

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Análise numérica de vigas mistas aço-concreto pelo método dos  
elementos finitos: efeitos de longa duração**

**Maiga Marques Dias**

Porto Alegre  
2013

MAIGA MARQUES DIAS

**ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS AÇO-CONCRETO  
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS: EFEITOS DE  
LONGA DURAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia

Porto Alegre  
2013

**MAIGA MARQUES DIAS**

**ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS AÇO-CONCRETO  
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS: EFEITOS DE  
LONGA DURAÇÃO**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Área de Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 3 de Maio de 2013

Prof. Inácio Benvegno Morsch  
Dr. PPGEC/UFRGS  
Orientador

Prof. Armando Miguel Awruch  
Dr. COPPE/UFRJ  
Co-orientador

Prof. Armando Miguel Awruch  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Moacir Kripka (UPF)**  
Dr. pela COPPE/UFRJ

**Prof. Américo Campos Filho (UFRGS)**  
Dr. pela USP/SP

**Profª. Virgínia Maria Rosito D'Avila Bessa (UFRGS)**  
Dra. pelo PPGEC/UFRGS

Dedico este trabalho à  
minha família, em especial  
aos meus pais Aureci e Edilson.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por sempre me guiar durante toda minha trajetória.

Ao professor Inácio Benvegno Morsch pela dedicação, apoio e transmissão do conhecimento durante a realização deste trabalho. Pela disponibilidade e pelas preciosas conversas durante as orientações. Por, algumas vezes, fazer papel de psicólogo e me tranquilizar, para que eu pudesse enxergar a solução. Pela contribuição em minha formação pessoal e profissional.

Ao professor Armando Miguel Awruch pelas orientações e ensinamentos sobre a vida, e principalmente sobre engenharia. Pelas conversas diárias e por acreditar em mim, mesmo que algumas vezes eu duvidasse da minha capacidade.

Aos demais professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC/UFRGS pelo conhecimento transmitido durante o curso. Aos professores da Universidade de Passo Fundo, em especial ao professor Moacir Kripka, pela preciosa contribuição à minha formação durante a graduação.

Ao colega Jorge Luis Palomino Tamayo por todo apoio a minha pesquisa, pela disponibilidade em sanar minhas dúvidas e pelo conhecimento transmitido, os quais foram fundamentais na elaboração deste trabalho.

À amizade de todos os colegas que tive o prazer de conhecer nestes dois curtos e intensos anos de mestrado, os quais tornaram esta caminhada muito mais agradável. Em especial aos colegas Jennefer e Tiago pelos incansáveis dias de estudo. À Carina por dividir contas, aflições e risadas nos almoços de domingo.

Ao Pedro, meu namorado, amigo e colega pelo companheirismo e, principalmente pela paciência. E, à sua família por compartilharem bons momentos comigo.

Aos meus pais por todo amor e incentivo, que mesmo estando longe choraram e sorriram junto comigo. Aos meus irmãos Maico e Móira, meus cunhados e meu sobrinho pelo apoio. Às minhas avós Alexandrina e Dalvina (*in memoriam*) pelo carinho. À prima Carolina pela amizade e ajuda com minha mudança para Porto Alegre e aos demais familiares e amigos que torceram por mim.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior – CAPES pela bolsa de estudos.

É a vida que vale, que importa, a vida e nada mais, o processo, a maneira de descobrir, a tarefa perpétua e imorredoura. E não a descoberta em si, absolutamente.

*Fiódor M. Dostoiévski*

## RESUMO

DIAS, M. M. Análise numérica de vigas mistas aço-concreto pelo método dos elementos finitos: efeitos de longa duração. 2013. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

As vigas mistas de aço e concreto têm sido muito empregadas em obras civis de pequeno e grande porte. O emprego em conjunto de vigas de aço e lajes de concreto armado visa explorar as melhores características de cada um dos elementos, gerando uma solução estrutural econômica e eficiente. Os conectores de cisalhamento, que são os dispositivos de união desses elementos, permitem a transferência do esforço cortante ao longo da estrutura. O presente trabalho trata-se de uma continuação do estudo realizado por Tamayo (2011), o qual desenvolveu um código computacional em linguagem Fortran 90, utilizando o método dos elementos finitos, que é capaz de representar estruturas de vigas mistas em análises de curta duração. A teoria da plasticidade associada com um algoritmo de retorno explícito para o concreto e aço foi empregada em um procedimento incremental iterativo. O presente trabalho visa incluir a análise de serviço no código elasto-plástico, ou seja, a consideração dos efeitos de longa duração que interferem na distribuição de tensões e deformações da estrutura. A teoria da solidificação proposta por Bazant e Prasannan (1988) foi empregada para analisar os efeitos devido à fluência do concreto. Para o cálculo da fluência empregou-se um modelo reológico baseado na cadeia de Kelvin em série. Usando conceitos da série de Dirichlet, os parâmetros desta cadeia foram obtidos através de uma aproximação por mínimos quadrados. Em conjunto com a teoria da solidificação, os modelos de fluência e retração, propostos pelo Comité Euro-International du Béton (1990), foram utilizados. O amolecimento do concreto foi adicionado ao modelo computacional. Para os conectores de cisalhamento foi testada uma nova formulação empregando uma rigidez secante. As tarefas de pré e pós processamento foram realizadas através do *software* GiD que auxiliou nas etapas de geração da geometria e malha de elementos finitos, confecção de arquivo de entrada, e visualização dos resultados. Exemplos testados experimentalmente foram empregados para validação do modelo numérico proposto.

Palavras-chave: viga-mista aço-concreto; viscoelasticidade; fluência; retração.

## ABSTRACT

DIAS, M. M. Numerical analysis of steel-concrete composite beams by using the Finite Element Method: creep and shrinkage effects over time. 2013. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Steel-concrete composite beams have been widely applied to both small and large civil works. The combined use of steel beams and reinforced concrete slabs aims to explore the best features of each one, creating an efficient structural solution with low cost. The shear connectors are the device joining the steel beam and concrete slab, allowing the transfer of shear along the structure. This work follows the research of Tamayo (2011) who developed a program in Fortran 90 language, using the finite element method, capable of representing composite beam structures in short time analyzes. The associated theory of plasticity with an explicit return algorithm for concrete and steel was used in an incremental iterative procedure. This study aims to include the service analysis into the code, which means to account for long-term effects that influence the stress and strain distribution in the structure. The solidification theory proposed by Bazant and Prasannan (1988) was used to examine the creep effects of concrete. For the creep calculation, a rheological model based on the Kelvin chain in series was employed. Using concepts of Dirichlet series, the chain parameters were obtained through a least squares approximation. Together with the solidification theory, the creep and shrinkage models proposed by the Comité Euro-International du Béton (1990) were used. The concrete softening was added to the computational model. A new formulation using secant stiffness was tested for the shear connectors modeling. The pre and post processing tasks were performed using the GiD *software*, which was used for geometry and finite element mesh generation, input file writing, and results viewing. Specimens tested experimentally were used for the validation of the proposed numerical model.

Key-words: steel-concrete composite beam; viscoelasticity; creep; shrinkage.



## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>11</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>15</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS.....</b>	<b>17</b>
<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>19</b>
1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	19
1.2 OBJETIVOS.....	21
1.3 JUSTIFICATIVA.....	21
1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	22
1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO.....	24
<b>2 EFEITOS DIFERIDOS.....</b>	<b>26</b>
2.1 FLUÊNCIA E RETRAÇÃO DO CONCRETO.....	26
2.1.1 Fluência básica, por secagem e reversibilidade dos efeitos diferidos.....	26
2.1.2 Causas da fluência e retração.....	28
2.1.3 Efeitos da fluência e retração.....	29
2.1.4 Fatores que afetam a fluência e a retração.....	30
2.2 VISCOELASTICIDADE.....	32
2.2.1 Modelos reológicos básicos.....	33
2.2.2 Modelos reológicos generalizados.....	37
2.2.3 Princípio da superposição.....	38
<b>3 METODOLOGIA.....</b>	<b>41</b>
3.1 TEORIA DA SOLIDIFICAÇÃO PARA FLUÊNCIA DO CONCRETO.....	42
3.2 LEI DA FLUÊNCIA EM TERMOS DE TAXA.....	43
3.2.1 Solução numérica com algoritmo exponencial.....	45
3.2.2 Modelo do CEB-FIP 90 para fluência.....	48
3.2.3 Modelo do CEB-FIP 90 para retração.....	51
3.2.4 Ajuste da curva do CEB-FIP 90.....	52
3.3 MODELAGEM DO CONCRETO (TAMAYO, 2011).....	53
3.3.1 Modelo para o concreto em compressão.....	53
3.3.2 Modelo para o concreto em tração.....	55
3.3.3 Modelo para a armadura passiva.....	57
3.4 ELEMENTO FINITO EMPREGADO PARA O CONCRETO.....	58
3.5 MODELAGEM DOS CONECTORES (TAMAYO, 2011).....	61

3.6	MÉTODO DE SOLUÇÃO NÃO-LINEAR EM ELEMENTOS FINITOS .....	64
3.6.1	Discretização espacial.....	64
3.6.2	Princípio dos trabalhos virtuais .....	65
3.6.3	Solução incremental iterativa .....	67
<b>4</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO .....</b>	<b>69</b>
4.1	CUSTOMIZAÇÃO DO GID PARA PRÉ-PROCESSAMENTO.....	69
4.2	PRÉ-PROCESSAMENTO.....	70
4.3	PÓS-PROCESSAMENTO.....	84
4.4	ROTINAS IMPLEMENTADAS NO CÓDIGO EM FORTRAN.....	86
<b>5</b>	<b>ANÁLISES NUMÉRICAS .....</b>	<b>92</b>
5.1	ANÁLISE DE CURTA DURAÇÃO .....	92
5.1.1	Viga mista A2.....	92
5.1.2	Viga mista U4.....	100
5.2	ANÁLISE DE LONGA DURAÇÃO.....	105
5.2.1	Testes de Fluência sob tensões variáveis.....	105
5.2.2	Viga V7/V8 .....	111
5.2.3	Viga K .....	118
5.2.4	Vigas série C.....	120
5.2.5	Laje Jofriet e McNeice .....	130
5.2.6	Viga mista simplesmente apoiada .....	138
5.2.7	Viga mista contínua .....	146
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>158</b>
6.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	160
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>161</b>
	<b>APÊNDICE A – AJUSTE DE CURVAS POR MÍNIMOS QUADRADOS.....</b>	<b>165</b>
	<b>APÊNDICE B – SIMULAÇÕES DOS PARÂMETROS DA CADEIA .....</b>	<b>167</b>
	<b>APÊNDICE C – PASSOS DE TEMPO EMPREGADOS NAS ANÁLISES .....</b>	<b>173</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representação de uma viga mista do tipo aço-concreto. ....	20
Figura 2: Deformação por fluência.....	28
Figura 3: (a) Modelo de Maxwell; (b) Modelo de Kelvin.....	33
Figura 4: Modelo Sólido Padrão.....	35
Figura 5: Modelo generalizado de Kelvin em série.....	37
Figura 6: Superposição na deformação de fluência.....	39
Figura 7: Superfície de plastificação no espaço das tensões principais. ....	54
Figura 8: Diagrama unidimensional tensão-deformação para o concreto tracionado e comprimido.....	55
Figura 9: Configurações possíveis para o concreto fissurado .....	56
Figura 10: Diagrama de retenção de tensões de tração para o concreto fissurado .....	57
Figura 11: Diagrama tensão-deformação para o aço a) trilinear e b) bilinear.....	58
Figura 12: a) Elemento tridimensional sólido quadrático b) Elemento de casca degenerada ..	59
Figura 13: Esquema em camadas do elemento finito empregado para o concreto armado.....	60
Figura 14: Conector de cisalhamento antes e após a deformação .....	61
Figura 15: Rigidez tangente e secante do conector .....	64
Figura 16: História da resposta da estrutura devido à carga externa, fluência e retração. ....	68
Figura 17: Integração do GiD ao <i>solver</i> de cálculo.....	70
Figura 18: Viga mista empregada no exemplo e sistema de eixos coordenados utilizado.....	71
Figura 19: Geometria da laje e malha de elementos quadrático quadrilaterais .....	72
Figura 20: Geometria da viga e malha de elementos lineares quadrilaterais .....	72
Figura 21: Geometria dos conectores com malha de elementos lineares .....	72
Figura 22: Malha final da estrutura .....	73
Figura 23: Direção da normal de cada elemento .....	74
Figura 24: <i>Layers</i> a serem criadas no GiD .....	74
Figura 25: Dados gerais do problema na aba <i>General</i> .....	75
Figura 26: Dados para o cálculo da fluência e retração.....	76
Figura 27: Aba Increment Load Process que define o histórico do carregamento.....	76
Figura 28: Definição do conjunto de camadas de concreto na aba <i>Concrete Labels</i> .....	77
Figura 29: Janela do material para viga de aço .....	79
Figura 30: Material para os conectores.....	79

Figura 31: Material da laje de concreto .....	80
Figura 32: Janela do material da armadura de reforço .....	81
Figura 33: Definição das condições de contorno .....	82
Figura 34: Aplicação da carga nodal no grau de liberdade correspondente.....	83
Figura 35: Número do material dos conectores.....	83
Figura 36: Número do material para os elementos da viga e rótulo de camadas do concreto .	83
Figura 37: Aplicação da carga de superfície no elemento correspondente .....	84
Figura 38: Finalização do pré-processamento com a geração do arquivo de entrada .....	84
Figura 39: Pós-processamento no <i>software</i> GiD .....	85
Figura 40: Fluxograma do programa principal original .....	87
Figura 41: Fluxograma com alterações do programa principal para análise de longa duração	89
Figura 42: Geometria da viga mista A2.....	93
Figura 43: Curva de rigidez do conector da viga A2.....	94
Figura 44: Malha de elementos finitos empregada para modelar a viga A2. ....	95
Figura 45: Camadas de concreto e aço da laje.....	95
Figura 46: Curva força-deslocamento vertical na seção central da viga mista A2.....	96
Figura 47: Deslocamento da viga A2 considerando amolecimento do concreto .....	97
Figura 48: Nova curva para rigidez dos conectores da viga A2.....	98
Figura 49: Curva força-deslocamento da viga A2 com rigidez dos conectores alterada. ....	98
Figura 50: Curva força-deslocamento empregando rigidez secante e tangente para viga A2..	99
Figura 51: Deslocamento relativo dos conectores ao longo de meia viga A2: rigidez secante e tangente.....	100
Figura 52: Geometria da viga U4 .....	101
Figura 53: Rigidez empregada para os conectores da viga U4.....	101
Figura 54: Malha de elementos finitos da viga U4.....	103
Figura 55: Camadas de concreto e aço da laje.....	103
Figura 56: Curva força-deslocamento empregando rigidez secante e tangente para viga U4	104
Figura 57: Distribuição do deslocamento relativo dos conectores da viga U4 ao longo de meia viga .....	104
Figura 58: Geometria empregada para modelar os corpos de prova. ....	106
Figura 59: Camadas de concreto .....	106
Figura 60: Histórico de tensão aplicada e deformação por fluência do Teste 1 .....	108
Figura 61: Histórico de tensão aplicada e deformação por fluência do Teste 2.....	109
Figura 62: Histórico de tensão aplicada e deformação por fluência do Teste 3.....	110

Figura 63: Histórico de tensão aplicada e deformação por fluência do Teste 4.....	110
Figura 64: Histórico de tensão aplicada e deformação por fluência do Teste 5.....	111
Figura 65: Vista lateral e da seção das vigas V7 e V8 .....	112
Figura 66: Malha de elementos finitos para a viga V7 gerada no GiD.....	113
Figura 67: Camadas de aço e concreto da viga V7/V8.....	113
Figura 68: Deslocamento no centro do vão para viga V7 .....	114
Figura 69: Flecha para tempo de aproximadamente 75 anos .....	115
Figura 70: Flecha considerando diferentes temperaturas .....	116
Figura 71: Flecha considerando diferentes umidades relativas.....	117
Figura 72: Flecha considerando diferentes valores para o parâmetro $\alpha$ .....	117
Figura 73: Geometria e detalhes da seção da viga K.....	118
Figura 74: Camadas de aço e concreto da viga K.....	119
Figura 75: Deslocamento no centro do vão para viga K .....	120
Figura 76: Geometria e detalhes da seção da série de vigas C.....	121
Figura 77: Malha de elementos finitos para as vigas da série C gerada no GiD.....	123
Figura 78: Camadas de concreto e aço das vigas da série C .....	123
Figura 79: Coeficiente de fluência das vigas C12 e C15.....	124
Figura 80: Desenvolvimento da retração para das vigas C12 e C15.....	124
Figura 81: Evolução das flechas da série C imediatamente após a aplicação da carga.....	125
Figura 82: Resultados das vigas da série C com carregamento de longa duração .....	126
Figura 83: Fissuras observadas na face inferior da viga C15 após 510 dias sob carga.....	127
Figura 84: Fissuração na face inferior de metade da viga C15 .....	127
Figura 85: Pontos de compressão na face superior de metade da viga C15.....	127
Figura 86: Evolução dos deslocamentos (cm) e fissuração das vigas C11 e C12.....	128
Figura 87: Evolução dos deslocamentos (cm) e fissuração das vigas C13, C14 e C15 .....	129
Figura 88: Geometria e detalhes da seção da laje de McNeice .....	130
Figura 89: Malha 1 da laje McNeice .....	131
Figura 90: Malha 2 da laje McNeice .....	132
Figura 91: Esquema em camadas da laje McNeice .....	132
Figura 92: Histórico de carregamento da análise de serviço para laje McNeice.....	133
Figura 93: Deslocamento obtido para a laje McNeice. ....	133
Figura 94: Deformada da estrutura – Malha 1.....	134
Figura 95: Deslocamento (cm) da laje McNeice ao longo dos 80 dias de análise – Malha 1	135
Figura 96: Fissuração da camada inferior para 13,35kN obtido por Kabir (1976) .....	136

Figura 97: Fissuração da camada inferior para 13,35kN pela presente análise.....	136
Figura 98: Fissuração da camada inferior para 13,35kN obtido por Kabir (1976) .....	137
Figura 99: Fissuração da camada inferior para 13,35kN pela presente análise.....	137
Figura 100: Geometria e seção das vigas mistas de vão simples B1, B2, B3 e B4.....	139
Figura 101: Malha de elementos finitos das vigas B1 e B2 .....	140
Figura 102: Esquema das camadas de concreto e aço da laje da viga mista .....	140
Figura 103: Rigidez dos conectores das vigas de vão simples B1, B2, B3 e B4 .....	141
Figura 104: Curva de deformação por retração das vigas simples B1, B2, B3 e B4.....	142
Figura 105: Curva do coeficiente de fluência das vigas simples B1, B2, B3 e B4 .....	142
Figura 106: Deslocamento no centro do vão para as vigas B1, B2, B3 e B4.....	143
Figura 107: Comparação dos deslocamentos das vigas B1 e B2 com vários autores .....	144
Figura 108: Comparação dos deslocamentos das vigas B3 e B4 com vários autores .....	145
Figura 109: Deslocamento (cm), deformada e detalhe dos conectores da viga B1 aos 10 e 250 dias.....	146
Figura 110: Deslocamento (cm), deformada e detalhe dos conectores da viga B2 aos 10 e 250 dias.....	146
Figura 111: Geometria e detalhes da seção das vigas mistas contínuas B1 e B2.....	148
Figura 112: Rigidez dos conectores da viga contínua B1 e B2 .....	149
Figura 113: Malha de elementos finitos para as vigas mistas contínuas B1 e B2.....	150
Figura 114: Camadas de aço e concreto da laje da viga mista contínua B1 e B2 .....	150
Figura 115: Coeficiente de fluência das vigas B1 e B2.....	150
Figura 116: Deformação por retração das vigas B1 e B2.....	151
Figura 117: Deslocamento no centro do vão para das vigas B1 e B2 .....	151
Figura 118: Comparação dos efeitos de fluência e retração para as vigas B1 e B2 .....	152
Figura 119: Deslocamentos (cm) na laje da viga mista B1 para 3, 38, 150 e 340 dias .....	154
Figura 120: Deslocamentos (cm), deformada e detalhe dos conectores da viga B1 para 3 e 340 dias.....	154
Figura 121: Fissuração na camada superior da laje B1 para 3, 38, 150 e 340 dias .....	155
Figura 122: Deslocamentos (cm) na laje da viga mista B2 para 3, 38, 150 e 340 dias .....	156
Figura 123 Deslocamentos (cm), deformada e detalhe dos conectores da viga B2 para 3 e 340 dias.....	156
Figura 124: Fissuração na camada superior da laje B2 para 3, 38, 150 e 340 dias .....	157

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Fatores que influenciam nas deformações diferidas no tempo.....	32
Tabela 2: Equações e relações dos modelos Maxwell e Kelvin.....	34
Tabela 3: Coeficientes dependentes do tipo de cimento.....	49
Tabela 4: Legenda do pós-processamento no Matlab.....	86
Tabela 5: Propriedades dos materiais empregados na viga A2.....	93
Tabela 6: Propriedades dos materiais empregados na viga U4.....	102
Tabela 7: Propriedades do concreto empregado nos corpos de prova.....	107
Tabela 8: Idade e valor da tensão aplicada (dias, MPa).....	107
Tabela 9: Idades corrigidas considerando a temperatura de 17°C.....	107
Tabela 10: Parâmetros da Cadeia Kelvin para os ensaios de Ross (1958).....	108
Tabela 11: Tempo de análise e número de passos de tempo para os Teste de 1 a 5.....	111
Tabela 12: Propriedades dos materiais empregados na viga V7.....	112
Tabela 13: Parâmetros $E_{\mu}$ da cadeia Kelvin e tempos de retardação $\tau_{\mu}$ viga V7.....	113
Tabela 14: Flecha instantânea do centro do vão vigas V7 e V8.....	113
Tabela 15: Parâmetros $E_{\mu}$ e $\tau_{\mu}$ da viga V7/V8 para tempo infinito.....	115
Tabela 16: Tempo de análise e número de passos de tempo para a viga V7/V8.....	116
Tabela 17: Propriedades dos materiais empregados na viga K.....	118
Tabela 18: Parâmetros $E_{\mu}$ da cadeia Kelvin e tempos de retardação $\tau_{\mu}$ viga K.....	119
Tabela 19: Tempo de análise e número de passos de tempo para a viga K.....	120
Tabela 20: Estado das vigas após o carregamento (JACCOUD e FAVRE, 1982).....	121
Tabela 21: Propriedades dos materiais empregados nas vigas da série C.....	122
Tabela 22: Parâmetro da cadeia Kelvin para vigas da série C.....	123
Tabela 23: Tempo de análise e número de passos de tempo das vigas da série C.....	126
Tabela 24: Propriedades dos materiais empregados na laje de McNeice.....	130
Tabela 25: Parâmetro da cadeia Kelvin para a laje McNeice.....	132
Tabela 26: Tempo de análise e número de passos de tempo para a laje McNeice.....	138
Tabela 27: Características das vigas mistas de vão simples.....	138
Tabela 28: Propriedades dos materiais das vigas mistas de vão simples B1, B2, B3 e B4.....	139
Tabela 29: Parâmetro da cadeia Kelvin para as vigas de vão simples B1, B2, B3 e B4.....	141
Tabela 30: Tempo de análise e número de passos de tempo da viga mista de vão simples B1, B2, B3 e B4.....	146

Tabela 31: Propriedades dos materiais das vigas mistas contínuas B1 e B2.....	147
Tabela 32: Parâmetro da cadeia Kelvin para as vigas contínuas de dois vãos B1 e B2 .....	148
Tabela 33: Tempo de análise e número de passos de tempo para as vigas mistas contínuas B1 e B2.....	153



## LISTA DE SÍMBOLOS

- $\sigma(t)$  tensão no instante  $t$   
 $\varepsilon(t)$  deformação no instante  $t$   
 $\sigma_0$  tensão inicial  
 $\varepsilon_0$  deformação inicial  
 $\eta$  coeficiente de viscosidade  
 $\dot{\varepsilon}$  taxa de deformação  
 $\dot{\sigma}$  taxa de tensão  
 $\tau_r$  tempo de relaxação  
 $\tau_\mu$  tempo de retardamento  
 $\tau'$  um tempo qualquer menor que o tempo final de análise  
 $\gamma(t - t_0)$  função específica de fluência do modelo Kelvin  
 $\varepsilon_c$  deformação por fluência  
 $\varepsilon_{cs}$  deformação por retração  
 $\varphi(t, t_0)$  coeficiente de fluência  
 $\dot{\varepsilon}_e$  taxa de deformação elástica  
 $\dot{\varepsilon}_{ve}$  taxa de deformação viscoelástica  
 $\dot{\varepsilon}_0$  taxa de deformação por retração, efeito térmico e fissuração  
 $\varepsilon_u$  deformação última  
 $\varepsilon_{tm}$  máxima deformação à tração  
 $\beta_{sc}$  parâmetro do tipo de cimento  
 $\alpha$  parâmetro do tipo de cimento  
 $\varphi_0(t_0)$  coeficiente de fluência ideal  
 $\varphi_1(t, t_0)$  função que descreve o desenvolvimento da fluência  
 $s$  parâmetro do tipo de cimento  
 $f_{cm}$  resistência média à compressão do concreto  
 $f_{ck}$  resistência característica à compressão do concreto  
 $J(t, t_0)$  função de fluência  
 $C(t, t_0)$  função de fluência específica  
 $E$  módulo de elasticidade  
 $E_c$  módulo de elasticidade do concreto  
 $E_s$  módulo de elasticidade do aço  
 $E_\infty$  módulo assintótico

$I_1$  invariante de tensão  
 $J_2$  invariante de tensão  
 $G_f$  energia de fratura  
 $\theta$  ângulo  
 $t$  instante de tempo  
 $t_0$  instante da primeira carga aplicada  
 $V(t)$  função de volume de material solidificado  
 $m$  número de passos por década  
 $E^*$  módulo efetivo  
 $RH$  umidade relativa  
 $h$  espessura fictícia  
 $Ac$  área da seção transversal  
 $u$  perímetro da seção transversal em contato com a atmosfera  
 $t_{0,c}$  idade modificada de aplicação da carga  
 $t_e$  idade equivalente  
 $T$  temperatura  
 $N$  força axial no conector  
 $F$  força cortante no conector  
 $k$  rigidez de corte tangente  
 $d\varepsilon_{ij}^p$  incremento de deformação plástica  
 $d\lambda$  constante de proporcionalidade  
 $f(\sigma)$  função de plastificação  
 $\sigma_y(k)$  tensão de plastificação  
 $\{x\}$  vetor  
 $[x]$  matriz  
 $\{\Delta\sigma\}$  vetor de incrementos de tensão  
 $\{\Delta\varepsilon\}$  vetor de incrementos de deformação  
 $[D^*]$  matriz constitutiva isotrópica linear com módulo efetivo  $E^*$   
 $\{\Delta\varepsilon^*\}$  vetor de deformações de fluência e retração

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

A utilização de estruturas mistas do tipo aço-concreto tem se mostrado muito atrativas em obras civis de pequeno e grande porte. O emprego desse tipo de estrutura em obras modernas permite, em muitos casos, a redução dos custos e o aprimoramento do desempenho estrutural. De acordo com Oehlers e Bradford (1999) existem inúmeros exemplos de arranjos estruturais em que o aço e o concreto agem de maneira simbiótica, ou seja, nessa associação ocorre uma relação vantajosa entre os elementos estruturais. O que acontece na realidade é que cada elemento é utilizado visando a exploração de seus melhores atributos, fazendo da estrutura mista uma solução econômica e eficiente. Alguns exemplos desse tipo de estrutura são vigas e colunas de seção mistas que podem ser empregadas em lajes de edifício e pontes, entre outras estruturas.

Uma estrutura mista largamente empregada em pontes e edificações é a viga mista de aço e concreto. Essa estrutura consiste em uma laje de concreto armado ou protendido apoiada sob um perfil metálico de seção I, formando um conjunto de seção T. Nessa estrutura a laje é submetida ao esforço compressivo, que é melhor absorvido pelo concreto, enquanto que a viga de aço é empregada por ser mais eficiente na absorção dos esforços de tração.

No entanto, para se alcançar um comportamento estrutural misto é necessário que os elementos (viga de aço e laje de concreto) sejam unidos de forma eficiente. Isso é realizado através de conectores de cisalhamento, que permitem uma transferência do esforço cortante da laje para a viga e vice-versa, e que também impedem a separação vertical dos componentes. Muitas formas de conectores de cisalhamento podem ser encontradas, porém a mais usualmente empregada é do tipo *stud*, que consiste numa cabeça, sustentada por uma haste simples, conectada ao elemento de aço por um colar de solda conforme ilustrado na Figura 1 (OEHLERS; BRADFORD, 1999).

O fenômeno do aumento gradual de deformação ao longo do tempo sob uma tensão constante é chamado de fluência e o fenômeno da diminuição gradual da tensão ao longo do

tempo sob deformação constante é denominado relaxação. Esses dois fenômenos são típicos do comportamento de materiais viscoelásticos.

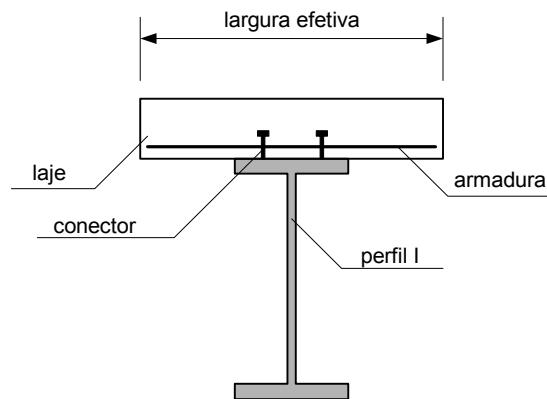


Figura 1: Representação de uma viga mista do tipo aço-concreto.

Numa análise de longa duração, o concreto armado apresenta tensões e deformações que variam com o tempo. O comportamento reológico deste material constitui um fator de grande importância na resposta estrutural. De acordo com Póvoas (1991) a sensibilidade da resposta aumenta na presença de alguns fatores agravantes, como a história de cargas complexas, a utilização de elementos estruturais de espessura reduzida (que levam a fluência e retração maiores devido à secagem de elementos pouco espessos) e a introdução de protensão (que geram fluência e relaxação crescentes devido ao elevado nível de tensão instalado no concreto comprimido e na armadura de protensão).

As deformações diferidas do concreto armado devido aos fenômenos de fluência e retração possuem mesma ordem de grandeza das deformações elásticas e podem alterar significativamente a distribuição de tensões da estrutura, portanto devem ser cuidadosamente analisadas. Para Araújo (1995), a consideração desses efeitos requer o desenvolvimento de modelos constitutivos que representem o comportamento do material e de métodos numéricos para a análise estrutural.

As reações químicas devido à hidratação do concreto afetam fortemente seu comportamento ao longo do tempo. Esse fenômeno é conhecido como envelhecimento, e ocorre de maneira ininterrupta durante praticamente toda vida útil da estrutura. Logo, as deformações dependem tanto da duração do carregamento, quanto da idade do concreto ao receber a aplicação das cargas (ARAÚJO, 1995). Outros fatores que influenciam os fenômenos de fluência e retração estão fortemente ligados ao tipo de cimento, forma da peça, umidade relativa do ar, temperatura, entre outros.

O projeto de estruturas de concreto submetidas a carregamentos arbitrados requer um desenvolvimento geral e racional de modelos de análise e dimensionamento. O avanço obtido por técnicas numéricas computacionais aplicadas especificamente no campo de modelos constitutivos, utilizados para traduzir o comportamento dos materiais, tem possibilitado o desenvolvimento de modelos não-lineares em elementos finitos confiáveis para análise e projeto de estruturas de concreto (FIGUEIRAS; PÓVOAS, 1994).

## 1.2 OBJETIVOS

Um modelo numérico elasto-plástico em elementos finitos foi desenvolvido e implementado por Tamayo (2011) através de um código computacional em linguagem Fortran 90. Este código é capaz de representar estruturas de vigas mistas em análises de curta duração. Utilizando a teoria da plasticidade associada com um algoritmo de retorno explícito para o concreto e aço, um procedimento incremental iterativo foi empregado pelo autor para análise desse tipo complexo de estrutura.

Nesse contexto, dando prosseguimento ao trabalho desenvolvido (TAMAYO, 2011), tem-se como objetivo principal a inclusão no código elasto-plástico dos efeitos de longa duração, considerando cargas de serviço (até 40% da resistência à compressão do concreto), que interferem na distribuição de tensões e deformações da estrutura. Outros objetivos consistem em:

- Analisar o comportamento diferido do concreto (teoria da viscoelasticidade);
- Implementar amolecimento do concreto à formulação;
- Empregar o *software* GiD como plataforma de trabalho de pré e pós processamento;
- Estudar nova formulação para rigidez dos conectores.

## 1.3 JUSTIFICATIVA

As vigas mistas compostas por aço e concreto são soluções estruturais muito atrativas por apresentarem baixo peso e serem econômicas. Para Oven et al. (1997), comparada com outros elementos estruturais usuais as vigas mistas apresentam grande rigidez e podem suportar carregamentos elevados vencendo grandes vãos.

De acordo com Oehlers e Bradford (1999), edificações geralmente possuem pisos suportados por pilares pouco espaçados que apoiam toda a carga de concreto aplicada na viga

de aço, não gerando momentos significativos. Por outro lado, em projetos de pontes, as restrições ambientais definem grandes vãos a serem vencidos, o que gera um momento significativo, sendo importante que a rigidez à flexão e a resistência do elemento de aço suportem o peso do concreto.

De acordo com Chong, Foster e Gilbert (2008), a maioria dos códigos de projeto simplificam procedimentos para determinação da resposta mecânica de estruturas de concreto armado submetidas a carregamentos de serviço e focam, principalmente, no comportamento instantâneo. A incapacidade de reconhecer adequadamente e quantificar os efeitos não-lineares de fissuração, fluência e retração podem levar à deformações excessivas, fissuras espessas e erros de cálculo das reações de apoio.

Ao realizar uma análise de uma estrutura de concreto ao longo de um determinado período, nota-se que fenômenos como fluência e retração podem alterar significativamente a resposta estrutural. Para Araújo (1995), o comportamento reológico deste material, ou seja, sua deformabilidade dependente do tempo, tem grande importância na alteração das tensões na estrutura, podendo introduzir um estado de fissuração indesejável.

De acordo com Gomes (1997), o fenômeno da fluência é mais observado nas primeiras idades da estrutura, contudo prolonga-se por quase toda sua vida útil. Em razão disso, as deformações diferidas podem atingir a mesma ordem de grandeza que aquelas oriundas do carregamento de serviço da estrutura.

Nesse contexto o método dos elementos finitos tem sido muito empregado devido às suas vantagens e efetividade. Este método permite ao usuário analisar o comportamento estrutural levando em consideração a deformabilidade da conexão, o comportamento não-linear dos materiais e no caso de cargas de longa duração os fenômenos reológicos de fluência e retração do concreto (MACORINI et al., 2006).

## 1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O trabalho de Kabir e Scordelis (1979) tratou do emprego do método dos elementos finitos para o cálculo das respostas de cascas de concreto armado submetidas a um carregamento de longa duração. A fluência e a retração foram levadas em consideração para realização de um código computacional. A retração foi considerada empregando-se as curvas recomendadas pela ACI Committee 209 (1971). Para a fluência, o emprego de uma formulação em série, seguindo manipulações feitas por Zienkiewicz apud Kabir e Scordelis

(1979) para o cálculo das deformações foi utilizado. Essa formulação apresenta a vantagem de não necessitar da armazenagem de todo histórico de tensão e sim apenas a tensão do último passo de tempo. Um algoritmo de solução foi empregado considerando as deformações causadas pela fluência e retração como deformações iniciais de um passo de tempo para o outro, aplicando essas deformações como carga nodal equivalente.

Nas últimas décadas várias pesquisas científicas foram realizadas considerando efeitos de longa duração no concreto. Uma lei de fluência para o concreto foi proposta por Bazant (1988), o qual com ajuda de colegas apresentou a teoria da solidificação para o tratamento da fluência no concreto. Alguns trabalhos como Bazant e Prasannan (1988), Bazant e Prasannan (1989), Bazant e Prasannan (1990) e Bazant e Xi (1995) apresentam esta teoria.

Póvoas (1991) apresentou um trabalho bastante completo com o desenvolvimento computacional de modelos para análise e dimensionamento de estruturas de concreto armado e protendido. Um modelo não linear e a reologia dos materiais foram teorias empregadas em seu trabalho. Um dos enfoques contempla o desenvolvimento de um modelo que utiliza um elemento isoparamétrico de casca degenerado do elemento tridimensional. As armaduras podem ser discretizadas separadamente e o modelo do material é definido com o objetivo de representar adequadamente os principais fatores da não linearidade que caracterizam o comportamento do concreto armado. Foi empregado um modelo elasto-plástico com endurecimento para o concreto comprimido e um modelo de fissuração distribuída para o concreto à tração. No modelo diferido o autor empregou conceitos de envelhecimento, retração e fluência do concreto. A viscoelasticidade para a fluência do concreto foi estabelecida através do emprego de cadeias Kelvin, de acordo com o princípio da linearidade entre tensões e deformações na fluência e na aproximação da função desta cadeia pela série de Dirichlet, tornando dispensável o armazenamento de todo o histórico de tensão. Baseado num algoritmo de solução não-linear, o autor adotou um procedimento incremental-iterativo com base no método de Newton Raphson.

Uma formulação foi apresentada por Dezi e Tarantino (1993) para análise visco-elástica de vigas mistas aço-concreto com conectores flexíveis. O método proposto avalia a distribuição de tensões entre a laje de concreto e a viga de aço, as reações de apoio, que se alteram de acordo com o tempo devido à retração e fluência do concreto. A partir das equações de equilíbrio interno e externo e das relações constitutivas (lei elástica para viga de aço e função integral para a laje de concreto) um processo numérico utilizando uma técnica passo a passo foi empregada.

Nos trabalhos apresentados por Gomes (1997) e Silva (2003), a teoria da solidificação foi empregada para previsão de deformações devido à fluência ao longo do tempo. Ambas as pesquisas utilizam o método dos elementos finitos para análise tridimensional de estruturas de concreto armado. Os dois trabalhos abordaram enfoques diferentes, o primeiro trouxe um modelo de confiabilidade para a análise e o outro o tema da corrosão da armadura do concreto.

No trabalho apresentado por Chong, Foster e Gilbert (2008) um modelo não-linear em elementos finitos foi desenvolvido para análises de longa duração do concreto armado sob cargas de serviço. O modelo bi-dimensional foi baseado no modelo de fissuração de membrana proposto por Foster e Marti (2002) empregando uma abordagem de rotação de fissura. Na formulação é empregada a teoria da solidificação proposta por Bazant e Prasannan (1989) para modelagem da fluência e retração com auxílio de uma cadeia Kelvin para descrever o comportamento viscoelástico do concreto.

Uma análise de confiabilidade aplicada à análise de vigas-caixão para estruturas de ponte em concreto protendido foi realizada por Guo et al. (2011). Na pesquisa foi empregado o modelo do CEB-FIP (1994) para fluência e retração, aplicado ao método dos elementos finitos. Os autores avaliaram a estrutura submetida a um ambiente com compostos clorídricos através de um método avançado de probabilidade para considerar a deterioração da estrutura pela corrosão. As finas paredes da viga foram modeladas usando um elemento compósito de casca degenerada, com fissuração distribuída e amolecimento. Para o modelo reológico empregou-se elementos de Maxwell generalizados.

## 1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho encontra-se dividido em seis capítulos. No presente capítulo uma breve introdução foi realizada e os objetivos, justificativa e revisão bibliográfica foram apresentados. No segundo capítulo tem-se a exploração da teoria sobre efeitos diferidos (fluência e retração) e do comportamento viscoelástico dos materiais.

No terceiro a Teoria da Solidificação para o tratamento da fluência e o modelo reológico de Kelvin generalizado são apresentados. Neste terceiro capítulo expõem-se também a obtenção dos parâmetros da cadeia Kelvin através do emprego da formulação dada pelo CEB-FIP90 para o tratamento da fluência e o cálculo das deformações devido à retração. Além disso, uma breve revisão do trabalho de Tamayo (2011) é realizada, abordando as



formulações essenciais para o entendimento do presente trabalho. O capítulo quatro consiste no capítulo de implementação, onde o emprego do *software* GiD é apresentado e as rotinas em Fortran que foram criadas ou alteradas são explicadas.

No capítulo cinco têm-se os resultados obtidos pelo modelo implementado para as análises de curta e longa duração. Nesta etapa, alguns exemplos foram analisados a fim de validar o código computacional para análise de longa duração. Apresenta-se ainda, as análises relativas ao comportamento dos conectores de cisalhamento e as respostas comparando duas formulações diferentes para a rigidez destes conectores. Por fim, no sexto capítulo, discorre-se sobre as considerações finais e as alternativas para trabalhos futuros.

## 2 EFEITOS DIFERIDOS

### 2.1 FLUÊNCIA E RETRAÇÃO DO CONCRETO

O concreto é considerado um material elástico até certo limite. É interessante citar que os dois componentes do concreto, a pasta de cimento e os agregados, apresentam, quando submetidos isoladamente a tensões, uma relação entre a tensão e a deformação sensivelmente linear. O motivo da curvatura nessa relação apresentada pelo material composto, o concreto, reside na existência das interfaces aglomerante-agregado e no fato de que nestas regiões ocorre o aparecimento de microfissuras progressivas (NEVILLE, 1997).

Uma peça de concreto submetida a uma carga externa ou ao ambiente sofre deformações que usualmente levam à fissuração. Quando o concreto é exposto à temperatura e umidade ambientes, o concreto recém endurecido, submetido ou não a um carregamento, sofre contração térmica devido à retração associada ao resfriamento; e retração por secagem devido à perda de umidade. (MEHTA; MONTEIRO, 2008).

Quando uma estrutura de concreto encontra-se restringida, a viscoelasticidade se apresenta na diminuição progressiva da tensão ao longo do tempo. Então, no concreto sob restrição, a interação entre as tensões de tração elásticas induzidas pelas deformações por retração e o alívio da tensão devido à viscoelasticidade são os fatores complexos que interferem nas deformações e fissuras nestes elementos.

Segundo Mehta e Monteiro (2008) o estudo dos fenômenos de retração e fluência conjuntamente é pertinente. Estes dois fenômenos originam-se na pasta de cimento hidratado, possuem curva de deformação versus tempo muito semelhante e são influenciados normalmente pelos mesmos fatores. Além disso, ambos são parcialmente reversíveis e levam a deformações consideráveis, não devendo ser ignorados na análise.

#### 2.1.1 Fluência básica, por secagem e reversibilidade dos efeitos diferidos

A fluência pode ser dividida em fluência básica e fluência por secagem. A fluência básica é a que se produz sem a troca de água com o meio exterior, ou seja, em um corpo-de-

prova de concreto submetido a uma tensão constante sob condições de umidade relativa de 100%. A fluência por secagem corresponde à deformação adicional que se produz permitindo a troca de umidade com o meio ambiente. A fluência total é a soma da fluência básica com a fluência por secagem. Na prática é comum ignorar a separação entre esses dois tipos de fluência. Assim, a fluência é considerada simplesmente como a deformação sob carga.

A deformação por fluência é proporcional à deformação instantânea para tensões inferiores a 40% da resistência característica do concreto. Para valores de tensão superiores a este limite a fluência é não linear, e incrementos de deformação são obtidos com maior rapidez à medida que a tensão aumenta.

Dois terminologias são bastante empregadas no estudo da fluência. O primeiro termo denominado fluência específica é a deformação por fluência por unidade de tensão aplicada. O segundo termo chamado coeficiente de fluência é a relação entre a deformação por fluência e a deformação elástica.

Na Figura 2 é apresentado o comportamento típico de um corpo de prova submetido à compressão uniaxial constante durante o período  $t_1 - t_0$ , no qual as deformações por fluência são observadas. Após o tempo  $t_1$  a carga é retirada e a recuperação instantânea ou elástica é aproximadamente da mesma ordem de grandeza da deformação elástica na primeira aplicação de carga. Essa recuperação é seguida por uma redução gradativa da deformação denominada recuperação da fluência. A forma da curva de recuperação por fluência é parecida a da fluência, mas a recuperação se aproxima do valor limite muito mais rapidamente. A recuperação da fluência não é completa, pois a fluência não é um fenômeno totalmente reversível, de modo que qualquer aplicação de carga, mesmo que mantida por um curto período de tempo, resulta em uma deformação residual.

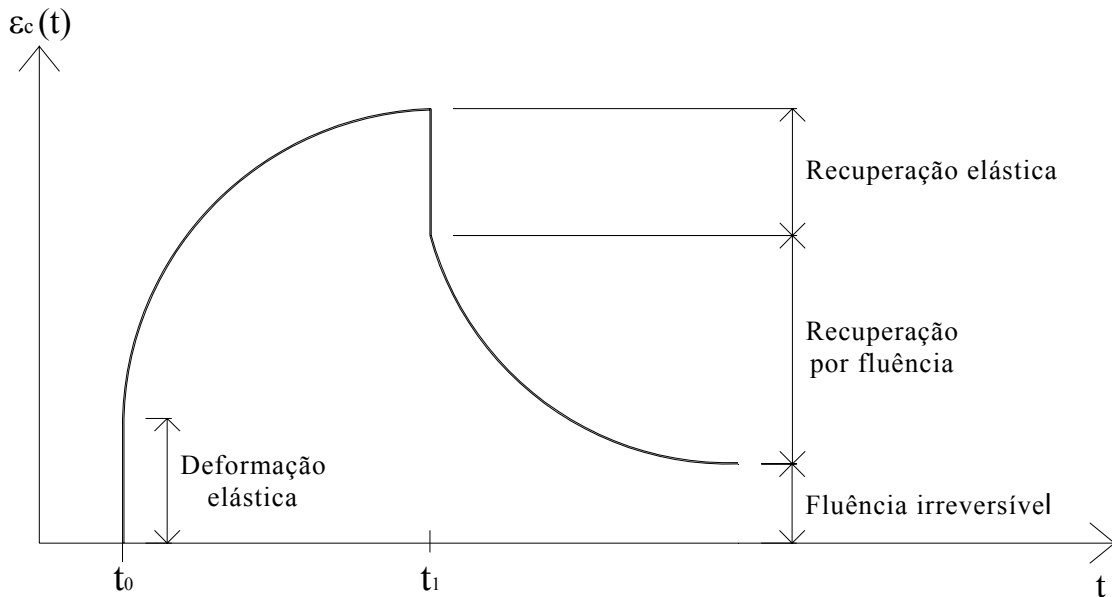


Figura 2: Deformação por fluência

De forma análoga, após a primeira secagem, o concreto não volta à dimensão original na reumidificação. A retração por secagem, portanto, possui uma parcela reversível, produzida em ciclos de molhagem e secagem e uma parcela irreversível, que não é reproduzida em ciclos de molhagem-secagem. Essa parcela irreversível deve-se ao desenvolvimento de ligações químicas dentro da estrutura C-S-H (silicato de cálcio hidratado) como consequência da secagem.

### 2.1.2 Causas da fluência e retração

É a pasta de cimento que na realidade sofre deformações diferidas. Essa pasta saturada não se manterá dimensionalmente estável quando exposta à umidade ambiente abaixo da saturação, pois a perda de água fisicamente adsorvida do C-S-H resulta em deformação por retração. Da mesma maneira, quando uma pasta de cimento hidratada é submetida à tensão constante, dependendo da magnitude e da duração da tensão aplicada, o C-S-H perde uma grande quantidade de água fisicamente adsorvida, e a pasta sofrerá deformação por fluência. De acordo com Mehta e Monteiro (2008), essa remoção da água adsorvida parece ser uma das principais causas que contribuem para as deformações por retração e fluência em estruturas de concreto.

A diferença entre as causas destas duas deformações é que no caso da retração a umidade diferencial relativa entre concreto e o ambiente é a força motriz, já para a fluência esta força é a tensão constante aplicada.

Outras causas também são atribuídas para a ocorrência da fluência como a não linearidade da relação tensão–deformação do concreto, especialmente para tensões acima de 30-40% da tensão última, que causam microfissuras na zona de interface aglomerante-agregado. Também contribui para as causas a resposta elástica atrasada no agregado, uma vez que a pasta de cimento e o agregado estão aderidos, e a tensão na pasta diminui à medida que a carga é transferida para o agregado que se deforma elasticamente. (MEHTA; MONTEIRO, 2008).

De acordo com Neville (1997), algumas experiências realizadas mostraram que num concreto em que foi removida toda água evaporável, as deformações por fluência não são mais observadas. No entanto, as mudanças de comportamento do concreto, em temperaturas elevadas, indicam que nesse estágio o próprio gel da pasta de cimento torna-se suscetível a deformações por fluência. O mecanismo exato da fluência é bastante complexo e ainda incerto.

### 2.1.3 Efeitos da fluência e retração

De acordo com Neville (1997), a fluência afeta o comportamento das estruturas, mas os seus efeitos variam dependendo do tipo de elemento. O efeito da fluência na resistência final de uma viga de concreto armado simplesmente apoiada sujeita a uma carga constante não é significativo, no entanto a flecha tende a sofrer um grande aumento e em muitos casos torna-se um ponto crítico a ser considerado no projeto estrutural.

Nas estruturas de pilares armados a fluência induz à transferência gradual de tensões do concreto para a armadura. No momento em que ocorrer o escoamento do aço, qualquer acréscimo de carga deverá ser absorvido pelo concreto. Nos casos de pilares com cargas excêntricas a fluência aumenta as flechas, o que pode levar a coluna a flambar.

Nas estruturas estaticamente indeterminadas a fluência pode aliviar a concentração de tensões induzidas por retração, variações de temperatura ou recalques de apoio levando a uma redução da fissuração. As estruturas de concreto usualmente sofrem alguma restrição, as vezes por atrito na base ou engastamento nas extremidades, mas normalmente pelo próprio aço da armadura. A retração do concreto, nesses casos, leva ao aparecimento de tensões de tração que por sua vez geram fissuras. E, por fim, as deformações por fluência levam à perda de protensão nas estruturas que se utilizam desse recurso (NEVILLE, 1997).

#### 2.1.4 Fatores que afetam a fluência e a retração

Vários fatores que interagem simultaneamente são responsáveis pelos movimentos internos da água na pasta de cimento hidratada. Esses movimentos são, por sua vez, os causadores das deformações de retração e fluência. Os principais fatores que influenciam a magnitude e o desenvolvimento dessas deformações são discutidos a seguir.

##### a) Materiais e dosagens

Como já mencionado, a origem das deformações relativas à umidade do concreto é a pasta de cimento hidratada. Sabe-se que tanto a retração por secagem quanto a deformação por fluência são função do teor de pasta de cimento hidratada, porém não existe uma proporcionalidade direta nessa relação, pois a restrição contra a deformação tem grande influência sobre a magnitude desta. Essa restrição é proporcionada pelo agregado, sendo o módulo de deformação deste provavelmente o fator mais importante. Quanto maior este módulo, maior será a restrição oferecida pelo agregado à fluência potencial da pasta de cimento. A granulometria, dimensão máxima, forma e textura dos agregados também são fatores que influenciam as deformações por fluência e retração.

O tipo de cimento empregado também gera diferentes deformações, por exemplo, para um elemento carregado, logo nas primeiras idades, feito com cimento de alta resistência inicial, apresentará deformação por fluência menor do que o produzido com cimento de endurecimento normal. Uma relação água-cimento crescente aumenta tanto a retração por secagem quanto a fluência, sendo a diminuição da resistência e o aumento da permeabilidade os responsáveis por este comportamento.

A resistência do concreto tem uma notável influência sobre as deformações por fluência. Sabe-se que a fluência é inversamente proporcional à resistência do concreto. A finura do cimento influencia a evolução da resistência às primeiras idades e, por conseguinte a fluência. No entanto, não há evidências de que a finura do cimento por si só tenha efeitos sobre a fluência. Alguns tipos de aditivos e adições tendem a aumentar o volume de poros finos na pasta de cimento. Como a retração e a fluência estão diretamente ligadas à água contida nos poros da pasta, as adições que causam refinamento dos poros levam a uma maior deformação por fluência e retração. Sendo assim, se os efeitos da fluência e retração são importantes numa estrutura, o efeito de qualquer tipo de aditivo a ser usado deve ser cuidadosamente observado.

##### b) Tempo e umidade relativa

A perda de água adsorvida e da água retirada pelas tensões capilares em pequenos poros dentro da pasta de cimento hidratada para a atmosfera é um processo bastante lento e que ocorre em longos períodos. A idade de carregamento tem bastante influência sobre a deformação de fluência à medida que diminuindo a idade, maiores deformações são verificadas. Já para a retração, o tempo de cura não afeta significativamente o valor da deformação, porém seu efeito é de atrasar a deformação já que o concreto adquire uma resistência a tração maior, suficiente para prevenir uma fissuração prematura.

Um dos fatores externos que mais afetam a deformação por fluência e retração é a umidade relativa ambiente. Para um mesmo concreto a fluência e a retração são tanto maiores quanto mais baixa a umidade relativa. Também, evidências experimentais indicaram que para um concreto em condições de umidade relativa próximas a 100% o elemento tende a apresentar uma expansão.

c) Geometria do elemento

Para umidade relativa e temperatura constantes, tanto a dimensão quanto a forma da peça de concreto determinam a magnitude da retração por secagem e da fluência. Isso se deve ao fato de que a taxa de perda de água do interior do concreto para a atmosfera depende da distância percorrida durante a retração ou fluência. Convenientemente esses dois parâmetros (dimensão e forma) são empregados para expressar uma única quantidade denominada de espessura fictícia ou teórica.

d) Demais fatores

Ainda citam-se três fatores importantes que influenciam o comportamento diferido do concreto. A temperatura à qual o elemento encontra-se exposto pode ocasionar dois efeitos opostos sobre a fluência. Para um elemento exposto a uma temperatura elevada durante o processo de cura, sua resistência aumentará, levando a menores deformações por fluência. Entretanto um elemento levado a elevadas temperaturas durante o processo de carga apresentará maior deformação por fluência.

Testes a respeito da tensão aplicada no concreto constataram uma certa proporcionalidade entre a magnitude da tensão constante e a deformação por fluência. Porém essa proporcionalidade é válida apenas para tensões aplicadas na faixa linear da relação tensão-deformação (na ordem de 0,4) que inclui, por exemplo, as análises de serviço. A partir desse limite emprega-se um fator de correção da fluência.

Por fim, as condições de cura podem ser consideradas fatores influentes nas deformações de fluência. De acordo com Mehta e Monteiro (2008), ciclos de secagem podem acentuar a microfissuração na interface agregado-pasta e assim aumentar a fluência.

Na Tabela 1 encontram-se um resumo dos fatores que influenciam a fluência básica e por secagem bem como as deformações devido à retração.

Tabela 1: Fatores que influenciam nas deformações diferidas no tempo

Relação	Fluência Básica	Fluência por secagem	Retração
	Relação a/c	Relação a/c	Relação a/c
Proporcionais	Temperatura	Temperatura	Temperatura
	Relação tensão/fc < 0,4	-	-
	Resistência do concreto	Resistência do concreto	Resistência do concreto
	Idade de carregamento	Idade de carregamento	Duração da cura
Inversamente proporcionais	Relação agregado/cimento	Umidade relativa	Umidade relativa
	-	Espessura da peça	Espessura da peça
	-	-	Relação agregado/cimento
	Tipo de agregado <sup>1</sup>	Tipo de cimento <sup>2</sup>	Tipo de agregado <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Quanto maior o módulo de elasticidade menor é a deformação.

<sup>2</sup> Quanto mais rápido for o endurecimento do cimento menor é a deformação.

Na Tabela 2 a/c é a relação água/cimento do concreto e fc a resistência média à compressão do concreto

## 2.2 VISCOELASTICIDADE

Materiais viscoelásticos exibem ao deformarem-se características elásticas e viscosas. Além disso, apresentam uma relação entre tensão e deformação dependente do tempo. Dois ensaios são utilizados para estudar o comportamento viscoelástico unidimensional do concreto. O primeiro é o ensaio de fluência no qual se mantém a tensão constante e registra-se o aumento na deformação ao longo do tempo. O segundo é o ensaio de relaxação no qual se mantém a deformação constante e se registra a diminuição da tensão ao longo do tempo.

