

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

RICARDO SILVA RIBEIRO

**GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NA ESCOLA: UMA PROPOSTA DE ENSINO
ATRAVÉS DA GEOMETRIA DINÂMICA**

Porto Alegre
2013

RICARDO SILVA RIBEIRO

**GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NA ESCOLA: UMA PROPOSTA DE
ENSINO ATRAVÉS DA GEOMETRIA DINÂMICA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Alice Gravina

Porto Alegre
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

**GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NA ESCOLA: UMA PROPOSTA DE
ENSINO ATRAVÉS DA GEOMETRIA DINÂMICA**

RICARDO SILVA RIBEIRO

Dissertação aprovada em 08 de abril de 2013.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Jaime BruckRipoll (UFRGS)
Prof^a. Dr^a. Luisa Rodriguez Doering (UFRGS)
Prof^a. Dr^a. Márcia Rodrigues NotareMeneghetti (UFRGS)

AGRADECIMENTOS

A Deus por me conceder saúde e força para realizar todos os meus objetivos.

A minha mãe Lúcia Maria por toda paciência e amor que sempre teve comigo.

Ao meu pai Carlos pelos momentos de reflexão, amor e apoio que me proporcionou durante a pesquisa deste trabalho.

A minha esposa Paula que compartilhou comigo essa trajetória, com carinho, amor e incentivo.

Aos meus irmãos Felipe e Guilherme que sempre estiveram comigo e me ajudam a trilhar um caminho de amor.

A minha afilhada Júlia que com seu sorriso ilumina minha vida.

Ao meu avô Benga que me deu incentivo e suporte para realizar o mestrado.

As minhas queridas professoras Zênia e Emma por me inspirarem a seguir esta profissão.

Aos meus colegas da escola Nayde Emerim, em especial a Deise, a Glória e ao Celso, amigos para uma vida toda.

As minhas colegas Norma e Roberta do Curso Universitário Torres pela amizade.

Ao meu amigo Rafael pelo auxílio na construção desse trabalho.

A minha colega Melissa Meier por todo incentivo e apoio no desenvolvimento deste trabalho.

A minha orientadora Professora Dra. Maria Alice Gravina pela honra de ter me aceito como orientando, pela compreensão, pelo incentivo, pela acessibilidade, pelos momentos de reflexão e pelo apoio incondicional.

“Uma geometria não pode ser mais verdadeira do que a outra; poderá ser apenas mais cômoda.”

(Poincaré)

RESUMO

Esta dissertação traz ideias para a inserção de novos conteúdos na matemática escolar. Ela trata da exploração de geometrias não-euclidianas, através de dois ambientes de geometria dinâmica, o "Spherical Easel" e o "Disco de Poincaré". O primeiro é um software livre e o segundo foi desenvolvido utilizando-se o recurso de macro-construção do GeoGebra. Na concepção das atividades tratamos as idéias que correspondem ao mundo não-euclidiano fazendo comparações com aquelas que fazem parte da geometria euclidiana e para cada atividade há um comentário que explica a sua intenção de aprendizagem. É a partir de considerações teóricas sobre a natureza da geometria e sua evolução histórica, bem como sobre o processo de aprendizagem da geometria, que é feita a apresentação da proposta.

Palavras chave: Geometrias não euclidianas, geometria dinâmica, geometria na escola, geometria esférica, Disco de Poincaré..

ABSTRACT

This dissertation brings ideas to the inclusion of new contents in school mathematics. They are related to the exploitation of non-Euclidean geometries through two dynamic geometry environments, the "Spherical Easel" and the "Poincaré Disk". The first one is a free software and the second one was developed using the GeoGebra macro-construction. In the design of the activities the approach of ideas that correspond to non-euclidian worlds was made through comparison with the euclidian world and for each activity there is a comment that explain its learning objective. The proposal is supported by theoretical considerations about the nature of geometry and its historical evolution, as well as about the geometry learning process.

Keywords: Non-euclidian geometries, dynamical geometry, geometry in school
Spherical Geometry, Poincaré Disk.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Reta como círculo máximo.....	25
Figura 2.2: Segmento de reta como arco de círculo máximo.	25
Figura 2.3 Retas Esféricas se interseccionando:.....	25
Figura 2.4: Triângulo Esférico.	25
Figura 2.5:Variação na soma dos ângulos internos de um triângulo.....	26
Figura 2.6:Retas hiperbólicas como cordas da circunferência	28
Figura 2.7:Retas hiperbólicas paralelas a reta hiperbólica AB, passando pelo ponto P.....	28
Figura 2.8:Ponto de intersecção de duas retas hiperbólicas.....	28
Figura 2.9:Retas hiperbólicas como semirretas e semicírculos euclidianos.....	29
Figura 2.10:Ponto A intersecção das retas hiperbólicas u e r , e ponto B intersecção das retas hiperbólicas s e t	29
Figura 2.11:Retas hiperbólicas s , t e u paralelas a r passando pelo ponto P.....	30
Figura 2.12: Reta hiperbólica AB como arco ortogonal ao Disco	30
Figura 2.13: Reta hiperbólica AB como arco ortogonal e como diâmetro do Disco...	31
Figura 2.14: Disco de centro O e P ponto no seu interior.....	31
Figura 2.15: Circunferências ortogonais ao círculo de centro O passando por P e P1	32
Figura 2.16: Disco D e circunferência C ortogonal a D	32
Figura 2.17: Potência do ponto O em relação ao círculo C.....	33
Figura 2.18: Ângulo com vértice na circunferência.....	34
Figura 2.19:Potência de ponto	34
Figura 2.20: Reta hiperbólica como arco de circunferência ortogonal.....	35
Figura 2.21: Reta hiperbólica	35
Figura 2.22: Soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico.	35
Figura 2.23: Infinitas retas hiperbólicas paralelas a r passando por P	35
Figura 2.24: Pontos no horizonte hiperbólico.	36
Figura 2.25: Razão cruzada	36
Figura 3.1: Triângulo ABC e retas mediatrizes r e t	41
Figura 3.2: Ponto O intersecção das mediatrizes r e t	41

Figura 3.3: Circuncentro O do triângulo ABC.	41
Figura 3.4: Círculo circunscrito ao triângulo ABC.....	42
Figura 3.5: Interface do software GeoGebra.	49
Figura 3.6: Quadrados à esquerda e movimento nos quadrados, à direita.....	50
Figura 3.7: Teorema do círculo circunscrito	51
Figura 3.8: Círculo de centro em A passando por B.....	52
Figura 3.9: Circunferência editada	52
Figura 3.10: Janela para criar nova ferramenta.....	53
Figura 3.11: Janela Objetos Finais.....	53
Figura 3.12: Janela Objetos Iniciais	53
Figura 3.13: Janela Nome e Ícone	54
Figura 3.14: Janela com ícone alterado.	54
Figura 3.15: Barra de ferramentas com ícone Disco.....	54
Figura 3.16: Janela Objetos Finais e Objetos Iniciais da ferramenta h-reta.	56
Figura 5.1: Interface do software Spherical Easel.....	66
Figura 5.2: Material adaptado de “As aventuras de Anselmo Curioso: Os Mistérios da Geometria”.	72
Figura 5.3: Círculos Máximos.....	73
Figura 5.4: Intersecção diferente de círculo máximos	74
Figura 5.5: Pontos antípodas..	75
Figura 5.6: Retas Esféricas.	75
Figura 5.7: Intersecção de retas.....	75
Figura 5.8: Reta por dois pontos não antípodas.....	76
Figura 5.9: Reta por dois pontos..	76
Figura 5.10: Segmentos esféricos.....	76
Figura 5.11: Segmento definido por dois pontos antípodas.	76
Figura 5.12: Ângulo esférico.....	76
Figura 5.13: Retas tangentes.	77
Figura 5.14: Um ângulo reto na esfera.....	77
Figura 5.15: Variação do ângulo esférico	78
Figura 5.16: Reta esférica perpendicular passando por ponto P na reta..	79
Figura 5.17: Retas perpendiculares passando pelo ponto P.....	79
Figura 5.18: Intersecção de retas.....	79

Figura 5.19: Triângulo com vértices nos pontos A, B e C, e de lados definidos pelos segmentos a, b e c.....	80
Figura 5.20: Ângulo α no vértice A, definido pelas retas passando por A e B, e A e C.....	80
Figura 5.21: Ângulo β no vértice B, definido pelas retas passando por A e B, e B e C.	80
Figura 5.22: Ângulo γ no vértice C, definido pelas reta passando por A e C, e B e C	80
Figura 5.23: Triângulo esférico com dois ângulos retos	82
Figura 5.24: Triângulo esférico com três ângulos retos.....	82
Figura 5.25: Variação da soma dos ângulos de um triângulo.....	83
Figura 5.26: Quadriláteros esféricos	84
Figura 5.27: Quadrado Esférico	84
Figura 5.28: Segmento esférico como menor arco de circunferência máxima.....	85
Figura 5.29: Comprimento de segmento esférico.....	85
Figura 5.30: Círculo esférico.	86
Figura 5.31: Círculo esférico de centro A passando por B.....	87
Figura 5.32: Construção de triângulo esférico a partir da reta mediatriz..	87
Figura 5.33: Triângulo equilátero esférico com medidas dos lados e ângulos..	88
Figura 5.34: Pólo C intersecção das retas perpendiculares a r passando por A e B	88
Figura 5.35: Triângulo esférico ABC.	88
Figura 5.36: Triângulo ABC com soma dos ângulos igual a 2π	89
Figura 5.37: Triângulo com soma dos ângulos internos tendendo a 3π	89
Figura 5.38: Fuso esférico e ângulo α	91
Figura 5.39: Luna esférico completo	92
Figura 5.40: Triângulo esférico ABC.	92
Figura 5.41: Lunas completas determinadas pelos vértices do triângulo	92
Figura 5.42: Intersecção de duas lunas completas.	93
Figura 5.43: Intersecção de três lunas completas.....	93
Figura 5.44: Software Geogebra com Menu Hiperbólico.....	94
Figura 5.45: Espaço “Disco” e algum de seus pontos	98
Figura 5.46: Circunferência C ortogonal ao disco D.....	99
Figura 5.47: Retas tangentes a D e C no ponto A e perpendiculares entre si.....	99
Figura 5.48: Reta hiperbólica como arco de circunferência ortogonal.....	100

Figura 5.49: Reta hiperbólica passando pelos ponto A e B.....	100
Figura 5.50: Reta hiperbólica como diâmetro do Disco.....	100
Figura 5.51: Retas hiperbólicas passando pelo ponto A.	101
Figura 5.52: Retas hiperbólicas passando por P.....	101
Figura 5.53: Reta hiperbólica passando por A e por B.....	101
Figura 5.54: Arco verde como h-segmento AB.....	102
Figura 5.55: Arco verde como h-semirreta de origem A passando por B.....	102
Figura 5.56: Ângulo hiperbólico.....	102
Figura 5.57: Perpendicularidade de duas h-retas hiperbólicas perpendiculares.....	102
Figura 5.58: Variação dos ângulos esféricos.....	104
Figura 5.59: H-reta perpendicular passando por P.....	104
Figura 5.60: Ângulos opostos pelo vértice.....	104
Figura 5.61: H-retas h1 e h2 perpendiculares a h3.....	105
Figura 5.62: H-retas h1 e h2 paralelas, e h1 e h3 perpendiculares.....	106
Figura 5.63: H-ângulos alternos internos.....	106
Figura 5.64: H-ângulos internos consecutivos.....	106
Figura 5.65: H-retas h1 e h2 paralelas a h3, porém secantes entre si.....	106
Figura 5.66: Segmentos hiperbólicos congruentes tendendo ao infinito hiperbólico.....	107
Figura 5.67: Círculo hiperbólico de centro A passando por B.....	107
Figura 5.68: Centro C do h-círculo distante do centro euclidiano E.....	108
Figura 5.69: Centro C do h-círculo tendendo ao centro euclidiano E.....	108
Figura 5.70: Segmentos hiperbólicos em sequência de mesmo comprimento com os pontos distantes.....	109
Figura 5.71: Segmentos hiperbólicos em sequência de mesmo comprimento com os pontos próximos.....	109
Figura 5.72: H-reta azul como mediatriz do h-segmento AB.....	110
Figura 5.73: H-reta azul como bissetriz do ângulo CDE.....	110
Figura 5.74: Triângulo hiperbólico ABC.....	110
Figura 5.75: Triângulo hiperbólico equilátero a partir da intersecção dos h-círculos.....	111
Figura 5.76: Triângulo equilátero hiperbólico.....	112
Figura 5.77: Triângulo hiperbólico isósceles a partir dos raios de um h-círculo.....	112
Figura 5.78: Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.....	113
Figura 5.79: Soma dos ângulos próximo de 180°	113

Figura 5.80: Quadrilátero Hiperbólico ABCD.....	114
Figura 5.81: Quadrilátero de Saccheri.....	115
Figura 5.82: H-quadrilátero azul como quadrado hiperbólico	115
Figura 5.83: Quadrado hiperbólico tendendo ao quadrado euclidiano	116
Figura 5.84: H-quadrilátero azul como retângulo hiperbólico	116
Figura 5.85: Reflexão de um ponto por uma h-reta.....	117
Figura 5.86: Círculo Limite I	117
Figura 5.87: Círculo Limite III	117
Figura 5.88: Passos de construção da pavimentação.....	118
Figura 5.89: Pavimentação colorida	118

LISTA DE TABELA

Tabela 1: Construção da ferramenta h-reta	56
Tabela 2: Ferramentas básicas do Spherical Easel:	67
Tabela 3: Ferramentas de edição, medição e construção do Spherical Easel.....	68
Tabela 4: Tabela adaptada	91
Tabela 5: Recursos euclidianos do software GeoGebra.	96
Tabela 6: Recursos do menu hiperbólico	98

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO	15
CAPÍTULO 2 SOBRE A NATUREZA DA GEOMETRIA E A HISTORIA DA SUA EVOLUÇÃO	19
2.1 Geometria Euclidiana	19
2.2 Geometrias Não-Euclidianas	23
2.2.1 Geometria Esférica.....	24
2.2.2 Geometria Hiperbólica.....	26
CAPÍTULO 3 O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA E POSSIBILIDADES DA GEOMETRIA DINÂMICA	39
3.1 Ensino e Aprendizagem de Geometria	39
3.2 Geometria Dinâmica	47
CAPÍTULO 4 GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NA ESCOLA	57
CAPÍTULO 5 UMA PROPOSTA DE EXPLORAÇÃO DE GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS EM MICRO MUNDOS DINÂMICOS	64
5.1 Geometria Esférica: uma Proposta Didática	66
5.1.1 Apresentação do "ambiente de exploração" Spherical Easel.....	66
5.1.2 Uma visita ao mundo da geometria esférica.....	69
5.2 Geometria Hiperbólica: uma proposta didática	94
5.2.1 Apresentação do ambiente de exploração "Disco de Poincaré".....	94
5.2.2 Uma visita ao mundo da geometria hiperbólica.....	98
CAPÍTULO 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	119
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	121
APÊNDICE	125
Apêndice 1: Produto Didático	125

1 INTRODUÇÃO

Muitos são os autores que tentam explicar porque a geometria não é um assunto tratado com a devida ênfase na escola. Uma pesquisa de Pais&Freitas (1999) identifica que é a formação pouco satisfatória dos professores neste tópico que faz com que eles não atribuam importância aos raciocínios geométricos na suas salas de aula; quando falam sobre geometria, os professores referem-se às fórmulas e aos cálculos ou à comprovação experimental de propriedades, desconsiderando a argumentação dedutiva como parte do processo de construção desse conhecimento. Em um trabalho de caráter histórico, Pavanello (1989) identifica que o abandono do ensino da geometria na escola é, em grande parte, devido ao movimento “matemática moderna”. Esse movimento é responsável pela excessiva formalização dos conceitos e ideias matemáticas, especialmente através da linguagem de conjuntos e estruturas algébricas; na geometria deu-se o tratamento através das transformações isométricas (aquelas que preservam distância), esse muito distante da naturalidade com que até então se apresentavam os conceitos e ideias na geometria euclidiana – os axiomas básicos, as congruências de triângulos e os teoremas decorrentes. E assim, os professores, inseguros com esse novo tratamento, passaram a privilegiar os conteúdos de álgebra.

Conforme Gravina (2001) a precária formação escolar dos alunos em geometria é evidenciada nos desempenhos dos calouros que cursam a disciplina de Geometria I do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS. Segundo a autora: *“esses alunos chegam a universidade desprovidos das habilidades intelectuais necessárias à construção do conhecimento geométrico. Abstrair, generalizar, estabelecer relações, errar, fazer conjecturas, demonstrar — as ações que caracterizam o processo de criação em matemática lhes são estranhas.”*

Quanto à importância do ensino da geometria na escola, Fiorentini (1995) argumenta que sem estudar esse tópico matemático, as pessoas não irão desenvolver o pensamento geométrico que é necessário para resolver problemas do cotidiano, tais como calcular quantas lajotas são necessárias para cobrir uma determinada área, traçar o caminho mais curto para chegar a um determinado lugar. Também, não saberão fazer uso dos conceitos geométricos para compreender e

resolver questões em outras áreas do conhecimento, como por exemplo, Geografia e Astronomia. E acrescentaríamos que contemplar no ensino escolar o entendimento da geometria como um modelo do espaço é propiciar um olhar sobre a natureza da matemática - algumas verdades são observadas e são aceitas sem questionamento (os axiomas) e a partir delas novas verdades são deduzidas (os teoremas). É disso que trata a matemática, em particular a geometria.

Tendo como propósito trazer uma contribuição para melhoria do ensino da geometria, neste trabalho vamos apresentar uma proposta de ensino voltada para o entendimento de dois modelos de espaço que não se comportam como o modelo euclidiano. São modelos de espaço correspondentes às geometrias esférica e hiperbólica. Neles não é mais válido o axioma das paralelas – aquele que garante que por um ponto exterior a uma reta passa uma e somente uma reta paralela. Se considerarmos a geometria como modelo de percepção, compreensão e descrição do espaço, a realização de atividades no contexto destas duas geometrias não-euclidianas pode ser fonte de enriquecimento cognitivo de nossos alunos. Pensar em um mundo diferente do euclidiano exige um desprendimento da experiência sensível imediata e, conseqüentemente, também exige controle racional das propriedades geométricas que valem nesses espaços.

É com o uso da tecnologia digital que vamos concretizar nossa proposta. Segundo Costa (2004), o computador pode acrescentar novas possibilidades e dimensões nos processos de ensino e de aprendizagem, diferentes daquelas que estão presentes em uma sala de aula convencional. O uso desse recurso pode aumentar a eficácia do ensino, e aqui nos interessa o aumento da eficácia através da introdução de novos conteúdos na escola. É nossa expectativa que o material produzido nesta dissertação contribua para que o professor da educação básica dê uma nova dimensão à sua prática pedagógica no que diz respeito ao ensino da geometria.

O assunto “geometrias não-euclidianas” encontra-se ausente nos livros didáticos e isso faz sentido, pois julgamos que se apresentado no tradicional formato de texto escrito e figuras estáticas é um assunto que se tornaria muito difícil para os alunos da escola básica. Nossa proposta de ensino se apóia no uso de software de geometria dinâmica – com este recurso os alunos podem manipular, de forma

concreta, os pontos e as retas dos modelos esférico e hiperbólico. É através dessa manipulação que gradativamente vão se constituindo as imagens mentais que concretizam novas possibilidades para a ideia de reta – um entendimento que é crucial na exploração desses dois novos espaços. A utilização de software de geometria dinâmica para representar os modelos geométricos não-euclidianos é, com certeza, um facilitador no processo de ensino-aprendizagem dessas geometrias.

A dissertação se estrutura em seis capítulos. O capítulo 1 é esta introdução ao trabalho. O capítulo 2 inicia com considerações sobre a natureza da geometria euclidiana, destacando os aspectos formais e sistemáticos que Euclides propôs em Os Elementos. Segue com uma breve retrospectiva histórica sobre a evolução da geometria resultante da discussão em torno do 5º Postulado de Euclides – o postulado das paralelas - e as tentativas de produção de uma demonstração para esse postulado.

O capítulo 3 trata das questões sobre o ensino e aprendizagem da geometria escolar, e nele apresentamos algumas das dificuldades que são naturais no processo de aprendizagem da geometria. Neste capítulo também apresentamos o potencial da geometria dinâmica no que diz respeito à aprendizagem da geometria, com especial consideração sobre a característica de estabilidade de uma construção geométrica, a saber: a figura produzida, mediante manipulação direta na tela do computador, muda de posição e tamanho, mas mantém as propriedades geométricas impostas na construção.

No capítulo 4 é feita análise de alguns trabalhos que tratam do ensino de geometrias não-euclidianas na escola e na formação de professores.

O capítulo 5 trata da nossa proposta de ensino. Na primeira parte apresentamos, de início, o software Spherical Easel que concretiza um modelo da geometria esférica. É utilizando os recursos do Spherical Easel que concebemos uma sequência de atividades na qual os alunos devem realizar construções de modo a responder as perguntas que lhes são colocadas. Na segunda parte apresentamos

o micro-mundo “Disco de Poincaré, construído com o software GeoGebra¹”, que concretiza um modelo da geometria hiperbólica. E como antes, também foi concebida uma sequência de atividades. Na concepção das sequências foram levados em consideração as ideias, os conceitos e as propriedades básicas do modelo euclidiano. Assim, é de forma comparativa, com o mundo euclidiano, que se pretende a apropriação, por parte dos alunos, desses dois novos mundos. Para cada atividade são feitos comentários para o professor que realçam a construção de conhecimento pretendido quando os alunos realizam a atividade. O produto didático, a ser utilizado na escola, está disponível na íntegra em http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem/produto_didatico/rribeiro/.

O capítulo 6 trata das considerações finais. Nele trazemos algumas reflexões sobre o estudo realizado e, a partir disto, procuramos evidenciar os pontos que fazem a nossa proposta ser diferente.

¹GeoGebra é um *software* matemático, de acesso livre e gratuito, disponível para *download* na versão 3.2.0.0 no endereço www.geogebra.org/download/install.htm.

2 SOBRE A NATUREZA DA GEOMETRIA E A HISTORIA DA SUA EVOLUÇÃO

Neste capítulo, inicialmente, abordamos a natureza da geometria euclidiana. Depois apresentamos um breve histórico sobre o desenvolvimento das ideias que levaram aos desdobramentos de entendimento do espaço através de outras geometrias - a esférica e hiperbólica.

Para tornar mais concreta as ideias da geometria hiperbólica, apresentamos, de forma breve, os modelos de Felix Klein e do semiplano de Poincaré. E de forma mais detalhada o modelo do disco de Poincaré, por ser esse o usado na proposta de ensino.

2.1 Geometria Euclidiana

Alguns historiadores afirmam que a Geometria começou a se desenvolver através de necessidades relacionadas ao plantio, construções e movimento dos astros. Pensam que a geometria surgiu dessa necessidade prática de realizar cálculos de distâncias, áreas, superfícies, alturas e volumes. (BOYER, 1996; EVES, 1992)

Os primeiros conhecimentos geométricos baseiam-se na intuição e na experiência – aspecto empírico. Ou como afirma Fetissov (1997), são conhecimentos “adquiridos pelo método indutivo a partir de um número grande de observações e experiências” (p. 20).

A geometria como ciência dedutiva teve início no século VI a.C. Os primeiros registros estão nos trabalhos de Tales de Mileto (± 600 a.C.) e é em ± 530 a.C que a escola pitagórica exerce grande influência no desenvolvimento matemático grego, mas a geometria ainda não se constituía em um exemplo de sistema dedutivo. Ainda segundo Fetissov (1997)

A geometria pitagórica constitui um avanço em relação à de Tales quanto ao aspecto dedutivo. Na obra pitagórica, já se notam algumas cadeias de teoremas, uns deduzidos de outros por raciocínios lógicos. Mas, pelo fato de que não partia de um conjunto de axiomas

explicitados e porque só se ocupava de certos entes, figuras e conceitos privilegiados pelas ideias filosóficas da escola pitagórica, esta obra não constitui um exemplo de sistema dedutivo (p. 06).

Euclides foi o primeiro a apresentar a geometria organizada num encadeamento lógico-dedutivo, no qual cada proposição deveria ser deduzida de outra mais simples de maneira lógica e dedutiva. Em sua obra intitulada *Elementos*, ele reuniu praticamente todo o conhecimento de Matemática básica da sua época. Os Elementos, escrito por volta de 300 a.C, são compostos por 13 livros contendo 465 proposições. Ele engloba uma coleção de definições, postulados (axiomas), proposições (teoremas e construções e provas matemáticas das proposições).

A obra de Euclides é um modelo de organização de conhecimento na forma axiomático-dedutivo. Na geometria denominam-se de *noções e relações primitivas* aquelas que são aceitas sem explicação e possuem significados intuitivos; por exemplo *pontos, retas, estar entre, ser igual...* Os *axiomas* são verdades aceitas como ponto de partida para construção do modelo; por exemplo, “dois pontos determinam uma única reta” e “por um ponto exterior a uma reta passa uma única reta paralela”. *Definir* é introduzir um novo conceito que facilita a organização do modelo; por exemplo, a expressão “mediatriz” significa “reta perpendicular a segmento que passa pelo seu ponto médio”. *Teorema* é termo introduzido por Euclides que significa “afirmação que pode ser provada” e nisso é usado um encadeamento de inferências lógicas fazendo-se uso de axiomas e teoremas já demonstrados da mesma forma. Por exemplo, quando se afirma que “as mediatrizes de dois lados de um triângulo se interceptam em um ponto que equidista dos seus vértices” é através de uma cadeia de argumentos usando propriedades de congruência de triângulos que se explicitam as razões que explicam porque tal afirmação é verdadeira, e tem-se então um teorema da geometria euclidiana.

Fetissov (1997) ressalta o caráter dedutivo dos sistemas geométricos:

Assim, um sistema geométrico compõe-se de um número relativamente pequeno de verdades fundamentais ou postulados, obtidos por indução e aceitos sem demonstração, decorrendo as demais verdades geométricas desses postulados através de deduções. É por isso que se considera a Geometria uma ciência fundamentalmente dedutiva. (p 21).

Uma teoria segue o método axiomático quando toma como ponto de partida alguns princípios básicos que constituem o seu conjunto de axiomas ou postulados.

Esses postulados ou axiomas são escolhidos, até certo ponto, arbitrariamente. Todavia, uma escolha não adequada de axiomas poderá originar uma teoria inconsistente ou desprovida de qualquer sentido. É preciso que o conjunto de axiomas tenha três propriedades: consistência, completude e independência. Um conjunto de axiomas é consistente quando não conduz a uma contradição dentro da teoria que está sendo desenvolvida; isto é, não conduz a demonstração simultânea da veracidade e da não veracidade de uma afirmação. O conjunto é completo quando a teoria pode ser desenvolvida sem que haja a necessidade de inclusão de novos axiomas. E ele é independente quando nenhum dos axiomas pode ser tratado como um teorema, ou seja, nenhum deles pode ser demonstrado a partir dos demais. Nessa última característica do sistema de axiomas está um dos fatores que levou ao questionamento do quinto postulado (enunciado logo a seguir). Devido ao caráter nada simples do seu enunciado vários matemáticos passaram a acreditar que ele poderia ser deduzido dos quatro primeiros.

As dez afirmações apresentadas por Euclides, na sua obra, se organizam em dois grupos: os axiomas e os postulados. Os antigos matemáticos faziam distinção entre axioma e postulado: axioma é uma noção comum aceitável como hipótese em qualquer ciência; postulado é hipótese própria da Geometria. Estes axiomas e postulados são:

Axiomas:

N1 – Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.

N2 – Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.

N3 – Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.

N4 – Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.

N5 – O todo é maior do que qualquer de suas partes.

Postulados:

P1 – Pode-se traçar uma (única) reta (segmento) por quaisquer dois pontos.

P2 – Pode-se continuar (de modo único) uma reta infinitamente.

P3 – Pode-se traçar uma circunferência com quaisquer centro e raio.

P4 – Todos os ângulos retos são iguais.

P5 – Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas

infinitamente, encontram-se no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

Com esse conjunto de postulados foi criado o primeiro e mais duradouro modelo para o espaço físico. Esse modelo, durante muito tempo, se manteve inquestionável quanto ao seu encadeamento lógico perfeito. Durante quase dois mil anos, a geometria de Euclides foi considerada como a única geometria possível. No entanto, o quinto postulado, pelo fato de possuir uma redação mais complexa, extensa e menos intuitiva que os postulados anteriores se tornou motivo de forte questionamento nos séculos XVII e XVIII. Diferentes matemáticos, dentre eles John Wallis (1616 – 1703), Saccheri (1667 – 1733), Lambert (1728 – 1777), Legendre (1752 – 1833), fizeram suas tentativas de demonstração do quinto postulado. Para esses matemáticos o quinto postulado, conforme enunciado acima, era questionável por não ser intuitivamente óbvio que as duas retas em questão deveriam, de fato, se encontrar no infinito. E assim, o postulado começa a ser pensado como uma afirmação a ser demonstrada. Inúmeras foram as tentativas de demonstração sendo que muitas delas admitiam nos argumentos fatos equivalentes ao próprio postulado. Uma das consequências, que veio dessas tentativas de demonstração, foi a produção de vários postulados equivalentes ao quinto postulado, denominados de postulados *substitutos*.

O postulado *substituto* mais conhecido é o que foi apresentado pelo matemático escocês John Playfair (1748-1819) no seu trabalho *Elementos de Geometria*, publicado em 1795. Em linguagem moderna, o axioma de Playfair é apresentado na seguinte formulação: *por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada*. Esse enunciado acabou batizando o quinto postulado com o nome de Postulado das Paralelas.

Girolamo Saccheri (1667 – 1733), em um livro chamado “Euclides ab omni naevo vindicatus” (Euclides, sem qualquer falha) publicado em 1733, foi o primeiro a considerar uma hipótese contraditória ao quinto postulado. Sua ideia é simples: retirando o quinto postulado e colocando uma hipótese contrária, se no desenvolvimento aparecer um absurdo significa que o quinto postulado é verdadeiro.

Foram as tentativas de transformar o quinto postulado do sistema axiomático

euclidiano em um teorema que lançaram as sementes para o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas. Os inúmeros esforços de demonstração e os recorrentes insucessos prepararam o terreno para que se pensasse em produzir argumentos que fossem baseados na negação do quinto postulado, e este caminho tornou-se produtivo. A suposição da não existência de reta paralela a uma reta dada desdobrou-se na geometria esférica. A suposição da existência de mais de uma reta paralela a uma reta dada, desdobrou-se na geometria hiperbólica. É disto que vamos tratar a seguir.

2.2 Geometrias Não-Euclidianas

Conforme já mencionado, durante o século XVIII, diversos matemáticos tentaram demonstrar o quinto postulado e, apesar de não terem sucesso em seus intentos, eles conseguiram diversos e importantes avanços. O jesuíta italiano Giovanni Girolano Saccheri(1667 – 1733), detentor de um grande conhecimento de lógica, criou um quadrilátero, conhecido como quadrilátero de Saccheri, o qual possuía dois ângulos retos e dois lados opostos de mesmo comprimento. Sua idéia era provar, a partir dos quatro primeiros axiomas, que os outros dois ângulos do quadrilátero também eram retos. Isso era equivalente a provar o quinto postulado. Todavia, Saccheri só conseguiu mostrar que os outros dois ângulos eram congruentes. Em sua busca ele obteve alguns resultados que depois vieram a fazer parte do corpo de propriedades da geometria não-euclidiana; mas no momento da descoberta, Saccheri os considerou abomináveis por ferirem a intuição. A verdade é que Saccheri não conseguia conceber a existência de outro tipo de geometria que a não euclidiana. De fato, a geometria euclidiana foi por muito tempo entendida como uma leitura precisa da realidade e não como um modelo de interpretação do mundo físico.

O parisiense Adrien-Marie Legendre (1752–1833) destacou-se por demonstrar diversos resultados da geometria plana de forma rápida e clara. Com seu estilo simples e direto, renovou as bases da geometria, demonstrando que a soma das medidas de dois ângulos internos quaisquer de um triângulo é menor que 180° . Também merecem louvores, as tentativas do francês Johann Lambert (1728 – 1777). Este matemático trabalhou em torno de um quadrilátero com três ângulos

internos retos. Tentou mostrar que o mesmo ocorreria com o quarto ângulo, mas não obteve êxito.

Foi apenas na primeira metade do século XIX que se começou a suspeitar que o Postulado das Paralelas fosse realmente independente dos demais. Matemáticos como Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Johann Bolyai (1802-1860) e Nicolai Ivanovich Lobachewsky (1793-1856) trataram da questão ao considerar três situações distintas: por um ponto não contido em uma reta dada, passa mais de uma, apenas uma ou nenhuma reta paralela a reta dada. Por suspeitarem da independência do Postulado das Paralelas, ou seja, de que sua negação poderia gerar uma geometria consistente, sem contradições, desenvolveram, de forma axiomática, um estudo amplo e detalhado de uma geometria que assumia a existência de mais de uma reta paralela, criando o que veio a ser chamada com o tempo de Geometria de Lobatchevsky ou Geometria Hiperbólica. As geometrias euclidiana e hiperbólica diferem apenas no Postulado das Paralelas (e nos resultados que decorrem desse). Se considerarmos apenas os resultados que independem desse postulado, tem-se o que se costuma chamar de geometria neutra. Por geometria neutra entendemos todos os resultados e construções que podem ser feitos prescindindo de qualquer versão do Postulado das Paralelas.

As duas possíveis negações do postulado das paralelas desdobraram-se em modelos que correspondem: a) a geometria esférica – o caso em que por qualquer ponto fora de um reta não passa nenhuma reta paralela; b) a geometria hiperbólica – o caso em que por qualquer ponto fora de uma reta dada, passam pelo menos duas retas paralelas a esta reta. No que segue apresentamos estas duas geometrias.

