial $R *_\alpha G$ é associativo, portanto é um (R, R)-bimódulo. Por sua vez, a aplicação parcial de crescimento $\tau : R *_\alpha G \to R$, definida por $\tau\left(\sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g\right) = \sum\limits_{g\in G} a_g$, para todo $\sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g \in R *_\alpha G$, é claramente, um homomorfismo de R-módulos à esquerda.

Consideremos também, o suporte de $\sum\limits_{g \in G} a_g \delta_g \in R *_\alpha G$, definido por

$$sup\left(\sum_{g \in G} a_g \delta_g\right) = \{g \in G : a_g \neq 0\}$$

e para $J < {}_R R$, que seja α-invariante, denotemos

$$J *_\alpha G = \left\{\sum_{g \in G} a_g \delta_g : a_g \in D_g \cap J, g \in G\right\}.$$

Finalmente, denotemos por

$$V_J = \{a \in J *_\alpha G : \tau\,(aJ) = 0\}$$

e, para todo $X \subseteq G$,

$$V_J\,(X) = \{a \in V_J : sup(a) \cap X = \phi\}.$$

O lema a seguir não exige que a ação parcial tenha envolvente.

Lema 4.2.2 *Seja J um ideal à esquerda de R que é α-invariante. Nas notações acima, valem:*

1. *$J *_\alpha G < {}_R R *_\alpha G$ e é um (R, J)-bimódulo.*

2. *V_J é (R, J)-bimódulo.*

3. *Para cada $X \subseteq G$, $V_J\,(X)$ é (R, J)-subbimódulo de V_J, $V_J\,(G) = 0$ e $V_J\,(\phi) = V_J$.*

Prova. 1. A prova de que $J *_\alpha G$ é um ideal à esquerda de $R *_\alpha G$ já foi feita no item 2 do Lema 3.3.1. Agora se $b \in J$ e $\sum\limits_{g \in G} a_g \delta_g \in J *_\alpha G$, então $\sum\limits_{g \in G} a_g \delta_g b = \sum\limits_{g \in G} \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b)\delta_g \in \sum\limits_{g \in G}(D_g \cap J)\delta_g \subseteq J *_\alpha G$, pois J é α-invariante. O resto é imediato.

2. Se $a, b \in V_J$, então $\tau\,((a + b)\,J) = \tau\,(aJ) + \tau(bJ) = 0$. E ainda, sempre que $a \in V_J$,

teremos $\tau(raJ) = r\tau(aJ) = 0$, para todo $r \in R$ e $\tau((aj)\,J) \subseteq \tau(aJ) = 0$, para todo $j \in J$. O resto é imediato.

3. Sejam $X \subseteq G$ e $a, b \in V_J$ tais que $sup(a) \cap X = sup(b) \cap X = \phi$. Como $sup(a+b) \subseteq sup(a) \cup sup(b)$, então

$$sup\,(a+b) \cap X \subseteq [sup\,(a) \cup sup\,(b)] \cap X = [sup\,(a) \cap X] \cup [sup\,(b) \cap X] = \phi,$$

daí, $a + b \in V_J\,(X)$. Agora, sejam $r \in R$ e $a \in V_J$, desde que $sup\,(ra) \subseteq sup\,(a)$, temos $sup\,(ra) \cap X \subseteq sup\,(a) \cap X$, e assim $ra \in V_J\,(X)$ sempre que $a \in V_J\,(X)$. Para $j \in J$ e $a = \sum\limits_{g \in G} a_g \delta_g$, temos $aj = \sum\limits_{g \in G} \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)j)\delta_g$. Como $\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)j) \neq 0$ implica que $a_g \neq 0$, temos $sup\,(aj) \subseteq sup\,(a)$, e assim, $sup\,(aj) \cap X \subseteq sup\,(a) \cap X$. Portanto $aj \in V_J\,(X)$, sempre que $a \in V_J\,(X)$. Finalmente, as equivalências:

$$a \in V_J \Leftrightarrow a \in V_J \text{ e } sup\,(a) \cap \phi = \phi \Leftrightarrow a \in V_J\,(\phi)$$

e

$$a \in V_J\,(G) \Leftrightarrow a \in V_J \text{ e } sup\,(a) \cap G = \phi \Leftrightarrow a \in V_J \text{ e } a = 0$$

completam a demonstração. ■

Lembremos que dados $n \geq m \geq 0$, a notação C_n^m, indica o número de combinações de n elementos tomados m à m. Para V_J, acima definido temos:

Lema 4.2.3 *Seja J um ideal à esquerda de anel R, que é α-invariante. Então $(\tau V_J)^{f(|G|)} = (0)$, onde $f(n) = \prod\limits_{m=1}^{n} (C_n^m + 1)$.*

Prova Afirmamos que

$$(\tau V_J\,(X))^2 \subseteq \sum_{g \notin X} (\tau V_J\,(X \cup \{g\}))\,. \tag{4.3}$$

Com efeito, sejam $g \in G$ e $a = \sum\limits_{h \in G} a_h \delta_h$, $b = \sum\limits_{h \in G} b_h \delta_h$ pertencentes a $V_J\,(X)$ e considere o elemento

$$a\alpha_{g^{-1}}(b_g) - a_g b = \sum_{h \in G} \left[\alpha_h\left(\alpha_{h^{-1}}\,(a_h)\,\alpha_g^{-1}(b_g)\right) - a_g b_h\right] \delta_h.$$

Tal elemento está em V_J, pois $b_g \in J$ é α-invariante, daí

$$a\alpha_{g^{-1}}(b_g) - a_g b \in V_J J + RV_J \subseteq V_J.$$

Ainda, seu coeficiente de índice g, vale

$$\alpha_g \left(\alpha_{g^{-1}} \left(a_g\right) \alpha_{g^{-1}}(b_g)\right) - a_g b_g = a_g b_g - a_g b_g = 0,$$

daí $a\alpha_g^{-1}(b_g) - a_g b \in V_J \left(X \cup \{g\}\right)$, sempre que $a, b \in V_J \left(X\right)$.

Como $b \in V_J \left(X\right)$ e $\alpha_{g^{-1}}(b_g) \in J$, então $\tau \left(a\alpha_{g^{-1}}(b_g)\right) = 0$, pois $a \in V_J$, portanto

$$a_g \tau \left(b\right) = \tau \left(a_g b\right) = \tau \left(a_g b - a\alpha_{g^{-1}}(b_g)\right) \in \tau \left(V_J \left(X \cup \{g\}\right)\right).$$

Como a, $b \in V_J \left(X\right)$, então para $f \in X$, teremos $a_f = b_f = 0$, donde se conclui que

$$\tau \left(a\right) \tau \left(b\right) = \sum_{g \in G} a_g \tau \left(b\right) = \sum_{g \notin X} a_g \tau \left(b\right) \in \sum_{g \notin X} \tau \left(V_J \left(X \cup \{g\}\right)\right),$$

o que prova o afirmado.

Para provar o lema, observe que as parcelas de $\left[\sum_{|X|=m} \tau V_J \left(X\right)\right]^{k+1}$ são produtos do tipo $\tau V_J \left(X_0\right) .\tau V_J \left(X_1\right) ...\tau V_J \left(X_k\right)$, onde cada X_i são subconjuntos de G com exatamente m elementos e $k = C_n^m$ é o número de subconjuntos de G com m elementos. Como $i = 0, 1, ..., k$, fornece $k + 1$ subconjuntos X_i e só existem k subconjuntos distintos de G com essa ordem, então, para cada parcela p, existem $i, j \in \{0, ..., k\}$ tais que $X_i = X_j =: \tilde{X}_p$. Portanto, por (4.3),

$$\begin{aligned}\left[\sum_{|X|=m} \tau V_J \left(X\right)\right]^{k+1} &\subseteq \sum_p \left(R\tau V_J \left(\tilde{X}_p\right)\right) \left(R\tau V_J \left(\tilde{X}_p\right)\right) R \\ &\subseteq \sum_p \left(\tau V_J \left(\tilde{X}_p\right)\right)^2 R \subseteq \sum_{|Y|=m+1} \tau \left(V_J \left(Y\right)\right) R.\end{aligned}$$

Finalmente, como $V_J(\phi) = V_J$ e $V_J(G) = (0)$, temos

$$\left(\tau V_J\right)^{C_n^0+1} = \left[\sum_{|X|=0} \tau V_J \left(\phi\right)\right]^{C_n^0+1} \subseteq \sum_{|X|=1} \tau \left(V_J \left(X\right)\right) R.$$

Então

$$\begin{aligned}\left[(\tau V_J)^{C_n^0+1}\right]^{C_n^1+1} &\subseteq \left[\sum_{|X|=1}\tau\left(V_J\left(X\right)\right)R\right]^{C_n^1+1}\\ &\subseteq \sum_{|X|=1}\left[\tau V_J\left(X\right)\right]^{C_n^1+1}R\subseteq\sum_{|X|=2}\tau\left(V_J\left(X\right)\right)R.\end{aligned}$$

Como G é finito, podemos continuar o processo acima e obter:

$$(\tau V_J)^{f(|G|)}\subseteq\sum_{|X|=|G|}\tau\left(V_J\left(X\right)\right)R=\tau\left(V_J\left(G\right)\right)R=\tau\left(0\right)R=\left(0\right). \qquad \blacksquare$$

Lema 4.2.4 *Sejam J um ideal à esquerda de R que é α-invariante e $n>0$. Então para $J_0 := J\left(tr_\alpha(J)\right)^n$, valem:*

1. *$J_0 <_R R$ é α-invariante.*
2. *$tr_\alpha(J_0)\subseteq tr_\alpha(J)$.*

Prova. 1. Desde que J é um ideal à esquerda, segue-se imediato que $J_0 <_R R$. Agora se, $g\in G$ e $a\in J\left(tr_\alpha(J)\right)^n\cap D_{g^{-1}}$, então $a=\sum_i j_i\prod_{k=1}^n tr_\alpha(j_{k_i})$ para certos $j_i; j_{k_i}\in J$. Assim sendo,

$$\begin{aligned}\alpha_g(a) &= \alpha_g(a1_{g^{-1}})=\alpha_g(\sum_i j_i\prod_{k=1}^n tr_\alpha(j_{k_i})1_{g^{-1}})\\ &= \sum_i\alpha_g\left[(j_i1_{g^{-1}})\prod_{k=1}^n tr_\alpha(j_{k_i})1_{g^{-1}}\right]=\alpha_g\left(j_i1_{g^{-1}}\right)\prod_{k=1}^n\alpha_g\left(tr_\alpha(j_{k_i})1_{g^{-1}}\right)\\ &\subseteq \sum_i J\prod_{k=1}^n tr_\alpha(j_{k_i})1_g\subseteq J\left(tr_\alpha(J)\right)^n\cap D_g.\end{aligned}$$

2. Se $j\in J$, então $tr_\alpha\left(j\right)=\sum_{h\in G}\alpha_h\left(j1_{h^{-1}}\right)\in\sum_{h\in G}\left(J\cap D_h\right)\subseteq J$, daí $tr_\alpha\left(J\right)\subseteq J$. Consequentemente, para todo $n>0$, $J\left(tr_\alpha\left(J\right)\right)^n\subseteq J^{n+1}\subseteq J$. Logo $tr_\alpha\left(J\left(tr_\alpha\left(J\right)\right)^n\right)\subseteq tr_\alpha\left(J\right)$. $\blacksquare$

O próximo resultado é uma generalização do Teorema 1.5.19:

Proposição 4.2.5 *Sejam J um ideal à esquerda de R que é α-invariante, $\lambda = f(|G|) + 1$ (f como no Lema 4.2.3) e $d > 0$. Então*

$$\left[\left(tr_\alpha(1_R)\, J\right]^{\lambda^d} \subseteq tr_\alpha(1_R) J \left(tr_\alpha(J)\right)^d R \subseteq J \left(tr_\alpha(J)\right)^d R.$$

Prova Desde que J é um ideal à esquerda, a segunda desigualdade é sempre verdadeira. Provemos então a primeira desigualdade.

Seja $L_J = lan_J(tr_\alpha(J)) = \{j \in J : jtr_\alpha(J) = 0\}$ (o anulador à esquerda de $tr_\alpha(J)$ em J). Afirmamos que

$$(tr_\alpha(1_R)L_J)^{f(|G|)} = 0. \tag{4.4}$$

Para verificar isto, basta provar que $tr_\alpha(1_R)L_J \subseteq \tau V_J$, e usar o Lema 4.2.3. É o que faremos agora.