A resposta da fluência é uma função da duração do carregamento e também da idade do concreto quando a carga foi aplicada. Quanto maior o tempo de aplicação da carga, maior a deformação, e quanto maior a idade de carregamento, menor a deformação. Por causa desse comportamento o concreto é classificado como um material viscoelástico com envelhecimento. A maioria das propriedades mecânicas do concreto depende de sua idade. A formulação matemática para materiais que se alteram com o tempo é bastante complexa ao contrário daqueles que não se alteram com a idade.



### 2.2.1 Modelos reológicos básicos

O comportamento viscoelástico de um material pode ser determinado através do emprego de modelos reológicos baseados em dois elementos fundamentais: o elemento de mola e o de amortecedor. Para um segmento de mola a relação entre tensão e deformação é dada pela lei de Hooke:

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) \quad (2.1)$$

Na Equação (2.1)  $\sigma(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  representam a tensão e a deformação no instante  $t$ , respectivamente; e  $E$  o módulo de elasticidade. A resposta da mola à tensão é instantânea. Num ensaio de fluência, a uma tensão inicial  $\sigma_0$  constante, a deformação será  $\sigma_0/E$ , constante ao longo do tempo. Da mesma maneira em um ensaio de relaxação, sob deformação inicial  $\varepsilon_0$  constante, a tensão será  $\varepsilon_0 E$ , constante ao longo do tempo. O amortecedor é visualizado como um pistão que desloca um fluido viscoso em um cilindro com fundo vazado. Na lei da viscosidade de Newton:

$$\sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon}(t) \quad (2.2)$$

sendo  $\eta$  o coeficiente de viscosidade e  $\dot{\varepsilon}$  a taxa de deformação  $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$ . A taxa de deformação é proporcional à tensão, portanto para o ensaio de fluência o amortecedor se deformará a uma taxa constante.

As molas e amortecedores podem ser combinados em diversas configurações. Uma das associações mais simples consiste em uma mola e um amortecedor em série (Modelo de Maxwell) ou em paralelo (Modelo de Kelvin) ilustrados na Figura 3.

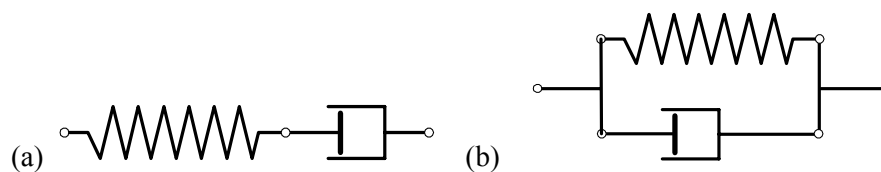


Figura 3: (a) Modelo de Maxwell; (b) Modelo de Kelvin

As equações de equilíbrio e compatibilidade e as relações constitutivas para os dois modelos são apresentadas na Tabela 2, sendo os subíndices  $E$  e  $\eta$  referentes as tensões ou deformações na mola e no amortecedor, respectivamente.

Tabela 2: Equações e relações dos modelos Maxwell e Kelvin

	Modelo de Maxwell	Modelo de Kelvin
Equação de equilíbrio	$\sigma(t) = \sigma_E(t) = \sigma_\eta(t)$	$\sigma(t) = \sigma_E(t) + \sigma_\eta(t)$
Equação de compatibilidade	$\varepsilon(t) = \varepsilon_E(t) + \varepsilon_\eta(t)$	$\varepsilon(t) = \varepsilon_E(t) = \varepsilon_\eta(t)$
Relação constitutiva mola	$\sigma_E(t) = E\varepsilon_E(t)$	$\sigma_E(t) = E\varepsilon_E(t)$
Relação constitutiva amortecedor	$\sigma_\eta(t) = \eta\dot{\varepsilon}_\eta(t)$	$\sigma_\eta(t) = \eta\dot{\varepsilon}_\eta(t)$

Diferenciando a equação de compatibilidade e a relação constitutiva da mola em relação ao tempo  $t$  e usando as equações de equilíbrio e a relação constitutiva do amortecedor tem-se para o modelo de Maxwell:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (2.3)$$

Para uma mola rígida ( $E = \infty$ ) o modelo se reduz a um fluido newtoniano, enquanto que se o amortecedor for rígido ( $\eta = \infty$ ), o modelo se reduz a uma mola que satisfaz a lei de Hooke. A resposta ao modelo de Maxwell, para tensão e deformação dependentes do tempo, pode ser determinada resolvendo-se a Equação (2.3). Considerando um ensaio de fluência com as condições iniciais  $\sigma = \sigma_0$  em  $t = 0$ , obtém-se:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0(t)}{\eta} \quad (2.4)$$

De acordo com a formulação acima a deformação cresce sem limites, constatando o comportamento de muitos fluídos. Quando o sistema é descarregado em um tempo  $t_1$ , a deformação elástica  $\sigma_0/E$  na mola se recupera instantaneamente, enquanto uma tensão permanente  $(\sigma_0/\eta)t_1$  permanece no pistão. Já para um ensaio de relaxação, no qual a deformação  $\varepsilon_0$  é constante, tem-se:

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \left( e^{-\frac{Et}{\eta}} \right) \quad (2.5)$$

A relação  $\tau_r = \eta/E$  é chamada tempo de relaxação e com este é possível caracterizar a resposta viscoelástica do material. Um tempo curto de relaxação indica que o processo de relaxação será rápido. No caso de um fluido puramente viscoso ( $E = \infty$ ) a Equação (2.5) indica uma relaxação de tensão infinitamente rápida,  $\tau_r = 0$ , enquanto que para uma mola

elástica  $\eta = \infty$ , a tensão não relaxaria, pois  $\tau_r = \infty$ . De forma semelhante, a equação diferencial para o modelo de Kelvin é:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \quad (2.6)$$

Para  $E = 0$  o modelo se reduz a um fluido newtoniano, porém se  $\eta = 0$  tem-se uma mola que satisfaz a lei de Hooke. A deformação pode ser calculada empregando-se a Equação (2.6) se todo o histórico de tensão for dado, ou para prever a tensão se todo o histórico de deformações for conhecido. Para um ensaio de fluência com condições  $\sigma = \sigma_0$  em  $t_0 = 0$ , ao integrar-se a Equação (2.6) tem-se:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left( 1 - e^{-\frac{Et}{\eta}} \right) \quad (2.7)$$

Na Equação (2.7), a deformação aumenta a uma taxa decrescente e tem um valor assintótico de  $\sigma_0/E$ . Durante o ensaio de fluência a tensão é inicialmente carregada pelo amortecedor e, com o passar do tempo, a tensão é transferida para a mola. De forma análoga ao tempo de relaxação, define-se o tempo de retardamento como  $\tau_f = \eta/E$ . Um tempo curto de retardamento indica que o processo de fluência será rápido. Para uma mola elástica com  $\eta = 0$  as deformações finais seriam obtidas instantaneamente, uma vez que  $\tau_f = 0$ .

O modelo de Kelvin necessita de uma tensão infinita para produzir uma deformação instantânea necessária para o ensaio de relaxação, o que o torna fisicamente impossível de realizar.

Os modelos de Maxwell e de Kelvin são bastante limitados para representar o comportamento da maioria dos materiais viscoelásticos, pois o modelo de Maxwell apresenta uma taxa de deformação constante sob tensão constante, adequado para fluidos, e o modelo de Kelvin não pode prever uma relaxação em função do tempo e não mostra uma deformação permanente após o carregamento. Um modelo mais complexo e representativo é o modelo de sólido padrão (Figura 4), no qual uma mola é conectada em série com um elemento de Kelvin.

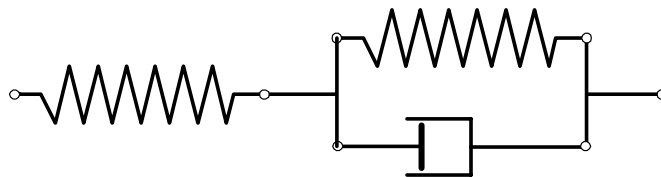


Figura 4: Modelo Sólido Padrão

Supondo  $\varepsilon_1$  a deformação na mola e  $\varepsilon_2$  a deformação no elemento de Kelvin, a deformação total é:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (2.8)$$

Como a tensão na mola e no elemento de Kelvin é a mesma:

$$\sigma(t) = \varepsilon_2(t) \left( E_2 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (2.9)$$

Do mesmo modo, no elemento de mola tem-se:

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon_1(t) \quad (2.10)$$

A Equação (2.8) escrita em forma de taxa é:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 \quad (2.11)$$

o que gera a equação diferencial:

$$\eta E_1 \dot{\varepsilon}(t) + E_1 E_2 \varepsilon(t) = \eta \dot{\sigma}(t) + \sigma(t)(E_1 + E_2) \quad (2.12)$$

Integrando-se a Equação (2.12) para um histórico de tensão arbitrário, sendo  $t_0$  a idade de aplicação da carga e  $\tau'$  um tempo qualquer menor que  $t$ :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_1} + \int_0^t \sigma(\tau') e^{-E_2(t-\tau')/\eta} d\tau' \quad (2.13)$$

Para o caso específico do ensaio de fluência, a Equação (2.13) reduz-se a:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{E_2} \left( 1 - e^{-\frac{E_2 t}{\eta}} \right) \quad (2.14)$$

ou reescrevendo:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left( \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} - \frac{1}{E_2} e^{-E_2 t/\eta} \right) \quad (2.15)$$

A equação anterior indica que a deformação é proporcional a  $\sigma_0$ , mudando de  $\sigma_0/E_1$  em  $t = 0$  para  $\sigma_0/E_\infty$  em  $t = \infty$ . Designa-se  $E_\infty$  como o módulo assintótico dado por:

$$E_\infty = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \quad (2.16)$$

Durante o ensaio de fluência, o módulo de elasticidade do modelo do sólido padrão  $E_c(t)$  se reduz de  $E_1$  para seu valor assintótico  $E_\infty$  de acordo com a seguinte expressão:

$$\frac{1}{E_c(t)} = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} - \frac{1}{E_2} e^{-E_2 t / \eta} \quad (2.17)$$

Integrando-se a Equação (2.12) para um histórico de deformação arbitrário tem-se:

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) E_\infty + (E_1 - E_\infty) \int_0^t e^{-(E_1 + E_2)(t - \tau') / \eta} \dot{\varepsilon}(\tau') d\tau' \quad (2.18)$$

Para o ensaio de relaxação a evolução da tensão é dada por:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 [E_\infty + (E_1 - E_\infty) e^{-(E_1 + E_2)t / \eta}] \quad (2.19)$$

A Equação (2.19) indica que a tensão é proporcional a  $\varepsilon_0$ , passando de  $E_1 \varepsilon_0$  em  $t = 0$  à  $E_\infty \varepsilon_0$  em  $t = \infty$ . Portanto, durante o ensaio de relaxação, o módulo de elasticidade  $E_r(t)$  se reduz do valor inicial  $E_1$  para seu valor assintótico  $E_\infty$  de acordo com a seguinte expressão:

$$E_r(t) = [E_\infty + (E_1 - E_\infty) e^{-(E_1 + E_2)t / \eta}] \quad (2.20)$$

## 2.2.2 Modelos reológicos generalizados

Uma melhor aproximação do comportamento viscoelástico pode ser obtida empregando modelos combinados de um grande número de molas e amortecedores em série ou em paralelo. Com isso pode-se obter diversos tempos de retardação, o que é característico de materiais complexos como o concreto. No caso específico do modelo generalizado de Kelvin em série (Figura 5) a tensão em cada unidade é dada pela Equação (2.21).

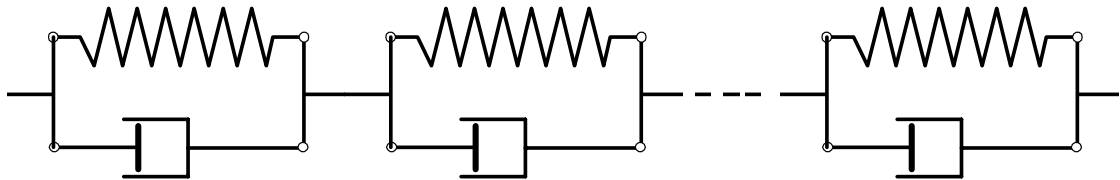


Figura 5: Modelo generalizado de Kelvin em série.

$$\sigma_i(t) = \left( E_i + \eta_i \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_i(t) \quad (2.21)$$

A deformação total desse modelo é:

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t) \quad (2.22)$$

sendo  $n$  o número de conjuntos de Kelvin associados.

A função de fluência específica para o modelo de Kelvin  $\gamma(t - t_0)$  é a deformação por unidade de tensão no tempo  $t$  para a tensão aplicada na idade  $t_0$  e que é apresentada na Equação (2.23).

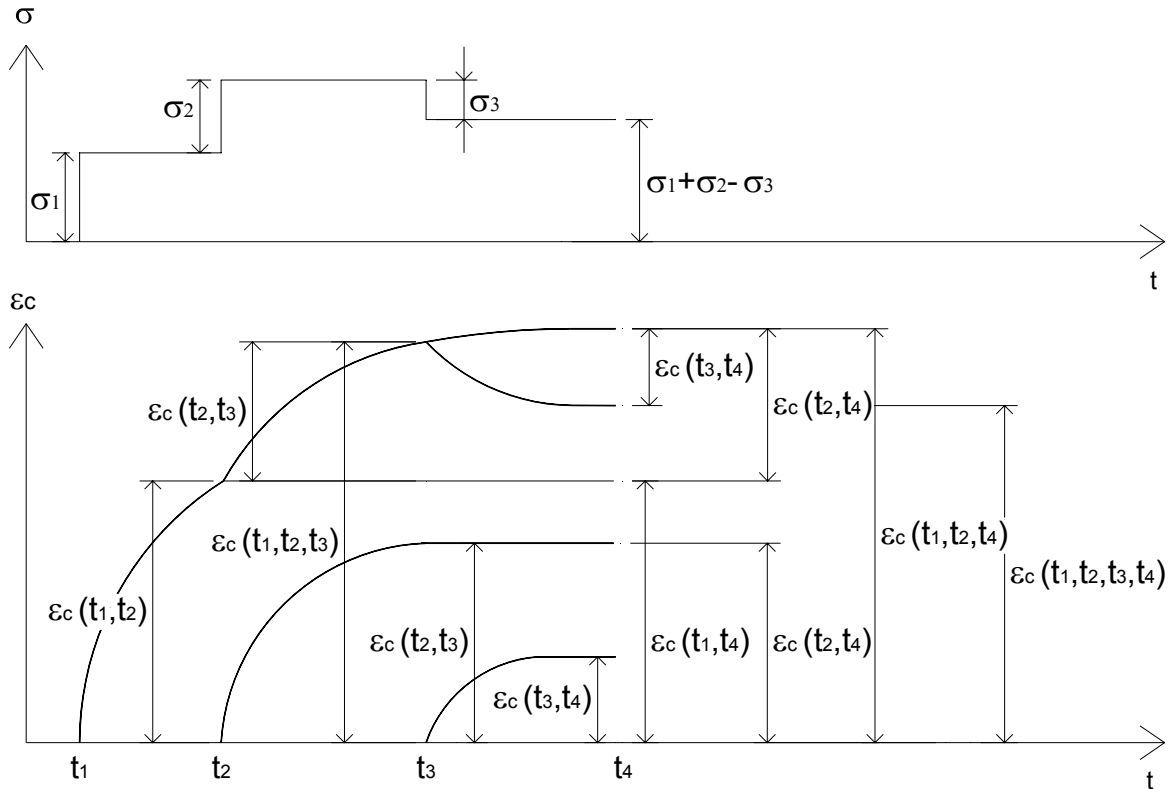
$$\gamma(t - t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} (1 - e^{-(t-t_0)/\tau_f}) \quad (2.23)$$

### 2.2.3 Princípio da superposição

No decorrer da vida útil de uma estrutura de concreto é improvável que a carga se mantenha constante como em ensaios de fluência, ou que a deformação se mantenha constante como em ensaios de relaxação. McHenry formulou o seguinte princípio: “as deformações produzidas no concreto em qualquer tempo  $t$ , por um incremento da tensão em qualquer tempo  $t_0$ , são independentes dos efeitos de qualquer tensão aplicada antes de ou após  $t_0$ . As tensões que se aproximam da resistência limite são excluídas”. Em outras palavras a soma das causas é igual à soma dos efeitos de cada uma das causas (SHARMA apud MEHTA; MONTEIRO, 2008).

O princípio da superposição de deformações resulta da suposição de linearidade entre a relação entre tensão e deformação. De acordo com Smerda e Kristek (1988) é evidente que isso também se aplica quando diferentes valores de tensão são introduzidos no concreto ao mesmo tempo. A deformação de fluência  $\varepsilon_c$  no tempo  $t$  é igual à soma das deformações de fluência  $\varepsilon_{ci}$  submetida a uma tensão  $\sigma_i$ .

$$\varepsilon_c(t) = \Sigma \varepsilon_{ci} = \frac{\varphi(t)}{E_c} \Sigma \sigma_i \quad (2.24)$$



Fonte: Adaptado de Smerda e Kristek (1988).

Figura 6: Superposição na deformação de fluência

Para a aplicação deste princípio na análise dos efeitos de fluência, a validade da superposição é generalizada para casos em que o concreto é submetido a tensões em diferentes tempos. Considerando a superposição como válida, então, na Figura 6 a deformação por fluência  $\epsilon_c(t_1, t_2, t_3)$ , isto é, a fluência no tempo  $t_3$  em razão de uma tensão  $\sigma_1$  agindo no intervalo de tempo  $(t_1, t_3)$  e devido à tensão  $\sigma_2$  agindo no intervalo  $(t_2, t_3)$  é:

$$\epsilon_c(t_1, t_2, t_3) = \epsilon_c(t_1, t_3) + \epsilon_c(t_2, t_3) \quad (2.25)$$

onde:

$\epsilon_c(t_1, t_3)$  é a fluência devido à tensão  $\sigma_1$  no intervalo de tempo  $(t_1, t_3)$  e

$\epsilon_c(t_2, t_3)$  é a fluência devido à tensão  $\sigma_2$  no intervalo de tempo  $(t_2, t_3)$ .

Quando uma parcela da tensão é removida, esta deve ser considerada negativa e a fluência é subtraída. Então se a tensão  $\sigma_3$  agindo no intervalo  $(t_3, t_4)$  é reduzida, obtém-se:

$$\epsilon_c(t_1, t_2, t_3, t_4) = \epsilon_c(t_1, t_4) + \epsilon_c(t_2, t_4) - \epsilon_c(t_3, t_4) = \epsilon_c(t_1, t_2, t_4) - \epsilon_c(t_3, t_4) \quad (2.26)$$

Testes experimentais (Backstrom apud Smerda e Kristek (1988) e Ross (1958)) têm confirmado com satisfação a concordância dos valores calculados a partir do princípio da superposição, mas apenas para tensões crescentes. Quando as tensões decrescem a

superposição é aplicável apenas até certo limite no qual a redução de tensão não é tão grande. Quando a diminuição de tensão é grande, a redução da fluência nos testes é menor que a calculada (SMERDA; KRISTEK, 1988). No entanto, de acordo com Gilbert (1988) para fins práticos o princípio da superposição gera boa aproximação nos resultados de deformação dependentes do tempo no concreto causados por um histórico de tensão variável.

Sendo assim, para condições de serviço em que a máxima tensão não exceda 50% da resistência de compressão do concreto, admite-se que a deformação por fluência é proporcional à tensão aplicada. Considerando um elemento submetido a uma tensão de compressão uniaxial constante  $\sigma$ , a soma da deformação instantânea, de fluência e de retração pode ser expressa como:

$$\varepsilon(t) = \sigma J(t, t_0) + \varepsilon_{cs}(t) \quad (2.27)$$

onde  $J(t, t_0)$  é a função de fluência que é definida como a deformação no tempo  $t$  produzida por uma tensão unitária e constante aplicada no tempo  $t_0$ , e  $\varepsilon_{cs}(t)$  é a deformação por retração. A função de fluência pode escrita como:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + C(t, t_0) \quad (2.28)$$

onde  $E_c(t_0)$  é o módulo elástico do concreto na idade  $t_0$  e  $C(t, t_0)$  é a função de fluência específica. Introduzindo a noção de coeficiente de fluência  $\varphi(t, t_0) = C(t, t_0)E_c(t_0)$  reescreve-se a Equação (2.28):

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} [1 + \varphi(t, t_0)] \quad (2.29)$$

O princípio da superposição para um material sem envelhecimento pode ser expresso através da integral de Stieltjes (BAZANT, 1988) e a deformação uniaxial total durante um período é obtido adicionando a deformação por retração a essa integral:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t, t_0) d\sigma(t_0) + \varepsilon_{cs}(t) \quad (2.30)$$

De acordo com Bazant (1988) o emprego da integral de Stieltjes é vantajoso ao invés da integral de Riemann por ser aplicável tanto para histórias de tensão contínua como descontínua. Vários modelos de fluência encontram-se disponíveis na literatura, por exemplo, o modelo da ACI (ACI Commitee 209, 1997), o modelo do CEB-FIP (Comité Euro-Internacional du Betón, 1990), entre outros.



### 3 METODOLOGIA

Na presente pesquisa os efeitos diferidos da fluência do concreto são tratados segundo a teoria da solidificação proposta por Bazant e Prasannan (1989). Para o emprego dessa formulação são necessários ensaios para obtenção de algumas propriedades, ou podem-se também empregar expressões empíricas propostas pelos mesmos autores. Entretanto, uma alternativa a isso, e que é empregado neste trabalho, é o uso do modelo de fluência proposto pelo Comité Euro-International du Béton (1990). Este modelo utiliza relações empíricas para o cálculo do coeficiente de fluência, calibradas em laboratórios de testes de estruturas de concreto. No modelo de predição do CEB-FIP 90 apenas os parâmetros usualmente conhecidos pelos projetistas são considerados: resistência à compressão, dimensões da peça, umidade relativa, idade do carregamento, tipo de cimento e duração da carga. Os deformações por retração foram quantificadas empregando diretamente as formulações do CEB-FIP90, já que a magnitude desse efeito é independente da tensão aplicada.

Em termos de pré-processamento optou-se por empregar o *software* GiD não apenas como simples gerador da malha de elementos finitos, mas sim como uma plataforma de trabalho na qual são realizados os processos de desenho da geometria, criação da malha, aplicação de condições de contorno, entrada das propriedades dos materiais, entre outros dados necessários para a geração do arquivo de entrada do programa em Fortran. Sendo que após o processamento do arquivo gerado pelo GiD nenhuma interferência mais é necessária para a correta leitura dos dados pelo código em Fortran. Esse mesmo *software* também foi utilizado no pós-processamento para uma melhor visualização dos resultados.

Sendo o presente trabalho a continuação da pesquisa desenvolvida Tamayo (2011), os modelos para a laje de concreto, viga de aço e conectores seguem os mesmos empregados pelo referido autor. Apresente-se a seguir apenas o básico da formulação para o concreto (item 3.3 e 3.4), sendo que o texto completo pode ser encontrado na referência citada.

### 3.1 TEORIA DA SOLIDIFICAÇÃO PARA FLUÊNCIA DO CONCRETO

O fenômeno da fluência no concreto é profundamente afetado pelo processo de hidratação das partículas de cimento. Esta influência é conhecida como envelhecimento e causa efeitos diferidos sob tensão constante, diminuindo significativamente à medida que a idade de carregamento aumenta, por toda vida útil da estrutura.

A modelagem do fenômeno do envelhecimento é uma tarefa bastante difícil, e apesar de muitas formulações disponíveis, as mesmas possuem sérias deficiências como:

- Leis de fluência com envelhecimento do concreto não garantem a satisfação das restrições da termodinâmica. Geralmente o envelhecimento é descrito com propriedades do material em função do tempo, já as leis da termodinâmica podem ser escritas apenas para sistemas de materiais cujas propriedades não variam com o tempo;
- Para a forma diferencial da lei de fluência baseada em um modelo reológico, a implicação do envelhecimento, é que, o módulo elástico e o amortecedor viscoso dependem do tempo. Esta é a principal complicação para a solução numérica;
- Testes de histórias de tensão passo a passo ou recuperação de fluência revelam significantes desvios do princípio da superposição. A linearidade que existia nos modelos de fluência era uma fonte de resultados em desacordo.

Em 1989, visando contornar essas dificuldades os pesquisadores Bazant e Prasannan apresentaram um novo modelo para o tratamento da fluência no concreto baseado na micromecânica do processo de envelhecimento. Essa teoria, denominada Teoria da Solidificação, fundamenta-se em que o processo de envelhecimento deve-se, em grande parte, ao incremento de volume de pasta de cimento solidificada por unidade de volume de concreto, que ocupa poros originalmente ocupados pela água e por uma parte de cimento dissolvido.

Nessa nova teoria, a lei constitutiva para fluência trata o envelhecimento do concreto devido à hidratação contínua do cimento de uma maneira bastante simples e que gera bons resultados. Os pesquisadores demonstraram, através de análises micromecânicas do processo de solidificação, que o envelhecimento pode ser modelado como o aumento de uma fração de volume do material solidificado (cimento hidratado), que é tratado como um material viscoelástico sem envelhecimento descrito por uma cadeia Kelvin com parâmetros ( $E_\mu$ ,  $\eta_\mu$ ) independentes da idade.

Para tanto, um histórico de deformações deve ser usado para expressar a taxa total da componente de deformação viscoelástica e a não-linearidade é obtida modificando a atual taxa de fluência por uma função da tensão atual.

De acordo com o modelo proposto, a função de fluência para um material com envelhecimento como o concreto vem dada por:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\gamma(t, t_0)}{V(t)} \quad (3.1)$$

onde  $E_c(t_0)$  é o módulo de elasticidade no tempo de aplicação da carga ( $t_0$ ) dado em MPa,  $V(t)$  é o volume de concreto solidificado (função do envelhecimento) e  $\gamma(t, t_0)$  a função de fluência para um material sem envelhecimento.

### 3.2 LEI DA FLUÊNCIA EM TERMOS DE TAXA

A eficiência de uma análise numérica de fluência em estruturas requer a conversão da lei de fluência do tipo integral para uma lei em termos de taxa. Aparentemente isso é sempre possível, não de forma exata, porém com uma boa aproximação. O comportamento viscoelástico dos materiais pode ser calculado através da criação de um modelo reológico baseado em dois elementos fundamentais: molas e amortecedores. Os arranjos mais conhecidos são as cadeias Maxwell e Kelvin.

Tratando-se de estruturas de concreto, uma complicação surge do fato de que o módulo elástico e a viscosidade das molas e amortecedores são em geral dependentes do tempo. Com essas propriedades, a equação diferencial que descreve a cadeia Kelvin é de segunda ordem, enquanto que a que descreve a cadeia Maxwell é de primeira ordem. Em virtude disso e de outras razões, a cadeia de Maxwell já foi a preferida ao invés da cadeia Kelvin, mesmo essa última sendo mais diretamente relacionada com testes de fluência.

Essa situação, no entanto, vem sendo revertida devido a formulação proposta por Bazant e Prasanna (1988). Nessa formulação emprega-se na relação constitutiva uma lei de fluência sem envelhecimento para a matéria solidificada, ou seja, para o cimento hidratado, sendo o envelhecimento expresso pela mudança de volume  $v(t)$ . Com isso é possível associar um modelo reológico com o comportamento de um elemento de matéria solidificada ao invés do concreto como um todo.

Sendo assim, o modelo reológico proposto é sem envelhecimento, ou seja, seus parâmetros elásticos e viscosos são independentes do tempo, como na teoria da viscoelasticidade linear clássica, o que torna a análise numérica da fluência mais simples e torna a cadeia de Kelvin mais vantajosa. A equação diferencial para uma cadeia de Kelvin em série sem envelhecimento é:

$$E_{\mu}\dot{\gamma}_{\mu} + \eta_{\mu}\dot{\gamma}_{\mu} = \sigma \quad (3.2)$$

sendo:

$$\gamma = \sum_{\mu=1}^N \gamma_{\mu} \quad \text{deformação total da cadeia de Kelvin}$$

$E_{\mu}$ : módulo elástico da  $\mu$ -ésima unidade da cadeia de Kelvin

$\gamma_{\mu}$ : deformação da  $\mu$ -ésima unidade da cadeia de Kelvin

$\eta_{\mu}$ : viscosidade da  $\mu$ -ésima unidade da cadeia de Kelvin

Integrando-se a equação diferencial (3.2) para uma tensão constante e unitária aplicada em  $t_0$  (tempo de aplicação de carga) tem-se:

$$\gamma(t - t_0) = \sum_{\mu=1}^N \frac{1}{E_{\mu}} (1 - e^{-(t-t_0)/\tau_{\mu}}) \quad (3.3)$$

onde  $\tau_{\mu} = \eta_{\mu}/E_{\mu}$ , é o tempo de retardamento à fluência da  $\mu$ -ésima unidade. A Equação (3.3) é conhecida como série de Dirichlet (ou Prony) e pode ser aproximada para várias curvas de fluência. A determinação dos tempos de retardamento a partir de testes de fluência leva a um sistema de equações mal condicionado. No entanto esses tempos podem ser escolhidos adequadamente com o emprego da seguinte expressão (BAZANT, 1988):

$$\tau_{\mu} = \tau_1 10^{\mu-1} \quad \mu = 1, 2, \dots, N \quad (3.4)$$

sendo  $\tau_1$  pequeno o suficiente para levar em conta o envelhecimento do concreto. A escolha dos  $\tau_{\mu}$ , no entanto não é totalmente arbitrária. É importante que esses valores cubram o período total de interesse. Bazant e Prazannan (1988) indicam alguns valores de referência. Neste trabalho são usados:

$$\tau_1 = 0,01t_0 \quad e \quad \tau_N \geq 0,5t_{m\acute{a}x} \quad (3.5)$$

As constantes  $1/E_{\mu}$  podem ser determinadas pelo método dos mínimos quadrados (Apêndice A). Para isso é necessário a escolha de passos de tempo que também são importantes para a obtenção do resultado final. Algumas sugestões são apresentadas em

Bazant (1988). Para essa escolha é mais eficaz manter os passos de tempo constantes na escala logarítmica  $(t - t_0)$  onde  $t_0$  é o instante no qual o primeiro carregamento é aplicado na estrutura, ou a primeira deformação imposta. Então, primeiro é necessário escolher o primeiro passo  $(t_0, t_1)$  e depois gerar  $t_r$  com:

$$t_{r+1} - t_0 = 10^{1/m}(t_r - t_0) \quad (3.6)$$

onde  $m$  é o número de passos por década, sendo este valor em torno de 10 para uma boa precisão. Para o primeiro passo  $(t_0, t_1)$  fez-se:

$$t_1 - t_0 = 0,1t_0 \quad (3.7)$$

### 3.2.1 Solução numérica com algoritmo exponencial

Tendo como base os estudos de Bazant e Prasannan (1989) sabe-se que devido à formação de um sistema de equações diferenciais, a lei constitutiva para esse modelo é dita em termos de taxa, ou seja, baseada em equações diferenciais.

Uma integração numérica efetiva necessita do chamado algoritmo exponencial, o qual torna possível aumentar os passos de tempo de forma gradual, a valores bem maiores que o menor dos tempos de retardação, sem que para isso surjam problemas de estabilidade numérica ou resultados com pouca precisão. Nesse algoritmo é admitido que em cada passo de tempo  $(t_i, t_{i+1})$  a tensão  $\sigma(t)$  varia linearmente, podendo neste caso, obter soluções exatas das equações diferenciais.

De acordo com Bazant e Prasannan (1989) tem-se que, para uma variação linear de tensão

$$\sigma(t) = \sigma_i + \frac{(t - t_i)\Delta\sigma}{\Delta t} \quad (3.8)$$

em que

$$\Delta t = (t_{i+1} - t_i) \quad e \quad \Delta\sigma = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \quad (3.9)$$

a solução para a equação diferencial (3.2) vem dado por:

$$\gamma_\mu = A + B(t - t_i) + C e^{-(t-t_i)/\tau_\mu} \quad (3.10)$$

Substituindo essa solução na Equação (3.2), encontram-se as constantes A e B, e com o emprego da condição inicial  $\gamma_\mu = \gamma_{\mu i}$  em  $t = t_i$  encontra-se C. Dessa maneira obtém-se para  $t = t_{i+1}$  a seguinte expressão:

$$\gamma_{\mu(i+1)} = \gamma_{\mu(i)} e^{-\Delta y_{\mu}} + \frac{\sigma_i}{E_{\mu}} (1 - e^{-\Delta y_{\mu}}) + \frac{1 - \lambda_{\mu}}{E_{\mu}} \Delta \sigma \quad (3.11)$$

com

$$\Delta y_{\mu} = \frac{\Delta t}{\tau_{\mu}} \quad e \quad \lambda_{\mu} = \frac{1 - e^{-\Delta y_{\mu}}}{\Delta y_{\mu}} \quad (3.12)$$

O coeficiente  $\lambda_{\mu}$  encontra-se geralmente entre 0 e 1. Esse parâmetro  $\lambda_{\mu}$  tende a 1 para  $\Delta t \ll \tau_{\mu}$ , e tende a zero para  $\Delta t \gg \tau_{\mu}$ . Isso significa que, para passos de tempo muito mais curtos que o tempo de retardação, a deformação produzida pelo incremento de tensão durante um passo de tempo é muito pequena; e para passos de tempo muito maiores que os tempos de retardação, o incremento de deformação produzido pela mudança de tensão durante o passo de tempo é  $\Delta \sigma_{\mu}/E_{\mu}$ , desde que a tensão no amortecedor tenha se dissipado. Um método numérico convencional para solução de equações diferenciais ordinárias não satisfaz essa condição limite, podendo ser usados apenas quando o passo de tempo é muito menor que o menor dos tempos de retardação. O incremento de deformação viscoelástica sem envelhecimento no intervalo de tempo é dado por:

$$\Delta \gamma = \sum_{\mu=1}^N (\gamma_{\mu(i+1)} - \gamma_{\mu(i)}) \quad (3.13)$$

Substituindo a Equação (3.11) em (3.13) tem-se:

$$\Delta \gamma = \Delta \sigma \sum_{\mu=1}^N \left( \frac{1 - \lambda_{\mu}}{E_{\mu}} \right) + \sum_{\mu=1}^N \varepsilon_{\mu(i)} (1 - e^{-\Delta y_{\mu}}) \quad (3.14)$$

com

$$\varepsilon_{\mu(i)} = \frac{\sigma_i}{E_{\mu}} - \gamma_{\mu(i)} \quad (3.15)$$

Expressão semelhante pode ser escrita para o incremento de deformação:

$$\varepsilon_{\mu(i+1)} = \frac{\sigma_{i+1}}{E_{\mu}} - \gamma_{\mu(i+1)} \quad (3.16)$$

Como  $\sigma_{i+1} = \sigma_i + \Delta \sigma$ , a equação para atualizar as variáveis  $\varepsilon_{\mu}$  em função do incremento de tensões  $\Delta \sigma$  é escrita substituindo a expressão de  $\gamma_{\mu(i+1)}$  na Equação (3.16), obtendo-se:

$$\varepsilon_{\mu(i+1)} = \frac{\lambda_{\mu} \Delta \sigma}{E_{\mu}} + \varepsilon_{\mu(i)} (e^{-\Delta y_{\mu}}) \quad (3.17)$$

A taxa de deformação total é dada pela soma das deformações devido às partes, elástica, viscoelástica, à temperatura, retração e fissuração:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_{ve} + \dot{\varepsilon}_0 \quad (3.18)$$

onde:

$$\dot{\varepsilon}_e = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E(t)} \quad \text{taxa elástica}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ve} = \frac{\dot{\gamma}(t - t_0)}{V(t)} \quad \text{taxa viscoelástica}$$

$$\dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}_{cs}(t) + \dot{\varepsilon}_T(t) + \dot{\varepsilon}_f(t) \quad \text{taxas de retração, térmica, fissuração, respectivamente}$$

No presente trabalho, a fissuração já foi incluída no código computacional por Tamayo (2011). Em sua pesquisa o referido autor empregou o conceito de fissuração distribuída para o concreto conforme item 3.3. A deformação térmica não foi inserida no código computacional.

Integrando-se a Equação (3.18) no intervalo de tempo  $(t_i, t_{i+1})$  obtém-se o incremento de deformação total:

$$\Delta\varepsilon = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\dot{\sigma}(t)}{E(t)} dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\dot{\gamma}(t - t_0)}{V(t)} dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\varepsilon}_0(t) dt \quad (3.19)$$

Com o auxílio de uma regra de integração do tipo trapézio a Equação (3.19) pode ser transformada, considerando o módulo de elasticidade e o volume de concreto constantes no intervalo de tempo obtendo-se:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E_{i+1/2}} + \frac{\Delta\gamma}{V_{i+1/2}} + \Delta\varepsilon_0 \quad (3.20)$$

sendo o subíndice  $i + 1/2$  o meio do intervalo  $(t_i, t_{i+1})$ . Introduzindo (3.20) na Equação (3.14) tem-se:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E^*} + \Delta\varepsilon^* \quad (3.21)$$

com

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{E_{i+1/2}} + \sum_{\mu=1}^N \frac{1 - \lambda_{\mu}}{E_{\mu} V_{i+1/2}} \quad (3.22)$$

$$\Delta\varepsilon^* = \sum_{\mu=1}^N \varepsilon_{\mu(i)}^* (1 - e^{-\Delta y_{\mu}}) + \Delta\varepsilon_0 \quad (3.23)$$

As variáveis  $\varepsilon_\mu^*$  são atualizadas introduzindo o envelhecimento na Equação (3.17), ou seja:

$$\varepsilon_{\mu(i+1)}^* = \frac{\lambda_\mu \Delta \sigma}{E_\mu V_{i+1/2}} + \varepsilon_{\mu(i)}^* (e^{-\Delta y_\mu}) \quad (3.24)$$

As equações anteriores podem ser generalizadas, admitindo-se a isotropia do material, da seguinte forma:

$$\{\Delta \sigma\} = [D^*] \{\Delta \varepsilon\} - [D^*] \{\Delta \varepsilon^*\} \quad (3.25)$$

onde  $\{\Delta \sigma\}$  e  $\{\Delta \varepsilon\}$  representam os vetores de incrementos de tensões e de deformações e  $[D^*]$  é a matriz constitutiva isotrópica linear avaliada com o coeficiente de Poisson  $\nu$  e com o módulo de elasticidade efetivo  $E^*$  dado na Equação (3.22). Com o emprego do método dos elementos finitos, as deformações  $\{\Delta \varepsilon^*\}$ , serão introduzidos como cargas nodais equivalentes, sendo seu vetor dado por:

$$\{\Delta \varepsilon^*\} = \sum_{\mu=1}^N \varepsilon_{\mu(i)}^* (1 - e^{-\Delta y_\mu}) + \Delta \varepsilon_0 \quad (3.26)$$

e as deformações  $\{\varepsilon_\mu^*\}$  são atualizadas com o emprego da equação:

$$\{\varepsilon_{\mu(i)}^*\} = [D_\mu]^{-1} \{\Delta \sigma\} + \varepsilon_{\mu(i-1)}^* (e^{-\Delta y_\mu}) \quad (3.27)$$

onde  $[D_\mu]^{-1}$  é a inversa da matriz constitutiva isotrópica linear avaliada com um módulo de elasticidade igual a  $E_\mu V_{i+1/2} / \lambda_\mu$ . Observa-se que apenas as deformações  $\varepsilon_\mu^*$  dos elementos da cadeia de Kelvin necessitam ser armazenadas. O vetor  $\Delta \varepsilon_0$  é dado por:

$$\Delta \varepsilon_0 = \Delta \varepsilon_{cs} + \Delta \varepsilon_T + \Delta \varepsilon_f \quad (3.28)$$

sendo respectivamente, deformação por retração, térmica e por fissuração.

### 3.2.2 Modelo do CEB-FIP 90 para fluência

De acordo com o Comitê Euro-International du Béton (1990) o módulo de deformação tangente  $E_c$  aos 28 dias de idade do concreto é obtido através da expressão:

$$E_c(28) = 21500 \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{1/3} \quad (em MPa) \quad (3.29)$$

onde  $f_{cm} = f_{ck} + 8MPa$  é a resistência média à compressão estimada a partir da resistência característica  $f_{ck}$ , ambas aos 28 dias.



O módulo em uma idade  $t$  é estimado com:

$$E_c(t) = E_c(28) \left\{ \exp \left\{ s \left[ 1 - \left( \frac{28}{t} \right)^{1/2} \right] \right\} \right\}^{1/2} \quad (3.30)$$

sendo  $s$  apresentado na Tabela 3 para determinado tipo de cimento.

Tabela 3: Coeficientes dependentes do tipo de cimento

Tipo de cimento	$s$	$\alpha$	$\beta_{sc}$
Alta resistência inicial	0,20	1	8
Endurecimento normal	0,25	0	5
Endurecimento lento	0,38	-1	4

De acordo com o código citado a função de fluência vem dada por:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\phi(t, t_0)}{E_c(28)} \quad (3.31)$$

onde  $E_c(t_0)$  é o módulo de elasticidade no tempo de aplicação da carga ( $t_0$ ) dado em MPa,  $E_c(28)$  é o módulo de elasticidade aos 28 dias e  $\phi(t, t_0)$  coeficiente de fluência. Então, tem-se que:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi_0(t_0)\varphi_1(t, t_0)}{E_c(28)} \quad (3.32)$$

sendo  $\varphi_0(t_0)$  o coeficiente de fluência ideal, e  $\varphi_1(t, t_0)$  a função que descreve o desenvolvimento da fluência com o tempo após o carregamento.

Para  $\varphi_0(t_0)$  tem-se:

$$\varphi_0(t_0) = \varphi_{RH}\beta_{fcm}\beta(t_0) \quad (3.33)$$

com

$$\varphi_{RH} = 1 + \frac{1 - (RH/100)}{0,46(h/100)^{1/3}} \quad (3.34)$$

$$\beta_{fcm} = \frac{5,3}{(f_{cm}/10)^{1/2}} \quad (3.35)$$

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0,1 + (t_0)^{0,2}} \quad (3.36)$$

sendo:

$RH$ : umidade relativa (%)

$f_{cm}$ : resistência média do concreto à compressão aos 28 dias (MPa)

$t_0$ : idade do concreto no carregamento (dias)

e a espessura fictícia é dada por:

$$h = \frac{2Ac}{u} \quad (3.37)$$

$h$ : espessura fictícia (mm)

$Ac$ : área da seção transversal (mm<sup>2</sup>)

$u$ : perímetro da seção transversal em contato com a atmosfera (mm)

Para a função  $\varphi_1(t, t_0)$ , que representa o desenvolvimento da fluência com o tempo, tem-se:

$$\varphi_1(t, t_0) = \left[ \frac{(t - t_0)}{\beta_H + (t - t_0)} \right]^{0.3} \quad (3.38)$$

com

$$\beta_H = 150 \left\{ 1 + \left( 1,2 \frac{RH}{100} \right)^{18} \right\} \frac{h}{100} + 250 \leq 1500 \quad (3.39)$$

Para levar em conta os diferentes tipos de cimento, a Equação (3.36) deve ser avaliada com uma idade modificada,  $t_{0,c}$  dada por:

$$t_{0,c} = t_0 \left( \frac{9}{2 + t_0^{1,2}} + 1 \right)^\alpha \geq 0.5 \text{ dias} \quad (3.40)$$

onde  $t_0$  é a idade de aplicação da carga, corrigida de acordo com a Equação (3.41) para consideração dos efeitos da temperatura de cura na maturidade do concreto. Os valores para o coeficiente  $\alpha$  encontram-se na Tabela 3.

O efeito da temperatura na maturidade do concreto quando a mesma é diferente de 20°C é considerada substituindo-se a idade real  $t_0$  por uma idade equivalente  $t_e$  dada por:

$$t_e = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \exp \left( 13,65 - \frac{4000}{273 + T_i} \right) \quad (3.41)$$

sendo  $\Delta t_i$  o número de dias em que a temperatura foi igual a temperatura  $T_i$  (°C). A idade corrigida em (3.41) deve ser usada na Equação (3.40). A duração do carregamento ( $t - t_0$ ) a ser considerada na Equação (3.36) permanece inalterada, ou seja, trata-se da duração real sob carga.

Para consideração do efeito da temperatura constante diferente de 20°C enquanto a estrutura de concreto está sob carga, deve-se modificar os coeficientes  $\beta_H$  por  $\beta_{H,T}$  e  $\varphi_{RH}$  por  $\varphi_{RH,T}$  da formulação apresentada, os quais vem dados por:

$$\beta_{H,T} = \beta_H \exp\left(\frac{1500}{273 + T} - 5,12\right) \quad (3.42)$$

$$\varphi_{RH,T} = \exp[0,015(T - 20)] + \{(\varphi_{RH} - 1)\{\exp[0,015(T - 20)]\}^{1,2}\} \quad (3.43)$$

com a temperatura  $T$  dada em °C.

### 3.2.3 Modelo do CEB-FIP 90 para retração

Para o cálculo da deformação por retração  $\varepsilon_{cs}(t)$  o CEB-FIP 90 indica as seguintes expressões:

$$\varepsilon_{cs}(t) = \varepsilon_{cso}\beta_s(t - t_s) \quad (3.44)$$

onde  $t$  é a idade do concreto e  $t_s$  é a idade ao final da cura ( $t > t_s$ ). O coeficiente  $\varepsilon_{cso}$  é dado por:

$$\varepsilon_{cso} = \varepsilon_{s(fcm)}\beta_{RH} \quad (3.45)$$

com

$$\varepsilon_{s(fcm)} = \left[160 + 10\beta_{sc}\left(9 - \frac{f_{cm}}{10}\right)\right] \times 10^{-6} \quad (3.46)$$

sendo  $f_{cm}$  a resistência média à compressão do concreto aos 28 dias em MPa. O coeficiente  $\beta_{sc}$  encontra-se definido na Tabela 3, e leva em consideração o tipo de cimento empregado. O coeficiente  $\beta_{RH}$  considera a umidade ambiente e é expresso por:

$$\beta_{RH} = -1,55 \left\{1 - \left(\frac{RH}{100}\right)^3\right\} \quad \text{para } 40\% \leq RH < 99\%$$

$$\beta_{RH} = +0,25 \quad \text{para } RH \geq 99\% \quad (3.47)$$

Portanto, até a umidade relativa do ambiente de 99% a retração ocorre. Após esse valor, o que ocorre é um aumento de volume do concreto. A função  $\beta_s(t - t_s)$  que define o desenvolvimento da retração como tempo, é dada pela Equação (3.48).

$$\beta_s(t - t_s) = \left[ \frac{(t - t_s)}{350 \left(\frac{h}{100}\right)^2 + (t - t_s)} \right]^{0,5} \quad (3.48)$$

com  $h$  definido pela Equação (3.37).

Do mesmo modo que para a formulação de fluência, na retração a consideração de temperatura constante diferente de 20°C durante o processo de carregamento deve-se substituir o produto  $\left(350 \left(\frac{h}{100}\right)^2\right)$  da Equação (3.48) por  $\alpha_{sT}(T)$  e  $\beta_{RH}$  por  $\beta_{RH,T}$ :

$$\alpha_{sT}(T) = 350 \left(\frac{h}{100}\right)^2 \exp[-0,06(T - 20)] \quad (3.49)$$

$$\beta_{RH,T} = \beta_{RH} \left[1 + \left(\frac{8}{103 - 100RH}\right) \left(\frac{T - 20}{40}\right)\right] \quad (3.50)$$

com temperatura  $T$  em °C e umidade relativa  $RH$  em %.

### 3.2.4 Ajuste da curva do CEB-FIP 90

Comparando as duas formulações para  $J(t, t_0)$ , dadas em (3.1) e (3.31) tem-se:

$$\gamma(t, t_0) = \varphi_1(t, t_0) \text{ e } V(t) = \frac{E_c(28)}{\varphi_0(t_0)} \quad (3.51)$$

Levando em conta que  $\gamma(t, t_0) = \varphi_1(t, t_0)$  os parâmetros  $E_\mu$  podem ser obtidos discretizando a função  $\varphi_1(t, t_0)$  do CEB-FIP90, usando  $L$  pontos determinados de acordo com o número de pontos de tempo da análise, conforme a Equação 3.6. Empregando o ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados (Apêndice A) tem-se o seguinte sistema:

$$\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^n C_j f_j(x_i) f_k(x_i) = \sum_{i=1}^L y_i f_k(x_i) \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n \quad (3.52)$$

Sendo

$$y_i = \varphi_1(t, t_0) = \left[ \frac{(t - t_0)}{\beta_H + (t - t_0)} \right]^{0.3} \quad (3.53)$$

uma função conhecida, com

$$\beta_H = 150 \left\{ 1 + \left( 1,2 \frac{RH}{100} \right)^{18} \right\} \frac{h}{100} + 250 \leq 1500 \quad (3.54)$$

A função a ser aproximada, já sem os coeficientes é

$$f_j = \gamma(t, t_0) = \left( 1 - e^{-(t-t_0)/\tau_\mu} \right) \quad (3.55)$$

sendo que os coeficientes a serem aproximados são

$$C_j = \frac{1}{E_j} \quad (3.56)$$

que gera o seguinte sistema de equações lineares:

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad \text{ou} \quad A(i, j). X(j) = B(i) \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.57)$$

$$A(i, j) = \sum_{k=1}^L [1 - e^{-(t-t_0)k/\tau_i}] [1 - e^{-(t-t_0)k/\tau_j}] \quad (3.58)$$

$$B(i) = \sum_{k=1}^L \varphi_1(t, t_0)_k [1 - e^{-(t-t_0)k/\tau_i}] \quad (3.59)$$

$$X(j) = 1/E_j \quad (3.60)$$

$$\text{com } \eta_j = \frac{\tau_j}{E_j} \quad (3.61)$$

Com a resolução do sistema obtêm-se os parâmetros  $E_j$  da cadeia.

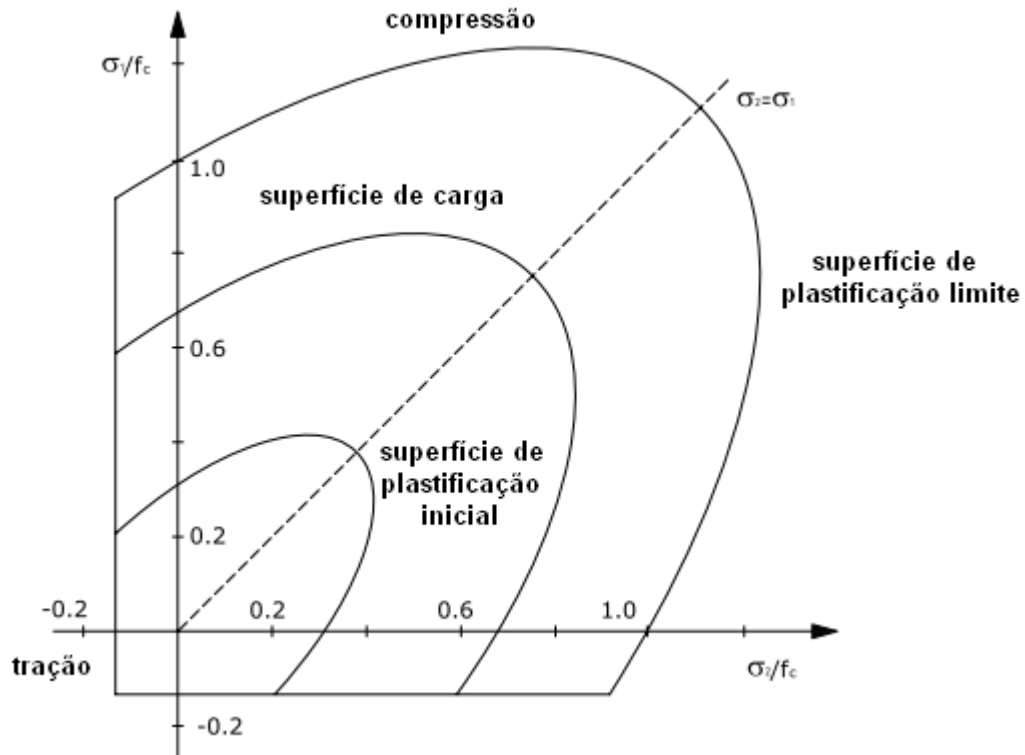
### 3.3 MODELAGEM DO CONCRETO (TAMAYO, 2011)

#### 3.3.1 Modelo para o concreto em compressão

Em sua pesquisa, Tamayo (2011) utilizou a Teoria da Plasticidade Associada para modelar o concreto à compressão. Três leis foram empregadas para estabelecer as relações constitutivas do tipo incremental, associadas ao modelo elasto-plástico com endurecimento não linear. A primeira trata do critério de plastificação elasto-plástico, no qual as duas superfícies de plastificação inicial (que determina o início da deformação plástica) e a superfície de plastificação limite (que separa o estado com endurecimento não linear e o estado com comportamento elasto-plástico perfeito) são definidas com base nos invariantes de tensão  $I_1$  e  $J_2$  sendo expressas pela função de plastificação  $f(I_1, J_2)$ , que corresponde a uma variação do critério de Drucker-Prager, sendo definida através da equação (Figueiras (1983)):

$$f(I_1, J_2) = (3J_2\beta + \alpha I_1)^{1/2} = \sigma_0 \quad \alpha = 0,355\sigma_0; \beta = 1,355 \quad (3.62)$$

com  $\sigma_0$  definindo a tensão efetiva equivalente considerada como a tensão de compressão de um ensaio uniaxial, e  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros do material obtidos por ajuste da Equação (3.62) a partir dos resultados experimentais de Kupfer, Hilsdorf e Rusch (1969). Ao atingir a superfície de plastificação inicial o processo elasto-plástico inicia-se com a expansão das superfícies de acordo com a lei de endurecimento adotada. Na Figura 7 encontra-se a representação do critério de plastificação.



Fonte: Tamayo (2011).

Figura 7: Superfície de plastificação no espaço das tensões principais.

A segunda lei é em relação a plastificação, sendo o incremento da deformação plástica definido pela Equação (3.63).

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.63)$$

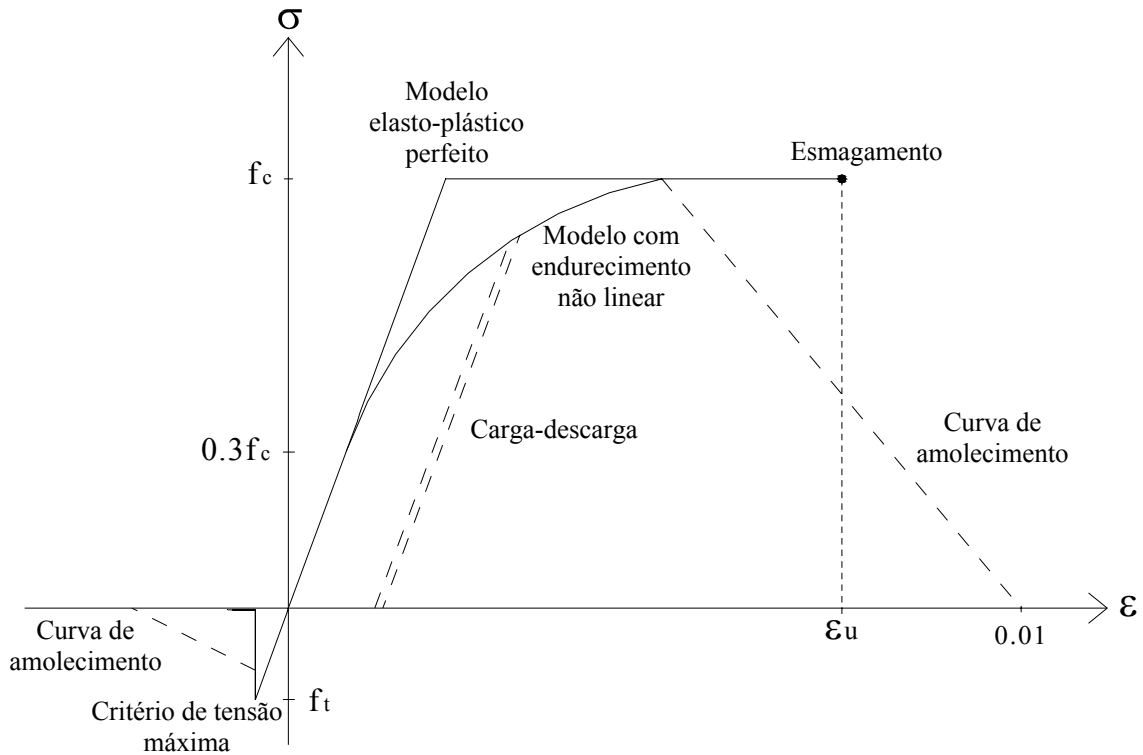
sendo  $d\lambda$  a constante de proporcionalidade que determina a magnitude da deformação plástica e o gradiente  $\partial f(\sigma)/\partial \sigma_{ij}$  define sua direção perpendicular à superfície de plastificação atual.