2.2.1 Geometria Esférica

O matemático alemão Georg Bernhard Riemann, estabeleceu as bases de uma nova Geometria, chamada Esférica. Quando substituirmos o postulado das paralelas pelo postulado de Riemann, temos um novo sistema axiomático. Esse é o ponto de partida para a Geometria Esférica. O Postulado de Riemann diz que “*Não existem paralelas a uma reta dada*” (COUTINHO, 1989, p. 65). Tal geometria foi apresentada por Riemann pela primeira vez em 1851 na aula inaugural para sua admissão como professor-adjunto na Universidade de Göttingen.

Para esse modelo de geometria, Riemann toma o espaço como sendo a superfície de uma esfera e como retas considera os círculos máximos da esfera, isto é, são os círculos que resultam da intersecção da esfera com planos que contem seu centro. Se na Geometria Euclidiana, o caminho mais curto entre dois pontos é um segmento de reta, agora na esfera o caminho mais curto entre dois pontos é um arco de círculo máximo. Na Geometria Esférica não existem retas paralelas, pois quaisquer dois círculos máximos da esfera sempre se intersectam em dois pontos. Na esfera, um triângulo é formado por três arcos de circunferências máximas e nessa geometria temos que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre maior que 180 graus.

As figuras abaixo ilustram estes primeiros conceitos e propriedades da geometria esférica.

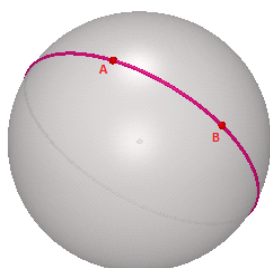


Figura 2.1: Reta como círculo máximo

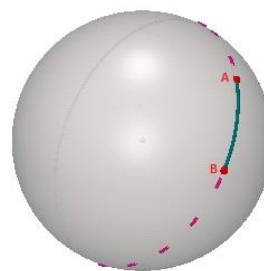


Figura 2.2: Segmento de reta como arco de círculo máximo

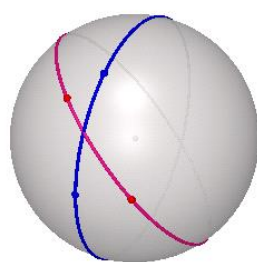


Figura 2.3: Retas Esféricas se interseccionando

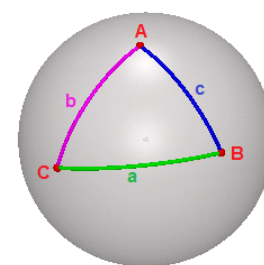


Figura 2.4: Triângulo Esférico

Uma questão interessante na geometria esférica refere-se à relação de dependência entre área de um triângulo e a soma dos seus ângulos internos. Albert Girard (1595-1632) mostrou que a área de um triângulo esférico depende do raio da esfera e dos ângulos internos deste triângulo. A área A_T do triângulo esférico é definida por $A_T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \cdot R^2$, onde α , β e γ são os ângulos internos do triângulo em radianos, e R é o raio da esfera. Esse resultado é conhecido como o Teorema de

Girard. Esse Teorema será demonstrado no capítulo 4 deste trabalho.

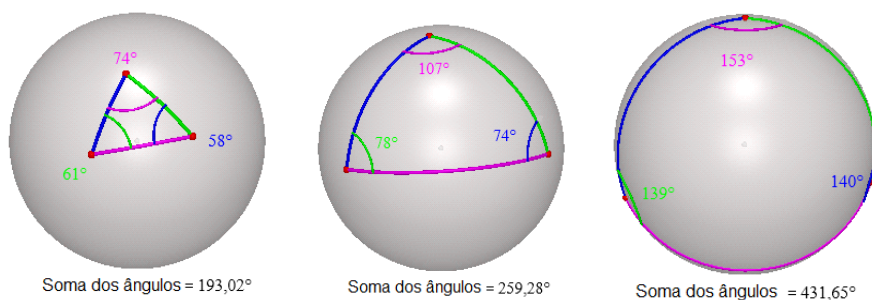


Figura 2.5: Variação na soma dos ângulos internos de um triângulo

2.2.2 Geometria Hiperbólica

O matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) convenceu-se de que o Quinto Postulado não era uma proposição. Mais que isso, foi o primeiro a perceber claramente a possibilidade de haver uma geometria igualmente lógica e precisa, contudo diferente daquela proposta nos Elementos de Euclides. Para Gauss, o espaço era uma estrutura já existente no espírito humano e os postulados eram na verdade juízos impostos (EVES, 2002).

O jovem Johann Bolyai (1802 - 1860) estava empolgado com o fato de uma nova geometria nascer quando outra hipótese fosse assumida com relação ao Quinto Postulado. Isso é notado em um trecho de uma carta enviada a seu pai Wolfgang Bolyai, em 3 de novembro de 1823:

Neste momento estou decidido a publicar um trabalho sobre as paralelas, logo que se apresente uma oportunidade e eu consiga organizar e completar o material... do nada eu criei um novo e estranho universo. (WOLFE, 1945, p. 50)

Johann publicou suas descobertas em 1832, como um apêndice do primeiro volume de *Tentamen*, de autoria de seu pai, Wolfgang Bolyai. Em março do mesmo ano, Gauss escreveu a Wolfgang, relatando sobre sua leitura nas páginas do apêndice dizendo que não poderia elogiar Johann, pois estaria elogiando a si mesmo, já que ele mesmo havia chegado a resultados praticamente iguais. Gauss diz ainda que estava surpreso de alguém chegar a tais resultados. Johann ficou desapontado com o fato de não ter sido o primeiro a ter tais ideias e nada mais publicou em vida. (BARBOSA, 2002)

O russo Lobachewsky (1793 - 1856) apresentou seu principal trabalho "Sobre os Fundamentos da Geometria" em uma sessão do Conselho Científico do Departamento de Física e Matemática da Universidade de Kazan, no ano de 1826. Nesse trabalho negava o quinto postulado e afirmava que por um ponto exterior a uma reta passa mais do que uma paralela.

De acordo com Boyer (1974), o primeiro trabalho de Lobachewsky sobre Geometria não Euclidiana foi publicado, em 1829, no *Kasan Bulletin*. Nas palavras do historiador:

Este artigo marca oficialmente o nascimento da Geometria Não-Euclidiana, pois foi Lobachewsky o primeiro matemático a dar o passo revolucionário de publicar uma Geometria especificamente construída sobre uma hipótese em conflito direto com o Postulado das Paralelas: Por um ponto C fora de uma reta AB pode-se traçar mais de uma reta do plano que não encontra AB. (p. 397)

Essa publicação, a primeira sobre geometria não-euclidiana, atraiu pouca atenção no seu próprio país e, por ser escrita em russo, praticamente nenhuma no resto do mundo. Tentando contornar essa situação, Lobachewsky escreveu um livro em alemão com o *título Geometrische Untersuchungen Zur Theorie der Parallellinien* (Investigações Geométricas da Teoria das Paralelas). Pouco antes de sua morte, escreveu uma nova versão do assunto, em francês, com o título de *Pangéométrie*, o que explica o fato da Geometria proposta por Lobachewsky ser conhecida também pelo nome de *Pangeometria*.

A história nos diz que Gauss, Bolyai e Lobachewsky desenvolveram a Geometria Hiperbólica ao mesmo tempo (EVES, 2002). No entanto, Lobachewsky foi o primeiro a publicar seus trabalhos, cabendo a ele a honra da descoberta desta geometria que ele também chamou de *Imaginária*.

No entanto, as dúvidas referentes à consistência da geometria hiperbólica, só foram dirimidas no final do século XVIII, quando matemáticos como Eugenio Beltrami, Henri Poincaré e Felix Klein criaram, no universo euclidiano, modelos para esta nova geometria. Um modelo para um determinado sistema axiomático é uma interpretação dada aos conceitos primitivos de modo que os axiomas sejam todas propriedades verdadeiras.

O modelo proposto por Felix Klein (1849-1925) ficou conhecido como Plano

de Lobachewsky. Esse modelo para a geometria hiperbólica consiste em um círculo euclidiano considerando apenas sua região interior. As retas são identificadas com as cordas deste círculo. Fica claro que dois pontos distintos de um círculo determinam uma única corda, desta forma temos que dois pontos neste plano determinam uma única reta hiperbólica.

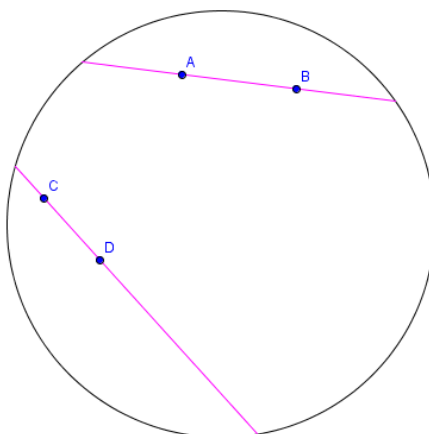


Figura 2.6: Retas hiperbólicas como cordas da circunferência

Sabemos que duas cordas distintas se interceptam, no máximo, em um ponto interior do círculo, portanto temos que duas retas hiperbólicas se interceptam no máximo em um ponto. Nesse modelo vemos infinitas retas paralelas a uma dada reta passando por um dado ponto.

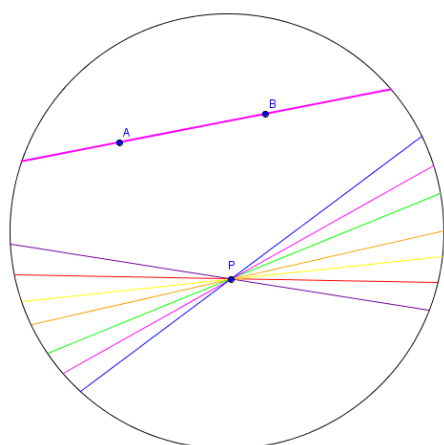


Figura 2.7: Retas hiperbólicas paralelas a reta hiperbólica AB, passando pelo ponto P

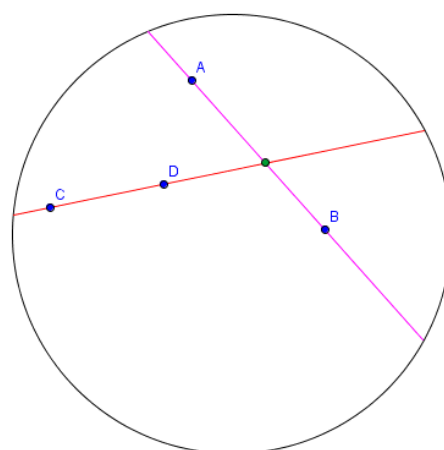


Figura 2.8: Ponto de intersecção de duas retas hiperbólicas

Os modelos propostos por Poincaré para a Geometria Hiperbólica foram desenvolvidos entre 1882 e 1887 e são chamados de modelo do semiplano e modelo do disco. Vamos aqui falar de forma breve do modelo do semiplano; com

mais detalhes apresentamos o modelo do disco, pois é nele que é feita a nossa proposta de ensino.

No modelo do semiplano o espaço é um semiplano euclidiano sem fronteira; as retas hiperbólicas são as semirretas perpendiculares a reta euclidiana que limita o semiplano e as semicircunferências com centros pertencentes a esta reta euclidiana que limita o semiplano. A reta euclidiana que limita o semiplano é dita reta dos infinitos ou horizonte do semiplano.

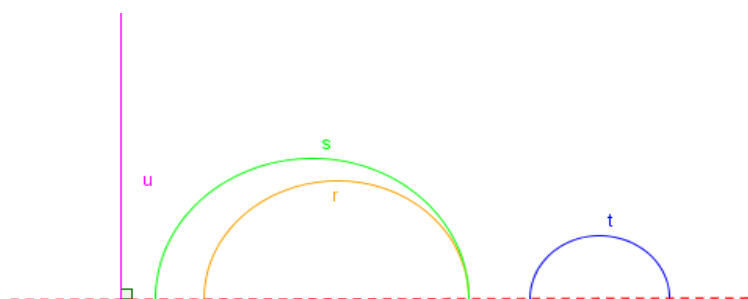


Figura 2.9: Retas hiperbólicas como semirretas e semicírculos euclidianos

Analisando o eixo positivo da reta que limita o semiplano de Poincaré, podemos observar que duas semicircunferências distintas, de centro na reta horizonte, possuem no máximo um ponto de intersecção. Da mesma forma, uma semirreta perpendicular a esta reta também intersecciona um semicírculo em no máximo um ponto. Assim, Poincaré determinou um modelo em que duas retas hiperbólicas distintas se interseccionam em no máximo um ponto. Temos também, como no modelo de Klein, que por um ponto externo a uma reta hiperbólica passam infinitas retas paralelas.

Nas figuras abaixo podemos observar estas constatações.

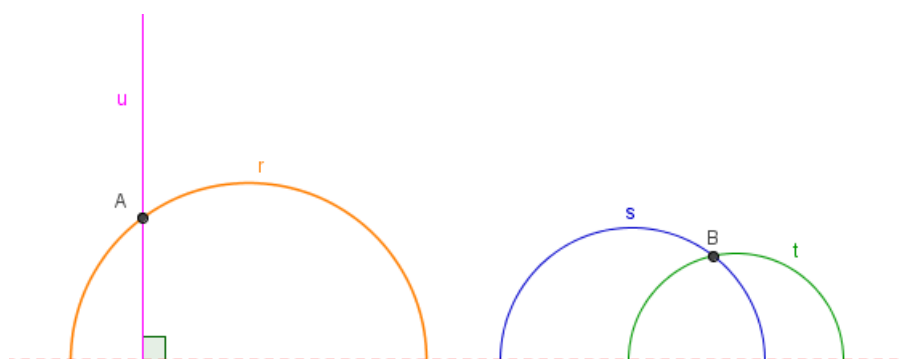


Figura 2.10: Ponto A intersecção das retas hiperbólicas u e r , e ponto B intersecção das retas hiperbólicas s e t

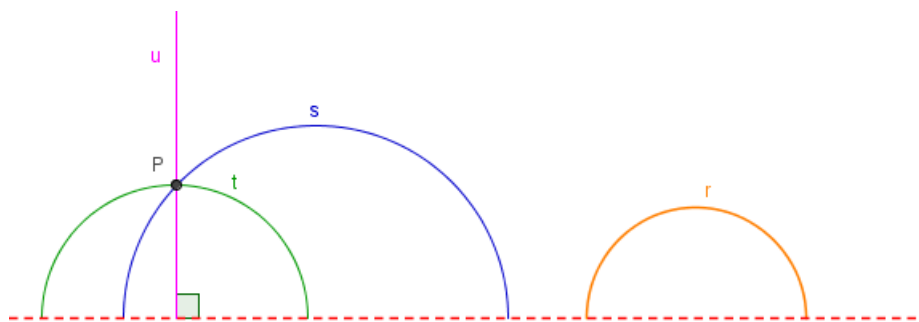


Figura 2.11: Retas hiperbólicas s , t e u paralelas a r passando pelo ponto P

No modelo do disco de Poincaré o plano hiperbólico é definido a partir da região limitada por uma circunferência. Denominamos essa região de Disco. Os pontos internos a esta circunferência são denominados pontos do plano hiperbólico; os pontos que pertencem à circunferência são denominados pontos ideais e a circunferência é dita horizonte hiperbólico. Os arcos de circunferência ortogonais ao Disco são as retas hiperbólicas; e também são retas hiperbólicas os diâmetros sem os extremos. Vale aqui lembrar a definição de circunferências ortogonais: isto acontece quando as retas tangentes às circunferências nos seus dois pontos de intersecção são perpendiculares entre si.

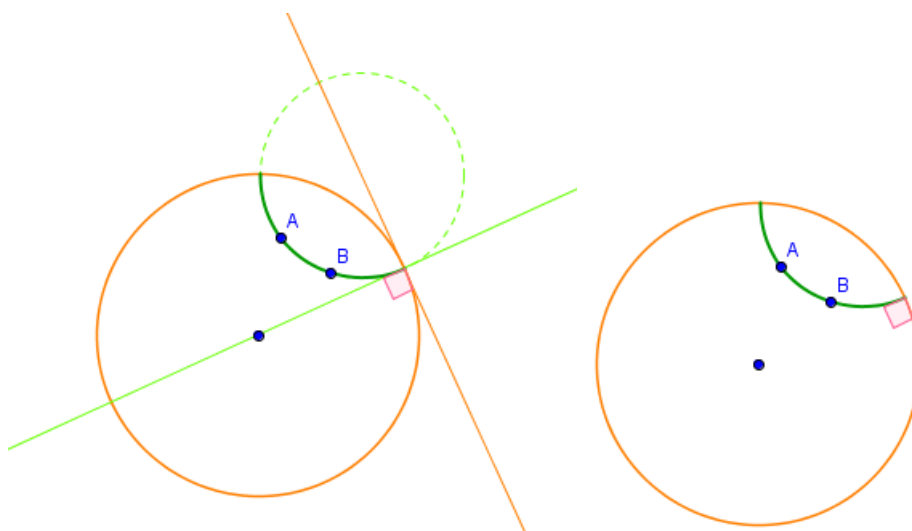


Figura 2.12: Reta hiperbólica AB como arco ortogonal ao Disco.

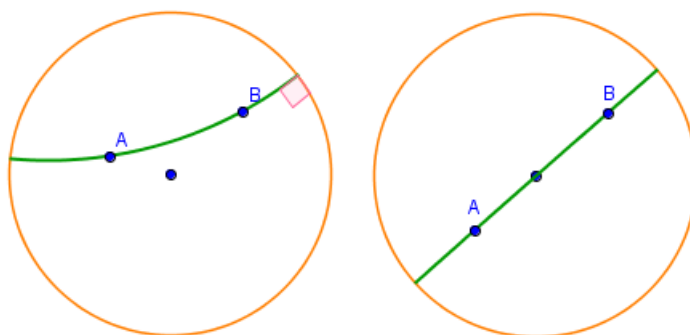


Figura 2.13: Reta hiperbólica AB como arco ortogonal e como diâmetro do Disco

Julgamos interessante que se saiba como construir circunferências ortogonais ao horizonte do Disco, é disso que trataremos a seguir. Na figura 2.14 a construção inicia com o Disco de centro O e P ponto no seu interior.

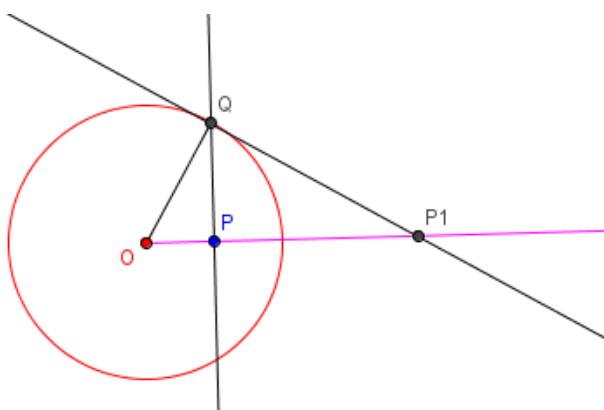


Figura 2.14: Disco de centro O e P ponto no seu interior

E segue com: semirreta OP de origem O e passando por P; reta perpendicular a semirreta OP, passando por P, e interseccionando a circunferência no ponto Q; raio OQ e reta perpendicular ao raio em Q interseccionando a semirreta OP em P1

A transformação que associa ao ponto P o ponto P1, conforme o procedimento de construção apresentado é chamada de transformação de inversão em relação à circunferência (no caso, o horizonte do Disco). Na construção geométrica feita acima, a inversão está definida para pontos do interior do círculo, e isto nos basta para explicar a construção da circunferência ortogonal ao horizonte do Disco (para estender a definição para o plano, basta inverter a ordem da construção dada acima).

O ponto P e seu inverso P1 satisfazem a igualdade $OP \cdot OP1 = r \cdot r$, sendo r o raio do Disco. De fato, como os triângulos retângulos OPQ e OQP1 são semelhantes, pelo critério AAA, temos a igualdade de razões $OP/ r = r/ OP1$ e,

portanto, $OP \cdot OP1 = r \cdot r$.

Agora, podemos enunciar a seguinte propriedade: qualquer circunferência passando por P e P1 (e elas são infinitas) é ortogonal ao horizonte do disco hiperbólico D!

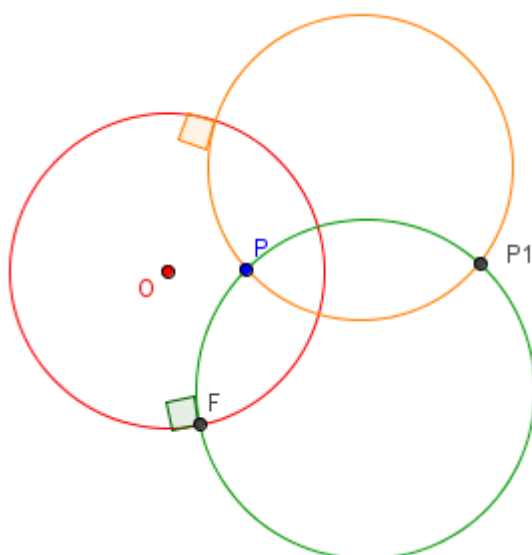


Figura 2.15: Circunferências ortogonais ao círculo de centro O passando por P e P1

Para demonstrar a propriedade enunciada precisamos falar da potência de um ponto e, no caso, nos interessa aplicar este conceito ao ponto O - o centro do Disco. Assim, vamos olhar para a situação particular dada na figura 2.16.

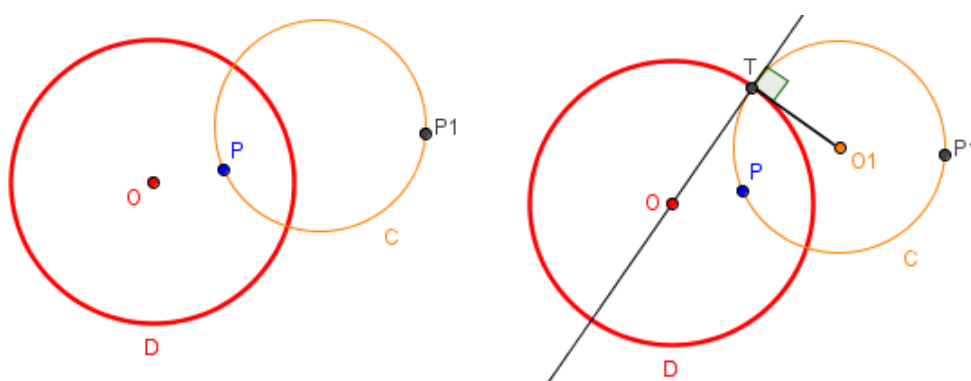


Figura 2.16: Disco D e circunferência C ortogonal a D

Inicialmente temos D disco hiperbólico de raio r , P e P1 pontos inversos um do outro em relação ao horizonte do Disco e C uma circunferência passando por P e P1. Acrescentamos depois a reta tangente ao círculo C passando por O e nomeamos o ponto de tangência como T. Temos então que as retas OT e O1T são ortogonais, sendo O1 o centro da circunferência C. Observamos que a segunda

configuração nos diz que para garantir a ortogonalidade da circunferência C com o horizonte hiperbólico só é preciso mostrar que T também pertence ao horizonte hiperbólico.

Na figura 2.17 reproduzimos parte da situação que está na figura 2.16, e acrescentamos a reta que passa por O , P e P_1 (lembrando que são pontos alinhados). Isto nos dá a configuração geométrica que corresponde à potência do ponto O em relação ao círculo C .

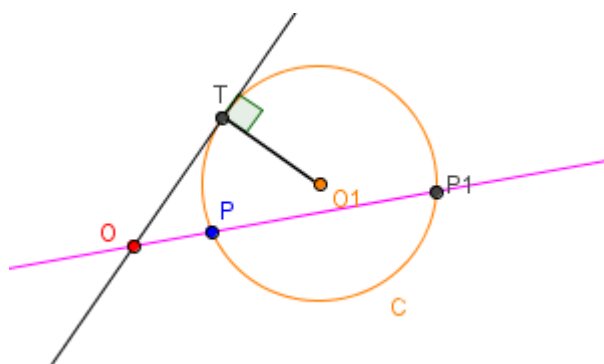


Figura 2.17: Potência do ponto O em relação ao círculo C .

A potência do ponto O em relação ao círculo C é definida como sendo o produto $OP \cdot OP_1$, onde P e P_1 são pontos de reta que passa por O e intercepta C . É claro que na definição está subentendido que este produto é uma constante e no caso, como o ponto O é exterior ao círculo, também vale que $OP \cdot OP_1 = OT \cdot OT$, onde T é o ponto de tangência já especificado acima – isto ainda a ser demonstrado. Então, lembrando que já sabemos que $OP \cdot OP_1 = r \cdot r$, obtemos que $OT = r$, ou seja, o ponto T pertence ao horizonte do Disco, que é o que queríamos demonstrar.

Agora só falta demonstrar que $OP \cdot OP_1$ é constante, e mais, que $OP \cdot OP_1 = OT \cdot OT$. Iniciamos observando uma propriedade de ângulo que tem um vértice em uma circunferência e deixamos a demonstração para o leitor: de acordo com a figura 2.18 temos: em (a) a medida do ângulo de vértice A , com cada lado interseccionando a circunferência em dois pontos, é a metade da medida do ângulo central de vértice O ; em (b) a medida do ângulo de vértice A , com um dos lados interseccionando a circunferência em dois pontos e outro lado tangente à circunferência, é também a metade da medida do ângulo central de vértice O .

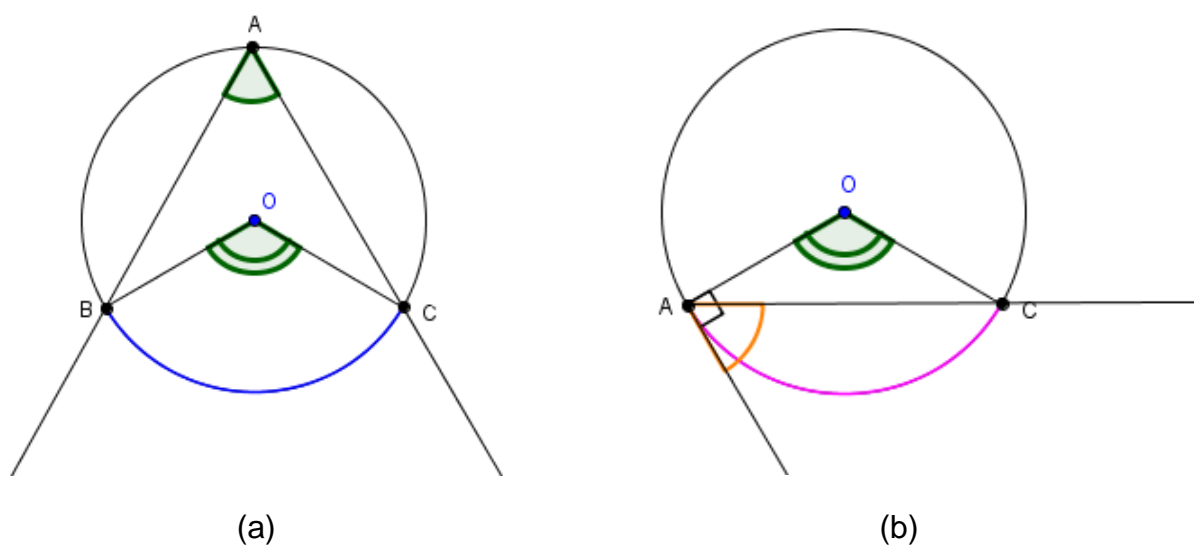


Figura 2.18: Ângulo com vértice na circunferência

Com a propriedade enunciada acima:

- e mais a semelhança dos triângulos $OPQ1$ e $OQP1$ a ser observada em (a) na figura abaixo, obtemos que : $OP \cdot OP1 = OQ \cdot OQ1$.
- e mais a semelhança dos triângulos OTQ e $OQ1T$ a ser observada em (b) na figura abaixo, obtemos que $OQ \cdot OQ1 = OT \cdot OT$.

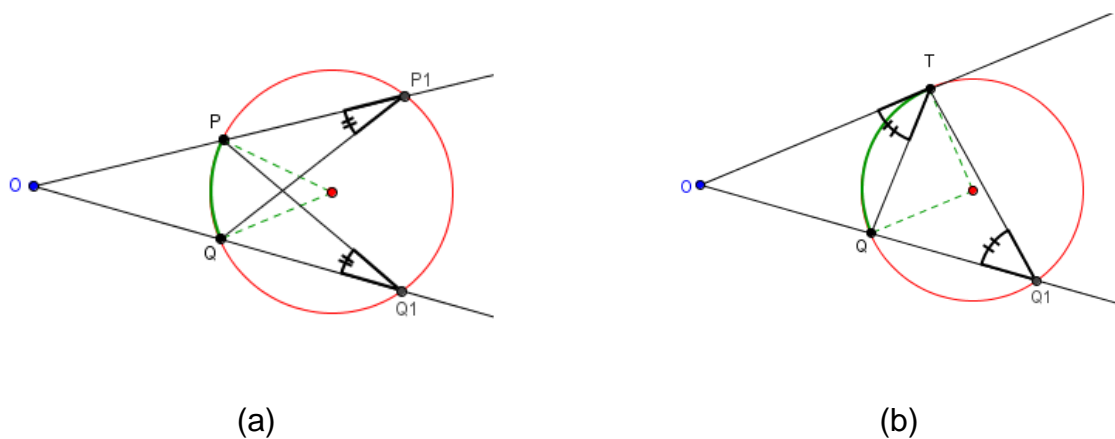


Figura 2.19: Potência de ponto

Retomamos agora o modelo para geometria hiperbólica que estamos discutindo – o Disco de Poincaré. Já sabemos que os arcos de circunferência ortogonais ao Disco são as retas hiperbólicas e, também, são retas hiperbólicas os diâmetros do Disco. Em ambas as situações, os pontos extremos não são considerados como pontos do espaço, eles são pontos que estão no horizonte do

Disco. Nesse modelo é fácil ver que por um ponto passam infinitas retas, que dois pontos determinam uma única reta. E o mais importante: por um ponto P exterior a uma reta r passam infinitas retas paralela a r . Na geometria hiperbólica a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que dois ângulos retos. Se o triângulo é pequeno, seus ângulos somam aproximadamente 180° .

As figuras abaixo ilustram estes primeiros conceitos e propriedades da geometria hiperbólica.

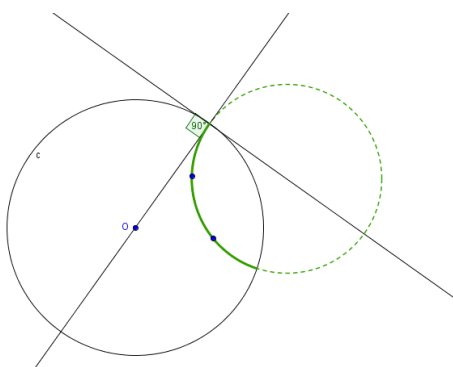


Figura 2.20: Reta hiperbólica como arco de circunferência ortogonal

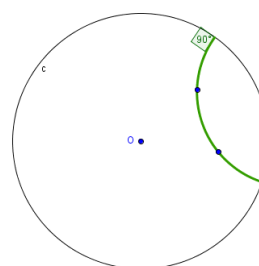


Figura 2.21: Reta hiperbólica

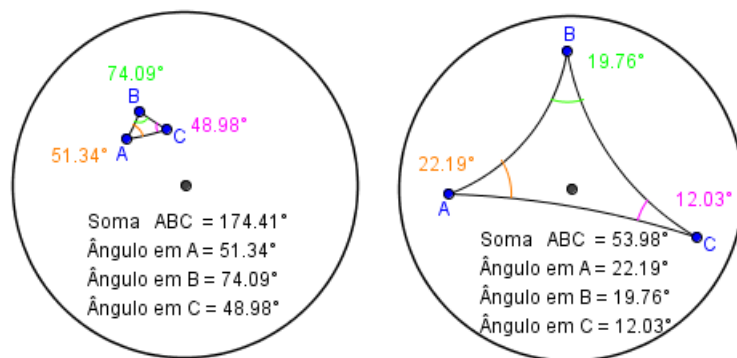


Figura 2.22: Soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico

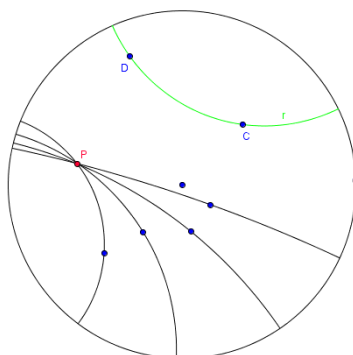


Figura 2.23: Infinitas retas hiperbólicas paralelas a r passando por P

Para calcular a distância hiperbólica entre os pontos A e B é preciso determinar a reta hiperbólica que passa por esses pontos, determinando assim os pontos C e D que estão na circunferência euclidiana que define o disco de Poincaré. Observe que estes pontos existem no plano euclidiano, porém são pontos que estão no **horizonte** do disco de Poincaré, ou seja, estão no “infinito” hiperbólico.