Seja $x \in L_J$, então para todo $j \in J$,

$$\begin{aligned} 0 &= xtr_\alpha(j) = \sum_{g \in G} x\alpha_g(j1_{g^{-1}}) = \sum_{g \in G} x1_g\alpha_g(j1_{g^{-1}}) \\ &= \sum_{g \in G} \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}\left(x1_{g^{-1}}\right) j\right), \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned} \tau\left(\left(\sum_{g \in G} x1_g\delta_g\right) j\right) &= \tau\left(\sum_{g \in G} x1_g\delta_g j\right) = \tau\left(\sum_{g \in G} \alpha_g\left[\alpha_{g^{-1}}\left(x1_{g^{-1}}\right) j\right]\delta_g\right) \\ &= \sum_{g \in G} \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}\left(x1_{g^{-1}}\right) j\right) = 0, \end{aligned}$$

o que implica que $\sum\limits_{g \in G} x1_g\delta_g \in V_J$. Além disso

$$tr_\alpha(1_R)x = xtr_\alpha(1_R) = \sum_{g \in G} x1_g = \tau\left(\sum_{g \in G} x1_g\delta_g\right) \in \tau V_J,$$

segue-se disto que $tr_\alpha(1_R)L_J \subseteq \tau V_J$, como havíamos afirmado.

Consideremos agora, o ideal (bilateral) $I := Jtr_\alpha(J)R$ de R. Temos que I é α-invariante, pois para $g \in G$ e $u \in I \cap D_{g^{-1}}$, temos $u = \sum\limits_i j_i tr_\alpha(j_i^{'})r_i$ para certos

$j_i, j_i^{'} \in J$ e $r_i \in R$. Como $tr_\alpha(J) \subseteq R^\alpha$, então

$$\begin{aligned}\alpha_g(u) &= \alpha_g(u1_{g^{-1}}) = \alpha_g(\sum_i j_i 1_{g^{-1}} tr_\alpha(j_i^{'}) 1_{g^{-1}} r_i 1_{g^{-1}}) \\ &= \sum_i \alpha_g\left(j_i 1_{g^{-1}}\right) \alpha_g\left(tr_\alpha(j_i^{'}) 1_{g^{-1}}\right) \alpha_g\left(r_i 1_{g^{-1}}\right) \\ &\in \left(J \cap D_g\right)\left(tr_\alpha(J) \cap D_g\right) D_g \subseteq I \cap D_g.\end{aligned}$$

Como I é um ideal bilateral α-invariante de R, então pela Proposição 2.3.5, existe uma ação parcial induzida $(R/I, \overline{\alpha}_I)$ que denotamos simplesmente por $\overline{\alpha}$. Por sua vez a Proposição 2.3.9 afirma que $tr_{\overline{\alpha}}(\overline{r}) = \overline{tr_\alpha(r)}$, para todo $r \in R$, portanto $\overline{J} tr_{\overline{\alpha}}\left(\overline{J}\right) = \overline{J tr_\alpha(J)} \subseteq \overline{J tr_\alpha(J) R} = \overline{0}$ e sendo assim, $\overline{J} \subseteq lan_{\overline{J}}\left(tr_{\overline{\alpha}}\left(\overline{J}\right)\right) = L_{\overline{J}}$. Por (4.4), temos $\left(\overline{J} tr_{\overline{\alpha}}\left(\overline{1_R}\right)\right)^{f(|G|)} = (\overline{0})$, donde se conclui que

$$\left(J tr_\alpha(1_R)\right)^{f(|G|)} \subseteq J tr_\alpha(J) R.$$

Multiplicando ambos os lados por $J tr_\alpha(1_R) = tr_\alpha(1_R) J$, obtemos

$$\left(J tr_\alpha(1_R)\right)^\lambda \subseteq tr_\alpha(1_R) J tr_\alpha(J) R, \tag{4.5}$$

o que prova a proposição para $d = 1$. Seguimos a prova usando indução sobre d. Suponhamos por hipótese que

$$\left(J tr_\alpha(1_R)\right)^{\lambda^{d-1}} \subseteq tr_\alpha(1_R) J \left(tr_\alpha(J)\right)^{d-1} R.$$

Tomando a potência λ em ambos os lados, obtemos

$$\left[J tr_\alpha(1_R)\right]^{\lambda^d} \subseteq \left[tr_\alpha(1_R) J \left(tr_\alpha(J)\right)^{d-1} R\right]^\lambda.$$

Pelo Lema 4.2.4 item 1., $J_0 := J\left(tr_\alpha(J)\right)^{d-1} <_R R$ é α-invariante, portanto vale (4.5), isto é,

$$\left(J_0 tr_\alpha(1_R)\right)^\lambda \subseteq tr_\alpha(1_R) J_0 tr_\alpha(J_0) R.$$

e ainda pelo Lema 4.2.4 item 2., temos, $tr_\alpha(J_0) = tr_\alpha\left(J\left(tr_\alpha(J)\right)^{d-1}\right) \subseteq tr_\alpha(J)$ e desde que $tr_\alpha(1_R)$ é central em R, concluimos que

$$\begin{aligned}
(Jtr_\alpha(1_R))^{\lambda^d} &\subseteq (tr_\alpha(1_R)J_0R)^\lambda \subseteq (tr_\alpha(1_R)J_0)^\lambda R \\
&\subseteq tr_\alpha(1_R)J_0tr_\alpha(J_0)R \\
&\subseteq tr_\alpha(1_R)J\left(tr_\alpha(J)\right)^{d-1} tr_\alpha(J)R = tr_\alpha(1_R)J\left(tr_\alpha(J)\right)^d R.
\end{aligned}$$

■

Pelo que vimos acima, a hipótese de $tr_\alpha(1_R)$ não ser um divisor de zero em R passa a ser importante em nossa discussão. A prova do seguinte lema é trivial:

Lema 4.2.6 *Sejam $n > 0$ e $u \in R$. Então, u não é um divisor de zero à esquerda se, e somente se, u^n não é um divisor de zero à esquerda.*

Prova. Evidente. ■

Observação 4.2.7 Desde que $tr_\alpha(1_R)$ é elemento central em R, segue-se imediatamente do lema acima que para $n > 0$,

$$tr_\alpha(1_R) \text{ não é um divisor de zero} \Leftrightarrow \left[tr_\alpha(1_R)\right]^n \text{ não é um divisor de zero.}$$

Portanto, no caso de $tr_\alpha(1_R)$ não ser um divisor de zero, temos

$$\left[tr_\alpha(1_R)J\right]^n = 0 \Rightarrow J^n = 0,$$

para todo $J \subseteq R$.

Já temos ferramentas suficientes para provar o próximo resultado que é uma generalização para o caso parcial do Teorema 1.5.20.

Corolário 4.2.8 *Se $tr_\alpha(1_R)$ não é um divisor de zero em R e $J <\ _RR$ é α-invariante, tal que $tr_\alpha(J)$ é nilpotente de índice d, então J é nilpotente de índice no máximo $\left(f\left(|G|\right)+1\right)^d$ (f como no Lema 4.2.3).*

Prova. Pela Proposição 4.2.5, $[tr_\alpha(1_R)J]^{(f(|G|)+1)^d} \subseteq Jtr_\alpha(J)^d R = 0$, portanto pela Observação 4.2.7, temos $J^{(f(|G|)+1)^d} = 0$. ■

Observação 4.2.9 Os resultados acima obtidos para um ideal à esquerda J de R, podem ser refeitos para um ideal à direita de R, ou podemos repassá-los a este último utilizando o anel oposto R^o, pois neste caso

$$J < R_R \Leftrightarrow J^o < {}_{R^o}R^o,$$

e a ação parcial correspondente a R^o, é dada por:

$${}_o\alpha = \left\{ {}_o\alpha_g : D^o_{g^{-1}} \to D^o_g, g \in G \right\},$$

onde cada ${}_o\alpha_g$, é definido por ${}_o\alpha_g(d^o) = (\alpha_g(d))^o$.

Assim, a fórmula da Proposição 4.2.5, correspondente para ideais à direita, será:

$$[tr_\alpha(1_R)J]^{\lambda^d} \subseteq R\,[tr_\alpha(J)]^d\, tr_\alpha(1_R)J \subseteq R\,[tr_\alpha(J)]^d\, J.$$

Lema 4.2.10 *Seja I um ideal (bilateral) de R^α. Então valem:*

1. *Para todo $a \in R^\alpha$, Ra e aR são α-invariantes.*

2. *Se além disso, I é nilpotente, Então, $tr_\alpha(Ra)$ e $tr_\alpha(aR)$ são nilpotentes, para todo $a \in I$.*

Prova. 1. Para $a \in R^\alpha$ e $g \in G$, temos $\alpha_g(a1_{g^{-1}}) = a1_g$. Portanto para $r \in R$, $\alpha_g(ra1_{g^{-1}}) = \alpha_g(r1_{g^{-1}})\,\alpha_g(a1_{g^{-1}}) = \alpha_g(r1_{g^{-1}})\,a1_g = \alpha_g(r1_{g^{-1}})\,a \in Ra$. Isto garante que $\alpha_g(Ra \cap D_{g^{-1}}) \subseteq Ra \cap D_g$, para todo $g \in G$. De modo análogo, provamos que aR é α-invariante.

2. Para $r \in R$ e $a \in I$, $tr_\alpha(ra) = \sum_{g \in G} \alpha_g(r1_{g^{-1}})\,a = tr_\alpha(r)\,a \in RI \subseteq I$. Desde que tr_α é aditivo, segue-se que $tr_\alpha(Ra) \subseteq I$, portanto $tr_\alpha(Ra)$ é nilpotente de índice menor ou igual ao índice de nilpotência de I. Analogamente, provamos que $tr_\alpha(aR)$ é nilpotente. ■

Agora podemos provar o resultado que dá uma generalização do Teorema 1.5.21 para o caso parcial:

Teorema 4.2.11 *Se R é um anel semiprimo e $tr_\alpha(1_R)$ não é um divisor de zero em R, então α tem traço parcial não-degenerado sobre R.*

Prova. 1. Seja $(0) \neq I \lhd R^\alpha$ nilpotente, e tome $0 \neq a \in I$. Pelo lema acima, Ra é α-invariante e $tr_\alpha(Ra)$ é nilpotente, assim, pelo Corolário 4.2.8, Ra é um ideal nilpotente no anel semiprimo R, então $a = 0$, contradição.
2. Seja J um ideal á esquerda (direita) de R, que é α-invariante. Se $tr_\alpha(J) = (0)$, então pelo Corolário 4.2.8 (Observação 4.2.9), J é nilpotente no anel semiprimo R, logo $J = (0)$. ■

4.3 Artinianidade (noetherianidade) de R^α

Discutiremos a partir de agora, a artinianidade (noetherianidade) de R^α a partir da artinianidade (noetherianidade) de R. Com objetivo de provarmos também para o caso parcial o Teorema 1.5.15 e suas consequências, introduziremos uma aplicação que nos auxiliará nos próximos resultados. As construções e demonstrações que se seguem são inspiradas em idéias feitas para o caso das ações globais, que podemos encontrar à partir da página 13 do Capítulo 1, em [24].

Seja $c \in R$ tal que $tr_\alpha(c) = 1_R$. Então, para todo $a \in R^\alpha$, temos $tr_\alpha(ac) = a$. Assim, para $\gamma : R \to R^\alpha$, definida por $\gamma(x) = tr_\alpha(xc)$, para todo $x \in R$, temos que $\gamma(a) = a$, para todo $a \in R^\alpha$, e ainda

$$\gamma(\gamma(x)) = \gamma(tr_\alpha(xc)) = tr_\alpha(xc) = \gamma(x),$$

para todo $x \in R$. A aplicação γ é uma espécie de média em torno de R^α.

Teorema 4.3.1 *Seja I é um ideal à esquerda em R que é α-invariante e denote $J := R^\alpha \cap I$. Se $tr_\alpha(1_R)^{-1} \in R$, então:*

1. *R^α/J é somando direto como R^α-módulo à esquerda de R/I.*

2. *Se $H <\ _{R^\alpha}(R^\alpha/J)$ então $RH <\ _{R}(R/I)$, e ainda, para $H_1, H_2 <\ _{R^\alpha}(R^\alpha/J)$ tais que $RH_1 = RH_2$, temos $H_1 = H_2$.*

Prova. Como $R^\alpha(R^\alpha/J) \subseteq R^\alpha/J$ e $R^\alpha(R/I) \subseteq R/I$ segue-se que R^α/J e R/I são R^α-módulos à esquerda. Observe que

$$R^\alpha/J = R^\alpha/(I \cap R^\alpha) \backsimeq (R^\alpha + I)/I <\ _{R^\alpha}R/I. \tag{4.6}$$

Portanto identificamos R^α/J como um R^α-submódulo de R/I.

Pela Observação 3.2.7, existe um elemento central $c \in R$, tal que $tr_\alpha(c) = 1_R$. Portanto a aplicação $\gamma(x) = tr_\alpha(xc)$, para todo $x \in R$, como vimos acima, está bem definida. Agora, considere a aplicação $\phi : R/I \to (R^\alpha + I)/I$, definida por $\phi(x + I) = \gamma(x) + I$, para todo $x \in R$.