A terceira lei é a do endurecimento, a qual considera o concreto como um material com endurecimento isotrópico, sendo a evolução da superfície de plastificação dada por:

$$F(\sigma, k) = f(\sigma) - \sigma_y(k) \quad (3.64)$$

em que  $f(\sigma)$  é a função de plastificação, e  $\sigma_y(k)$  representa a tensão de plastificação relacionada ao parâmetro  $k$  de endurecimento.

Para o critério de esmagamento do concreto em compressão para um estado multiaxial de tensões converteu-se diretamente o critério de plastificação descrito em termos das tensões em deformação. A representação desse critério pode ser visualizada na Figura 8. Ao alcançar  $\varepsilon_u$  (deformação última) o material perde toda sua rigidez e resistência.



Fonte: Adaptado de Tamayo (2011).

Figura 8: Diagrama unidimensional tensão-deformação para o concreto tracionado e comprimido

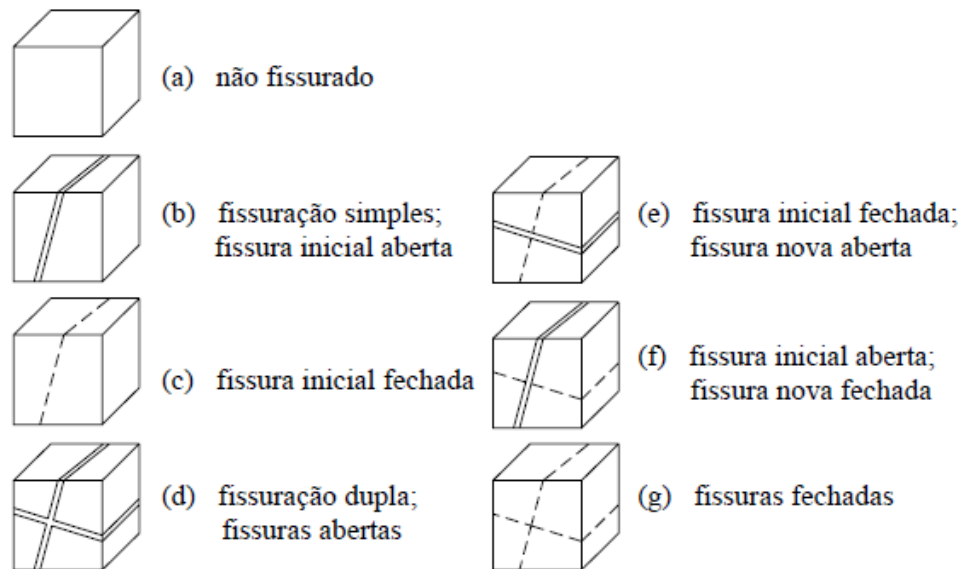
No presente trabalho a opção de considerar o amolecimento do concreto foi introduzida no código computacional empregando-se uma solução bastante simples. Após o concreto atingir a resistência  $f_c$  o patamar ilustrado na Figura 8 é substituído por uma reta descendente até a deformação última  $\epsilon_u = 0,01$ .

### 3.3.2 Modelo para o concreto em tração

Para o concreto em tração Tamayo (2011) empregou o conceito de fissuração distribuída, ou seja, considera-se a fissuração distribuída da zona de influência associada ao ponto representativo do material (PÓVOAS, 1991). Com isto nenhuma alteração da malha de elementos finitos é realizada, e a relação tensão-deformação após a ocorrência da fissuração é simplesmente atualizada.

Para determinação da fissuração considera-se que quando excedida a tensão de fratura do concreto pela tensão principal máxima instalada a formação de uma fissura na direção perpendicular à referida tensão principal é admitida. Isso transforma o concreto em um material ortótropo com os eixos de ortotropia coincidentes com as direções das tensões principais.

No modelo ainda é previsto a formação de duas fissuras mutuamente ortogonais para cada ponto do material, sendo a respectiva direção fixa ao longo do processo de carga, independente das modificações ocorridas nas direções das tensões principais. Na Figura 9 encontram-se ilustradas as diferentes configurações admitidas. As fissuras são estabelecidas devido ao valor da extensão instalada segundo a direção do plano da fissura e o seu fechamento é associado a valores negativos de extensão.



Fonte: Tamayo (2011).

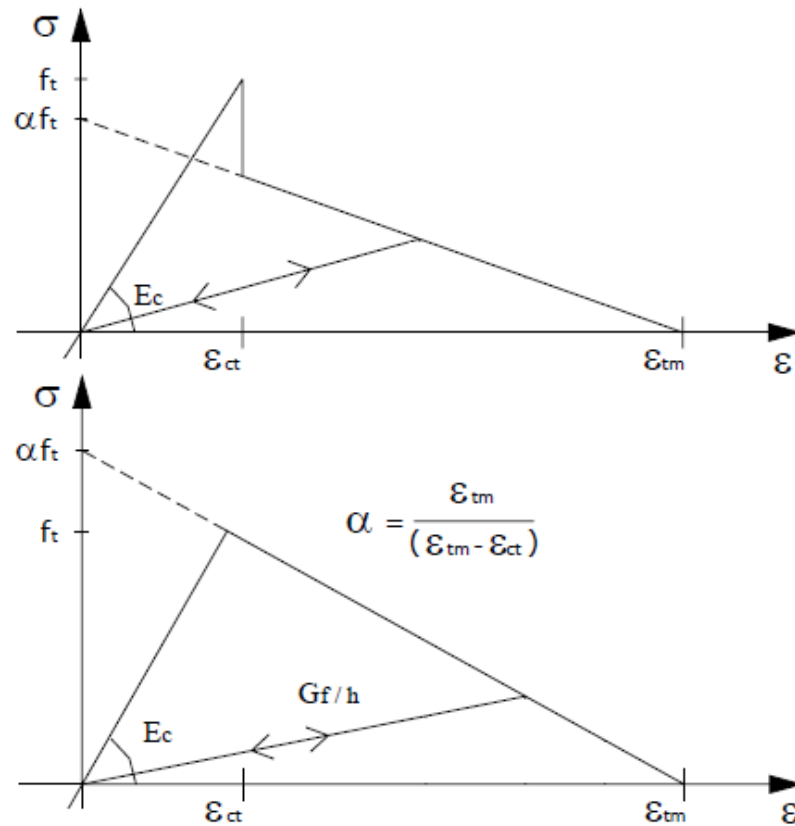
Figura 9: Configurações possíveis para o concreto fissurado

Os fenômenos de engrenamento entre as faces das fissuras devido à armadura, a rigidez ao corte e à flexão das armaduras que o atravessam, contribuem significativamente para a capacidade do concreto na condução de forças de corte. Uma simplificação de todos estes efeitos foi adotada considerando uma redução gradual do módulo de elasticidade transversal através de um coeficiente de retenção. Na hipótese de se verificar o fechamento total da fissura, admite-se um contato perfeito entre as superfícies e em consequência disso, o módulo inicialmente estabelecido para o concreto não fissurado é empregado.

A aderência é outro fenômeno que se estabelece entre a armadura e o concreto e é responsável pela capacidade de retenção das tensões normais de tração do concreto fissurado. Na Figura 10, dois tipos de diagrama de retenção de tensões de tração que são utilizados estão apresentados. O primeiro é aplicado apenas para as regiões onde há interação entre concreto e armadura, o que permite mobilizar o mecanismo de aderência. Nesta figura  $\varepsilon_{tm}$  é a máxima deformação em função do grau de aderência considerado. Valores usualmente empregados para  $\alpha$  estão entre 0,5 e 0,8. O segundo é empregado para concreto simples, ou onde o



concreto encontra-se fora da zona de influência da armadura, sendo  $\varepsilon_{tm}$  calculado em função da energia de fratura  $G_f$  e da espessura da peça.

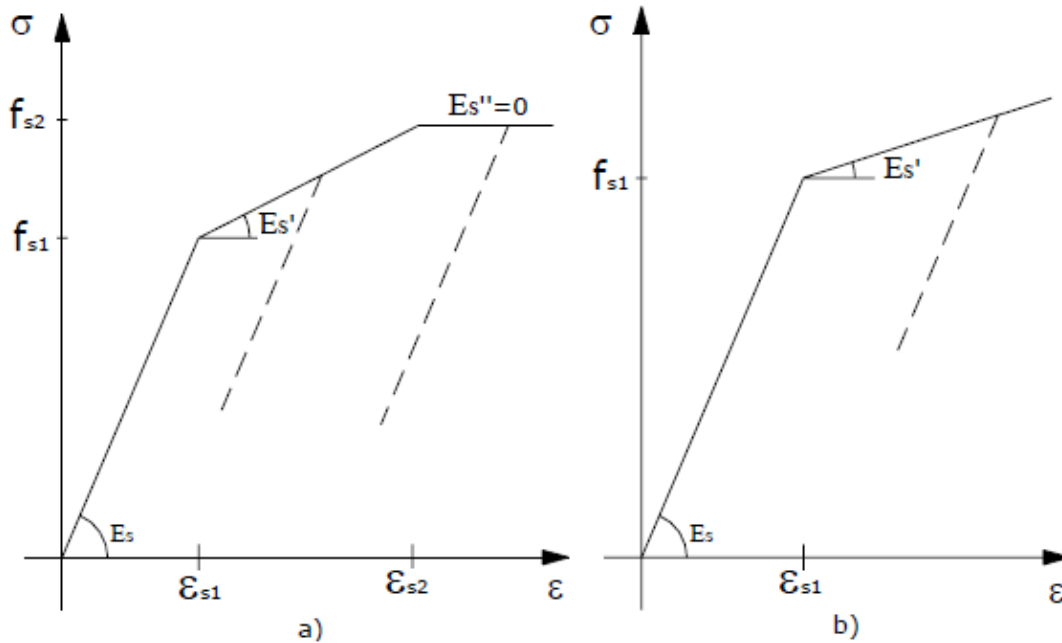


Fonte: Adaptado de Tamayo (2011).

Figura 10: Diagrama de retenção de tensões de tração para o concreto fissurado

### 3.3.3 Modelo para a armadura passiva

O modelo constitutivo adotado para o aço da armadura encontra-se ilustrado na Figura 11. Um modelo bilinear e outro trilinear foram implementados sendo,  $E_s$  o módulo de elasticidade do aço,  $E_s'$  a inclinação no segundo tramo da curva e  $E_s''$  a inclinação no terceiro tramo. Quando a descarga ocorre a mesma segue a inclinação inicial  $E_s$ .

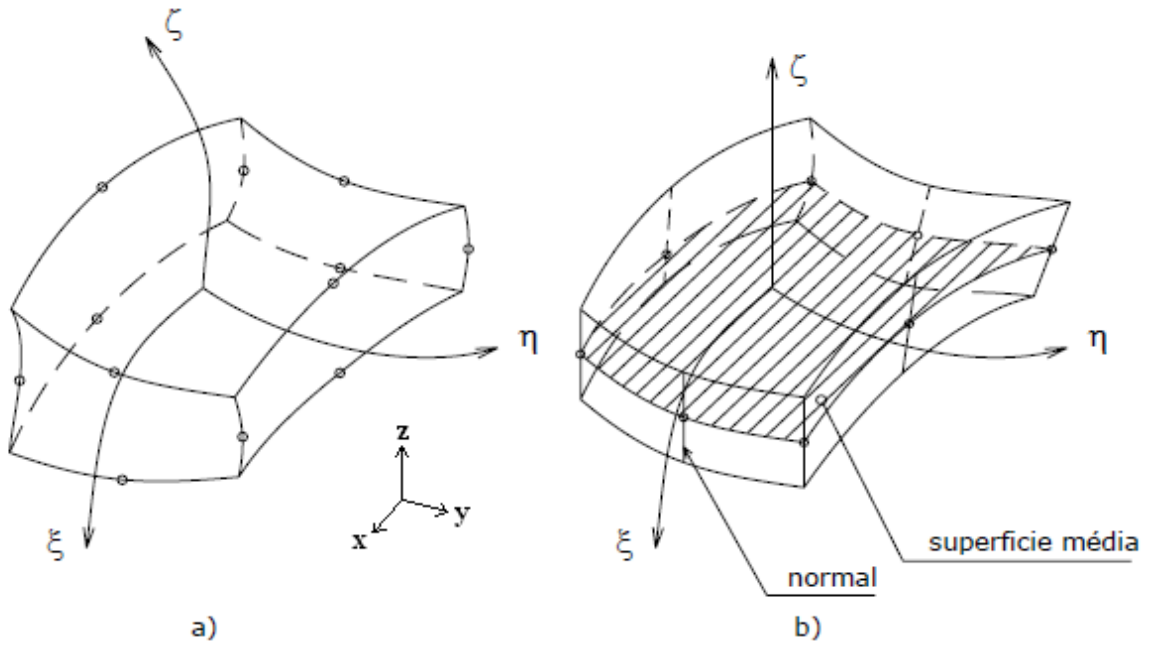


Fonte: Tamayo (2011).

Figura 11: Diagrama tensão-deformação para o aço a) trilinear e b) bilinear

### 3.4 ELEMENTO FINITO EMPREGADO PARA O CONCRETO

O elemento finito empregado para o elemento de concreto é um elemento de casca degenerada (Figura 12). Duas suposições são consideradas na formulação deste elemento. A primeira é que as camadas, normais à superfície, permanecem praticamente retas depois da deformação. A segunda é que a energia de deformação correspondente à componente da tensão perpendicular a superfície média do elemento finito é desconsiderada. Sendo assim, no elemento quadrático apresentado têm-se oito nós com cinco graus de liberdade em cada nó (três translações e duas rotações).



Fonte: Adaptado de Tamayo (2011).

Figura 12: a) Elemento tridimensional sólido quadrático b) Elemento de casca degenerada

As funções de forma para o elemento vêm dadas pelas Equações (3.65) e (3.66).

$$N_k = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_k)(1 + \eta\eta_k)(\xi\xi_k + \eta\eta_k - 1) \quad k = 1,3,5,7 \quad (3.65)$$

$$N_k = \frac{\xi_k^2}{2}(1 + \eta\eta_k)(1 + \eta^2) + \frac{\xi_k^2}{2}(1 + \eta\eta_k)(1 - \xi^2) \quad k = 2,4,6,8 \quad (3.66)$$

As deformações são definidas levando em consideração a hipótese de tensão zero na direção  $z'$  ( $\sigma_{z'} = 0$ ). As componentes de deformação são definidas em termos dos eixos locais (Figura 12). As cinco componentes de deformação são:

$$\{\varepsilon'\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

onde  $u'$ ,  $v'$  e  $w'$  são as componentes dos deslocamentos no sistema local. As componentes de tensão são definidas considerando-se a hipótese de tensão zero em  $z'$  ( $\sigma_{z'} = 0$ ). As cinco componentes de tensão no sistema local são:

$$\{\sigma'\} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{bmatrix} = [D]\{\varepsilon'\} \quad (3.68)$$

onde  $\{\varepsilon'\}$  é o vetor de deformação e  $[D]$  a matriz constitutiva.

O elemento de casca degenerado possui um modelo em camadas. Este modelo é composto por uma série de camadas que podem ser de diferentes materiais, sendo as propriedades e as tensões funções descontínuas de  $\zeta$ . Em razão disto, uma integração através das camadas é necessária sendo a distribuição das tensões na direção da espessura conhecida em um número adequado de pontos. Tamayo (2011) adotou uma regra de integração retangular simples para os pontos de Gauss nas camadas. O modelo de representação da armadura é o modelo distribuído. Neste modelo as camadas possuem as propriedades do aço com uma espessura equivalente a área de armadura da seção transversal. Este modelo é bastante indicado no caso de estruturas de placas ou cascas. Tanto a posição da armadura quanto sua espessura são consideradas adimensionais. Essa espessura varia de -1 a +1 e sua orientação é dada pelo ângulo  $\theta$  correspondente. Um esquema de uma laje com oito camadas de concreto e duas camadas de aço pode ser visualizada na Figura 13, onde ao lado esquerdo encontram-se a espessura real da laje de concreto e a posição real das camadas de aço. Do lado direito têm-se a posição e espessura normalizadas das camadas de aço, sendo a espessura normalizada compreendida num intervalo de -1 a +1. O ângulo  $\theta = 0^\circ$  refere-se à armadura longitudinal e o ângulo  $\theta = 90^\circ$  à armadura transversal.

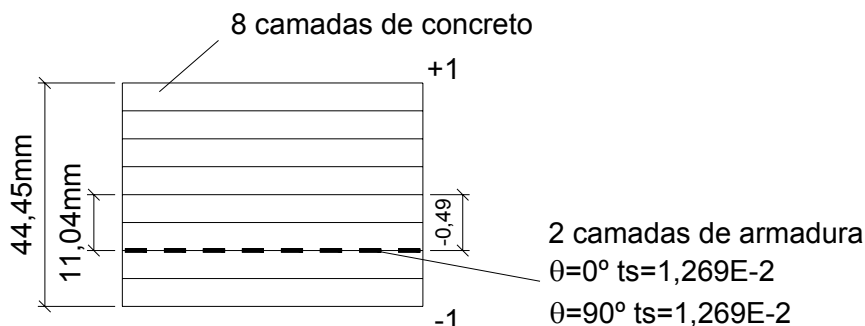
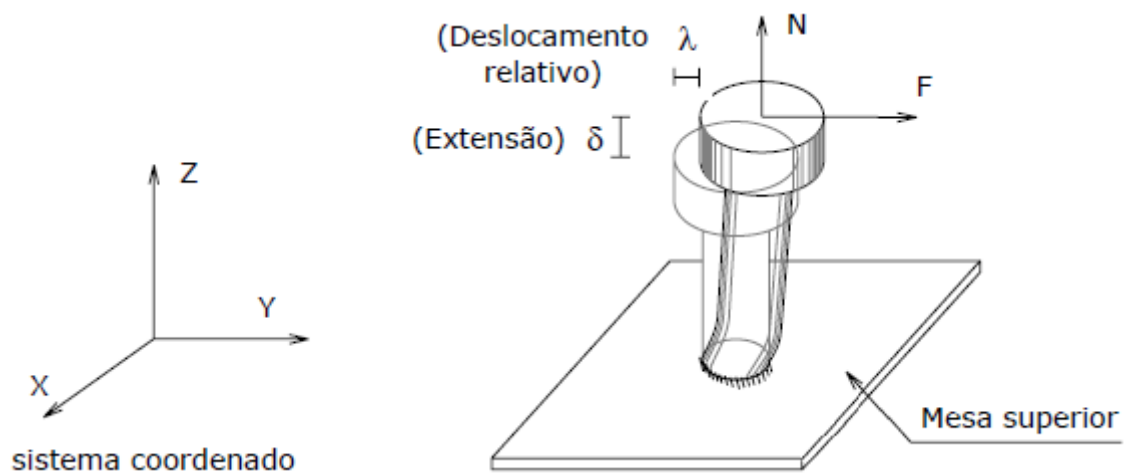


Figura 13: Esquema em camadas do elemento finito empregado para o concreto armado.

### 3.5 MODELAGEM DOS CONECTORES (TAMAYO, 2011)

Em sua pesquisa Tamayo (2011) modelou os conectores de cisalhamento do tipo *stud* como elementos tridimensionais de barra viga-coluna (pórtico espacial). Seu comportamento real é bastante complexo, sendo o mesmo responsável pela transmissão do cortante longitudinal e transversal da laje de concreto à viga de aço. Esse elemento, que possui aproximadamente o comprimento real do conector, une os planos médios da asa superior da viga de aço e da laje de concreto. A deformação e a transferência da força axial  $N$  e de cisalhamento  $F$  pode ser visualizada da Figura 14. A força cortante pode ser considerada nas duas direções ortogonais no plano  $xy$  da seção transversal.



Fonte: Tamayo (2011).

Figura 14: Conector de cisalhamento antes e após a deformação

Para a modelagem desse elemento é necessário conhecer sua rigidez lateral. Isto é obtido através de ensaios experimentais denominados “*Push out test*” que geram uma curva de deslocamento relativo (*slip*) versus força cortante. Esta curva é não linear desde a origem.

A matriz de rigidez dos conectores empregada por Tamayo (2011) possui cinco graus de liberdade por nó. A rigidez de torção é desconsiderada, apesar disso suas linhas e colunas correspondentes são mantidas, pois este elemento se conecta ao elemento de placa delgada de quatro nós da viga de aço que apresenta seis graus de liberdade. A matriz é apresentada na Equação 3.69.



No trabalho de Tamayo (2011) a hipótese de giros iguais nos planos unidos pelos conectores de cisalhamento é assumida empregando-se valores muito grandes para os fatores  $g1$  e  $g2$  nos termos correspondentes à flexão na matriz de rigidez. Do mesmo modo, para considerar desprezível a separação vertical entre laje e viga adota-se uma área da seção do conector muito grande no termo correspondente à rigidez axial. Na matriz exposta anteriormente,  $K_A$  é a rigidez axial,  $K_x$  e  $K_y$  as rigidezes laterais,  $K_t$  a rigidez à torção e  $L$  o comprimento do elemento, adotado como sendo o comprimento do plano médio da asa superior da viga de aço até o plano médio da laje de concreto.

As curvas força-deslocamento dos conectores são bastante usuais na literatura. Um ajuste realizado através de uma equação exponencial dependente de dois parâmetros  $a$  e  $b$  foi proposto por Yam e Chapman (1968):

$$F_\alpha = a[1 - e^{-b s_\alpha}] \quad (3.70)$$

sendo  $F_\alpha$  a força de cisalhamento atuante no conector na direção  $\alpha$ ,  $a$  e  $b$  constantes que definem a forma e o tamanho da curva e  $s_\alpha$  o deslocamento relativo associado a direção  $\alpha$ . Para uma direção qualquer se tem a seguinte expressão para a rigidez dos conectores:

$$\frac{dF}{ds} = k = abe^{-b s} \quad (3.71)$$

onde  $k$  é a rigidez de corte tangente devido à força de corte no conector e seu deslocamento relativo. Uma nova formulação para a rigidez dos conectores é proposta no presente trabalho. Bujnak e Bouchair (2005) propuseram uma formulação secante fixa na origem para a rigidez dos conectores de cisalhamento. Essa formulação foi implementada no programa com opção do usuário sendo, neste caso, a Equação (3.71) é substituída por:

$$k = F/s \quad (3.72)$$

sendo  $F$  determinado pela Equação (3.70) e  $s$  o deslocamento relativo atual. Uma representação das duas rigidezes encontram-se na Figura 15.

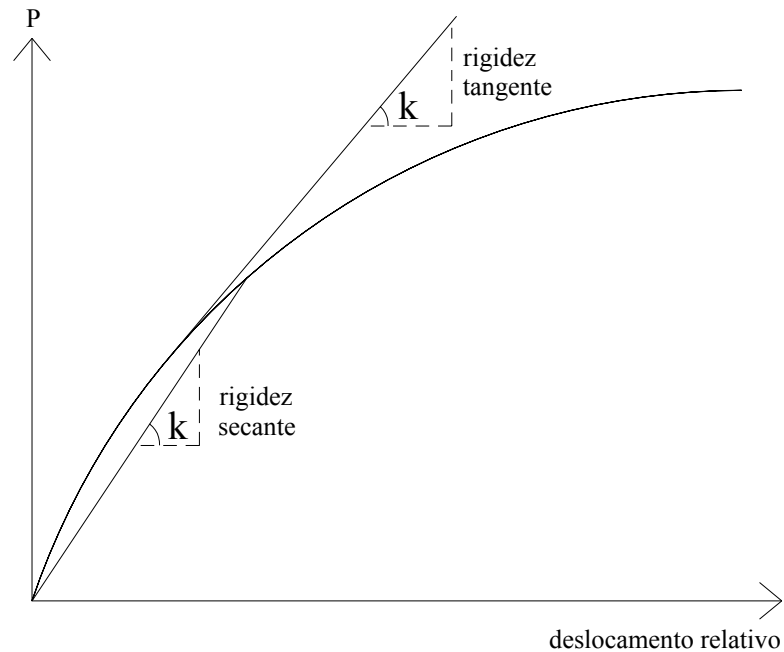


Figura 15: Rigidez tangente e secante do conector

### 3.6 MÉTODO DE SOLUÇÃO NÃO-LINEAR EM ELEMENTOS FINITOS

A análise numérica de estruturas de concreto armado é dificultada pela relação tensão-deformação não-linear. Um agravante surge quando a tensão de tração é atingida e começam a surgir fissuras no concreto, causando uma redistribuição nas tensões da estrutura. O princípio dos deslocamentos virtuais é empregado como base para a formulação do método dos elementos finitos.

#### 3.6.1 Discretização espacial

Numa análise empregando o método dos elementos finitos, soluções aproximadas são arbitradas em subdomínios, de dimensões finitas e formas diversas, que podem ser conectados através de seus pontos nodais em uma malha de elementos, simulando o meio contínuo. Para o modelo de deslocamentos o vetor do campo de deslocamentos  $\{u\}$  em qualquer ponto dentro de um elemento é obtido interpolando o vetor de deslocamento nodal  $\{u\}_e$  daquele elemento que é expresso como:

$$\{u\} = [N] \{u\}_e \quad (3.73)$$

onde  $[N]$  é a matriz que contém as funções de forma que relaciona o meio contínuo com os valores nodais. Conhecendo o deslocamento em qualquer ponto dentro do elemento a



deformação pode ser determinada usando um apropriado operador linear, sendo o campo de deformações descrito por:

$$\{\varepsilon\} = [L] \{u\} \quad (3.74)$$

onde  $\{\varepsilon\}$  é o vetor de deformação e  $[L]$  é a matriz com operadores diferenciais. Os deslocamentos são usualmente expressos a níveis nodais. Portanto é mais conveniente expressar o campo de deformações em termos de deslocamentos nodais. Isto é feito combinando as Equações (3.73) e (3.74):

$$\{\varepsilon\} = [B] \{u\}_e \quad (3.75)$$

onde  $[B] = [L] [N]$  conhecida como a matriz deformação-deslocamento.

Com a deformação conhecida em qualquer ponto, a tensão pode ser calculada para um dado tipo de material. Em uma análise dependente do tempo, é importante levar em conta corretamente o desenvolvimento das deformações inelásticas dependentes do tempo na estrutura. No presente estudo as deformações inelásticas dependentes do tempo são a deformação por fluência e a deformação por retração do concreto. Portanto a tensão no elemento pode ser escrita como:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon - \varepsilon^*\} \quad (3.76)$$

onde  $[D]$  é a matriz constitutiva do material, e  $\{\varepsilon^*\}$  é o vetor de deformações iniciais, que para o caso do concreto é a soma das deformações de fluência e retração.

### 3.6.2 Princípio dos trabalhos virtuais

Com a hipótese de carregamento quase-estático, num sistema conservativo, ou seja o trabalho das forças internas e externas independe da trajetória, e considerando pequenos deslocamentos e rotações, (sendo as equações de equilíbrio escritas na configuração original), o princípio da superposição é válido. De acordo com o princípio da conservação da energia (Primeira Lei da Termodinâmica) o trabalho realizado ao se aplicar forças externas é igual ao incremento da energia de deformação, ou seja, o trabalho interno realizado pelo estado de tensão do corpo, deve ser igual ao trabalho externo das forças que agem nesse corpo. Considerando um elemento sujeito a forças externas como forças de volume  $\{p_b\}$ , forças de superfície  $\{p_s\}$  e forças concentradas  $\{p_e\}$ , a aplicação do princípio dos trabalhos virtuais leva a:

$$\int_{V_e} \delta \varepsilon^T \sigma dV = \int_{V_e} \delta \{u\}^T \{p_b\} dV + \int_{A_e} \delta \{u\}^T \{p_s\} dA + \delta \{u\}_e^T \{p_e\} \quad (3.77)$$

onde  $V_e$  é o volume do elemento e  $A_e$  sua área. O termo da esquerda do sinal de igualdade da Equação (3.77) é o trabalho interno realizado devido à tensão do elemento. O trabalho externo é dado pelas parcelas à direita, que são devidas às forças de volume, superfície e nodais. Substituindo as Equações (3.73), (3.75) e (3.76) na Equação (3.77) têm-se:

$$\begin{aligned} \delta \{u\}_e^T \left( \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \right) \{u\}_e - \delta \{u\}_e^T \left( \int_{V_e} [B]^T [D] \{\varepsilon^*\} dV \right) \\ = \delta \{u\}_e^T \left( \int_{V_e} [N]^T \{p_b\} dV + \int_{A_e} [N]^T \{p_s\} dA + \{p_e\} \right) \end{aligned} \quad (3.78)$$

Sendo a Equação (3.78) válida para qualquer deslocamento virtual, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \{u\}_e \\ = \int_{V_e} [N]^T \{p_b\} dV + \int_{A_e} [N]^T \{p_s\} dA + \{p_e\} + \int_{V_e} [B]^T [D] \{\varepsilon^*\} dV \end{aligned} \quad (3.79)$$

ou, reescrevendo em forma compacta, tem-se

$$[K]_e \{u\}_e = \{F\}_e + \{P\}_e \quad (3.80)$$

sendo:

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \quad (3.81)$$

$$\{F\}_e = \int_{V_e} [B]^T [D] \{\varepsilon^*\} dV \quad (3.82)$$

$$\{P\}_e = \int_{V_e} [N]^T \{p_b\} dV + \int_{A_e} [N]^T \{p_s\} dA + \{p_e\} \quad (3.83)$$

onde  $[K]_e$  é a matriz de rigidez do elemento,  $\{F\}_e$  é o vetor de força nodal devido às deformações iniciais (fluência e retração) e  $\{P\}_e$  é o vetor de cargas externas totais aplicado ao elemento. Nota-se que as deformações iniciais, forças de volume e de superfície que agem no campo contínuo do elemento são convertidas em cargas nodais através de interpolações e integrações apropriadas. Portanto, as deformações dependentes do tempo devido à fluência e retração do concreto são tratadas do mesmo modo que as cargas nodais aplicadas ao elemento.

O conceito do princípio dos trabalhos virtuais pode ser estendido de um elemento apenas para a estrutura global. A expressão equivalente à (3.80) a nível estrutural é:

$$[K]\{u\} = \{F\} + \{P\} \quad (3.84)$$

O vetor de deslocamento  $\{u\}$  contém o deslocamento correspondente aos graus de liberdade de cada nó da estrutura.  $[K]$ ,  $\{F\}$  e  $\{P\}$  são a matriz de rigidez, vetor de carga equivalente inicial e vetor de carga externa, respectivamente, dados por:

$$[K] = \sum_n [K]_e \quad \{F\} = \sum_n \{F_e\} \quad \{P\} = \sum_n \{P_e\} \quad (3.85)$$

onde  $n$  é o número total de elementos do modelo. Os vetores  $\{F\}$  e  $\{P\}$  são conhecidos e a matriz  $[K]$  é montada de acordo com as propriedades dos materiais empregados. Os deslocamentos nodais são determinados resolvendo o número de equações  $N \times n^\circ$  graus de liberdade, após a aplicação das condições de contorno.

A expressão que governa o equilíbrio da Equação (3.84) pode ser escrita como:

$$\{P\} - \{Q\} = 0 \quad (3.86)$$

onde  $\{Q\}$  é o vetor das forças internas da estrutura dado por:

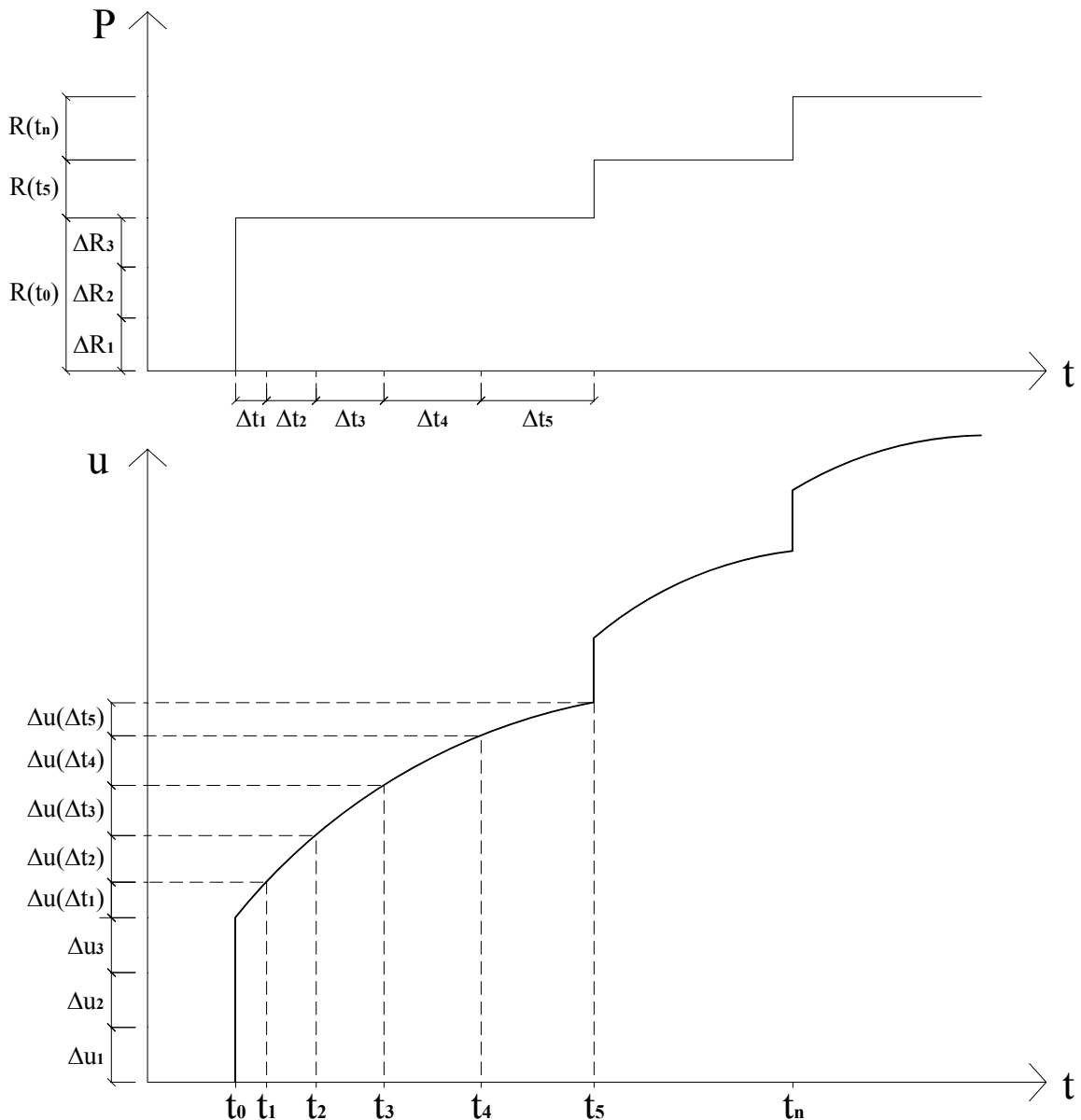
$$\{Q\} = [K]\{u\} - \{F\} = \int_{V_e} [B]^T \{\sigma\} dV \quad (3.87)$$

### 3.6.3 Solução incremental iterativa

Uma formulação incremental iterativa usando Newton-Raphson modificado foi empregada por Tamayo (2011) para a solução de problemas não-lineares. Neste método a matriz de rigidez é atualizada na segunda iteração de cada incremento e também quando ocorre descarga de tensão em um dado elemento. Para considerar o efeito do tempo, um esquema de integração passo a passo no domínio do tempo é acoplado para a análise dos sistemas estruturais. Em cada passo de tempo, um processo de carga incremental é empregado com uma abordagem iterativa na solução das equações de equilíbrio de cada incremento de carga.

Todo o período de análise é dividido em um número determinado de passos de tempo,  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$  (Figura 16). Assume-se que as mudanças na carga externa ocorrem apenas no começo ou final de cada passo de tempo, ou seja,  $t_1, t_2, t_3, t_4$ . No caso de existir um novo carregamento externo ao longo do tempo deve-se recomençar o processo com passos pequenos

e então aumentá-los. O incremento de carga externa num tempo particular pode ser subdividido em um número de incrementos de carga para melhor detalhar a resposta não-linear da estrutura. Por exemplo, o incremento no tempo  $t_0$ ,  $R(t_1)$ , pode ser dividido em três incrementos de carga  $\Delta R_1$ ,  $\Delta R_2$  e  $\Delta R_3$ . Um processo iterativo é usado para a solução em cada incremento de carga e os incrementos nos campos das variáveis de deslocamento, deformação e tensão são adicionados ao campo total anterior para gerar o atual estado da estrutura.



Fonte: Adaptado de Kabir (1976).

Figura 16: História da resposta da estrutura devido à carga externa, fluência e retração.

## 4 IMPLEMENTAÇÃO

A implementação do programa é dividida nas etapas de pré-processamento utilizando o *software* GiD, alterações nas rotinas do código computacional em Fortran, e pós processamento empregando novamente o *software* GiD e *scripts* em Matlab.

### 4.1 CUSTOMIZAÇÃO DO GiD PARA PRÉ-PROCESSAMENTO

No trabalho desenvolvido por Tamayo (2011) a geração da malha era feita pelo próprio código computacional. Achou-se conveniente a utilização do *software* GiD a fim de facilitar esta etapa. O GiD é uma ferramenta computacional utilizada para o pré e pós-processamento de simulações numéricas em engenharia e ciência. Trata-se de um *software* adaptável às necessidades do usuário por ser customizável; e de fácil utilização por apresentar uma interface gráfica amigável. Desenvolvido pelo CIMNE – International Center for Numerical Methods in Engineering (Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona-Espanha), o *software* atualmente encontra-se na versão 11.0, que é utilizada no presente trabalho. O GiD atende necessidades como modelagem geométrica, geração da malha, geração de arquivo de dados para *software* externo e visualização de resultados.

A customização do GiD é feita através da criação de um *Problem Type*. Neste é necessário definir todas as informações requisitadas ao usuário, e o modo como estas informações são geradas para o emprego na rotina de cálculo externa. Os arquivos que fazem parte do *Problem Type* são responsáveis por descrever dados gerais do problema, os materiais e suas propriedades, condições de carga, restrições da análise, entre outros.

É possível realizar a integração do GiD com o *software* externo de modo que todas as etapas (pré e pós-processamento) sejam realizadas utilizando uma única interface. O esquema dessa integração pode ser visualizado na Figura 17. Para que isso seja possível o arquivo \*.exe deve estar alocado na mesma pasta do *Problem Type*; e, além disso esse executável deve gerar um arquivo de saída no formato de leitura de pós-processamento do GiD.

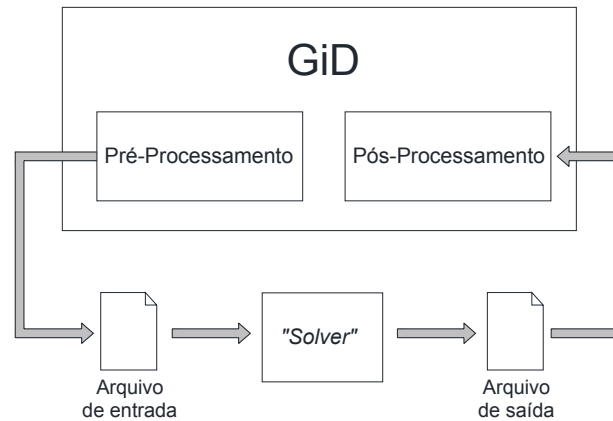


Figura 17: Integração do GiD ao *solver* de cálculo.

Os arquivos customizados apresentados a seguir são específicos para o emprego no programa elasto-plástico para análise de vigas mistas desenvolvido por Tamayo (2011). O *Problem Type* criado recebeu a designação de VM.gid e para ser possível seu funcionamento o mesmo deve encontrar-se na pasta *C:\Program Files (x86)\GiD\GiD 11.0\problemtypes*. Os arquivos descritos a seguir fazem parte do VM.gid.

a) Arquivos de configuração:

- *vm.cnd*: configura as condições de contorno aplicados ao problema: cargas e restrições.
- *vm.mat*: inclui a definição de diferentes materiais através de suas propriedades.
- *vm.prb*: configura os parâmetros gerais do problema, como tipo de integração, número de incrementos de carga, tolerância, número de camadas do concreto armado, etc.

b) Arquivo modelo:

- *vm.bas*: configura o modo como o arquivo de saída de dados (*\*.dat*) é formatado.

c) Arquivo de execução de comandos:

- *vm.bat*: linha de comando responsável por executar o processo de análise através do recurso *Calculate* do GiD.

## 4.2 PRÉ-PROCESSAMENTO

Nesta etapa, a geometria do modelo pode ser feita utilizando as próprias ferramentas de desenho do GiD, ou através da importação de um arquivo (por ex: *\*.dxf*). Tão logo a geometria esteja concluída passa-se para o procedimento de geração da malha de elementos finitos que pode ser estruturada, semi-estruturada e não-estruturada. Após é possível aplicar

um *Problem Type* ao modelo e realizar o preenchimento dos dados gerais do problema, adicionar materiais e propriedades, condições de contorno e carregamento.

Para elucidar o emprego do GiD com o *Problem Type* VM.gid aplicado à análise de viga mista (Figura 18), o roteiro de um exemplo é explicado.

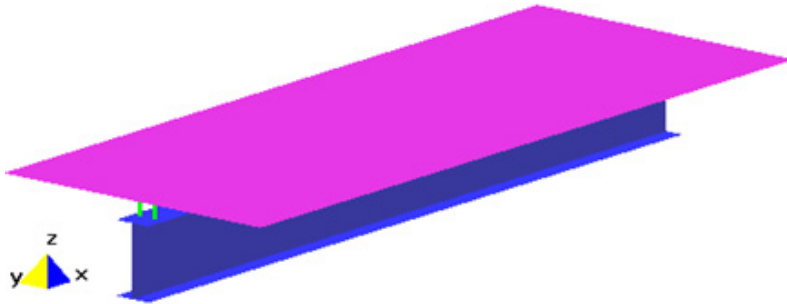


Figura 18: Viga mista empregada no exemplo e sistema de eixos coordenados utilizado.

- 1º Etapa: Geometria e Malha

O problema é dividido em três arquivos de geometria para a laje de concreto, viga de aço e conectores. Isso teve de ser realizado devido ao GiD não permitir o emprego de elementos de ordem diferentes numa mesma geometria. No caso apresentado, para a laje de concreto empregam-se elementos quadrilaterais quadráticos, para a viga de aço elementos quadrilaterais lineares, e para os conectores elementos lineares. Em todos os casos, empregou-se malha estruturada, sendo a geometria da estrutura previamente estudada para que a malha de elementos finitos fosse compatível na ligação dos nós dos conectores com os nós da laje e viga. Também foi estudado o fato da malha estar de acordo com os nós referentes às condições de contorno e cargas aplicadas.

Após a realização da etapa de geometria do modelo e confecção da malha para as três estruturas isoladas a mesma deve ser exportada através do menu *Files-Export-GiDmesh*. Esse comando cria um arquivo com extensão *\*.msh* o qual contém as informações referentes a coordenada de cada nó gerado e conectividade dos elementos. Estas três malhas geradas devem ser unidas em um novo arquivo, seguindo a seguinte sequência, malha da viga, laje e conector (importante para que a numeração de elementos tenha esta mesma ordem). Tomou-se cuidado em compor o desenho geométrico exatamente nas posições que os elementos estruturais iriam tomar quando as malhas fossem colocadas num mesmo arquivo. As Figuras 19, 20 e 21 mostram a geometria e malha do exemplo em questão.

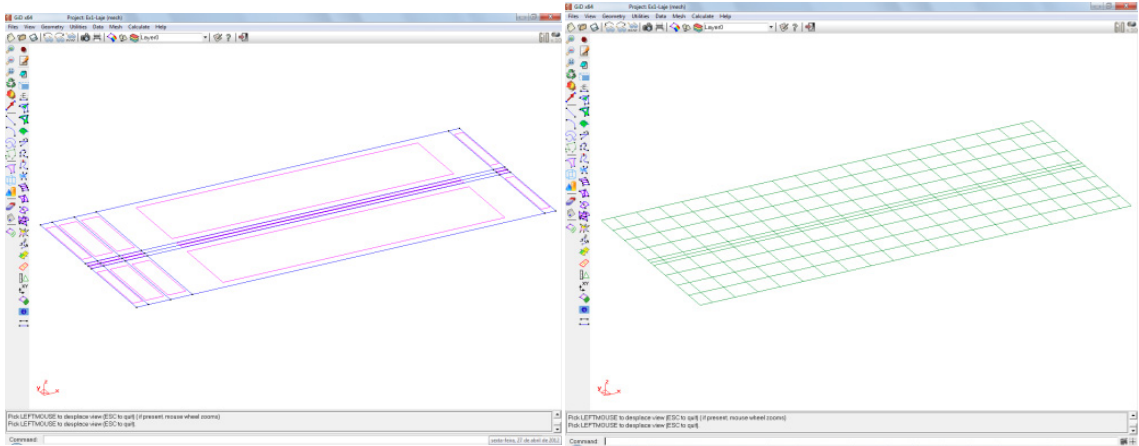


Figura 19: Geometria da laje e malha de elementos quadrático quadrilaterais

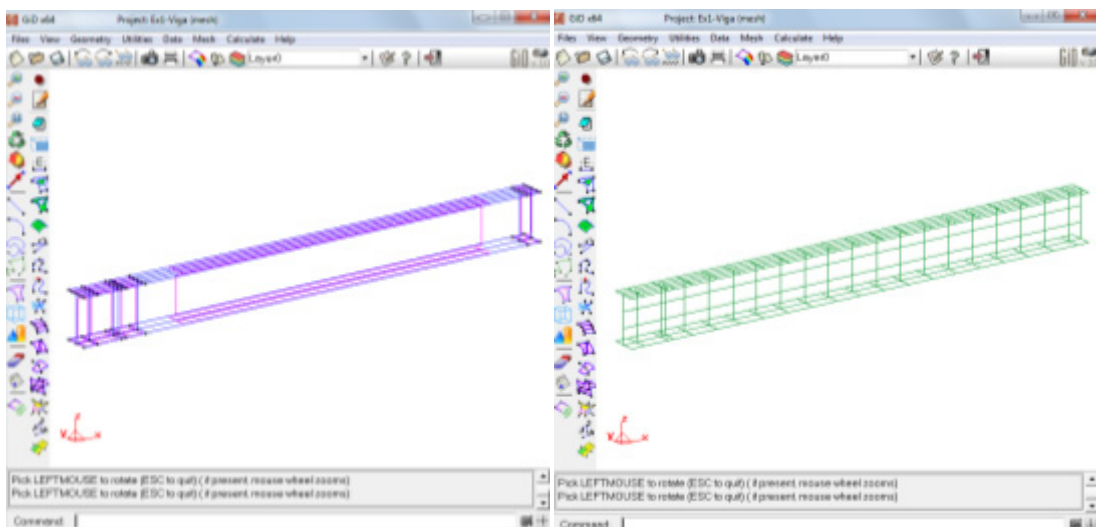


Figura 20: Geometria da viga e malha de elementos lineares quadrilaterais

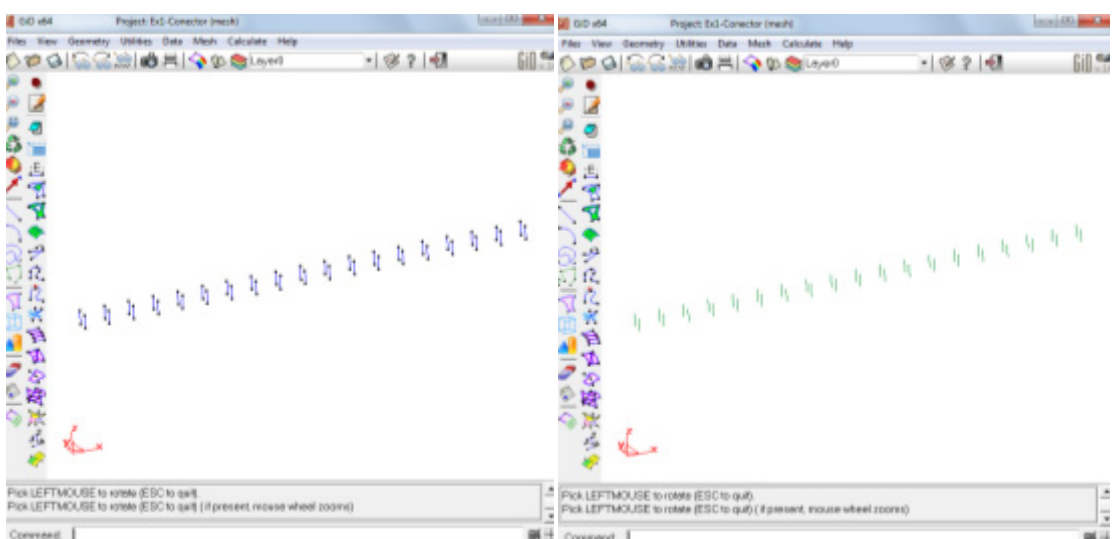


Figura 21: Geometria dos conectores com malha de elementos lineares



Para importar as três malhas geradas deve-se realizar o comando *Files-Import-GiDmesh*. O GiD irá questionar sobre a malha existente. Sendo necessário adicionar malha à atual sem remover a malha anterior, a opção *Add No Share* deve ser escolhida.

Por causa dessa união posterior, alguns nós serão sobrepostos, pois possuem as mesmas coordenadas. Isso ocorre nos nós dos conectores, pois os mesmos são sobrepostos aos nós adjacentes da laje e viga. Para corrigir essa sobreposição e eliminar um dos nós deve-se aplicar o comando *Colapse Mesh* encontrado no menu *Mesh-EditMesh-Collapse-Mesh*. Na caixa de diálogo, acima da linha de comando uma mensagem contendo o número de nós eliminados é mostrada. Na Figura 22 encontra-se a imagem da malha da viga mista, ou seja, de toda a estrutura, sendo esta a malha final do problema.

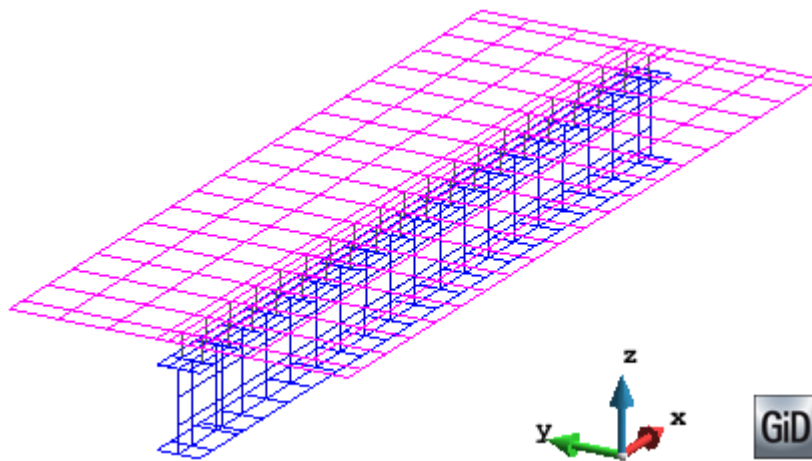


Figura 22: Malha final da estrutura

É importante verificar nesta etapa se as normais dos elementos encontram-se nas mesmas direções, pois esse fato interfere na ordem de como as conectividades dos elementos serão escritas. Isso é realizado através do menu *Utilities-SwapNormals-SelectbyNormal*. Se em algum elemento a direção da normal não estiver de acordo com a ilustrada na Figura 23 a mesma deve ser alterada (elementos no plano x-y devem possuir normal no sentido do eixo +z, já elementos no plano x-z normal no sentido do eixo -y).

Após a verificação da direção das normais deve-se proceder a renumeração dos nós da malha. O GiD dispõe de cinco métodos de renumeração de nós. No presente estudo o método *Reverse Cuthill-McKee* é empregado. Esse algoritmo reduz a banda da matriz gerada pelo método dos elementos finitos seguindo a conectividade dos elementos. Para executar essa renumeração é necessário escrever na linha de comando: *escape escape escape Utilities Variables RenumberMethod 1*.

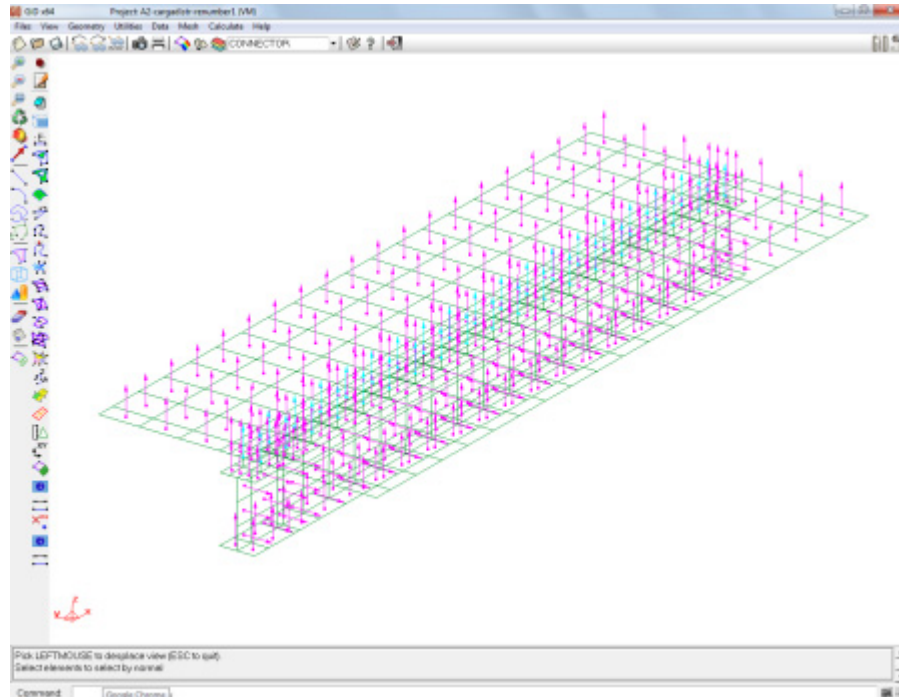


Figura 23: Direção da normal de cada elemento

Para finalizar a etapa da geometria e malha é necessária a atribuição de diferentes camadas (*layers*) aos elementos de concreto, aço e conector. A criação de três *layers* com nomes STEEL, CONCRETE e CONNECTOR deve ser realizada (Figura 24). As cores são irrelevantes. Deve-se, então, atribuir aos elementos sua *layer* correspondente.

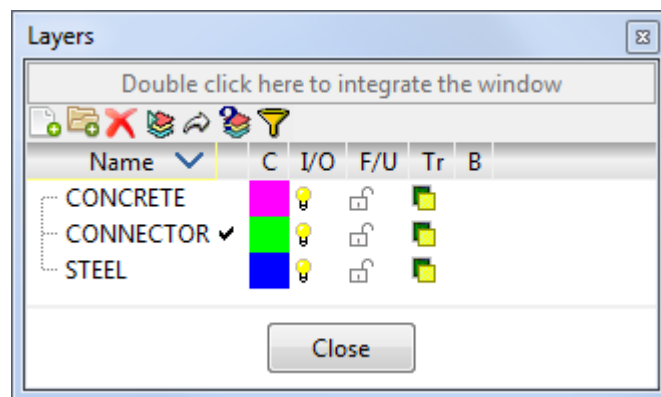


Figura 24: *Layers* a serem criadas no GiD

- 2º Etapa: Atribuição do *Problem Type*

Para atribuir o *Problem Type* ao problema deve-se escolher a opção VM através do menu *Data-ProblemType-VM*. Agora o programa está pronto para receber as informações específicas do modelo, as quais foram previamente customizadas com os arquivos do *Problem Type VM.gid*.