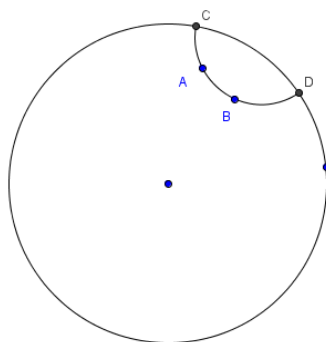


Figura 2.24: Pontos no horizonte hiperbólico

A distância hiperbólica é definida por Poincaré como: $d(A,B) = \left| \ln \left(\frac{AC/AD}{BC/BD} \right) \right|$

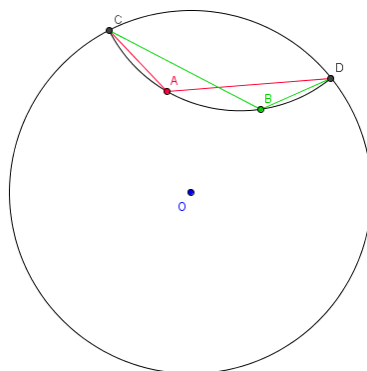


Figura 2.25: Razão cruzada

As medidas AC, BC, AD e BD correspondem as medidas de segmentos euclidianos e a partir dessa definição, podemos fazer as seguintes observações:

- Quando o ponto A tende ao ponto C (se aproxima do horizonte), temos que a distância euclidiana AC tende a zero. Com isso o numerador a razão $\frac{AC/AD}{BC/BD}$ também tende a zero e, portanto, o $\ln \left(\frac{AC/AD}{BC/BD} \right)$ tende ao infinito negativo.

Como a expressão $d(A,B) = \left| \ln \left(\frac{AC/AD}{BC/BD} \right) \right|$ está em módulo, a distância hiperbólica entre os pontos A e B tende ao infinito.

- Quando o ponto B tende ao ponto D (se aproxima do horizonte), temos que a distância euclidiana BD tende a zero. Com isso a razão $\frac{AC/AD}{BC/BD}$ tende ao infinito. Portanto a expressão $d(A,B) = \left| \ln \left(\frac{AC/AD}{BC/BD} \right) \right|$ também tende ao infinito, Ou seja, a distância hiperbólica entre os pontos A e B tende ao infinito.
- Quando o ponto B tende ao ponto A, temos que a medida BC tende a medida AC, analogamente temos que BD tende a AD. Com isso a razão $\frac{AC/AD}{BC/BD}$ tende a 1. Portanto a expressão $d(A,B) = \left| \ln \left(\frac{AC/AD}{BC/BD} \right) \right|$ tende a zero. Ou seja, a distância hiperbólica entre os pontos A e B tende a zero.

Os conteúdos relativos à geometria esférica e geometria hiperbólica que foram tratados neste capítulo, na sua maior parte, serão retomados no capítulo V na forma de sequência de atividades que coloca perguntas a serem respondidas pelos alunos. Nessa sequência vamos assumir a existência das retas hiperbólicas e, também, vamos admitir uma medida para comprimento de segmentos hiperbólicos, mas sem entrar em detalhes. O detalhamento feito aqui neste capítulo trata de fundamentar estes dois aspectos e julgamos que o material aqui apresentado está fora do espírito da nossa proposta de ensino. A proposta tem como objetivo maior a exploração empírica de objetos e propriedades nestes dois novos mundos.

Abordaremos no capítulo V a definição e construção de circunferências ortogonais, bem como apresentaremos como determinar os ângulos e comprimentos de segmentos (geodésicas) hiperbólicos, entre outros.

3 O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA E POSSIBILIDADES DA GEOMETRIA DINÂMICA

Este capítulo trata de questões concernentes ao ensino e aprendizagem da geometria. Inicialmente discutimos aspectos relativos ao significado a ser dado às figuras da geometria e aspectos relativos ao procedimento que caracteriza uma demonstração. Na segunda parte do capítulo apresentamos os ambientes de geometria dinâmica e discutimos as interessantes possibilidades que se tem neles para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

3.1 Sobre o ensino e aprendizagem da Geometria

Os conceitos geométricos deveriam ser parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental. Por meio deles o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento – o pensamento geométrico – que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada o mundo em que vive. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) destacam como aspectos a serem contemplados no ensino da Geometria:

Induzir no aluno o entendimento de aspectos espaciais;
Desenvolver no aluno a intuição e o raciocínio espaciais;
Desenvolver no aluno a capacidade de ler e interpretar argumentos matemáticos, utilizando a Geometria como meio para representar os conceitos e as relações Matemáticas;
(BRASIL, 1998, p. 51).

Mas para atender o desenvolvimento destas habilidades nos alunos é importante ter-se entendimento das dificuldades encontradas por eles no processo de aprendizagem da geometria e que são inerentes à natureza desse conhecimento.

De início, a forma de organização do conhecimento em geometria – é uma teoria axiomático-dedutiva – não é de fácil entendimento para os alunos. No ensino e aprendizagem da geometria é preciso transformar as ideias de reta, triângulo, círculo,..., construídas a partir de experiências empíricas, em conhecimento de natureza geométrica que se insere em uma teoria. Isto

significa que é preciso entender a organização desta teoria através de noções primitivas, axiomas, definições e teoremas.

Para Gravina (2001), é através do ensino que o conhecimento empírico, se transforma em conhecimento geométrico. Segundo a autora:

Do conhecimento empírico ao que é objeto de construção na geometria euclidiana, faz-se necessária uma adaptação, com seus inevitáveis conflitos cognitivos: agora buscam-se argumentações que expliquem certas propriedades como decorrentes de outras, diferentemente das simples verificações e constatações até então satisfatórias. (p.52)

Uma das primeiras dificuldades da situação de aprendizagem é quanto à interpretação do desenho que acompanha uma definição ou um teorema e sua demonstração. Ainda, segundo Gravina (2001) é na articulação adequada de informações do desenho e informações nos enunciados que se constituem mentalmente os objetos geométricos. Para esclarecer essas dificuldades, trazemos a ideia de *conceito figural*, introduzida por Fischbein (1993). O *conceito figural* tem dois componentes: o *componente conceitual* e o *componente figural*. O *componente conceitual* trata do formalismo em linguagem natural e simbólica de um enunciado. O *componente figural* é de natureza visual (forma, posição, tamanho) e se expressa via desenho. Segundo o autor é da natureza da geometria apreender relações existentes entre os objetos geométricos e, para tal, torna-se importante uma adequada simbiose entre os componentes conceitual e figural:

(...) no caso especial de raciocínio geométrico, nós temos que lidar com um tipo especial de objeto mental, o qual possui, ao mesmo tempo, propriedades conceituais e propriedades figurais. No raciocínio geométrico a razão desta profunda simbiose entre restrições simbólicas/ analíticas e propriedades figurais é que nós estamos lidando com um sistema axiomático (...) É fazendo uso de figuras intrinsecamente controladas por restrições conceituais, que o processo de invenção em geometria progride de forma criativa. (p. 144)

Assim, os componentes conceitual e figural são entidades mentais idealizadas. O desenho no papel é uma entidade material que usamos para expressar as idealizações. Os objetos geométricos têm uma perfeição que não acontece no mundo material e a perfeição é dada pelas restrições conceituais que os definem. Em Gravina (2001) tem-se documentado situações em que os

alunos atribuem propriedades ao desenho que fogem totalmente da idealização do objeto. Por exemplo, os alunos dizem que “*círculos tangentes se interceptam em infinitos pontos*” ou que o “*ponto de intersecção de duas retas é menor que o ponto de intersecção de três retas*”. (p.61)

Em outras situações os alunos incorporam ao componente conceitual atributos tomados do particular desenho que é uma instância do componente figural. Alguns exemplos ilustram este comportamento. Os alunos tomam como propriedade do segmento altura de um triângulo o “*ser um segmento no interior do triângulo*”, ou que se referem ao paralelogramo como o “*quadrilátero com dois ângulos agudos e dois obtusos*”. (GRAVINA, 2001)

Outra grande dificuldade no processo de aprendizagem da geometria é o entendimento do significado de uma demonstração. Trata-se de entender a diferença entre constatações de natureza empírica e argumento de natureza dedutiva. É preciso entender que, agora, a explicação da veracidade de uma propriedade geométrica é estabelecida através de argumentação lógico-dedutiva, que se apoia em axiomas e nos teoremas, da mesma forma, já demonstrados. Por exemplo, vejamos a demonstração de que o ponto de intersecção das mediatrizes de um triângulo é o centro da circunferência circunscrita a este triângulo.

Para mostrar que o ponto de intersecção O das mediatrizes de um triângulo determina o centro da circunferência circunscrita a este triângulo, precisamos provar que a distância de O aos vértices do triângulo são iguais.

Tomemos o triângulo ABC . Determinamos as mediatrizes r e t dos segmentos AB e BC , respectivamente.

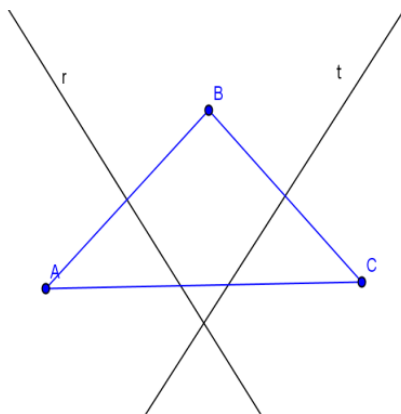


Figura 3.1: Triângulo ABC e retas mediatrizes r e t

Seja O ponto de interseção das retas r e t, e M e N pontos médios dos segmentos AB e BC, respectivamente.

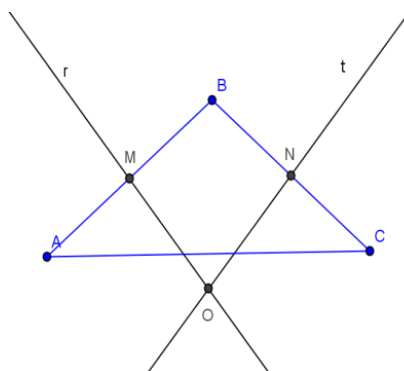


Figura 3.2: Ponto O intersecção das mediatrizes r e t

Para auxiliar a visualização vamos construir os segmentos AO, BO e CO. O objetivo é mostrar que esses segmentos possuem o mesmo comprimento.

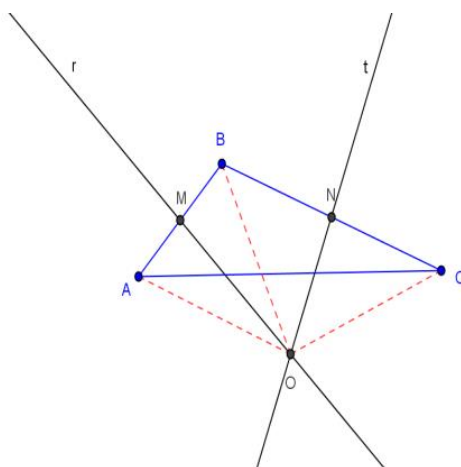


Figura 3.3: Circuncentro O do triângulo ABC

Os triângulos OMB e OMA são congruentes. Podemos provar essa congruência através do caso Lado-Ângulo-Lado. Note que AM e BM são congruentes, pois M é ponto médio de AB. Por construção temos ângulo reto em M tanto no triângulo OMB quanto em OMA. O segmento MO é comum a ambos os triângulos. Então nessa ordem, Lado (AM e MB), ângulo ($\widehat{AMO} \equiv \widehat{OMB} = 90^\circ$) e Lado (MO) os triângulos são congruentes. Com isso temos que $AO \equiv BO$, como queríamos mostrar.

Analogamente, podemos mostrar que $BO \equiv CO$. Concluimos então que $AO \equiv BO \equiv CO$, como queríamos demonstrar.

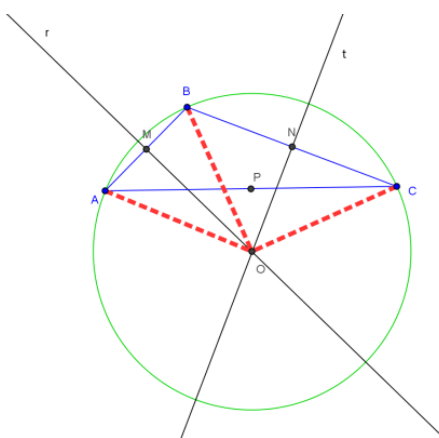


Figura 3.4: Círculo circunscrito ao triângulo ABC

Outro autor que discute os aspectos cognitivos presentes na produção de uma demonstração é Balacheff (1987 apud GRAVINA, 2001). Segundo ele a demonstração tem por objetivo explicar um enunciado, levando à convicção, a partir de uma sequência de argumentos organizados conforme regras determinadas. Um enunciado é conhecido como verdadeiro, ou é deduzido a partir daqueles que o precederam, graças a uma regra de dedução. Assim, a demonstração é um resultado de processo particular de prova que vem validar uma afirmação.

Balacheff (1987 apud GRAVINA, 2001) mapeia em duas categorias as provas produzidas por alunos, e indica a necessidade de evolução cognitiva para o entendimento do significado de uma demonstração para que, assim, os alunos possam produzi-las. A aprendizagem e o entendimento do significado de uma demonstração depende da evolução concomitante nas formas de ação,

formulação e validação. Balacheff (1987 apud GRAVINA, 2001) apresenta quatro tipos de validações, as três primeiras consideradas como provas pragmáticas e a última como prova intelectual.

1. Empirismo ingênuo, a validação é feita, pela verificação ou observação de poucos casos, sem haver questionamento quanto às particularidades; é uma das primeiras formas do processo de generalização, uma validação rudimentar que resiste ao longo processo de desenvolvimento do pensamento geométrico.

2. Experiência crucial, a validação ocorre por meio de um exemplo com certas características, onde o aluno verifica as propriedades em um caso particular, de modo a concluir uma generalização.

3. Exemplo genérico, a validação ocorre ainda fazendo uso de um representante particular do objeto geométrico, mas há uma explicitação das razões que validam uma propriedade que contém uma generalidade.

4. Experiência mental, a validação ocorre através de deduções lógicas baseadas em propriedades e não mais através de situações particulares.

Para esse autor, as provas pragmáticas e intelectuais se encontram em polos opostos de uma linha de raciocínio. De um lado, as provas pragmáticas estão envolvidas em um raciocinar para a prática; enquanto que de outro lado, as provas intelectuais abarcam um raciocinar voltado para a construção de uma rede de significados. Podemos afirmar que as primeiras conectam-se à problemática da eficácia; e as segundas, à problemática do rigor.

A necessidade do estudo de demonstrações na escola é enfatizado por Polya (1995, p.116):

De fato, se o aluno não tiver aprendido este ou aquele fato geométrico específico, não terá perdido muito. Mas se ele não houver familiarizado com as demonstrações geométricas, terá deixado escapar os melhores e mais simples exemplos das verdadeiras provas e perdido a melhor oportunidade de adquirir a ideia de raciocínio rigoroso. Sem esta ideia, faltar-lhe-á o verdadeiro critério para comparar argumentos de todos os tipos que se lhe apresentam na moderna vida cotidiana. Em suma, se a educação pretender inculcar no estudante as noções de

prova intuitiva e do raciocínio lógico, ela deverá reservar um lugar para as demonstrações geométricas.

A teoria de Van Hiele sugere que os currículos de Geometria das escolas devem enfatizar a explicação e justificação das ideias pelos alunos, visando à gradual compreensão da limitação da justificação empírica, incentivando-os ao uso da demonstração. Van Hiele (GRAVINA, 2001) estabelece cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico:

Nível zero (da visualização): as crianças classificam e nomeiam formas geométricas, ao abstrair dos objetos aspectos de natureza ainda perceptiva; reconhecem quadrados, retângulos, losangos, mas sem a eles atribuir propriedades.

Nível um (da análise): propriedades são apreendidas das formas geométricas e com elas se identificam, mas não são estabelecidas relações inferenciais entre as propriedades, e definições ainda não se apresentam; por exemplo, através de manipulações de figuras (recortes, dobraduras, medidas) um retângulo passa a ser entendido como uma forma que tem quatro ângulos retos, diagonais congruentes e lados opostos congruentes, mas ainda não se fazem presentes relações do tipo “se quatro ângulos retos, então necessariamente lados opostos congruentes”.

Nível dois (da dedução): nesse nível o aluno passa a entender o “definir objetos geométricos” e a hierarquizar propriedades, mas ainda não possui habilidades para produzir suas próprias demonstrações. Para Gravina (2001) é nesse *nível*, o da *dedução informal*, que relações de implicação entre propriedades começam a ser estabelecidas, mas ainda desprovidas de argumentos dedutivos que expliquem o porquê destas relações.

Nível três (da dedução formal): constitui-se o pensamento geométrico de natureza dedutiva, quando então axiomas e teoremas se integram no modelo teórico que forma a geometria euclidiana; é neste nível que se dá o entendimento do significado de uma demonstração e que se torna possível a produção de demonstrações.

Nível quatro (o do rigor): culminância do pensamento geométrico – quando passa a transitar por teorias axiomatizadas –, as geometrias não euclidianas, que não mais dependem de experiências e intuições sobre o mundo sensível imediato.

O modelo de Van Hiele sugere que os alunos progredem segundo essa sequência, de níveis de compreensão de conceitos geométricos. O processo de ensino deve auxiliar na transição gradual dos níveis inferiores de pensamento geométrico, para os superiores, e, somente após, incluir as demonstrações na Geometria. Cabe ressaltar que o progresso de um nível para o seguinte se dá por meio da vivência de atividades adequadas. Portanto, a elevação de níveis depende mais de aprendizagem adequada do que de idade ou maturação. Assim, o papel do professor nesse processo é fundamental, pois cabe a ele organizar situações para que o aluno possa “progredir de nível”.

Respeitar esses níveis seria uma maneira de atenuar as dificuldades do aluno em Geometria.

Outro pesquisador que trata dos diferentes papéis da demonstração é De Villiers (2000apud GRAVINA, 2001). O autor afirma que as demonstrações são uma parte indispensável do conhecimento matemático, e que o seu valor está muito além de mera verificação de resultados. Ainda afirma que as demonstrações também são muito valiosas por proporcionarem novas compreensões, conduzirem as novas descobertas ou ajudarem à sistematização.

Para o autor, algumas funções da demonstração são: a de explicação, pois proporciona compreensão sobre o que é verdade; a da descoberta, que sintetiza a descoberta ou invenção de novos resultados; a da comunicação, acarretando na negociação do significado; a do desafio intelectual, fase de realização pessoal por ter construído uma demonstração; e a da sistematização, consiste na organização de vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas. (VILLIERS, 2000apud HAJNAL, 2007)

Villiers (2000 apud GRAVINA, 2001) afirma que no início do trabalho com demonstrações, não se deve utilizar a geometria dinâmica para trabalhar a demonstração como meio de verificação, pois será mais significativo para os alunos iniciar o estudo dessas com a função de explicação e descoberta. Mas ele alerta que os alunos precisam ser iniciados o quanto antes nas atividades de resolução de problemas, possibilitando-os situações de sala de aula nos quais os mesmos possam explorar, conjecturar, refutar, reformular, explicar, etc. O autor, ainda, ressalta a utilização dos softwares de geometria dinâmica como instrumento adequado para verificação de conjecturas verdadeiras e construção de contra exemplos, incentivando as ações descritas anteriormente.

Vemos que no processo de aprendizagem da geometria um dos aspectos centrais é a passagem do empírico para o dedutivo. De acordo com a teoria de Van Hiele, podemos dizer que os níveis elementares da visualização e da análise preparam para os níveis mais avançados da dedução informal e dedução formal. Na proposta de ensino que vamos apresentar, em se tratando de geometrias não-euclidianas na escola, nosso objetivo é o desenvolvimento de habilidades que estão nos níveis da visualização e da análise. As reflexões teóricas que foram feitas nessa seção servem para chamar a atenção sobre a complexidade da transição do conhecimento empírico para o conhecimento dedutivo. Discutimos desde o tratamento da figura até a questão dos diferentes estágios para produzir uma demonstração. No que diz respeito à proposta didática a ser apresentada adiante, parte dessas reflexões serão levadas em consideração. Nessa seção é apresentada uma discussão teórica mais abrangente do que aquela que vai subsidiar a nossa proposta didática. Isto é intencional pois nos esclarece sobre a complexidade do processo de aprendizagem de demonstração e também mostra, neste contexto, como se insere a proposta didática a ser apresentada, a saber, no nível de visualização e análise proposto por Van Hiele. Estas reflexões nos ajudaram a elencar e organizar as diferentes perguntas elaboradas na forma de sequência de atividades, a ser proposta aos alunos.

3.2 Geometria Dinâmica

A utilização dos ambientes de geometria dinâmica² e as interfaces de trabalho por eles disponibilizados propiciam a manipulação de *objetos concretos-abstratos* na tela do computador. Essa manipulação pode preparar o aluno na sua ascensão de patamar de conhecimento, de empírico para aquele inserido no modelo teórico que caracteriza uma geometria.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998), direcionados ao ensino da Matemática, já incluem como um dos objetivos do ensino básico a necessidade dos alunos serem capazes de “saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos” (p. 32). Nesse sentido, apontam algumas possibilidades de uso das novas tecnologias em salas de aula. Segundo os PCN, é fundamental que o aluno possa criar e expor seus pensamentos e, portanto, que o professor proporcione condições e concretize situações favoráveis. A expectativa é que os alunos possam materializar seus pensamentos e ideias, assim construindo um ambiente de manipulação, investigação e formação de hipóteses, tornando-os construtores de seus próprios conceitos.

Especificamente em relação ao ensino e aprendizagem de Geometria, o uso da tecnologia propicia ao aluno a possibilidade de manipular, com o auxílio do mouse, os objetos representados na tela do computador. Essa manipulação é caracterizada essencialmente pela possibilidade de movimentação ou deslocamento de elementos constitutivos dessas representações - o arrastar. Segundo Henriques (1999) o arrastar abre novas possibilidades para o ensino e aprendizagem de Geometria, baseado na exploração, possibilita que seus conceitos básicos se tornem mais atrativos e acessíveis. Zulatto (2002) afirma que o arrastar proporciona a simulação de diferentes casos da figura, como se o aluno estivesse verificando “todos” os casos possíveis de uma mesma família de configuração.

²O termo “Dynamic Geometry” é marca registrada da Key Curriculum Press, empresa responsável pela comercialização do software de geometria dinâmica denominado Geometer’s Sketchpad. São denominados softwares de geometria dinâmica todos aqueles que permitem o manuseio na tela via mouse ou teclado dos elementos geométricos construídos pelo usuário, além de manter as relações de construção existentes entre os objetos base da figura.

No entender de Schumann & Green (1994),

O arrastar é um pré-requisito essencial para atividades de construção interativa, que vão além de pura simulação de construção com compasso, régua e esquadro. Com o cursor, nós podemos mover livremente os objetos básicos de uma construção (...) e, deste modo, transformar a figura. (p.33)

Isso torna possível a “abertura de uma nova grande gama de aplicações e investigações educacionais” (HENRIQUES, 1999, p.13), o que permite a descoberta e redescoberta de conceitos e propriedades relativos à Geometria (BARBOSA E LOURENÇO, 1998).

Um estudo feito por Olivero et al (1998) mostra que o modo arrastar em um software de geometria dinâmica possui três modalidades diferentes para o desenvolvimento de atividades: a) arrastar sem um objetivo específico; b) o arrastar para identificar um lugar geométrico; c) o arrastar para testar hipóteses.

Logo, os *softwares* de geometria dinâmica não oferecem apenas a possibilidade de efetuar qualquer construção geométrica de modo mais rápido e preciso do que no ambiente papel e lápis, mas também a possibilidade de movimentar e modificar os desenhos, e com esta característica eles permitem uma visualização e identificação de propriedades geométricas.

Entre os diversos *softwares* de geometria dinâmica podemos destacar o *software* GeoGebra, como uma alternativa interessante. É um *software* livre, pode ser instalado de forma gratuita em qualquer computador. Este *software* foi desenvolvido por Markus Hohenwarter. Segundo Araújo (2008, p. 43) ele criou e desenvolveu esse *software* com o objetivo de obter um “instrumento adequado ao ensino da Matemática, combinando procedimentos geométricos e algébricos”.

O GeoGebra é um *software* matemático que junta Geometria, Álgebra e Cálculo. Por um lado, por ser um programa de geometria dinâmica, podemos realizar construções utilizando pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas bem como funções e alterar todos esses objetos dinamicamente após a construção estar finalizada. Por outro lado, podem ser incluídas equações e coordenadas diretamente. Destarte, o GeoGebra é capaz de lidar com

variáveis para números, vetores e pontos, derivar e integrar funções e ainda oferece comandos para encontrar *raízes* e *pontos extremos* de uma função. Deste modo, o programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria, com outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo. Assim tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica como podemos visualizar no exemplo da circunferência abaixo:

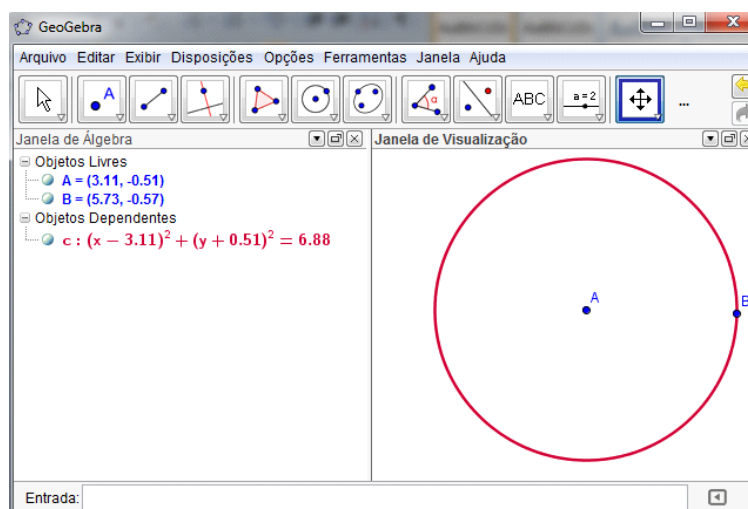


Figura 3.5: Interface do software GeoGebra

O *software* GeoGebra oferece o recurso da “régua e o compasso eletrônicos” e o processo de construção das figuras é feito mediante o uso de menus em linguagem natural da geometria, por exemplo – ponto, reta passando por dois pontos, retas paralelas, retas perpendiculares, círculos, transformações geométricas.

O GeoGebra, assim como outros softwares similares, tem o interessante recurso de “estabilidade sob ação de movimento” (GRAVINA et al, 2012, p.39). Ou seja, a “figura em movimento” guarda as regularidades que são importantes sob o ponto de vista da geometria. São figuras que não se deformam, e estas é que são as figuras da geometria dinâmica. A autora ilustra essa característica com dois exemplos.

No primeiro exemplo temos, na primeira tela, dois quadriláteros que identificamos como “quadrados”.

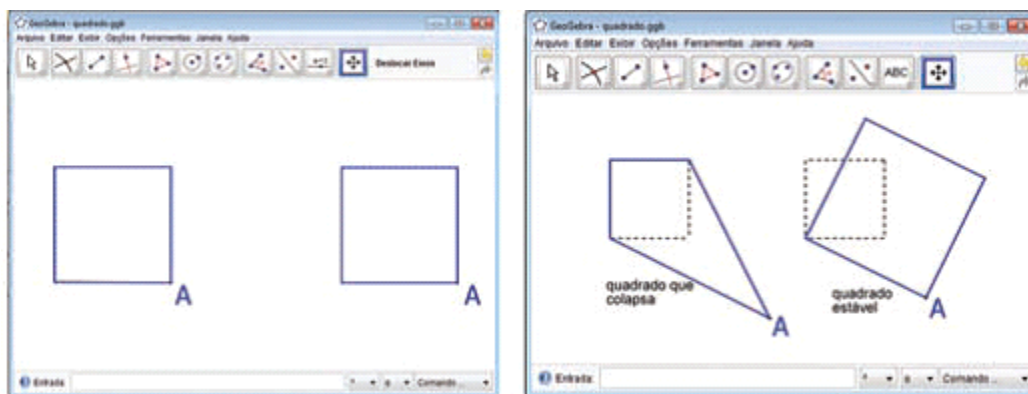


Figura 3.6: Quadrados à esquerda e movimento nos quadrados, à direita

Ao movimentarmos o vértice A , temos na segunda tela o efeito resultante (o desenho pontilhado indica a situação inicial dos quadriláteros): o primeiro quadrado se deforma, pois o movimento não preserva as propriedades “quatro ângulos retos” e “quatro lados congruentes entre si”; já o segundo quadrado muda de tamanho e posição, mas mantém sempre a mesma forma.

A razão que explica os diferentes efeitos do movimento aplicado ao ponto A é que o primeiro quadrado corresponde a desenho do tipo “a mão livre”, tratando-se de construção essencialmente visual, e assim, sob ação de movimento, se deforma. Já o segundo quadrado foi construído com controle geométrico – na construção foram explicitadas as propriedades geométricas do quadrado, via os menus disponibilizados no GeoGebra. Esse é um quadrado da geometria dinâmica – sob movimento do vértice A , mantém a forma.

O segundo exemplo, conforme figura abaixo (Fig. 3.7) iniciamos construindo o triângulo ABC ; depois construímos as retas r e s , as mediatrizes dos lados AB e AC do triângulo (lembramos que a mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento e que passa pelo seu ponto médio); marcamos o ponto O de intersecção das duas retas e finalizamos com a construção do círculo de centro O e que passa pelo ponto A .

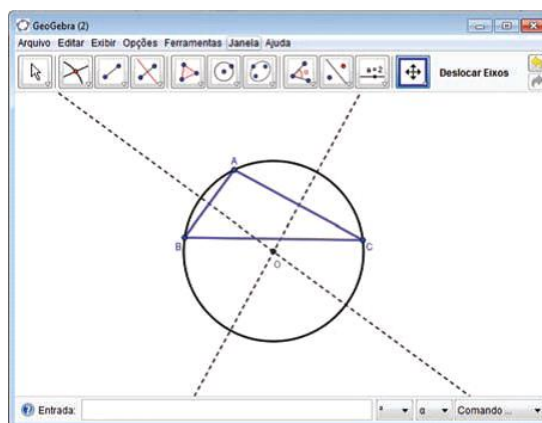


Figura 3.7: Teorema do círculo circunscrito

Como resultado final, vemos um triângulo e um círculo que passa pelos três vértices do triângulo. O procedimento de construção nos garante que o resultado obtido na tela do GeoGebra (usualmente reconhecido como “círculo circunscrevendo um triângulo”) é também uma figura da geometria dinâmica: quando aplicamos movimento aos vértices do triângulo, a figura muda de tamanho e posição, mas sempre vamos ver um “círculo circunscrevendo um triângulo”.

Os dois exemplos apresentados acima, além de terem o propósito de esclarecer como funcionam as figuras da geometria dinâmica, também servem para indicar o quanto o processo de construção dessas figuras pode ser um recurso didático que prepara os alunos para iniciarem suas primeiras argumentações dedutivas (GRAVINA et al, 2012, p. 42).

Pelo exposto, podemos inferir que ambientes informatizados, particularmente os de geometria dinâmica, são ferramentas de grande potencial no processo educativo matemático, pois permitem uma construção geométrica seguida da movimentação de seus elementos, sem que as construções (propriedades geométricas) sejam desrespeitadas. Com o intuito de utilizar o dinamismo do software GeoGebra no estudo da geometria hiperbólica, mais precisamente com o modelo do Disco de Poincaré, optamos por realizar construções de ferramentas que possibilitam a construção de objetos geométricos hiperbólicos (retas, círculo, segmentos, entre outros). Dessa forma, determinamos um “menu hiperbólico”, onde é possível construir objetos hiperbólicos de forma simples, facilitando o processo de interação do aluno com essa nova geometria.

Para descrever o processo de construção de uma nova ferramenta do ambiente GeoGebra, descreveremos os passos de construção da ferramenta *h-reta* (reta hiperbólica). Porém, primeiro vamos construir a ferramenta que determina o Disco. Este passo é importante para que o software reconheça o Disco como sendo a circunferência em que realizaremos as construções das demais ferramentas hiperbólicas.

Vamos aos passos de construção:

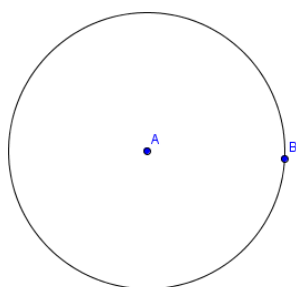



Figura 3.8: Círculo de centro em A passando por B

- Na barra de ferramentas clique na opção *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos* , e construa uma circunferência c de centro A passando por B

Para que a visualização do Disco fique diferente das circunferências euclidianas, editaremos a cor, o estilo e a espessura da circunferência.

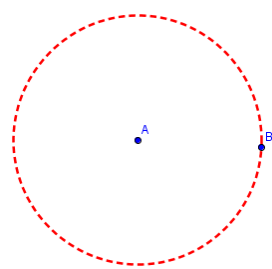




Figura 3.9: Circunferência editada

- Clicando com o botão direito em cima da circunferência, selecione a opção  *Propriedades ...*.
- Altere a cor, o estilo (para pontilhado) e a espessura da circunferência para que fique com a aparência da figura ao lado.

Agora que já definimos o Disco, vamos construir a sua ferramenta no Geogebra:

- Clique em *Ferramentas* e selecione a opção *Criar uma Nova Ferramenta* , que abrirá a janela abaixo.

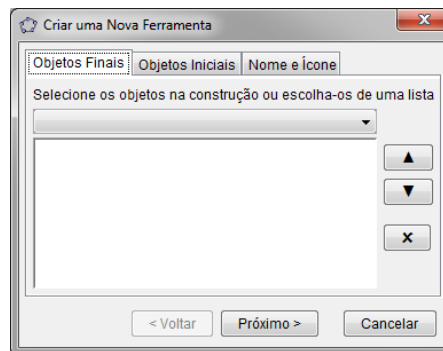


Figura 3.10: Janela para criar nova ferramenta

- Na opção *Objetos Finais* selecione a circunferência construída.