Observando que para $x \in R$, $\gamma(x) = tr_\alpha(xc) = tr_\alpha(cx) \in R^\alpha$, temos $\gamma(x) + I \in (R^\alpha + I)/I$, e ainda, $\phi(\overline{0}) = \phi(i + I) = \gamma(i) + I = I$, para todo $i \in I$, pois $\gamma(i) = tr_\alpha(ci) = \sum\limits_{g\in G}\alpha_g(c1_{g^{-1}})\alpha_g(i1_{g^{-1}}) \in \sum\limits_{g\in G}\alpha_g(c1_{g^{-1}})I \subseteq I$, o que garante que ϕ está bem definida. Além disso, dado $x \in R^\alpha$ e $r + I \in R/I$, temos $x(r + I) = xr + I$ e $\phi(x(r + I)) = \gamma(xr) + I = x\gamma(r) + I = x(\phi(r + I))$. Portanto ϕ é um R^α-homomorfismo de módulos à esquerda. Dado, $x + i + I \in (R^\alpha + I)/I$ com $x \in R^\alpha$, $i \in I$ temos $\phi((x + i) + I) = \gamma(x) + \gamma(i) + I = \gamma(x) + I = (x + i) + I$ e assim, $\phi(x + i + I) = \gamma(x + i) + I = x + \gamma(i) + I = (x + i) + I$. Além disso, para $x \in R$,

$$\phi(\phi(x + I)) = \phi(\gamma(x) + I) = \gamma^2(x) + I = \gamma(x) + I = \phi(x + I),$$

logo ϕ é uma projeção de R^α-módulos à esquerda e 1. fica demonstrado.

Para ver 2., seja $H <\ _{R^\alpha}(R^\alpha/J)$. Considere um R^α-submódulo à esquerda H' de R^α. Por um lado, $\gamma(H') = H'$ implica $\phi(H' + I) = H' + I$. Por outro, $\phi(RH' + I) = tr_\alpha(cRH') + I = tr_\alpha(cR)H' + I \subseteq R^\alpha H' + I \subseteq H' + I$. Portanto, pela identificação

(4.6), temos

$$\phi(RH) \subseteq H = \phi(H) = \phi(1_R H) \subseteq \phi(RH)$$

isto é,

$$\phi(RH) = \phi(H).$$

Logo, se $H_1, H_2 <_{R^\alpha} (R^\alpha/J)$ são tais que $RH_1 = RH_2$, então $H_1 = \phi(RH_1) = \phi(RH_2) = H_2$, como afirmamos em 2. ■

Corolário 4.3.2 *Se $tr_\alpha(1_R)^{-1} \in R$, então para I e J como no Teorema 4.3.1, valem as seguintes afirmações:*

1. *Se R/I é artiniano (noetheriano) R-módulo à esquerda, então R^α/J é artiniano (noetheriano) R^α-módulo à esquerda.*

2. *Se o R-módulo à esquerda, R/I tem uma série de composição de comprimento $k > 0$, então o R^α-módulo à esquerda, R^α/J tem uma série de composição de comprimento $\leq k$.*

Prova. 1. Consideremos, $H_1 \supseteq H_2 \supseteq ...$, uma cadeia descendente de R^α-submódulos à esquerda de R^α/J, então pelo Teorema 4.3.1, $RH_1 \supseteq RH_2 \supseteq ...$ é uma cadeia descendente de R/I-submódulos à esquerda de R/I. Sendo este artiniano, segue-se que existe um $k > 0$, tal que $RH_n = RH_m$ para todo $n, m \geq k$, e portanto pelo item 2 do Teorema 4.3.1, temos $H_n = H_m$ para todo $n, m \geq k$. O caso noetheriano se prova do mesmo modo.

2. Observe que R/I tem série de composição se, e somente se, R/I é artiniano e noetheriano, então pelo item 1. temos que R^α/J tem também uma série de composição. Digamos que $0 = H_1 \subsetneqq H_2 \subsetneqq ... \subsetneqq H_n = R^\alpha/J$ seja tal série. Pelo item 2. do Teorema 4.3.1, temos $0 = RH_1 \subsetneqq RH_2 \subsetneqq ... \subsetneqq RH_n = R(R^\alpha/J) \subseteq R/I$. Desde que tal série pode ser refinada até o comprimento k, segue-se que $n + 1 \leq k$. ■

Corolário 4.3.3 *Se R é um anel artiniano à esquerda (noetheriano à esquerda) e $tr_\alpha(1_R)^{-1} \in R$, então R^α é artiniano à esquerda (noetheriano à esquerda).*

Prova. Basta tomar $I = (0)$ no Corolário 4.3.2 acima. ■

4.4 O radical de Jacobson e o radical primo de R^α

Nessa seção estudaremos o comportamento dos anéis R e R^α, sob os radicais primo e de Jacobson, estabelecendo fórmulas que relacionam estes radicais destes anéis. Daqui até o final desta seção, salvo menção em contrário, todos os resultados se referem a uma ação parcial α de um grupo finito G sobre um anel R, com envolvente T, de forma que, dado um ideal α-invariante I, de R, a ação parcial $\overline{\alpha} := \overline{\alpha}_I$ está bem definida, em conformidade com o Exemplo 2.3.4 e a Proposição 2.3.5.

4.4.1 O radical de Jacobson

Nesta seção veremos algumas relações existentes entre os radicais de Jacobson de R e R^α. Vamos generalizar os Teoremas 1.5.17 e 1.5.16 e suas consequências para o caso das ações parciais com envolvente.

O próximo lema não necessita que α tenha envolvente ou que G seja finito.

Lema 4.4.1 *Sempre vale $U(R^\alpha) = U(R) \cap R^\alpha$.*

Prova. Seja $a \in U(R) \cap R^\alpha$, então existe um $x \in R$ tal que $xa = ax = 1_R$. Desde que $1_R = 1_{R^\alpha}$, temos para todo $g \in G$ e todo $d \in D_{g^{-1}}$, que

$$x\alpha_g(d) = x\alpha_g(1_R d) = x\alpha_g(axd) = xa\alpha_g(xd) = \alpha_g(xd).$$

Então $x \in R^\alpha$, e assim sendo $a \in U(R^\alpha)$. A recíproca é evidente. ■

Teorema 4.4.2 *Se $|G|^{-1} \in R$, então $J(R^\alpha) = J(R) \cap R^\alpha$.*

Prova. Desde que pelo Lema 2.2.11, $|G|^{-1} \in T$, segue-se pelo Teorema 1.5.17, que $J\left(T^G\right) = J(T) \cap T^G$. Por sua vez, o Corolário 4.1.6, assim $J(R^\alpha) = J\left(T^G\right) 1_R$. Sendo que R é um ideal de T e o radical de Jacobson é hereditário, temos que $J(R) = J(T) \cap R = J(T) 1_R$. Portanto $J(R^\alpha) = J\left(T^G\right) 1_R = \left(J(T) \cap T^G\right) 1_R \subseteq J(T) 1_R \cap T^G 1_R = J(R) \cap R^\alpha$. Para ver que $J(R) \cap R^\alpha \subseteq J(R^\alpha)$, observemos que $1_R = 1_{R^\alpha}$, daí, se $x \in J(R) \cap R^\alpha$, então $1_R - axb \in U(R)$ para todo $a, b \in R$, e em particular, pelo Lema 4.4.1, temos que $1_R - axb \in U(R) \cap R^\alpha = U(R^\alpha)$, para todo $a, b \in R^\alpha$. Logo $x \in J(R^\alpha)$. ∎

Corolário 4.4.3 *Se R é J-semisimples e $|G|^{-1} \in R$ então R^α é J-semisimples.*

Prova. Imediata do Teorema 4.4.2. ∎

Exemplo 4.4.4 (Exemplo 1.16, página 16, em [24]) Seja $R = M_2(\mathbb{Z}_2)$. Desde que $J(\mathbb{Z}_2) = 0$, segue-se que $J(R) = M_2(J(\mathbb{Z}_2)) = 0$, isto é, R é J-semisimples. Considere α a ação (global) do grupo $G = \{1, g : g^2 = 1\}$, agindo do seguinte modo sobre R: $\alpha_1 = id_R$ e $\alpha_g : R \to R$, definida por $\alpha_g(A) = CAC$, para todo $A \in R$, onde $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sendo $C^2 = I$ então α é de fato, uma ação (global) de G sobre R.

É fácil ver que $R^\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in Z_2 \right\}$ e que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in J(R^\alpha) \nsubseteq J(R)$. Observemos que neste caso, $|G| = 21_R = 0 \notin U(R)$.

Para o caso de ações globais de um grupo finito sobre um anel T, onde T não tem $|G|$-torção aditiva, vale que T^G é J-semisimples sempre que T é J-semisimples. Podemos ampliar esse resultado para o caso parcial, generalizando o Teorema 1.5.16:

Teorema 4.4.5 $|G|\, J(R^\alpha) \subseteq J(R)$. *Em particular, se R é J-semisimples sem $|G|$-torção aditiva, então R^α é J-semisimples.*

Prova. Basta observar que pelo Teorema 1.5.16, temos $|G|J(T^G) \subseteq J(T)$, e pelo Corolário 4.1.6, vale $J(T^G 1_R) = J(T^G)1_R$. Assim $|G|J(R^\alpha) = |G|J(T^G 1_R) = |G|J(T^G)1_R \subseteq J(T)1_R = J(R)$. ■

Corolário 4.4.6 *Se R é semisimples sem $|G|$-torção aditiva e $tr_\alpha(1_R)^{-1} \in R$, então R^α é semisimples.*

Prova. Imediata do Teorema 4.4.5, juntamente com o Corolário 4.3.3. ■

4.4.2 O radical primo

O objetivo central aqui é generalizar para o caso parcial o Teorema 1.5.23. As construções e demonstrações feitas aqui, foram inspiradas nas idéias da demonstração do Teorema 1.9, feitas para o caso global, que podemos encontrar na página 12 de [24]. Iniciamos com alguns resultados auxiliares.

Lembremos agora uma caracterização dos elementos do radical primo. Seja R um anel e $a \in R$. Dizemos que a é fortemente nilpotente se toda sequência $a_1, a_2, ...$ em R, tal que $a_1 = a$ e $a_{n+1} \in a_n R a_n$, $n > 0$, se anula em algum ponto. O radical primo pode ser definido como sendo:

$$Nil_*(R) = \{a \in R : a \text{ é fortemente nilpotente}\}$$

Utilizaremos esta característica de $Nil_*(R)$, para provar o seguinte Lema:

Lema 4.4.7 *Seja R um anel tal que $tr_\alpha(1_R)$ não é um divisor de zero, então $tr_{\overline{\alpha}}\left(\overline{1}_R\right)$ não é um divisor de zero em $\overline{R} = R/Nil_*(R)$.*

Prova. Observe que pelo Corolário 2.3.11, o radical primo $Nil_*(R)$ é α-invariante e desde que α tem envolvente, a Proposição 2.3.5, prova que a ação parcial induzida $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}_{Nil_*(R)}$ está bem definida.

Seja $b \in R$ tal que $\overline{b}tr_{\overline{\alpha}}\left(\overline{1_R}\right) = \overline{0}$, isto é, $b \in R$, é tal que $btr_{\alpha}(1_R) \in Nil_*(R)$. Se $a_1, a_2, ...$ é uma sequência em R tal que $a_1 = b$ e $a_{n+1} \in a_n R a_n$, para todo $n > 0$, então a sequência definida por $a'_n = a_n (tr_{\alpha}(1_R))^{2^{n-1}}$, para $n > 0$, é tal que, $a'_1 = btr_{\alpha}(1_R)$ e $a'_{n+1} = a_{n+1}(tr_{\alpha}(1_R))^{2^n} \in a_n R a_n (tr_{\alpha}(1_R))^{2^n} = a_n (tr_{\alpha}(1_R))^{2^{n-1}} R a_n (tr_{\alpha}(1_R))^{2^{n-1}} = a'_n R a'_n$, para todo $n > 0$. Como $btr_{\alpha}(1_R) \in Nil_*(R)$, isto é, $btr_{\alpha}(1_R)$ é fortemente nilpotente, então existe $s > 0$, tal que $0 = a'_s = a_s (tr_{\alpha}(1_R))^{2^{s-1}}$. Desde que $tr_{\alpha}(1_R)$ não é um divisor de zero, segue-se pelo Lema 4.2.6, que $a_s = 0$. Logo $b \in Nil_*(R)$, ou seja, $\overline{b} = \overline{0}$. ■

Lema 4.4.8 *Em* $\overline{R} = R/Nil_*(R)$ *temos* $\overline{Nil_*(R^{\alpha})} \subseteq Nil_*\left(\overline{R^{\alpha}}\right)$.

Prova. Como $\overline{R^{\alpha}} = \{a + Nil_*(R) : a \in R^{\alpha}\}$ é de fato um anel com unidade $\overline{1}_R$, pois R^{α} é um subanel de R com unidade 1_R, então pela Proposição 1.5.7, basta observar que $f : R^{\alpha} \to \overline{R^{\alpha}}$ definida por $f(a) = a + Nil_*(R)$, para todo $a \in R^{\alpha}$, é um epimorfismo de anéis e temos o desejado. ■

O Próximo resultado vale em geral, não há necessidade de G ser finito ou α ter envolvente.