- 3º Etapa: Dados gerais

Para inserção dos dados gerais deve-se acessar o menu *Data-ProblemData*. Os dados gerais foram divididos em *General*, *Increment Load Process* e *Concrete Labels*, cada um deles será explicado a seguir. Ao realizar o comando anterior a janela mostrada na Figura 25 se abrirá.

Na primeira aba (*General*), encontram-se os dados gerais do problema, como título, tipo de análise, tipo de integração, tipo de solução a ser empregada, análise de grandes deslocamentos, tipo de rigidez dos conectores e por fim a consideração de amolecimento no concreto.

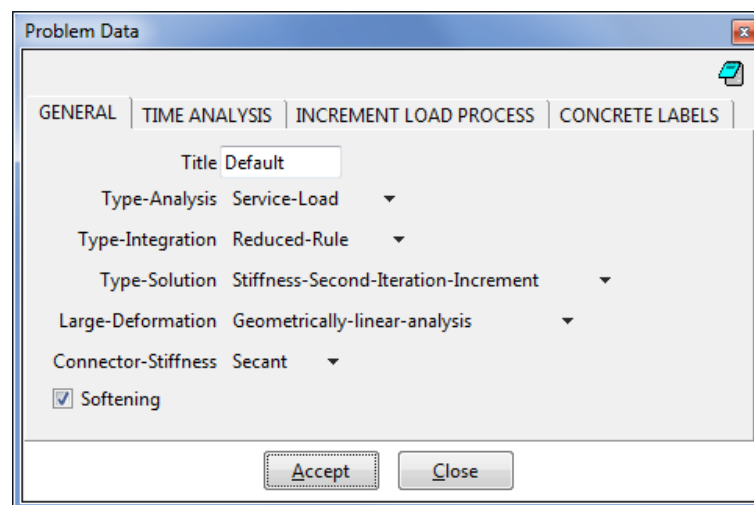


Figura 25: Dados gerais do problema na aba *General*

Na segunda aba (Figura 26) encontram-se os dados necessários à análise de serviço, que considera os efeitos de fluência e retração. O primeiro dado a ser preenchido nesta aba refere-se à idade de aplicação da(s) carga(s) ao longo do tempo. No caso de uma análise com apenas uma carga aplicada em um determinado tempo preenche-se a primeira linha da coluna *Load-Time* com a idade de aplicação desta única carga e na segunda linha o tempo final de análise, ou seja, o tempo que essa carga é sustentada pela estrutura (ambos em dias). Logo, para um determinado histórico de carga variável no tempo é necessário inserir cada um destes tempos sem deixar de inserir o tempo final de análise na última linha. Na terceira aba (*Increment Load Process*) mostrada na Figura 27 é possível definir o histórico do carregamento. Por se tratar de um problema elasto-plástico o tamanho do incremento influencia no resultado. Até quatro diferentes histórias podem ser definidas.

Primeiro é necessário escolher quantas histórias de cargas serão utilizadas ( $N^{\circ}$  *HISTORY*) e a tolerância empregada no cálculo iterativo do equilíbrio de forças internas e externas. Podem ser preenchidas apenas as histórias que serão empregadas, para isso deve-se

informar qual o número de incrementos desejados, a porcentagem de carga atribuída a cada incremento e o número máximo de iterações. Ainda é possível definir quais resultados o *solver* externo deve escrever em um arquivo de resultados. Essa opção é permitida para a primeira e última iteração. Os índices 1, 2 e 3 indicam a escolha por um determinado tipo de resultado de deslocamento, reações e tensões (Figura 27).

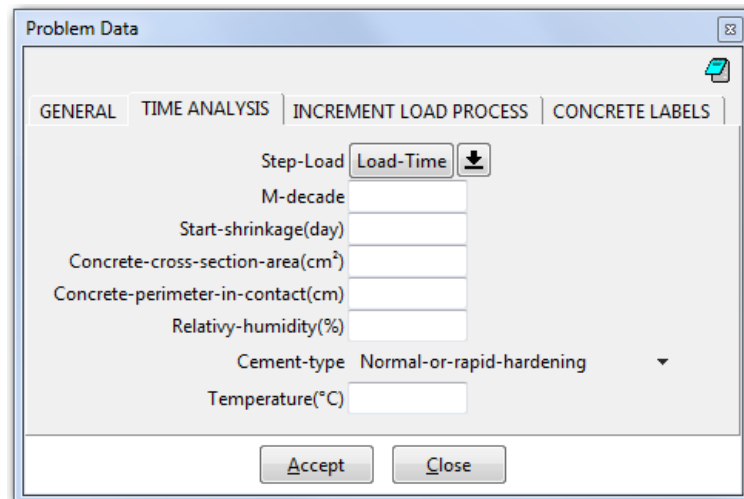


Figura 26: Dados para o cálculo da fluência e retração

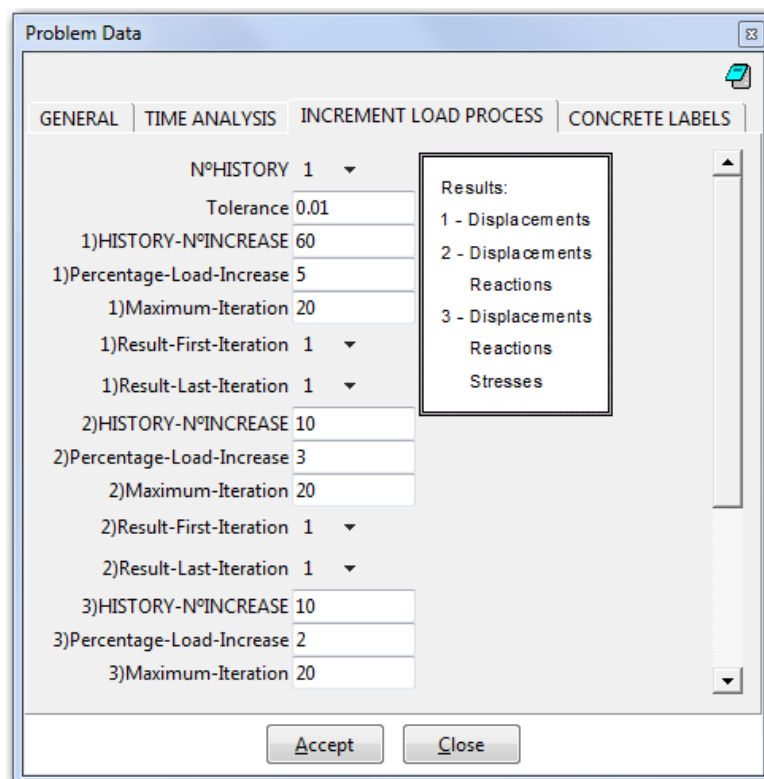


Figura 27: Aba Increment Load Process que define o histórico do carregamento

Na quarta aba (Figura 28) trata-se de dados relativos à laje de concreto armado. O elemento para modelagem da laje em elementos finitos é uma casca degenerada. A

---

Maiga Marques Dias (maigadias@hotmail.com) Dissertação de Mestrado – Porto Alegre: PPGEC/UFRGS 2013

representação desta foi feita através de camadas, pois em problemas que apresentam não linearidade física é necessário que se conheça a distribuição das tensões ao longo da espessura do elemento num número adequado de pontos (TAMAYO; 2011). A armadura de reforço é considerada de forma distribuída. É necessário a discretização de todas as camadas de aço e concreto indicando o número do material empregado na camada (a definição dos materiais é explicada na Etapa 4). No *Problem Type* VM.gid é possível empregar até quatro conjuntos de camada diferentes.

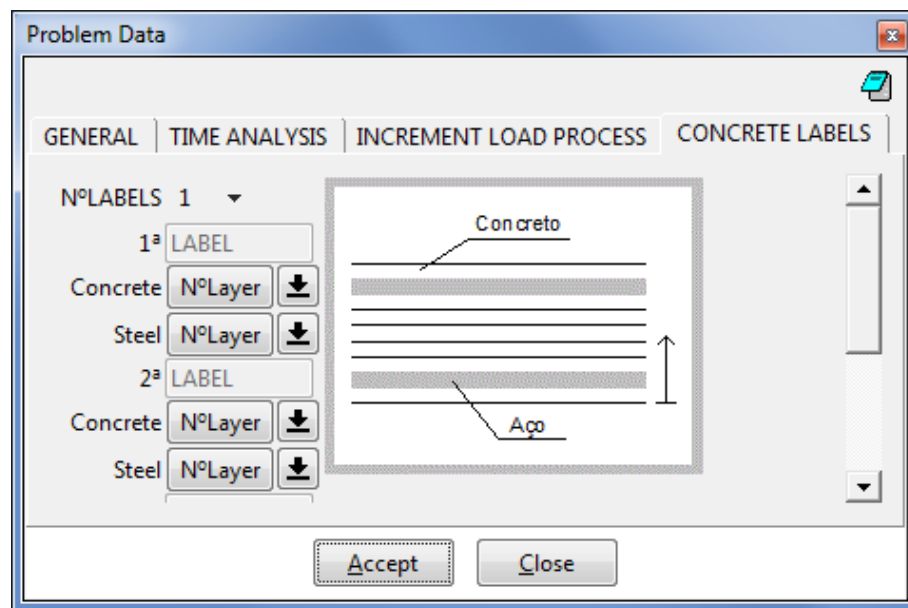


Figura 28: Definição do conjunto de camadas de concreto na aba *Concrete Labels*

Como apresentado na Figura 28 deve-se primeiramente definir quantos tipos de conjunto de camadas serão empregados (1 a 4). Após, deve-se definir a quantidade de camada para cada material (aço de reforço e concreto), e informar qual o número do material empregado (1 a  $n$  materiais) para cada camada. Para isso basta acessar a lista de camadas de aço ou concreto; sendo que essa lista pode aumentar ou diminuir de acordo com o desejado através do botão que contém a seta para baixo ou para cima. As camadas são numeradas sequencialmente de baixo para cima, ou seja, na primeira posição da lista deverá ser informada a camada mais inferior da seção e assim sucessivamente.

#### d) 4º Etapa: Materiais, propriedades, dimensões, posições e direções

Em cada material define-se não apenas suas propriedades como módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, entre outros, mas também espessura do elemento ou camada, ângulo, posição normalizada. Definições mais aprofundadas são encontradas em Tamayo (2011). Para definir esses valores é necessário acessar o menu Data-Materials e na

---

Análise numérica de vigas mistas aço-concreto pelo método dos elementos finitos: efeitos de longa duração

lista de opções escolher o material a ser preenchido. Não é necessário nesta etapa atribuir o material a um correspondente elemento, pois isso será realizado na Etapa 5. Os materiais pré-definidos são:

- Material 1: *Steel Beam* (Viga de aço)
- Material 2: *Steel Beam* (Viga de aço)
- Material 3: *Steel Connector* (Conector)
- Material 4: *Concrete Slab* (Laje de concreto)
- Material 5: *Reinforcement* (Armadura de reforço)
- Material 6: *Reinforcement* (Armadura de reforço)
- Material 7: *Reinforcement* (Armadura de reforço)
- Material 8: *Reinforcement* (Armadura de reforço)

Para criar um novo material com propriedades semelhantes aos pré-definidos, deve-se verificar para que na lista de opções esteja selecionado o material base (pré-definido) e então clicar sobre o botão *New Material*. No caso da criação de um novo material a sua numeração será 9, e assim sucessivamente para todos os novos materiais criados.

Na Figura 29 encontra-se a janela referente ao material de número 1, que é o empregado na viga de aço. As propriedades devem ser preenchidas com unidades coerentes (adotado kN, cm e rad). A espessura do elemento deve ser inserida em termos reais. Para definir o material dos conectores (ver seção 3.5), devem ser preenchidos os campos referentes à rigidez lateral, fatores de corte e área (que possibilitam a compatibilidade dos giros  $g1$  e  $g2$ ); além dos parâmetros  $a$  e  $b$  definidos por uma equação exponencial de ajuste para curvas de deslocamento relativo dos conectores (Figura 30).

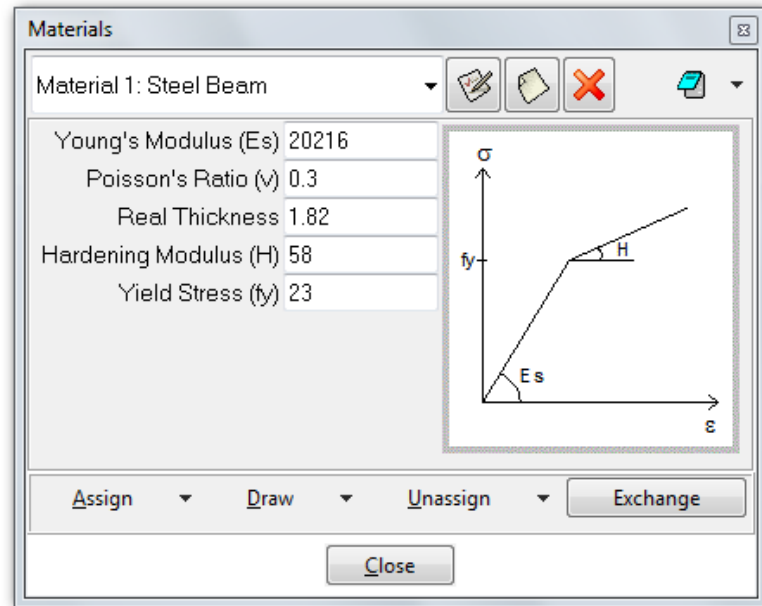


Figura 29: Janela do material para viga de aço

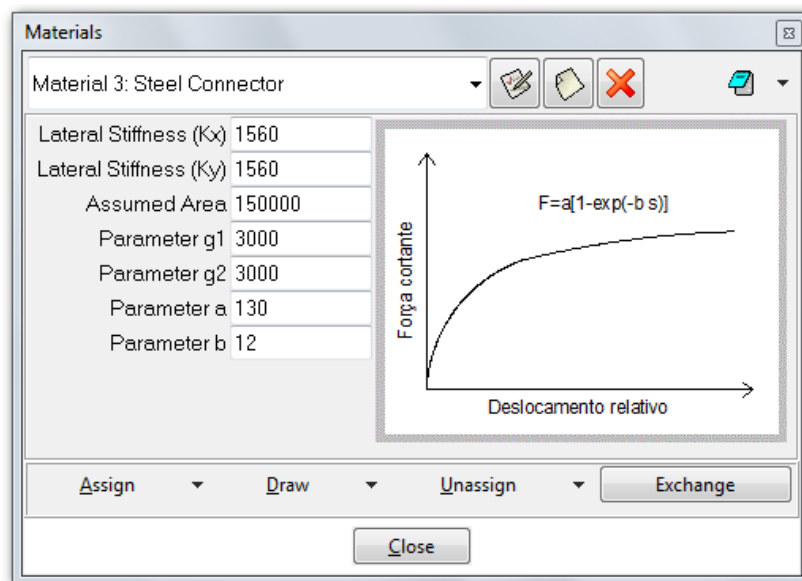


Figura 30: Material para os conectores

Para o concreto os parâmetros mostrados na janela da Figura 31 devem ser determinados. A espessura da camada deve ser a espessura real, ou seja, se a laje possui espessura de 15,24cm e a mesma será discretizada em 10 camadas a espessura real de uma camada será 1,524cm. Tratando-se de análise de serviço, deve-se inserir o valor do módulo de elasticidade aos 28 dias, pois o mesmo será corrigido ou não, de acordo com a primeira idade de carregamento definida.

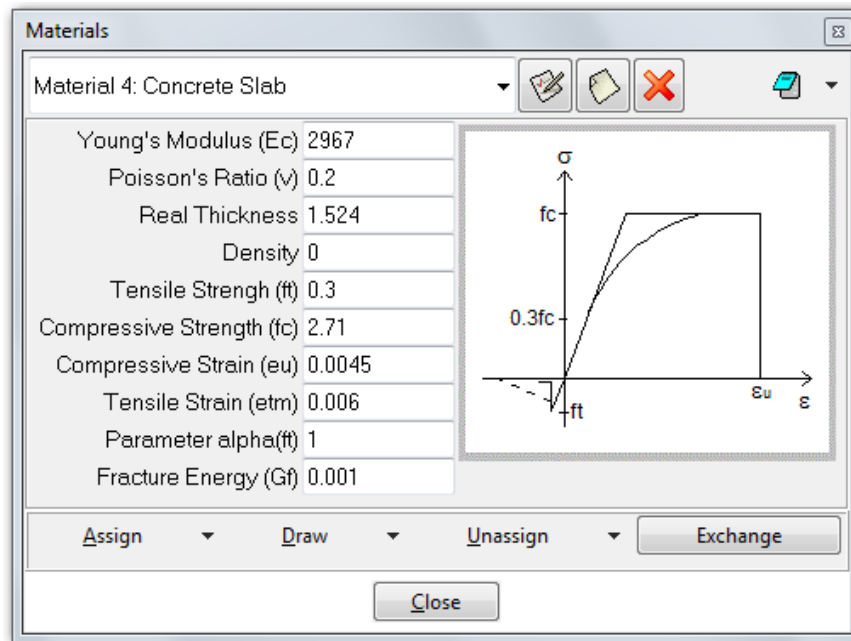


Figura 31: Material da laje de concreto

Para finalizar, o aço das armaduras deve ser determinado (Figura 32). O tipo de armadura adotado para discretização em elementos finitos é a distribuída. A posição da armadura (*Normalized Position*) deve ser informada considerando a espessura normalizada da laje de concreto que varia de -1 a 1, sendo zero o ponto médio.

A espessura da camada de aço de reforço também deve ser informada em termos de sua espessura normalizada (*Normalized Thickness*) para cada direção. Para isso deve-se primeiramente calcular a espessura real da camada considerando a área real de armadura. Para isso emprega-se a quantidade de barras e sua bitola. Para determinar a espessura real (ou altura da camada) divide-se a área de aço pelo comprimento ou largura da laje de concreto dependendo da direção da armadura. Após, deve-se calcular a espessura normalizada empregando a seguinte expressão:

$$h_{normalizada\ armadura} = \frac{2 \times h_{real\ armadura}}{h_{real\ laje\ concreto}}$$

Sendo o multiplicador 2 devido a espessura considerada do elemento finito de -1 a +1.



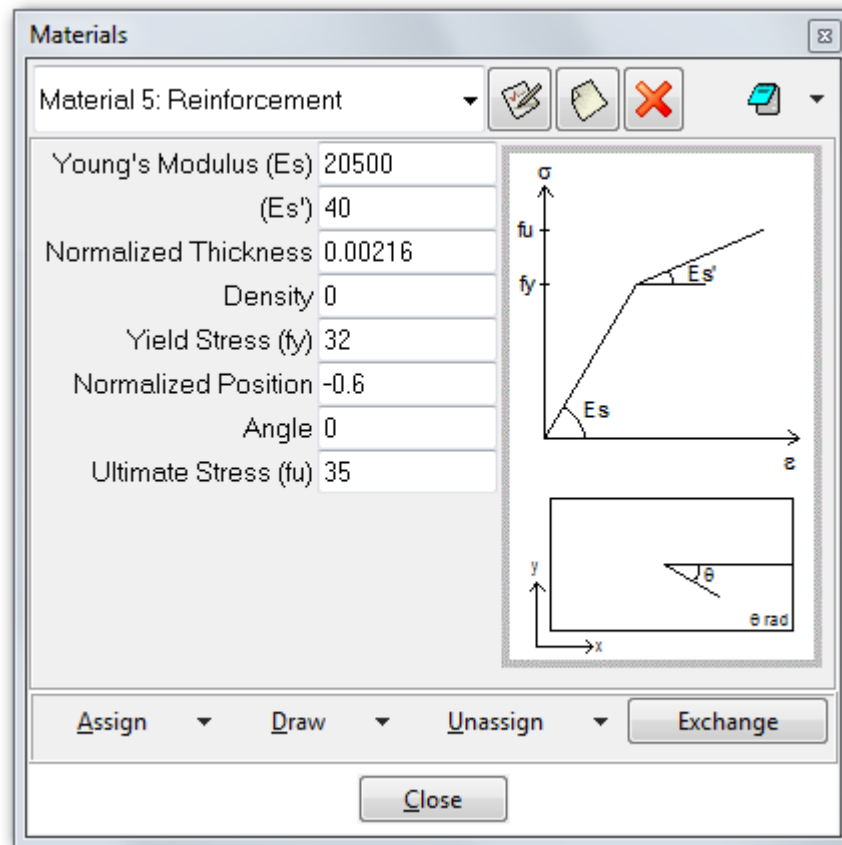


Figura 32: Janela do material da armadura de reforço

e) 5ª Etapa: Condições de contorno, carga nodal e atribuição do material

As condições de contorno e carga são encontradas no menu *Data-Conditions*. Por esse menu também se atribui o número do material empregado para cada elemento no caso da viga de aço e dos conectores. Diferentemente, para os elementos de concreto, deve-se atribuir o número da *Label* (ou conjunto de camadas) correspondente ao elemento.

As vinculações do problema (*Point-Constraints*) são facilmente determinadas selecionando nas pequenas caixas os graus de liberdade restritos (Figura 33). Logo após deve-se clicar no botão *Assign* e aplicar ao(s) nó(s) correspondente(s). O mesmo procedimento deve ser realizado para os demais nós, não sendo necessário o fechamento desta janela.

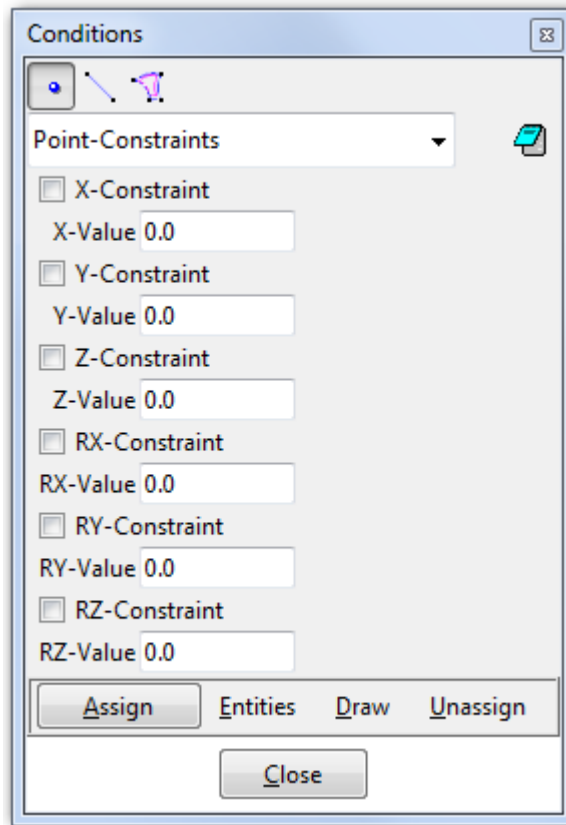


Figura 33: Definição das condições de contorno

Já para a aplicação de carga nodal deve-se alterar na lista de opções de *Restriction-Node* para *Load-Node* (Figura 34). Nessa etapa é necessário informar em qual grau de liberdade a carga esta sendo aplicada e qual seu valor. Se existir mais de um carregamento deve-se adicionar linhas à coluna *Load-History* e então preenchê-la com a carga correspondente àquela idade de carregamento definida na aba *Time Analysis* da Figura 26. Essa coluna deverá possuir sempre uma linha a menos que aquela. Após deve-se clicar no botão *Assign* e selecionar o(s) nó(s) desejado(s). Do mesmo modo o procedimento deve ser repetido para as demais cargas aplicadas aos diferentes graus de liberdade do mesmo nó ao aplicado anteriormente ou de outro nó da malha de elementos finitos. Se não existirem cargas em todos os tempos definidos deve-se criar a linha correspondente a esta carga e preencher com carga zero.

Para atribuição do número do material empregado nos conectores é preciso escolher a aba de linha dentro da janela aberta pelo menu *Data-Conditions* e a opção *Index-Connector*. Como pode ser visto na Figura 35 deve-se informar o número do material correspondente (listados na Etapa 4) e através do botão *Assign* selecionar o(s) elemento(s) desejado(s).

De forma semelhante procede-se para os elementos da viga de aço, porém agora é necessário escolher a aba de superfície e a opção *Index-Steel* (Figura 36). Para a laje de concreto os materiais que compõem cada camada já foram informados na aba *Concrete Labels* (Etapa 3), porém é necessário especificar qual o número da *Label* atribuída a cada elemento de concreto. Isso é realizado através do menu *Data-Conditions*, escolhendo a aba de superfície e na lista de opções a *Index-Concrete* (Figura 36). Basta informar qual o número da *Label* (1 a 4) que deseja-se aplicar ao(s) elemento(s) de concreto e através do botão *Assign* escolher os elementos.

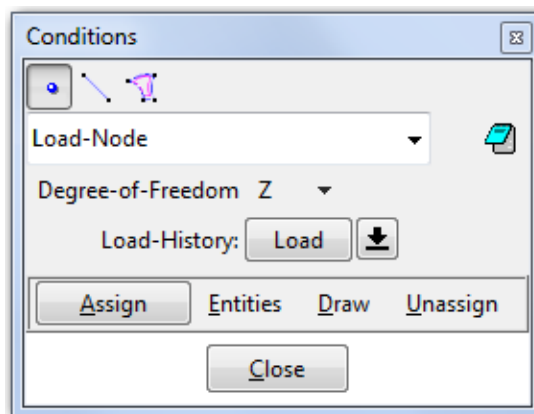


Figura 34: Aplicação da carga nodal no grau de liberdade correspondente

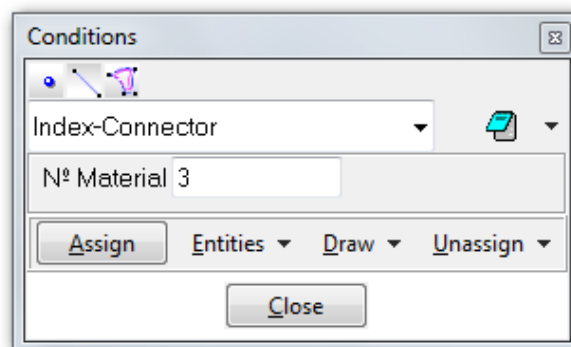


Figura 35: Número do material dos conectores

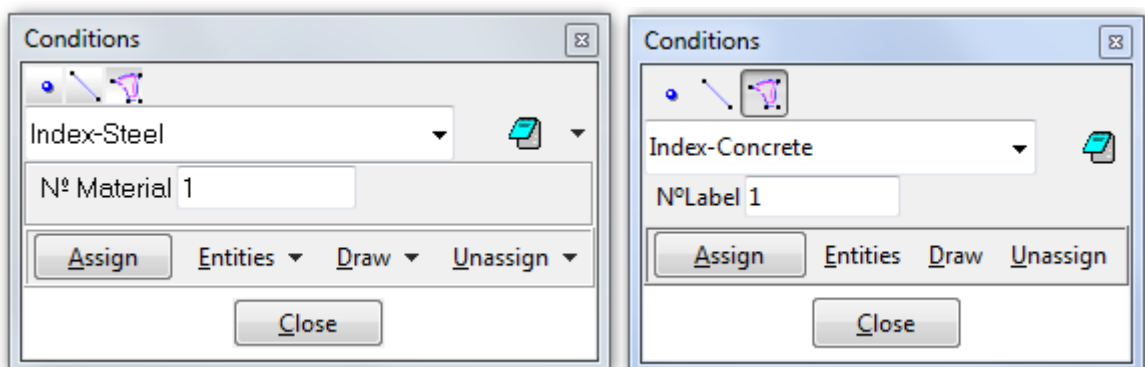


Figura 36: Número do material para os elementos da viga e rótulo de camadas do concreto

Por fim, pode-se aplicar carga de superfície nos elementos selecionando a opção *Load-Surface* empregando procedimento semelhante ao descrito para a Figura 34. Se não existirem cargas em todos os tempos definidos deve-se criar a linha correspondente a esta carga e preencher com carga zero.

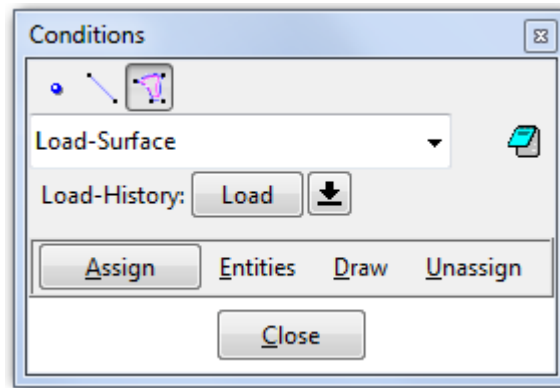


Figura 37: Aplicação da carga de superfície no elemento correspondente

Após o preenchimento de todos os campos o arquivo de entrada pode ser gerado pelo menu *Calculate-Calculate* do GiD. A mensagem apresentada na Figura 38 será exibida e o arquivo de entrada (\*.dat) pode ser encontrado na pasta do *Problem Type*.

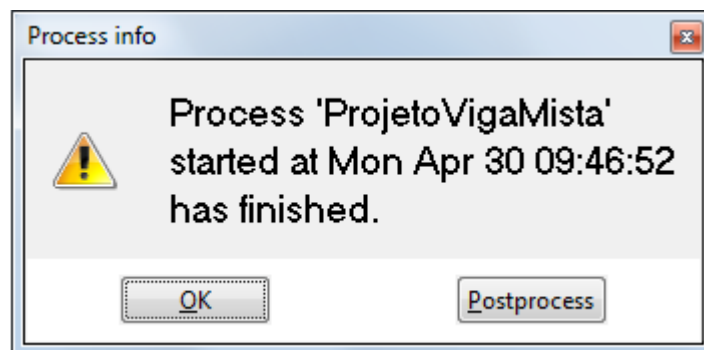


Figura 38: Finalização do pré-processamento com a geração do arquivo de entrada

### 4.3 PÓS-PROCESSAMENTO

Para o pós-processamento dois *softwares* foram utilizados. O *software* GiD, já empregado no pré-processamento auxiliou na visualização dos deslocamentos e da deformada da estrutura. Para isso dois arquivos são necessários, o primeiro com extensão \*.post.msh onde a malha de elementos finitos é armazenada e o segundo com extensão \*.post.res que contém o arquivo de resultados. O acesso ao pós-processador pode ser realizado pelo comando *Files-Postprocess* em seguida é necessário acessar *Files-Open multiple* para carregar os dois arquivos mencionados acima.

O arquivo da malha é gerado na etapa de pré-processamento acessando o menu *Files-Export-GiDmesh*. O arquivo gerado possui o formato de leitura do GiD não sendo necessária nenhuma intervenção. O segundo arquivo é gerado através do código em Fortran no formato de leitura do GiD, este arquivo pode conter dados de deslocamento, tensões e deformações para um ou vários passos. Após o carregamento desses dois arquivos a visualização dos resultados é fácil e bastante intuitiva. Nessa etapa é possível visualizar qualquer incompatibilidade nos resultados, que seriam difíceis de serem encontradas devido ao grande número de dados gerados (Figura 39).

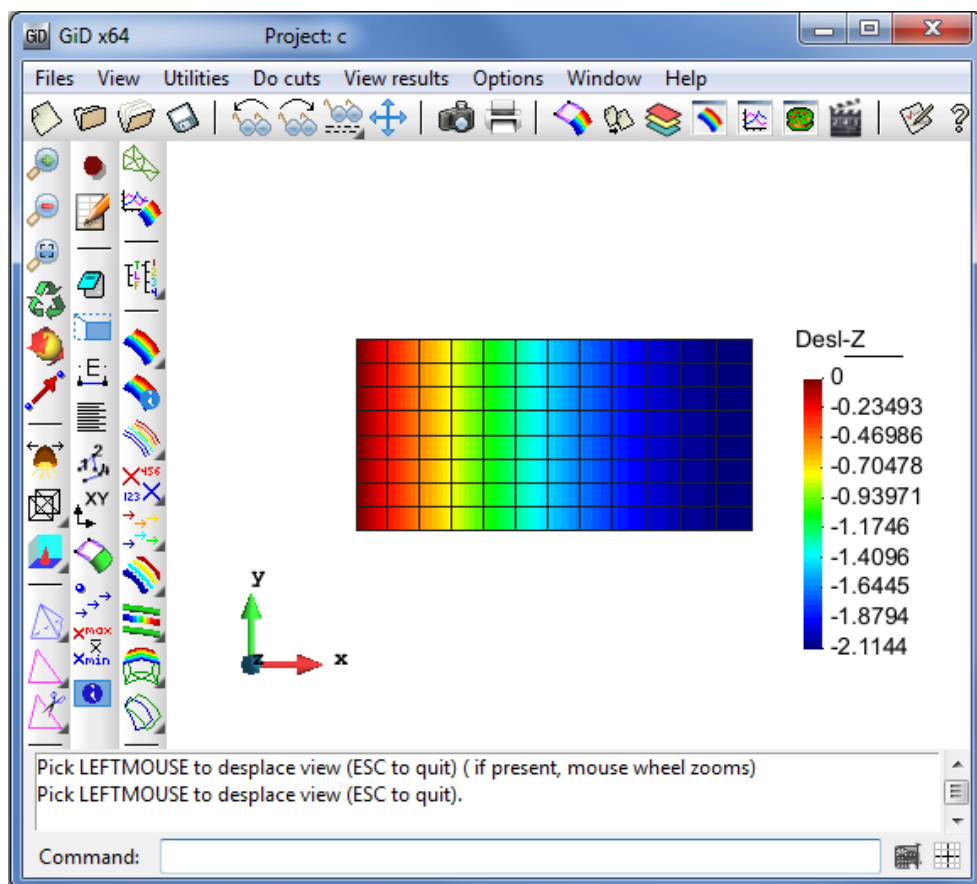


Figura 39: Pós-processamento no *software* GiD

Numa segunda etapa de pós-processamento os resultados de fissuração foram observados. Para isso Tamayo (2011) desenvolveu um conjunto de *scripts* em linguagem Matlab que foi utilizado no presente trabalho. O código em Fortran gera os resultados de fissuração num arquivo de saída (*crack.dat*) com formato compatível com o *script* em Matlab. Neste arquivo os dados encontram-se em colunas na seguinte sequência: 1-2 direção da fissura, 3-7 tensões dos pontos de Gauss, 8 estado do material. O *script* em Matlab que requer os dados de saída do Fortran denomina-se *patterncrack5.m*. Este conjunto de *scripts* representa os pontos de Gauss da laje de concreto onde ocorreu fissuração, compressão em

plastificação ou esmagamento. Na Tabela 4 encontra-se a legenda empregada nessa visualização. A direção da fissura é simulada pela direção da linha que a representa.

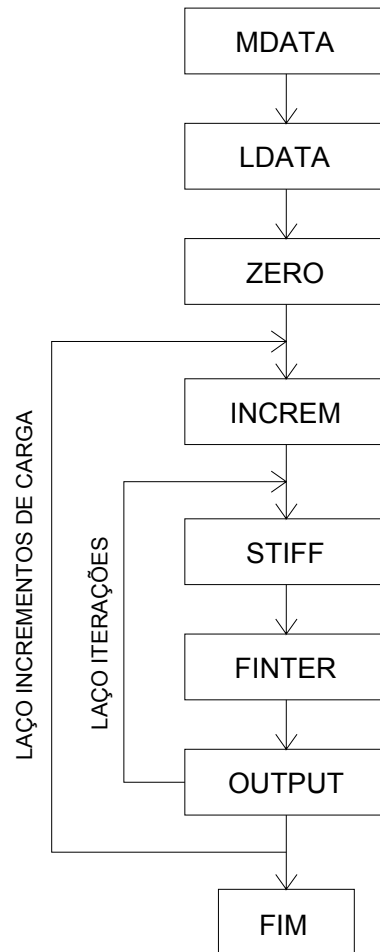
Tabela 4: Legenda do pós-processamento no Matlab

Símbolo	Significado
\	Fissura simples
L	Fissura dupla
○	Compressão além do limite de $f_c$
*	Esmagamento

#### 4.4 ROTINAS IMPLEMENTADAS NO CÓDIGO EM FORTRAN

Para a consideração dos efeitos de longa duração estudados no presente trabalho (fluência e retração) algumas mudanças no código computacional em linguagem Fortran desenvolvido por Tamayo (2011) foram realizadas. Na Figura 40 é apresentado o fluxograma do programa principal original. Neste, dois laços são apresentados, um laço de incrementos e carga devido ao problema plástico e o outro de iterações para obtenção da convergência. A função principal de cada rotina apresentada nesta figura é:

- MDATA: lê os dados de entrada do problema, como coordenadas, conectividades, condições de contorno e propriedades dos materiais.
- LDATA: lê dados de entrada das cargas aplicadas à estrutura.
- ZERO: zera a maioria dos vetores e matrizes empregados no código.
- INCREM: incrementa a carga pelos fatores especificados
- STIFF: monta a matriz de rigidez global da estrutura com a contribuição dos elementos de carga poliédrica de placa delgada (viga de aço), casca degenerada de placa grossa (laje de concreto) e elementos de barra viga-coluna (conectores).
- FINTER: calcula as forças internas em cada elemento e monta o vetor global de forças desequilibradas.
- OUTPUT: escreve os resultados de deslocamento, tensões e reações da estrutura.



Fonte: Tamayo (2011).

Figura 40: Fluxograma do programa principal original

As modificações realizadas compreendem a criação de 4 rotinas e a adaptação de algumas já existentes. O novo fluxograma do código é apresentado na Figura 41. Além dos laços de incrementos de carga e de iterações mais dois laços foram incorporados ao programa. O laço mais externo trata de percorrer todas as histórias de carga existentes, por exemplo, o problema da Figura 16 possui três histórias de carga. O segundo laço incrementa o tempo na análise da fluência e retração correspondendo aos tempos  $t_1, t_2, \dots, t_5$  da Figura 16. A função principal das novas rotinas é:

- **KELVINCHAIN**: gera os parâmetros da cadeia Kelvin para emprego no cálculo da fluência. Nesta rotina são utilizadas as Equações (3.3) a (3.7) para a divisão do tempo total da análise em intervalos, para o cálculo dos tempos de retardação e da função de deformação específica da cadeia de Kelvin. Após utiliza-se a função a ser aproximada, Equação (3.38); e a função aproximadora, Equação (3.39), do modelo de fluência adotado (CEB-FIP90), para que através do método dos mínimos quadrados, um

sistema linear seja resolvido gerando os parâmetros da cadeia. No apêndice B encontram-se algumas simulações realizadas para os parâmetros da cadeia. Neste mesmo apêndice encontra-se a rotina kelvinchain explicada.

- VISCODATA: zera as matrizes empregadas no cálculo dos efeitos diferidos. Em razão da integração passo a passo, várias matrizes tiveram que ser criadas para armazenar dados de cada ponto de Gauss em cada tempo, como: tensões atuais e anteriores, incremento de tensão, deformação da cadeia Kelvin, deformações de retração atuais e anteriores, entre outras.
- INCREMENT: faz a divisão dos passos de tempo utilizados para cada história de carga aplicada, sendo que os intervalos de tempo iniciam bem pequenos e vão aumentando.
- VISCO: faz o cálculo da carga devido às deformações por fluência e retração do concreto. Esta é a rotina principal do cálculo diferido sendo percorrida apenas ao final de cada laço de tempo (após rotina OUTPUT), exceto para o último laço de tempo. A mesma prevê uma passagem de tempo (definida pela rotina INCREMENT) durante a qual os efeitos de fluência e retração agem. Com isso as deformações geradas após à passagem do tempo são convertidas em cargas nodais que são aplicadas no próximo passo de tempo, correspondente a essa mesma passagem de tempo.



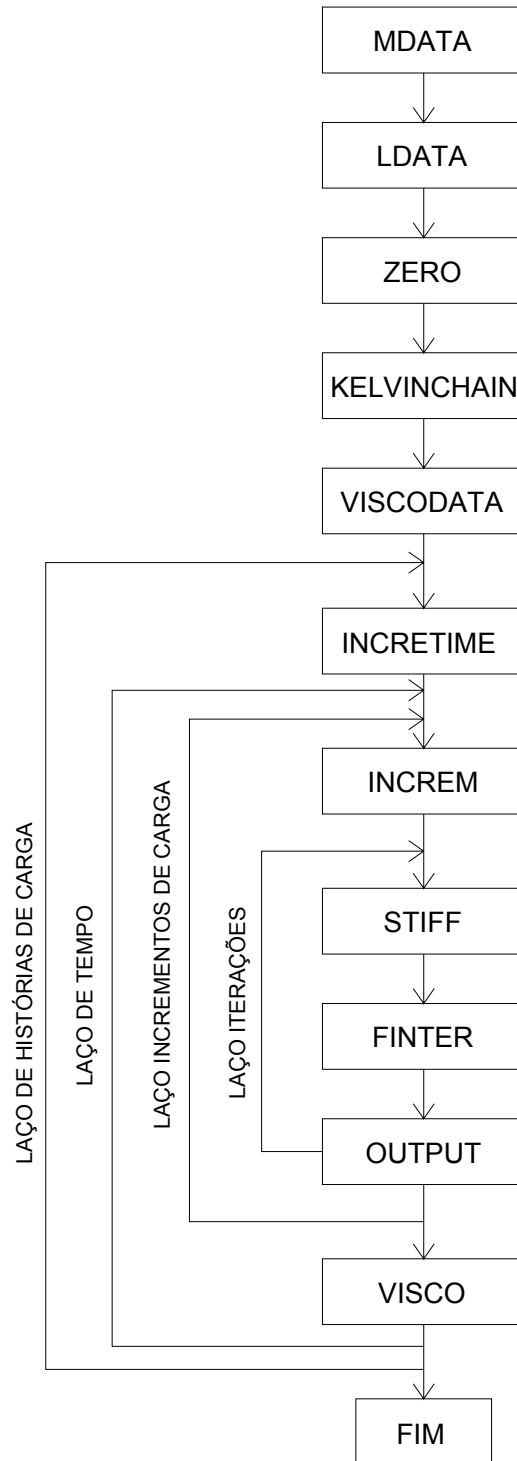


Figura 41: Fluxograma com alterações do programa principal para análise de longa duração

Um algoritmo da rotina VISCO é apresentado a seguir:

No início do passo de tempo  $i$ , as tensões  $\{\sigma\}_i$  são conhecidas, bem como as tensões  $\{\Delta\sigma\}_{i-1}$  obtidas do passo anterior. No caso do primeiro passo de tempo as tensões  $\{\Delta\sigma\}_{i-1}$  são zero. O incremento de tensão para o passo de tempo  $i$  é calculado com:

Para  $i=1, \dots, n^\circ$  total de passos:

$$\{\Delta\sigma\}_i = \{\sigma\}_i - \{\Delta\sigma\}_{i-1}$$

Para cada elemento  $e$  será formado um vetor de cargas devido aos efeitos de fluência e retração com a contribuição de todos os pontos de Gauss  $g$  de todas as camadas discretizadas, com:

Para  $e=1, \dots, n^\circ$  total de elementos de concreto;

Para  $g=1, \dots, n^\circ$  total de pontos de Gauss:

1. Deformação por retração para o ponto de Gauss  $g$ , do elemento  $e$ , para o passo de tempo  $i$ :

$$\{\varepsilon_{cs}\}_{(g,e,i)} \text{ empregando a formulação do CEB-FIP90}$$

2. Incremento de deformação por retração:

$$\{\Delta\varepsilon_{cs}\}_{(g,e,i)} = \{\varepsilon_{cs}\}_{(g,e,i)} - \{\varepsilon_{cs}\}_{(g,e,i-1)}$$

3. Como o efeito térmico é desconsiderado e a retração já foi inserida no código por Tamayo (2011) tem-se para o passo de tempo  $i$ :

$$\{\Delta\varepsilon_0\}_{(g,e,i)} = \{\Delta\varepsilon_{cs}\}_{(g,e,i)}$$

4. Função  $\varphi_0$  e  $V(t)$  empregando a formulação do CEB-FIP90
5. A Deformação devido à fluência é quantificada fazendo somatório das deformações para cada elemento da cadeia Kelvin  $\mu$ :

Para  $\mu = 1, \dots, N$ , sendo  $N$  o número total de elementos da cadeia Kelvin:

$$\{\varepsilon_\mu^*\}_{(g,e,i)} = [D_\mu]_{(g,e,i)}^{-1} \{\Delta\sigma\}_{(g,e,i)} + \{\varepsilon_\mu^*\}_{(g,e,i)} (e^{-\Delta y_\mu})$$

$$\{\Delta\varepsilon^*\}_{(g,e,i)} = \sum_{\mu=1}^N \{\varepsilon_\mu^*\}_{(g,e,i)} (1 - e^{-\Delta y_\mu}) + \{\Delta\varepsilon_0\}_{(g,e,i)}$$

6. Matriz  $[D]^*_{(g,e,i)}$  avaliada com o módulo efetivo  $E^*_{(g,e,i)}$  ( $\sigma_z = 0$ ):

$$[D]^* = \begin{bmatrix} \frac{E^*}{1-\nu^2} & \frac{\nu E^*}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E^*}{1-\nu^2} & \frac{E^*}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E^*}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E^*}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E^*}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

7. O vetor de forças do elemento é formado fazendo o somatório da contribuição da cada ponto de Gauss  $g$ , sendo  $P$  o número total de pontos de Gauss:

$$\{\Delta F\}_{(e,i)} = \sum_{g=1}^P \int_{V_e} [B]^T_{(g,e)} [D]^*_{(g,e,i)} \{\Delta \varepsilon^*\}_{(g,e,i)} dV_e$$

8. O vetor de forças global devido à fluência e retração do passo de tempo  $i$ ,  $\{\Delta F\}_{(i)}$ , é montado considerando a contribuição de cada vetor de carga a nível de elemento;
9. Ao final do passo de tempo o módulo de elasticidade do concreto é atualizado, substituindo-o pelo módulo efetivo  $E^*$ .

Duas rotinas já existentes (MDATA e LDATA) foram adaptadas. Nestas rotinas algumas linhas de código foram inseridas ou alteradas para corresponderem aos novos dados do arquivo de entrada necessários ao cálculo dos efeitos diferidos.

Na rotina INCREM adaptou-se o processo de incremento de carga para que a partir do segundo passo de tempo a carga aplicada aos nós deixasse de ser a carga externa e passasse a ser a carga calculada na rotina VISCO, ou seja, a carga fictícia de fluência e retração que irá gerar campos de deslocamentos compatíveis com os efeitos diferidos. Na rotina FINTER a tensão devido a pseudo carga de fluência e retração é retirada das tensões totais.

## 5 ANÁLISES NUMÉRICAS

### 5.1 ANÁLISE DE CURTA DURAÇÃO

Dois exemplos de viga mista testadas experimentalmente por Chapman e Balakrishnan (1964) foram analisados para carga de ruptura. A primeira estrutura denominada A2 foi inicialmente analisada a fim de testar a entrada de dados, e familiarizar-se com o programa elasto-plástico implementado por Tamayo (2011). Além disso, nessa estrutura a consideração do amolecimento do concreto e a influência de uma formulação secante para a rigidez dos conectores são estudadas. Na outra estrutura, viga U4, são estudadas as respostas para as diferentes rigidezes dos conectores (tangente e secante), sendo esta viga mista já estudada no trabalho de Tamayo (2011) no que diz respeito à carga de ruptura.

#### 5.1.1 Viga mista A2

A viga mista simplesmente apoiada A2 apresenta um comprimento de 5,486m, espessura da laje de concreto de 152mm e altura da viga de aço de 305mm. A ligação entre viga e laje é realizada através de 76 conectores de cisalhamento distribuídos em duas linhas no sentido longitudinal da peça, com espaçamento constante de 158mm. A geometria e a seção transversal da estrutura podem ser visualizadas na Figura 42. As propriedades dos materiais empregados encontram-se na Tabela 5.

A viga foi submetida a um carregamento pontual no centro do vão, sendo que não foram encontrados dados sobre sua área de aplicação no relatório experimental. Adotou-se a aplicação desta carga em uma pequena área de aproximadamente 250cm<sup>2</sup>. O tipo de falha da estrutura observada experimentalmente foi devido ao esmagamento na laje de concreto na região central da viga mista. A curva de rigidez dos conectores apresentada na Figura 43 foi baseada nos dados experimentais apresentados por Chapman e Balakrishnan (1964). Nota-se que devido à forma exponencial da curva de rigidez do conector a não linearidade inicia para valores de carregamentos baixos, pois a rigidez do conector é não-linear desde o início.

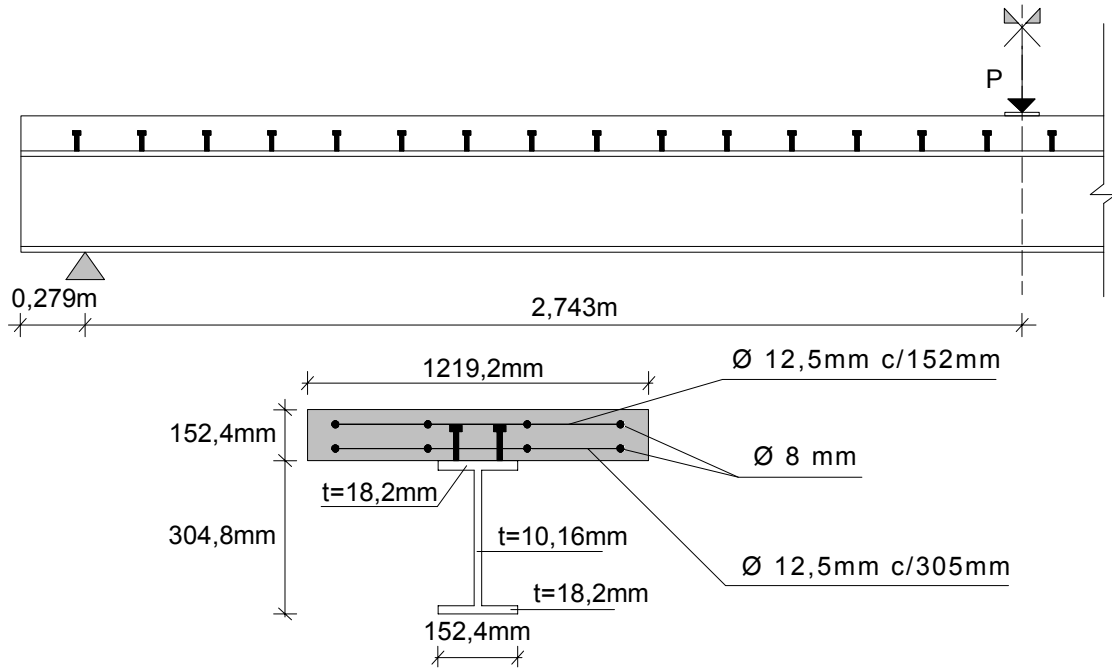


Figura 42: Geometria da viga mista A2

Tabela 5: Propriedades dos materiais empregados na viga A2

Material	Propriedades	Unidade
Aço Estrutural	Módulo de Elasticidade	(mesa) $E = 202160$ MPa
		(alma) $E = 203680$ MPa
	Tensão de Escoamento	(mesa) $f_y = 230$ MPa
		(alma) $f_y = 239$ MPa
	Tensão Última	(mesa) $f_u = 410$ MPa
		(alma) $f_u = 418$ MPa
	Poisson	$\nu = 0,3$
Deformação Última	$\epsilon_u = 25$ %	
Aço de reforço	Módulo de Elasticidade	$E = 205000$ MPa
	Tensão de Escoamento	$f_y = 320$ MPa
	Tensão Última	$f_u = 350$ MPa
	Poisson	$\nu = 0,3$
	Deformação Última	$\epsilon_u = 25$ %
Concreto	Resistência à Compressão	$f_{cm} = 27,1$ MPa
	Módulo de Elasticidade	$E = 29670$ MPa
	Resistência à Tração	$f_t = 3$ MPa
	Poisson	$\nu = 0,2$
	Deformação Última	$\epsilon_u = 4,5$ ‰
Conector de cisalhamento	Espaçamento	$s = 158,7$ mm
	Diâmetro x Altura	$d \times h = 19 \times 102$ mm
	Número de Linhas	$n = 2$
	Poisson	$\nu = 0,3$
	Constante 1	$a = 130$ kN
	Constante 2	$b = 1,2$ mm <sup>-1</sup>

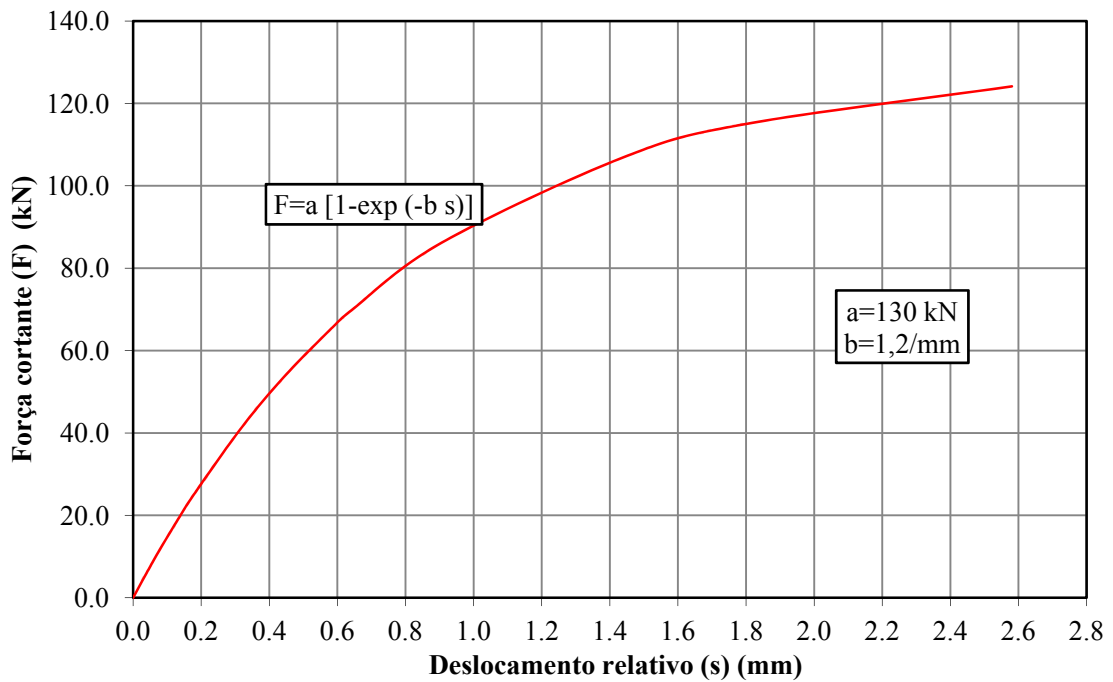


Figura 43: Curva de rigidez do conector da viga A2

A geração do modelo e da malha de elementos finitos para a viga A2 foi realizada através do software GiD, assim como para todos os demais exemplos apresentados no presente trabalho. O GiD também foi empregado para geração do arquivo de entrada necessário ao programa elasto-plástico para análise de vigas mistas. Apenas metade da estrutura foi modelada. A malha de elementos finitos respeita a distribuição real dos conectores de cisalhamento no sentido longitudinal seguindo o relatório experimental. O modelo emprega 200 elementos de casca degenerada para representar a laje de concreto, 189 elementos de casca plana para representar a viga de aço e 38 elementos viga-coluna para representar os conectores de cisalhamento.

A malha empregada nas análises pode ser visualizada na Figura 44. Para a discretização da laje foram empregadas 10 camadas de concreto de espessura igual a 15,24mm e 4 camadas de aço de espessuras e orientações conforme é apresentado na Figura 45. Nesta ilustração encontram-se ao lado esquerdo a espessura real da laje de concreto e a posição real das camadas de aço. Do lado direito têm-se a posição e espessura normalizadas das camadas de aço, sendo a espessura normalizada compreendida num intervalo de -1 a +1. O ângulo  $\theta = 0^\circ$  refere-se à armadura longitudinal e o ângulo  $\theta = 90^\circ$  à armadura transversal.