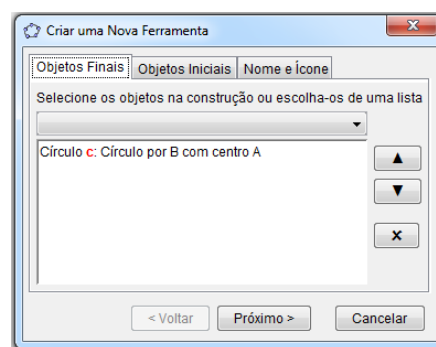


Figura 3.11: Janela Objetos Finais

- Na opção *Objetos Iniciais* selecione os pontos A e B que definem a circunferência c.

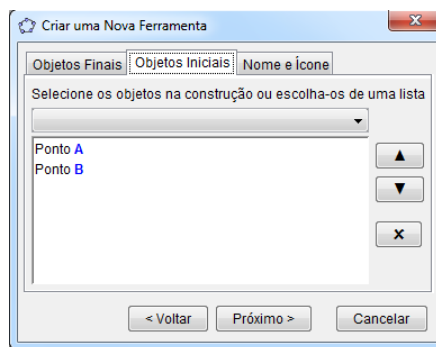


Figura 3.12: Janela Objetos Iniciais

- Em *Nome e Ícone* vamos determinar o nome da ferramenta (*Disco*), o nome do comando (*Disco*) e a Ajuda da ferramenta (*Disco dado centro e um dos seus pontos do horizonte*). No item Ajuda da ferramenta é importante dar os passos de seleção para a construção do Disco.

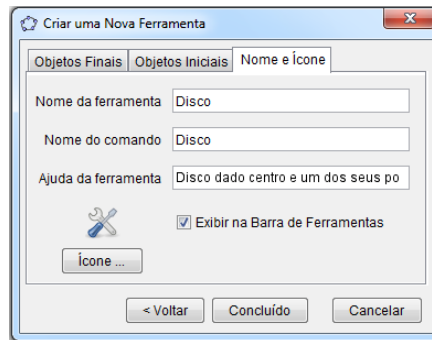



Figura 3.13: Janela Nome e Ícone

- Para seleccionar um ícone para ferramenta, basta criar uma imagem de formato suportado pelo programa (JPG, PNG, GIF e BMP). No nosso

caso seleccionamos a imagem .

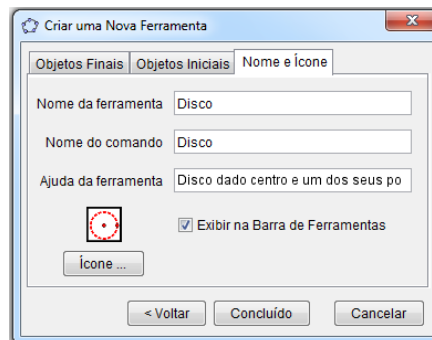


Figura 3.14: Janela com ícone alterado

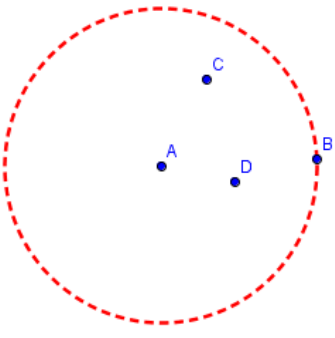


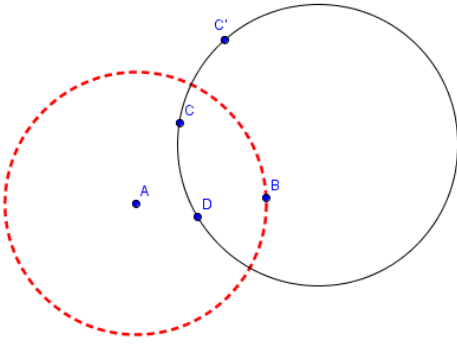


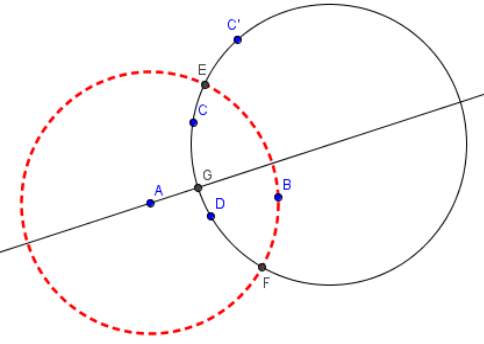

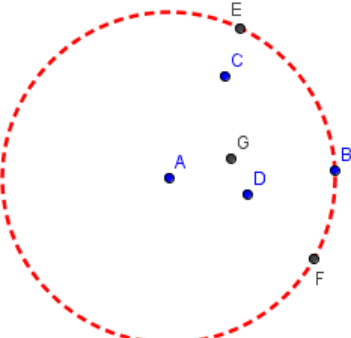

- Clique em *Concluído* que a opção Disco aparecerá na barra de ferramentas.

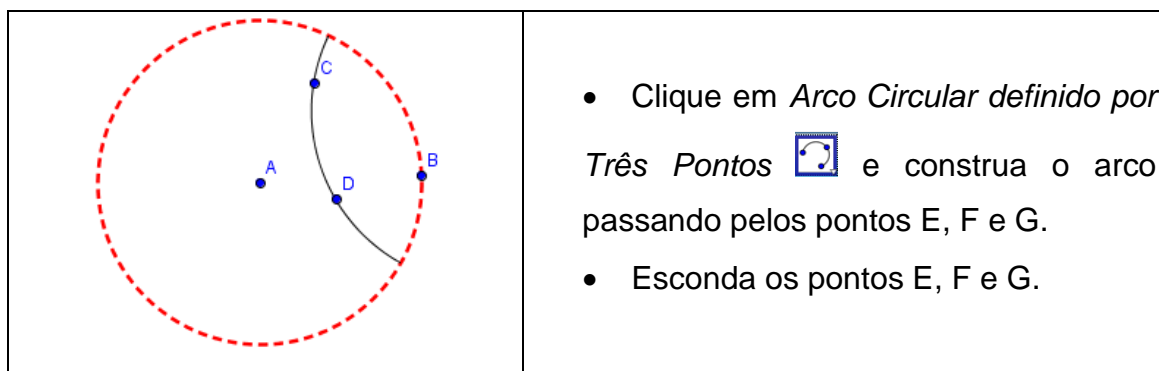


Figura 3.15: Barra de ferramentas com ícone Disco

A partir do conceito de que a reta hiperbólica é um arco ortogonal ao Disco, vamos iniciar a construção da ferramenta h-reta definindo uma circunferência ortogonal ao Disco.

Vamos aos passos de construção:

	<ul style="list-style-type: none"> • Na barra de ferramentas clique na opção <i>Disco</i> , e construa o Disco de centro A passando por B • Utilizando a ferramenta <i>Novo Ponto</i> , crie os ponto C e D internos ao Disco.
	<ul style="list-style-type: none"> • Utilize a ferramenta <i>Reflexão em Relação a um Círculo (Inversão)</i> , e defina o inverso do ponto C (C') em relação ao Disco. • Após clique na opção <i>Círculo definido por Três Pontos</i> , e construa o círculo passando por C, D e C'.
	<ul style="list-style-type: none"> • Para a construção do arco que definirá a h-reta vamos construir os pontos (E e F) de intersecção das duas circunferências. • Após vá em <i>Mediatriz</i> , e selecione os pontos E e F. • Determine G, o ponto de intersecção da reta mediatriz com a circunferência ortogonal construída.
	<ul style="list-style-type: none"> • Com o botão direito do mouse, clique no ponto C', na circunferência ortogonal e na reta mediatriz e esconda esses objetos desmarcando a seleção da opção <i>Exibir Objeto</i> . • Utilizaremos os pontos E, F e G para a construção do arco que definirá a h-reta.




- Clique em *Arco Circular definido por Três Pontos*  e construa o arco passando pelos pontos E, F e G.
- Esconda os pontos E, F e G.

Tabela1: construção da ferramenta h-reta

Agora que já definimos a h-reta, vamos construir a sua ferramenta no Geogebra utilizando o mesmo processo que realizamos para construir a ferramenta *Disco*. Determine como objeto final o arco construído, como objetos iniciais o Disco e os pontos C e D.

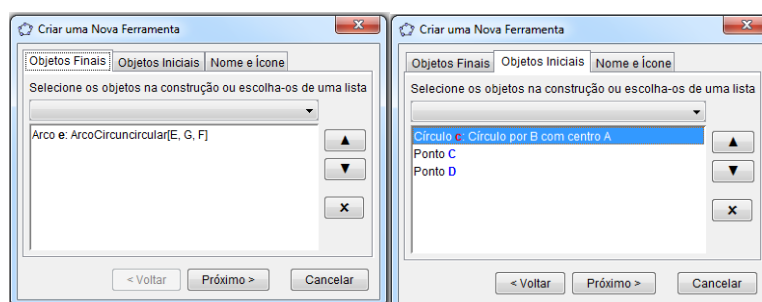


Figura 3.16: Janela Objetos Finais e Objetos Iniciais da ferramenta h-reta

O processo de construção de ferramentas no software GeoGebra pode servir para a determinação de “caixas pretas”, ou seja, construções prontas onde o aluno é instigado a descobrir o seu processo de construção. A utilização do objeto caixa preta faz com que o aluno observe regularidades durante a movimentação do desenho e, através dessas observações, produza suas próprias construções, na tentativa de reproduzir este objeto.

No próximo capítulo apresentaremos uma análise de alguns trabalhos que tratam do ensino de geometrias não-euclidianas na escola e na formação de professores.

4 GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NA ESCOLA

Poucos estudos tratando do ensino de geometrias não-euclidianas na escola, em nível nacional, conseguimos localizar. No que segue fazemos um recorte dessas pesquisas.

Na dissertação *intitulada Geometrias Não-euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental*, Martos (2002) apresenta uma experiência didática sobre geometria esférica. Por meio da interdisciplinaridade, a autora procurou relacionar conceitos geométricos com conceitos geográficos. Para a autora, essa relação entre “os conceitos geométricos esféricos com conceitos geográficos, possibilitaria devolver um aprendizado significativo” (MARTOS, 2002, p. 85).

As atividades propostas foram apresentadas em forma de situações-problema em fichas de trabalho e com a utilização de materiais concretos, como a esfera de isopor. Estas fichas continham descrições das atividades que seriam desenvolvidas, inclusive duas delas, baseadas na história de Pole, personagem do livro “O pequeno príncipe” de Saint Exupéry. Nessa atividade, a autora explora o planeta onde vive Pole fazendo perguntas do tipo: a) qual é o caminho mais curto entre a casa de Pole e a sua amada rosa? B) uma linha reta pode ser prolongada infinitamente no planeta de Pole?

Essas perguntas exploram o conceito de geodésica e de superfície finita, respectivamente, que é um dos focos principais da pesquisa, ou seja, a identificação de uma circunferência máxima como análoga da reta no plano. Em uma das atividades desenvolvidas, de comparação de geodésicas, os alunos puderam observar como é uma reta na superfície esférica pingando gotas de água no topo de uma esfera.

Em suas considerações finais, nos diz ela:

Os alunos participantes da pesquisa tiveram contato com um tipo diferente da geometria com que estavam acostumados a trabalhar: a Geometria Esférica. O trabalho pedagógico com esse outro modelo de Geometria fez com que os alunos pudessem vislumbrar sua inserção no planeta em que vivem, estabelecendo relações com conceitos geográficos através da

Matemática. Os conceitos da Geometria esférica, abordados por meio de fichas de trabalho, uso de materiais manipulativos e discussão entre grupos, permitiram uma aprendizagem com significado. (MARTOS, 2002, p. 138)

Na dissertação, *As geometrias não-euclidianas em cursos de licenciatura: algumas experiências*, Bonete (2000) tem por objetivo geral elaborar uma proposta para o ensino das Geometrias não Euclidianas e, por objetivo específico, desenvolver uma proposta para levar ao conhecimento do aluno, os aspectos intuitivo, experimental, teórico e dedutivo das Geometrias Euclidianas e não Euclidianas.

A autora empregou como metodologia para o ensino dessas geometrias, três experiências em diferentes salas de aula do curso de Licenciatura de Matemática. Para tanto desenvolveu uma proposta didática com questões a respeito da soma dos ângulos internos de um triângulo.

A autora considera que o estudo das Geometrias não Euclidianas deve partir da exploração dos conceitos da Geometria de Euclides, pois o desenvolvimento daquelas geometrias ocorreu mediante as especulações em torno do Quinto Postulado euclidiano.

Bonete, para auxiliar os alunos nas construções das atividades propostas, optou pelo uso de material concreto como forma de representação de superfícies planas, esféricas e hiperbólicas. Materiais como fitas adesivas, esfera de isopor e um chuveiro.

Bonete nas considerações finais afirma que

Ao realizar três experiências em diferentes salas de aula, constatou-se que o ensino das geometrias não-euclidianas nestes cursos, pode proporcionar aos futuros professores, mudanças nas concepções de verdade Matemática e espaço, uma visão mais ampla dos conhecimentos geométricos euclidiano e não-euclidiano e uma compreensão do significado filosófico desses conhecimentos. (BONETE, 2000, p.229)

Pataki (2003) no seu trabalho de mestrado *Geometria Esférica para a Formação de Professores: Uma proposta interdisciplinar propõe* levar aos professores de matemática um trabalho interdisciplinar, fazendo interconexões entre a Geometria e a Geografia. Para a autora esse trabalho proporciona

“reflexões e questionamentos aos professores, possibilitando a cumplicidade entre o aprender esses conhecimentos e os diferentes olhares que teremos do nosso dia-a-dia”. (PATAKI, 2003, p. 18)

Para a execução da proposta interdisciplinar Pataki elaborou uma seqüência de ensino constituída de uma situação-problema e oito atividades. A situação-problema detonadora foi:

O comandante de um navio recebeu a seguinte mensagem de um helicóptero: localizados náufragos numa ilha de coordenadas $\lambda = 68^{\circ} 40'N$ e $\lambda = 013^{\circ}40'E$. Naquele momento, a posição do navio era $\lambda = 42^{\circ}10'N$ e $\lambda = 051^{\circ}20'W$. Que distância o navio deverá percorrer para chegar à ilha? (PATAKI, 2003, p.81)

As atividades propostas foram formuladas de tal modo que permitissem, aos alunos, buscar a solução da situação-problema acima. Para exemplificar, trazemos algumas perguntas: a) *Para resgatar os náufragos você acha que o percurso do navio deverá ser em linha reta? Justifique;* b) *Em Geometria, qual a figura que você usaria para modelar esse problema? E essa figura pode ser uma figura plana?;* c) *Como você desenharia a situação do problema?*

Estas atividades foram desenvolvidas utilizando materiais concretos como bolas de isopor, canetas coloridas e o globo terrestre. Para resolvê-las os alunos, em duplas, criavam hipóteses, verificavam no material concreto, discutiam, reformulavam hipóteses diante de situações em que precisavam manipular conceitos e realidades que já conheciam para chegar a saberes até então ignorados.

A autora concluiu que:

Esta dissertação mostrou que é possível o professor introduzir os conteúdos abordados, em seu plano de aula, articulando teoria e prática, ensino e aprendizagem, interdisciplinaridade e contextualização. (PATAKI, 2003, p. 176)

O trabalho de CABARITI (2004), intitulado Geometria Hiperbólica: uma proposta didática em ambiente informatizado, objetiva a implementação de propostas que visam à introdução de modelos não euclidianos, com o auxílio de uma ferramenta computacional, no caso o software Cabri Géomètre, em

cursos de formação de professores de Matemática. A autora propõe atividades que foram classificadas em atividades de familiarização, de exploração e de construção (p. 58). As atividades de familiarização são direcionadas para a utilização de ferramentas básicas do menu hiperbólico, como podemos ver nas proposições, da autora, abaixo:

1) Utilize a ferramenta Ponto para criar dois pontos distintos A e B. Utilize a ferramenta H-droite para criar a reta hiperbólica que passa pelos pontos A e B.. (CABARITI 2004, p. 61)

Na sequência são aplicadas atividades que visam a exploração da Geometria Hiperbólica no modelo de disco de Poincaré. O objetivo dessa atividade é a discussão da validade (ou não) de alguns teoremas da Geometria Euclidiana na Geometria Hiperbólica, como por exemplo:

Abaixo estão enunciados alguns teoremas da Geometria Euclidiana. Utilizando o Cabri géomètre, verifique quais deles também são válidos na Geometria Hiperbólica, justificando sempre sua resposta.

- 1. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .*
- 2. Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.*
- 3. Os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60° .*
- 4. Teorema de Pitágoras: em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. (CABARITI 2004, p. 62)*

Na última sessão de atividades a autora incita a construção de objetos hiperbólicos no modelo de disco de Poincaré.

a) reta passando por um ponto

Seja A um ponto qualquer no interior do horizonte h. Construa uma reta hiperbólica, que indicaremos por reta-h, passando por A. Para isso, considere um ponto auxiliar P no horizonte h. A reta-h procurada deve passar por A e P. Construa a mediatriz m de AP e, em seguida, obtenha a intersecção C de m com a reta tangente ao horizonte que passa por P. Este ponto C é o centro da circunferência ortogonal à h passando por A.

Obtenha o lugar geométrico da circunferência construída quando P descreve h. O que você pode observar? Faça uma conjectura sobre a construção de circunferências ortogonais a uma circunferência dada.

b) Reta hiperbólica definida por dois pontos distintos

Dados dois pontos distintos X e Y interiores ao horizonte, defina uma macro-construção da reta- h que passe pelos dois pontos dados no modelo do disco de Poincaré.

Você sentiu alguma dificuldade em fazer essa construção? Se a resposta for positiva, explique o porquê. (CABARITI 2004, p. 68)

A autora ressalta a importância de um ambiente dinâmico que favoreça a compreensão dos conceitos e relações. Aponta, também, a insegurança dos alunos pesquisados na construção de objetos hiperbólicos, por não serem intuitivos.

O trabalho desenvolvido por Cabariti tem caráter empírico. Com o uso de ferramenta computacional é possível explorar propriedades da geometria hiperbólica sem que haja preocupação, em um primeiro momento, com as suas demonstrações.

No trabalho *Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de matemática: o que dizem os formadores*. Nesta Dissertação, CAVICHIOLO (2011) documenta uma investigação com professores de um curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná (UFPR), no qual as geometrias não- euclidianas fazem parte da formação de futuros professores de Matemática para a escola básica.

Primeiramente foi elaborado um roteiro para as entrevistas com os cinco professores das disciplinas: Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas; Matemática no Ensino Fundamental; Matemática no Ensino Médio; Geometria no Ensino e Metodologia do Ensino da Matemática. As perguntas formuladas buscariam responder o que esses professores dizem sobre as razões pelas quais as Geometrias não Euclidianas estão inclusas na formação do futuro professor de Matemática.

Após a análise das entrevistas com os cinco professores que participaram da pesquisa a autora constatou a convergência de ideias sobre a relevância desse conhecimento na Licenciatura de Matemática e concluiu que

Nos estudos apresentados, encontram-se vários argumentos que apontam para a relevância de incorporar o estudo das Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor

de matemática para a escola básica. (CAVICHIOLO, 2011, p. 33)

Em relação às pesquisas apresentadas neste estudo, Cavichiolo identificou que o estudo das Geometrias não Euclidianas não está amplamente incorporado na formação inicial do professor de Matemática. Percebeu que

[...] em grande parte, dos cursos de Licenciatura em Matemática, essas geometrias não são contempladas nas suas propostas curriculares e, quando são, nem sempre são exploradas com vistas à preparação do futuro professor que para estes possam ensiná-las na escola básica. (CAVICHIOLO, 2011, p. 33)

Com fundamento nas razões identificadas, tanto nas pesquisas como nas entrevistas, a autora concluiu que o estudo das Geometrias não Euclidianas na Licenciatura de Matemática contribuirá para a ampliação e aprofundamento do conhecimento em Geometria, mas, sobretudo, da própria Matemática. Prossegue a autora:

[...] os objetivos propostos por esta pesquisa foram alcançados, uma vez que foi possível identificar e descrever razões para a inclusão das Geometrias não Euclidianas na formação dos licenciandos, apresentando-as com a riqueza de significados pretendida. Apoiada na literatura e nos resultados obtidos nas entrevistas, tais razões foram agrupadas em duas categorias: dimensão histórico-epistemológica e didático-conceitual. (CAVICHIOLO, 2011, p. 129)

Essas pesquisas apontam para a importância de incorporar as geometrias não Euclidianas no currículo da Matemática escolar, salientando que os futuros professores devam ser preparados para seu ensino na escola. Alertam para a relevância da formação inicial do professor de Matemática como o ponto de partida para a efetivação de propostas que visam incluir as Geometrias não Euclidianas na Educação Básica. Essa relevância se justifica

[...] quando se pretende desenvolver um ensino e aprendizagem da Geometria escolar que proporciona aos estudantes um conhecimento mais amplo sobre as possibilidades de interpretação do espaço, já que, há mais de um século, sabe-se que a Geometria de Euclides não é a única forma de interpretá-lo e compreendê-lo. (Cavichiolo, 2011, p. 35)

Quanto à geometria hiperbólica é importante salientar que o seu desenvolvimento não surge da necessidade de interpretar o mundo, mas como

consequência de uma inquietação puramente matemático, a saber, aquela de não conseguir provar o quinto postulado de Euclides. Não havia dúvida, por parte dos matemáticos, que a geometria euclidiana era o melhor modelo para interpretar o mundo, daí os impasses que tiveram que ser superados ao longo da história do desenvolvimento das ideias em geometria. (Aleksandrov,1976)

Acreditamos que somente o uso de materiais concretos, para o estudo das geometrias não euclidianas, limita a experiência dos sujeitos participantes, pois com a utilização de softwares de geometria dinâmica é possível realizar a construção e a visualização de objetos geométricos respeitando suas propriedades, aprofundando, assim, a conexão entre teoria e prática. Fazer essa conexão é intenção da nossa proposta, na qual a utilização de ferramentas computacionais permite uma construção geométrica seguida da movimentação de seus elementos, sem que as construções sejam desrespeitadas.

Dos trabalhos analisados somente um se preocupou com o potencial da geometria dinâmica para a aprendizagem das ideias que estão na geometria hiperbólica. Na proposta que vamos apresentar no próximo capítulo, tiramos proveito deste potencial para trabalhar tanto a geometria hiperbólica quanto a esférica.

5 UMA PROPOSTA DE EXPLORAÇÃO DE GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS EM MICRO MUNDOS DINÂMICOS

Neste capítulo vamos apresentar, para as geometrias esférica e hiperbólica, propostas didáticas que exploram seus primeiros elementos e propriedades que os relacionam. A escolha das atividades a serem realizadas pelos alunos foi feita tomando-se como referência as noções básicas e bem conhecidas da geometria euclidiana. Em cada uma das geometrias vamos falar de pontos, retas, segmentos, paralelismo e perpendicularismo de retas, triângulos e soma de seus ângulos.

Em uma primeira experiência testamos, de forma bastante incipiente, um material piloto com turma de alunos cursando uma disciplina de geometria, no 5º semestre de Curso de Licenciatura em Matemática. A prática foi feita em três encontros. O primeiro encontro iniciou com a discussão sobre conceitos da geometria euclidiana e os seus correspondentes conceitos na geometria esférica, nisso utilizando-se esferas de isopor, atilhos e alfinetes. Neste momento ainda não tínhamos projetado a sequência de atividade a ser desenvolvida em ambiente de geometria dinâmica. No segundo encontro foram realizadas discussões relacionando conceitos da geometria euclidiana com a geometria hiperbólica no Disco de Poincaré, e aqui os alunos utilizaram uma primeira versão do micro-mundo hiperbólico. O último encontro teve por finalidade sistematizar as explorações feitas pelos alunos e nele tivemos a certeza da importância do uso de ambientes de geometria dinâmica neste processo de aprendizagem. Assim, tratamos de aperfeiçoar as ferramentas do menu hiperbólico, tornando-as mais intuitivas e de fácil uso, e também incluímos novas ferramentas. E quanto a geometria esférica, em pesquisa na internet, encontramos o software de geometria dinâmica Spherical Easel

As atividades que projetamos para o estudo das geometrias esférica e hiperbólica pressupõe um certo domínio da geometria euclidiana, entendendo-se aqui que são conteúdos que normalmente são trabalhados nos anos finais do ensino fundamental. Assim, consideramos que é uma proposta de ensino para alunos que estão cursando o ensino médio.

Nas duas propostas de exploração das geometrias não-euclidianas têm-se como principais objetivos:

- o entendimento de que a ideia de reta não precisa estar associada com aquela construída em nossa experiência no mundo físico imediato – aqui estamos nos referindo a ideia com que trabalhamos na geometria euclidiana;
- o entendimento de que a distância entre dois pontos pode não ser dada pelo segmento que une estes dois pontos; ou seja, é com a nova ideia de reta que vamos falar dos segmentos que informam a distância entre dois pontos
- o entendimento de que a soma dos ângulos de um triângulo depende do “mundo” em que este triângulo se encontra (ou seja, depende da geometria). Vamos propor atividades de forma a que se entenda que, no caso da geometria esférica, a soma dos ângulos de um triângulo pode variar entre 180° e 540° ; e no caso da geometria hiperbólica a soma pode variar entre 0° e 180° .

As duas propostas pressupõem o uso de geometria dinâmica e aqui estamos pensando em material que possa ser usado na escola. Nosso pressuposto é que com a geometria dinâmica os alunos podem fazer muitos experimentos de forma tal que as figuras na tela do computador tornam-se objetos concreto-abstratos: concretos porque podem ser manipulados diretamente, e abstratos porque tratam de veicular as ideias correspondentes às duas geometrias. As atividades foram planejadas de forma a provocar a descoberta de semelhanças e diferenças entre a geometria euclidiana e as geometrias hiperbólica e esférica.

Na geometria esférica vamos usar o software Spherical Easel³, Na geometria hiperbólica vamos usar um micro-mundo que corresponde ao disco de Poincaré, que foi por nós construído usando-se o software GeoGebra (alguns detalhes sobre a construção deste micro-mundo foram apresentados no capítulo III). Vamos nos referir a estes materiais digitais como “ambientes de exploração”.

3 Disponível em <http://merganser.math.gvsu.edu/easel>.

No que segue, para cada uma das geometrias, de início apresentamos o ambiente de exploração e depois uma proposta de sequência didática com formato já pensado para utilização em sala de aula. Comentários sobre o propósito das atividades estão em destaque sob o título “Comentários para o professor”. Nossa intenção é que o professor de escola possa utilizar este material – o produto didático por nos organizado - mediante pequenas adaptações. Esse produto didático, bem como os “ambientes de exploração”, estão disponíveis em www.mat.ufrgs.br/~ppgem/produto_didatico/rribeiro.

5.1 Geometria Esférica: uma proposta didática

5.1.1 Apresentação do “ambiente de exploração” Spherical Easel

Na figura 5.1 temos a interface do ambiente de exploração que vamos utilizar ao longo da proposta didática.

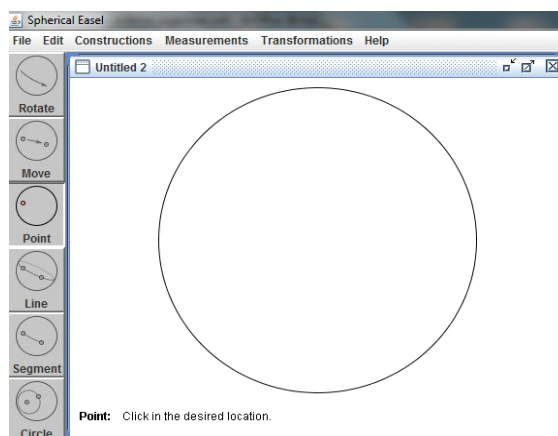


Figura 5.1: Interface do software Spherical Easel

Na interface tem-se um menu das ferramentas básicas na barra vertical à esquerda. Estas ferramentas estão descritas na tabela 2.

Ferramenta
<ul style="list-style-type: none"> • Rotate– selecionando essa ferramenta e pressionando o botão esquerdo ou direito do mouse é possível rotacionar a superfície esférica.
<ul style="list-style-type: none"> • Move – selecionando essa ferramenta e pressionando o botão esquerdo ou direito do mouse sobre um objeto é possível movimentá-lo na superfície esférica. Utilizando essa ferramenta com a tecla <i>Ctrl</i> pressionada, é possível deslocar o objeto para o hemisfério oposto ao que aparece na interface.

<ul style="list-style-type: none"> • Point – selecionando essa ferramenta e pressionando o botão esquerdo ou direito do mouse é possível determinar um ponto na superfície esférica. Utilizando essa ferramenta com a tecla <i>Ctrl</i> pressionada, é possível determina um ponto no hemisfério oposto ao que aparece na interface.
<ul style="list-style-type: none"> • Line– selecionando essa ferramenta e pressionando e arrastando o botão esquerdo ou direito do mouse na superfície esférica é possível determinar uma reta na superfície esférica passando por dois pontos. Utilizando essa ferramenta com a tecla <i>Ctrl</i> pressionada, os pontos que determinam a reta estarão no hemisfério oposto ao que aparece na interface.
<ul style="list-style-type: none"> • Segment– selecionando essa ferramenta e pressionando e arrastando o botão esquerdo ou direito do mouse na superfície esférica é possível determinar um segmento na superfície esférica passando por dois pontos. Utilizando essa ferramenta com a tecla <i>Ctrl</i> pressionada, os pontos que determinam o segmento estarão no hemisfério oposto ao que aparece na interface.
<ul style="list-style-type: none"> • Circle– selecionando essa ferramenta e pressionando e arrastando o botão esquerdo ou direito do mouse na superfície esférica é possível determinar um círculo na superfície esférica passando por dois pontos. Utilizando essa ferramenta com a tecla <i>Ctrl</i> pressionada, os pontos que determinam o círculo estarão no hemisfério oposto ao que aparece na interface.

Tabela 2: Ferramentas básicas do Spherical Easel

Na barra horizontal superior têm-se outras possibilidades de construção e também se tem recursos para fazer medidas. Na Tabela 3 são apresentados os principais recursos.

Aba	Recurso
Edit	<ul style="list-style-type: none"> • Undo– selecionando essa ferramenta o software desfaz a última modificação realizada. A tecla de atalho é <i>Ctrl+Z</i>. • Delete – essa ferramenta deleta um objeto ao clicar com o botão direito ou esquerdo do mouse sobre ele. A tecla de atalho é <i>Ctrl+D</i>. • Delete All– essa ferramenta deleta todas as construções realizadas. • Hide– essa ferramenta esconde um objeto ao clicar com o botão direito ou esquerdo do mouse sobre ele. A tecla de atalho é <i>Ctrl+H</i>. • Show Hidden– essa ferramenta faz com que reapareça os objetos escondidos • Show Label– essa ferramenta faz com que apareça o rótulo de um objeto ao clicar nele com o botão direito ou esquerdo do mouse. Para esconder o rótulo novamente deve-se usar a ferramenta <i>Hide (Ctrl+H)</i>. • Properties– selecionando esta ferramenta e clicando com o botão direito ou esquerdo em um objeto é possível edições simples. • Front/Back Contrast– determina o contraste dos objetos que encontram-se tanto no hemisfério que aparece na interface do programa, quanto o hemisfério oposto.
Constructions	<ul style="list-style-type: none"> • Add point to object– selecionando essa ferramenta é possível determinar um ponto sobre um objeto (circunferência, segmento, reta). • Antipode– selecionando essa ferramenta e clicando com o botão direito ou esquerdo do mouse sobre um ponto, determina-se o seu ponto antípoda. • Midpoint– selecionando essa ferramenta e clicando com o botão esquerdo ou direito do mouse sobre um segmento determina-se o seu

	<p>ponto médio.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Intersection point(s) – selecionando essa ferramenta e clicando sobre dois objetos que se interceptam determina-se o ponto de intersecção destes objetos. • Perpendicular line– selecionando essa ferramenta e clicando com o botão direito ou esquerdo do mouse sobre uma reta/segmento e um ponto P, determina-se a reta perpendicular a reta selecionada passando por P. • Angle Bisector– determina a reta esférica bissetriz de um ângulo clicando em duas retas ou dois segmentos que possuam um ponto de intersecção. • Toggle line segment– selecionando essa ferramenta e clicando em um segmento, determina-se o complemento da reta esférica que contém o segmento. • Three point circle– selecionando essa ferramenta pode-se determinar um círculo dados três pontos previamente construídos.
<p>Measurements</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Distance– selecionando essa ferramenta e pressionando o botão esquerdo ou direito do mouse sobre dois pontos é determina-se a distância esférica desses dois pontos. • Arc Length– selecionando essa ferramenta e clicando em um segmento, determina-se o seu comprimento. • Angle Measure– essa ferramenta determina a medida do ângulo esférico clicando em duas retas ou dois segmentos que possuam um ponto de intersecção • Triangle– selecionando essa ferramenta e clicando nos segmentos de um triângulo, determina-se informações referentes aos ângulos internos, comprimento dos segmentos e área do triângulo. • Calculator– essa ferramenta permite realizar cálculo de medidas realizadas no software. Para tanto é preciso informar o rótulo da medida (Ex: , deve-se informar na calculador o rótulo <i>M1</i>). • Delete Measurement– essa ferramenta apaga medições realizadas no software. Para tanto basta clicar no valor que deseja apagar na janela de medições.
<p>Transformations</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Reflection– essa ferramenta determina a reflexão de objetos em relação um segmento ou reta. Para utilizar essa ferramenta, clica-se na reta/segmento e após no objeto a ser reflexionado. • Translation– essa ferramenta determina a translação de objetos em relação a um segmento. Esse segmento faz a função de vetor, indicando o módulo e a direção de translação. Para utilizar essa ferramenta, clica-se no segmento e após no objeto a ser transladado. • Rotation– essa ferramenta determina a rotação de um objeto em torno de um ponto. Primeiramente clica-se no ponto pelo qual o objeto será rotacionado, após clica-se no objeto. Ao clicar no ponto, o software construirá um ângulo determinado em um pequeno círculo.