Teorema 4.4.9 *Seja* α *uma ação parcial de um grupo* G *sobre um anel* R. *Então*

$$Nil_*(R) \cap R^{\alpha} \subseteq Nil_*(R^{\alpha}).$$

Prova. Considere $\mu = \{A \lhd R : A \cap R^{\alpha} \subseteq Nil_*(R^{\alpha})\}$. É imediato que $(0) \in \mu$ e se $\{A_i\}_{i>0}$ é um subconjunto totalmente ordenado de μ, então $\bigcup_{i>0} A_i \lhd R$ e $\left(\bigcup_{i>0} A_i\right) \cap R^{\alpha} \subseteq \bigcup_{i>0} (A_i \cap R^{\alpha}) \subseteq Nil_*(R^{\alpha})$. Assim, pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal $B \in \mu$. Afirmamos que B é semiprimo. Com efeito, seja $I \lhd R$, tal que $I \supseteq B$ e $I^2 \subseteq B$, então $(I \cap R^{\alpha})^2 \subseteq B \cap R^{\alpha} \subseteq Nil_*(R^{\alpha})$. Como $I \cap R^{\alpha}$ é um ideal de R^{α}, então $I \cap R^{\alpha} \subseteq Nil_*(R^{\alpha})$. Como B é maximal em μ, $I \subseteq B$. Portanto

B é um ideal semiprimo e assim, $Nil_*(R^\alpha) \subseteq B$. Logo, $Nil_*(R^\alpha) \cap R^\alpha \subseteq Nil_*(R^\alpha)$. ■

Voltando as restrições impostas a ação parcial α no começo do capítulo, obtemos uma recíproca para o teorema acima:

Teorema 4.4.10 *Se $tr_\alpha(1_R)$ não é um divisor de zero em R, então*

$$Nil_*(R^\alpha) = Nil_*(R) \cap R^\alpha.$$

Prova. Pelo Teorema 4.4.9, temos $Nil_*(R) \cap R^\alpha \subseteq Nil_*(R^\alpha)$. Para a recíproca, provaremos que $Nil_*(R^\alpha) \subseteq Nil_*(R)$. Já que pelo Corolário 2.3.11, o radical primo $Nil_*(R)$ é α-invariante e α tem envolvente, segue-se pela Proposição 2.3.5, que a ação parcial induzida $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}_{Nil_*(R)}$, agindo sobre o anel semi-primo $\overline{R} = R/Nil_*(R)$, está bem definida e ainda, pelo pelo Lema 4.4.7, $tr_{\overline{\alpha}}\left(\overline{1_R}\right)$ não é um divisor de zero. Portanto pelo Teorema 4.2.11, $\overline{R}^{\overline{\alpha}}$ é semiprimo.

Seja $\overline{N}$ um ideal nilpotente de $\overline{R^\alpha}$, nosso objetivo será provar que $\overline{N}$ é nulo. Para tanto consideremos o seguinte subconjunto de $\overline{R}^{\overline{\alpha}}$:

$$\overline{A} = \left\{\overline{a} \in \overline{R}^{\overline{\alpha}} : \overline{tr_\alpha(1_R)^m a} \in \overline{N} \text{ para algum } m \geq 0\right\}$$

(aqui, convêm lembrar que $tr_{\overline{\alpha}}(\overline{a}) = \overline{tr_\alpha(a)}$, para todo $a \in R$). Temos que $\overline{A}$ é um ideal nilpotente de $\overline{R}^{\overline{\alpha}}$. $\overline{A}$ é de fato um ideal de $\overline{R}^{\overline{\alpha}}$, pois se $\overline{a} \in \overline{A}$, então existe $m > 0$, tal que $\overline{tr_\alpha(1_R)^m a} \in \overline{N}$, portanto para todo $\overline{x} \in \overline{R}^{\overline{\alpha}}$, temos $\overline{tr_\alpha(1_R)^{m+1} xa} = \overline{tr_\alpha(1_R) x}\, \overline{tr_\alpha(1_R)^m a} = \overline{tr_\alpha(x)}\, \overline{tr_\alpha(1_R)^m a} \in \overline{R^\alpha}\, \overline{N} \subseteq \overline{N}$. Logo, $\overline{A}\, \overline{R}^{\overline{\alpha}} \subseteq \overline{A}$. De modo análogo, provamos que $\overline{R}^{\overline{\alpha}}\, \overline{A} \subseteq \overline{A}$.

$\overline{A}$ é nilpotente, pois se $d > 0$ é tal que $\overline{N}^d = 0$, então dados $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_d \in \overline{A}$, existem $m_1, m_2, ..., m_d \geq 0$ tais que $\overline{a}_1 tr_{\overline{\alpha}}\left(\overline{1_R}\right)^{m_1} \overline{a}_2 tr_{\overline{\alpha}}\left(\overline{1_R}\right)^{m_2} ... \overline{a}_d tr_{\overline{\alpha}}\left(\overline{1_R}\right)^{m_d} \in \overline{N}^d$. Assim $\overline{a}_1\overline{a}_2...\overline{a}_d tr_{\overline{\alpha}}\left(\overline{1_R}\right)^m = \overline{0}$, para $m = \sum_{i=1}^{d} m_i$. Logo temos $\overline{a}_1\overline{a}_2...\overline{a}_d = \overline{0}$. Sendo $\overline{A}$ um ideal nilpotente do anel semiprimo $\overline{R}^{\overline{\alpha}}$, segue-se que $\overline{A} = (\overline{0})$. Desde que $\overline{N} \subseteq \overline{A}$, temos $\overline{N} = (\overline{0})$.

Assim, $\overline{R^{\alpha}}$ não tem ideais nilpotentes não nulos, portanto pela Proposição 1.5.9, $Nil_{*}\left(\overline{R^{\alpha}}\right) = (\overline{0})$. Segue-se pelo Lema 4.4.8 que $\overline{Nil_{*}\left(R^{\alpha}\right)} = (\overline{0})$, ou seja, $Nil_{*}\left(R^{\alpha}\right) \subseteq Nil_{*}\left(R\right)$. ■

Exemplo 4.4.11 (Exemplo 1.10 página 13 de [24]) Seja $R = M_2(K)$ onde K é um corpo de característica $p \neq 0$. Então R é semiprimo, e assim $Nil_{*}(R) = 0$. Seja α uma ação do grupo $G = \{1, g, ..., g^{p-1} : g^p = 1\}$ sobre R, definida do seguinte modo: $\alpha_1 = id_R$ e $\alpha_g : R \to R$ $\alpha_g(A) = CAC^{-1}$ onde $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Neste caso, $C^p = 1$ e assim, $\alpha_{g^p} = id_R$. Desde que α é uma ação global, segue-se que α é uma ação parcial com envolvente. Temos $R^{\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in K \right\}$ e $Nil_{*}\left(R^{\alpha}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : b \in K \right\} \neq 0$. Vale observar que $tr_{\alpha}(1_R) = |G|\, 1_R = p1_R = 0$.

Conforme mostram os exemplos 3.2.4 e 3.2.5, o próximo resultado prova que, com hipótese diferente, ainda temos a mesma relação entre os radicais primos de R e R^{α}, provada no Teorema 4.4.10.

Teorema 4.4.12 *Se R é um anel sem $|G|$-torção aditiva, então*

$$Nil_{*}\left(R^{\alpha}\right) = Nil_{*}(R) \cap R^{\alpha}.$$

Prova. O Teorema 4.4.9 prova que $Nil_{*}(R) \cap R^{\alpha} \subseteq Nil_{*}\left(R^{\alpha}\right)$. Para a recíproca, observemos que pelo Teorema 1.5.5, temos $Nil_{*}(R) = Nil_{*}(T) \cap R = Nil_{*}(T)\, 1_R$. Por sua vez o Corolário 4.1.6, garante que $Nil_{*}\left(R^{\alpha}\right) = Nil_{*}\left(T^G\right) 1_R$. Finalmente, já que pelo Lema 2.2.11, T não tem $|G|$-torção aditiva, segue-se pelo Teorema 1.5.23, que $Nil_{*}\left(T^G\right) = Nil_{*}(T) \cap T^G$. Juntando estas igualdades, obtemos

$$\begin{aligned} Nil_{*}\left(R^{\alpha}\right) &= Nil_{*}\left(T^G\right) 1_R = (Nil_{*}(T) \cap T^G) 1_R \\ &\subseteq Nil_{*}(T)\, 1_R \cap T^G 1_R = Nil_{*}(R) \cap R^{\alpha}. \end{aligned}$$

Logo $Nil_{*}\left(R^{\alpha}\right) \subseteq Nil_{*}(R) \cap R^{\alpha}$. ■

4.5 Sobre a dimensão uniforme de R^α

Nesta seção, a menos de menção em contrário, R sempre denotará um anel semi-primo. Estabeleceremos condições sobre este anel, de tal forma que R^α seja um anel de Goldie à esquerda. O objetivo aqui é generalizar o Teorema 1.5.28. As construções e demonstrações aqui estabelecidas são inspiradas nas idéias encontradas no capítulo 5, a partir da página 79, em [24].

Lema 4.5.1 *Seja α uma ação parcial que tem traço parcial não-degenerado sobre R. Se para certos $a_1, a_2, ..., a_k \in R^\alpha$, tivermos que $\sum_{i=1}^{k} R^\alpha a_i$ é uma soma direta em R^α, então $\sum_{i=1}^{k} Ra_i$, também é direta em R. Em particular: $udim\, R^\alpha \leq udim\, R$.*

Prova. Se $\sum_{i=1}^{k} Ra_i$ não for direta em R, então existe $j \in \{1, 2, ..., k\}$ tal que $I = Ra_j \cap (Ra_1 + ... + Ra_{j-1} + Ra_{j+1} + ... + Ra_k) \neq 0$. Como cada $a_s \in R^\alpha$, temos que I é um ideal à esquerda de R, que é α-invariante. Como $tr_\alpha(I) \subseteq tr_\alpha(Ra_j) \cap tr_\alpha(\sum_{i \neq j} Ra_i) \subseteq tr_\alpha(R)\, a_j \cap \sum_{i \neq j} tr_\alpha(R)\, a_i \subseteq R^\alpha a_j \cap \sum_{i \neq j} R^\alpha a_i = 0$. Isso contradiz o fato de α ter traço parcial não-degenerado sobre R. O resto é imediato. ■

Corolário 4.5.2 *Seja α uma ação parcial que tem traço parcial não-degenerado sobre R. Se R é um anel de Goldie à esquerda, então R^α é um anel de Goldie à esquerda.*

Prova. Por R^α ser subanel (preservando a unidade de) R, ele herda as condições de cadeia para anuladores à esquerda, e pelo Lema 4.5.1, $udim\, R^\alpha \leq udim\, R < \infty$. Segue-se da definição 1.5.25, que R^α é um anel de Goldie à esquerda. ■

No próximo resultado, obtemos para o caso parcial o item 2 do Teorema 1.5.28.

Lema 4.5.3 *Seja α uma ação que tem traço parcial não-degenerado sobre R. Se $x \in R^\alpha$ é regular, então x é regular como elemento de R.*

Prova. É fácil ver que $lan_R(x) = \{r \in R/rx = 0\}$ é um ideal à esquerda de R, que é α-invariante. Se $lan_R(x) \neq 0$, então $0 \neq tr_\alpha(lan_R(x)) \subseteq lan_R(x) \cap R^\alpha$, contradizendo a regularidade de x em R^α. ■

Nas demonstrações que se seguem, usaremos a definição 1.5.21, que trata de grupos que tem traços não-degenerados sobre a envolvente. O resultado a seguir é uma generalização da Proposição 1.5.27, para o caso parcial.

Corolário 4.5.4 *Seja R um anel sem $|G|$-torção aditiva. Se E é um ideal essencial à esquerda de R, então $E \cap R^\alpha$ é um ideal essencial à esquerda R^α.*

Prova. Se R é semiprimo sem $|G|$-torção aditiva, então pelo item 2 do Corolário 2.2.5 juntamente com com o Lema 2.2.11, T é semiprimo sem $|G|$-torção aditiva. Portanto pelo Teorema 1.5.21, temos que G tem traço (global) não-degenerado sobre T, e assim vale a Proposição 1.5.27, que afirma que se $E' <_e {}_T T$, então $E' \cap T^G <_e {}_{T^G} T^G$.

Como G é finito, o Corolário 4.1.5 garante que $T^G \simeq R^\alpha$ pela aplicação $t \mapsto t.1_R$ e desde que pelo Corolário 2.2.6, $E' = \sum_{i=1}^{n} g_i(E) e_i <_e {}_T T$, e daí $\left(E' \cap T^G\right).1_R <_e {}_{R^\alpha} R^\alpha$.

Como

$$\left(E' \cap T^G\right).1_R \subseteq E'.1_R \cap T^G.1_R = E \cap R^\alpha,$$

segue-se que $E \cap R^\alpha$ é ideal essencial à esquerda de R^α. ■

Usando a Proposição 2.2.8, podemos provar o seguinte resultado:

Teorema 4.5.5 *Se R não tem $|G|$-torção aditiva e α tem traço parcial não-degenerado sobre R, então $udim\, R^\alpha \leq udim\, R \leq |G|\, udim\, R^\alpha$.*

Prova. O Lema 4.5.1 prova a primeira desigualdade, concentremo-nos na segunda desigualdade portanto.