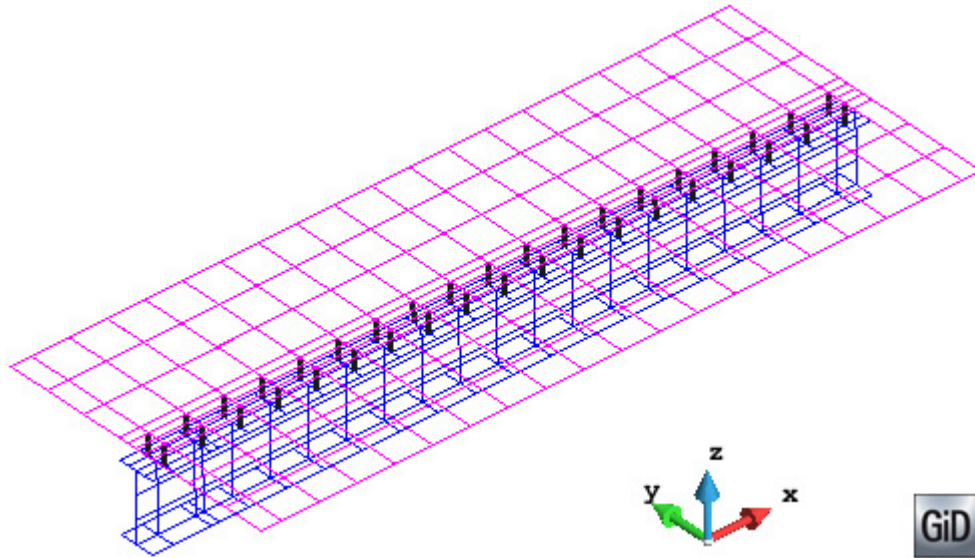


Figura 44: Malha de elementos finitos empregada para modelar a viga A2.

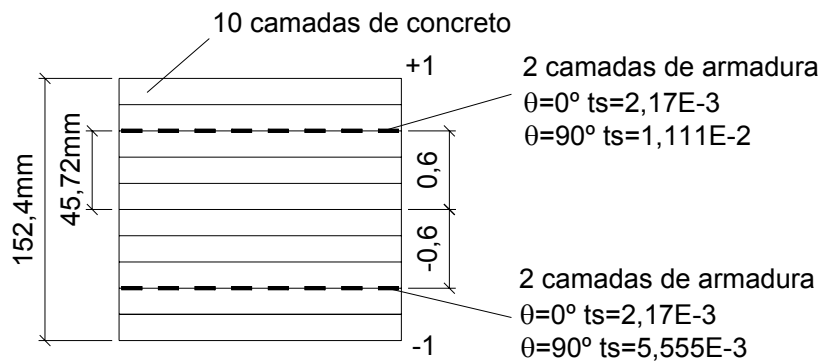


Figura 45: Camadas de concreto e aço da laje

A Figura 46 ilustra a variação do deslocamento no ponto central do vão da viga mista com o incremento de força aplicada. Obteve-se uma boa concordância com o resultado numérico de Kotinda (2006) e o experimental, principalmente no que diz respeito aos resultados referentes à parte inicial da análise. Duas situações são consideradas, na primeira, que corresponde à linha verde do gráfico, empregou-se a deformação última do concreto com o valor de 4,5%, conforme relatório experimental. Na segunda, optou-se por aumentar este limite de deformação (linha laranja) para o valor de 1%, de acordo com Valipour e Bradford (2009). Este valor tem um significado apenas teórico e estabelece a tendência do caminho de falha da estrutura.

Na análise realizada por Kotinda (2006) o *software* ANSYS foi empregado utilizando uma modelagem em três dimensões do problema. A laje de concreto foi modelada com o elemento *solid65* que possui 8 nós (3 graus de liberdade de translação), sendo a armadura incluída em forma de taxas. Para a viga de aço foi utilizado o elemento plano com 4 nós (3

graus de translação e 3 graus de rotação) denominado *shell43*. Para a modelagem dos conectores, 3 segmentos do elemento *beam189* foram empregados, sendo que a cabeça do conector também foi modelada. Ainda foram utilizados elementos de contato (*conta173* e *targel70*) entre a viga de aço e a laje de concreto. Para o modelo constitutivo dos materiais a autora empregou um diagrama elasto-plástico multilinear com encruamento isótropo para o aço do perfil metálico. Para o aço dos conectores e das armaduras foram empregados, respectivamente, um modelo bi-linear com encruamento isótropo e um modelo elasto-plástico perfeito. Para todos os aços o critério de plastificação de von Mises foi adotado. Para o concreto em tração foi utilizado o modelo *concrete* do ANSYS, baseado no critério de Willan-Warnke (CHEN, 2007). O modelo adotado para o concreto à compressão foi do tipo multilinear com encruamento isótropo.

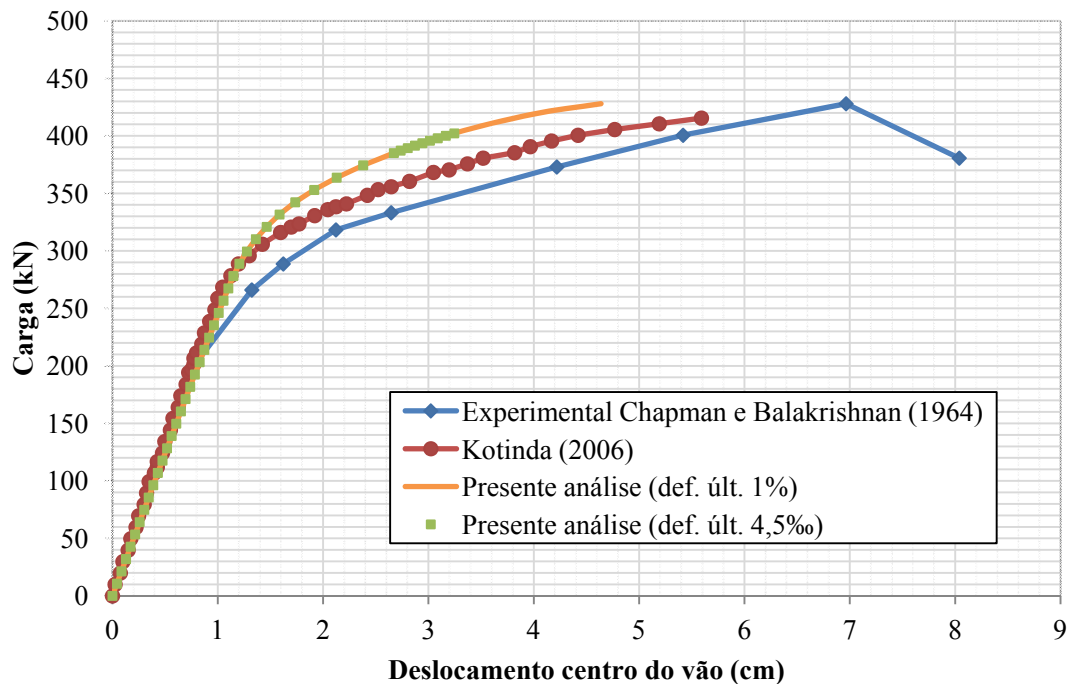


Figura 46: Curva força-deslocamento vertical na seção central da viga mista A2.

O resultado obtido apresentou maior rigidez do que o experimental, principalmente na zona de escoamento da viga de aço. Por causa disso, os deslocamentos obtidos em todas as análises realizadas foram significativamente menores do que os deslocamentos experimentais. Os resultados do presente trabalho encontram-se mais próximos dos resultados obtidos por Kotinda (2006). A falha observada na análise numérica foi devido ao esmagamento dos elementos de concreto na seção central da estrutura onde a carga está aplicada, concordando com a falha do relatório experimental. A carga de colapso da estrutura considerando a deformação última de 4,5% foi de 402kN, cerca de 5,85% abaixo da carga de colapso



experimental. Por outro lado para uma deformação última de 1% a carga de colapso mostrou-se igual a obtida experimentalmente (427,9kN).

Não foram encontrados no relatório experimental, dados a respeito da área de aplicação da carga pontual, podendo a mesma interferir nos resultados, pois uma melhor distribuição da carga implicará em um maior carregamento suportado.

O tempo computacional gasto na análise para deformação última do concreto de 1% foi de aproximadamente 85 minutos com 56 incrementos de carga, enquanto que para deformação última de 4,5% foi de 50 minutos para 44 incrementos de carga.

A consideração do amolecimento na compressão do concreto também foi analisada (Figura 47). Para uma deformação última de 4,5% houve redução na carga de colapso da estrutura de 402kN para 389kN, sendo que o amolecimento começa a agir para cargas superiores à 374kN.

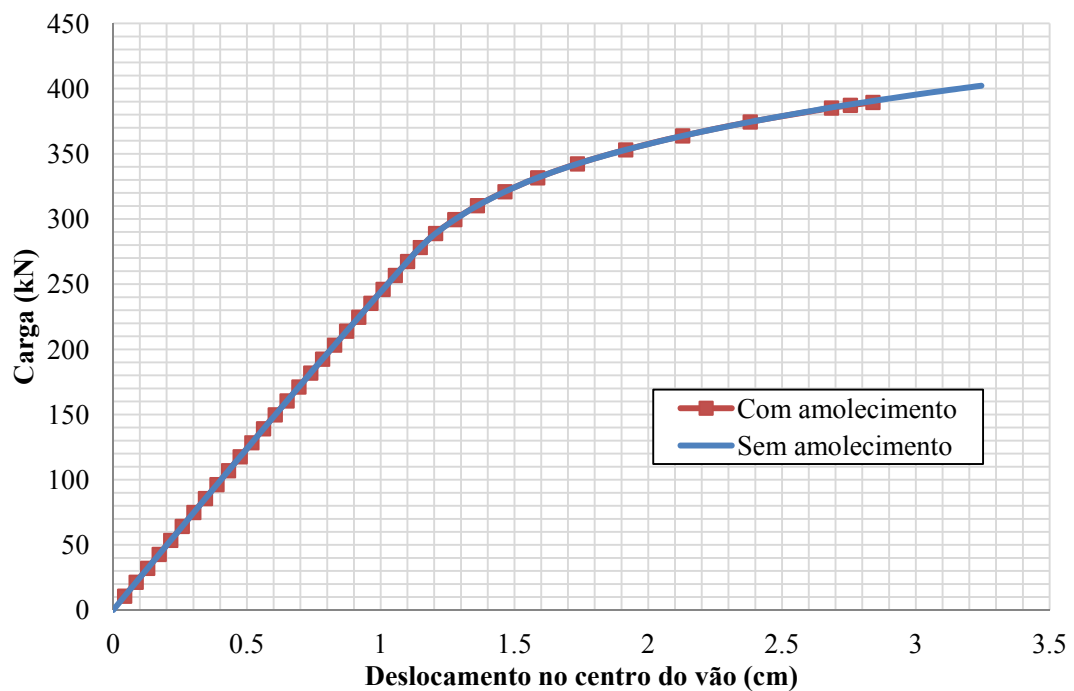


Figura 47: Deslocamento da viga A2 considerando amolecimento do concreto

Nos resultados apresentados anteriormente os parâmetros empregados correspondem as propriedades obtidas do relatório experimental de Chapman e Balakrishnan (1964). No entanto, optou-se também por investigar a resposta numérica do modelo variando a rigidez dos conectores, pois se sabe que esta tem grande influência nos resultados finais. Fez-se nova simulação empregando as mesmas propriedades anteriores, porém agora se considerou uma rigidez maior do conector para carregamentos elevados, tratando de simular a formulação

secante utilizada por Bujnak e Bouchair (2005). Aos parâmetros  $a$  e  $b$  foram atribuídos os valores de 194kN e 3,6/mm, respectivamente. A nova curva de rigidez empregada para os conectores pode ser visualizada na Figura 48. Na Figura 49 tem-se a variação do deslocamento no centro do vão em função da carga aplicada.

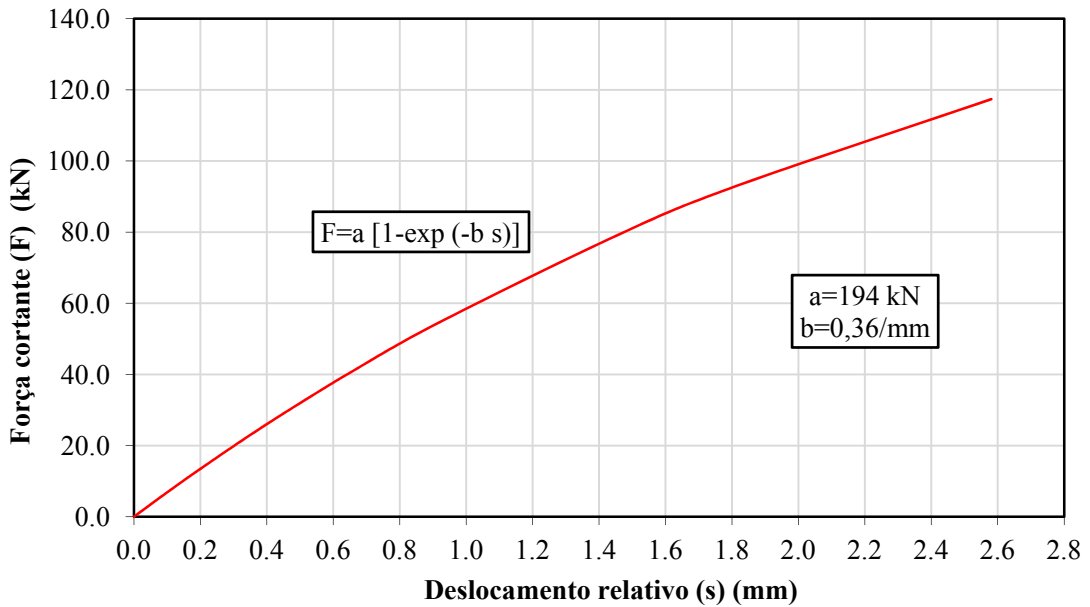


Figura 48: Nova curva para rigidez dos conectores da viga A2

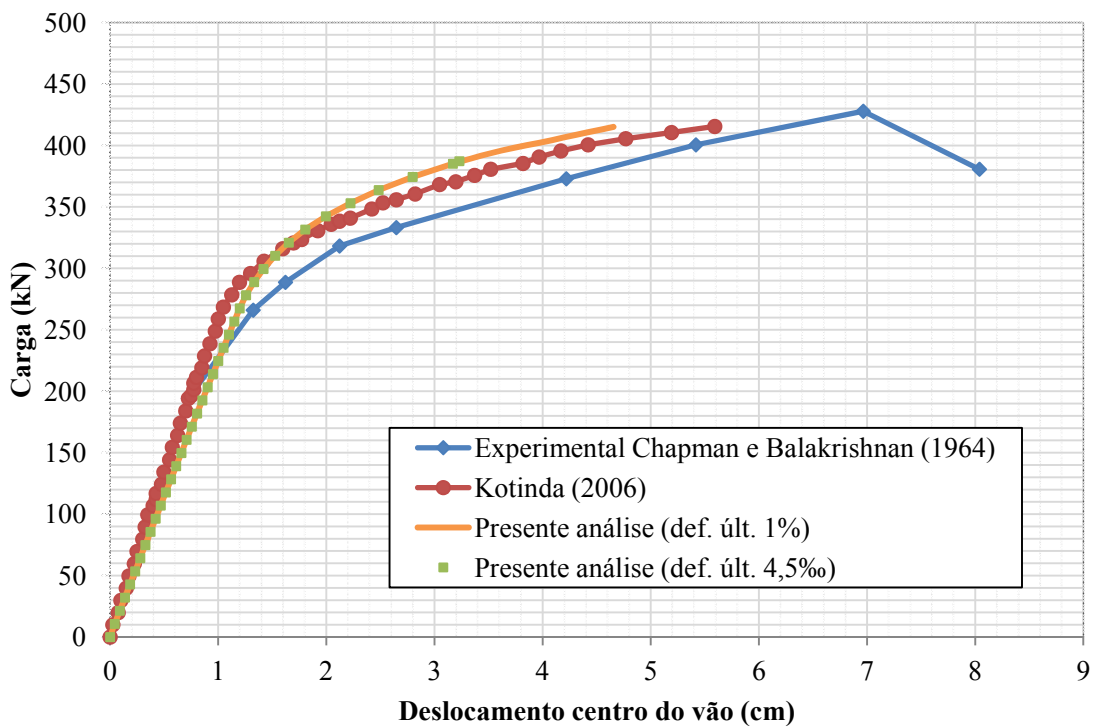


Figura 49: Curva força-deslocamento da viga A2 com rigidez dos conectores alterada.

Embora tenha ocorrido uma menor inclinação na parte inicial do gráfico, a curva aproximou-se bastante das obtidas pelo ensaio experimental e por Kotinda (2006). No entanto

ocorreu uma pequena redução da carga de colapso obtida. Considerando a deformação última do concreto de 4,5%, a carga de colapso foi de 387kN, ou seja, 9,55% abaixo da carga obtida experimentalmente. Entretanto, ao considerar a deformação última com o valor de 1%, a carga de colapso da estrutura foi de 415kN, valor bastante próximo ao experimental (427,9kN), ficando apenas 3% abaixo. Apesar da proximidade dos resultados encontrados na presente análise aos obtidos por Kotinda (2006) torna-se difícil a comparação dos resultados devido ao fato de que o referido autor emprega um critério de falha utilizando tensões equivalentes (tensões de von Mises) como indicativo da ruptura da laje por compressão, enquanto que o presente trabalho emprega um critério de ruptura baseado na deformação última.

Após a implementação da formulação de rigidez secante ao código computacional analisou-se novamente a viga A2. Utilizando-se as propriedades da Tabela 5 esta viga mista foi analisada considerando a deformação última do concreto de 1%. As duas curvas de força-deslocamento para as rigidezes tangente e secante encontram-se na Figura 50. As duas curvas apresentaram praticamente os mesmos resultados de carga e deslocamento.

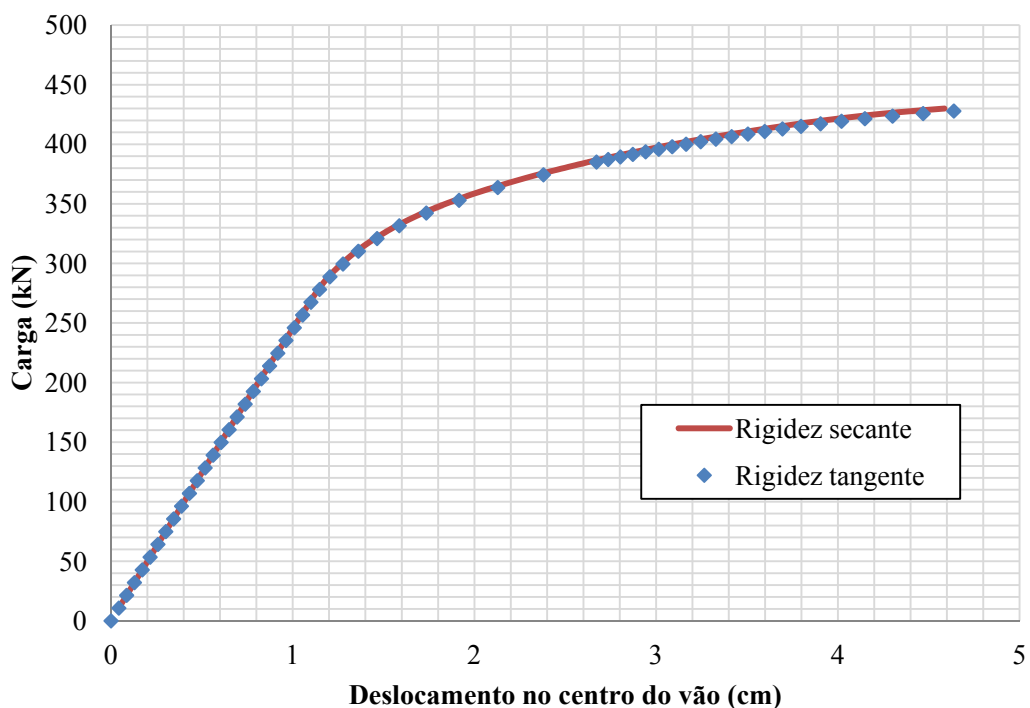


Figura 50: Curva força-deslocamento empregando rigidez secante e tangente para viga A2

Outra observação que pode ser realizada é em relação ao deslocamento relativo dos conectores de cisalhamento. Nesta análise o deslocamento do nó superior do conector é medido em relação ao seu nó inferior. Quantificando esses valores ao longo do comprimento

da viga é possível traçar gráficos com a distribuição desses deslocamentos relativos como o apresentado na Figura 51. Nesta figura encontram-se os deslocamentos relativos obtidos para as duas formulações de rigidez dos conectores ao longo de meia viga. Na extremidade esquerda deste gráfico, relativo à cota zero encontra-se a extremidade da viga mista e na cota 300 encontra-se o seu ponto central. Na formulação de rigidez secante o deslocamento relativo é um pouco menor que para a formulação de rigidez tangente, porém as duas são bastante próximas. O maior deslocamento relativo dos conectores é obtido próximo à zona central da viga com valores de 0,59mm e 0,5mm para as formulações tangente e secante, respectivamente.

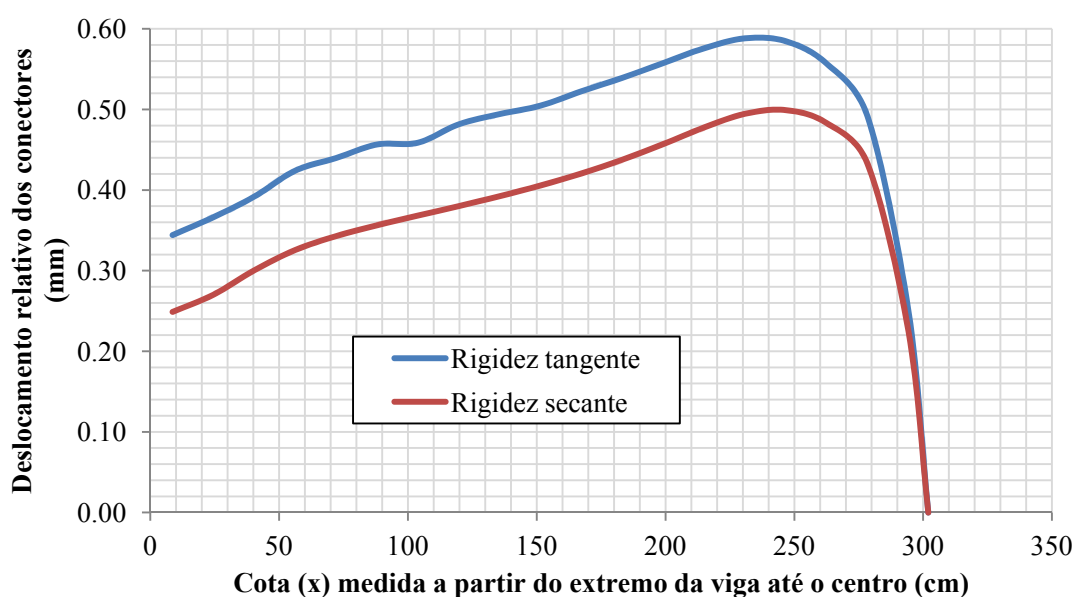


Figura 51: Deslocamento relativo dos conectores ao longo de meia viga A2: rigidez secante e tangente

Devido ao maior deslocamento relativo obtido (0,59mm) encontrar-se muito próximo ao início da curva de rigidez apresentada na Figura 43 pode-se entender porque as respostas de deslocamento apresentadas na Figura 50 são praticamente iguais. Isto acontece porque no início da curva as rigidezes obtidas com formulações secante e tangente são bastante parecidas.

### 5.1.2 Viga mista U4

A segunda análise desta seção foi realizada com a viga U4. Essa estrutura também possui geometria muito semelhante a viga A2 e foi submetida a uma carregamento distribuído entre apoios. A viga mista foi ligada através de 32 conectores de cisalhamento e sua geometria pode ser visualizada na Figura 52. A falha observada no ensaio experimental foi

devido aos conectores. A curva de rigidez adotada para os conectores pode ser visualizada na Figura 53 sendo a mesma baseada nos dados obtidos através do relatório experimental.

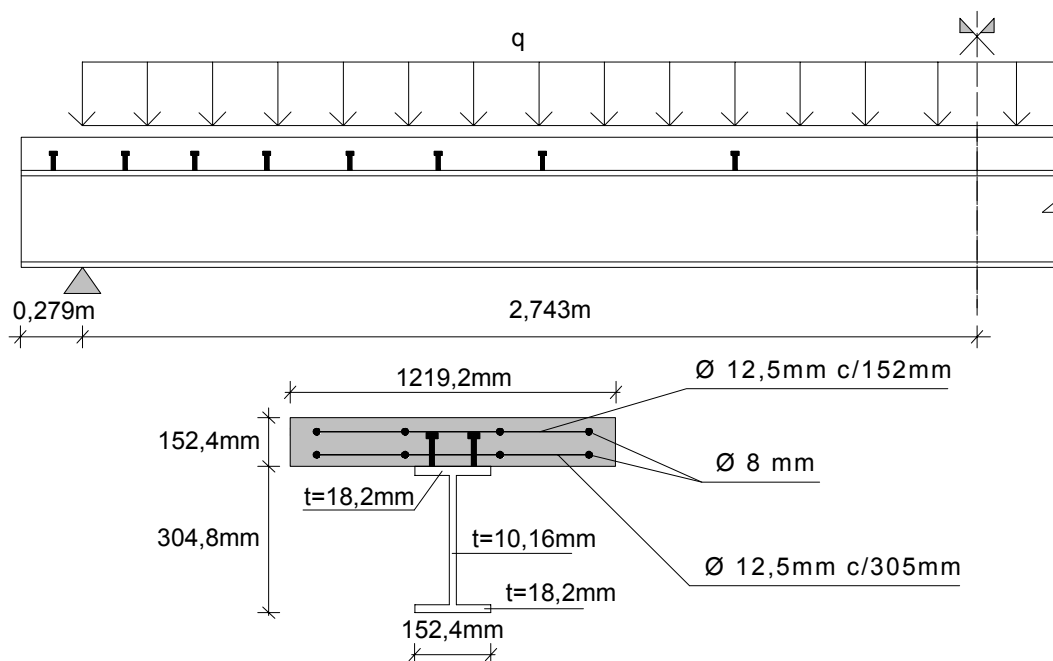


Figura 52: Geometria da viga U4

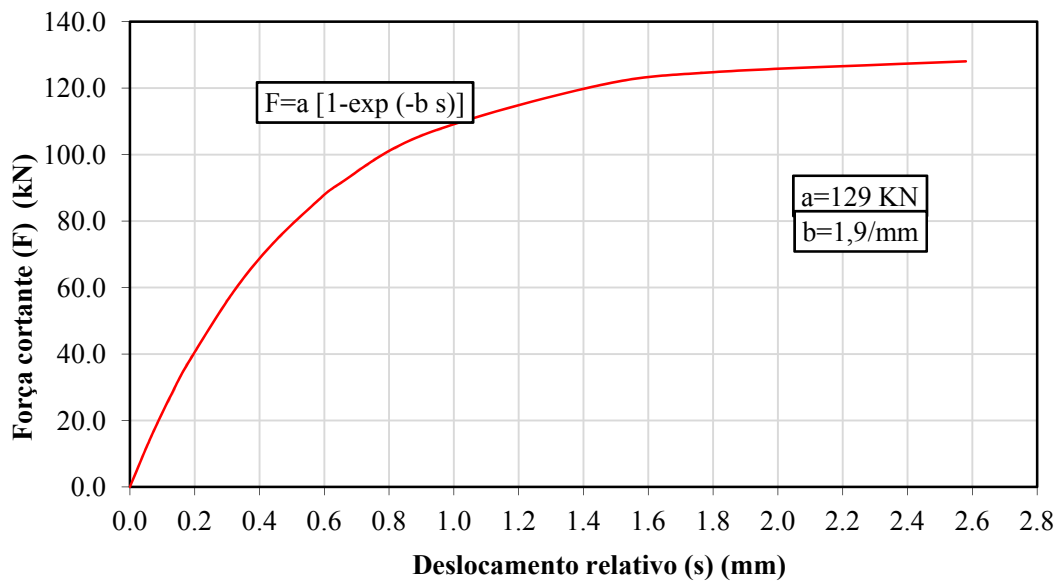


Figura 53: Rigidez empregada para os conectores da viga U4

As propriedades dos materiais empregados nesta estrutura podem se visualizadas na Tabela 6.

Tabela 6: Propriedades dos materiais empregados na viga U4

Material	Propriedades			Unidades
Aço Estrutural	Módulo de Elasticidade	E =	206000	MPa
	Tensão de Escoamento (mesas)	$f_y =$	265	MPa
	Tensão de Escoamento (alma)	$f_y =$	296,5	MPa
	Tensão Última	$f_u =$	410	MPa
	Poisson	$\nu =$	0,3	
	Deformação Última	$\epsilon_u =$	25	%
Aço de reforço	Módulo de Elasticidade	E =	200000	MPa
	Tensão de Escoamento	$f_y =$	250	MPa
	Tensão Última	$f_u =$	350	MPa
	Poisson	$\nu =$	0,3	
	Deformação Última	$\epsilon_u =$	25	%
Concreto	Resistência à Compressão	$f_{cm} =$	42,5	MPa
	Módulo de Elasticidade	E =	32920	MPa
	Resistência à Tração	$f_t =$	3,55	MPa
	Poisson	$\nu =$	0,15	
	Deformação Última	$\epsilon_u =$	4,5	‰
Conector de cisalhamento	Espaçamento	s =	variável	mm
	Diâmetro x Altura	d x h =	12,5 x 50	mm
	Número de Linhas	n =	2	
	Poisson	$\nu =$	0,3	
	Constante 1	a =	129	kN
	Constante 2	b =	1.9	mm <sup>-1</sup>

A malha de elementos finitos foi gerada considerando a simetria do problema (Figura 54). A mesma possui 250 elementos para a laje de concreto, 225 elementos de viga de aço e 16 elementos de barra para os conectores. Para a modelagem da laje foram empregadas 10 camadas de concreto de espessura igual a 15,24mm e 4 camadas de aço de espessuras e orientações conforme é apresentado na Figura 55. Nesta ilustração encontram-se ao lado esquerdo a espessura real da laje de concreto e a posição real das camadas de aço. Do lado direito têm-se a posição e espessura normalizadas das camadas de aço, sendo a espessura normalizada compreendida num intervalo de -1 a +1. O ângulo  $\theta = 0^\circ$  refere-se à armadura longitudinal e o ângulo  $\theta = 90^\circ$  à armadura transversal.

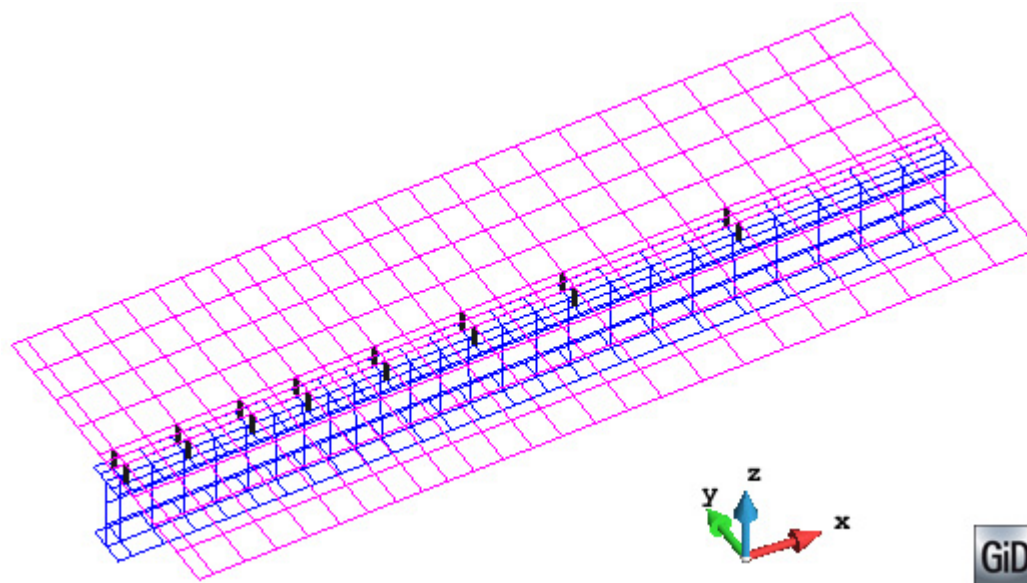


Figura 54: Malha de elementos finitos da viga U4

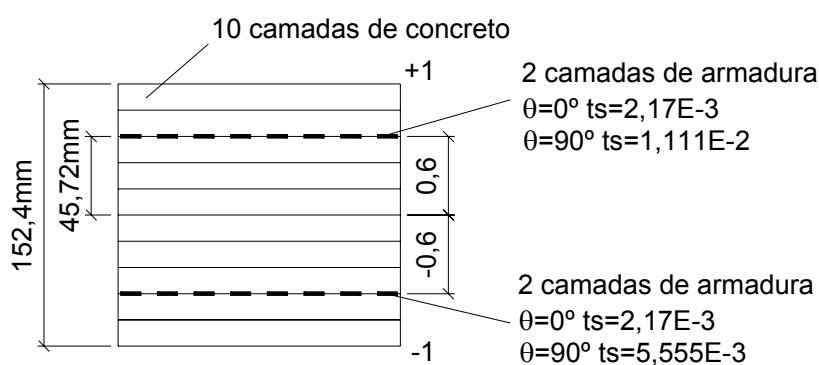


Figura 55: Camadas de concreto e aço da laje

Comparando-se as respostas para as duas formulações de rigidez dos conectores têm-se na Figura 56 as curvas força-deslocamento para a viga mista U4. Nesta mesma figura são apresentados os resultados experimentais e os obtidos por Oven et al. (1995). Novamente os resultados foram bastante semelhantes sendo que a formulação secante apresentou um pequeno aumento na carga de ruptura cerca de 2,2%. Em sua pesquisa Oven et al. (1995) baseou-se em um modelo bidimensional em elementos finitos para analisar estruturas de vigas mistas considerando conectores flexíveis, caso em que ocorre uma interação parcial entre laje de concreto e viga de aço, ou seja, em que o deslocamento relativo dos conectores é considerado. O programa implementado por Oven et al. (1995) considera a não linearidade dos materiais e a não linearidade geométrica devido à consideração de grandes deslocamentos.

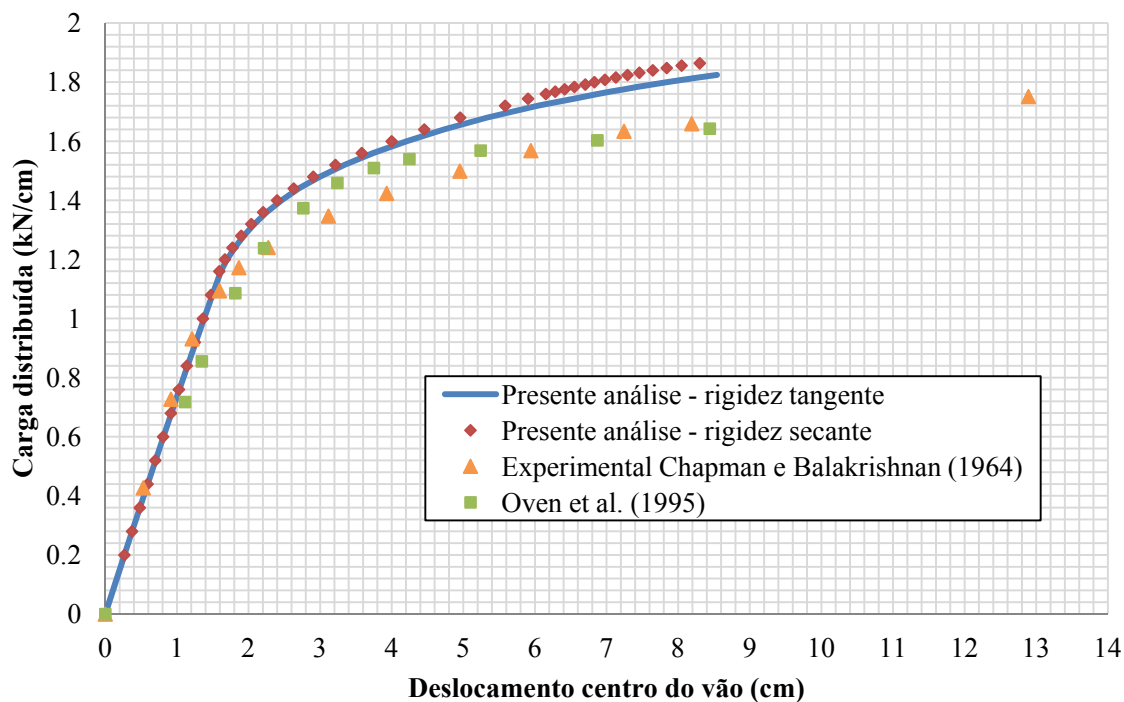


Figura 56: Curva força-deslocamento empregando rigidez secante e tangente para viga U4

Na Figura 57 encontram-se os deslocamentos relativos obtidos ao longo de meia viga mista considerando as duas formulações estudadas, os resultados experimentais e os obtidos por Oven et al. (1995). Nesta figura a extremidade esquerda do gráfico (cota zero) é relativa à extremidade da viga mista e a cota 300 ao seu ponto central.

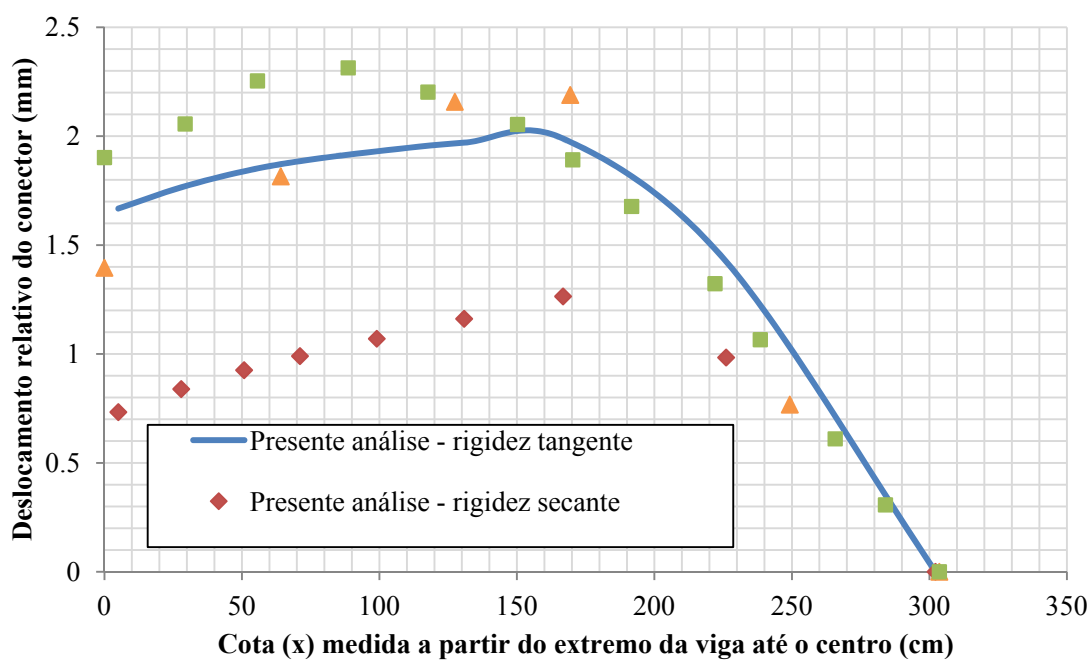


Figura 57: Distribuição do deslocamento relativo dos conectores da viga U4 ao longo de meia viga



O deslocamento relativo obtido com a formulação tangente concordou melhor com os resultados experimentais e com os resultados apresentados por Oven et al. (1995). Os maiores deslocamentos relativos foram obtidos próximos à área central do vão da estrutura, o que concorda com o resultado obtido experimentalmente. O deslocamento relativo máximo obtido para a viga U4 foi de 2mm e 1,26mm para as formulações tangente e secante, respectivamente. Observando novamente a curva de rigidez adotada (Figura 53) nota-se que o deslocamento relativo máximo obtido dos resultados experimentais encontra-se na faixa de 2,58mm, sendo que no relatório experimental a maioria dos conectores testados apresentaram deslocamento relativo máximo próximos a esse valor. No relatório experimental a viga mista U4 falhou devido aos conectores. Com isso, e observando os resultados encontrados na Figura 57, pode-se indicar que a formulação tangente parece se adequar melhor à modelagem desses elementos. A formulação secante apresenta grande rigidez para os conectores até próximos ao deslocamento relativo máximo, o que confere uma maior rigidez a estrutura.

O tempo computacional gasto na análise foi de 63 minutos, sendo a carga aplicada em 38 pequenos incrementos.

## 5.2 ANÁLISE DE LONGA DURAÇÃO

A fim de validar o modelo de longa duração proposto foram realizadas várias comparações com exemplos testados experimentalmente como corpos de prova de concreto, vigas e lajes de concreto armado e por fim em vigas mistas de aço e concreto de vão simples e contínuo.

### 5.2.1 Testes de Fluência sob tensões variáveis

Uma primeira verificação do modelo de fluência implementado foi feita através da comparação com resultados experimentais realizados por Ross (1958). Este autor realizou testes em corpos de prova cilíndricos de 117,5mm de diâmetro e 305mm de comprimento, submetidos a diferentes histórias de tensões. Cada teste foi realizado por dois corpos de prova. No primeiro foi aplicada uma determinada história de tensão, no segundo nenhuma tensão foi aplicada, sendo este empregado apenas para medir a deformação por retração, a qual foi subtraída dos resultados medidos nos corpos submetidos à tensão. Portanto os resultados apresentados são relativos às deformações ao longo do tempo devido à soma das deformações elásticas e de fluência. Uma simplificação na modelagem dos cilindros de concreto ensaiados foi empregada por Chong, Foster e Gilbert (2008) e também é empregada no presente

trabalho, pois o nível do carregamento empregado situa-se no ramo elástico, o que torna a geometria do corpo de prova um fator de pouca influência nos resultados de deformação. O modelo adotado foi um prisma de 100mm de largura por 200mm de altura com 65mm de espessura conforme a Figura 58. Apenas um elemento de concreto foi empregado para a malha de elementos finitos, sendo esse dividido em duas camadas conforme a Figura 59.

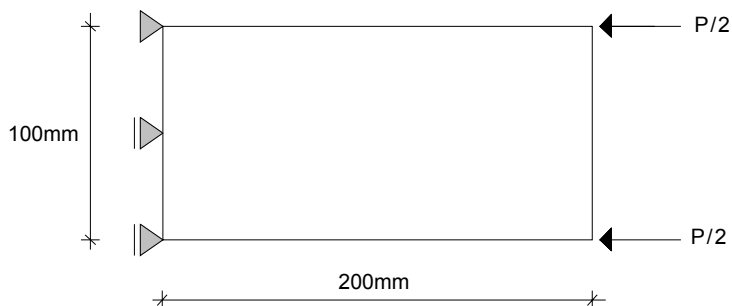


Figura 58: Geometria empregada para modelar os corpos de prova.

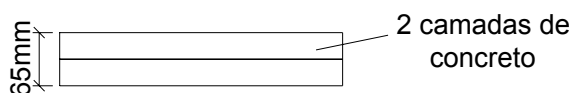


Figura 59: Camadas de concreto

De acordo com Ross (1958) os corpos de prova foram mantidos à condições ambientais constantes com umidade relativa de 93% e temperatura de 17°C. O cimento empregado possui alta resistência inicial. De acordo com o relatório experimental o concreto empregado possui uma resistência do corpo de prova cúbico de 66,2MPa aos 28 dias. A resistência do corpo de prova cilíndrico do concreto pode ser considerada de 70 à 80% da resistência cúbica. Em seu relatório Ross (1958) indica o valor de 70%, sendo assim 46,4MPa. O módulo de elasticidade aos 28 dias, calculado pela formulação do CEB-FIP90 foi de 35844MPa. Os módulos iniciais empregados para cada teste (calculados de acordo com o CEB-FIP90 e a idade inicial de carregamento) bem como as propriedades do concreto empregado em cada teste encontram-se na Tabela 7.

Tabela 7: Propriedades do concreto empregado nos corpos de prova

Propriedades do Concreto				Unidades
Módulo de elasticidade	Teste 1	$E_{14} =$	34389	MPa
	Teste 2	$E_{28} =$	35844	MPa
	Teste 3, 4 e 5	$E_8 =$	32855	MPa
Resistência à compressão		$f_{cm} =$	46	MPa
Resistência à tração		$f_t =$	4,6	MPa
Poisson		$\nu =$	0,15	
Deformação última à compressão		$\epsilon_u =$	4,5	%
Deformação última à tração		$\epsilon_t =$	3	%

Os tempos de aplicação de tensão e sua magnitude encontram-se resumidamente na Tabela 8. A idade  $t_0$  significa a primeira idade de carregamento e  $t_f$  o tempo final da análise.

Tabela 8: Idade e valor da tensão aplicada (dias, MPa)

Idade	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_f$
Teste 1	14	60	-	-	-	-	140
$\sigma$	15,03	0	-	-	-	-	0
Teste 2	28	60	91	120	154	-	190
$\sigma$	15,03	11,27	7,51	3,76	0	-	0
Teste 3	8	14	28	63	90	120	180
$\sigma$	13,79	11,03	8,27	5,51	2,75	0	0
Teste 4	8	16	28	63	90	120	180
$\sigma$	2,75	5,51	8,27	11,03	13,79	0	0
Teste 5	8	14	28	63	90	120	180
$\sigma$	13,79	8,27	2,75	8,27	13,79	0	0

Considerando o tipo de cimento e o efeito da temperatura, quando diferente de 20°C, a correção da idade de aplicação da carga dos testes acima se alteram para os valores apresentados na Tabela 9, mantendo-se inalterada a duração de aplicação da carga ( $t - t_0$ ).

Tabela 9: Idades corrigidas considerando a temperatura de 17°C

Idade	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_f$
Teste 1	16,38	55,39	-	-	-	-	124,22
Teste 2	28,13	55,39	82,00	106,97	136,30	-	164,39
Teste 3	11,35	16,38	28,13	57,96	81,14	106,97	158,75
Teste 4	11,35	18,04	28,13	57,96	81,14	106,97	158,95
Teste 5	11,35	16,38	28,13	57,96	81,14	106,97	158,95

Foram empregadas cadeias Kelvin com 4 parâmetros para os Testes 1 e 2 e 5 parâmetros para os demais. Na Tabela 10 encontram-se os valores utilizados de módulos elásticos e seus respectivos tempos de retardação.

Tabela 10: Parâmetros da Cadeia Kelvin para os ensaios de Ross (1958)

Teste 1				Teste 2				Teste 3, 4 e 5			
E <sub>1</sub> :	14,01	$\tau_1$ :	0,14	E <sub>1</sub> :	11,31	$\tau_1$ :	0,28	E <sub>1</sub> :	16,09	$\tau_1$ :	0,08
E <sub>2</sub> :	10,81	$\tau_2$ :	1,4	E <sub>2</sub> :	8,84	$\tau_2$ :	2,8	E <sub>2</sub> :	13,26	$\tau_2$ :	0,8
E <sub>3</sub> :	6,71	$\tau_3$ :	14	E <sub>3</sub> :	5,32	$\tau_3$ :	28	E <sub>3</sub> :	7,73	$\tau_3$ :	8
E <sub>4</sub> :	2,44	$\tau_4$ :	140	E <sub>4</sub> :	2,18	$\tau_4$ :	280	E <sub>4</sub> :	3,14	$\tau_4$ :	80
								E <sub>5</sub> :	4,02	$\tau_5$ :	800

Os resultados obtidos com o presente modelo bem como um gráfico da aplicação da carga encontram-se nas Figuras 60 a 64. Em cada gráfico apresentado encontram-se três resultados. O primeiro trata-se do resultado obtido pelo presente modelo, o segundo e o terceiro correspondem ao teste experimental e pelo método da superposição, ambos obtidos por Ross (1958). No Teste 1 examina-se um simples caso de variação de tensão. O corpo de prova é submetido a apenas um período de tensão constante seguida da total remoção da carga, e então a recuperação da fluência sob tensão nula pode ser observada. Uma boa aproximação foi obtida pela presente análise empregando o modelo em elementos finitos.

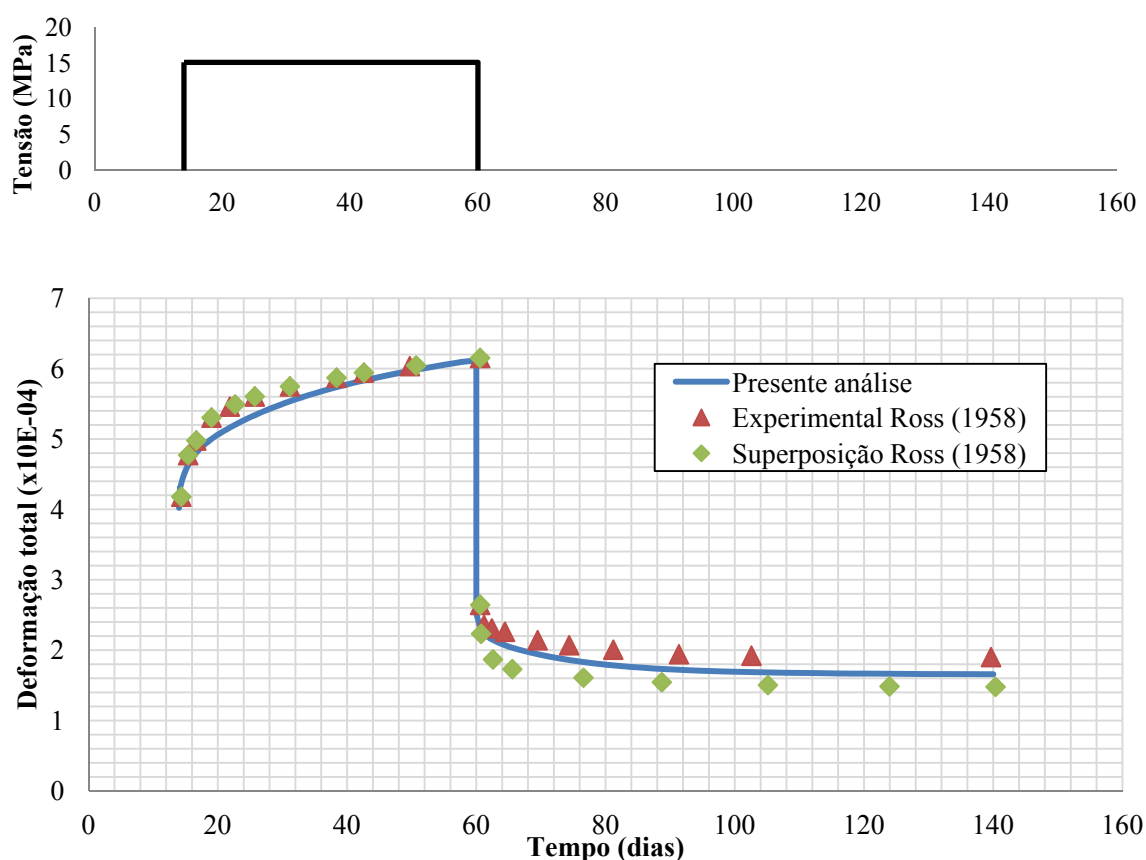


Figura 60: Histórico de tensão aplicada e deformação por fluência do Teste 1

Nos Testes 2 e 3 os corpos de prova são submetidos a vários períodos de tensão constante e descendentes, promovendo um teste crítico ao método de cálculo da fluência. A alta tensão inicial introduzida é reduzida em quatro incrementos durante um período de 126 e 112 dias para o Teste 2 e 3 respectivamente. No Teste 4 o corpo de prova também é submetido a vários períodos diferentes de tensão porém agora de forma ascendente. A tensão máxima é atingida em cinco incrementos durante 112 dias. Por fim, no Teste 5 o corpo de prova é submetido a uma alta tensão inicial para sofrer um decréscimo seguido de um acréscimo de tensão. De um modo geral o modelo empregado conseguiu atingir valores bastante próximos aos experimentais, demonstrando que o mesmo avalia de maneira correta as deformações devido ao fenômeno da fluência.