Tabela 3: Ferramentas de edição, medição e construção do Spherical Easel

Sendo o Spherical Easel um software de geometria dinâmica, uma vez feita uma construção com princípios geométricos, os pontos iniciais podem ser manipulados e a construção se mantém estável. É esta estabilidade que vai ajudar os alunos a entenderem as ideias básicas que estão na geometria esférica. Ao longo das atividades, sempre que necessário, será indicado o recurso do software que deve ser utilizado na construção a ser feita.

5.1.2 Uma visita ao mundo da geometria esférica

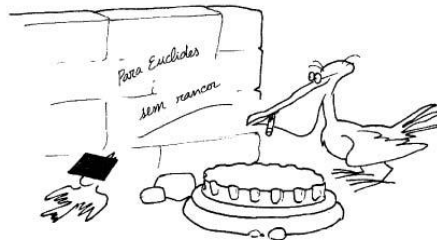
Atividade1 – Conhecendo um novo mundo

No que segue vamos trabalhar em um mundo que pode nos surpreender. Vamos iniciar nossa visita lendo parte de uma história em quadrinhos.

JEAN-PIERRE PETIT

As Aventuras de Anselmo Curioso

OS MISTÉRIOS DA GEOMETRIA



<http://www.savoir-sans-frontieres.com>

PRÓLOGO: Um dia, Anselmo decidiu esticar um fio entre duas estações:



⊙ mundo onde Anselmo vivia era nebuloso como o diacho. Não se via um palmo diante do nariz.



Mas, não sei se já deram por isso, há dias em que tudo corre ao contrário.

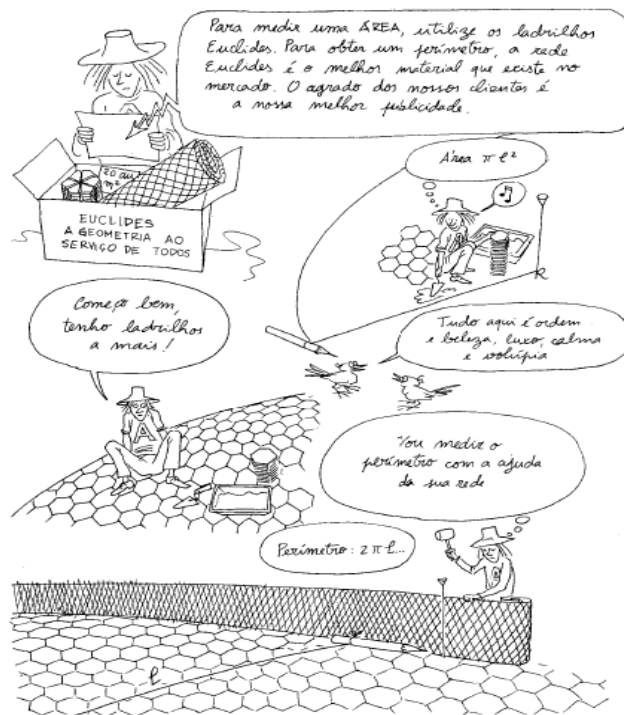




Figura 5.2: Material adaptado de “As aventuras de Anselmo Curioso: Os Mistérios da Geometria”

Fonte: <http://www.savoir-sans-frontieres.com>

Comentários para o professor:

O objetivo dessa atividade é introduzir de forma simples e ilustrada o mundo da geometria esférica. O texto “As aventuras de Anselmo Curioso” serve de material disparador para este estudo. O professor pode solicitar ao aluno que realize a leitura e conforme sentir necessidade pode interromper para realizar discussões e comentários. É importante frisar o conceito de geodésica quando este é apresentado na leitura.

Para uma atividade mais enriquecedora o professor pode utilizar o material completo, que está disponível para download na página <http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Portuguais/>.

Atividade 2 – Pontos e retas

Explicação

Dados dois pontos A e B na esfera, sempre podemos obter um grande círculo passando por estes dois pontos. Vejamos como:

- se O é o ponto centro da esfera, consideramos o plano PI determinado pelos pontos O, A e B. A intersecção deste plano PI com a esfera é um círculo que é chamado de círculo máximo. Um grande círculo é tipo o “equador” do globo terrestre.

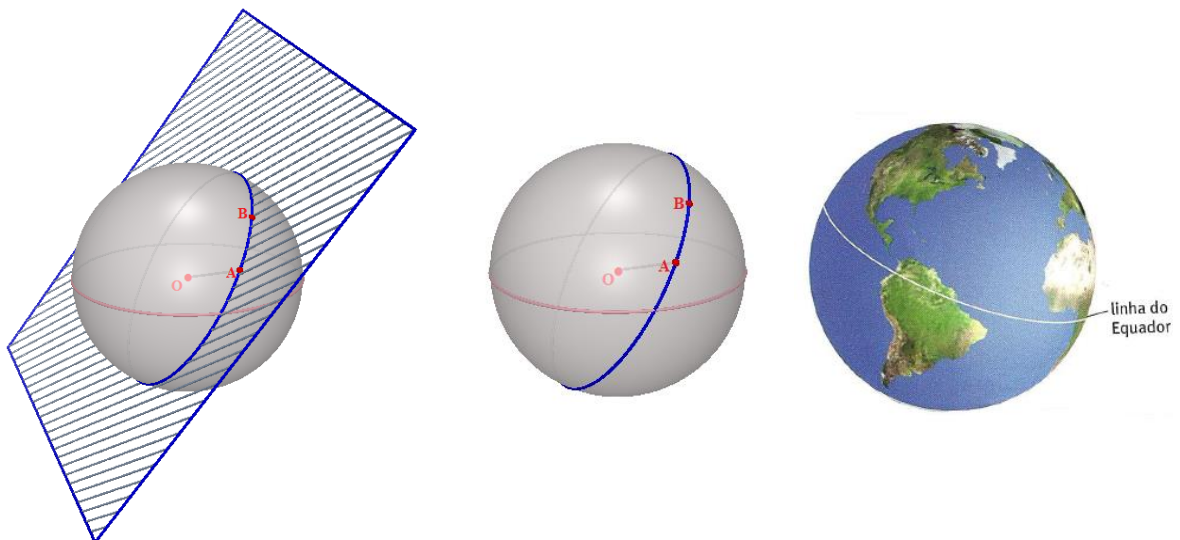


Figura 5.3: Círculos Máximos

No caso em que o plano não passa pelo centro da esfera, a intersecção deste plano com a esfera **não** determina um círculo máximo.

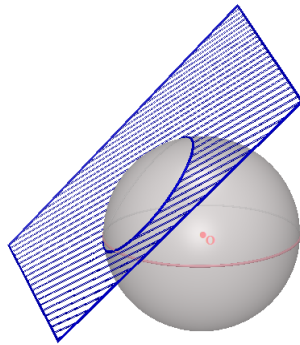


Figura 5.4: Intersecção diferente de círculo máximo.

Os círculos máximos são as retas neste novo mundo, e é aos poucos que vamos nos acostumar com essa nova ideia de reta. As construções a serem feitas no ambiente de exploração Spherical Easel vão ajudar a entender este mundo.

Construção - Faça construções que ilustrem as respostas às perguntas:

- a) quantas retas passam por um ponto P?
- b) duas retas na esfera sempre têm um ponto em comum?
- c) quantas retas passam por dois pontos da esfera?
- d) dado um ponto A, construa o seu ponto antípoda B. Quantas retas passam por A e B?

Menu : *Construction /Antipode* para construir pontos antípodas

Explicação

O ponto B antípoda de A é o ponto de intersecção da esfera com reta que passa por P e o seu centro O. Pares de pontos antípodas são do tipo “polo norte/polo sul” no globo terrestre.

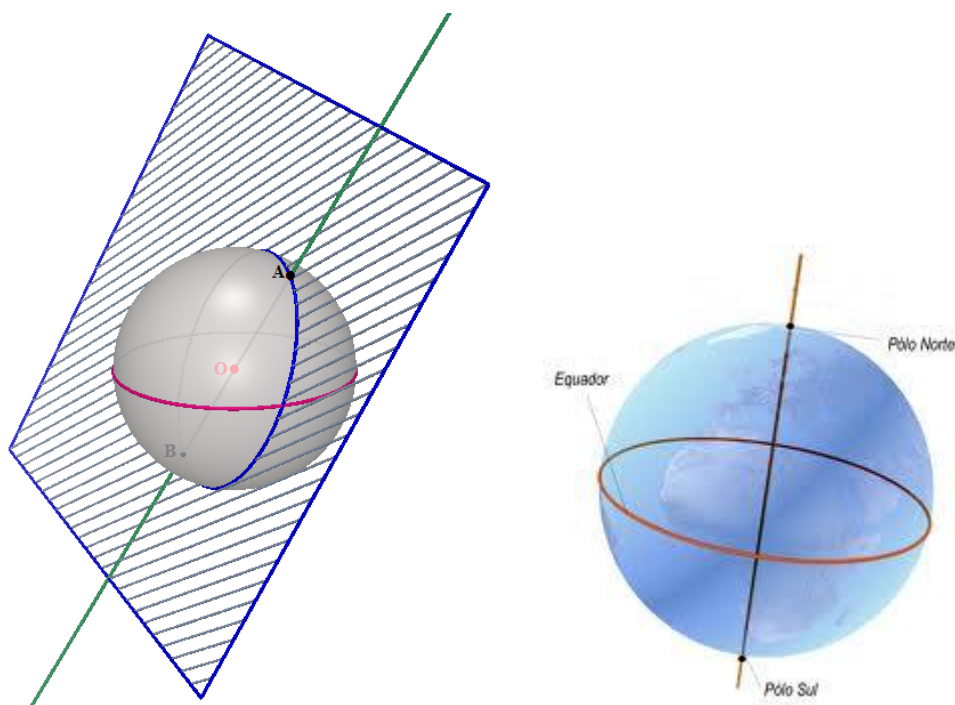


Figura 5.5: Pontos antípodas

Comentário para o professor:

O objetivo desta atividade é que os alunos se familiarizem com uma nova ideia de reta e que comparem o que estão observando, através das perguntas, com o que já conhecem da geometria euclidiana. Os alunos vão observar que, assim como na geometria euclidiana, por um ponto passam infinitas retas (Figura 5.6). Eles vão observar que, diferentemente da geometria euclidiana, duas retas sempre se interceptam (Figura 5.7) e que por dois pontos podem passar infinitas retas, conforme ilustra a figura 5.9 (no caso em os pontos são antípodas).

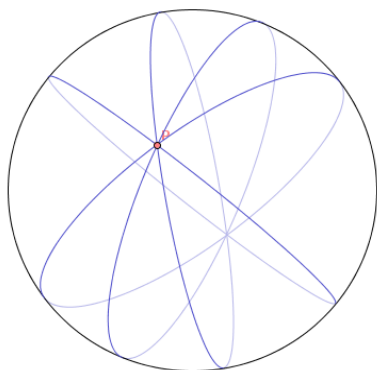


Figura 5.6: Retas Esféricas

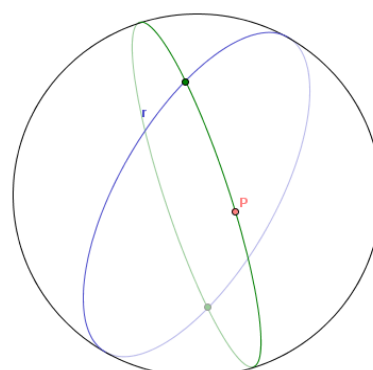


Figura 5.7: Intersecção de retas

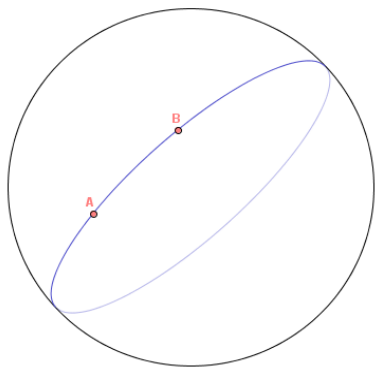


Figura 5.8: Reta por dois pontos não antípodas

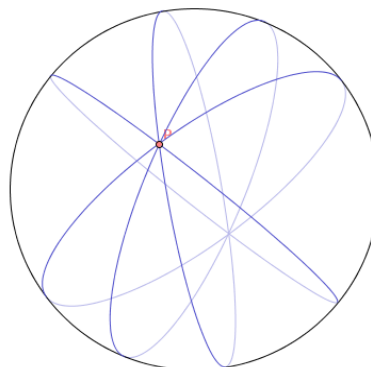


Figura 5.9: Reta por dois pontos

Atividade 3: Segmento, ângulos e retas perpendiculares

Explicação

O segmento unindo os pontos A e B é o menor arco da reta determinada pelos pontos A e B, quando A e B não são antípodas. Se A e B são antípodas tem-se dois segmentos com extremidades em A e B

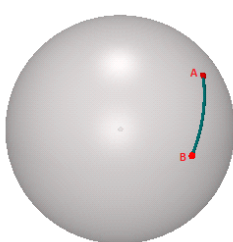
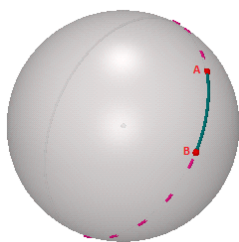


Figura 5.10: Segmentos esféricos

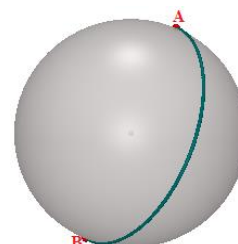


Figura 5.11: Segmento definido por dois pontos antípodas

Um ângulo de vértice A é a união de duas retas que passam por A. As retas são ditas lados do ângulo.

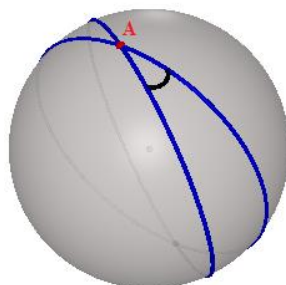


Figura 5.12: Ângulo esférico

A medida de um ângulo é dada pela medida α em graus, entre 0° e 180° , do ângulo formado pelas retas euclidianas que são tangentes às retas (na esfera) no ponto que é vértice do ângulo.

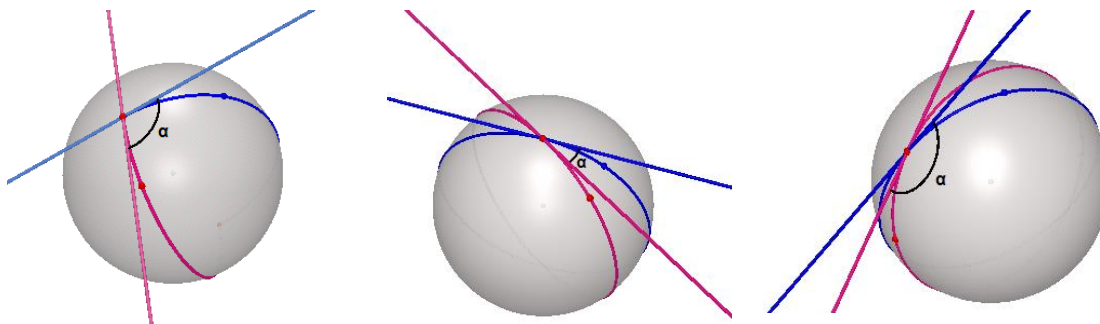


Figura 5.13: Retas tangentes

Quando às retas (na esfera) formam um ângulo de 90 graus elas são ditas retas perpendiculares.

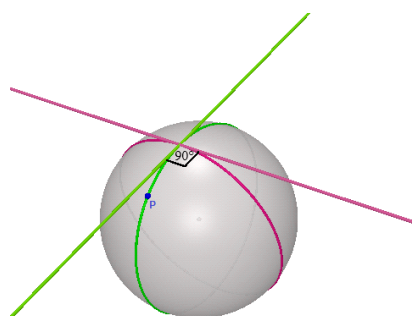


Figura 5.14: Um ângulo reto na esfera

Construção - Faça construções que ilustrem as respostas às perguntas:

a) a partir de três pontos A, B e C construa um ângulo de vértice A. Como é a variação da medida de um ângulo na esfera? Para ver isto movimente o ponto B que está no lado do ângulo.

Menu: *Measurements / Measure angle* para medir o ângulo

b) dada uma reta e um ponto P nesta reta, quantas retas perpendiculares à reta dada e passando por P podem ser construídas?

Menu :*Construction/ Perpendicular Line* para construir retas perpendiculares.

c) dada uma reta e um ponto P fora desta reta, quantas retas perpendiculares à reta dada e passando por P podem ser construídas?

d) por que não é possível construir duas retas paralelas na esfera?

Comentário para o professor:

O objetivo desta atividade é de o aluno começar a testar propriedades da geometria euclidiana em uma superfície esférica. Espera-se que o aluno perceba que o ângulo entre duas retas esféricas será sempre maior que 0 grau e menor 180 graus (Figura 5.15). Pela definição de medida de ângulo esférico pode-se perceber essa, pois se o ângulo for igual a 180 graus (ou a 0 grau) as retas tangentes serão coincidentes, portanto as retas esféricas também serão.

Em relação às atividades envolvendo perpendicularismo, o aluno deverá perceber que se o ponto P está na reta esférica, então existe apenas uma reta perpendicular por P (Figura 5.16). Porém, no caso em que P não pertence à reta, pode haver infinitas retas perpendiculares passando por P (caso em que P é um polo da reta esférica dada, conforme ilustra a figura 5.17. Na atividade **d**, o aluno deverá observar que não importa como posicionamos os pontos que definem as retas esféricas, duas retas esféricas distintas terão dois pontos de intersecção, ditos pontos antípodas (Figura 5.18). Com isso podemos concluir que por um ponto externo a uma reta não passa nenhuma reta paralela. De fato, duas circunferências máximas distintas de uma esfera sempre terão dois pontos de intersecção. Portanto o **axioma das paralelas** da geometria euclidiana não é válido na geometria esférica.

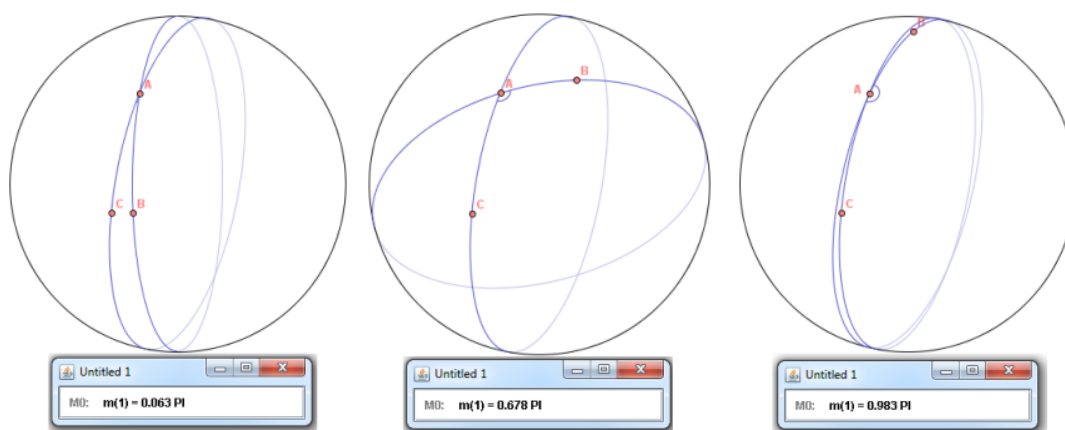


Figura 5.15: Variação do ângulo esférico

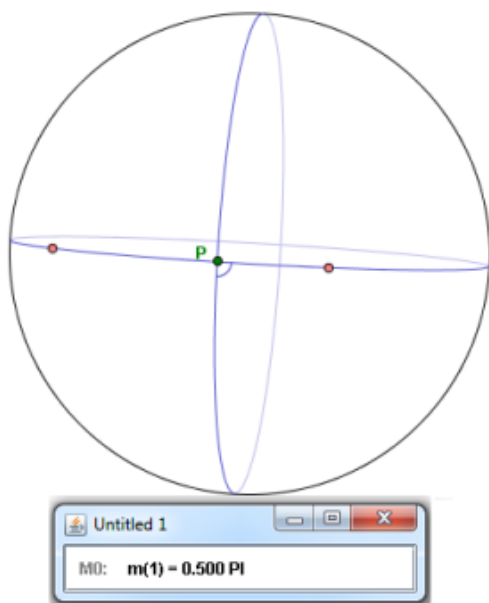


Figura 5.16: Reta esférica perpendicular passando por ponto P na reta.

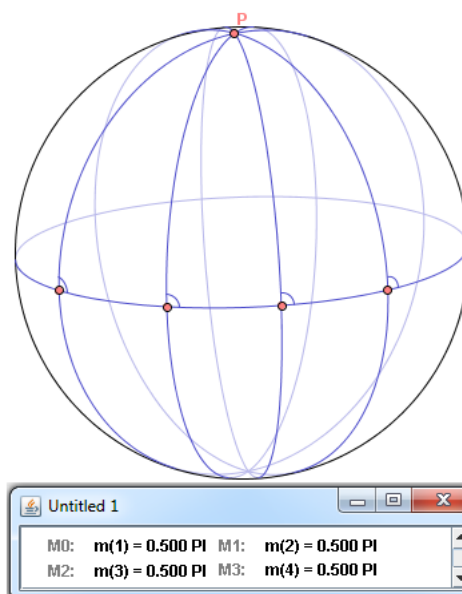


Figura 5.17: Retas perpendiculares passando pelo ponto P

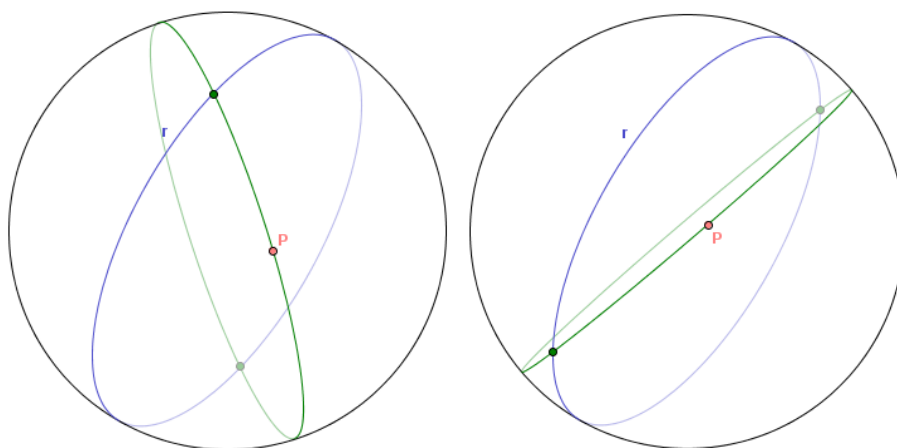


Figura 5.18: Intersecção de retas

Atividade 4: Triângulos e quadriláteros

Explicação

Dados três pontos distintos A, B e C na esfera, os segmentos unindo estes três pontos formam um triângulo. Os pontos são ditos vértices do triângulo, os segmentos são ditos lados do triângulo. No triângulo temos três ângulos, determinados pelas retas que passam pelos pontos A e B, B e C, e A e C.

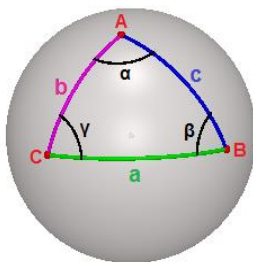


Figura 5.19: Triângulo com vértices nos pontos A, B e C, e de lados definidos pelos segmentos a, b e c.

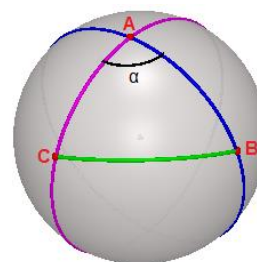


Figura 5.20: Ângulo α no vértice A, definido pelas retas passando por A e B, e A e C.

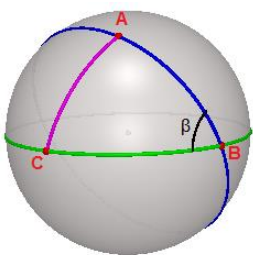


Figura 5.21: Ângulo β no vértice B, definido pelas retas passando por A e B, e B e C

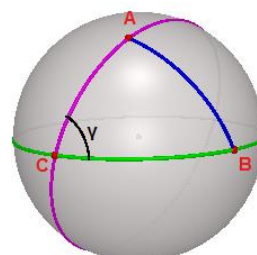


Figura 5.22: Ângulo γ no vértice C, definido pelas retas passando por A e C, e B e C

Construção 4.1 - Faça construções que ilustrem as respostas às perguntas:

a) qual é a variação da medida de um ângulo de um triângulo?

Menu: *Measurements / Angle* para observar a variação da medida.

b) um triângulo pode ter dois ângulos retos?

c) um triângulo pode ter três ângulos retos?

d) qual é a soma dos ângulos de um triângulo?

Menu: *Measurements / Calculator* para determinar a soma dos ângulos.

Comentário para o professor:

Como já discutido na atividade anterior, a variação do ângulo esférico é de 0° a 180° . Desta forma, a variação da medida de um ângulo interno será a mesma.

Em relação a atividade **b**, é natural que o aluno inicie esta atividade construindo uma reta (ou segmento) por dois pontos, digamos A e B, e após determine as retas perpendiculares passando por estes pontos. Ao realizar esse procedimento o aluno observará que as retas perpendiculares possuirão

dois pontos de intersecção. Basta então, determinar o triângulo com vértices nos pontos A , B e um dos pontos de intersecção (Figura 5.23).

Para a realização da atividade **c**, o professor pode sugerir que o aluno, após determinar a medida dos ângulos do triângulo da atividade **b**, movimente o ponto B de forma a aproximar de 90° o ângulo não reto. Após, o professor pode desafiar o aluno a realizar essa construção de forma que se defina um triângulo com três ângulos retos. Uma forma de realizar essa construção é a partir de um segmento definido por dois pontos antípodas (A e B). Após, utiliza-se a ferramenta para determinar o ponto médio M desse segmento. Seja C o ponto de intersecção das retas perpendiculares ao segmento no ponto médio e no ponto A , o triângulo ABC possuirá três ângulos retos. Perceba que este triângulo é um octante da esfera (Figura 5.24).

O aluno deverá observar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico não é constante. Espera-se que ele perceba ainda que esta soma é sempre maior que 180 graus (π radianos). Na verdade a soma varia entre 180° e 540° . Sabemos que um ângulo esférico varia de 0° a 180° , tomando os três ângulos esféricos do triângulo tendendo a 180° , teríamos então que a soma seria igual 540° . Intuitivamente podemos concluir que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico⁴ varia entre 180° e 540° (Figura 5.25).

⁴ O Teorema de Girardi, a ser apresentado posteriormente, trata da soma dos ângulos de um triângulo esférico na sua generalidade, e afirma que a soma dos três ângulos pode variar entre π e 5π . Na nossa proposta didática vamos considerar a variação desta soma entre 180° e 540° .

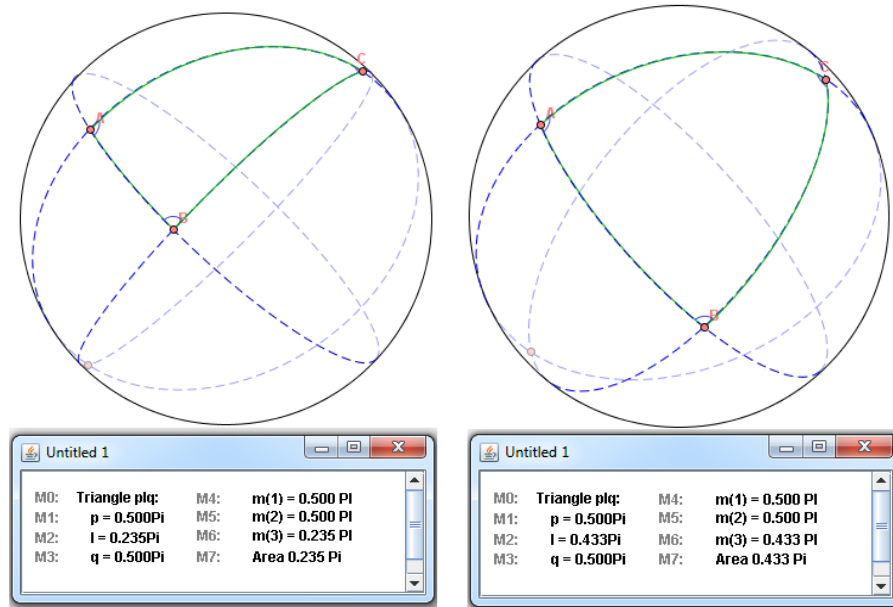


Figura 5.23: Triângulo esférico com dois ângulos retos

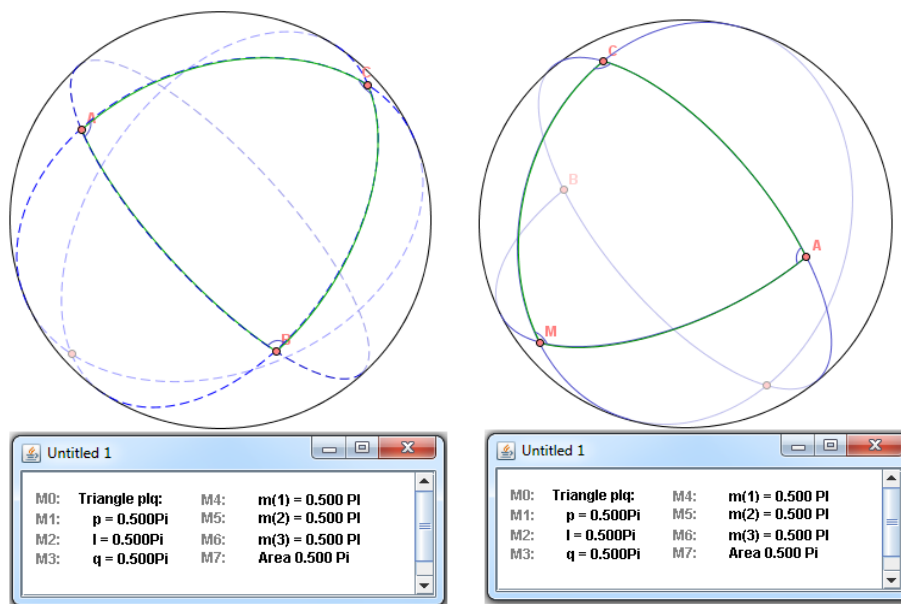


Figura 5.24: Triângulo esférico com três ângulos retos

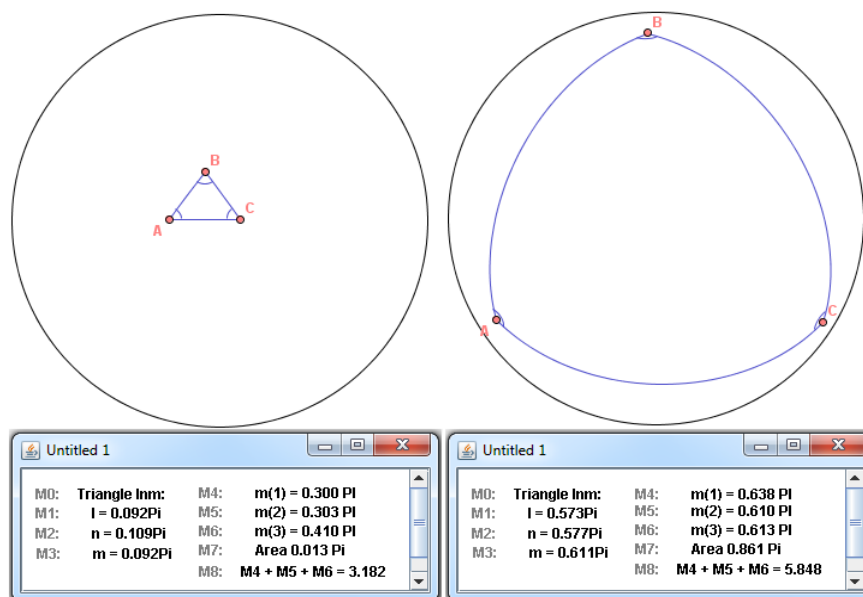


Figura 5.25: Variação da soma dos ângulos de um triângulo

Construção 4.2 - Faça construções que ilustrem as respostas às perguntas:

- qual é a somas dos ângulos de um quadrilátero?
- como construir um quadrado?

Menu: *Construction/Perpendicular Line* para construir retas perpendiculares.

Comentário para o professor:

*Assim, como a soma dos ângulos de um triângulo não é constante, os dos quadriláteros também não o são. Da mesma forma temos que, por consequência direta da soma dos ângulos de um triângulo esférico, que a soma dos ângulos de um quadrilátero é maior que 360° (Figura 5.26). Em relação ao quadrado esférico, o professor pode sugerir ao aluno começar a construção a partir de um segmento e sua mediatriz (usando as ferramentas *Constructions/Midpoint* e *Costructions/Perpendicular line*). Espera-se que o aluno perceba que o próximo passo de construção é um círculo com centro no ponto médio do segmento passando por um de seus extremos. Para definir o quadrado, bastará determinar os pontos de intersecção do círculo com a*

mediatriz(Figura 5.27). Assim, como no triângulo equilátero, o quadrado será equiângulo, porém sua medida não será constante.