O Corolário 2.2.5, juntamente com o Lema 2.2.11, garantem que T é semiprimo e sem $|G|$-torção aditiva, portanto podemos aplicar o Teorema 1.5.21, e obter que G tem traço (global) não-degenerado sobre T. Portanto podemos aplicar o Teorema 1.5.28, e obter $udim\, T \leq |G|\, udim\, T^G$. Por sua vez, a Proposição 2.2.8, implica $udim\, R \leq udim\, T$. Finalmente o Corolário 4.1.5 diz que $T^G \backsimeq R^\alpha$. Portanto $udim\, T^G = udim\, R^\alpha$. Juntando estes resultados obtemos $udim\, R \leq udim\, T \leq |G|\, udim\, T^G = |G|\, udim\, R^\alpha$. ■

Lembremos da seção 1.5.2 que a notação $Q(A)$ indica o anel clássico de quocientes à esquerda do anel A. Em relação a estes anéis temos o seguinte resultado:

Teorema 4.5.6 *Se R não tem $|G|$-torção aditiva e α tem traço parcial não-degenerado sobre R. Então*

1. *R^α é um anel de Goldie à esquerda se, e somente se, R é um anel de Goldie à esquerda. E sendo assim, $Q\left({}_R R\right) = Q\left({}_{R^\alpha} R\right)$ $\left(Q\left(R_R\right) = Q\left(R_{R^\alpha}\right)\right)$.*

2. *R^α é um anel semisimples se, e somente se, R é um anel semisimples.*

Prova. 1. Observemos que se α tem traço parcial não-degenerado sobre R, sem $|G|$-torção aditiva, então

(a) R^α é semiprimo.

(b) T é semiprimo sem $|G|$-torção aditiva (Corolário 2.2.5 e Lema 2.2.11).

Estamos em condições de aplicar o Teorema 4.5.5 acima e concluir que $udim\, R < \infty$ se, e somente se, $udim\, R^\alpha < \infty$.

Suponhamos que R^α é um anel de Goldie. Por (a), juntamente com o Teorema de Goldie (Teorema 1.5.26), temos que $udim\, R^\alpha < \infty$ e $Z(\alpha) = 0$. Por (b), vale o Teorema 1.5.21, que afirma que G tem traço (global) não-degenerado sobre T, daí podemos aplicar o Teorema 1.5.28, e obter $Z\left(T\right) \cap T^G \subseteq Z\left(T^G\right)$. Por sua vez o Corolário 4.1.5, diz que $T^G \backsimeq R^\alpha$. Daí $Z\left(T^G\right) = Z(R^\alpha) = 0$, e consequentemente $Z\left(T\right) \cap T^G = 0$.

Finalmente, é fácil ver que $Z(T)$ é G-invariante, pois se $g \in G$ e $t \in g(Z({}_TT))$ então existe um ideal à esquerda $E <_e {}_TT$, tal que $Et = 0$, e assim $g(E)g(t) = 0$, para $g(E) <_e {}_TT$. Portanto se $Z(T) \neq 0$, temos pelo Teorema 1.5.21 item 2, que $tr_G(Z(T)) \neq 0$. Mas $0 \neq tr_G(Z(T)) \subseteq Z(T) \cap T^G \subseteq Z\left(T^G\right) = 0$, é contradição. Assim pela Proposição 2.2.7, temos que $Z(R) = Z(T)\,1_R = 0$.

Portanto R é semiprimo com $udim\, R < \infty$ e $Z(R) = 0$. Novamente pelo Teorema 1.5.26, temos que R é um anel de Goldie à esquerda.

A recíproca é imediata da Definição 1.5.25, desde que R^α, como subanel do anel de Goldie à esquerda R, herda a condição das cadeias ascendentes nos anuladores à esquerda.

Resta verificar que $Q({}_RR) = Q({}_{R^\alpha}R)$. Seja $q \in Q({}_{R^\alpha}R)$ então existe um elemento regular s de R^α tal que $sq \in R$. Pelo Lema 4.5.3, item 1., s é também regular em R, portanto $sq \in R$ para certo regular s de R, isto é, $q \in Q({}_RR)$. Reciprocamente, seja $q \in Q({}_RR)$. Desde que $Rq^{-1} := \{x \in R : xq \in R\}$ é ideal essencial à esquerda de R, então pelo Corolário 4.5.4, temos $Rq^{-1} \cap R^\alpha <_e {}_{R^\alpha}R^\alpha$. Assim, pela Proposição 1.5.24, existe $t \in Rq^{-1}$ que é regular em R^α, isto é, existe t regular em R^α tal que $t = aq^{-1}$ para certo $a \in R$, logo $q \in Q({}_{R^\alpha}R)$.

2. Sabemos que

(a) R é semisimples $\Leftrightarrow$ T é semisimples. (Proposição 2.2.2 item 2).

(b) R é semiprimo $\Leftrightarrow$ T é semiprimo. (Corolário 2.2.5 item 2).

(c) R é sem $|G|$-torção aditiva $\Leftrightarrow$ T é sem $|G|$-torção aditiva(Lema 2.2.11).

(d) R^α semiprimo $\Leftrightarrow$ T^G semiprimo. (Proposição 4.1.5).

Assim, temos que T e T^G são anéis semiprimos e T não tem $|G|$-torção aditiva. Podemos portanto, aplicar o Teorema 1.5.30, obtendo, que T é semisimples se, e somente se, T^G é semisimples. Logo

R^α é semisimples $\Leftrightarrow$ T^G é semisimples $\Leftrightarrow$ T é semisimples $\Leftrightarrow$ R é semisimples. $\blacksquare$

Capítulo 5

Relações entre o subanel invariante parcial e o skew anel de grupo parcial

Neste capítulo usaremos a letra S, para denotar o skew anel de grupo parcial $R *_\alpha G$. De resto, continuaremos com as notações dos capítulos anteriores, α é uma ação parcial de um grupo G sobre um anel com unidade R, com envolvente T. Sendo assim, $S = R *_\alpha G$ é associativo. Vamos impor condições para que se estabeleça uma equivalência de Morita entre R^α e S. Antes veremos alguns outros resultados que relacionam estes anéis.

5.1 Um teorema de Morita parcial

Os resultados desta seção foram inspirados na demonstração do Teorema 0.3, da página 4, em [24]. As demonstrações feitas aqui exigem apenas que $S = R *_\alpha G$ seja associativo. Isso ocorre, por exemplo, quando α tem envolvente ou quando R é semiprimo (ver Teoremas 1.3.2 e 1.3.3). Portanto aqui, α é uma ação parcial de um grupo arbitrário G, sobre um anel com unidade R, tal que o skew anel de grupo $R *_\alpha G$ é associativo.

Lema 5.1.1 *O anel R é um S-módulo à esquerda.*

Prova. Sejam $g, h \in G$. Defina $a\delta_g \cdot r = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)\, r)$, para todo $a \in D_g$. Como o produto em S é associativo, então $(a\delta_g b\delta_h)\, r\delta_1 = a\delta_g\, (b\delta_h r\delta_1)$, para todo $a \in D_g$ e $b \in D_h$. Isto implica

$$(a\delta_g b\delta_h)\cdot r = \alpha_{gh}\left(\alpha_{(gh)^{-1}}\left(\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(a)b\right)\right) r\right) = \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(a)\alpha_h\left(\alpha_{h^{-1}}(b)r\right)\right) = a\delta_g\cdot(b\delta_h \cdot r)\,,$$

para todo $a \in D_g$, $g \in G$. Como as outras propriedades a serem verificadas, saem imediatas do fato de que cada α_g é um isomorfismo e que α_1 é a identidade em R, segue-se o resultado. ■

No próximo resultado usaremos a notação $x\varphi$, para uma ação de um homomorfismo à direita φ sobre um elemento x.

Proposição 5.1.2 *Nas condições acima, temos*

$$R^\alpha \backsimeq End_{R*_\alpha G}(R)\,.$$

Prova. Defina $\phi : R^\alpha \to End_{R*_\alpha G}(R)$, tomando, para cada $a \in R^\alpha$, $\phi_a : R \to R$, onde $x\phi_a = xa$, para todo $x \in R$, (multiplicação à direita). Para ver que $\phi_a \in End_{R*_\alpha G}(R)$, basta observar que para $u \in D_g$ e $r \in R$, temos $(u\delta_g \cdot r)\,\phi_a = (\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u)\, r))\,\phi_a = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u)\, r)a = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u)\, ra) = u\delta_g \cdot (ra) = u\delta_g \cdot (r\phi_a)$.

Veremos que ϕ é um isomorfismo de anéis. Dados $a, b \in R^\alpha$ e $r \in R$, temos $(r)\phi_{ab} = r\,(ab) = (ra)\,b = (ra)\phi_b = (r\phi_a)\phi_b = (r)\,\phi_a\phi_b$ e $(r)\,\phi_{(a+b)} = r\,(a+b) = ra + rb = r(\phi_a + \phi_b)$, e ainda $(r)\,\phi_{1_R} = r1_R = r$. É evidente que ϕ é injetora. Para ver que ϕ é sobrejetora, considere $\varphi \in End_{R*_\alpha G}(R)$ e $r \in R$. Neste caso temos $r\varphi = (r\delta_1 \cdot 1_R)\,\varphi = r\delta_1 \cdot (1_R)\,\varphi = r(1_R\varphi)$, portanto $\varphi = \phi_{(1_R\varphi)}$. Resta provar que $1_R\varphi \in R^\alpha$. Com efeito, para $g \in G$ e $u = \alpha_{g^{-1}}(u') \in D_{g^{-1}}$ arbitrários, temos

$\alpha_g(u(1_R\varphi)) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u')(1_R\varphi)) = u'\delta_g \cdot (1_R\varphi) = (u'\delta_g \cdot 1_R)\varphi = (\alpha_g(u1_R))\varphi = (\alpha_g(u)\delta_1 \cdot 1_R)\varphi = \alpha_g(u)\delta_1 \cdot (1_R\varphi) = \alpha_g(u)(1_R\varphi)$. ■

Uma consequência imediata disso é que R pode ser visto como um R^α-módulo à direita, via identificação $R^\alpha = End_S R$. Lembrando que um S-módulo à esquerda M é um *gerador* para a categoria de S-módulos à esquerda se existe um epimorfismo de módulos à esquerda de alguma soma direta de cópias de M sobre S. Então, como mera aplicacação do Teorema 1.5.32, temos a seguinte relação entre S e R^α:

Corolário 5.1.3 *(Um Teorema de Morita Parcial) Para o S-módulo à esquerda R, visto como um R^α-módulo à direita, via indentificação $R^\alpha = End_S R$, as sequintes afirmações são equivalentes:*

1. *R é um gerador para a categoria dos S-módulos á esquerda.*

2. *R é R^α-módulo à direita finitamente gerado projetivo e $S \backsimeq End_{R^\alpha}(R)$.*

Prova. Basta tomar $R = M$, $S = A$ e $R^\alpha = B$ e aplicar o Teorema 1.5.32. ■

5.2 O contexto de Morita entre R^α e $R *_\alpha G$

Todas as construções e demonstrações feitas nesta seção foram inspiradas no artigo de Miriam Cohen, referência [4], que trata dentre outros assuntos, de construir um contexto de Morita para o skew anel de grupo global e o anel dos elementos invariantes global e impõem condições sobre estes para que, a partir deste contexto se tenha uma equivalência de Morita. Algumas poucas idéias foram também tiradas do artigo [3].

Daqui até o final do capítulo, α denotará sempre uma ação parcial de um grupo finito G sobre um anel R, com envolvente T, garantindo assim que skew anel de grupo parcial é associativo. Iniciaremos provando o seguinte lema:

Lema 5.2.1 *1. R é um (R^α, S)-bimódulo.*

2. R é um (S, R^α)-bimódulo.

Prova. Em toda prova tomaremos sempre: $r \in R, x \in R^\alpha, g, h \in G$, $a \in D_g$ e $b \in D_h$, sempre fixados, porém arbitrários.