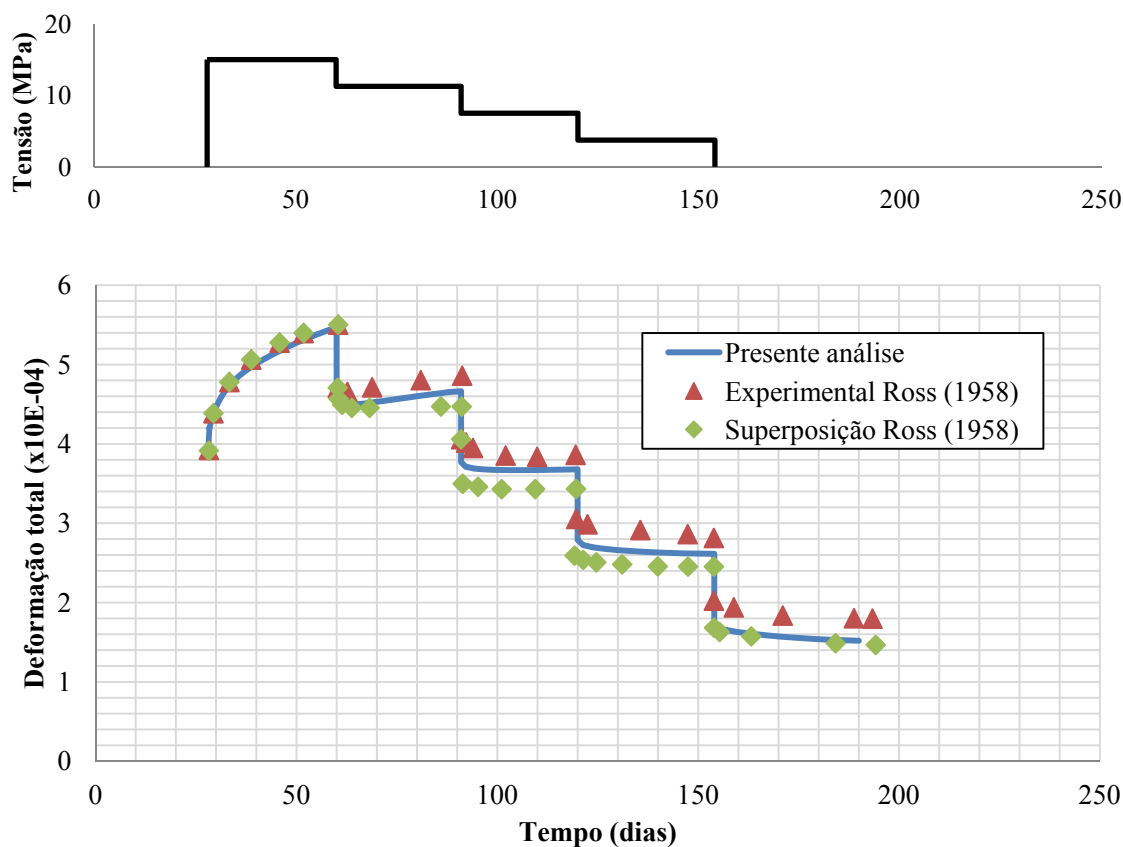


Figura 61: Histórico de tensão aplicada e deformação por fluência do Teste 2

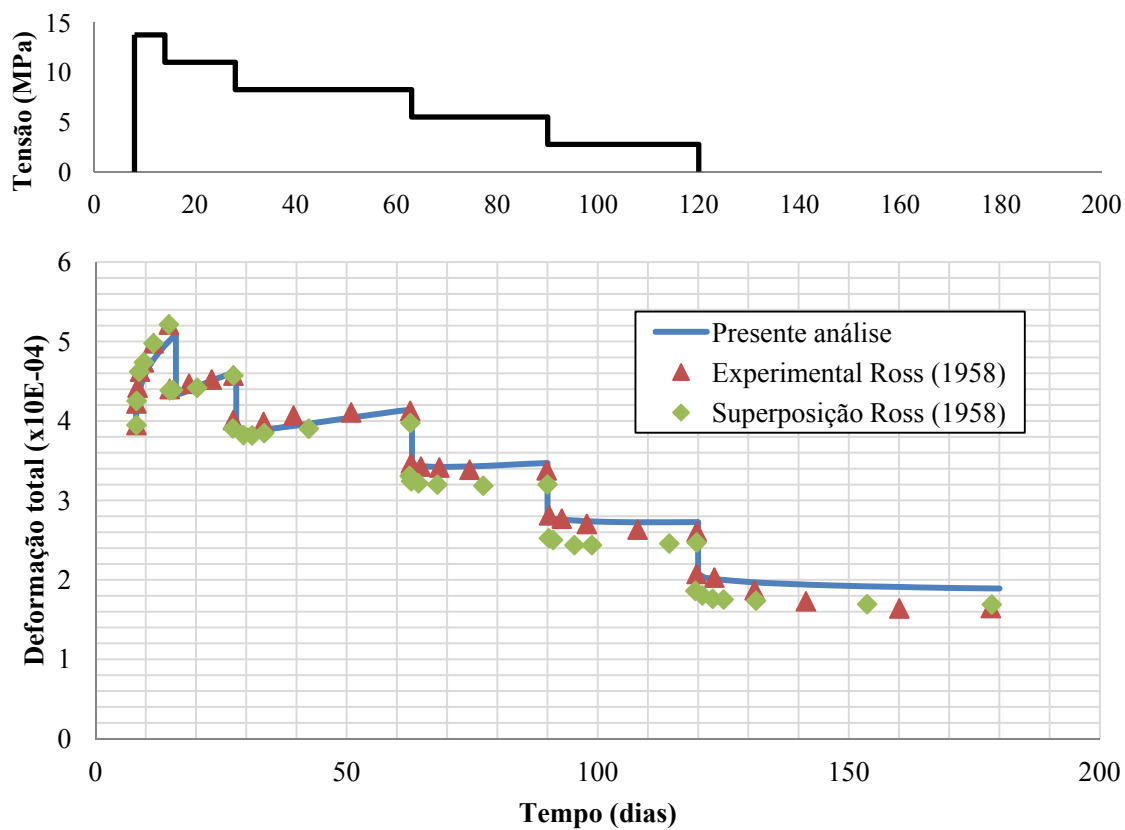


Figura 62: Histórico de tensão aplicada e deformação por fluência do Teste 3

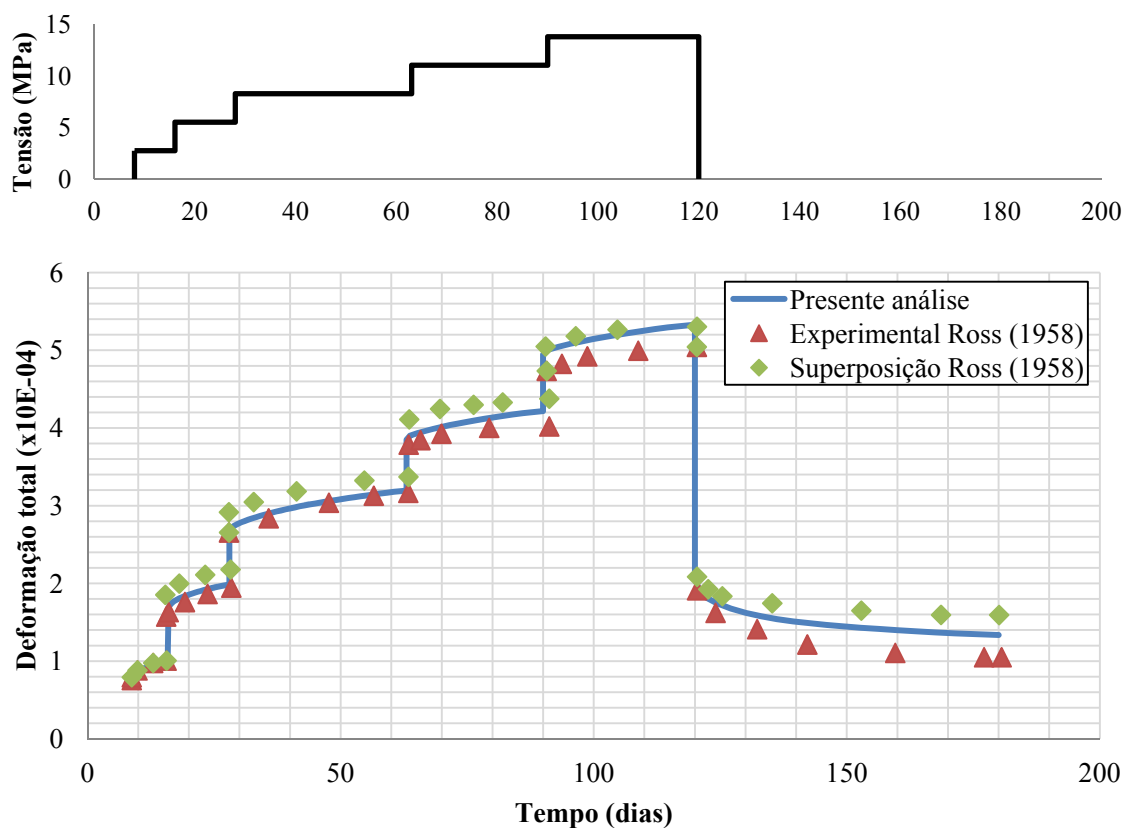


Figura 63: Histórico de tensão aplicada e deformação por fluência do Teste 4

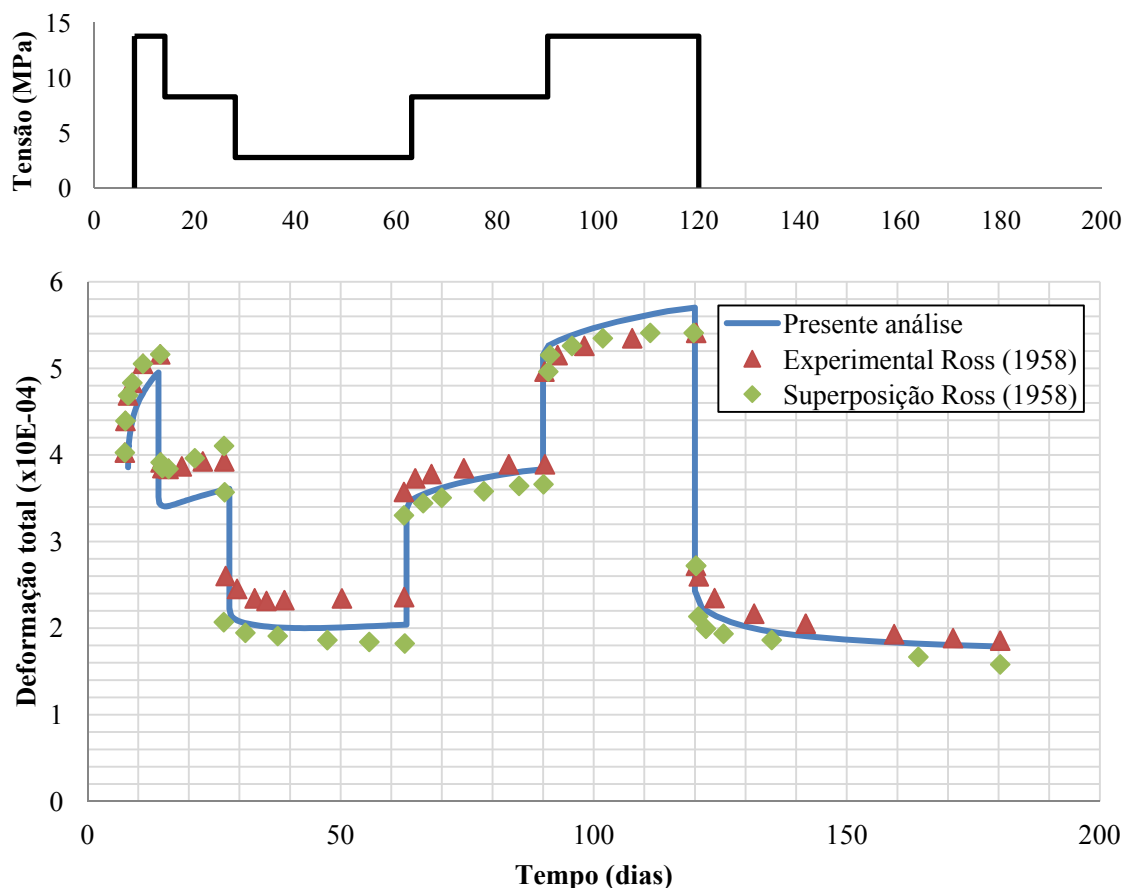


Figura 64: Histórico de tensão aplicada e deformação por fluência do Teste 5

Os passos de tempo empregados encontram-se no Apêndice C. Os tempos de processamento podem ser visualizados na Tabela 11.

Tabela 11: Tempo de análise e número de passos de tempo para os Teste de 1 a 5

	Teste 1	Teste 2	Teste 3	Teste 4	Teste 5
Tempo (segundos)	0,2	0,23	0,31	0,39	0,26
Número de passos de tempo	100	83	134	134	134

### 5.2.2 Viga V7/V8

Oito vigas idênticas de concreto armado simplesmente apoiadas, submetidas a um carregamento de longa duração e uniformemente distribuído foram testadas experimentalmente por Gobetti, Campagnolo e Campos Filho (1983). Desse estudo apenas duas delas denominadas V7 e V8 são aqui analisadas. As mesmas são idênticas, possuem vão teórico 3,72m e foram submetidas a um mesmo carregamento de 3,4kN/m, já considerando o peso próprio da estrutura. Esta carga distribuída foi aplicada como carga de superfície em toda a área superior da viga. A geometria e a disposição das armaduras estão apresentadas na

Figura 65. As propriedades dos materiais empregados para modelagem encontram-se na Tabela 12.

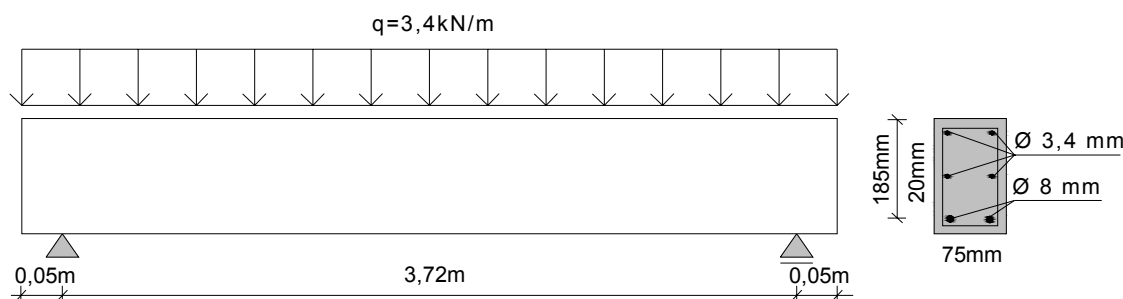


Figura 65: Vista lateral e da seção das vigas V7 e V8

Tabela 12: Propriedades dos materiais empregados na viga V7

Material	Propriedades		Unidades
Aço de reforço	Módulo de elasticidade	$E =$	210000 MPa
CA 50A	Tensão de escoamento	$f_y =$	500 MPa
$\Phi$ 8mm	Tensão última	$f_u =$	550 MPa
Aço de reforço	Módulo de elasticidade	$E =$	210000 MPa
CA 60B	Tensão de escoamento	$f_y =$	600 MPa
$\Phi$ 3.4mm	Tensão última	$f_u =$	660 MPa
Concreto	Resistência à compressão	$f_{cm} =$	19,5 MPa
	Módulo de elasticidade	$E_{16} =$	25570 MPa
	Resistência à tração	$f_t =$	2,2 MPa
	Poisson	$\nu =$	0,2
	Deformação última à compressão	$\epsilon_u =$	4,5 ‰
	Deformação última à tração	$\epsilon_t =$	3 ‰
	Parâmetro	$\alpha_{ft} =$	0,8

A viga foi carregada 16 dias após sua concretagem, a umidade relativa do ar foi considerada com o valor de 80% e a temperatura constante de 17°C, conforme relatório experimental. O final da cura seguidos do início dos efeitos de retração foi considerado aos 7 dias. Os estribos de diâmetro 3,4mm espaçados a cada 10cm foram desconsiderados na análise. O tipo de cimento considerado foi o de endurecimento normal. A idade de aplicação da carga corrigida devido à temperatura ambiente ser diferente de 20°C foi de 13,87 dias.

A malha de elementos finitos foi gerada a partir do *software* GiD (Figura 66), bem como o arquivo de entrada necessário ao programa. Por ser um problema pequeno toda a estrutura foi modelada, contendo 12 elementos. A sua altura foi discretizada em 19 camadas, sendo 16 camadas de concreto com espessuras iguais e 3 camadas de aço com espessura conforme é apresentado na Figura 67. Nesta ilustração encontram-se ao lado esquerdo a espessura real da laje de concreto e a posição real das camadas de aço. Do lado direito têm-se



a posição e espessura normalizadas das camadas de aço, sendo a espessura normalizada compreendida num intervalo de -1 a +1. O ângulo  $\theta = 0^\circ$  refere-se à armadura no sentido longitudinal da estrutura. Foi empregada uma cadeia de Kelvin com 4 parâmetros (Tabela 13).

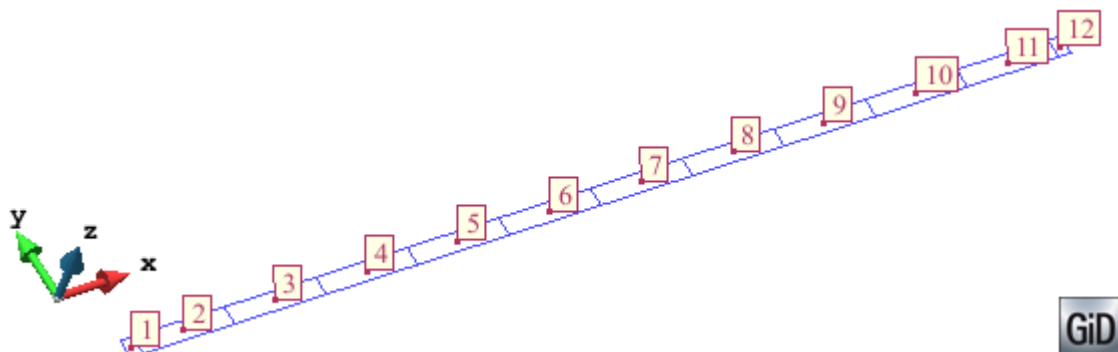


Figura 66: Malha de elementos finitos para a viga V7 gerada no GiD.

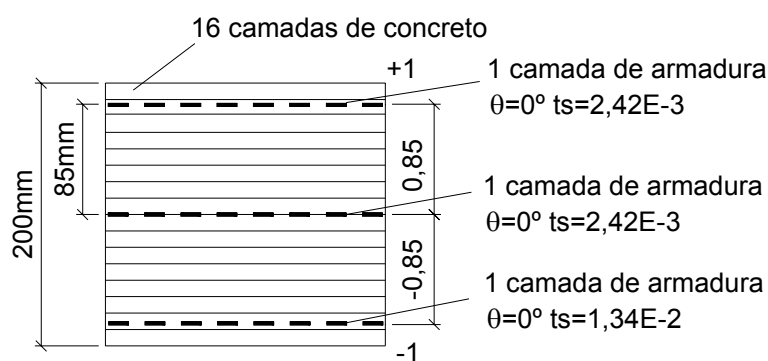


Figura 67: Camadas de aço e concreto da viga V7/V8

Tabela 13: Parâmetros  $E_\mu$  da cadeia Kelvin e tempos de retardação  $\tau_\mu$  viga V7.

Cadeia Kelvin (N=4)	
$E_1: 10,57$	$\tau_1: 0,16$
$E_2: 8,80$	$\tau_2: 1,6$
$E_3: 5,02$	$\tau_3: 16$
$E_4: 2,19$	$\tau_4: 160$

A flecha instantânea obtida pelo presente modelo encontra-se na Tabela 14, assim como as flechas medidas e calculadas pelo procedimento da NB1-78 e do CEB-FIP78 de acordo com Gobetti, Campagnolo e Campos Filho (1983).

Tabela 14: Flecha instantânea do centro do vão vigas V7 e V8

NB1-78 <sup>1</sup> (cm)	CEB-FIP 78 <sup>1</sup> (cm)	Experimental <sup>1</sup> (cm)	Presente análise (cm)
1,31	1,33	1,27	1,20

<sup>1</sup>Valores obtidos no trabalho de Gobetti, Campagnolo e Campos Filho (1983)

No gráfico da Figura 68 encontram-se os resultados obtidos pelo modelo proposto para o deslocamento no centro do vão por 70 dias. Os resultados experimentais das vigas V7 e V8 obtidos por Gobetti, Campagnolo e Campos Filho apud Prates Junior (1992) e o resultado do modelo apresentado por Prates Junior (1992) empregando  $\alpha$  igual a 0,8 também se encontram no gráfico.

Prates Junior (1992) desenvolveu um modelo computacional bidimensional em elementos finitos para análises de curta e longa duração. Em seu trabalho o autor utilizou um modelo constitutivo elasto-visco-plástico em camadas. A armadura foi considerada distribuída, representada por uma linha inserida dentro do elemento de concreto com rigidez equivalente. E para consideração das fissuras um modelo de fissuras distribuídas foi empregado pelo autor.

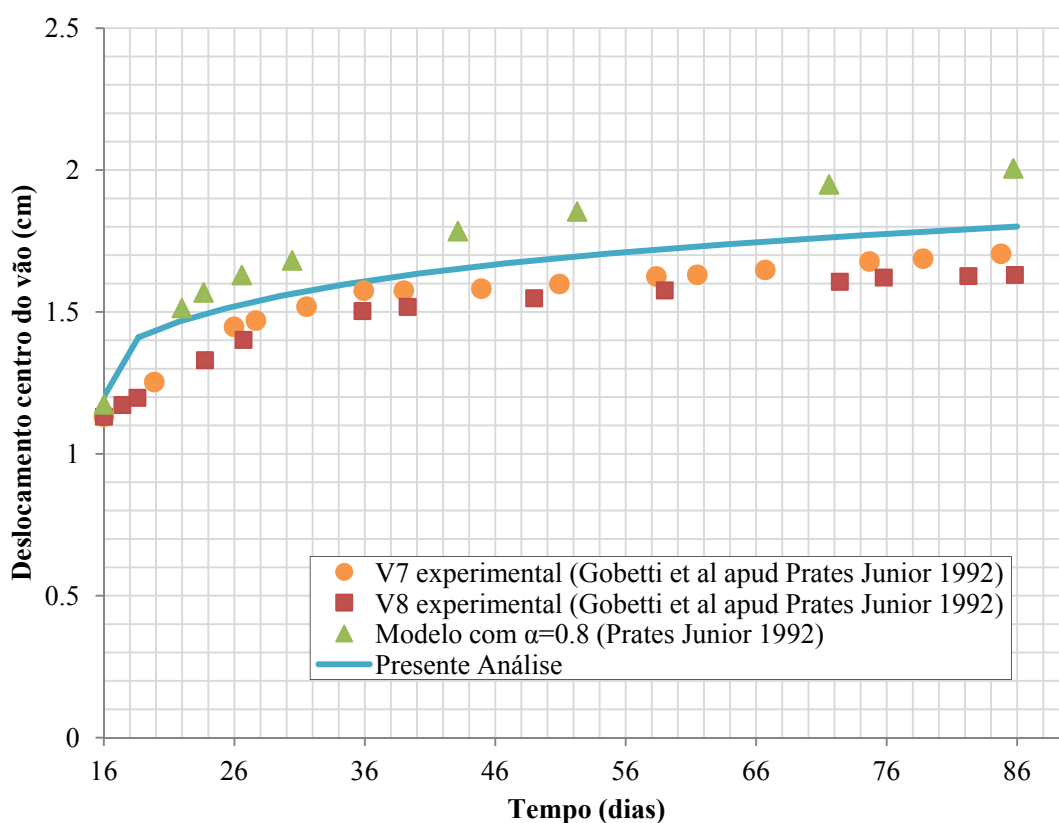


Figura 68: Deslocamento no centro do vão para viga V7

Os resultados de deslocamento obtidos pelo modelo proposto foram bastante próximos aos resultados medidos experimentalmente. O deslocamento final da análise (aos 86 dias) foi de 1,80cm para o modelo proposto e aproximadamente 1,7cm para o experimental da viga V7 e 1,63cm para a viga V8, ou seja, um erro de 5,9% e 10,4% respectivamente. Os resultados obtidos foram um pouco menores dos encontrados por Prates Junior (1992), porém o autor empregou uma umidade relativa menor ( $RH=75\%$ ) do que a utilizada nesta análise

(RH=80%), o que confere à estrutura maiores deformações de fluência e retração. Além disso, o emprego de uma modelagem em três dimensões implica numa maior precisão dos resultados.

A flecha final no centro do vão para um tempo infinito determinada por Gobetti, Campagnolo e Campos Filho (1983) considerando a NB1-78 foi de 2,06cm. Simulando a presente situação o mesmo modelo foi analisado por aproximadamente 270 anos. A flecha final obtida foi de 2,20cm, valor um pouco acima do calculado sendo cerca de 6,8%. Seu desenvolvimento é apresentado no gráfico da Figura 69. Para esta análise empregou-se uma cadeia com 6 elementos de Kelvin, sendo que os valores dos parâmetros encontram-se na Tabela 15.

Tabela 15: Parâmetros  $E_i$  e  $\tau_i$  da viga V7/V8 para tempo infinito

Cadeia Kelvin (N=7)	
$E_1$ : 9,80	$\tau_1$ : 0,16
$E_2$ : 9,82	$\tau_2$ : 1,6
$E_3$ : 4,68	$\tau_3$ : 16
$E_4$ : 2,48	$\tau_4$ : 160
$E_5$ : 5,95	$\tau_5$ : 1600
$E_6$ : 109,74	$\tau_6$ : 16000

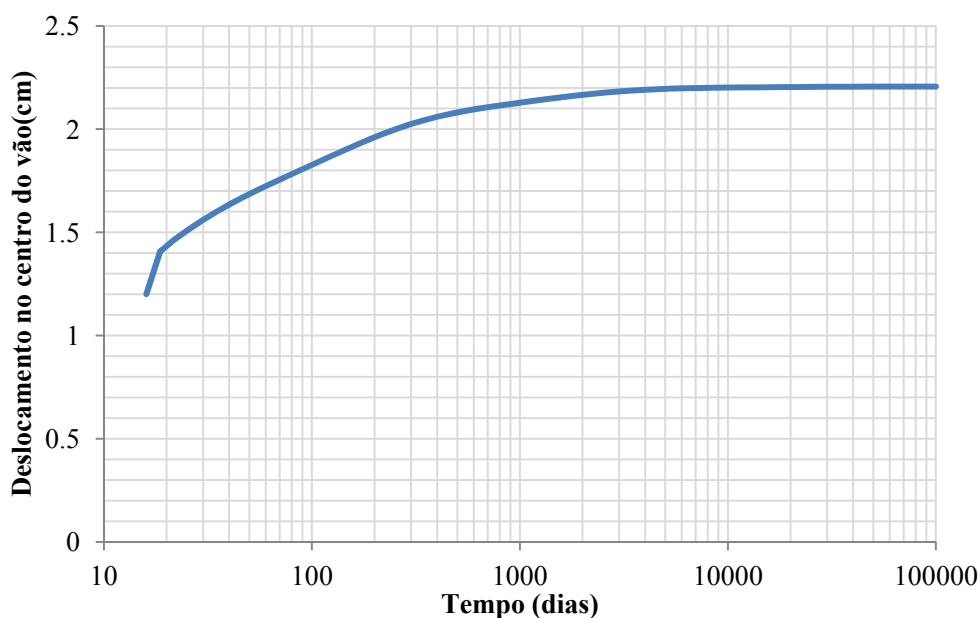


Figura 69: Flecha para tempo de aproximadamente 75 anos

Os passos de tempo empregados encontram-se no Apêndice C. Os tempos de processamento considerando os dois casos analisados podem ser visualizados na Tabela 16.

Tabela 16: Tempo de análise e número de passos de tempo para a viga V7/V8

	70 dias	100000 dias
Tempo (segundos)	6,43	22,12
Número de passos de tempo	12	58

Para simular a sensibilidade a alguns parâmetros primeiramente mantiveram-se inalteradas todas as propriedades empregadas anteriormente, porém aumentando-se a temperatura para 20°C. Na Figura 70 são apresentados os resultados obtidos. Com o aumento da temperatura as deformações por fluência e retração aumentaram gerando um maior deslocamento no centro do vão da viga de concreto armado (cerca de 2,22%). Variando a umidade relativa para 75%, observou-se um aumento na flecha de 4,4% (Figura 71).

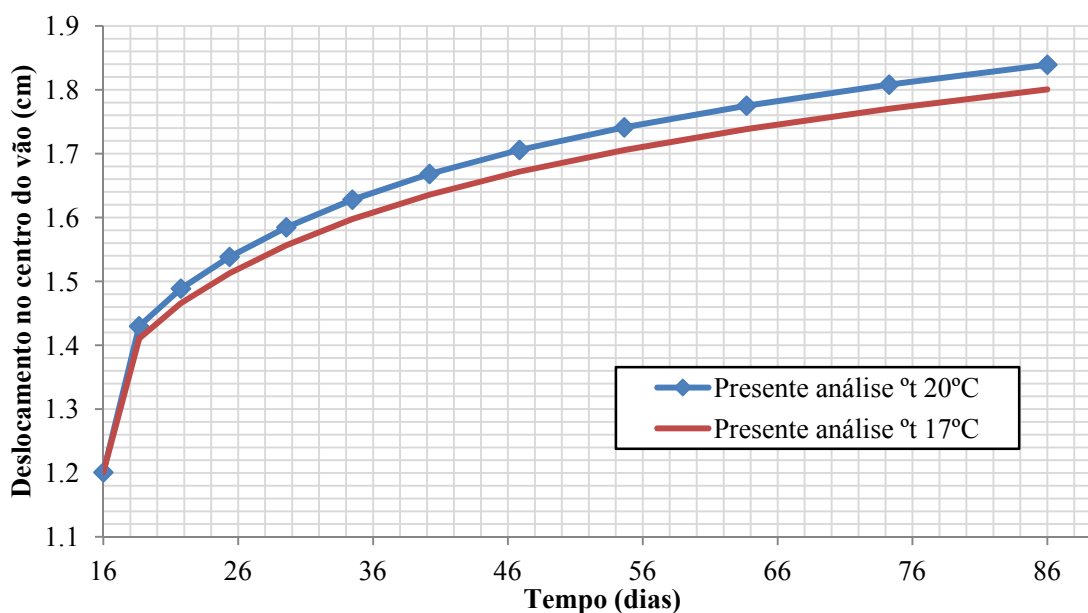


Figura 70: Flecha considerando diferentes temperaturas

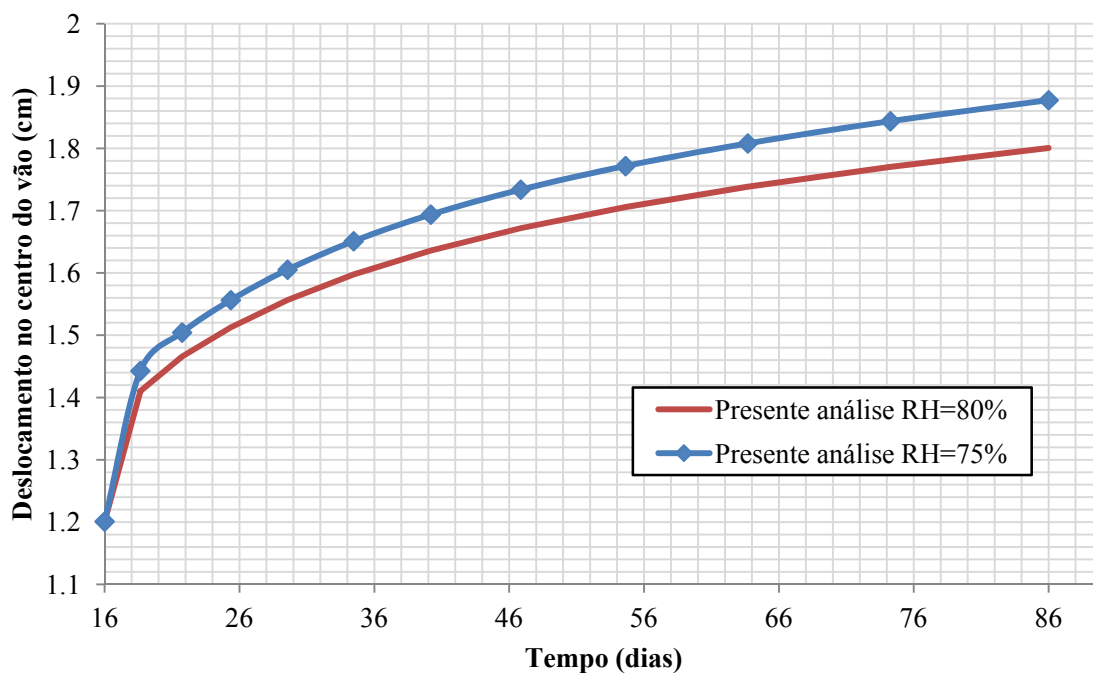


Figura 71: Flecha considerando diferentes umidades relativas

Na Figura 72 são apresentados os resultados com a variação do parâmetro  $\alpha$ , empregado no diagrama de retenção de tensões de tração do concreto. Quanto menor o valor de  $\alpha$  maiores serão os deslocamentos.

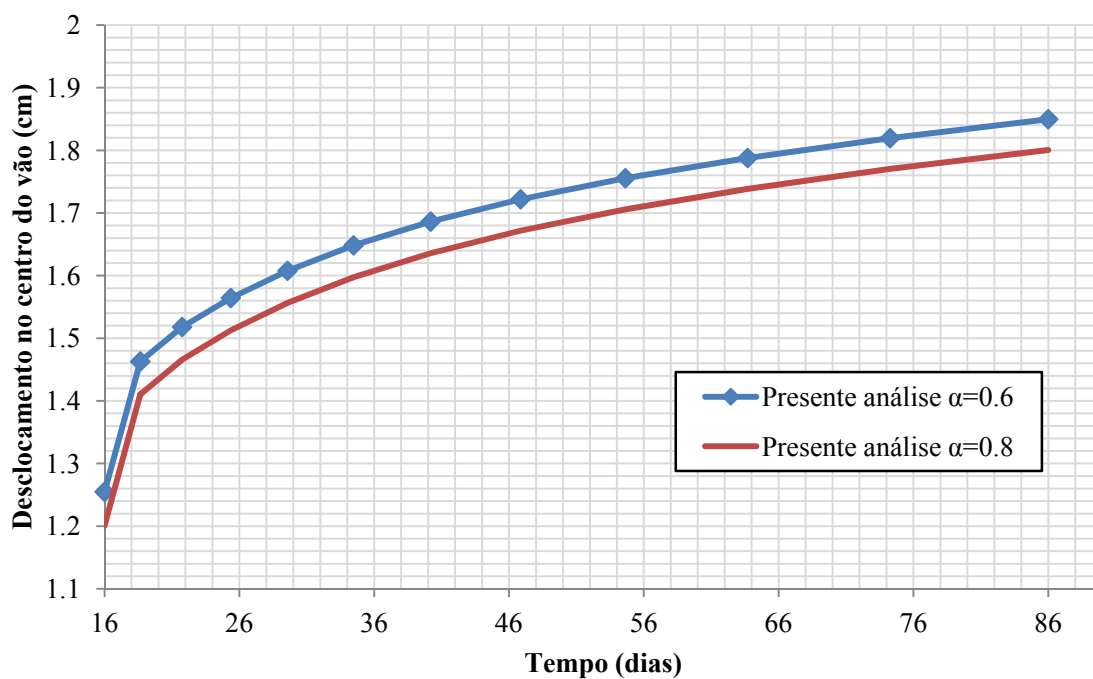


Figura 72: Flecha considerando diferentes valores para o parâmetro  $\alpha$

### 5.2.3 Viga K

Uma série de vigas foram testadas experimentalmente em laboratório e sob condições ambientes por Stevens (1972). Desta série a viga denominada K foi analisada no presente estudo. As propriedades desta viga foram obtidas através do trabalho de Eligehausen, Kazic e Sippel (1992) e a mesma encontra-se desenhada esquematicamente na Figura 73. Esta viga foi submetida a duas cargas pontuais de longa duração de 14kN, aplicadas no centro da largura da viga. O cobrimento da armadura é de 2,5cm. As propriedades dos materiais podem ser encontradas na Tabela 17.

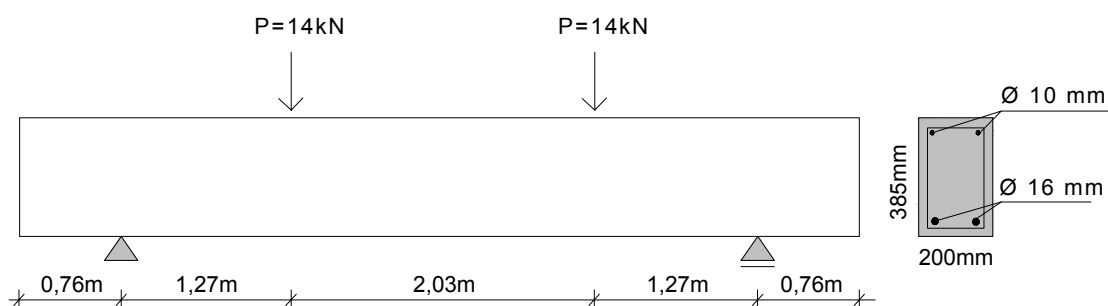


Figura 73: Geometria e detalhes da seção da viga K

A viga foi carregada aos 28 dias, a umidade relativa do ar foi considerada com o valor de 65% para testes no laboratório e 83% para o teste fora do laboratório. A temperatura foi considerada constante com o valor de 19°C para ambos os casos. O início da retração foi considerado aos 7 dias e o tempo final de análise foi de aproximadamente 270 anos. Os estribos de diâmetro 10mm foram desconsiderados na análise.

Tabela 17: Propriedades dos materiais empregados na viga K

Material	Propriedades		Unidades
Aço de reforço	Módulo de Elasticidade	$E =$	210000 MPa
	Tensão de Escoamento	$f_y =$	550 MPa
Concreto	Resistência à Compressão	$f_{cm} =$	36,7 MPa
	Módulo de Elasticidade	$E_{28} =$	33160 MPa
	Resistência à Tração	$f_t =$	3,67 MPa
	Poisson	$\nu =$	0,15
	Deformação Última	$\epsilon_u =$	4,5 ‰
	Deformação última à tração	$\epsilon_t =$	3 ‰
	Parâmetro	$\alpha =$	0,7*

\*Para a primeira e última camada de concreto, para demais  $\alpha = 1$

Toda a viga foi modelada empregando o *software* GiD para geração da malha e arquivo de entrada para o código computacional. A malha de elementos finitos contém 40

elementos de concreto discretizados em 12 camadas, sendo 10 camadas de concreto de mesma espessura e 2 camadas de aço. Um esquema das destas camadas pode ser visualizado na Figura 74, onde ao lado esquerdo encontram-se a espessura real da laje de concreto e a posição real das camadas de aço e ao lado direito têm-se a posição e espessura normalizadas das camadas de aço, sendo a espessura normalizada compreendida num intervalo de -1 a +1. O ângulo  $\theta = 0^\circ$  refere-se à armadura no sentido longitudinal da estrutura.

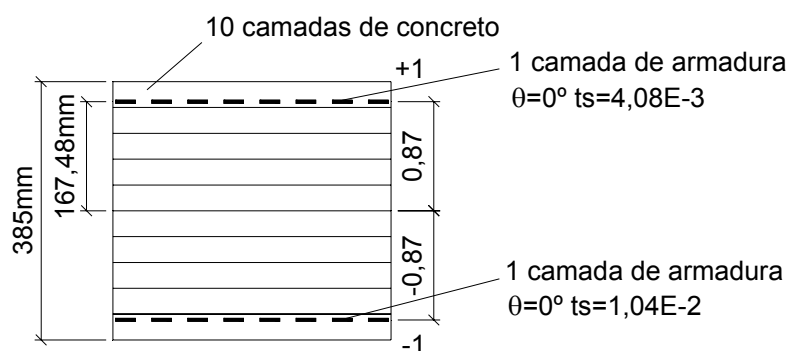


Figura 74: Camadas de aço e concreto da viga K

Neste exemplo empregou-se uma cadeia de Kelvin com 6 parâmetros, cujos valores estão apresentados na Tabela 18.

Tabela 18: Parâmetros  $E\mu$  da cadeia Kelvin e tempos de retardação  $\tau\mu$  viga K.

Teste no laboratório		Teste fora do laboratório	
$E_1: 8,16$	$\tau_1: 0,28$	$E_1: 9,45$	$\tau_1: 0,28$
$E_2: 9,67$	$\tau_2: 2,8$	$E_2: 9,88$	$\tau_2: 2,8$
$E_3: 3,90$	$\tau_3: 28$	$E_3: 4,54$	$\tau_3: 28$
$E_4: 2,55$	$\tau_4: 280$	$E_4: 2,49$	$\tau_4: 280$
$E_5: 8,59$	$\tau_5: 2800$	$E_5: 6,25$	$\tau_5: 2800$
$E_6: 157,90$	$\tau_6: 28000$	$E_6: 137,34$	$\tau_6: 28000$

Na Figura 75 encontram-se os resultados obtidos pelo modelo proposto para o deslocamento no centro do vão até 100.000 dias (escala logarítmica para o tempo). Os resultados experimentais obtidos por Stevens apud Eligehausen, Kazic e Sippel (1992) foram medidos até 1.000 dias, sendo extrapolados para 100.000 dias por Eligehausen, Kazic e Sippel (1992).

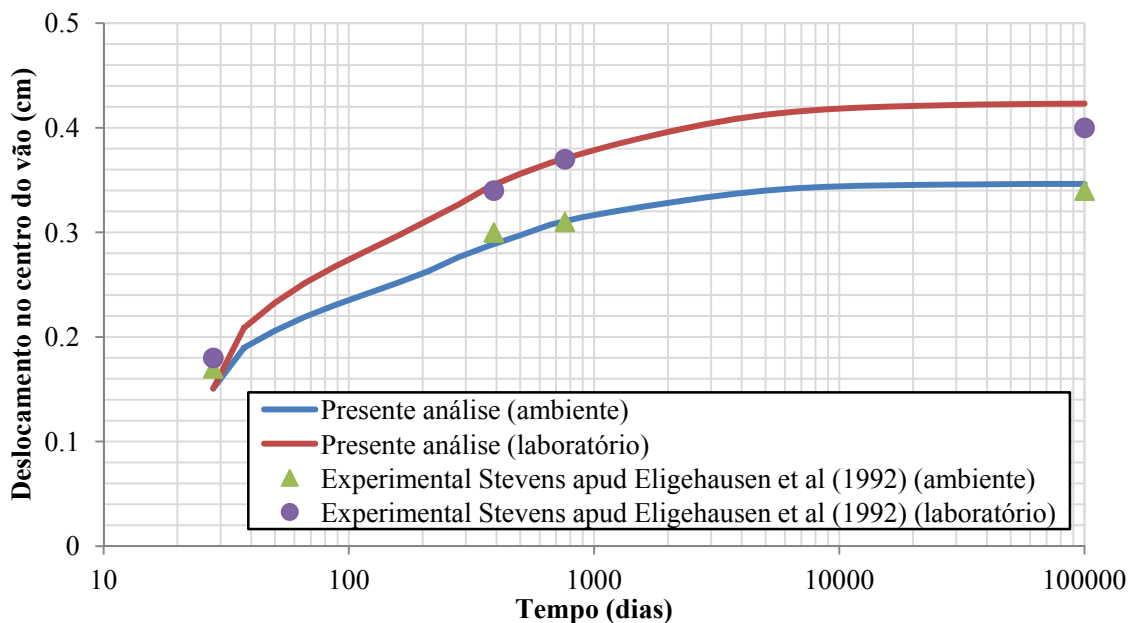


Figura 75: Deslocamento no centro do vão para viga K

Os resultados obtidos foram bastante próximos aos medidos experimentalmente. Foram realizados 29 passos de tempo para melhor discretização dos resultados. Para análise sob condições controladas o desenvolvimento das deformações diferidas aos 100.000 dias foi cerca de 5% maior que o estimado. Já para o teste realizado fora do laboratório o erro foi muito pequeno, cerca de 1,7%.

Os passos de tempo empregados encontram-se no Apêndice C. Os tempos de processamento podem ser visualizados na Tabela 19.

Tabela 19: Tempo de análise e número de passos de tempo para a viga K

	RH=65% e $t^{\circ}=19^{\circ}\text{C}$	RH=83% e $t^{\circ}=19^{\circ}\text{C}$
Tempo (segundos)	9,45	7,93
Número de passos de tempo	29	29

#### 5.2.4 Vigas série C

O Comitê Técnico TC 114 do RILEM sugere uma base de dados para realização de *benchmarks* relativos à estruturas de concreto armado, submetidas à cargas de longa duração. As vigas da série C testadas experimentalmente por Jaccoud e Favre (1982) são parte desta base de dados, e auxiliam a comparação do modelo numérico implementado. Os ensaios foram realizados no I' IBAP na l' Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne em 1977. As



vigas possuem um vão de 3,1m, suas dimensões transversais, bem como a armadura empregada podem ser visualizadas na Figura 76.

Os ensaios a quatro pontos foram realizados em 7 vigas chatas idênticas de concreto armado, submetidas a cinco diferentes níveis de cargas permanentes. No presente trabalho, 5 destas vigas são empregadas para a realização das análises. Na Tabela 20 pode-se verificar a fase de cada estrutura nos ensaios experimentais de acordo com a carga aplicada. Além do peso próprio das estruturas as vigas foram submetidas a duas cargas equidistantes do seu ponto central. As vigas foram curadas por sete dias e após foram mantidas em condições constantes de umidade relativa ( $60\% \pm 10$ ) e temperatura ( $20^{\circ}\text{C} \pm 1$ ).

Tabela 20: Estado das vigas após o carregamento (JACCOUD e FAVRE, 1982)

Viga	Carga P (kN)	Fase
C11	5,77	Estado homogêneo
C12	12,19	Aparição das primeiras fissuras
C13	18,61	Estado fissurado
C14	25,04	Estado fissurado avançado
C15	31,45	Limite do estado de serviço

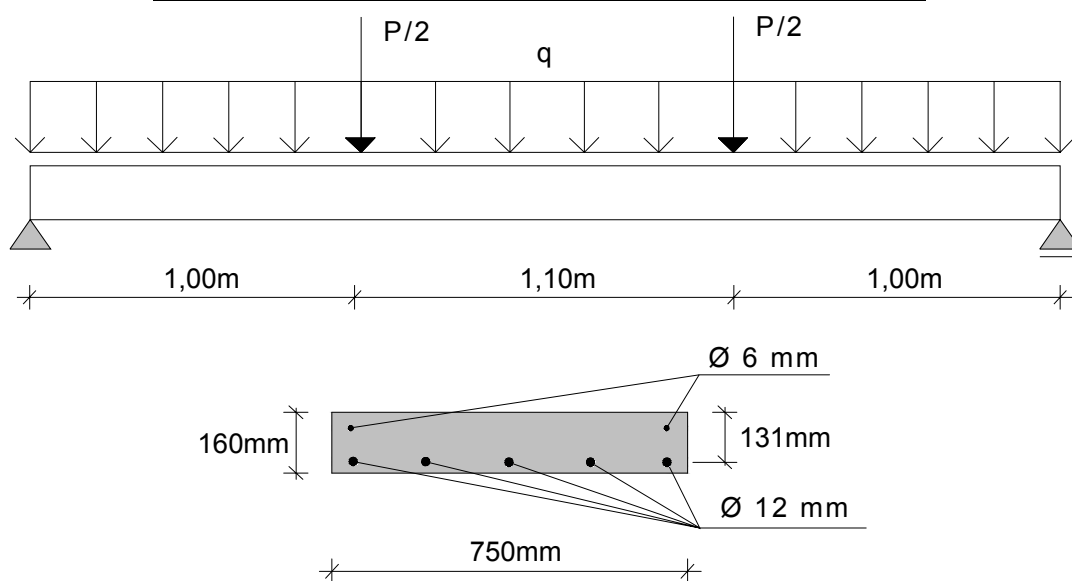


Figura 76: Geometria e detalhes da seção da série de vigas C

A carga foi aplicada aos 28 dias e mantida constante até 528 dias, exceto para a viga C11 que foi mantida por um período de 365 dias. O peso próprio considerado como uma carga distribuída de  $3,924\text{kN/m}^2$  foi aplicado como carga de pressão em toda a superfície da viga chata. A carga pontual foi aplicada no centro da largura da viga. O cimento foi

considerado de endurecimento normal e a temperatura de 20°C. A umidade relativa adotada foi de 55% para as vigas C11 e C13, 50% para as vigas C12 e C14 e 60% para a viga C15.

Vários testes em corpos de prova de concreto foram realizados de acordo com o relatório experimental, e uma grande variabilidade das propriedades do concreto como módulo de elasticidade e resistência à compressão e tração foi obtido. Na Tabela 21 são apresentados os valores empregados nas análises para cada viga. Esses valores encontram-se dentro da faixa mínima e máxima apresentados no relatório original.

Tabela 21: Propriedades dos materiais empregados nas vigas da série C

Material	Propriedades			Unidades
Aço reforço Φ 6mm	Módulo de elasticidade		E = 200000	MPa
	Tensão de escoamento		f <sub>y</sub> = 580	MPa
Aço reforço Φ 12mm	Módulo de elasticidade		E = 200000	MPa
	Tensão de escoamento		f <sub>y</sub> = 580	MPa
Concreto	Módulo de elasticidade	C11 e C13	E <sub>28</sub> = 27500	MPa
		C12 e 14	E <sub>28</sub> = 28300	MPa
		C15	E <sub>28</sub> = 28500	MPa
	Resistência à compressão	C11 e C13	f <sub>cm</sub> = 26,6	MPa
		C12 e 14	f <sub>cm</sub> = 27	MPa
		C15	f <sub>cm</sub> = 27,4	MPa
	Resistência à tração	C11 e C13	f <sub>t</sub> = 2,25	MPa
		C12 e 14	f <sub>t</sub> = 2,55	MPa
		C15	f <sub>t</sub> = 2,73	MPa
	Poisson		ν = 0,2	
	Deformação última à compressão		ε <sub>u</sub> = 3,5	%
	Deformação última à tração		ε <sub>t</sub> = 3	%
Parâmetro		α <sub>ft</sub> = 0,5		

As vigas foram modeladas empregando o *software* GiD para a fase de pré-processamento. Usando simetria, a malha empregada (Figura 77) possui 96 elementos com 12 camadas, sendo destas 10 de concreto de mesma espessura e 2 camadas de aço. Um esquema destas camadas pode ser visualizado na Figura 78, onde ao lado esquerdo encontram-se a espessura real da laje de concreto e a posição real das camadas de aço e do lado direito têm-se a posição e espessura normalizadas das camadas de aço. A espessura normalizada está compreendida num intervalo de -1 a +1. O ângulo  $\theta = 0^\circ$  refere-se à armadura no sentido longitudinal da estrutura. Os parâmetros da cadeia Kelvin são apresentados na Tabela 22.

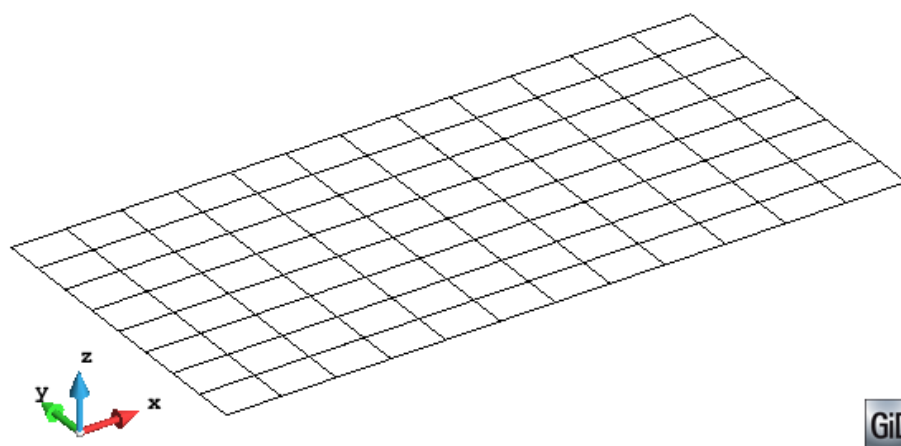


Figura 77: Malha de elementos finitos para as vigas da série C gerada no GiD

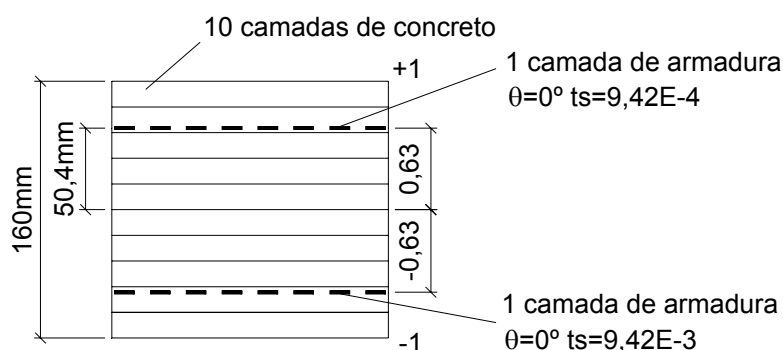


Figura 78: Camadas de concreto e aço das vigas da série C

Tabela 22: Parâmetro da cadeia Kelvin para vigas da série C

Cadeia Kelvin (N=4)	
$E_1$ : 8,56	$\tau_1$ : 0,28
$E_2$ : 8,78	$\tau_2$ : 2,8
$E_3$ : 4,03	$\tau_3$ : 28
$E_4$ : 2,34	$\tau_4$ : 280

No gráfico da Figura 79 encontra-se o coeficiente de fluência do relatório experimental e o obtido pelas análises para um período de cerca de 500 dias. Já no gráfico da Figura 80 a evolução da retração para as vigas C12 e C15 é apresentada juntamente com os resultados obtidos pelo modelo do presente trabalho. Ambos os resultados obtidos para a fluência e retração são bastante próximos dos medidos nos testes experimentais.

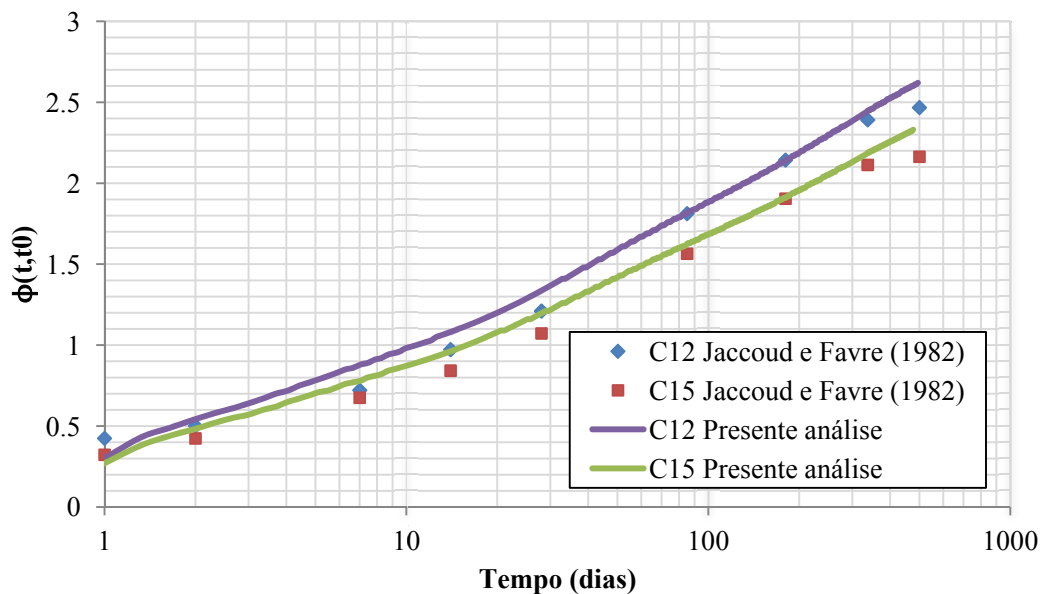


Figura 79: Coeficiente de fluência das vigas C12 e C15

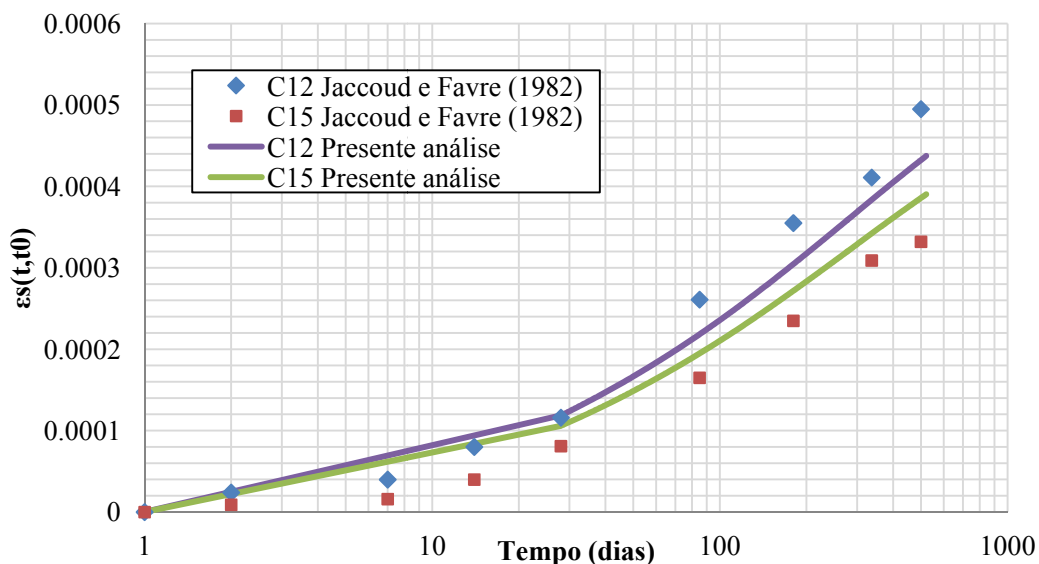


Figura 80: Desenvolvimento da retração para das vigas C12 e C15

A evolução dos deslocamentos no centro das vigas nas primeiras idades é contrastada com os resultados medidos experimentalmente para cada nível diferente de carga (Figura 81). Nota-se que o algoritmo de predição foi capaz de obter uma boa aproximação entre os resultados mesmo para as primeiras idades do concreto. Para as análises de longa duração tem-se representado no gráfico da Figura 82 os resultados para o carregamento sustentado por períodos de 340 e 500 dias. Uma boa aproximação dos resultados pode ser observada.