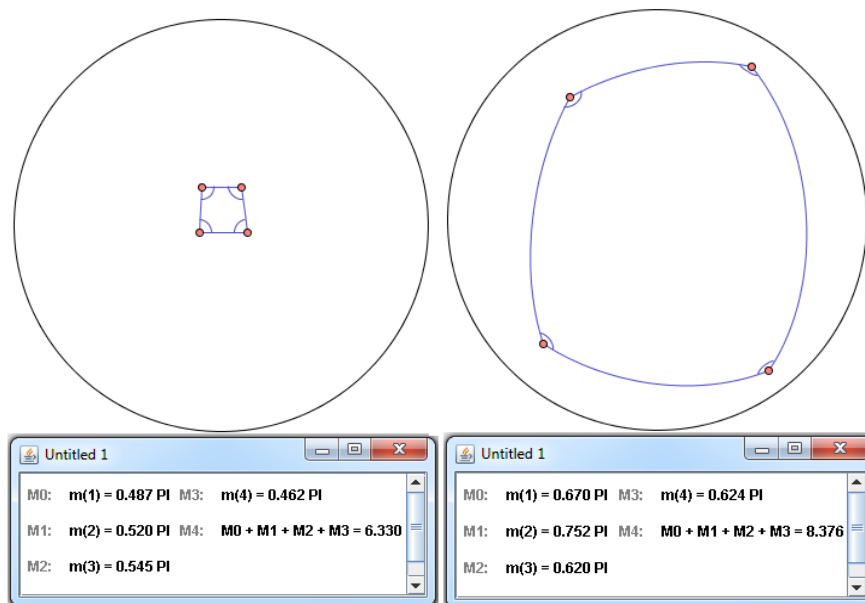


Figura 5.26: Quadriláteros esféricos

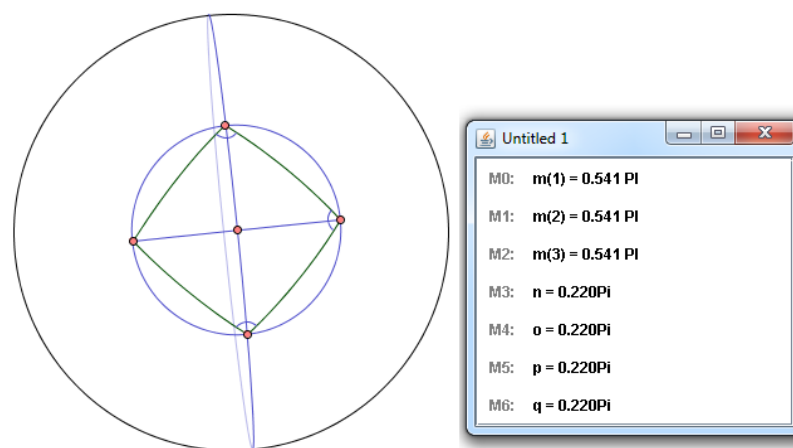


Figura 5.27: Quadrado Esférico

Atividade 5: Círculos e triângulos

Explicação

Para definirmos círculo esférico, primeiramente trataremos do conceito de segmento esférico. De acordo com a definição de reta esférica, segmento esférico AB é o menor arco de uma circunferência máxima limitada por A e por B.

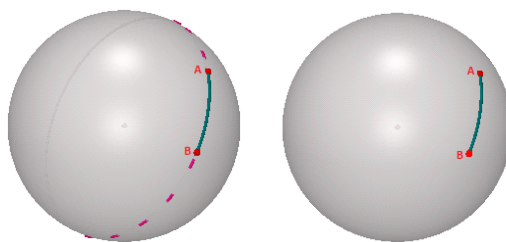


Figura 5.28: Segmento esférico como menor arco de circunferência máxima

Apesar de não utilizarmos essa definição em nossas atividades, fica claro que o comprimento do segmento esférico é definido como o comprimento do arco que define o segmento. Perceba que o comprimento deste arco é proporcional à medida do ângulo central α da circunferência máxima ($A\hat{O}B$). Da geometria euclidiana, temos que o comprimento do segmento esférico AB é definido por $d(A,B) = 2\pi R\alpha/360^\circ$, onde R é o raio da esfera e α é o ângulo central. Pela definição de segmento esférico, o seu comprimento não pode ser maior que πR (semicírculo).

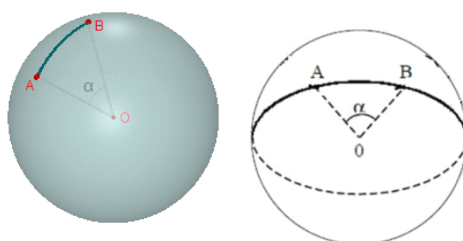


Figura 5.29: Comprimento de segmento esférico

O círculo de centro P e raio r é o conjunto de pontos que ficam a uma distância de P que é menor ou igual a r . Os pontos que ficam a uma distância de P que é igual a r formam a circunferência de centro P e raio r . **Atenção:** a distância é dada pela medida de um segmento na esfera. Observe que uma mesma circunferência pode possuir dois centros, o ponto P e seu antípoda P' .

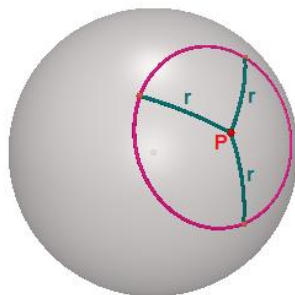


Figura 5.30: Círculo esférico

Construção:

a) Dado um segmento de extremos A e B, construa o círculo de centro A e raio igual à medida de AB. Movimente B e observe as mudanças no círculo. Conforme o raio aumenta o que acontece com o círculo?

Menu: *Circle* na barra vertical

b) Quando que um círculo contém um segmento?

c) Construa um triângulo isósceles e determine seus ângulos.

Menu: *Construction /Middle Point* e *Construction/Perpendicular line* para construir a reta perpendicular ao segmento AB passando pelo seu ponto médio.

d) Construa um triângulo equilátero e some seus ângulos.

Comentário para o professor:

Todos os pontos da circunferência esférica estão à mesma distância constante do centro do círculo esférico. Conforme o ponto B se distancia do centro A do círculo esférico, a circunferência esférica tende a um círculo máximo (Figura 5.31). No item b, o aluno deve perceber que um segmento está contido em círculo quando este pertence à região interna do círculo, ou seja, pertence à menor área que o círculo esférico determina (lembramos aqui que um círculo na esfera é determinado pela menor área limitada pela circunferência desse círculo). Se aumentarmos a distância do ponto B de tal forma que o ponto A não pertença à menor região determinada pela circunferência, então o centro do círculo passa a ser A', antípoda de A.

Espera-se que no item c, o aluno construa um triângulo isóscele e perceba que, assim como na geometria euclidiana, os ângulos da base são

congruentes. No item d, espera-se que o aluno reproduza os passos de construção de um triângulo equilátero utilizando a intersecção de dois círculos, onde o centro de um é o extremo do outro. Os alunos deverão notar que no mundo esférico os ângulos internos de um triângulo equilátero são congruentes, porém não constantes. Logo a sua soma também não será. De fato, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico será sempre maior que 180° (Figura 5.33).

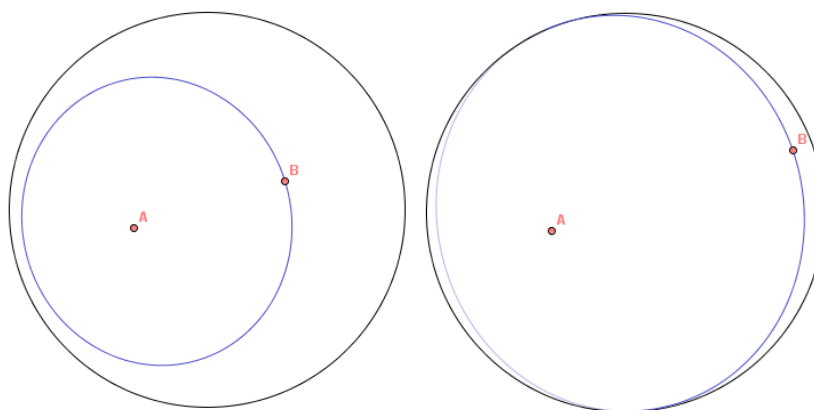


Figura 5.31: Círculo esférico de centro A passando por B

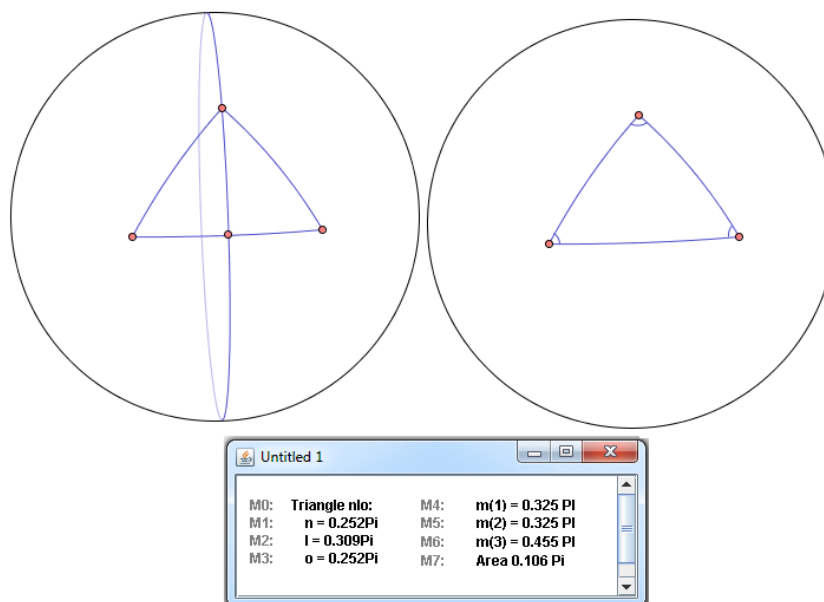


Figura 5.32: Construção de triângulo esférico a partir da reta mediatriz.

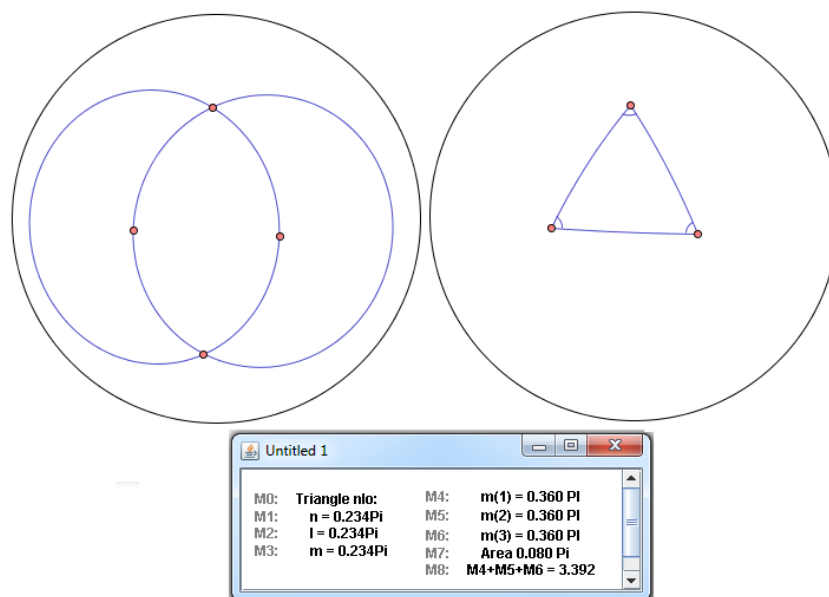


Figura 5.33: Triângulo equilátero esférico com medidas dos lados e ângulos

Atividade 6: Soma dos ângulos de um triângulo

Construção 6.1

a) Construa um triângulo conforme indicado na figura abaixo: os vértices A e B estão na reta r , um “equador” da esfera; o vértice C é um dos polos da esfera em relação a esta reta “equador”. Movimente o ponto A e use o menu *Measurements/Triangle*, nisso percorrendo os lados do triângulo no sentido anti-horário, e observe a soma das medidas dos ângulos. Qual a medida máxima que pode ser obtida para soma dos ângulos deste triângulo?

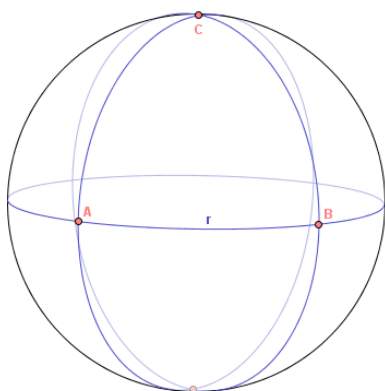


Figura 5.34: Pólo C intersecção das retas perpendiculares a r passando por A e B

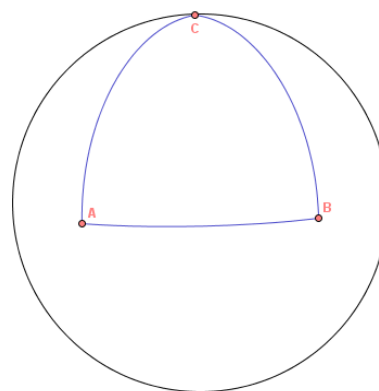


Figura 5.35: Triângulo esférico ABC

b) Construa uma reta determinada por dois pontos A e B, e construa um ponto C na reta, utilizando o menu Cosntructions/Add point to object, de tal forma que o ponto C pertença ao hemisfério oposto aos pontos A e B. Determinando o triângulo ABC, o que você pode observar em relação a seus ângulos internos?

Comentário para o professor:

Esta atividade tem como objetivo desprender o aluno do conceito de triângulos retângulos da geometria euclidiana. No item a, o aluno perceberá que é possível construir um triângulo com dois ângulos retos. Durante a movimentação do ponto B, espera-se que o aluno perceba que é possível construir um triângulo com três ângulos retos, e que a soma de ângulos máximo, que este triângulo pode obter, é de 360° , ou 2π (Figura 5.36).

No item b, espera-se que o aluno consiga realizar a construção e notar que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é limitada a 540° (Figura 5.37). Perceba que por definição, o método de construção não define um triângulo, pois os pontos estão sobre uma mesma reta esférica (são pontos colineares).

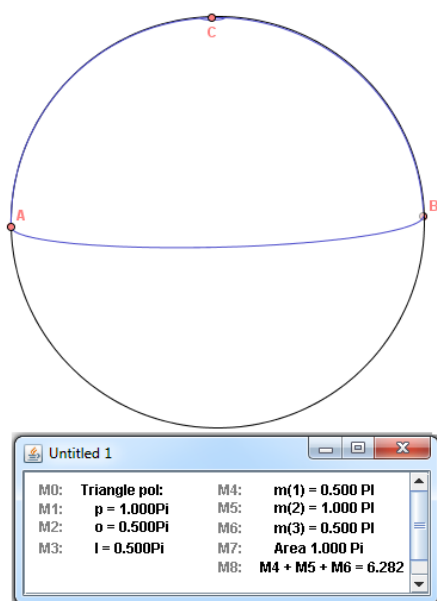


Figura 5.36: Triângulo ABC com soma dos ângulos igual a 2π

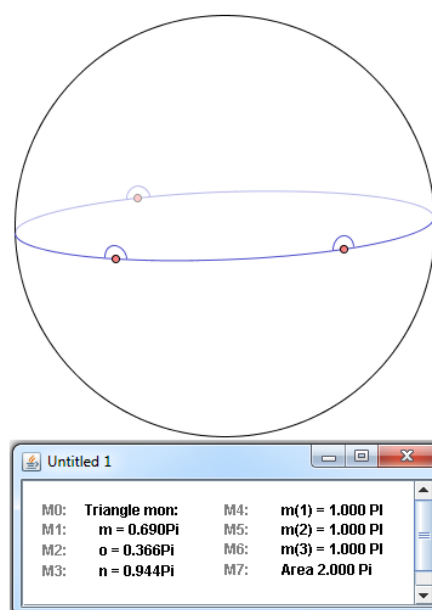


Figura 5.37: Triângulo com soma dos ângulos internos tendendo a 3π

Construção 6.2

No que segue vamos construir a figura que vai nos ajudar a entender o teorema de Girardi. O teorema nos informa que a soma dos ângulos de um triângulo na esfera é dada pela fórmula:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_T}{R^2}$$

onde α , β e γ são os ângulos internos do triângulo, A_T é a área do triângulo e R é o raio da esfera.

Esta fórmula nos diz que quando o triângulo é pequeno a soma se aproxima muito de π (180°). Conforme aumenta a área do triângulo, tendendo $2\pi R^2$ (área de um hemisfério) a soma dos ângulos se aproxima de 3π (540°)⁵.

a) retome a construção feita em 4.1 (item a), e observe este comportamento.

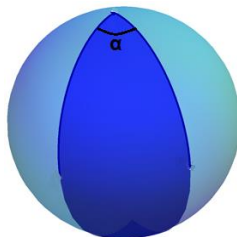
Comentário para o professor:

O aluno deverá notar que a medida da área de um triângulo esférico depende diretamente do valor dos seus ângulos internos. É interessante que, para cada triângulo observado na atividade, o aluno teste o Teorema de Girardi. No item 4.1-a o aluno deve observar que quanto menor for a área do triângulo, a soma dos seus ângulos tenderá a 180° , aproximando-se assim da geometria euclidiana.

Explicação:

Para entender o teorema vamos trabalhar com lunas da esfera, região de um hemisfério compreendida entre dois círculos máximos. Os pontos de intersecção desses círculos determinam os vértices do fuso, percebam que esses pontos são antípodas. O ângulo α do fuso é determinado pelo ângulo entre os dois círculos máximos que constituem os lados do fuso.

⁵ O Teorema de Girardi afirma que a soma dos três ângulos pode variar entre π e 5π . Na nossa proposta didática vamos considerar a variação da medida de ângulos esféricos entre 0° a 180° , e com isso o teorema será explorado com certa particularidade.

Figura 5.38: Fuso esférico e ângulo α

Podemos calcular a área de uma luna conhecendo apenas a medida do seu ângulo α e a área da esfera, $4\pi R^2$. Para tal, basta observarmos que a área da luna é proporcional a medida do ângulo α .

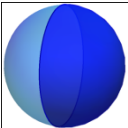
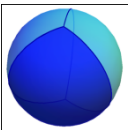
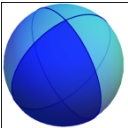
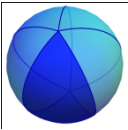
Fração da esfera	Ângulo da luna	Área da luna
 Semiesfera $\left(\frac{1}{2}\right)$	$\pi \text{ rad} = 180^\circ$	$2\pi R^2$
 $\frac{1}{3}$	$\frac{2\pi}{3} \text{ rad} = 120^\circ$	$\frac{4\pi R^2}{3}$
 $\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ$	πR^2
 $\frac{1}{5}$	$\frac{2\pi}{5} \text{ rad} = 72^\circ$	$\frac{4\pi R^2}{5}$
$\frac{1}{n}$	$\frac{2\pi}{n} \text{ rad} = \frac{360^\circ}{n}$	$\frac{4\pi R^2}{n}$

Tabela 4: Tabela adaptada⁶

⁶ Retirada do site <http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/>. Autor: Samuel Lopes

Assim sendo, se o ângulo da luna mede α radianos, a área dessa luna é igual a $2\alpha R^2$, onde R é o raio da esfera.

Sabemos que quando dois círculos máximos se encontram determinam duas lunas congruentes. Chamaremos essa união de *luna completo*, de área igual a $4\alpha R^2$.

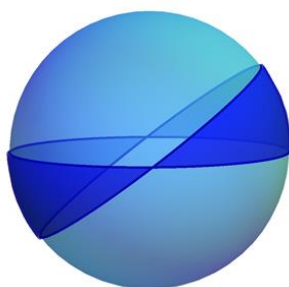


Figura 5.39: Luna esférico completo

Com essas informações podemos determinar o Teorema de Girardi.

Seja T o triângulo esférico definido pelos pontos A , B e C . Denotemos por A_T a área do triângulo T .

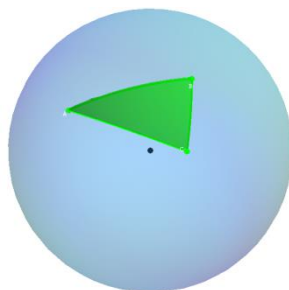


Figura 5.40: Triângulo esférico ABC

Denotaremos por R_A a região da luna completa (azul) determinada pelo vértice A , R_B a região da luna completa (rosa) determinada pelo vértice B e R_C a região da luna completa (laranja) determinada pelo vértice C .

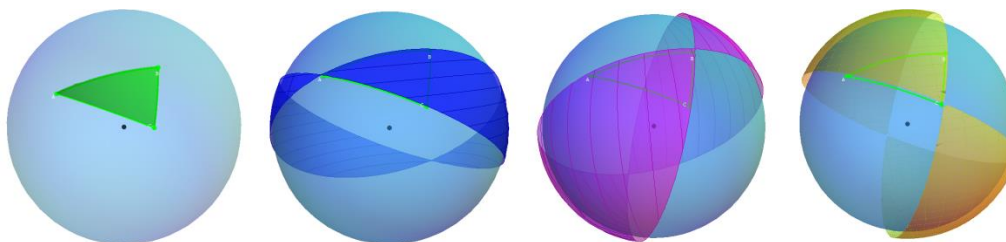


Figura 5.41: Lunas completas determinadas pelos vértices do triângulo

Se α , β e γ são, respectivamente, as amplitudes das lunas R_A , R_B e R_C , então a área de cada luna é igual a $R_A = 4\alpha R^2$, $R_B = 4\beta R^2$ e $R_C = 4\gamma R^2$.

Perceba que a intersecção de duas lunas, digamos R_A e R_B , é igual dois triângulos congruentes: triângulo T e triângulo T' , antípoda de T (determinado por A' , B' e C' pontos antípodas de A , B e C). Ou seja, a área comum entre R_A e R_B é igual a $2A_T$.

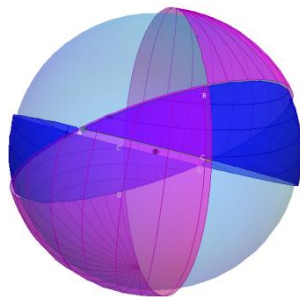


Figura 5.42: Intersecção de duas lunas completas

Logo a união de duas lunas determina a seguinte área:

$$R_A + R_B - 2A_T = 4\alpha R^2 + 4\beta R^2 - 2A_T$$

Agora se pensarmos na intersecção da terceira luna com a região determinada anteriormente, teremos novamente os triângulos T e T' . Ou seja, a área comum as três lunas é igual a $2A_T$.

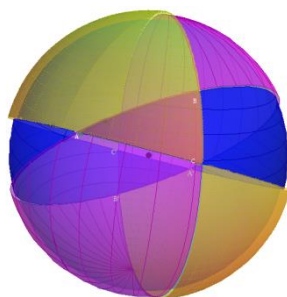


Figura 5.43: Intersecção de três lunas completas.

Logo, a região composta pelas três lunas determina a seguinte área:

$$\begin{aligned} & R_C + (4\alpha R^2 + 4\beta R^2 - 2A_T) - 2A_T \\ &= 4\gamma R^2 + (4\alpha R^2 + 4\beta R^2 - 2A_T) - 2A_T \\ &= 4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2 - 4A_T \\ &= 4R^2(\alpha + \beta + \gamma) - 4A_T \end{aligned}$$

Perceba que a região composta pelas três lunas determina a área da esfera de raio R ($4\pi R^2$). Temos então:

$$4\pi R^2 = 4R^2(\alpha + \beta + \gamma) - 4A_T$$

$$\pi R^2 = R^2(\alpha + \beta + \gamma) - A_T$$

$$R^2(\alpha + \beta + \gamma) = \pi R^2 + A_T$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_T}{R^2}$$

5.2 Geometria Hiperbólica: uma proposta didática

5.2.1 Apresentação do ambiente de exploração “Disco de Poincaré”

O ambiente Disco de Poincaré foi construído com o software GeoGebra. Usando o recurso de macro-construção foram produzidas ferramentas que constroem retas, segmentos, círculos, triângulos, entre outros, na geometria hiperbólica. Estas ferramentas estão disponibilizadas junto aos demais recursos do Geogebra, conforme ilustra a figura 5.44 - este é o menu hiperbólico. No Apêndice 1 tem o link da página onde está disponível o arquivo “*menu hiperbólico*”, esse deve ser carregado no Geogebra, para que fique a disposição.

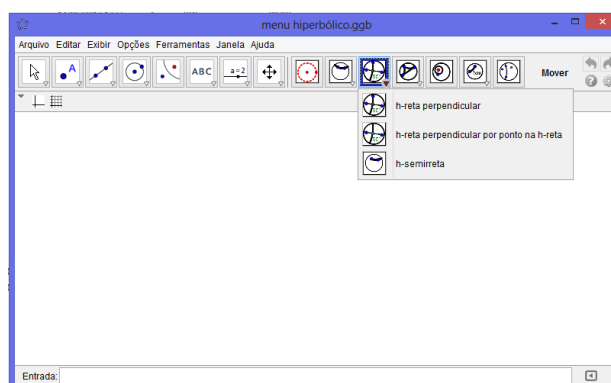


Figura 5.44: Software Geogebra com Menu Hiperbólico

Além do menu hiperbólico, outros recursos do Geogebra a serem utilizados são apresentados na tabela 05, abaixo.

Ferramenta	Recurso
 Mover	<ul style="list-style-type: none"> • Mover – selecionando essa ferramenta e pressionando o botão esquerdo do mouse sobre um objeto é possível arrastá-lo por toda a janela geométrica.
 Novo Ponto	<ul style="list-style-type: none"> • Novo Ponto - selecionando esta ferramenta e clicando na janela geométrica, com o botão esquerdo do mouse, cria-se um novo ponto.
 Interseção de Dois Objetos	<ul style="list-style-type: none"> • Interseção de Dois Objetos - o ponto de interseção entre dois objetos pode ser criado selecionando os objetos, dessa forma todas as interseções existentes são marcadas.
 Ponto Médio ou Centro	<ul style="list-style-type: none"> • Ponto Médio ou Centro – para utilizar essa ferramenta, clique, com o botão esquerdo do mouse, em dois pontos para obter seu ponto médio; ou em um segmento para obter seu ponto médio.
 Reta definida por Dois Pontos	<ul style="list-style-type: none"> • Reta definida por Dois Pontos – marcando-se dois pontos, traça-se a reta definida por eles.
 Segmento definido por Dois Pontos	<ul style="list-style-type: none"> • Segmento definido por Dois Pontos – marcando-se dois pontos, determinam-se as extremidades do segmento a ser traçado.
 Semirreta Definida por Dois Pontos	<ul style="list-style-type: none"> • Semirreta definida por Dois Pontos – traça-se uma semi-reta a partir do primeiro ponto marcado contendo o segundo ponto.
 Reta Perpendicular	<ul style="list-style-type: none"> • Reta Perpendicular – clicando, com o botão esquerdo do mouse, em uma reta e em um ponto constrói-se uma reta perpendicular à reta considerada, passando pelo referido ponto. O mesmo pode ser feito considerando-se um segmento de reta, ou semirreta.
 Reta Paralela	<ul style="list-style-type: none"> • Reta Paralela – clicando, com o botão esquerdo do mouse, em uma reta e em um ponto fora dela, constrói-se uma reta paralela à reta considerada, passando pelo referido ponto.
 Mediatriz	<ul style="list-style-type: none"> • Mediatriz – clicando, com o botão esquerdo do mouse, nas extremidades de um segmento de reta, constrói-se uma reta perpendicular a este passando pelo seu ponto médio.
 Bissetriz	<ul style="list-style-type: none"> • Bissetriz – clicando, com o botão esquerdo do mouse, sobre duas retas concorrentes, já traçadas, constrói-se as bissetrizes dos ângulos determinados pelas retas. Ou ainda, clicando nos pontos que determinam um ângulo.
 Círculo dados Centro e Um de seus Pontos	<ul style="list-style-type: none"> • Círculo definido pelo Centro e um de seus Pontos – marcando um ponto A e um ponto B, traça-se o círculo com centro A, passando por B.
 Círculo definido por Três Pontos	<ul style="list-style-type: none"> • Círculo definido por Três Pontos – marcando três pontos não-colineares, traça-se o círculo que passa por eles.














 Arco Circular definido por Três Pontos	<ul style="list-style-type: none"> • Arco Circular definido por Três Pontos – marcando três pontos não-colineares, traça-se o círculo que passa por eles.
 Ângulo	<ul style="list-style-type: none"> • Ângulo – com essa ferramenta traçam-se ângulos: entre três pontos; entre dois segmentos; entre duas retas (ou semirretas); interior de um polígono.
 Distância, Comprimento ou Perímetro	<ul style="list-style-type: none"> • Distância, Comprimento ou Perímetro – essa ferramenta fornece, na janela algébrica, a distância entre dois pontos; duas linhas; ou um ponto e uma linha. Fornece também o perímetro de um polígono ou o comprimento de uma circunferência.
 Reflexão em Relação a uma Reta	<ul style="list-style-type: none"> • Reflexão com Relação a uma Reta - essa ferramenta desenha um objeto refletido em relação a uma reta. Clique no objeto a ser refletido, com o botão esquerdo do mouse e, a seguir, clique na reta através da qual ocorrerá a reflexão.
 Reflexão em Relação a um Ponto	<ul style="list-style-type: none"> • Reflexão com Relação a um Ponto - essa ferramenta desenha um objeto refletido em relação a um ponto. Clique, com o botão esquerdo do mouse, no objeto a ser refletido e, a seguir, clique no ponto através do qual ocorrerá a reflexão.
 Reflexão em Relação a um Círculo (Inversão)	<ul style="list-style-type: none"> • Reflexão com Relação a um Círculo - essa ferramenta desenha um objeto refletido em relação a um círculo. Clique, com o botão esquerdo do mouse, no objeto a ser refletido e, a seguir, clique no círculo através do qual ocorrerá a reflexão.

Tabela 5: Recursos euclidianos do software GeoGebra

A direita das ferramentas euclidianas encontra-se o menu hiperbólico. É importante destacar que a ferramenta  **Disco de Poincaré** define o plano hiperbólico. Todas as construções devem ser realizadas no interior do círculo que define o Disco. Além disso, sempre que utilizarmos uma ferramenta hiperbólica deve-se primeiro selecionar o Disco para que a ferramenta determine o plano hiperbólico com o qual iremos trabalhando. Para fins de notação, utilizaremos a letra “*h*” antes de cada ferramenta para diferenciar os objetos geométricos hiperbólicos dos euclidianos. Assim por exemplo, quando tratarmos de uma reta hiperbólica, a ferramenta estará nomeada como *h-reta*.

Na Tabela 6 são apresentados estes recursos.

Ferramenta	Recurso
 Disco de Poincaré	<ul style="list-style-type: none"> • Disco de Poincaré– selecionando essa ferramenta e clicando nos pontos A e B, define-se Disco de Poincaré de centro em A passando por B.

 h-reta	<ul style="list-style-type: none"> • h-reta – selecionando o Disco, clicando em dois pontos internos ao Disco, define-se a reta hiperbólica passando pelos dois pontos.
 h-reta (pontos do horizonte)	<ul style="list-style-type: none"> • h-reta (pontos da borda) – selecionando o Disco, clicando em dois pontos internos ao Disco, define-se a reta hiperbólica passando pelos dois pontos, incluindo os pontos de intersecção da reta com o Disco. Esses pontos não pertencem ao Plano Hiperbólico e são chamados de <i>Pontos Ideais</i>.
 h-semirreta	<ul style="list-style-type: none"> • h-semirreta – selecionando o Disco, clicando em dois pontos A e B internos ao Disco, define-se a semirreta hiperbólica de origem em A passando por B.
 h-segmento	<ul style="list-style-type: none"> • h-segmento – selecionando o Disco, clicando em dois pontos A e B internos ao Disco, define-se o segmento hiperbólico AB.
 h-reta perpendicular	<ul style="list-style-type: none"> • h-reta perpendicular – selecionando o Disco, clicando em uma h-reta e por um ponto P externo h-reta, define-se a reta hiperbólica perpendicular a h-reta passando por P.
 h-reta perp. passando por ponto na reta	<ul style="list-style-type: none"> • h-reta perp. passando por ponto na reta – selecionando o Disco, clicando em uma h-reta e por um ponto P na h-reta, define-se a reta hiperbólica perpendicular a h-reta passando por P.
 h-circulo	<ul style="list-style-type: none"> • h-circulo – selecionando o Disco, clicando em nos pontos A e B interno ao Disco, define-se o círculo hiperbólico de centro em A passando por B.
 h-triângulo	<ul style="list-style-type: none"> • h-triângulo – selecionando o Disco, clicando em nos pontos A, B e C internos ao Disco, define-se o triângulo hiperbólico de vértices A, B e C.
 h-triângulo equilátero	<ul style="list-style-type: none"> • h-triângulo equilátero – selecionando o Disco, clicando em nos pontos A e B interno ao Disco, define-se o triângulo equilátero de vértices A e B.
 h-quadrilátero	<ul style="list-style-type: none"> • h-triângulo – selecionando o Disco, clicando em no sentido horário, ou anti-horário, nos pontos A, B, C e D internos ao Disco, define-se o quadrilátero hiperbólico de vértices A, B, C e D.
 h-medida de ângulo	<ul style="list-style-type: none"> • h-medida de ângulo– selecionando o Disco, clicando nos pontos A, B e C internos ao Disco, define-se a medida do ângulo de vértice em B.
 h-soma dos ângulos de triângulo	<ul style="list-style-type: none"> • h-soma dos ângulos de triângulo – selecionando o Disco, clicando em nos vértices A, B e C de um h-triângulo, define-se a medida dos ângulos desse h-triângulo, bem como a sua soma.
 h-soma dos ângulos de um quadrilátero	<ul style="list-style-type: none"> • h-soma dos ângulos de um quadrilátero – selecionando o Disco, clicando, no sentido horário ou anti-horário, nos vértices A, B, C e D de um h-quadrilátero, define-se a medida dos ângulos desse h-quadrilátero, bem como a sua soma.
 h-comprimento de segmento	<ul style="list-style-type: none"> • h-comprimento de segmento – selecionando o Disco, clicando nos pontos A, B internos ao Disco, define-se a medida da distância hiperbólica dos pontos A e B.



 h-ponto médio	<ul style="list-style-type: none"> • h-ponto médio – selecionando o Disco, clicando nos pontos A e B internos ao Disco, define-se o ponto médio hiperbólico de A e B.
 h-reflexão ponto	<ul style="list-style-type: none"> • h-reflexão de ponto – selecionando o Disco, clicando em uma h-reta e após em um ponto A interno ao Disco, define-se o ponto de reflexão de A em relação a h-reta.