1. É imediato que R é um R^α-módulo à esquerda com o produto usual de R: $x \cdot r = xr$. Para ver que R é um S-módulo à direita, defina $r \cdot a\delta_g = \alpha_{g^{-1}}(ra)$. Por um lado, temos

$$(r \cdot a\delta_g) \cdot b\delta_h = (\alpha_{g^{-1}}(ra)) \cdot b\delta_h = \alpha_{h^{-1}}\left(\alpha_{g^{-1}}(ra)b\right).$$

   Por outro lado, desde que $r\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(a)b\right) \in \alpha_g\left(D_{g^{-1}} \cap D_h\right)$,

   então por (iii) da definição de ação parcial (Definição 1.2.1), temos

$$\begin{aligned} r \cdot (a\delta_g b\delta_h) &= r \cdot \left(\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(a)b\right)\delta_{gh}\right) = \alpha_{(gh)^{-1}}\left(r\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(a)b\right)\right) \\ &= \alpha_{h^{-1}}\left(\alpha_{g^{-1}}\left(r\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b)\right)\right) = \alpha_{h^{-1}}\left(\alpha_{g^{-1}}\left(r1_g\right)\alpha_{g^{-1}}(a)b\right) \\ &= \alpha_{h^{-1}}\left(\alpha_{g^{-1}}\left(ra\right)b\right). \end{aligned}$$

   Logo

$$(r \cdot a\delta_g) \cdot b\delta_h = r \cdot (a\delta_g b\delta_h).$$

   As outras propriedades a serem verificadas saem imediatas do fato de que cada α_g é um isomorfismo e que α_1 é a identidade em R. Finalmente, a associatividade do bimódulo vem do fato que:

$$x \cdot (r \cdot a\delta_g) = x\alpha_{g^{-1}}(ra) = \alpha_{g^{-1}}(xra) = (x \cdot r) \cdot a\delta_g.$$

2. Novamente aqui, temos que R é um R^α-módulo à direita com o produto usual de R: $r \cdot x = rx$. Por sua vez, o Lema 5.1.1 garante que R é um S-módulo à

esquerda com o produto $a\delta_g \cdot r = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)\, r)$. A associatividade do bimódulo e verificada prontamente pois,

$$\begin{aligned} a\delta_g \cdot (r \cdot x) = a\delta_g \cdot (rx) &= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)\, rx) \\ &= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)\, r)x = (a\delta_g \cdot r) \cdot x. \end{aligned}$$

Logo R é também um (S, R^α)-bimódulo. ■

Nosso objetivo é construir um contexto de Morita $(R^\alpha, S = R *_\alpha G, V, W, \Gamma, \Gamma')$, onde $V = {}_{R^\alpha}R_S$ e $W = {}_SR_{R^\alpha}$, e as aplicações Γ e Γ' são: $\Gamma : V \otimes_S W \to R^\alpha$, que é definida por

$$\Gamma(x \otimes y) = tr_\alpha(xy) = \sum_{g \in G} \alpha_g(xy1_{g^{-1}}), \tag{5.1}$$

para todo $x, y \in R$, e $\Gamma' : W \otimes_{R^\alpha} V \to S$, que é definida por

$$\Gamma'(x \otimes y) = \sum_{g \in G} x\alpha_g(y1_{g^{-1}})\delta_g, \tag{5.2}$$

para todo $x, y \in R$.

Observação 5.2.2 É fácil ver que:

1. I é um S-submódulo à direita de $R \Leftrightarrow I$ é um ideal à direita de R que é α-invariante.

2. I é um S-submódulo à esquerda de $R \Leftrightarrow I$ é um ideal à esquerda de R que é α-invariante.

Precisamos verificar se Γ e Γ' estão bem definidas. Por uma questão de simplificação, omitiremos os anéis nos produtos tensoriais que definem os domínios de Γ e Γ'. Veremos antes, um resultado auxiliar:

Lema 5.2.3 *Para todo $g \in G$ e todo $x \in D_{g^{-1}}$, temos $tr_\alpha(x) = tr_\alpha(\alpha_g(x))$.*

Prova Utilizando as equações (1.1) e (1.2), temos

$$\begin{aligned} tr_\alpha(\alpha_g(x)) &= \sum_{h\in G} \alpha_h\left(\alpha_g\left(x1_{g^{-1}}\right)1_{h^{-1}}\right) \overset{(1.2)}{=} \sum_{h\in G} \alpha_{hg}\left(x1_{g^{-1}h^{-1}}\right)1_h \\ &\overset{u=hg}{=} \sum_{u\in G} \alpha_u\left(x1_{u^{-1}}\right)1_{ug^{-1}} = \sum_{u\in G} \alpha_u\left(x1_{u^{-1}}\right)1_u 1_{ug^{-1}} \\ &\overset{(1.1)}{=} \sum_{u\in G} \alpha_u\left(x1_{u^{-1}}\right)\alpha_u\left(1_{u^{-1}}1_{g^{-1}}\right) = \sum_{u\in G} \alpha_u\left(x1_{g^{-1}}1_{u^{-1}}\right) \\ &= \sum_{u\in G} \alpha_u\left(x1_{u^{-1}}\right) = tr_\alpha(x). \end{aligned}$$ ■

Proposição 5.2.4 *As aplicações Γ e Γ', definidas em (5.1) e (5.2), estão bem definidas e são, respectivamente, R^α e S homomorfismos de bimódulos.*

Prova. Considere $\bar{\Gamma} : V \times W \to R^\alpha$, definida por $\bar{\Gamma}(x,y) = tr_\alpha(xy)$, para todo $x, y \in R$. Verifiquemos que $\bar{\Gamma}$ é S-balanceada, provando assim que Γ está bem definida. Sejam $r \in V$, $r' \in W$, $g \in G$ e $a \in D_g$. Como, $r\left(a\delta_g \cdot r'\right) = r\alpha_g\left(\alpha_g^{-1}(a)\, r'\right) = r1_g\alpha_g\left(\alpha_g^{-1}(a)\, r'\right) = \alpha_g\left[\alpha_g^{-1}(ra)\, r'\right]$ e $\left(r \cdot a\delta_g\right) r' = \alpha_g^{-1}(ra)\, r'$. Então, desde que $\alpha_g^{-1}(ra)\, r' \in D_{g^{-1}}$, temos pelo lema acima que $\bar{\Gamma}(r, a\delta_g \cdot r') = tr_\alpha\left[r\left(a\delta_g \cdot r'\right)\right] = tr_\alpha(\alpha_g\left[\alpha_g^{-1}(ra)\, r'\right]) = tr_\alpha\left[\alpha_g^{-1}(ra)\, r'\right] = \bar{\Gamma}(r \cdot a\delta_g, r')$. Isto garantirá que Γ está bem definida. As outras propriedades de Γ são imediatas desde que os elementos de R^α são invariantes pelo traço parcial.

Do mesmo modo verificamos que Γ' está bem definida, considerando uma aplicação $\bar{\Gamma}' : W \times V \to S$, definida por $\bar{\Gamma}'(x,y) = \sum_{g\in G} x\alpha_g(y1_{g^{-1}})\delta_g$, para $x, y \in R$. Para $t \in R^\alpha$ e $r, r' \in R$, imediato que $\bar{\Gamma}'(rt, r') = \bar{\Gamma}'(r, tr')$, pois t é α-invariante. Temos ainda que Γ' é um S-homomorfismo de bimódulos, pois aplicando-se a fórmula (1.2), para todo $h \in G$ e $y \in R$, temos

$$\sum_{g\in G} 1_h\delta_h\alpha_g(y1_{g^{-1}})\delta_g = \sum_{g\in G} \alpha_h\left(\alpha_g(y1_{g^{-1}})1_{h^{-1}}\right)\delta_{hg} =$$
$$\sum_{g\in G} \alpha_{hg}(y1_{(hg)^{-1}})\delta_{hg} = \sum_{u\in G} \alpha_u(y1_{u^{-1}})\delta_u.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
a\delta_h\Gamma'(x\otimes y) &= \sum_{g\in G}\alpha_h\left(\alpha_{h^{-1}}(a)x\alpha_g(y1_{g^{-1}})\right)\delta_{hg}\\
&= \sum_{g\in G}\alpha_h\left(\alpha_{h^{-1}}(a)x\right)\alpha_h\left(1_{h^{-1}}\alpha_g(y1_{g^{-1}})\right)\delta_{hg}\\
&= \sum_{g\in G}(a\delta_h\cdot x)1_h\delta_h\alpha_g(y1_{g^{-1}})\delta_g\\
&= \sum_{u\in G}(a\delta_h\cdot x)\alpha_u(y1_{u^{-1}})\delta_u = \Gamma'\left(a\delta_h\cdot x\otimes y\right).
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\Gamma'(x\otimes y)\,a\delta_h &= \sum_{g\in G}x\alpha_g(y1_{g^{-1}})\delta_g a\delta_h = \sum_{g\in G}\alpha_g\left[\alpha_{g^{-1}}\left[x\alpha_g(y1_{g^{-1}})\right]a\right]\delta_{gh}\\
&= \sum_{g\in G}\alpha_g\left[\alpha_{g^{-1}}(x1_g)\,ya\right]1_{gh}\delta_{gh} = \sum_{g\in G}x\alpha_g\left[ya1_{g^{-1}}\right]1_{gh}\delta_{gh}\\
&\overset{u=gh}{=} \sum_{u\in G}x\alpha_{uh^{-1}}\left[ya1_{(hu^{-1})}\right]1_u\delta_u \overset{(1.2)}{=} \sum_{u\in G}x\alpha_u\left[\alpha_{h^{-1}}(ya)\,1_{u^{-1}}\right]\delta_u\\
&= \Gamma'\left(x\otimes\alpha_{h^{-1}}(ya)\right) = \Gamma'\left(x\otimes y\cdot a\delta_h\right).
\end{aligned}$$

A linearidade de Γ' prova o afirmado. ■

Observação 5.2.5 É um corolário imediato da proposição 5.2.4, que dados $x, y \in R$, temos $\Gamma(V\otimes x) < {}_{R^\alpha}R^\alpha$, $\Gamma(y\otimes W) < R^\alpha_{R^\alpha}$,$\Gamma'(x\otimes V) < S_S$ e $\Gamma'(W\otimes y) < {}_SS$. Em particular, $\Gamma(V\otimes W)\lhd R^\alpha$ e $\Gamma'(W\otimes V)\lhd S$.

Finalmente, provamos as condições de associatividade:

Proposição 5.2.6 *Nas notações acima, temos*

$$x\cdot\Gamma'(y\otimes z) = \Gamma\left(x\otimes y\right)\cdot z \tag{5.3}$$

e

$$\Gamma'(x\otimes y)\cdot z = x\cdot\Gamma\left(y\otimes z\right) \tag{5.4}$$

para todo $x, y, z \in R$.

Prova. Sejam $x, y, z \in R$. Então $x \cdot \Gamma'(y \otimes z) = x \cdot \sum\limits_{g \in G} y\alpha_g(z1_{g^{-1}})\delta_g = \sum\limits_{g \in G} \alpha_{g^{-1}}\left(xy\alpha_g(z1_{g^{-1}})\right) = \sum\limits_{g \in G} \alpha_{g^{-1}}\left(xy1_g\right) z = tr_\alpha(xy)z = \Gamma\left(x \otimes y\right) \cdot z$, provando assim que (5.3) vale. Por sua vez, $\Gamma'(x \otimes y) \cdot z = \sum\limits_{g \in G} x\alpha_g(y1_{g^{-1}})\delta_g \cdot z = \sum\limits_{g \in G} \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}\left(x\alpha_g(y1_{g^{-1}})z\right)\right) = \sum\limits_{g \in G} \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(x1_g)yz1_{g^{-1}}\right) = \sum\limits_{g \in G} x\alpha_g\left(yz1_{g^{-1}}\right)$ e, $x \cdot \Gamma\left(y \otimes z\right) = xtr_\alpha(yz) = \sum\limits_{g \in G} x\alpha_g(yz1_{g^{-1}})$, portanto (5.4) também vale. ■

Teorema 5.2.7 *Nas notações acima, $(R^\alpha, S = R *_\alpha G, V, W, \Gamma, \Gamma')$ é um contexto de Morita.*

Prova. Imediata das Proposições 5.2.4 e 5.2.6. ■

Lembremos do Capítulo 1, que dado um subconjunto $A \subseteq R$, $ran_R(A)$ denota o anulador à direita de A em R e $lan_R(A)$ o anulador à esquerda de A em R. Para anuladores, temos o seguinte lema:

Lema 5.2.8 *Se $x \in W$, então*

$$x^\perp = \{y \in V : \Gamma'(x \otimes y) = 0\}$$

é um ideal à direita de R que é α-invariante e que está contido em $ran_R(x)$. Do mesmo modo, se $y \in V$, então

$$y^\perp = \{x \in W : \Gamma'(x \otimes y) = 0\}$$

é um ideal à esquerda de R, que é α-invariante, e que está contido em $lan_R(y)$.