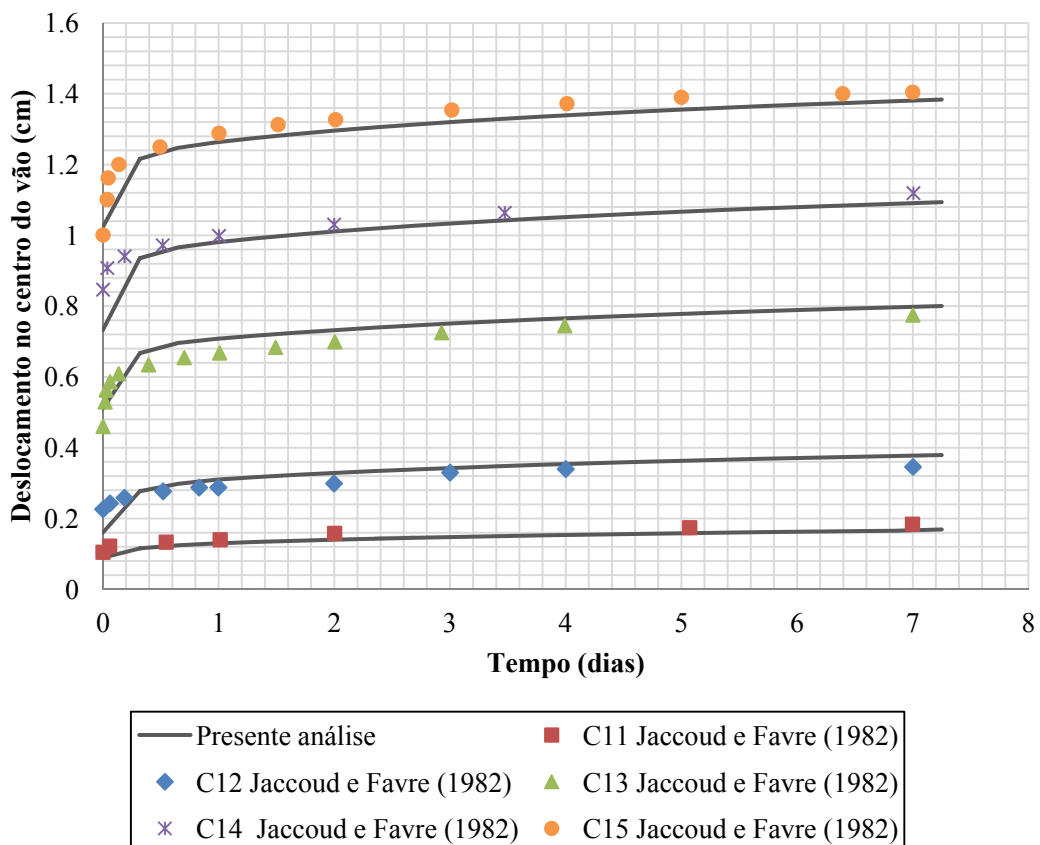


Figura 81: Evolução das flechas da série C imediatamente após a aplicação da carga

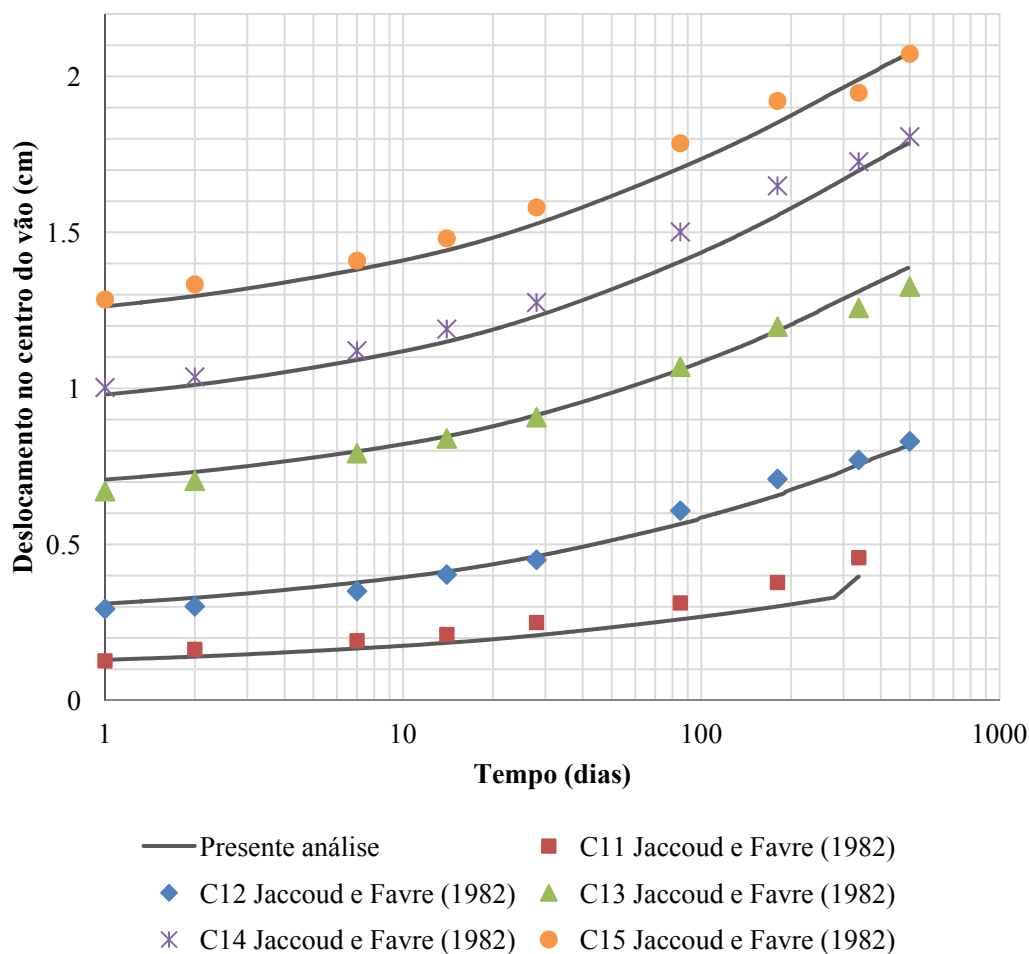


Figura 82: Resultados das vigas da série C com carregamento de longa duração

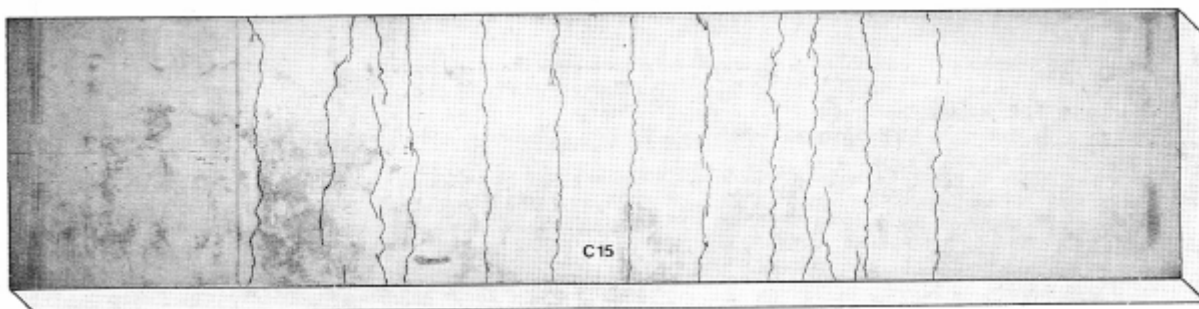
Os passos de tempo empregados encontram-se no Apêndice C. Os tempos de processamento podem ser visualizados na Tabela 23.

Tabela 23: Tempo de análise e número de passos de tempo das vigas da série C

	C11	C12	C13	C14	C15
Tempo (minutos)	17,78	21,31	22,31	17,9	16,64
Número de passos de tempo	224	256	256	256	256

O relatório experimental traz a ilustração do padrão de fissuração sofrido pela estrutura C15 após 510 dias de carregamento (Figura 83). Nota-se uma boa concordância no mapeamento das fissuras observadas experimentalmente. Nas Figuras 84 e 85 encontram-se, respectivamente, os traços que indicam fissuras na camada inferior da viga C15 e os pequenos círculos que indicam compressão além da resistência à compressão do concreto da camada superior da viga C15, ambas obtidas pela presente análise. Nota-se que o modelo é capaz de obter uma boa precisão na predição das fissuras que irão ocorrer na estrutura após os 510 dias.

Nas Figuras 86 e 87 a evolução dos deslocamentos e da fissuração das 5 vigas são apresentados, sendo na primeira coluna a resposta instantânea e na segunda a diferida. A mesma escala de cores foi empregada em ambas as figuras. Pode-se comprovar o nível de fissuração apresentado na Tabela 20.



Fonte: Jaccoud e Favre (1982)

Figura 83: Fissuras observadas na face inferior da viga C15 após 510 dias sob carga

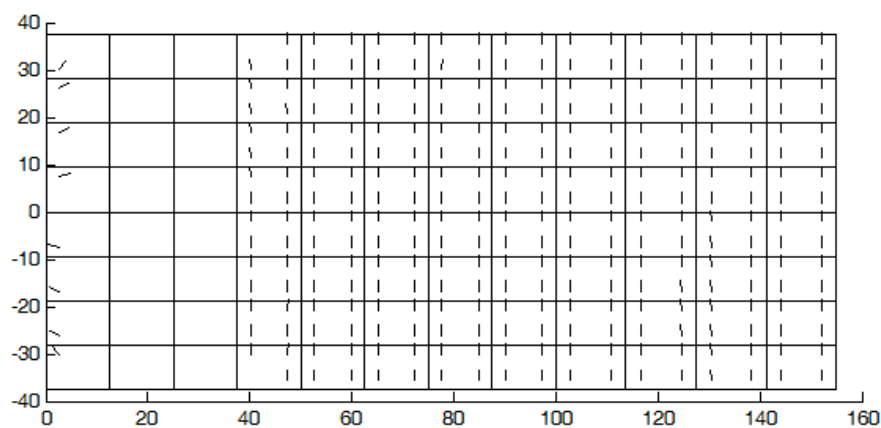


Figura 84: Fissuração na face inferior de metade da viga C15

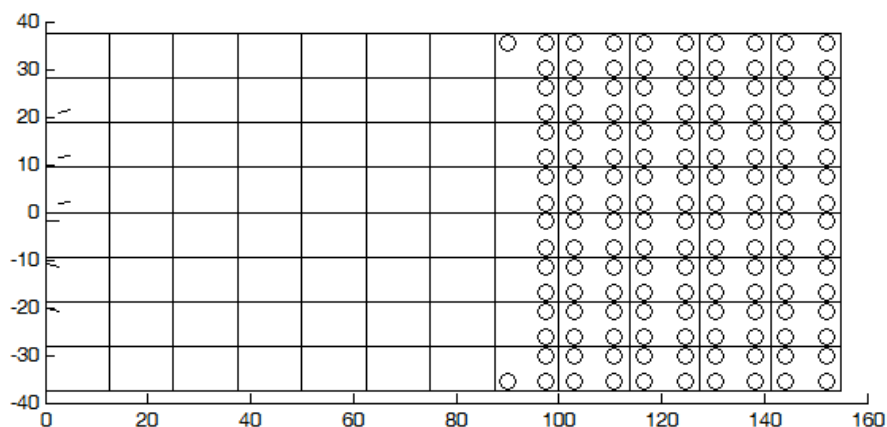


Figura 85: Pontos de compressão na face superior de metade da viga C15

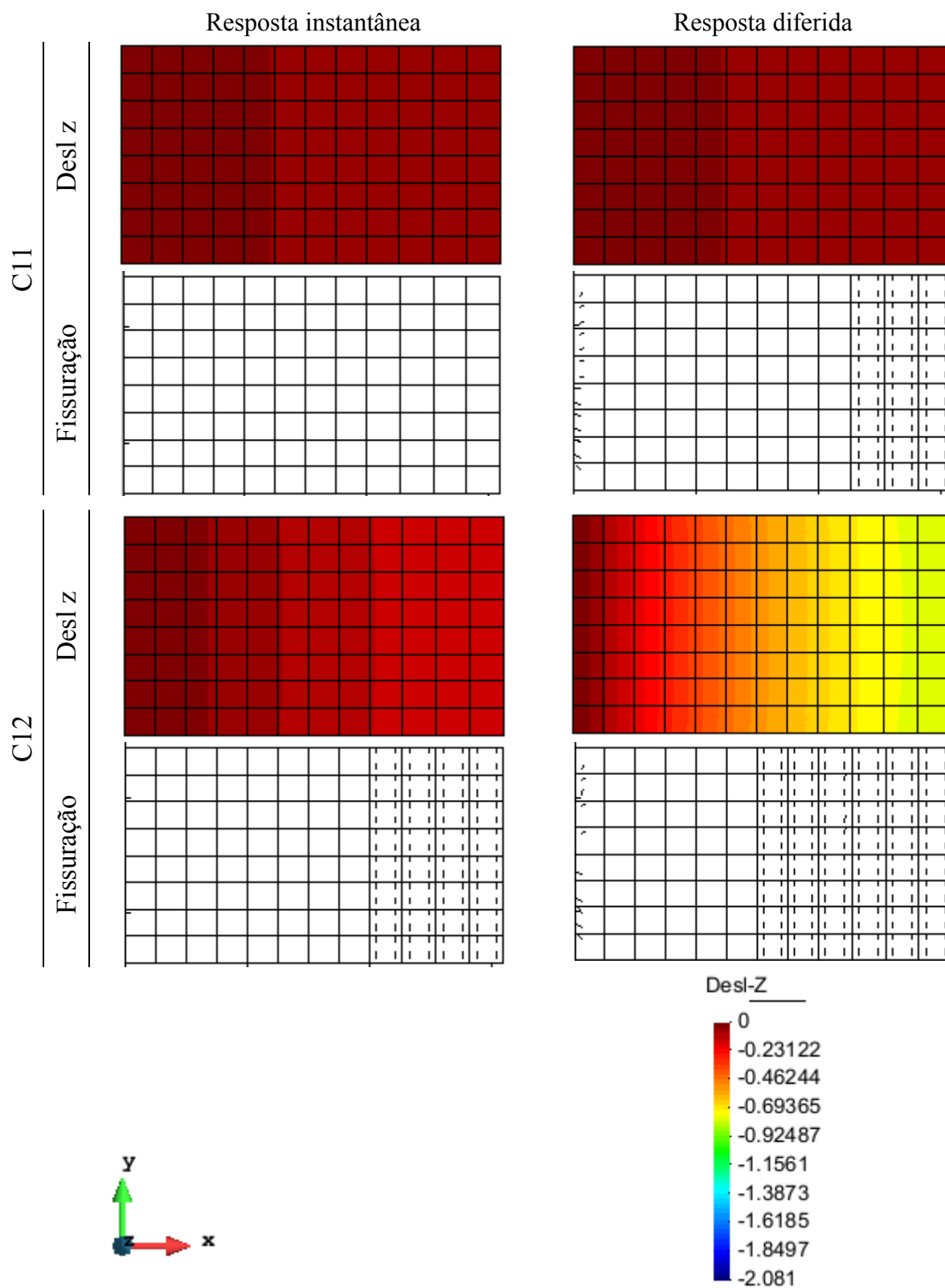


Figura 86: Evolução dos deslocamentos (cm) e fissuração das vigas C11 e C12



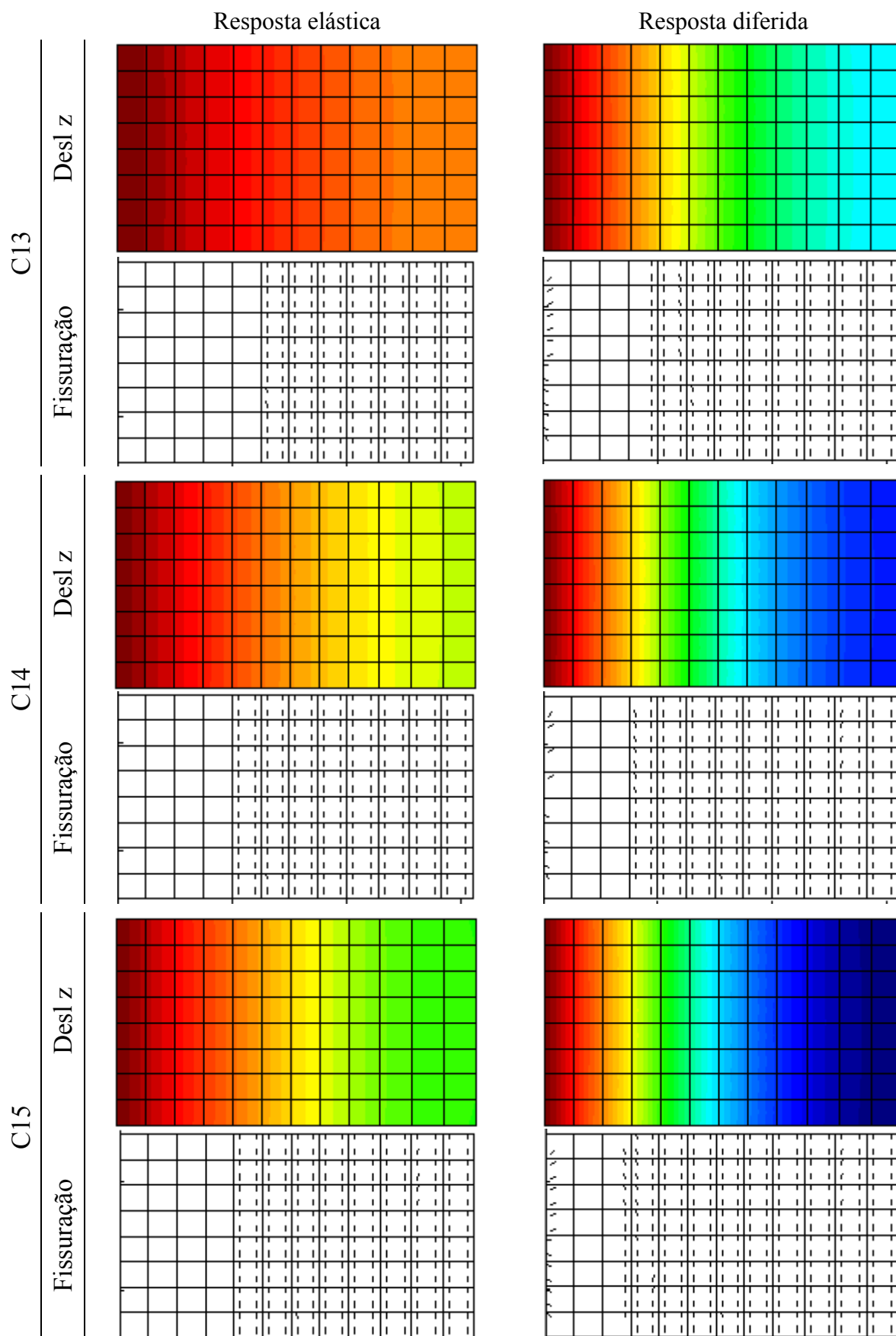


Figura 87: Evolução dos deslocamentos (cm) e fissuração das vigas C13, C14 e C15

### 5.2.5 Laje Jofriet e McNeice

Uma laje quadrada com armadura isotrópica foi testada até sua ruptura por Jofriet e McNeice apud Kabir (1976). Apesar de não haver dados experimentais devido à carga de longa duração para esta estrutura, considerando os efeitos de fluência e retração, Kabir (1976) assumiu uma determinada história de carga de serviço para analisar seu modelo em elementos finitos para um carregamento dependente do tempo. Logo, no presente trabalho a laje simplesmente apoiada em seus quatro cantos também foi analisada devido a esse histórico de carregamento proposto por Kabir (1976). Os dados a respeito de sua geometria e armadura encontram-se na Figura 88. As propriedades dos materiais empregados encontram-se na Tabela 24.

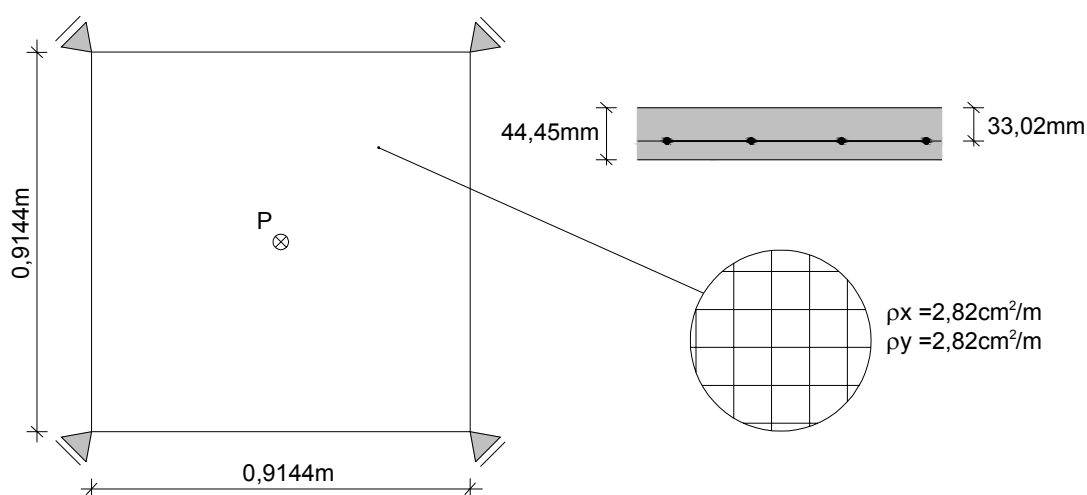


Figura 88: Geometria e detalhes da seção da laje de McNeice

Tabela 24: Propriedades dos materiais empregados na laje de McNeice

Material	Propriedades	Unidades
Aço reforço	Módulo de elasticidade	$E = 200000$ MPa
	Tensão de escoamento	$f_y = 413,4$ MPa
Concreto	Módulo de elasticidade	$E_{14} = 28600$ MPa
	Resistência à compressão	$f_{cm} = 38$ MPa
	Resistência à tração	$f_t = 3,8$ MPa
	Poisson	$\nu = 0,15$
	Deformação última à compressão	$\epsilon_u = 4$ ‰
	Deformação última à tração	$\epsilon_t = 2$ ‰
	Parâmetro	$\alpha_{ft} = 0,8$

Duas malhas distintas foram utilizadas, sendo estas apresentadas nas Figuras 89 e 90. Devido à simetria apenas um quarto da laje foi representada pelas malhas de elementos finitos. A malha 1 contém 11 elementos enquanto que a malha 2 possui 100 elementos. Em

ambas as malhas cada elemento foi discretizado em 8 camadas de concreto de mesma espessura e 2 camadas de aço, conforme o esquema apresentado na Figura 91. Nesta ilustração encontram-se ao lado esquerdo a espessura real da laje de concreto e a posição real das camadas de aço. Do lado direito têm-se a posição e espessura normalizadas das camadas de aço, sendo a espessura normalizada compreendida num intervalo de -1 a +1. O ângulo  $\theta = 0^\circ$  refere-se à armadura longitudinal e o ângulo  $\theta = 90^\circ$  à armadura transversal. Na malha 1 o carregamento pontual foi aplicado no nó 1, enquanto no nó 46 encontra-se o apoio. Na malha 2 o carregamento foi aplicado no nó 341, e o apoio encontra-se no nó 60. Os resultados obtidos são relativos ao nó 3 para a malha 1 e ao nó 333 para a malha 2.

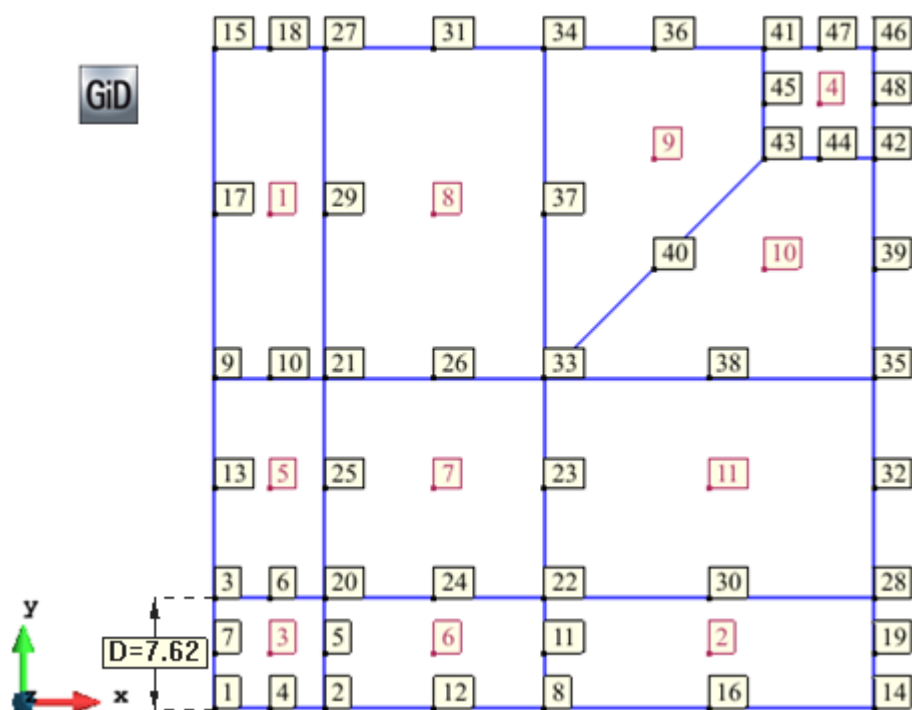


Figura 89: Malha 1 da laje McNeice

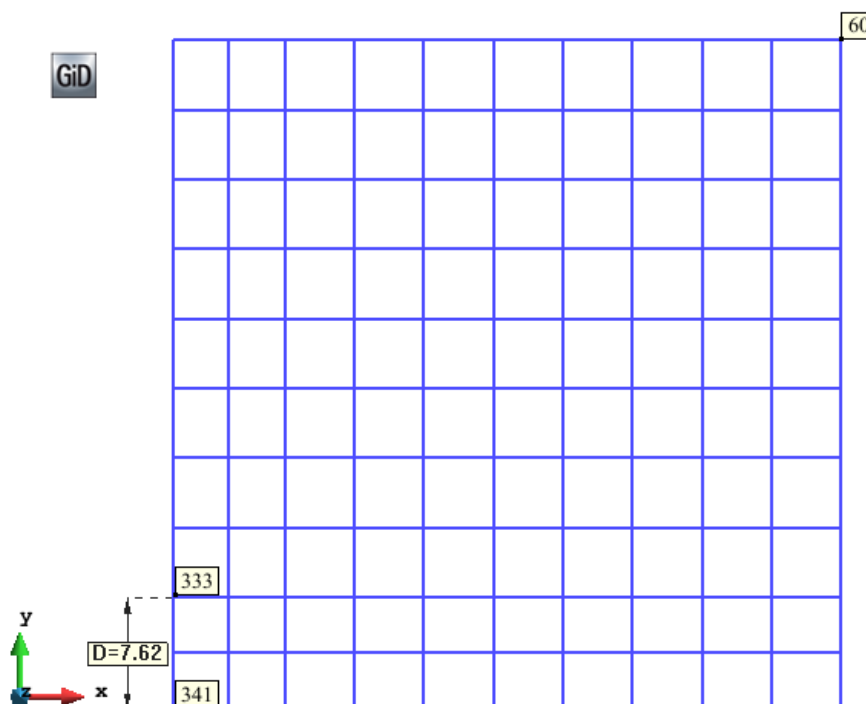


Figura 90: Malha 2 da laje McNeice

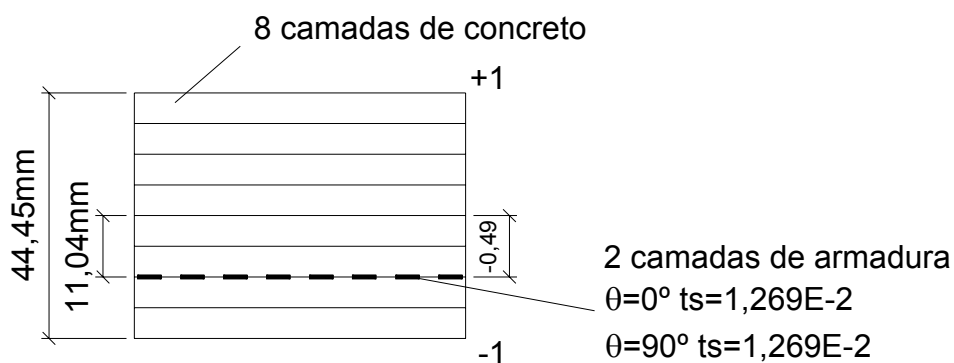


Figura 91: Esquema em camadas da laje McNeice

Adotou-se umidade relativa de 80% e temperatura de 20°C. Os parâmetros empregados na cadeia Kelvin encontram-se na Tabela 25.

Tabela 25: Parâmetro da cadeia Kelvin para a laje McNeice

Cadeia Kelvin (N=4)	
$E_1$ : 10,83	$\tau_1$ : 0,14
$E_2$ : 8,62	$\tau_2$ : 1,4
$E_3$ : 5,06	$\tau_3$ : 14
$E_4$ : 2,18	$\tau_4$ : 140

O histórico de carga aplicado considerando toda estrutura pode ser visualizado na Figura 92. Uma carga de 4,45kN foi aplicada na estrutura 14 dias após sua concretagem. Esta carga foi mantida constante durante 26 dias quando mais 4,45kN foram aplicados. Após 20 dias, mais 4,45kN foram aplicados, totalizando uma carga de 13,35kN, mantida novamente por mais 20 dias. A carga de peso próprio foi aplicada como carga de superfície em toda a área da laje com valor de 1,1kN/m<sup>2</sup>. No gráfico da Figura 93 encontram-se os resultados obtidos para o deslocamento vertical em um ponto distante cerca de 7,62cm do centro da laje, para a presente análise empregando as malhas 1 e 2 e por Kabir (1976).

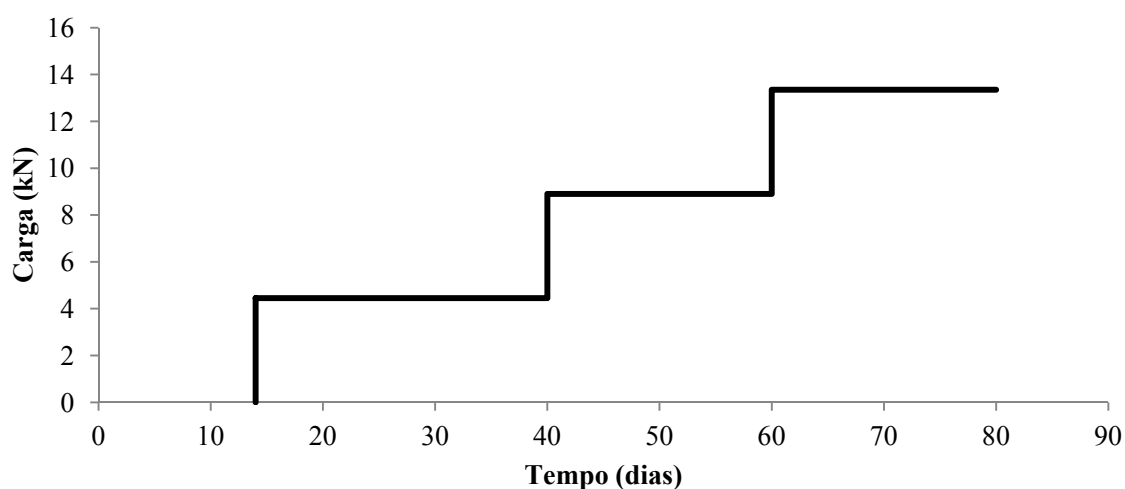


Figura 92: Histórico de carregamento da análise de serviço para laje McNeice.

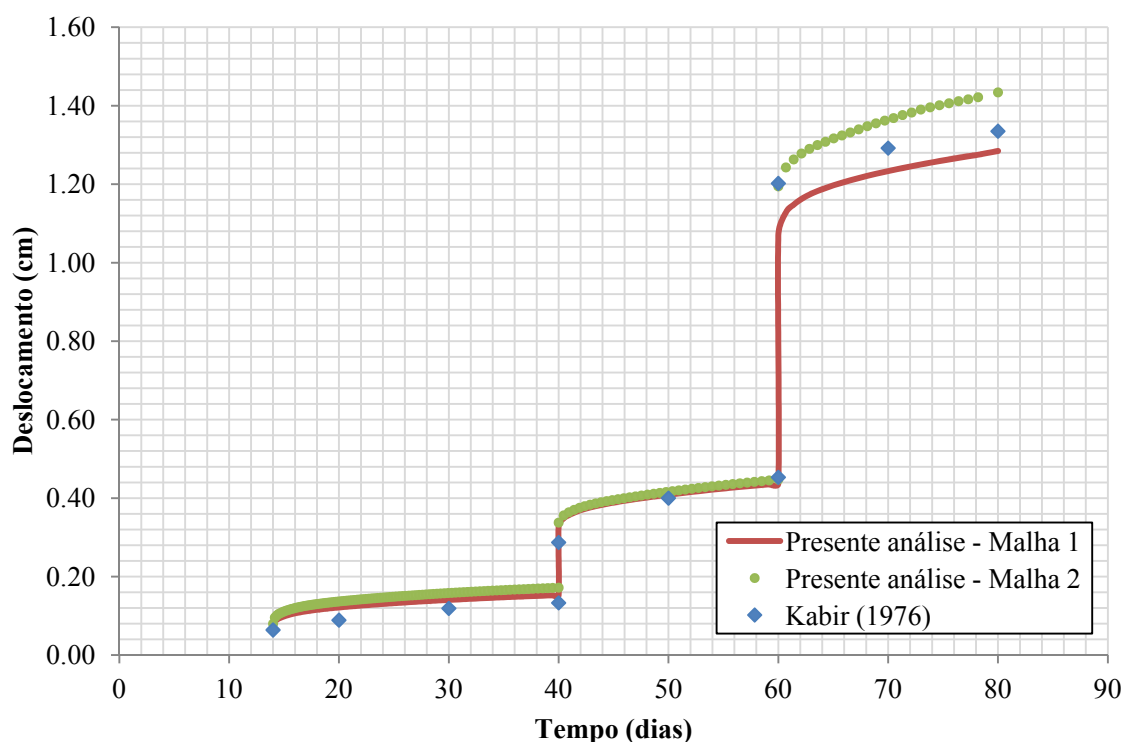


Figura 93: Deslocamento obtido para a laje McNeice.

A deformada da estrutura, com os resultados obtidos pela malha 1, pode ser observada na Figura 94.

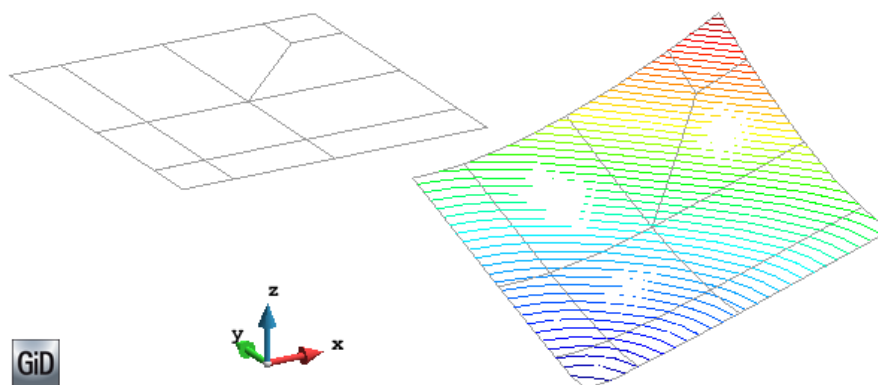


Figura 94: Deformada da estrutura – Malha 1

Uma boa aproximação foi obtida entre os resultados do presente modelo e os obtidos por Kabir (1976), demonstrando uma boa concordância do presente modelo na análise de carregamento variável ao longo do tempo. Apenas na última aplicação de carga o modelo apresentado obteve um deslocamento um pouco menor que o obtido por Kabir (1976).

Em sua análise, Kabir (1976) empregou um modelo numérico não linear em elementos finitos para análises de estruturas de concreto armado. Suas análises bidimensionais consideravam a fissuração progressiva do concreto, empregando um modelo em camadas para o concreto e aço (armadura distribuída). Um esquema de integração passo a passo foi utilizado, juntamente com uma formulação de rigidez tangente, para analisar as estruturas de concreto armado. O concreto foi considerado com um material viscoelástico com envelhecimento. A deformação por fluência e retração do concreto foram inseridas como cargas nodais em cada passo de tempo da análise. Foi empregado um elemento isoparamétrico triangular de casca discretizado em camadas. A malha empregada por Kabir (1976) pode ser visualizada na Figura 96.

A evolução dos deslocamentos no eixo z ao longo dos 80 dias de análise obtidos com a malha 1 é apresentada na Figura 95. Até os 60 dias com uma carga suportada de 8,9kN os deslocamentos são muito pequenos. Isso começa a mudar a partir da aplicação da última carga no tempo de 60 dias, até atingir o deslocamento final da análise aos 80 dias. Nas Figuras 96 e 98 encontram-se o padrão de fissuração obtido por Kabir (1976) para a camada inferior da laje aos 60 e 80 dias. Nestas figuras as linhas pontilhadas indicam o caminho das fissuras formadas. Os respectivos padrões obtidos pela presente análise empregando a malha 1 encontram-se nas Figuras 97 e 99. O traço indica a fissuração e seu ângulo a direção da

fissura. Dois traços representam fissuração dupla. A tendência de fissuração foi bastante parecida com as obtidas pelo autor supracitado.

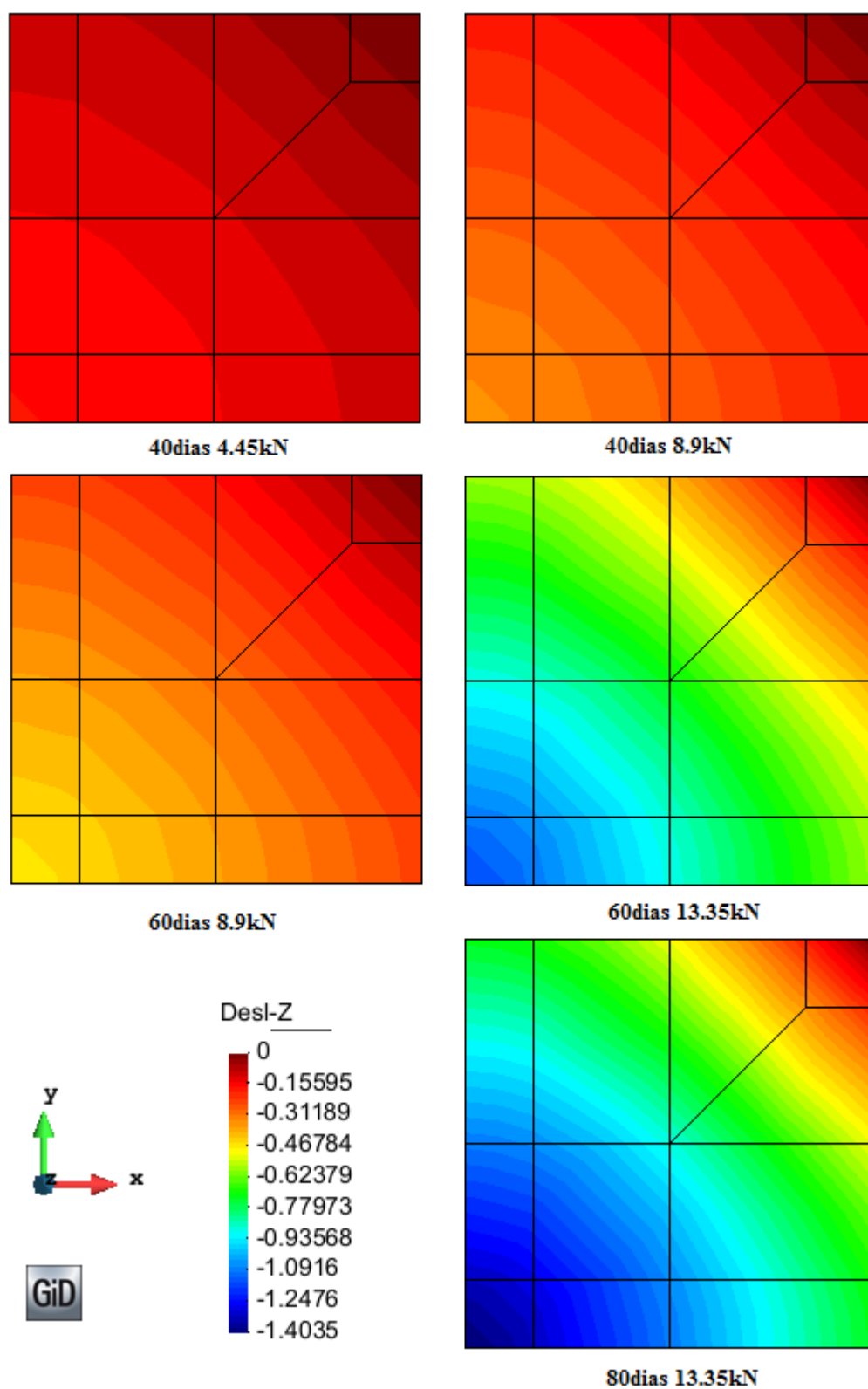
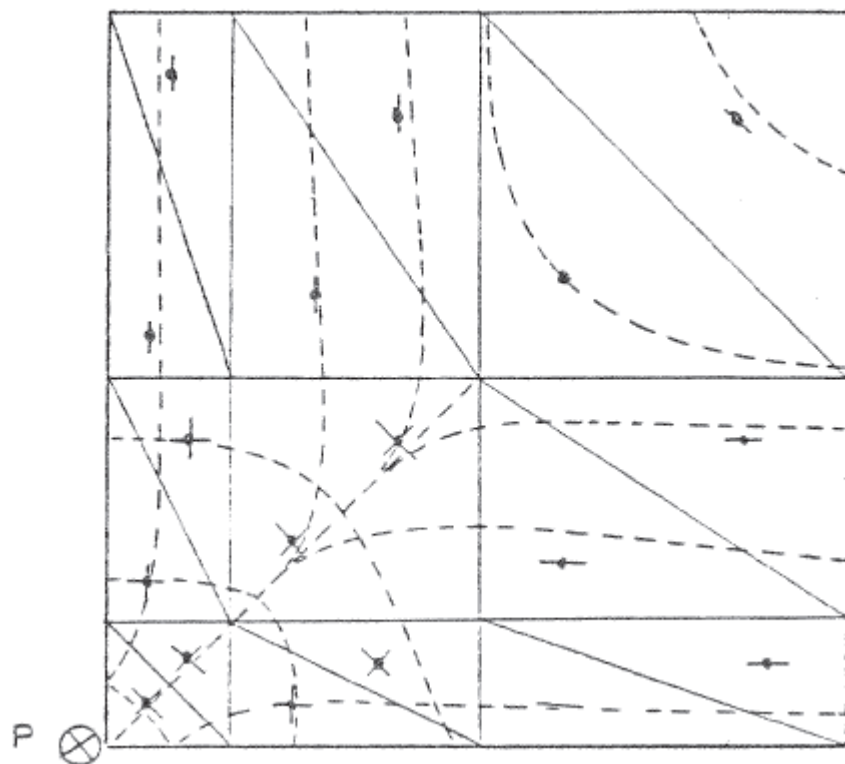


Figura 95: Deslocamento (cm) da laje McNeice ao longo dos 80 dias de análise – Malha 1



Fonte: Kabir (1976)

Figura 96: Fissuração da camada inferior para 13,35kN obtido por Kabir (1976)

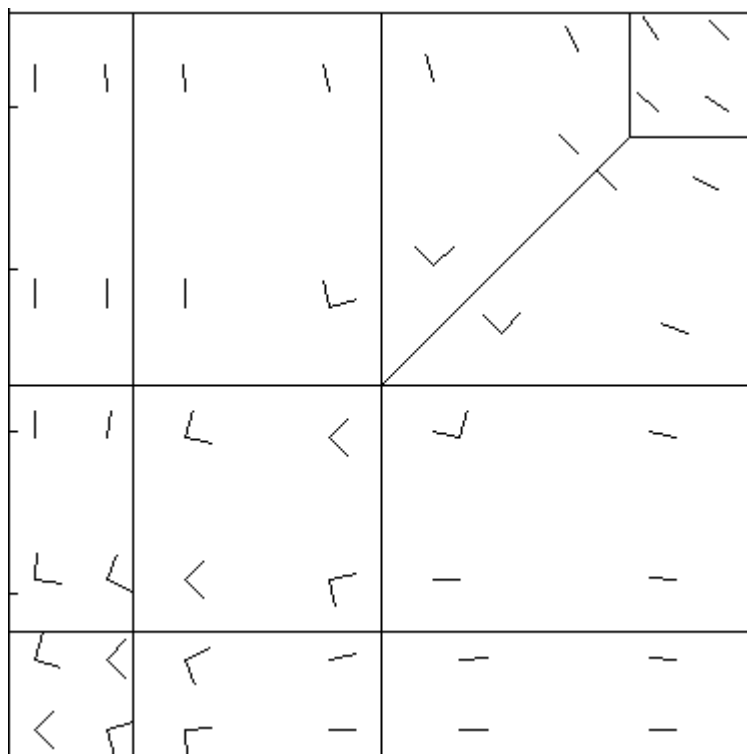
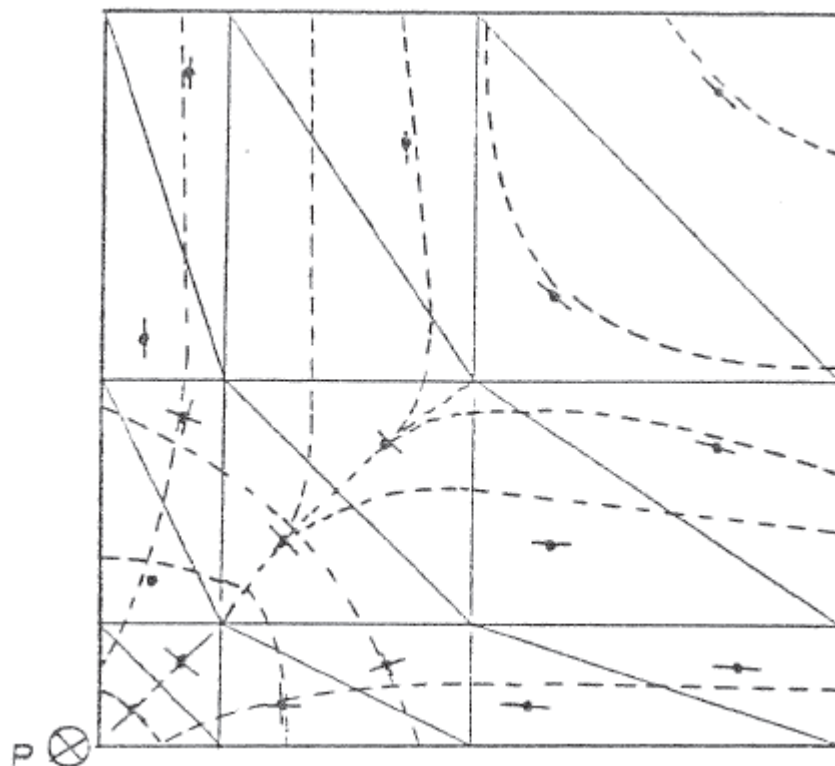


Figura 97: Fissuração da camada inferior para 13,35kN pela presente análise





Fonte: Kabir (1976)

Figura 98: Fissuração da camada inferior para 13,35kN obtido por Kabir (1976)

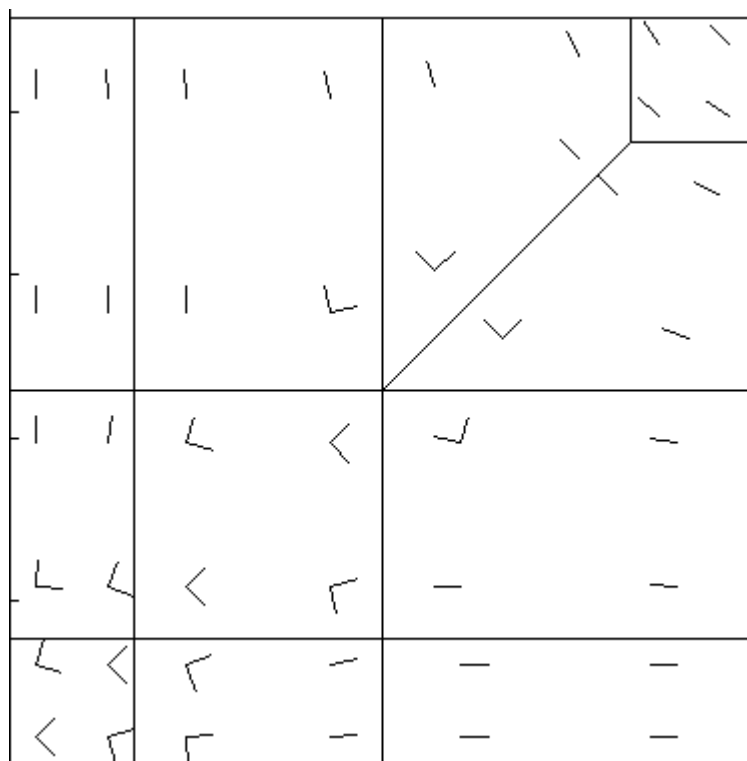


Figura 99: Fissuração da camada inferior para 13,35kN pela presente análise

Os passos de tempo empregados nesta análise encontram-se no Apêndice C. O tempo de processamento pode ser visualizado na Tabela 26.

Tabela 26: Tempo de análise e número de passos de tempo para a laje McNeice

	Malha com 11 elementos	Malha com 100 elementos
Tempo	50,44 segundos	114 minutos
Número de passos de tempo	149	149

### 5.2.6 Viga mista simplesmente apoiada

Gilbert e Bradford (1992) realizaram uma série de testes experimentais em vigas mistas de aço e concreto simplesmente apoiadas a fim de medir sua deformação ao longo do tempo. Quatro vigas idênticas no que diz respeito à seção transversal possuindo comprimento de 5,9m foram ensaiadas até 250 dias. Duas delas, denominadas B1 e B2 possuem pares de conectores dispostos em intervalos de 200mm e as outras duas, B3 e B4, pares de conectores a cada 600mm. Nas estruturas B1 e B3 além do peso próprio um carregamento de 7,52kN/m foi aplicado. Na Tabela 27 um resumo destas características é apresentado. As dimensões e características da seção transversal destas vigas podem ser visualizadas na Figura 100. As propriedades dos materiais empregados encontram-se na Tabela 28.

Tabela 27: Características das vigas mistas de vão simples

Viga	Carga (kN/m)	Espaçamento dos conectores (mm)	Número de conectores
B1	7,52 + Peso próprio	200	60
B2	Peso próprio	200	60
B3	7,52 + Peso próprio	600	20
B4	Peso próprio	600	20

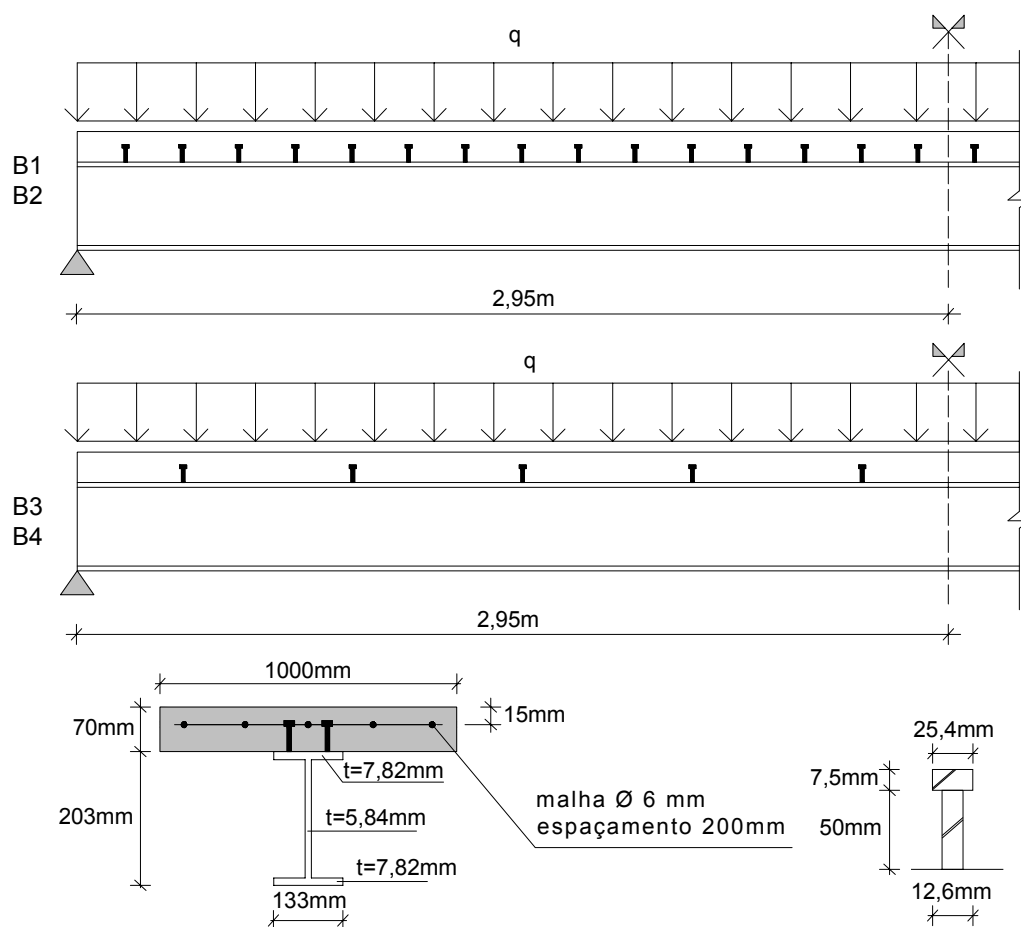


Figura 100: Geometria e seção das vigas mistas de vão simples B1, B2, B3 e B4

Tabela 28: Propriedades dos materiais das vigas mistas de vão simples B1, B2, B3 e B4

Material	Propriedades			Unidades
Aço Estrutural	Módulo de Elasticidade	$E =$	200000	MPa
	Tensão de Escoamento	$f_y =$	265	MPa
	Poisson	$\nu =$	0,3	
	Deformação Última	$\epsilon_u =$	25	%
Aço de reforço	Módulo de Elasticidade	$E =$	200000	MPa
	Tensão de Escoamento	$f_y =$	250	MPa
	Tensão Última	$f_u =$	350	MPa
	Poisson	$\nu =$	0,3	
Concreto	Deformação Última	$\epsilon_u =$	25	%
	Resistência à Compressão	$f_{cm} =$	31	MPa
	Módulo de Elasticidade	$E_{10} =$	25100	MPa
	Resistência à Tração	$f_t =$	3,1	MPa
Conector de cisalhamento	Poisson	$\nu =$	0,25	
	Deformação Última	$\epsilon_u =$	4,5	‰
	Espaçamento	$s =$	200 e 600	mm
	Diâmetro x Altura	$d \times h =$	12,6 x 57,5	mm
	Número de Linhas	$n =$	2	
	Constante 1	$a =$	120	kN
	Constante 2	$b =$	7	$\text{mm}^{-1}$

Utilizando-se simetria, apenas metade da estrutura foi modelada. A malha de elementos finitos das vigas B1 e B2 é apresentada na Figura 101 e possui 144 elementos de aço, 112 elementos de concreto e 30 elementos de conectores. A malha das vigas B3 e B4 é semelhante, sendo a única diferença em relação ao número de conectores que é de 10 elementos. Para a discretização da laje foram empregadas 7 camadas de concreto de mesma espessura e 2 camadas de aço de espessuras e orientações conforme é apresentado na Figura 102. Nesta figura encontram-se ao lado esquerdo a espessura real da laje de concreto e a posição real das camadas de aço. Do lado direito têm-se a posição e espessura normalizadas das camadas de aço, sendo a espessura normalizada compreendida num intervalo de -1 a +1. O ângulo  $\theta = 0^\circ$  refere-se à armadura longitudinal e o ângulo  $\theta = 90^\circ$  à armadura transversal.

O peso próprio da laje de concreto foi aplicado como carga de pressão no valor de  $1,75\text{kN/m}^2$ . A sobrecarga também foi aplicada como carga de pressão em uma largura central de  $60,6\text{mm}$  da laje de concreto. Já o peso próprio da viga de aço ( $1,52\text{kN}$ ) foi aplicado como carga pontual na alma do perfil, dividido em 15 nós no sentido longitudinal da estrutura.