Tabela 6: Recursos do menu hiperbólico

5.2.2. Uma visita ao mundo da geometria hiperbólica

Neste novo mundo, de início precisamos nos acostumar com uma nova ideia de reta e isto exige um desprendimento daquela construída a partir de nossas experiências imediatas. As atividades propostas vão ajudar no desenvolvimento desta nova ideia e também na exploração de propriedades que não funcionam mais como aquelas que conhecemos na geometria euclidiana. Isso acontece porque estaremos trabalhando no mundo da geometria hiperbólica, fazendo uso do modelo “Disco de Poincaré”.

Neste modelo, o espaço é o interior de um disco. A circunferência borda do disco é chamada de horizonte do espaço – os pontos que nela estão são ditos pontos ideais e não pertencem ao espaço. No que segue vamos sempre nos referir ao espaço como sendo o “Disco”.

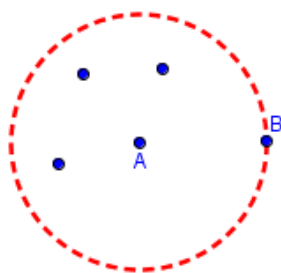


Figura 5.45: Espaço “Disco” e alguns de seus pontos

No ambiente de exploração, a circunferência que limita o Disco está pontilhada. Isto é feito para realçar o fato de que os pontos dessa circunferência não pertencem ao espaço hiperbólico.

Atividade 1 – Retas e paralelismo

Explicação

Dados dois pontos A e B no disco D, existe uma única circunferência C que passa por A e B e é ortogonal a D, conforme ilustra a figura 5.46.

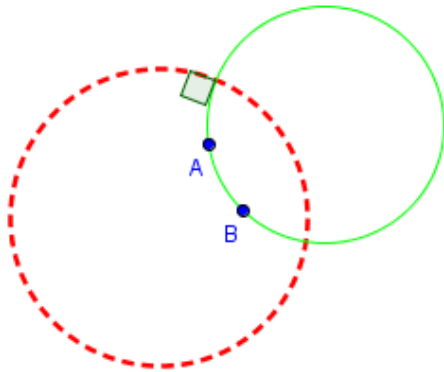


Figura 5.46: Circunferência C ortogonal ao disco D

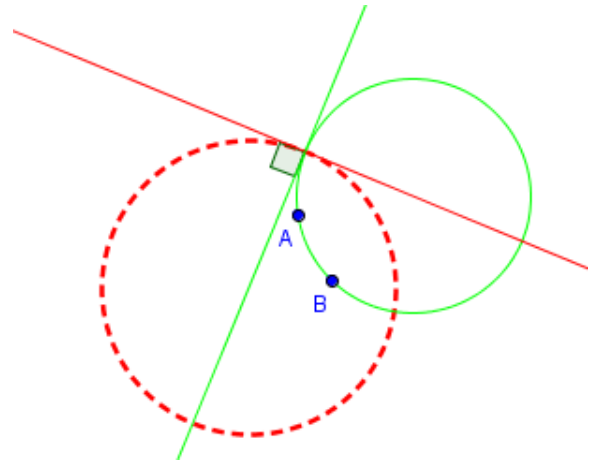


Figura 5.47: Retas tangentes a D e C no ponto A e perpendiculares entre si

Vale lembrar que duas circunferências que se interseccionam são ortogonais quando as respectivas retas tangentes em cada um dos dois pontos de interseção são retas perpendiculares entre si, conforme ilustrado na figura 5.47 acima.

Uma h-reta no Disco D é de um dos tipos:

- um arco, com extremos M e N, de uma circunferência C que é ortogonal a D nos pontos M e N. Na figura 5.46 temos o desenho de uma h-reta no espaço D. Lembramos que os pontos M e N não pertencem a h-reta, pois encontram-se no horizonte do Disco.
- segmento do tipo diâmetro do Disco e novamente lembramos que os pontos extremos do diâmetro não pertencem a h-reta, pois estão no horizonte do Disco.

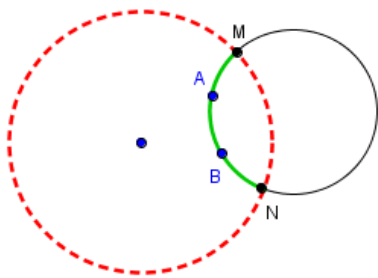


Figura 5.48: Reta hiperbólica como arco de circunferência ortogonal

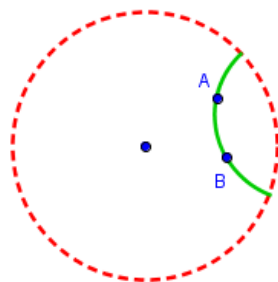


Figura 5.49: Reta hiperbólica passando pelos pontos A e B

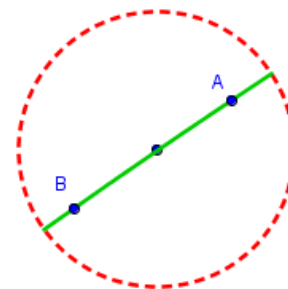


Figura 5.50: Reta hiperbólica como diâmetro do Disco

Construção - Faça construções que ilustrem as respostas às perguntas:

a) quantas h-retas passam por um ponto A do Disco? Movimente A e observe o quão curvada pode ser uma h-reta. As h-retas curvam na direção do horizonte do Disco? Na direção do centro do Disco? Quando que uma h-reta se parece com um segmento euclidiano?

b) quantas h-retas passam por dois pontos A e B do Disco? Movimente o ponto A e observe o comportamento da h-reta

c) dado uma h-reta e um ponto P que não pertence a ela, quantas h-retas passam por P e não interceptam a h-reta dada?

d) como podem ser os feixes de h-retas paralelas?

Comentário para o professor:

O objetivo dessa atividade é de que os alunos comecem a se habituar ao novo modelo de geometria, relacionando suas observações com o que já sabem da geometria euclidiana. Os alunos devem observar que, assim como na geometria euclidiana, na geometria hiperbólica por um ponto passam infinitas retas (Figura 5.51) e por dois pontos passa somente uma reta (Figura 5.53). É importante chamar a atenção do aluno que uma reta hiperbólica é infinita – podemos movimentar um ponto da reta na direção do horizonte e ele nunca vai chegar ao horizonte. Movimentando pontos que estão na reta podem observar variações na forma da reta hiperbólica, sendo uma situação extrema o caso em que a reta é um diâmetro do Disco (Figura 5.53).

Em relação à questão c), os alunos vão observar que por um ponto exterior a uma h-reta passam infinitas retas paralelas (Figura 5.52). Ou seja, o quinto postulado da geometria euclidiana – o axioma das paralelas - não é válido na geometria hiperbólica

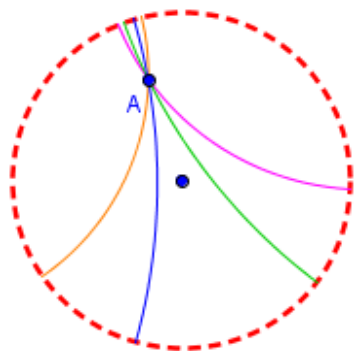


Figura 5.51: Retas hiperbólicas passando pelo ponto A

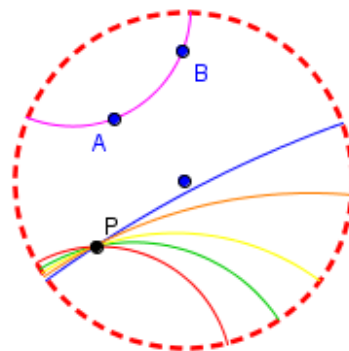


Figura 5.52: Retas hiperbólicas passando por P

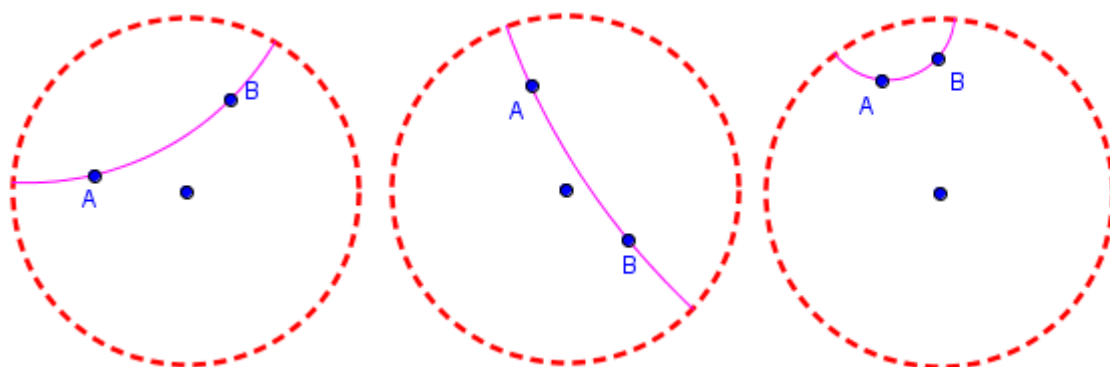


Figura 5.53: Reta hiperbólica passando por A e por B

Atividade 2: Segmento, semirreta, ângulo e retas perpendiculares

Explicação

Um h-segmento é um arco de extremos A e B contido em uma h-reta (Figura 5.54).

Se A é um ponto de uma h-reta tem-se que A divide a h-reta em dois arcos. Estes arcos são as h-semirretas de origem A. Vamos identificar uma h-semirreta usando dois pontos A e B – o primeiro é a origem da h-semirreta e o segundo é um ponto que nela está (Figura 5.55).

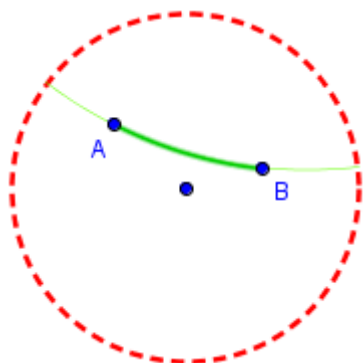


Figura 5.54: Arco verde como h-segmento AB

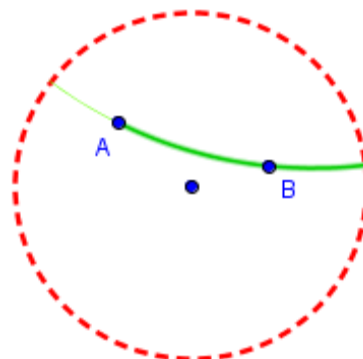


Figura 5.55: Arco verde como h-semirreta de origem A passando por B

Um h-ângulo de vértice A é a união de duas h-semirretas com origem comum A. As h-semirretas são ditas lados do h-ângulo. A medida do h-ângulo é dada pela medida, entre 0° e 180° , do ângulo euclidiano formado pelas retas (euclidianas) tangentes às h-semirretas no ponto A.

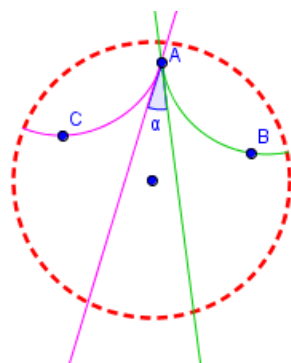


Figura 5.56: Ângulo hiperbólico

Dizemos que duas h-retas que se interseccionam são perpendiculares quando a medida do ângulo entre elas é igual a 90° .

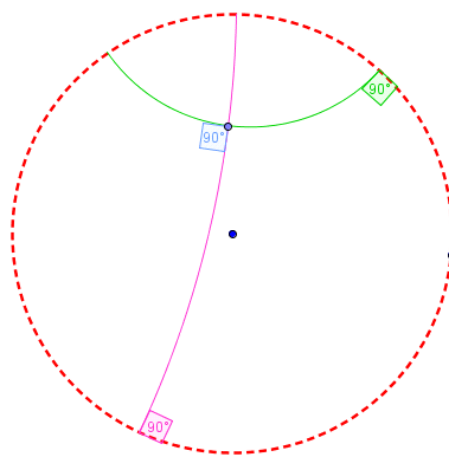


Figura 5.57: Perpendicularidade de duas h-retas hiperbólicas perpendiculares

Construção 2.1 - Faça construções que ilustrem as respostas às perguntas:

a) a partir de três pontos C, D e E construa um ângulo de vértice D. Como é a variação da medida deste ângulo? Quando a medida se aproxima de 0 grau? Quando a medida se aproxima de 180 graus? Sugestão: movimente o vértice D do ângulo e observe a medida do ângulo.

b) dada uma h-reta e um ponto P nesta h-reta, quantas h-retas perpendiculares a h-reta dada e passando por P podem ser construídas? Movimente o ponto P e observe o comportamento das duas h-retas. Em que situação o conceito de h-perpendicularidade é o mesmo conceito de perpendicularidade da geometria euclidiana?

c) dada uma h-reta e um ponto P fora desta h-reta, quantas retas perpendiculares a reta dada e passando por P podem ser construídas? Movimente o ponto P e observe o comportamento das duas h-retas. Em que situação o conceito de h-perpendicularidade coincide com o conceito de perpendicularidade da geometria euclidiana?

d) dadas duas h-retas que se interceptam, como se comportam os pares de ângulos adjacentes? Como se comportam os pares de ângulos opostos pelo vértice?

Comentários para o professor:

Nesta atividade o aluno irá se familiarizar com o conceito de h-ângulo e com o conceito de h-retas perpendiculares. Também irá observar propriedades da geometria euclidiana que se mantém ou que não se mantém nesta nova geometria. No item a) o aluno deverá observar que conforme o vértice D se aproxima do horizonte, a medida do h-ângulo vai tendendo a zero (Figura 5.58). Nos itens b) e c) o aluno deve perceber que por um ponto P passa uma única h-reta perpendicular a h-reta dada (Figura 5.59). Ainda deve notar que quando o ponto de intersecção das h-retas (no item b é o próprio ponto P) coincide com o centro do Disco, o conceito de perpendicularismo da geometria hiperbólica coincide com o da euclidiana. No item d) O aluno deve perceber

que, assim como na geometria euclidiana, na geometria hiperbólica os ângulos adjacentes são suplementares e os ângulos opostos pelo vértice são congruentes (Figura 5.60).

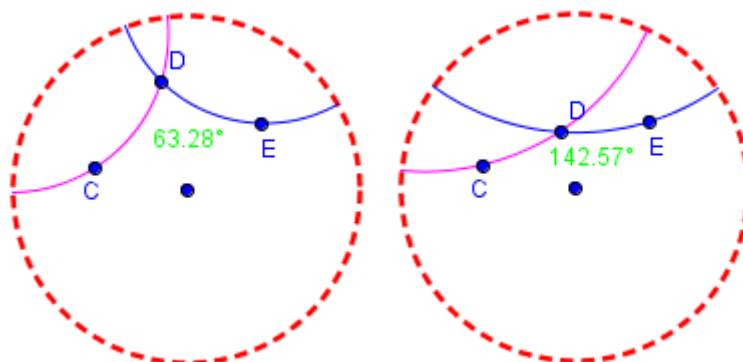


Figura 5.58: Variação dos ângulos esféricos

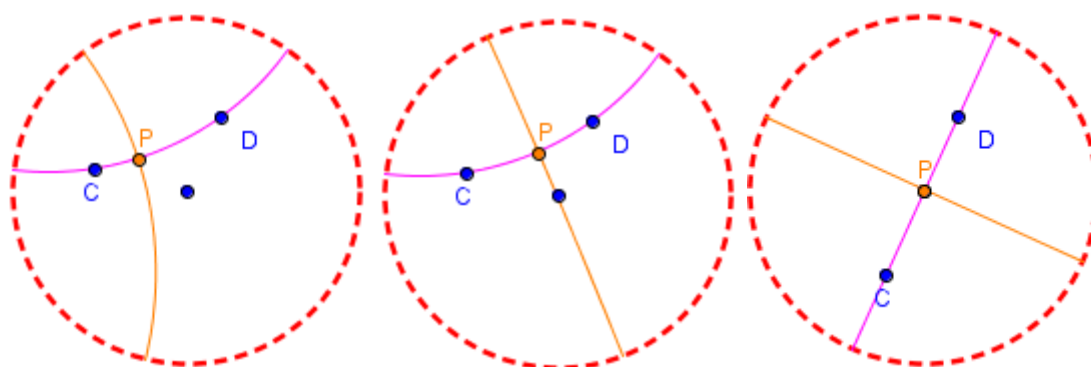


Figura 5.59: H-reta perpendicular passando por P

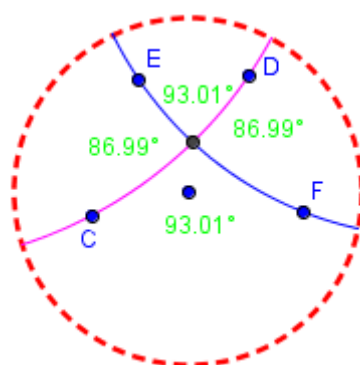


Figura 5.60: Ângulos opostos pelo vértice

Construção 2.2 Faça construções que ilustrem as respostas às perguntas:

a) dadas h1-reta e h2-reta perpendiculares a h3-reta, então as duas retas iniciais são paralelas?

b) dadas h1-reta e h2-reta paralelas a uma terceira h3-reta, então h1-reta e h2-reta são paralelas entre si?

c) dadas h1-reta e h2-reta paralelas entre si e h3-reta perpendicular a primeira reta, como se comportam os ângulos alternos internos determinados pela h3-reta que é transversal as outras duas?

d) dadas h1-reta e h2-reta paralelas e h3-reta transversal, como se comportam os pares de ângulos alternos internos? Os pares de ângulos internos consecutivos são suplementares?

Comentários para o professor:

Esta atividade tem como objetivo a exploração de relações entre retas secantes no plano hiperbólico. No item a) o aluno deve observar que, assim como na geometria euclidiana, as h-retas h1 e h2 serão paralelas entre si (Figura 5.61). Durante a exploração do item b), espera-se que o aluno perceba que se duas h-retas são paralelas a uma terceira, não significa que necessariamente serão paralelas entre si (Figura 5.65).

Nos itens c) e d) o aluno deverá notar que dadas duas h-retas e uma h-reta transversal às duas primeiras, diferentemente da geometria euclidiana, os pares de ângulos alternos internos, em geral, não serão congruentes (Figura 5.63), assim como os ângulos internos consecutivos não serão suplementares (Figura 5.64). Temos ainda no item c), que a h-reta h3, em alguns casos, não intercepta a reta h2 (Figura 5.62).

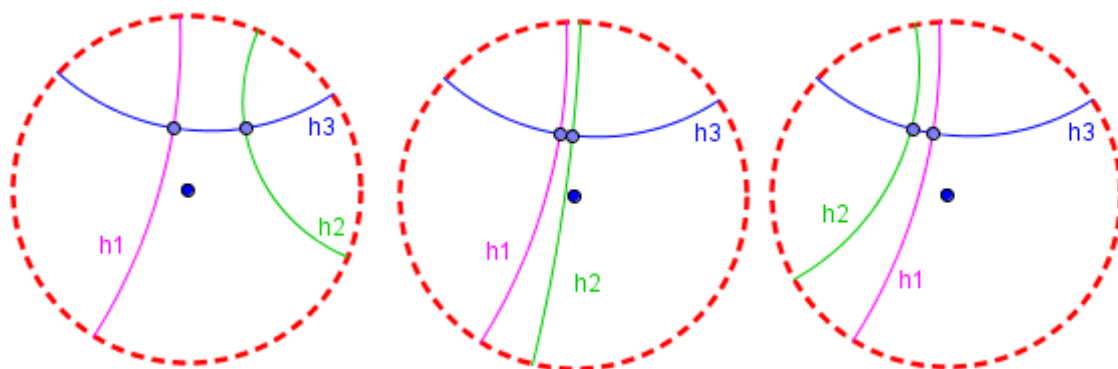


Figura 5.61 : H-retas h1 e h2 perpendiculares a h3

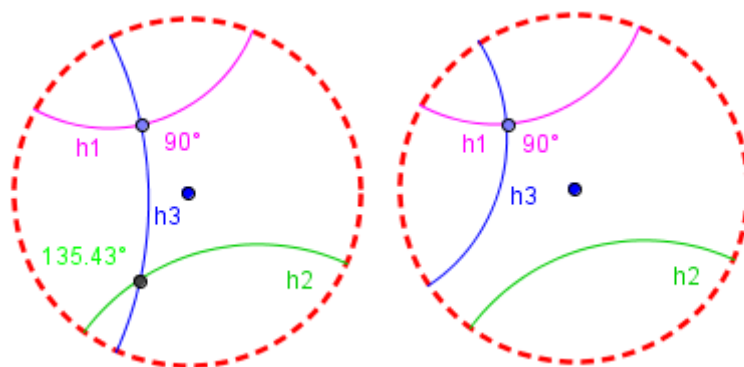


Figura 5.62: H-retas h_1 e h_2 paralelas, e h_1 e h_3 perpendiculares.

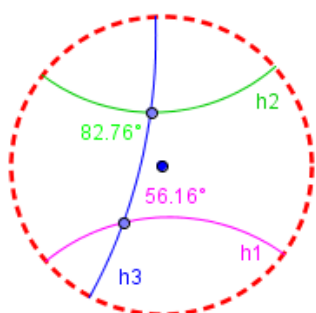


Figura 5.63: H-ângulos alternos internos

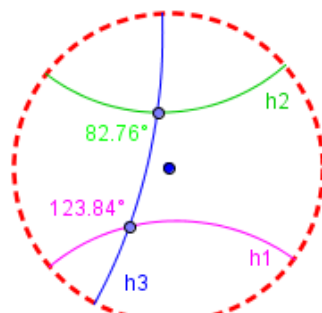


Figura 5.64: H-ângulos internos consecutivos

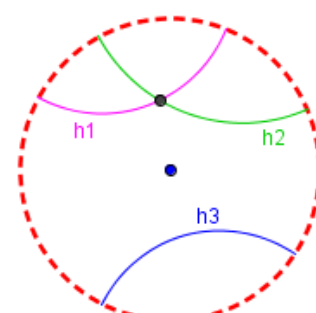


Figura 5.65 : H-retas h_1 e h_2 paralelas a h_3 , porém secantes entre si

Atividade 3: Distância e círculos

De início vamos entender, de forma intuitiva, como é a noção de distância no Disco. O Disco é um espaço infinito, no seguinte sentido: uma criatura habitando este mundo bidimensional pode caminhar na direção do horizonte, com passos de mesmo tamanho sem nunca chegar ao fim de sua caminhada. Um observador externo vê os passos da pessoa irem se tornando cada vez menores, mas isto é uma distorção da distância para quem está olhando o caminho hiperbólico com “olhos euclidianos”. Na figura 5.66 temos os primeiros passos da criatura, depois um zoom para ver que a partir do ponto que ela está outros tantos passo iguais podem ser dados. Poderíamos repetir o procedimento de zoom indefinidamente, cada vez ampliando mais, e mesmo assim a criatura ainda poderia dar outros tantos passos iguais, sem nunca chegar ao horizonte.

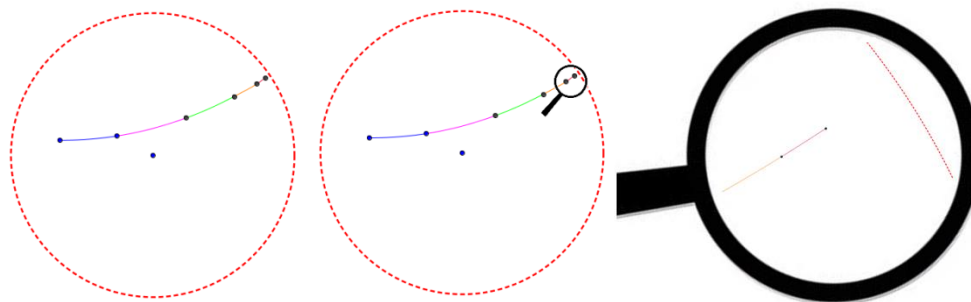


Figura 5.66: Segmentos hiperbólicos congruentes tendendo ao infinito hiperbólico

Todos os h-segmentos ilustrados na figura 5.66 possuem mesmo comprimento hiperbólico, apesar de aos “olhos euclidianos” o h-segmento rosa pareça ser maior que o h-segmento laranja. Isso ocorre porque, aos “olhos euclidianos”, as distâncias são distorcidas nesse modelo.

Dados dois pontos A e B no Disco D, um círculo de centro A passando por B é o conjunto de pontos P, tais que a distância de P a A é igual à distância de B à A.

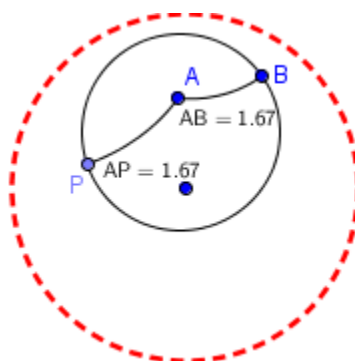


Figura 5.67: Círculo hiperbólico de centro A passando por B

Observamos que pode se demonstrar que um h-círculo é um círculo euclidiano, mas o seu centro, no geral, é diferente do centro do círculo euclidiano.

Construção: Faça construções que ilustrem as respostas às perguntas:

a) construa um círculo de centro A passando por B. Movimente os pontos A e B e observe o comportamento do raio. O que acontece quando aproximamos o centro do h- círculo do horizonte do Disco? O que acontece quando aproximamos o centro do h-círculo do centro do Disco? Quando o

centro do h-círculo se aproxima do seu centro euclidiano? (ver observação feita acima)

b) usando círculo, construa diferentes caminhos de uma criatura, que se move no Disco com passos de mesmo tamanho. Quando, ao nosso olhar, o caminho se parece com um caminho euclidiano?

Comentário para o professor:

Os alunos devem ser lembrados de que as distâncias euclidianas não são conservadas no plano hiperbólico. Todos os pontos da circunferência do círculo no plano hiperbólico estão à mesma distância constante entre o centro do círculo, não importando a posição do centro do h-círculo. Conforme o ponto C se aproxima do horizonte do Disco, o centro hiperbólico do h-círculo se distancia do centro euclidiano (Figura 5.68), e conforme se aproxima do centro do Disco, o centro hiperbólico do h-círculo tende ao centro euclidiano da circunferência que define o h-círculo (Figura 5.69).

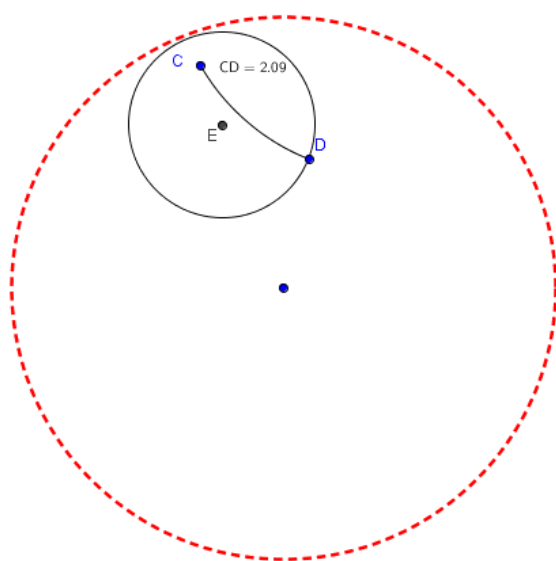


Figura 5.68: Centro C do h-círculo distante do centro euclidiano E

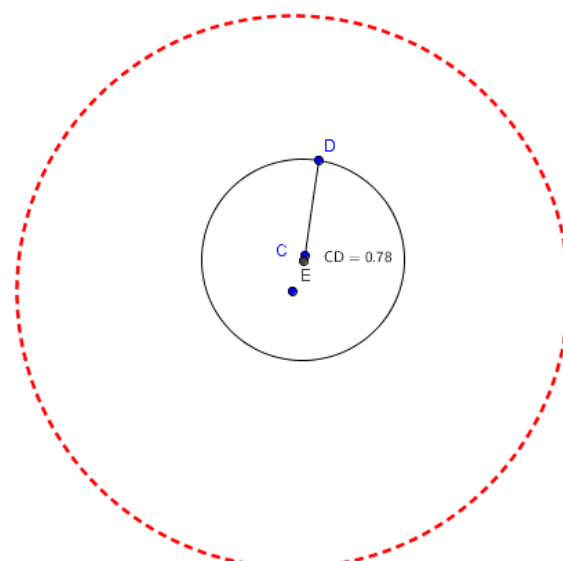


Figura 5.69: Centro C do h-círculo tendendo ao centro euclidiano E

Na atividade *b)* o aluno trabalhará com o conceito de distância hiperbólica ao construir os caminhos, formados por segmentos de mesmo tamanho. Nas figuras 5.70 e 5.71 temos dois destes caminhos, ambos como mesmo número de passos. Aos nossos olhos euclidianos, o primeiro caminho

surpreende, pois sendo feito com passos de mesmo tamanho, não é isto que vemos na figura. Já o segundo caminho registra os passos de mesmo tamanho, pois é um caminho que próximo do centro do Disco, e nesta região a geometria hiperbólica se aproxima da geometria euclidiana.

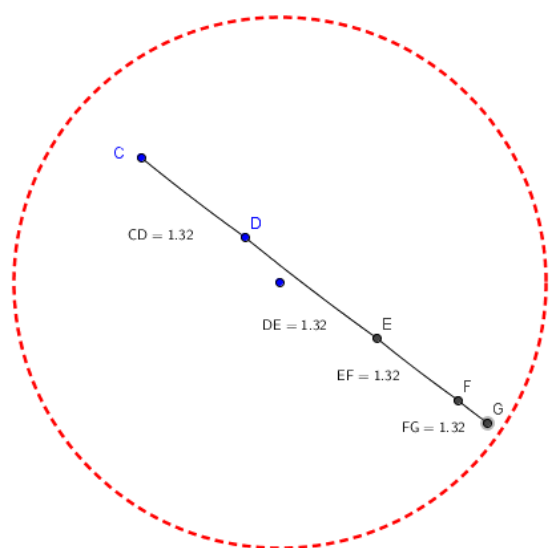


Figura 5.70: Segmentos hiperbólicos em sequência de mesmo comprimento com os pontos distantes

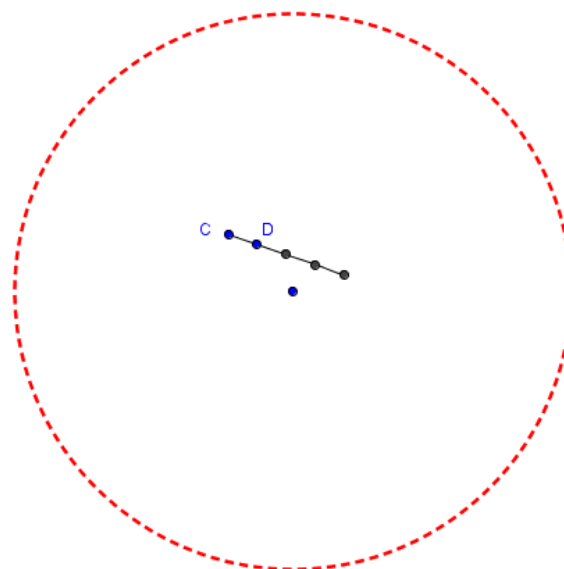


Figura 5.71: Segmentos hiperbólicos em sequência de mesmo comprimento com os pontos próximos

Atividade 4: Construções com régua e compasso

- O procedimento de construção de mediatriz de um segmento usado na geometria euclidiana funciona na geometria hiperbólica?
- O procedimento de construção da bissetriz de um ângulo usado na geometria euclidiana funciona na geometria hiperbólica?

Utilize a ferramenta  h-ponto médio.

Comentário para o professor:

O aluno deve perceber que os procedimentos para a construção das retas mediatriz e bissetriz na geometria euclidiana também são válidos na geometria hiperbólica. Para construção da reta mediatriz do h -segmento AB , o aluno deverá utilizar h -círculos de centro A passando por B , e de centro B passando por A (Figura 5.72).

Na construção da reta bissetriz do h -ângulo CDE , determina-se primeiramente um h -círculo, de centro no vértice D , secante aos h -segmentos DC e DE . Após, construir os pontos F e G , intersecção do h -círculo com os h -segmentos, deve-se determinar o h -ponto médio H dos pontos F e G . A bissetriz é a h -reta que passa pelos pontos D e H (Figura 5.73).

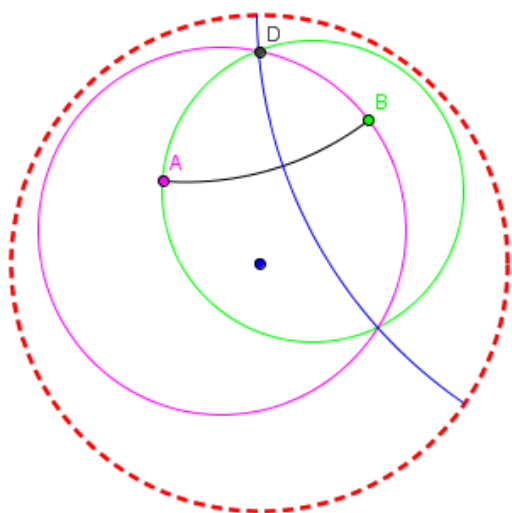


Figura 5.72: H-reta azul como mediatriz do h -segmento AB

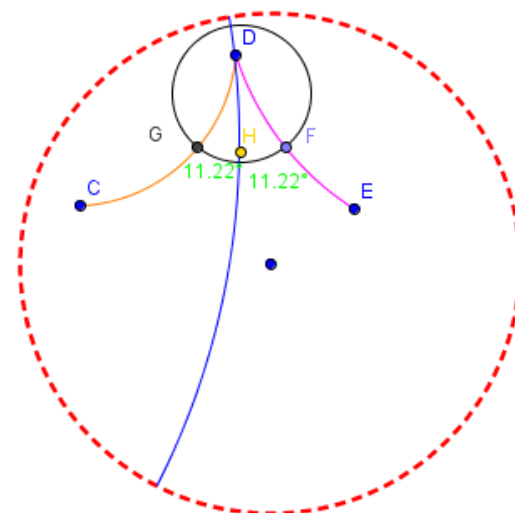


Figura 5.73: H-reta azul como bissetriz do ângulo CDE .