Prova. Verifiquemos que $x^\perp$ é um ideal à direita. Para isto considere $y_1, y_2 \in x^\perp$. Então $\Gamma'(x \otimes (y_1 + y_2)) = \Gamma'(x \otimes y_1 + x \otimes y_2) = \Gamma'(x \otimes y_1) + \Gamma'(x \otimes y_2) = 0$ e ainda, dados $y \in x^\perp$ e $r \in R$, temos $\Gamma'(x \otimes yr) = \Gamma'(x \otimes y \cdot r\delta_1) = \Gamma'(x \otimes y)r\delta_1 = 0r\delta_1 = 0$, logo $yr \in x^\perp$. Para ver que $x^\perp \subseteq ran_R(x)$, basta observar que se $y \in x^\perp$, então $0 = \Gamma'(x \otimes y) = x \sum\limits_{g \in G} \alpha_g(y1_{g^{-1}})\delta_g$, portanto $0 = x\alpha_1(y1_R)\delta_1 = xy$ implica $y \in$

$ran_R(x)$. Finalmente, para ver que $x^\perp$ é α -invariante, observe que se $y \in x^\perp$ e $g \in G$, desde que pela Proposição 5.2.4, Γ' é um S-homomorfismo à direita, segue-se que $\Gamma'(x \otimes \alpha_g(y1_{g^{-1}})) = \Gamma'(x \otimes y \cdot 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}) = \Gamma'(x \otimes y) \cdot 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}} = 0$, logo $\alpha_g(y1_{g^{-1}}) \in x^\perp$. De modo inteiramente análogo provamos as propriedades referentes a $y^\perp$. ■

Sabemos que se Γ e Γ' forem sobrejetoras, então R^α e S serão Moritas equivalentes. Estaremos portanto, em busca de condições para que estas sobrejeções ocorram. Antes lembremos uma definição que nos será útil daqui em diante.

Sejam A, B e C grupos aditivos. Uma forma bilinear $F : A \times B \to C$ é dita ser *não-degenerada* se para todo $0 \neq a \in A$ e $0 \neq b \in B$, tivermos $F(a, B) \neq 0$ e $F(A, b) \neq 0$.

Proposição 5.2.9 *Seja R um anel semiprimo. Então*

1. *Γ' é não-degenerada.*

2. *$rad\,(S) = 0 \Rightarrow rad\,(R^\alpha) = 0$, onde $rad(.)$ indica um dos seguintes radicais: Primo, Jacobson, Localmente Nilpotente (Levitzki) ou o Nil superior.*

3. *Se $I <\, _SS$ é minimal, então $V \cdot I = (0)$ ou $V \cdot I$ é um R^α-módulo simples.*

Prova. 1. Seja $x \neq 0$ em W e considere $I = (x)$ o ideal gerado por x. Se $ran_R\,(x) = R$ então $I^2 \subseteq I.ran_R\,(x) = 0$ implica $I = 0$ por R ser semiprimo, mas isso é uma contradição, logo $ran_R\,(x) \neq R$. Do mesmo modo provamos que $lan_R\,(y) \neq R$ para todo $0 \neq y \in V$. Agora, $x^\perp \subseteq ran_R\,(x) \neq R$ implica $x^\perp \subsetneqq R$, portanto existe $y \in V$ tal que $\Gamma'(x \otimes y) \neq 0$, logo $\Gamma'(x \otimes V) \neq 0$. De forma análoga provamos $\Gamma'(W \otimes y) \neq 0$ sempre que $0 \neq y \in V$.

2. Pelo Item 2. do Teorema 1.5.33, temos $\Gamma'(W \otimes rad(R)V) \subseteq rad\,(S)$. Desde que pelo Item 1. Γ' é não-degenerada, segue-se o resultado.

3. Se $V \cdot I = 0$ não há o que provar, senão, suponha que $0 \neq J \subseteq V \cdot I$, onde J é um R^α-submódulo à esquerda de R. Pelo item 1. deste lema, $\Gamma'(W \otimes J) \neq 0$. Então

$0 \neq \Gamma'(W \otimes J) \subseteq \Gamma'(W \otimes V \cdot I) = \Gamma'(W \otimes V)I \subseteq I$. Desde que I é minimal em S, segue-se que $\Gamma'(W \otimes J) = I$, então $V \cdot \Gamma'(W \otimes J) = V \cdot I$, enquanto que por (5.3), temos $V \cdot \Gamma'(W \otimes J) = \Gamma(V \otimes W)J \subseteq J$. Portanto, $J \subseteq V \cdot I = V \cdot \Gamma'(W \otimes J) \subseteq J$, isto é, $J = V \cdot I$, logo $V \cdot I$ é um R^α-módulo simples. ■

Corolário 5.2.10 *Se R é semiprimo sem $|G|$-torção, então Γ é não-degenerada.*

Prova. Pelo Teorema 3.3.11, temos que S é semiprimo. Seja $v \in V$, tal que $\Gamma(v \otimes W) = 0$, então $\Gamma'(W \otimes v)\Gamma'(W \otimes v) = \Gamma'(W \otimes v\Gamma'(W \otimes v)) = \Gamma'(W \otimes \Gamma(v \otimes W)v) = 0$. Desde que pela Observação 5.2.5, $\Gamma'(W \otimes v)$ é um ideal à esquerda de S, segue-se que $\Gamma'(W \otimes v) = 0$. Pelo item 1 do Teorema 5.2.9, Γ' é não-degenerada, portanto temos $v = 0$. De modo análogo provamos que se $w \in W$ é tal que $\Gamma(w \otimes V) = 0$, então $w = 0$. ■

5.2.1 A não-degeneralidade de Γ

A não-degeneralidade de Γ implica em consequências que relataremos a partir de agora.

Lema 5.2.11 *Seja R um anel de tal modo que Γ é não-degenerada. Então valem:*

1. *Se $x \in R$ é tal que $\Gamma'(W \otimes V) \cdot x = 0$, então $x = 0$; similarmente, se $y \in R$, tal que $y \cdot \Gamma'(W \otimes V) = 0$, então $y = 0$.*

2. *$lan_R(\Gamma(V \otimes W)) = ran_R(\Gamma(V \otimes W)) = 0$. Em particular: $\Gamma(V \otimes W) \lhd_e R^\alpha$ (ideal bilateral essencial).*

3. *Se $A \subseteq R^\alpha$ e $ran_{R^\alpha}(A) = 0 \quad (lan_{R^\alpha}(A) = 0)$, então $ran_R(A) = 0 \quad (lan_R(A) = 0)$.*

4. *$E <_e {}_R R$ ou $E <_e {}_{R^\alpha} R$, então $\Gamma(V \otimes E) <_e {}_{R^\alpha} R^\alpha$.*

Prova. 1. Pela Proposição 5.2.6, $0 = \Gamma'(W \otimes V) \cdot x = W \cdot \Gamma(V \otimes x)$. Daí $\Gamma(V \otimes x) = 1_R \cdot \Gamma(V \otimes x) \subseteq W \cdot \Gamma(V \otimes x) = 0$, desde que Γ é não-degenerada, segue-se que $x = 0$. A outra parte é análoga.

2. Seja $r \in R$ tal que $r\Gamma(V \otimes W) = 0$, então

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\Gamma(V \otimes r)V \otimes W\right) &= \Gamma\left(V \cdot \Gamma'(r \otimes V) \otimes W\right) = \Gamma\left(V \otimes \Gamma'(r \otimes V) \cdot W\right) \\ &= \Gamma\left(V \otimes r \cdot \Gamma(V \otimes W)\right) = \Gamma\left(V \otimes 0\right) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, por Γ ser não-degenerada, $\Gamma(V \otimes r) \cdot V = 0$. Assim sendo, $\Gamma(V \otimes r) = \Gamma(V \otimes r) \cdot 1_R \subseteq \Gamma(V \otimes r) \cdot V = 0$, implica $r = 0$. Logo $lan_R\left(\Gamma(V \otimes W)\right) = 0$. Agora, se $r \in R$ é tal que $\Gamma(V \otimes W)r = 0$, então $0 = \Gamma\left(\Gamma(V \otimes W)r \otimes W\right) = \Gamma\left(V \cdot \Gamma'(W \otimes r) \otimes W\right) = \Gamma\left(V \otimes \Gamma'(W \otimes r)W\right) = \Gamma\left(V \otimes W \cdot \Gamma(r \otimes W)\right)$. Sendo assim, $\Gamma(r \otimes W) = 1_R \cdot \Gamma(r \otimes W) \subseteq W \cdot \Gamma(r \otimes W) = 0$. Sendo Γ não degenerada, segue-se que $r = 0$. Logo $ran_R\left(\Gamma(V \otimes W)\right) = 0$. Finalmente, consideremos $J \lhd R^\alpha$ tal que $J \cap \Gamma(V \otimes W) = 0$. Então $\Gamma(V \otimes W)J = 0$, e assim sendo, $J \subseteq ran_R\left(\Gamma(V \otimes W)\right) = 0$, isto é, $J = 0$. Logo $\Gamma(V \otimes W) \lhd_e R^\alpha$.

3. Para $A \subseteq R^\alpha$, $\Gamma(V \otimes lan_R(A)) \subseteq lan_{R^\alpha}(A)$. De fato, $\Gamma(V \otimes lan_R(A)) \subseteq tr_\alpha(R) \subseteq R^\alpha$, e ainda $\Gamma(V \otimes lan_R(A))A = tr_\alpha(V lan_R(A)A) = 0$. Novamente, desde que $\Gamma(ran_R(A) \otimes W) \subseteq tr_\alpha(R) \subseteq R^\alpha$ e $A\Gamma(ran_R(A) \otimes W) = \Gamma(A ran_R(A) \otimes W) = \Gamma(0 \otimes W) = 0$, segue-se que $\Gamma(ran_R(A) \otimes W) \subseteq ran_{R^\alpha}(A)$. Assim, se $lan_{R^\alpha}(A) = 0$, então $\Gamma(lan_R(A) \otimes W) = 0$, portanto $lan_R(A) = 0$. Do mesmo modo, temos que $ran_{R^\alpha}(A) = 0$ implica $ran_R(A) = 0$.

4. Sejam $E <_e {}_R R$ e $0 \neq J <{}_{R^\alpha} R^\alpha$. Neste caso, $0 \neq J \subseteq RJ <{}_R R$ implica $RJ \cap E \neq 0$. Portanto existem $n > 0$, $r_1, \cdots, r_n \in R$ e $j_1 \cdots j_n \in J$, tais que $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i j_i \in E$. Sendo Γ não degenerada, temos $0 \neq \Gamma(V \otimes \sum\limits_{i=1}^{n} r_i j_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \Gamma(V \otimes r_i) j_i \subseteq J$. Assim sendo, $\Gamma(V \otimes E) \cap J \neq 0$. Para o caso em que $E <_e {}_{R^\alpha} R$, então, para $0 \neq J <{}_{R^\alpha} R^\alpha$, temos que existe $0 \neq j \in E \cap J$, e assim sendo $0 \neq \Gamma(V \otimes j) = \Gamma(V \otimes 1_R)j \subseteq J \cap \Gamma(V \otimes E)$. Em ambos os casos temos $\Gamma(V \otimes E) <_e {}_{R^\alpha} R^\alpha$. ■

Corolário 5.2.12 *Seja R^α um domínio de integridade. Se Γ é não-degenerada e $x, y \in R$, são tais que $\Gamma'(x \otimes y) = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$.*

Prova. Sejam $x, y \in R$ tais que $\Gamma'(x \otimes y) = 0$, então $0 = \Gamma'(x \otimes y) \cdot W = x\Gamma(y \otimes W)$. Se $y \neq 0$, temos, por Γ ser não degenerada, que $0 \neq \Gamma(y \otimes W) \in R^\alpha$. Sendo R^α um domínio de integridade, temos $lan_{R^\alpha}(\Gamma(y \otimes W)) = 0$. Assim pelo item 3. do Lema 5.2.11, temos que $lan_R(\Gamma(y \otimes W)) = 0$. Logo $x \in lan_R(\Gamma(y \otimes W)) = 0$. ■

Corolário 5.2.13 *Se Γ é não-degenerada e $Z(R^\alpha) = 0$, então $Z({}_{R^\alpha}R) = 0$.*

Prova. Seja E um ideal essencial à esquerda de R^α. Desde que $Z(R^\alpha) = 0$, temos $ran_{R^\alpha}(E) = 0$. Portanto pelo item 3. do Lema 5.2.11, temos também que $ran_R(E) = 0$. Logo $Z({}_{R^\alpha}R) = 0$. ■

Observação 5.2.14 Sempre que G é um grupo finito, Pelo Teorema 4.1.4, $R^\alpha = T^G 1_R$, portanto:

1. $E <_e {}_{T^G}T^G \Leftrightarrow E.1_R <_e {}_{R^\alpha}R^\alpha$.

2. $Z({}_{R^\alpha}R^\alpha) = 0 \Leftrightarrow Z({}_{T^G}T^G) = 0$.

Lembremos que α tem traço parcial não-degenerado sobre R se:

1. R^α é semiprimo.

2. $tr_\alpha(A) \neq 0$ para todo $0 \neq A$ ideal à esquerda (à direita) α-invariante de R.