Atividade 5: Triângulos

Dados três pontos não colineares A, B e C no Disco, os h -segmentos unindo estes três pontos formam um h -triângulo. Os pontos são ditos vértices do h -triângulo, e os h -segmentos são ditos lados do h -triângulo. No h -triângulo temos três ângulos, determinados pelas h -semirretas que passam pelos pontos A e B , B e C , e A e C .

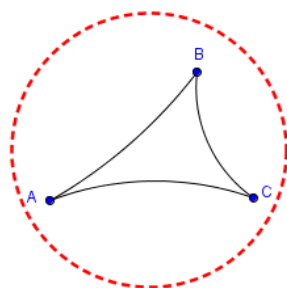


Figura 5.74: Triângulo hiperbólico ABC

Construção: Faça construções que ilustrem as respostas às perguntas:

a) o conhecido procedimento de construção do triângulo equilátero funciona no Disco? Quando o h-triângulo equilátero se parece com um triângulo euclidiano?

b) como se comporta a medida dos h-ângulos de um h-triângulo equilátero?

c) como construir um h-triângulo isósceles? Os h-ângulos da base do h-triângulo são congruentes entre si? Movimente os h-vértices e observe as formas possíveis para um h- triângulo isósceles

Comentário para o professor:

No item a) o aluno vai observar que o procedimento funciona, mas a aparência do h-triângulo surpreende (Figura 5.75). No item b) vai ser possível encontrar h-triângulos equiláteros com medida de h-ângulo muito próximo de zero. Os procedimentos de construção de triângulo isósceles usado na geometria euclidiana funciona na geometria hiperbólica e os ângulos da base do h- triângulo isósceles são congruentes (Figura 5.77); mas a aparência do triângulo isósceles pode ser muito estranha! A construção pode ser a partir de raios do h-círculo; e também pode ser a partir do h-segmento base do h-triângulo e da h-mediatrix deste h-segmento.

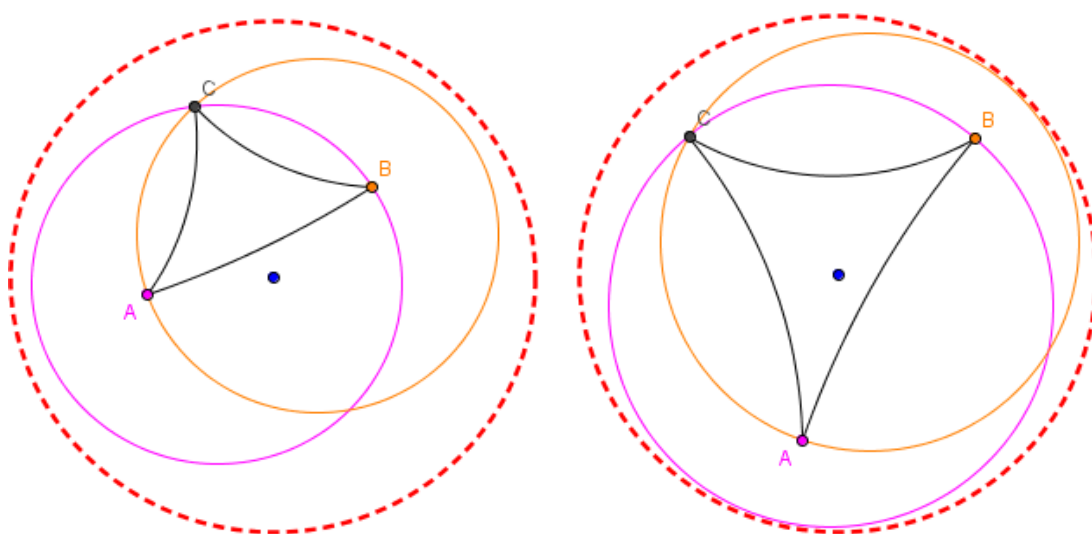


Figura 5.75: Triângulo hiperbólico equilátero a partir da intersecção dos h-círculos

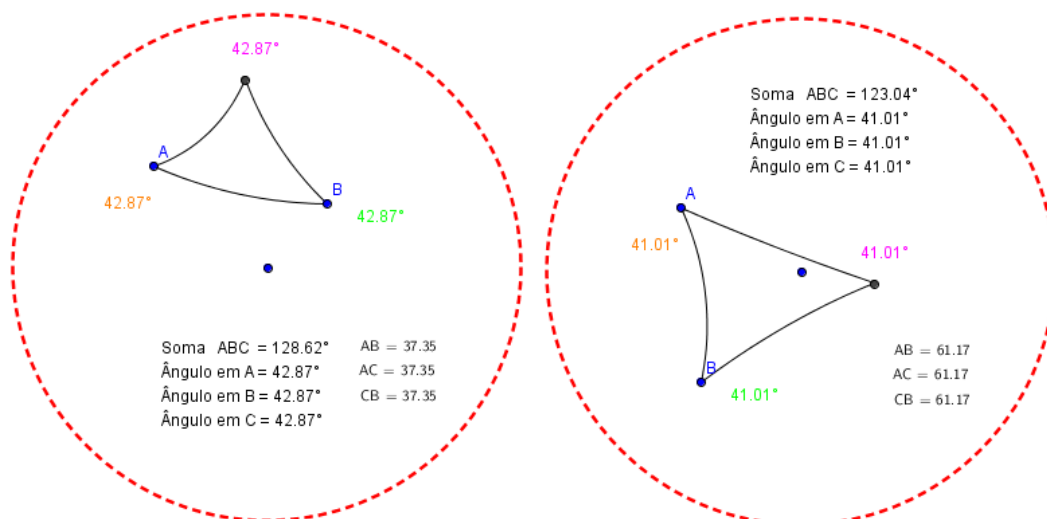


Figura 5.76: Triângulo equilátero hiperbólico

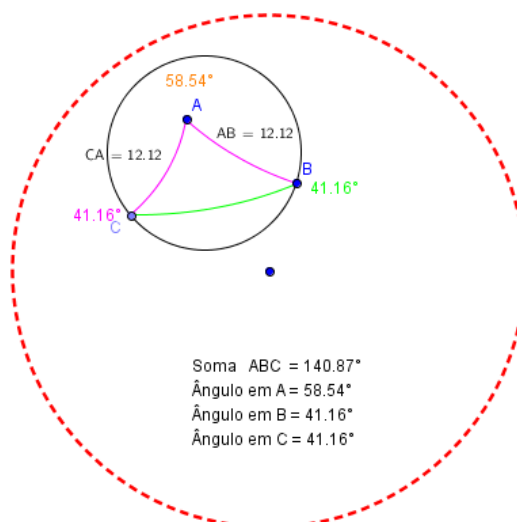


Figura 5.77: Triângulo hiperbólico isóscele a partir dos raios de um h-círculo

Atividade 6: Soma dos ângulos de um triângulo

Na atividade anterior vimos que um h-triângulo equilátero pode ter aparência que surpreende. E mais, os h-ângulos podem medir menos que 60 graus. Agora vamos tentar descobrir como pode ser a variação da soma dos ângulos de um h-triângulo qualquer.

Construção: Faça construções que ilustrem as respostas às perguntas:

a) construa um h-triângulo, movimente seus vértices e responda: a soma dos h-ângulos de um h-triângulo pode ser quase zero?

b) como deve ser o h-triângulo para que a soma dos ângulos internos se aproxime de 180° ? Escreva com suas palavras o que está sendo observado

c) o que se pode dizer sobre a soma dos ângulos de um h-triângulo?

Comentário para o professor:

O item a) vai mostrar que, diferentemente da geometria euclidiana, a soma dos ângulos internos de um h-triângulo não é constante, e mais, vai mostrar que esta soma é sempre menor que 180° (Figura 5.78). No item b) o aluno vai observar que a soma se aproxima 180° quando os vértices dos triângulos estão próximos (Figura 5.79), ou seja, em pequenas distâncias, a geometria hiperbólica se aproxima da geometria euclidiana. Com o item c) o aluno vai observar a possibilidade de variação da soma dos ângulos, entre 0° e 180° , e é interessante observar a mudança na “curvatura” dos h- triângulos, conforme a soma aumenta de 0° a 180° .

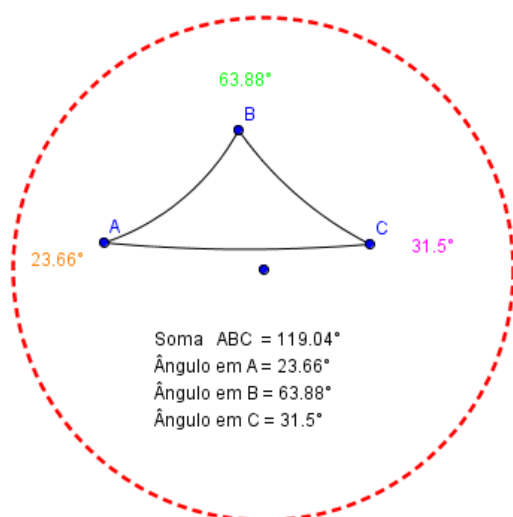


Figura 5.78: Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico

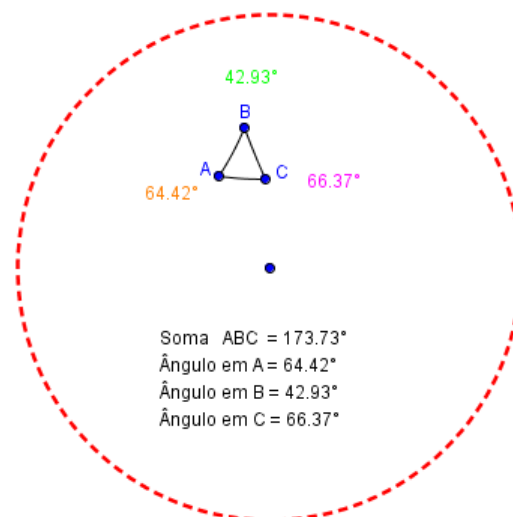


Figura 5.79: Soma dos ângulos próximo de 180°

Atividade 7: Quadriláteros

Explicação

Um h-quadrilátero ABCD é um polígono formado por quatro h-segmentos, conforme mostra a figura 5.80.

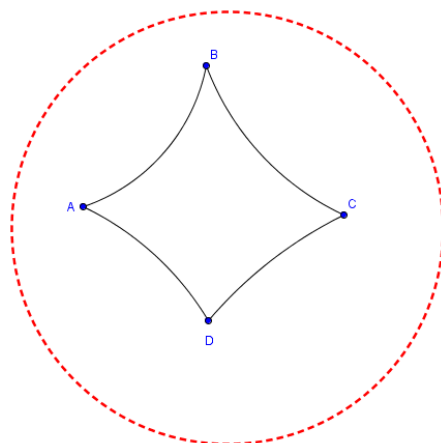


Figura 5.80: Quadrilátero Hiperbólico ABCD

Um h-quadrilátero ABCD é dito regular se os quatro lados são congruentes entre si e os quatro ângulos são congruentes entre si.

Construção - Faça construções que ilustrem as respostas às perguntas:

- o procedimento de construção de quadrado usado na geometria euclidiana funciona na geometria hiperbólica?
- quando um h-quadrilátero regular fica parecido com um quadrado euclidiano?
- é possível construir um h-quadrilátero com quatro ângulos retos?
- se as duas h-diagonais de um h-quadrilátero se bissectam em seus pontos médios e são congruentes, que tipo de h-quadrilátero se obtém?

Comentário para o professor:

Durante o processo de construção do quadrado, a partir de h-círculo e h-reta perpendicular, o aluno perceberá que não é possível construir um quadrado utilizando esse procedimento. Através desse processo,

determinaremos um quadrilátero com três lados congruentes e apenas dois ângulos retos. Esse quadrilátero é conhecido como Quadrilátero de Saccheri (Figura 5.81). Ao realizar essa atividade, o aluno também perceberá que não é possível construir um quadrilátero com quatro ângulos retos, uma vez que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor que 180° , teremos então que a soma dos ângulos de um quadrilátero será menor que 360° .

Realizando a construção de um quadrado a partir de um segmento e sua mediatriz, será possível determinar um quadrilátero equiângulo com os lados congruentes (Figura 5.82). Perceba, porém, que a medida dos ângulos internos não é constante e sempre diferente de 90° . Quando os pontos desse quadrilátero forem próximos, a medida dos ângulos internos tende a 90° , bem como a soma tende a 360° (Figura 5.83). Nessa configuração o quadrilátero regular se aproxima do quadrado euclidiano.

No item d), espera-se que o aluno comece a construção a partir de um h-círculo e de duas h-retas passando pelo seu centro, determinando assim dois diâmetros. O quadrilátero formado pela intersecção das h-retas com o h-círculo possui diagonais congruentes se interceptando em seus respectivos pontos médios. Obteremos um quadrilátero equiângulo em que os lados opostos são congruentes, ou seja, determinamos o que denominamos de retângulo hiperbólico (Figura 5.84).

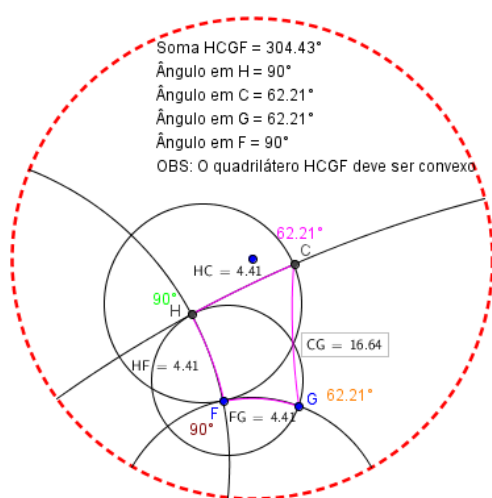


Figura 5.81: Quadrilátero de Saccheri

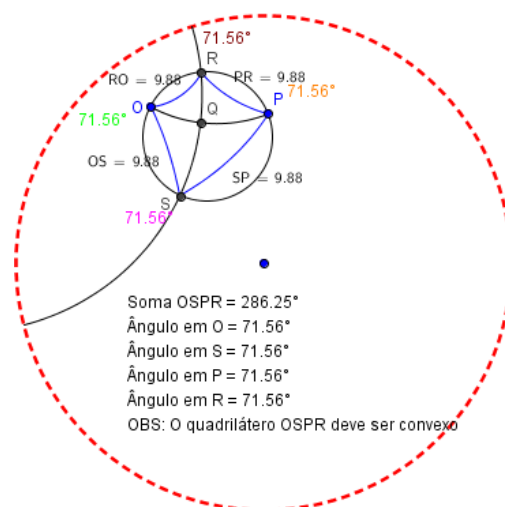


Figura 5.82: H-quadrilátero azul como quadrado hiperbólico

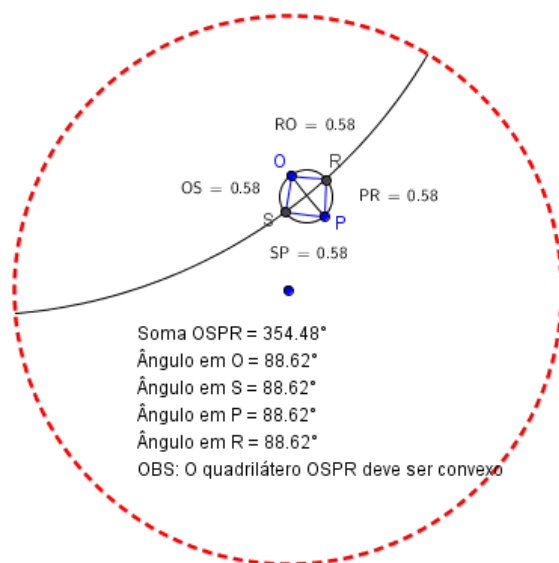


Figura 5.83: Quadrado hiperbólico tendendo ao quadrado euclidiano

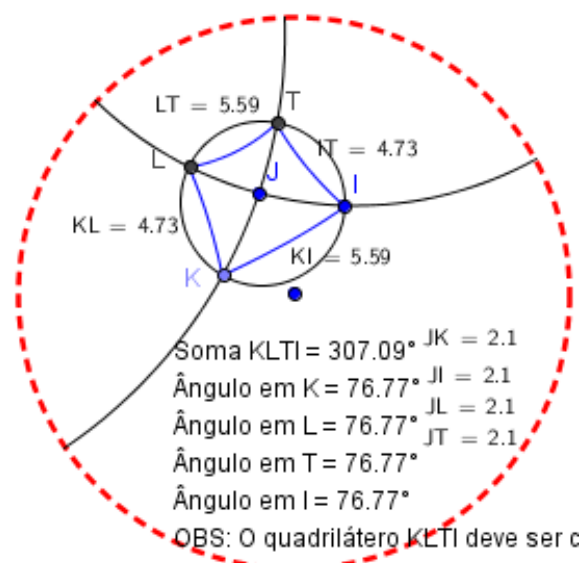


Figura 5.84: H-quadrilátero azul como retângulo hiperbólico

Atividade 8: Congruência de triângulos e pavimentação do Disco (Escher)

Dois h-triângulos são congruentes se tem, em correspondência, os h-segmentos em congruência, bem como os correspondentes h-ângulos em congruência.

Para obter h-triângulos congruentes podemos usar a transformação de h-reflexão segundo uma h-reta. Esta h-transformação funciona da mesma forma que a transformação de reflexão segundo uma reta na geometria euclidiana. A figura 5.85 ilustra o procedimento que resulta na h-reflexão de um ponto.

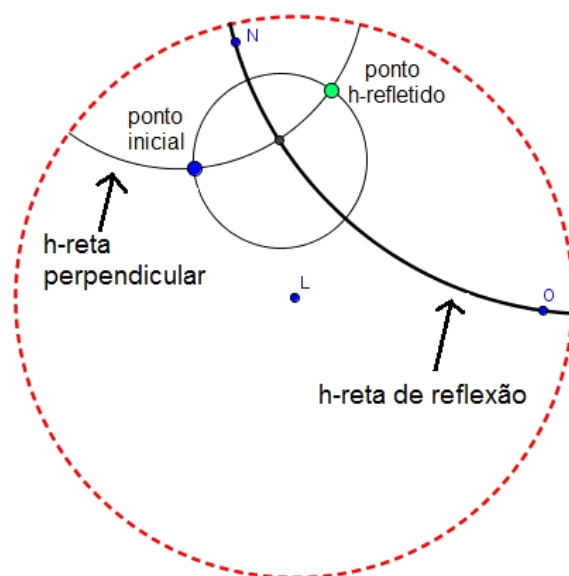


Figura 5.85: Reflexão de um ponto por uma h-reta

São as propriedades do mundo da geometria hiperbólica que explicam os efeitos que se veem nas obras de Escher⁷. Com o recurso h-reflexão podemos construir “obras” no mesmo espírito. É isso que vamos aprender a fazer nesta última atividade.

Estas duas vistas abaixo são chamadas de Círculo Limite I (esquerda) e Círculo Limite III. Essa última, umas das poucas gravuras coloridas de Escher, foi feita em 1959.

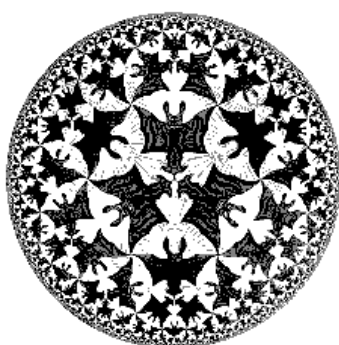


Figura 5.86: Círculo Limite I



Figura 5.87: Círculo Limite III

Na obra de Escher, acima e à direita, vemos centralizado no Disco, uma composição de h-quadrilátero regular e quatro h-triângulos equiláteros.

⁷Maurits Cornelis Escher(1898 – 1972), artista Holandês que, percebendo que o modelo do disco de Poincaré fornecia muitas possibilidades para a representação do infinito, realizou uma série de obras que exploravam o modelo de geometria hiperbólica.

Observe que esta mesma composição está sempre se repetindo e, aos nossos olhos euclidianos, conforme a composição vai se aproximando do horizonte ela vai parecendo cada vez menor, no nosso olhar euclidiano. No entanto, os h-quadriláteros são congruentes entre si e os h-triângulos também. Este é o mundo da geometria hiperbólica.

Na atividade proposta o objetivo é construir figuras que lembram os trabalhos de Escher apresentados acima. Se olharmos as gravuras de Escher parece-nos que o desenho cobriu o Disco, no entanto este é um olhar euclidiano. A atividade 3, apresentada anteriormente, esclarece esta impressão visual.

Abaixo temos uma figura produzida a partir de um h-triângulo equilátero. Ela inicia com o h-triângulo centralizado e segue com a sua reflexão segundo as três h-retas suportes dos seus lados. Estas reflexões geram novos triângulos equiláteros aos quais se aplicam novos procedimentos de h-reflexão, e assim sucessivamente, de modo a obter a figura 5.88. Os efeitos de cores, obtidos na figura 5.89, são trabalhados em um editor de imagem. Realize essa construção! E faça outras experiências.

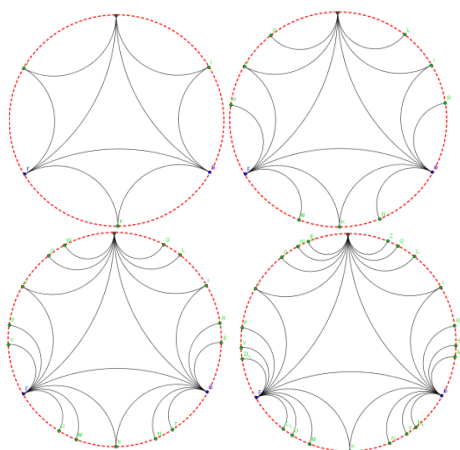


Figura 5.88: Passos de construção da pavimentação

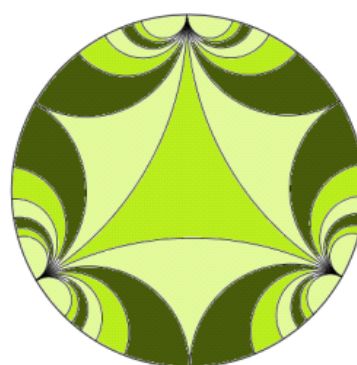


Figura 5.89: Pavimentação colorida

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A importância da inclusão de conteúdos de geometrias não-euclidianas nos currículos escolares está evidenciada nos estudos realizados por diferentes autores (BONETE, 2000; BARBOSA, 1985; ANDRADE, 2006). Segundo Bonete (2000), esta inclusão pode proporcionar uma visão mais ampla dos conhecimentos geométricos euclidiano e não-euclidiano e uma compreensão do significado filosófico desses conhecimentos. A autora complementa que o conhecimento de outras geometrias

Permitirá a melhoria da qualidade do ensino da Geometria Euclidiana e possibilitará também a inclusão dessas geometrias nesses níveis de ensino [fundamental e médio], uma vez que, com esse conhecimento não terão a Geometria Euclidiana como a única geometria possível e verdadeira, mas como, uma das possíveis e verdadeiras. (p.229)

O maior objetivo desta dissertação é disponibilizar aos professores de escola um material didático para que possam fazer, com seus alunos, um trabalho de introdução das ideias básicas das geometrias esférica e hiperbólica.

Na elaboração da proposta didática tivemos sempre em mente disponibilizar um produto que fosse diferenciado em certos aspectos. Assim:

- construímos o micro-mundo “Disco de Poincaré” , usando o software GeoGebra; tem-se nele uma adequada coleção de ferramentas para que os alunos explorem os conceitos e ideias do mundo hiperbólico
- concebemos uma sequência de atividades que pressupõem o uso de ambientes de geometria dinâmica, porque neles os alunos podem fazer muitos experimentos de pensamento ; o recurso digital utilizado é de domínio público e portanto de fácil instalação e uso nas escolas;
- organizamos a sequência de atividades em grau crescente de complexidade, fazendo sempre um paralelo com conceitos e ideias que são conhecidos da geometria euclidiana. Comentários para o professor, que realçam a aprendizagem pretendida com a realização da atividade, acompanham a proposta.

Ao final do trabalho estamos colocando à disposição dos professores de

escola um produto didático que se constitui em um material em formato de “Livro Didático”, disponível em www.mat.ufrgs.br/~ppgem/produto_didatico/ribeiro.

Acreditamos que o conhecimento e a compreensão das geometrias não euclidianas podem ajudar os alunos na construção do pensamento geométrico, e de uma forma desafiadora, pois as impressões visuais precisam ser colocadas sob controle racional. E nessa formação os softwares de geometria dinâmica são importantes aliados. Isto porque, neles, os alunos têm a oportunidade de fazer muitos experimentos de pensamento. Através da manipulação direta nas figuras que estão na tela do computador, os alunos vão construindo as imagens mentais que dão suporte as novas ideias. Diríamos que a proposta de ensino introdutório das geometrias não-euclidianas através da geometria dinâmica, que trazemos nesta dissertação, pode ser uma contribuição na direção de um ensino diferenciado da geometria escolar.

Este trabalho não teve a pretensão de realizar demonstrações no campo das geometrias não-euclidianas. É uma proposta voltada para a realização dos primeiros experimentos de pensamento no universo das geometrias não-euclidianas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALEKSANDROV, A. D. et al. Visión General de la Matemática. In: ___. *La Matemática: su contenido, métodos y significado*. v. 3. Madrid: Alianza Universidad, 1976.
- ALVES, S. *Geometria Não Euclidiana*. São Paulo: IME – USP: material para oficina; Semana da Licenciatura, 2008.
- ANDRADE, Plácido F. *Introdução à Geometria Hiperbólica Plana: O disco de Poincaré*. Fortaleza: UFC, 2006. 153 p.
- ARAUJO, Claudio Lopes de. GeoGebra, um bom software livre. *Revista do Professor de Matemática*, nº 67, p. 43-7, 3º quadrimestre de 2008.
- BALACHEFF, N. *Processus de preuve et situations de validation*. Educational Studies in Mathematics, Vol. 18, n. 2, p. 147-176, 1987.
- BALACHEFF, N. *Apprendre la Preuve*, em Sallantin J., Szczeciniarz J.-J. (editores) *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*. Paris, France : PUF, 1998.
- BARBOSA, Joao Lucas Marques. *Geometria hiperbólica*. Goiania. Ed. Da UFG, 2002.
- BARBOSA, Joao Lucas Marques. *Geometria Hiperbólica*. 4ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. 167 p.
- BARBOSA, Joao Lucas Marques. *Geometria Hiperbólica*, Rio de Janeiro: IMPA, 1985.
- BARBOSA, R. M.; LOURENÇO, M.L. Nova investigação de aplicabilidade do Cabri-Géomètre I: Geometria Analítica. In: VI Encontro Nacional de Educação Matemática. *Anais... São Leopoldo*, vol. II, p.725-727, 1998.
- BONETE, Izabel Passos. *As geometrias não-euclidianas em cursos de licenciatura: algumas experiências* Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas. . 2000.
- BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G. *Informática e Educação Matemática*. 2a ed., Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Temas Transversais*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CABARITI, Eliane. *Geometria Hiperbólica: uma proposta didática em ambiente informatizado*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. 2004.

CAVICHIOLO, Claudia Vanessa. *Geometrias nãoEuclidianas na formação inicial do professor de matemática: o que dizem os formadores*. Dissertação. Curitiba, 2011

COSTA, R. J. M. *O jogar e aprender: a Informática no Ensino de Álgebra Elementar*. UFRJ- IM- NCE: Dissertação (Mestrado em Informática), 2004.

COUTINHO, Lázaro. *Convite às Geometrias não-euclidianas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2001. 114 p.

COUTINHO, Lázaro. *Convite às Geometrias Não-Euclidianas*. Rio de Janeiro, 1989.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação para uma realidade em transição*. Campinas: Papirus, 1999.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*. São Paulo: Sumus, 1986.

DE VILLIERS, M. *Developing understanding of proof within the context of defining quadrilaterals*, em International News Letter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, <http://www-cabri.imag.fr/Preuve>, mai/juin 2000.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Unicamp, 2002. 844 p.

EVES, H. *Tópicos de História da Geometria*. São Paulo: Atual, 1992.

FETISSOV, A.I. *A Demonstração em Geometria*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997. 74 p.

FETISSOV, A.I. *A demonstração em geometria*. Coleção Matemática: Aprendendo e Ensinando. São Paulo: Atual, 1994.

FIORENTINI, Dário. *Alguns modos de ver e conceber o ensino de Matemática no Brasil*. Zetetiké, v. 3, n. 4, p. 1-37, 1995.

FISCHBEIN, E. *The theory of figural concepts*, Educational Studies in Mathematics, vol. 24/2, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994. MOORE, R. 1994: *Making Transition to Formal Proof*, Educational Studies in Mathematics, vol. 27, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994.

FISCHBEIN, E. 'The theory of figural concepts', Educational Studies in Mathematics, v. 24/2, p.139- 162. 1993.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. IN: *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, p.1-13, Belo Horizonte, 1996.

GRAVINA, M. A. *Os Ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético-Dedutivo*. Tese de Doutorado. UFRGS, Porto Alegre, 2001.

GRAVINA, M. A. SANTAROSA, L. M. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. IN: *Anais do IV Congresso RIBIE*, 1998.

GRAVINA et al (org). *Matemática, mídias digitais e didática : tripé para formação de professores de matemática*. Porto Alegre :Evangraf, 2012.

HAJNAL, F. *O estudo do paralelismo no ensino da Geometria Analítica Plana: do empírico ao dedutivo*. Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

HENRIQUES, A. *Ensino e aprendizagem da geometria métrica:...* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro - SP, 1999.

KALEFF, A. M. R. A importância do ensino da geometria na formação do educador matemático. *Boletim GEPEN*, ano XVII, n. 31, 1993, p. 35-40.

KALEFF, A. M. R. Ainda sobre o teorema de Euler para poliedros convexos. *Revista do Professor de Matemática*. n. 5, p. 23-27, 1984

LORENZATO, Sérgio; FIORENTINI, Dário. *Iniciação à investigação em Educação Matemática*. Campinas: CEMPEM/COPEMA, 2001.

MARTOS, Z. G. *Geometrias não-euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental*. (Dissertação de Mestrado). Rio Claro: IGCE. 2002.

NACARATO, A.M. et al. *Compartilhando saberes: professores e futuros professores em um grupo de trabalho colaborativo*. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2005, Porto.

OLIVERO, F. ; ARZARELLO, F.; MICHELETTI, C.; ROBUTTI, O. Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry. PME, Stellenbosh, South Africa: 1998.

PAIS, L. C. *Ensinar e aprender matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PAIS, L. C. e FREITAS, J. L. *Um estudo dos processos de provas no ensino e na aprendizagem da geometria no ensino fundamental*. Bolema, no. 13, Rio Claro, Editora UNESP, 1999, p. 62-70.

PAPERT, S. *Logo: Computadores e Educação*. Tradução. J. A. Valente, B. Bitelman e A. V. Ripper. São Paulo: Brasiliense, 1985.

PATAKI, I. *Geometria Esférica para a Formação de Professores: Uma proposta interdisciplinar*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2003.

PAVANELLO, M. R. *O abandono do ensino da Geometria: Uma visão histórica*. 196 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1989.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Tradução e Adaptação: Heitor Lisboa Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P. *O desenvolvimento profissional do professor de matemática*. In: Educação e Matemática, 31, pp. 9-12 e 20, 1994.

REIS, J. D. S. *Geometria Esférica por meio de Materiais Manipuláveis*. Dissertação (Mestrado) – UNESP, Rio Claro, SP, 2006.

ROCHA, Marília Valério. *Uma Proposta de Ensino Para o Estudo da Geometria Hiperbólica em Ambiente de Geometria Dinâmica*. Dissertação de Mestrado. PUC, São Paulo, 2008.

SCHUMANN, H.; GREEN, D. *Learning geometry through interactive construction*. In: *Discovering Geometry with a computer – Using CabriGéomètre*. Heinz Schumann and David Green. Ed. Chartwell-Bratt, 1994.

SOUZA, M.C.G. *O 5º Postulado de Euclides: A Fagulha que Desencadeou uma Revolução no Pensamento Geométrico*. Dissertação (Mestrado em Ciências), Universidade do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1998.

WOLFE, H. E. *Introduction to non-euclidean geometry*. New York: The Dryden Press, 1945.

VAN DE HIELE, J. A. *Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e Aplicação em Sala de Aula*. 6a edição. Tradução de Paulo Henrique Colonese. Editora Artmed, 2009.

ZULATTO, R. B. A. *Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas*. Dissertação de Mestrado. UNESP Rio Claro, 2002.

APÊNDICE

Apêndice 1: Produto Didático

Link da página: http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem/produto_didatico/rribeiro/

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

Produto Didático



Dissertação:	GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANAS NA ESCOLA: UMA PROPOSTA DE ENSINO ATRAVÉS DA GEOMETRIA DINÂMICA
Autor:	Ricardo Silva Ribeiro
Orientador:	Maria Alice Gravina
Ano:	2013
Produto Didático:	Livro Didático Micro-Mundo Disco de Poincaré