Isto ocorre por exemplo, conforme a Proposição 4.2.11, quando R é um anel semiprimo tal que $tr_\alpha(1_R)$ não é divisor de zero em R. Outro exemplo será dado no resultado a seguir. Antes um lema auxiliar:

Lema 5.2.15 *Denote $t = \sum\limits_{h \in G} 1_h \delta_h$. Então valem,* *1. t comuta com todos os elementos de R^α.*

2. Para todo $g \in G$, temos $1_g\delta_g t = t1_g = 1_g t$. Assim, $St = Rt$.

3. Para todo $r \in R$, temos $trt = tr_\alpha(r)\, t$.

Prova. 1. Seja $a \in R^\alpha$. Então $ta = \sum_{h\in G} 1_h\delta_h a = \sum_{h\in G} \alpha_g(a1_{h^{-1}})\delta_h = \sum_{h\in G} a1_h\delta_h = at$.
2. Para $g \in G$, temos $1_g\delta_g t = 1_g\delta_g \sum_{h\in G} 1_h\delta_h = \sum_{h\in G} 1_g\delta_g 1_h\delta_h = \sum_{h\in G} \alpha_g(1_{g^{-1}}1_h)\delta_{gh} = \sum_{h\in G} 1_g 1_{gh}\delta_{gh} = 1_g t$. Portanto para $a \in D_g$, temos $a\delta_g t = a(1_g\delta_g t) = a(1_g t) = at \in Rt$, assim $St \subseteq Rt$. Como a recíproca é imediata, segue-se o resultado.
3. Para $r \in R$, temos $trt = \sum_{h\in G} 1_h\delta_h rt = \sum_{h\in G} \alpha_h(r1_{h^{-1}})1_h\delta_h t \overset{item2}{=} \sum_{h\in G} \alpha_h(r1_{h^{-1}})1_h t = tr_\alpha(r)\, t$. ■

Proposição 5.2.16 *Se G é um grupo finito e $S = R *_\alpha G$ é um anel semiprimo, então α tem traço parcial não-degenerado sobre R.*

Prova. Os itens indicados nesta demonstração são referentes ao Lema 5.2.15 acima.
1. Seja $a \in R^\alpha$, tal que $aR^\alpha a = 0$. Para $t = \sum_{g\in G} 1_g\delta_g$, o Item 1., nos dá $at = ta \in S$. Assim sendo, pelos Itens 2. e 3. podemos concluir que $atSat = atSta = atRta = atr_\alpha(R)\, ta = atr_\alpha(R)\, at \subseteq aR^\alpha at = 0$. Desde que S é semiprimo segue-se que $at = 0$, portanto $a = 0$.
2. Suponha que $tr_\alpha(A) = 0$ para A ideal à esquerda α-invariante de R. Então pelo item 3, $tAt = tr_\alpha(A)\, t = 0$. Consideremos $I = At$. Desde que, para todo $g \in G$ e todo $a \in D_g$, temos $a\delta_g At = a\alpha_g(A1_{g^{-1}})\delta_g t = aA1_g\delta_g t \overset{item2}{\subseteq} A1_g t = 1_g At \subseteq At$, segue-se que I é um ideal à esquerda de S. Como $I^2 = AtAt = 0$ em S semiprimo, segue-se que $At = 0$, donde concluimos que $A = 0$. ■

Teorema 5.2.17 *Se R é um anel semisimples e $|G|^{-1} \in R$, então Γ é sobrejetora.*

Prova. Pelo Teorema 4.1.9, R^α é semisimples. Por sua vez, o Corolário 5.2.10, garante que Γ é não-degenerada. Desde que pelo item 2 do Lema 5.2.11, $\Gamma(V \otimes W)$ é um ideal essencial no anel semisimples R^α, segue-se que $\Gamma(V \otimes W) = R^\alpha$. ■

5.2.2 A equivalência de Morita entre R^α e $R *_\alpha G$

A partir da Definição de extensão galoisiana parcial (Definição 1.5.35), aplicando o Teorema 1.5.34 e o Teorema 1.5.36 podemos obter o seguinte resultado imediato:

Teorema 5.2.18 *Seja R um anel semiprimo que é extensão galoisiana de R^α. Então R^α é Morita equivalente a S.*

Prova. Pelo Corolário 2.2.5, T é semiprimo e pelo Teorema 1.5.36, T é uma G-extensão de Galois (global) de T^G. Portanto vale o Teorema 1.5.34, e assim, $T^G \overset{M}{\backsimeq} T *_\beta G$. Desde que pelo Teorema 1.3.4, $T *_\beta G \overset{M}{\backsimeq} S$, e que pelo Corolário 4.1.5, $R^\alpha \backsimeq T^G$, segue-se que $R^\alpha \overset{M}{\backsimeq} S$. ■

Porém podemos melhorar esse resultado provando as seguintes equivalências:

Teorema 5.2.19 *Seja G um grupo finito. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *R é uma α-extensão galoisiana parcial de R^α*
2. *Γ e Γ' são sobrejetoras.*
3. *R^α e S são anéis Morita equivalentes.*

Prova. Já sabemos da Definição de equivalência de Morita que 2. e 3. são equivalentes. Para ver que 1. é equivalente a 2. basta observar que:

1. $R^\alpha = tr_\alpha(R)$ equivale a Γ ser sobrejetora, e

2. o fato de existirem $x_i, y_i \in R$, $i = 1, ..., n$ tal que $\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_g(y_i 1_{g^{-1}}) = \begin{cases} 1 \text{ se } g = 1 \\ 0 \text{ se } g \neq 1 \end{cases}$, equivale a Γ' ser sobrejetora.

Com efeito, se Γ' é sobrejetora, então existem $x_i, y_i \in R$, $i = 1, ..., n$ tal que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{g\in G} x_i\alpha_g(y_i 1_{g^{-1}})\delta_g = 1 \Rightarrow \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_g(y_i 1_{g^{-1}})\delta_g = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_g(y_i 1_{g^{-1}}) = \delta_{1,g}$, a recíproca é imediata desde que $1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{g\in G} x_i\alpha_g(y_i 1_{g^{-1}})\delta_g \in \Gamma'(V\otimes W) \lhd S$ portanto, $\Gamma'(V\otimes W) = S$. ■

5.2.3 Um exemplo

Veremos alguns resultados que nos levam a estabelecer condições para que o anel R seja uma α-extensão galoisiana de R^α. Diremos que o S-módulo à direita V_S é fiel se o ideal anulador à direita $ann\, V_S = \{s \in S : V\cdot s = 0\} = 0$. Analogamente, diremos que ${}_SW$ é fiel se o o ideal anulador à esquerda $ann\, {}_SW = \{s \in S : s\cdot W = 0\} = 0$. Para estes ideais anuladores temos o seguinte resultado:

Lema 5.2.20 *Seja R um anel semiprimo. Então*

1. $ann\, V_S = ran_S\Gamma'(W\otimes V)$.
2. $ann\, {}_SW = lan_S\Gamma'(W\otimes V)$.

Prova. Para $s \in S$, temos pela Proposição 5.2.4 que:

1. $\Gamma'(W\otimes V)s = \Gamma'(W\otimes V\cdot s)$.
2. $s\Gamma'(W\otimes V) = \Gamma'(s\cdot W\otimes V)$.

Desde que pelo Item 1. do Teorema 5.2.9, Γ' é não-degenerada, o resultado segue-se imediato. ■

Corolário 5.2.21 *Seja R um anel semiprimo.*

1. *Se V_S é fiel, então $\Gamma'(W \otimes V)$ é um ideal essencial à esquerda de S.*

2. *Se ${}_SW$ é fiel, então $\Gamma'(W \otimes V)$ é um ideal essencial à direita em S.*

3. *Se além disso, R não tem $|G|$-torção aditiva, então valem as recíprocas nos itens 1. e 2.*

Prova. 1. Se V_S é fiel, então pelo item 1. do Lema 5.2.20, temos que $ran_S\Gamma'(W \otimes V) = 0$. Consideremos um ideal à esquerda J de S tal que $J \cap \Gamma'(W \otimes V) = 0$, então $\Gamma'(W \otimes V)J \subseteq J \cap \Gamma'(W \otimes V) = 0$. Assim sendo, $J \subseteq ran_S\Gamma'(W \otimes V) = 0$.
2. A demonstração é análoga a feita no item 1.
3. Desde que R é semiprimo sem $|G|$-torção aditiva, temos pelo Teorema 3.3.11, que S é semiprimo. Assim, se $\Gamma'(W \otimes V)$ é um ideal essencial à direita em S, segue-se que $ran_S\Gamma'(W \otimes V) = 0$. Segue-se pelo item 1. do Lema 5.2.20, que V_S é fiel. A outra recíproca é análoga. ■

Exemplo 5.2.22 Seja R um anel semisimples com $|G|^{-1} \in R$ ou $tr_\alpha(1_R)^{-1} \in R$, tal que R_S ou ${}_SR$ são S-módulos fiéis. Então R é uma α-extensão galoisiana parcial de R^α. Em particular, R^α e S são Morita equivalentes.

Com efeito, Em qualquer caso, os Teoremas de Maschke parcial (Teorema 3.2.1 ou Corolário 3.2.3), garantem que S é um anel semisimples. Pelo Corolário 5.2.21 dado acima, $\Gamma'(V \otimes W)$ é um ideal essencial à esquerda ou à direita, conforme o caso, no anel semisimples S. Portanto $\Gamma'(V \otimes W) = S$, ou seja, Γ' é sobrejetora. Se $|G|^{-1} \in R$, então, pelo Teorema 5.2.17, Γ é sobrejetora. Se for o caso de temos $tr_\alpha(1_R)^{-1} \in R$, então pelo exemplo 3.2.7, a aplicação tr_α é sobrejetora e isso equivale a afirmar que Γ é sobrejetora. Portanto, em qualquer dos casos temos que R é uma α-extensão galoisiana parcial de R^α e consequentemente, pelo Teorema 5.2.19, temos que R^α e S são anéis Morita equivalentes.

Referências Bibliográficas

[1] F. Abadie, *Enveloping actions and Takai duality for partial actions*, J. Funct. Anal. 197 (1) (2003), 14-67.

[2] R. Alfaro; P. Ara; A. del Río, *Regular skew Rings*, J. Australian Math. soc. (Series A) 58(1995), 167-182.

[3] S. A. Amitsur, *Rings of quotients and Morita contexts*, Journal of Algebra 17(1971), 273-298.

[4] M. Cohen, *A Morita context related to finite automorphism groups of rings*, Pacific Journal of Mathematics vol. 98, n. 1, 1982.

[5] P.M.Cohn, *Free rings and their relations*, Second edition, Academic Press, London, 1985.

[6] W. Cortes; M. Ferrero, *Partial skew polynomial rings:prime and maximal ideals*, To appear.

[7] W. Cortes; M. Ferrero; H. Marubayashi, *Partial skew polynomial ring and Goldie rings*, To appear.

[8] S. Dascalescu; C. Nastasescu; S. Raianu, *Hopf algebras: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 235, Marcel Dekker, 2001.

[9] N.J. Divinski, *Rings and radicals*, Mathematical Expositions N 14, Univ. of Toronto Press, 1964.

[10] M. Dokuchaev; A. del Rio; J. J. Simón; *Globalizations of partial actions on non unital rings*. To appear.

[11] M. Dokuchaev; R. Exel, *Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations*, Trans. Amer. Math. Soc. 357 n.5 (2005), 1931-1952.

[12] M. Dokuchaev; M. Ferrero; A. Paques, *Partial actions and Galois theory*, J. Pure Appl. Algebra, to appear.

[13] P.M.Eakin Jr, *The converse to the well-know theorem on noetherian rings*, Math. Ann. 177(1968), 278-282.

[14] R. Exel, *Partial actions of groups and actions of semigroups*, Proc. Am. Math. Soc. 126 (12) (1998), 3481-3494.

[15] R. Exel, *Twisted partial actions: a classification of regular C*-algebraic bundles*, Proc. London Math. Soc. 74 (3) (1997), 417-443.

[16] M. Ferrero, *Partial actions of groups on semiprime rings*, A Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, volume 248. Chapman e Hall/CRC, 2006.

[17] B. J. Gardner; R. Wiegandt, *Radical theory of rings*, Pure and Apllied Mathematics (A Dekker Series of Monographs and Textbooks). Marcel Dekker, Inc. New York, 2004.

[18] K.R.Goodearl, *Von Neumann regular rings*, Second edition, Krieger Publishing Company, Florida, 1991.

[19] G. Karpilovsky, *The algebraic structure of crossed products*, Amsterdam:North-Holland, 1987.

[20] T. Y. Lam, *A first course in noncommutative rings* Springer-Verlang, 1991.

[21] T. Y. Lam, *Lectures on modules and rings*. Graduate Texts in Mathematics. Springer.1998.

[22] W.S. Martindale, III, *Fixed rings of automorphisms and the Jacobson radical*, J. Algebra 17(1978), 42-46.

[23] J.C. McConnell; J.C. Robson, *Noncomutative noetherian rings*, University of Leeds, John Wiley and Sons;1988.

[24] S. Montgomery, *Fixed rings of finite automorphism groups of associative rings*, Lecture Notes in Math. Springer-Verlang, 1980.

[25] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS Amer. Math. Soc. 82, 1993.

[26] D. Passman, *Infinite crossed products*. Boston: Academic, 1989.

[27] W. Stephenson, *Modules whose lattice of submodules is distributive*, Proc. London Math. soc. 28(3)(1974),291-310.

[28] O.E.Villamayor, *On semisimplicity of group algebras*, Proc. Amer. Math. soc. 9(1958),621-627.