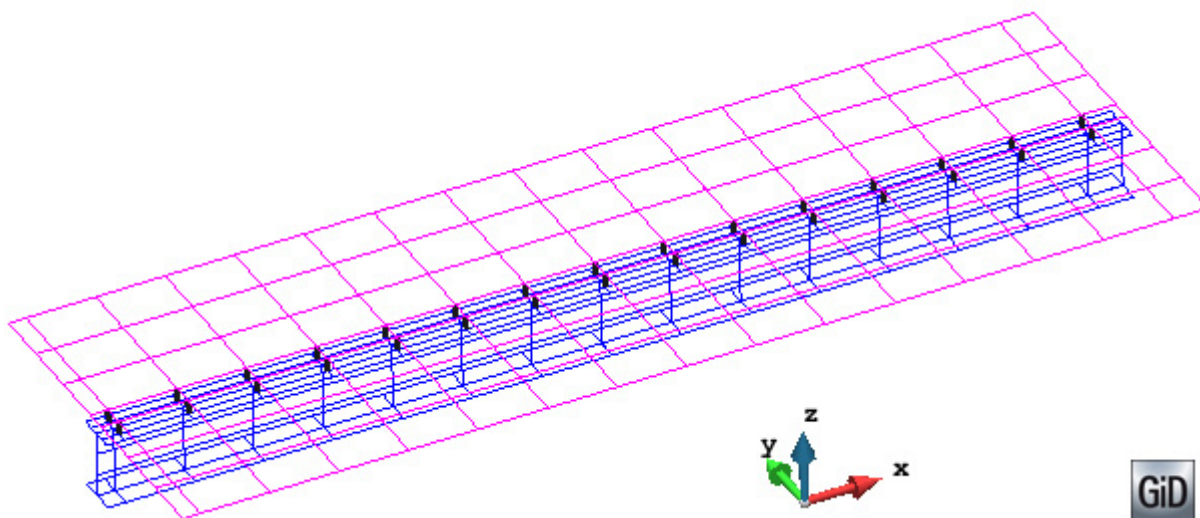


Figura 101: Malha de elementos finitos das vigas B1 e B2

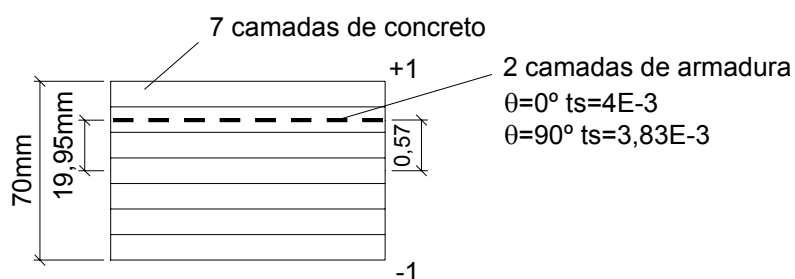


Figura 102: Esquema das camadas de concreto e aço da laje da viga mista

De acordo com Gilbert e Bradford (1992) a rigidez dos conectores foi baseada em três testes *push-out*. Destes testes a média para a rigidez dos conectores foi de 84kN/mm para uma força cortante de 120kN. O deslocamento relativo máximo considerado foi de 1,42mm. A curva de rigidez adotada pode ser visualizada na Figura 103. A cabeça do conector não foi modelada.

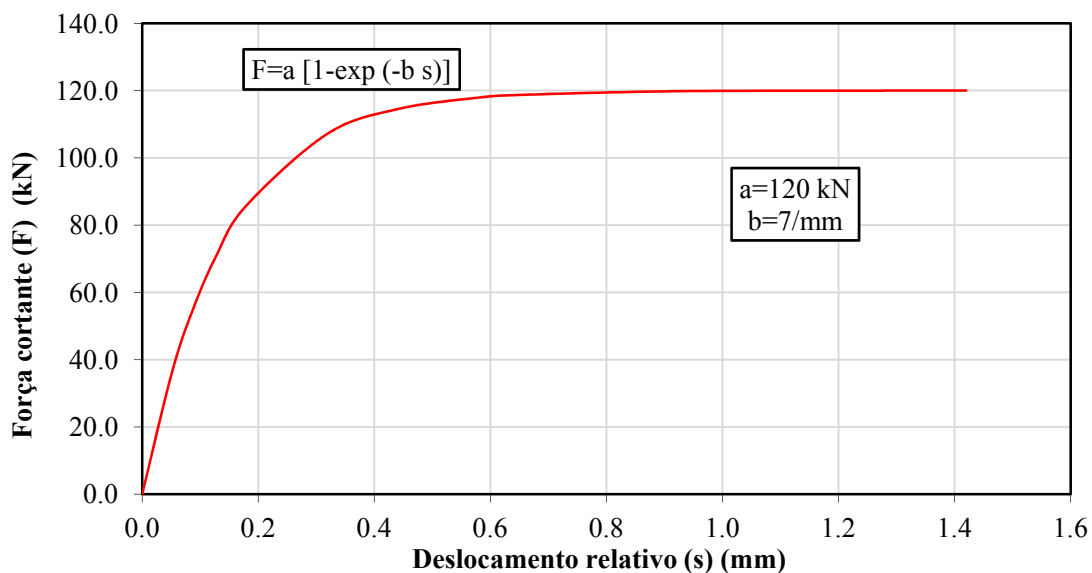


Figura 103: Rigidez dos conectores das vigas de vão simples B1, B2, B3 e B4

A idade de aplicação da carga não é um dado claro no trabalho original sendo adotado o valor de 10 dias empregado por Jurkiewicz, Buzon e Sieffert (2005). A análise das estruturas se estende até 250 dias. Para os parâmetros empregados na predição das deformações diferidas adotou-se o uso de cimento de endurecimento normal, temperatura de 20°C e umidade relativa de 65%. Na Tabela 29 encontram-se os parâmetros da cadeia Kelvin. Estes valores geraram as curvas de fluência e retração apresentadas nas Figuras 104 e 105, nas quais também se encontram as curvas medidas experimentalmente por Gilbert e Bradford (1992).

Tabela 29: Parâmetro da cadeia Kelvin para as vigas de vão simples B1, B2, B3 e B4

Cadeia Kelvin (N=5)	
$E_1$ : 11,46	$\tau_1$ : 0,1
$E_2$ : 10,16	$\tau_2$ : 1
$E_3$ : 5,51	$\tau_3$ : 10
$E_4$ : 2,38	$\tau_4$ : 100
$E_5$ : 22,05	$\tau_5$ : 1000

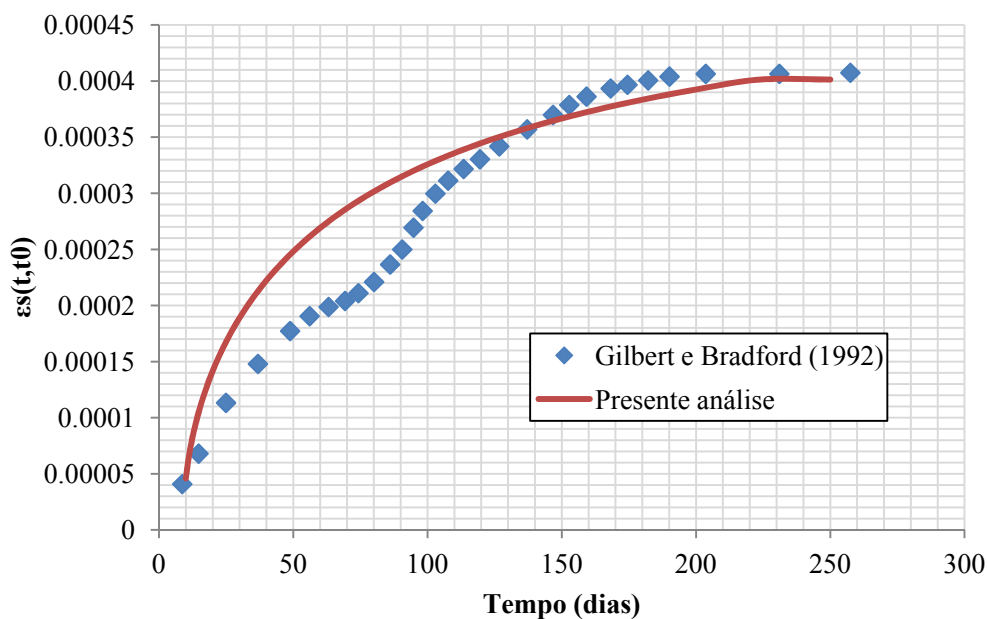


Figura 104: Curva de deformação por retração das vigas simples B1, B2, B3 e B4

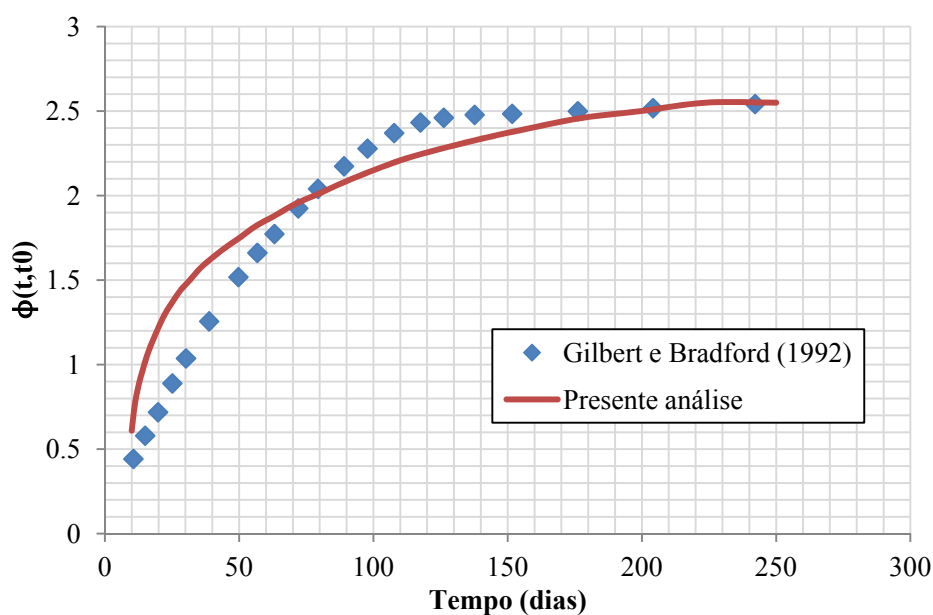


Figura 105: Curva do coeficiente de fluência das vigas simples B1, B2, B3 e B4

Na Figura 106 encontram-se os resultados obtidos experimentalmente por Gilbert e Bradford (1992), assim como os obtidos pela presente análise. As respostas obtidas para as vigas B1 e B3, que suportam além de seu peso próprio uma sobrecarga, possuem uma boa concordância com os resultados experimentais, sendo que a viga B3 apresenta um maior deslocamento devido ao seu menor número de conectores, o que confere menor rigidez à estrutura. Apesar do deslocamento no final da análise atingir um valor muito próximo ao experimental nota-se que nos primeiros dias da análise o modelo proposto obtém um deslocamento superior ao experimental. Isso pode ter ocorrido devido à incerteza do dia de aplicação da primeira carga na estrutura, pois no trabalho original esse dado não está claro. Os

resultados das vigas que suportam apenas seu peso próprio, B2 e B4, apresentam uma diferença considerável em relação aos dados experimentais.

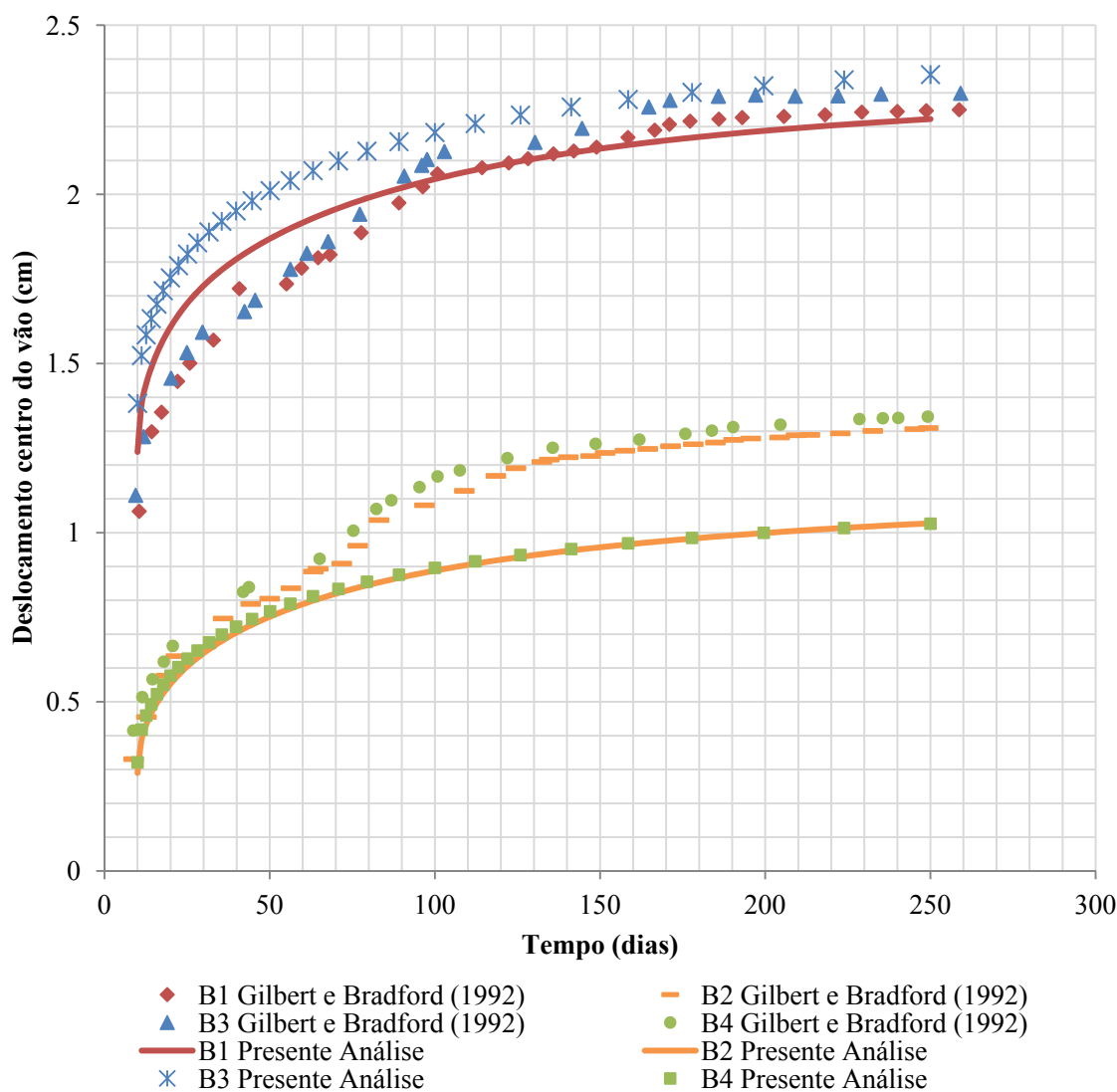


Figura 106: Deslocamento no centro do vão para as vigas B1, B2, B3 e B4

O menor deslocamento obtido para as vigas submetidas apenas a seu peso próprio também foi encontrado nos trabalhos de Jurkiewicz, Buzon e Sieffert (2005), Wang et al. (2011) e Giussani et al. (2010) que também investigaram a evolução dos deslocamentos com o tempo para essas quatro estruturas. Jurkiewicz, Buzon e Sieffert (2005) empregaram um modelo teórico para predição do comportamento diferido de vigas mistas de aço e concreto, considerando o deslocamento relativo dos conectores. Os efeitos de fluência e retração foram calculados empregando uma formulação incremental, considerando a viscoelasticidade linear em cada passo de tempo. O modelo do CEB-FIP90 foi utilizado para os cálculos dos coeficientes de fluência e deformação por retração do concreto. A armadura da laje de concreto foi desconsiderada, bem como a fissuração do concreto. Wang et al. (2011)

empregaram modelo analítico para o cálculo de estruturas de vigas mistas em análises de curta e longa duração. Com o emprego de equações diferenciais que governam o problema, uma solução fechada é adotada considerando o deslocamento relativo dos conectores. Os autores desconsideraram a armadura da laje de concreto e também a fissuração. O modelo empregado para a fluência e retração foi o do CEB-FIP90. Giussani et al. (2010) também empregaram um modelo analítico para analisar a resposta de longa duração de vigas mistas. Novamente o modelo do CEB-FIP90 foi empregado para quantificar os coeficientes necessários para as análises. O deslocamento relativo dos conectores de cisalhamento foi considerado nas análises.

Os resultados encontrados no presente trabalho são comparados com os obtidos por estes referidos autores. Na Figura 107 são apresentados os resultados das vigas B1 e B2 que possuem maior número de conectores e na Figura 108 os resultados das vigas B3 e B4 que possuem menos conectores. De acordo com Jurkiewicz, Buzon e Sieffert (2005) o comportamento diferido destas duas estruturas, por suportarem apenas carga de seu próprio peso, são devido principalmente ao efeito de retração; e esta diferença na resposta pode ser consequência da função de retração adotada.

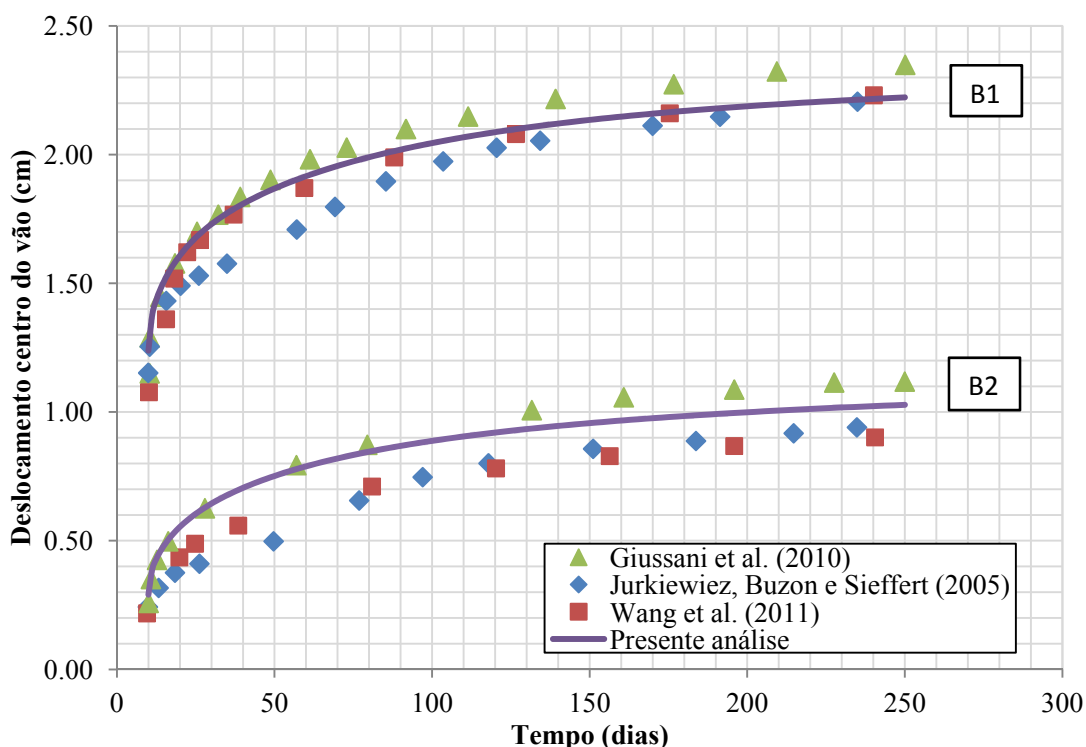


Figura 107: Comparação dos deslocamentos das vigas B1 e B2 com vários autores



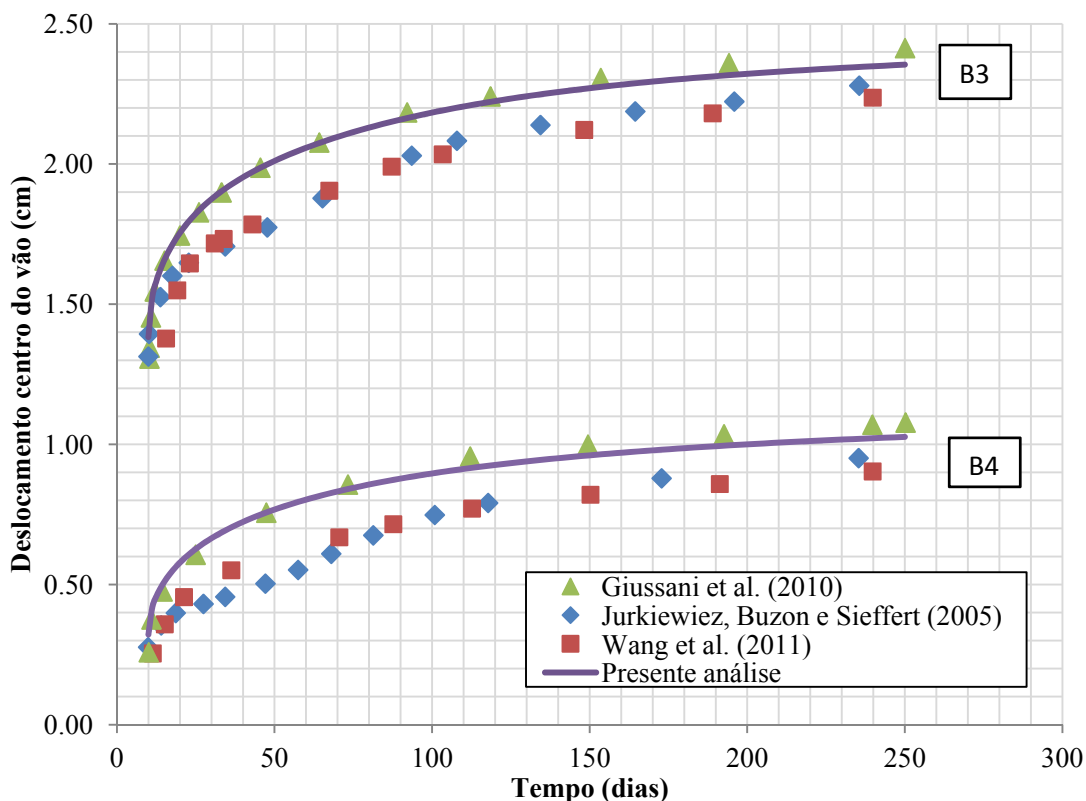


Figura 108: Comparação dos deslocamentos das vigas B3 e B4 com vários autores

Na Figura 109 encontra-se uma imagem do pós-processamento dos dados de deslocamento para a estrutura B1. A primeira refere-se ao tempo de 10 dias, onde ocorre a aplicação da carga na estrutura. Já a segunda corresponde ao final da análise aos 250 dias. O deslocamento relativo dos conectores aos 10 dias possui sinal negativo na extremidade da viga mista e com a passagem do tempo, e os efeitos de longa duração agindo na laje de concreto, a direção desse deslocamento relativo torna-se positivo. Para os extremos, o valor desse deslocamento relativo foi de 0,03mm para a carga instantânea e de 0,13mm no final dos 250 dias. As mesmas considerações podem ser feitas para a viga B2 (Figura 110), porém a sua deformada é menos intensa devido à estrutura estar submetida somente ao seu peso próprio. No extremo, o deslocamento relativo foi de 0,007mm para 10 dias e 0,05mm para 250 dias.

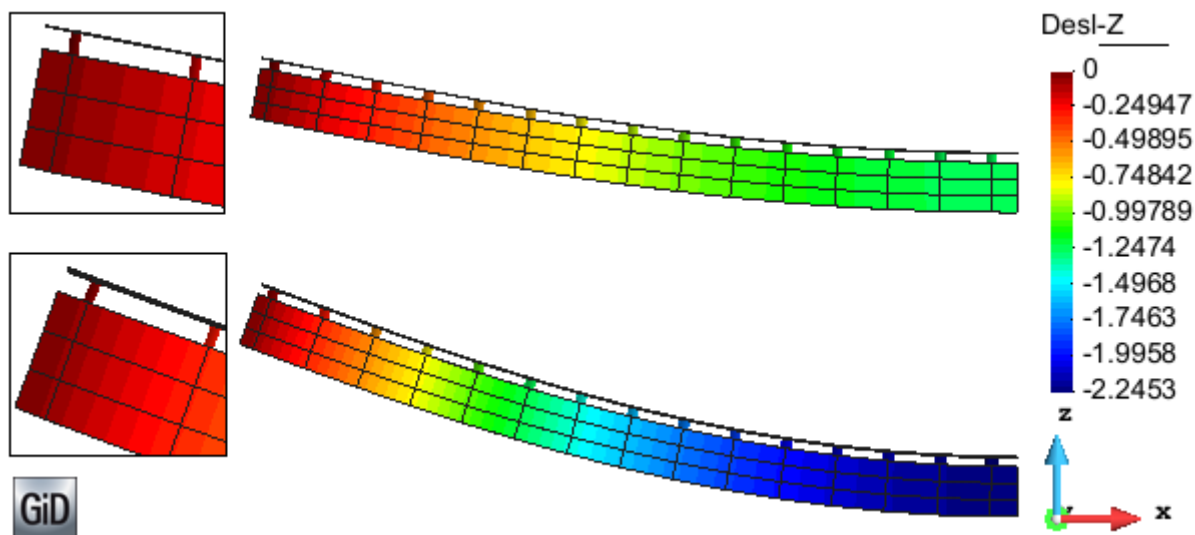


Figura 109: Deslocamento (cm), deformada e detalhe dos conectores da viga B1 aos 10 e 250 dias

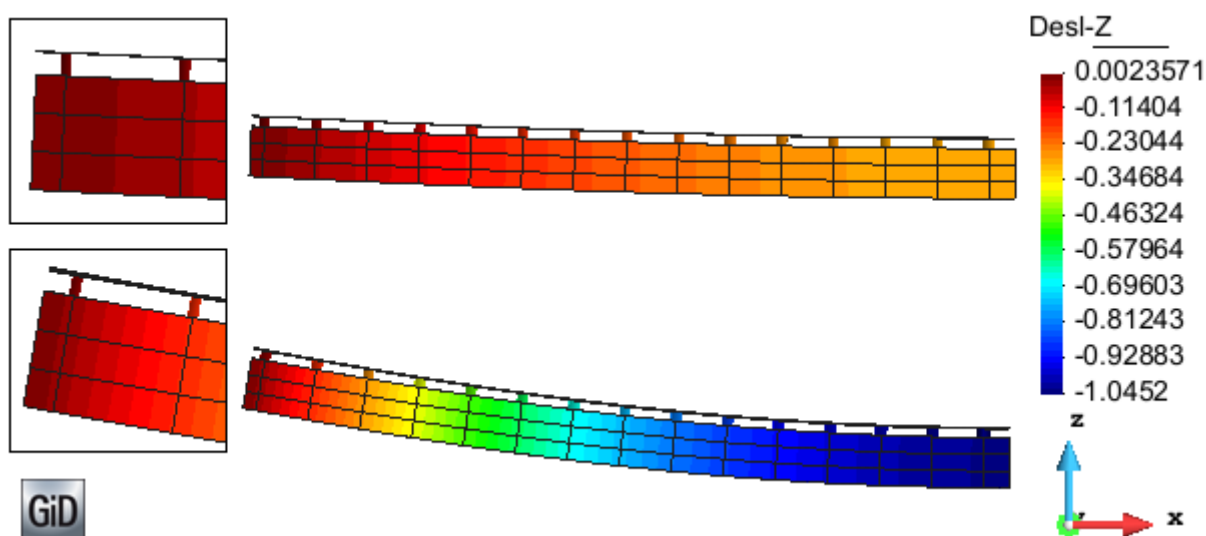


Figura 110: Deslocamento (cm), deformada e detalhe dos conectores da viga B2 aos 10 e 250 dias

Os passos de tempo empregados nas análises encontram-se no Apêndice C. Os tempos de processamento podem ser visualizados na Tabela 30.

Tabela 30: Tempo de análise e número de passos de tempo da viga mista de vão simples B1, B2, B3 e B4

	B1	B2	B3	B4
Tempo (minutos)	4,45	4,46	7,86	5,56
Número de passos de tempo	29	29	29	29

### 5.2.7 Viga mista contínua

Algumas vigas mistas com dois vãos também foram testadas experimentalmente por Gilbert e Bradford (1995). Os testes nestas estruturas duraram um período de 340 dias. Duas

destas vigas, denominadas B1 e B2, serão aqui estudadas. As mesmas possuem dois vãos de 580cm cada um e são idênticas, exceto no que diz respeito ao carregamento utilizado. A primeira viga (B1), foi submetida ao peso próprio de 1,92kN/m, já a segunda viga (B2) sustentou além de seu peso próprio uma sobrecarga de 4,75kN/m. A carga de peso próprio foi aplicada como carga de pressão em toda a superfície da laje de concreto. A sobrecarga da viga B2 foi aplicada ao longo do seu comprimento como carga de pressão, numa largura central de 60,65mm. As propriedades dos materiais empregados encontram-se na Tabela 31. As dimensões das estruturas e a disposição da armadura encontram-se na Figura 111.

Tabela 31: Propriedades dos materiais das vigas mistas contínuas B1 e B2

Material	Propriedades			Unidades
Aço Estrutural	Módulo de Elasticidade	$E =$	200000	MPa
	Tensão de Escoamento	$f_y =$	280	MPa
	Tensão Última	$f_u =$	350	MPa
	Poisson	$\nu =$	0,3	
	Deformação Última	$\epsilon_u =$	25	%
Aço de reforço	Módulo de Elasticidade	$E =$	200000	MPa
	Tensão de Escoamento	$f_y =$	280	MPa
	Tensão Última	$f_u =$	350	MPa
	Poisson	$\nu =$	0,3	
	Deformação Última	$\epsilon_u =$	25	%
Concreto	Resistência à Compressão	$f_{cm} =$	27	MPa
	Módulo de Elasticidade	$E_3$ ou $E_7 =$	22000	MPa
	Resistência à Tração	$f_t =$	3	MPa
	Poisson	$\nu =$	0,2	
	Deformação Última	$\epsilon_u =$	1	%
Conector de cisalhamento	Espaçamento	$s =$	145	mm
	Diâmetro x Altura	$d \times h =$	9 x 50	mm
	Número de Linhas	$n =$	2	
	Constante 1	$a =$	32	kN
	Constante 2	$b =$	4,75	mm <sup>-1</sup>

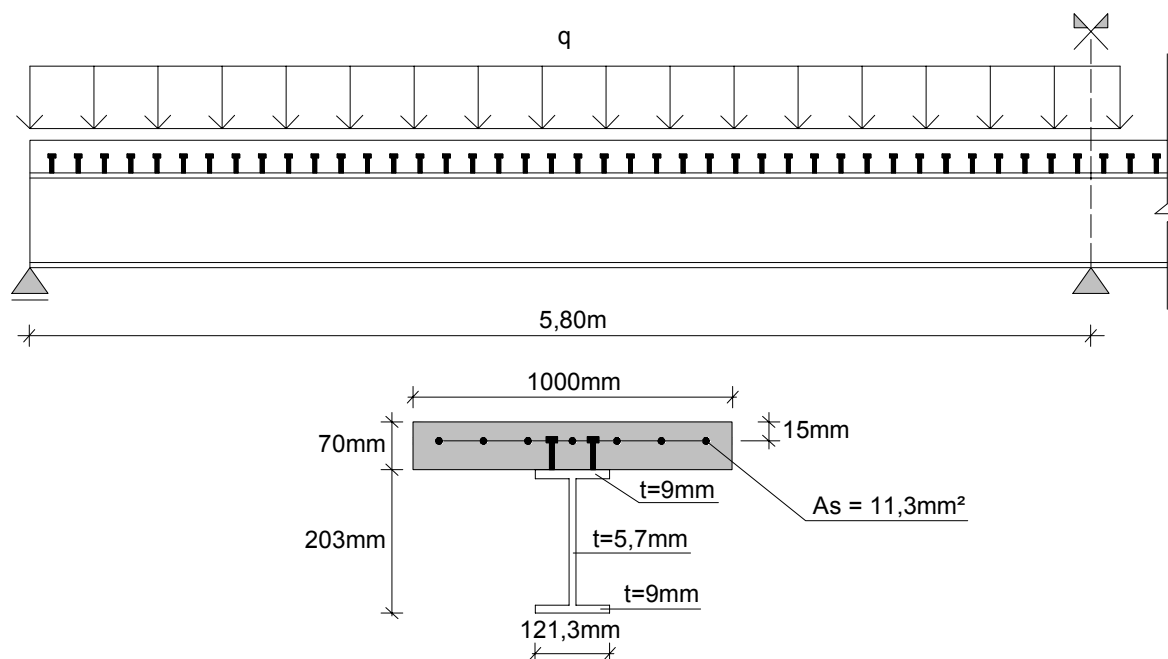


Figura 111: Geometria e detalhes da seção das vigas mistas contínuas B1 e B2

De acordo com Gilbert e Bradford (1995), para o período final, o coeficiente de fluência medido foi de 1,68, enquanto que a deformação por retração foi de 0,00052. A idade de carregamento das estruturas, bem como o tempo de cura não foram mencionados pelos autores. Sendo assim, seguindo o estudo de Chaudhary, Pendharkar e Nagpal (2007) foram consideradas duas idades de carregamento, 3 e 7 dias. Os parâmetros obtidos para a cadeia de Kelvin empregada na análise de fluência considerando as idades de aplicação da carga de 3 e 7 dias encontram-se na Tabela 32.

Tabela 32: Parâmetro da cadeia Kelvin para as vigas contínuas de dois vãos B1 e B2

Cadeia Kelvin (N=5) $t_0=3$ dias		Cadeia Kelvin (N=5) $t_0=7$ dias	
$E_1$ : 23,47	$\tau_1$ : 0,03	$E_1$ : 18,21	$\tau_1$ : 0,07
$E_2$ : 24,03	$\tau_2$ : 0,3	$E_2$ : 18,62	$\tau_2$ : 0,7
$E_3$ : 11,52	$\tau_3$ : 3	$E_3$ : 8,94	$\tau_3$ : 7
$E_4$ : 6,14	$\tau_4$ : 30	$E_4$ : 4,64	$\tau_4$ : 70
$E_5$ : 2,40	$\tau_5$ : 300	$E_5$ : 2,16	$\tau_5$ : 700

No trabalho original, nenhuma informação é dada em relação aos conectores. Sendo assim, as propriedades, dimensões e arranjo empregados no presente estudo são as mesmas adotadas por Jiang, Qiu e Zhang (2009). Estes autores empregaram a mesma formulação para o tratamento dos conectores empregada no trabalho de Tamayo (2011). Devido a isso, as constantes necessárias à formulação para quantificação da rigidez ao corte desses elementos foram consideradas as mesmas adotadas por Jiang, Qiu e Zhang (2009). O deslocamento

relativo máximo adotado foi de 1,25mm. A curva de rigidez para os conectores pode ser visualizada na Figura 112. Foi empregada a formulação tangente para a rigidez dos conectores das vigas B1 e B2.

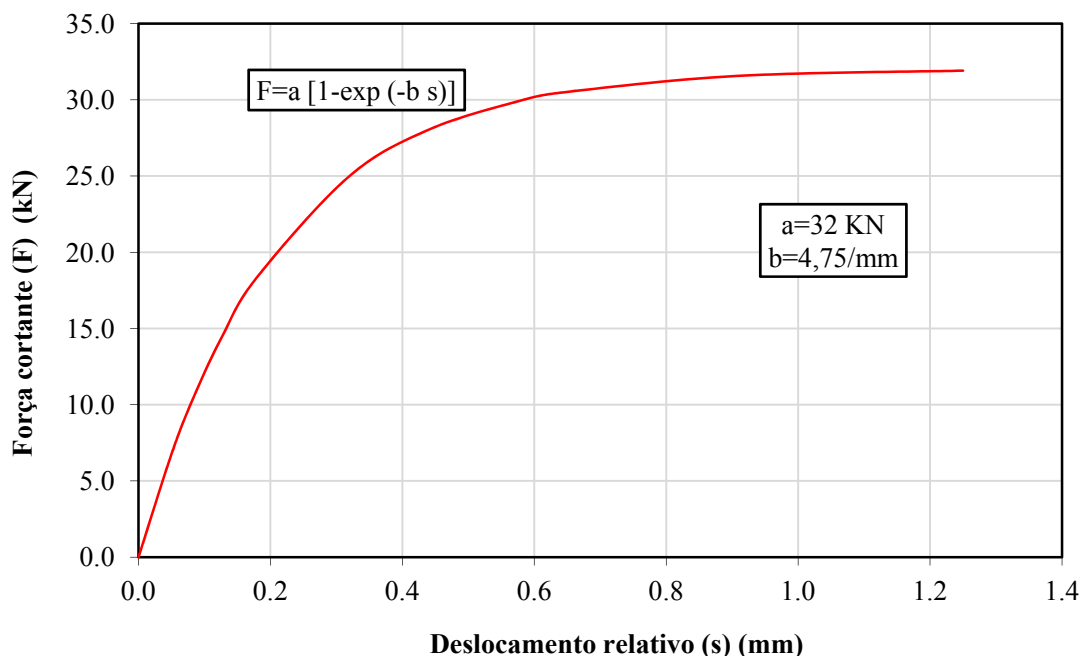


Figura 112: Rigidez dos conectores da viga contínua B1 e B2

Empregando-se a propriedade da simetria, apenas metade da estrutura foi modelada. A malha de elementos finitos apresentada na Figura 113 contém 369 elementos de casca degenerada para representar a laje de concreto, 287 elementos de casca plana para representar a viga de aço e 80 elementos de viga-coluna para representar os conectores de cisalhamento. Para a discretização da laje foram empregadas 7 camadas de concreto de mesma espessura e 1 camada de aço de espessura e orientação conforme é apresentado na Figura 114. Nesta figura encontram-se ao lado esquerdo a espessura real da laje de concreto e a posição real das camadas de aço. Do lado direito têm-se a posição e espessura normalizadas das camadas de aço, sendo a espessura normalizada compreendida num intervalo de -1 a +1. O ângulo  $\theta = 0^\circ$  refere-se à armadura longitudinal da peça.

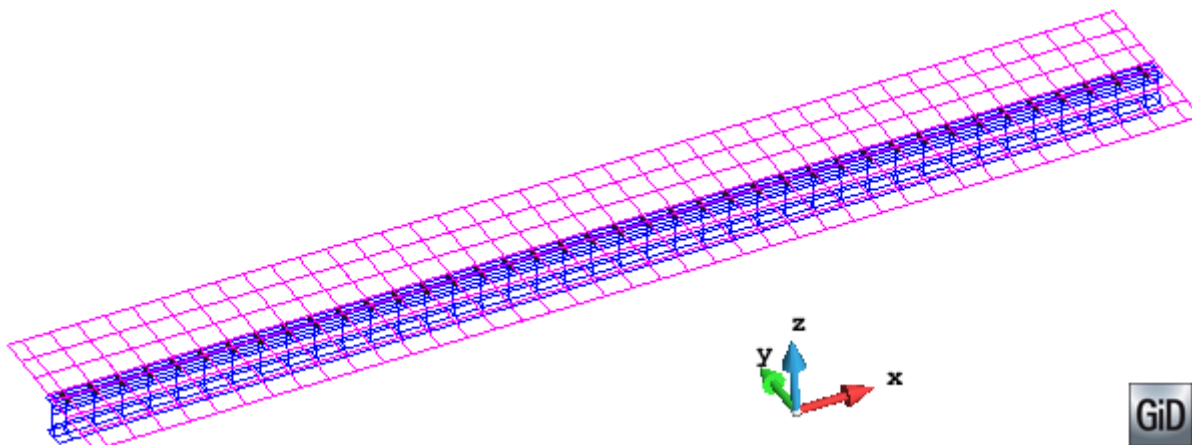


Figura 113: Malha de elementos finitos para as vigas mistas contínuas B1 e B2

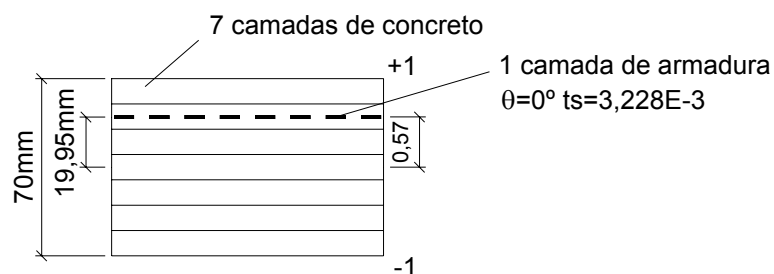


Figura 114: Camadas de aço e concreto da laje da viga mista contínua B1 e B2

Uma alteração muito pequena foi notada no coeficiente de fluência e na deformação por retração considerando a idade de aplicação da carga 3 ou 7 dias. O coeficiente de fluência e a deformação por retração para o tempo de aplicação da carga de 3 dias encontram-se nos gráficos das Figuras 115 e 116. Os valores obtidos pela presente análise (Figuras 115 e 116), correspondem aos do relatório experimental de Gilbert e Bradford (1995).

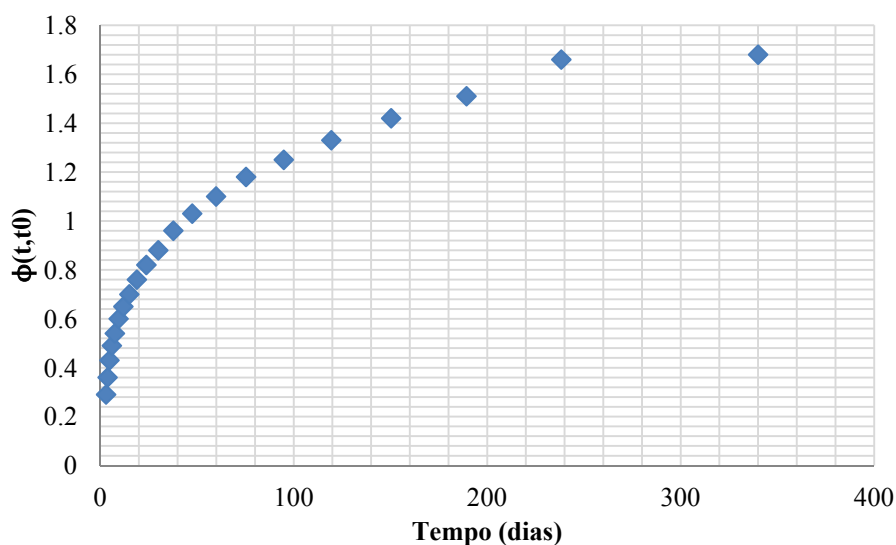


Figura 115: Coeficiente de fluência das vigas B1 e B2

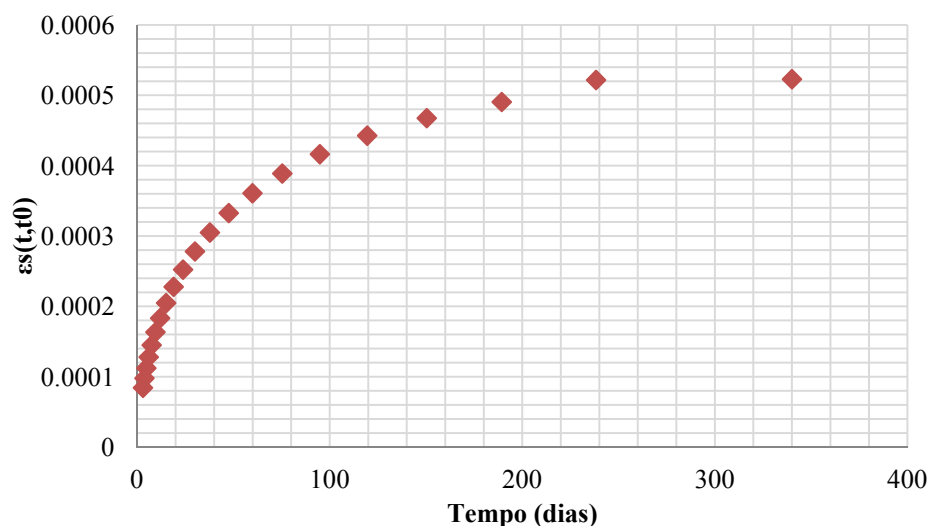


Figura 116: Deformação por retração das vigas B1 e B2

Os resultados para deslocamento no centro do vão foram comparados com os experimentais e os teóricos obtidos por Gilbert e Bradford (1995) e encontram-se na Figura 117. Obteve-se uma boa concordância nos resultados.

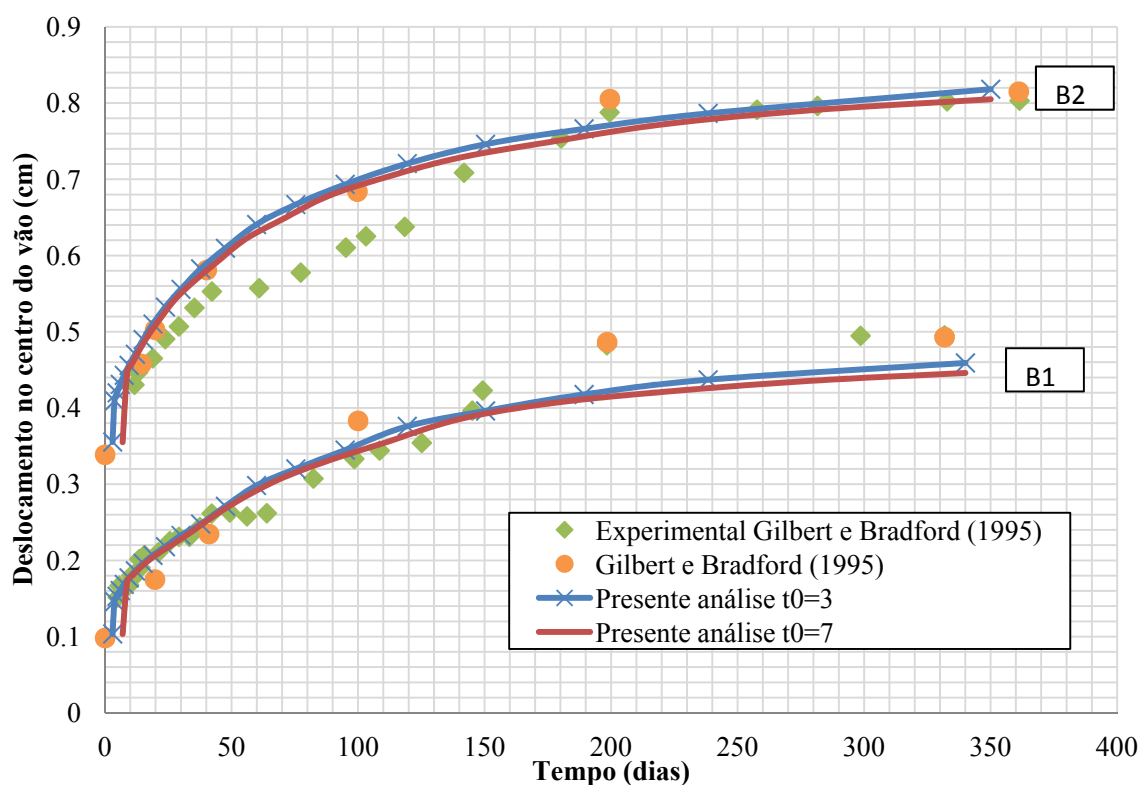


Figura 117: Deslocamento no centro do vão para das vigas B1 e B2

Os resultados teóricos de Gilbert e Bradford (1995) foram obtidos através de um modelo analítico bidimensional para verificação do comportamento ao longo do tempo de vigas mistas de aço e concreto. No modelo, a fissuração do concreto foi considerada e o

deslocamento relativo dos conectores desconsiderado. A fluência e retração foram empregadas utilizando-se o método do módulo efetivo.

De acordo com Jiang, Qiu e Zhang (2009), para as vigas mistas B1 e B2, o deslocamento diferido é causado principalmente pelo fenômeno de retração do concreto. Para comprovar essa indicação, realizou-se mais alguns testes considerando apenas o efeito da fluência agindo na estrutura. Nesta etapa da análise empregou-se a idade de aplicação de carga de 3 dias. No gráfico da Figura 118, os resultados encontrados estão plotados juntamente com os obtidos pelos autores citados. Comprovou-se a importância do efeito da retração na estrutura, sendo que o mesmo representa, após 340 dias, cerca de 95% dos deslocamentos diferidos para a viga B1 e aproximadamente 85% para a viga B2.

As análises realizadas por Jiang, Qiu e Zhang (2009) foram baseadas no método do módulo efetivo, empregando um modelo bidimensional em elementos finitos para análise dos efeitos de fluência e retração de vigas mistas de aço e concreto. Todo o processo foi realizado com um algoritmo de cálculo passo a passo. A não linearidade dos materiais, a fissuração do concreto e o deslocamento relativo dos conectores foram efeitos considerados nas análises destes autores.

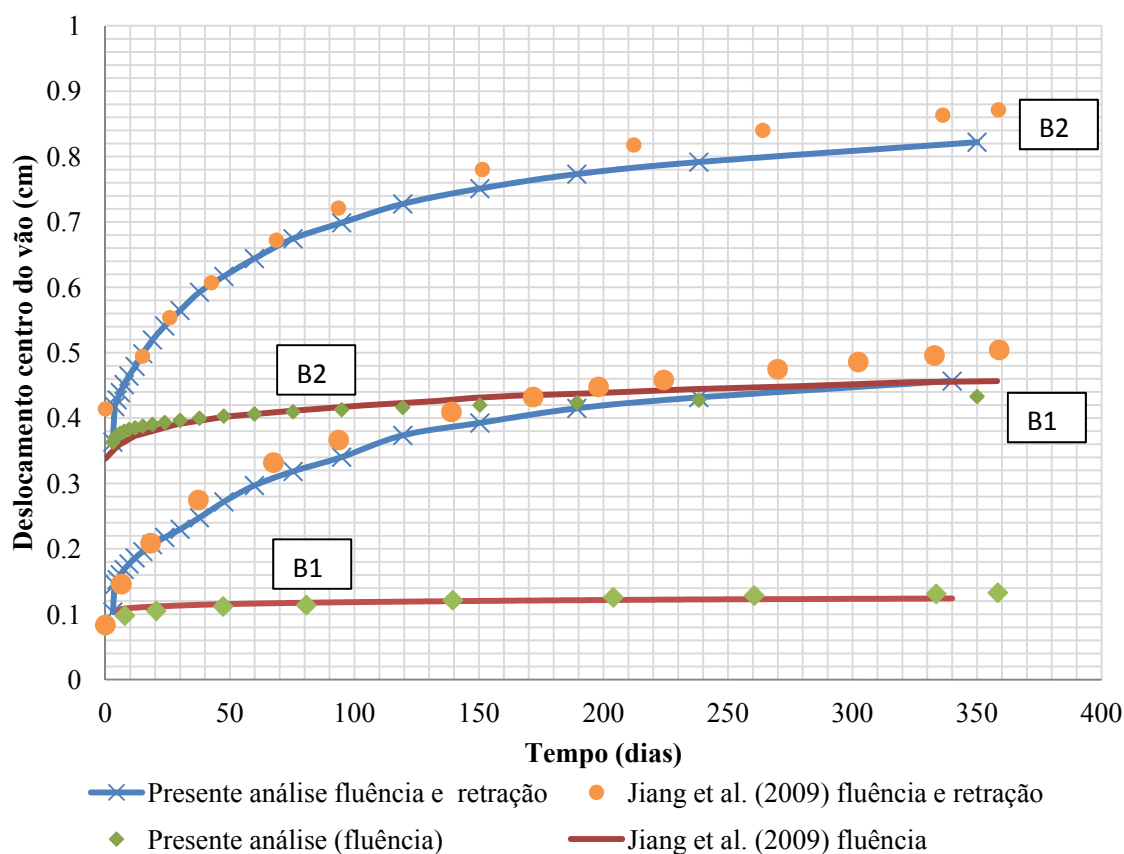


Figura 118: Comparação dos efeitos de fluência e retração para as vigas B1 e B2



Os passos de tempo empregados nas análises encontram-se no Apêndice C. Os tempos de processamento considerando o tempo de aplicação de carga de 3 dias podem ser visualizados na Tabela 33.

Tabela 33: Tempo de análise e número de passos de tempo para as vigas mistas contínuas B1 e B2

	B1	B1	B2	B2
	fluência	fluência e retração	fluência	fluência e retração
Tempo (minutos)	7,68	46,38	9,26	37,69
Número de passos de tempo	21	21	21	21

Para as próximas análises considerou-se a aplicação da carga aos 3 dias, e os efeitos da fluência e retração nas vigas B1 e B2. Na Figura 119 encontra-se a evolução dos deslocamentos na laje de concreto para a viga B1. Utilizando simetria apenas metade da viga é apresentada. Aos 3 dias apenas a carga de peso próprio é aplicada na estrutura e o deslocamento observado corresponde à análise instantânea. O aumento gradual do deslocamento para aproximadamente 38, 150 e para o tempo final de análise de 340 dias mostra-se de acordo com o esperado. Nos extremos dos desenhos, encontram-se os apoios de extremidade e central, não havendo deslocamento na direção z. Na Figura 120 encontra-se a deformada da estrutura aos 3 dias (carga instantânea) e aos 340 dias. Nesta mesma figura pode-se ver um detalhe da deformada dos conectores da extremidade da estrutura. Quando a carga de peso próprio é aplicada a direção do deslocamento relativo é negativa, tornando-se positiva ao final da análise devido à retração sofrida pela laje de concreto. Esse mesmo comportamento é relatado no trabalho de Jiang, Qiu e Zhang (2009). A magnitude do deslocamento relativo, obtido no extremo da viga, foi cerca de 0,015mm aos 3 dias e 0,26mm aos 340 dias.

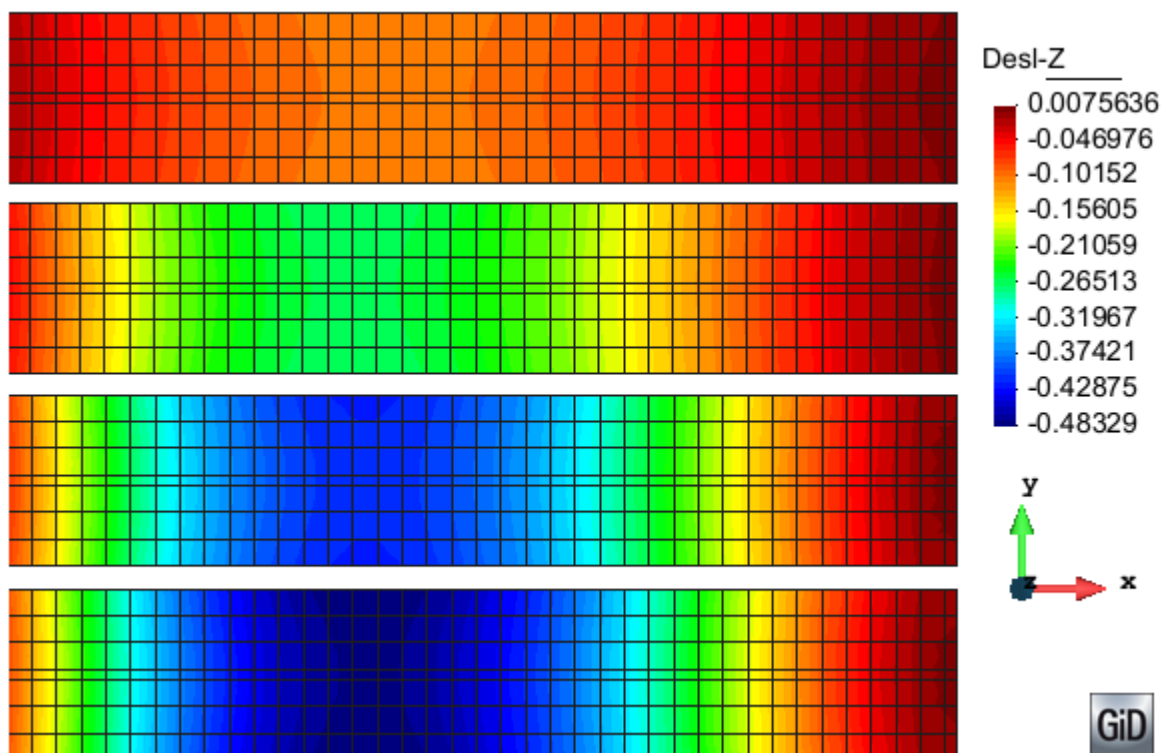


Figura 119: Deslocamentos (cm) na laje da viga mista B1 para 3, 38, 150 e 340 dias

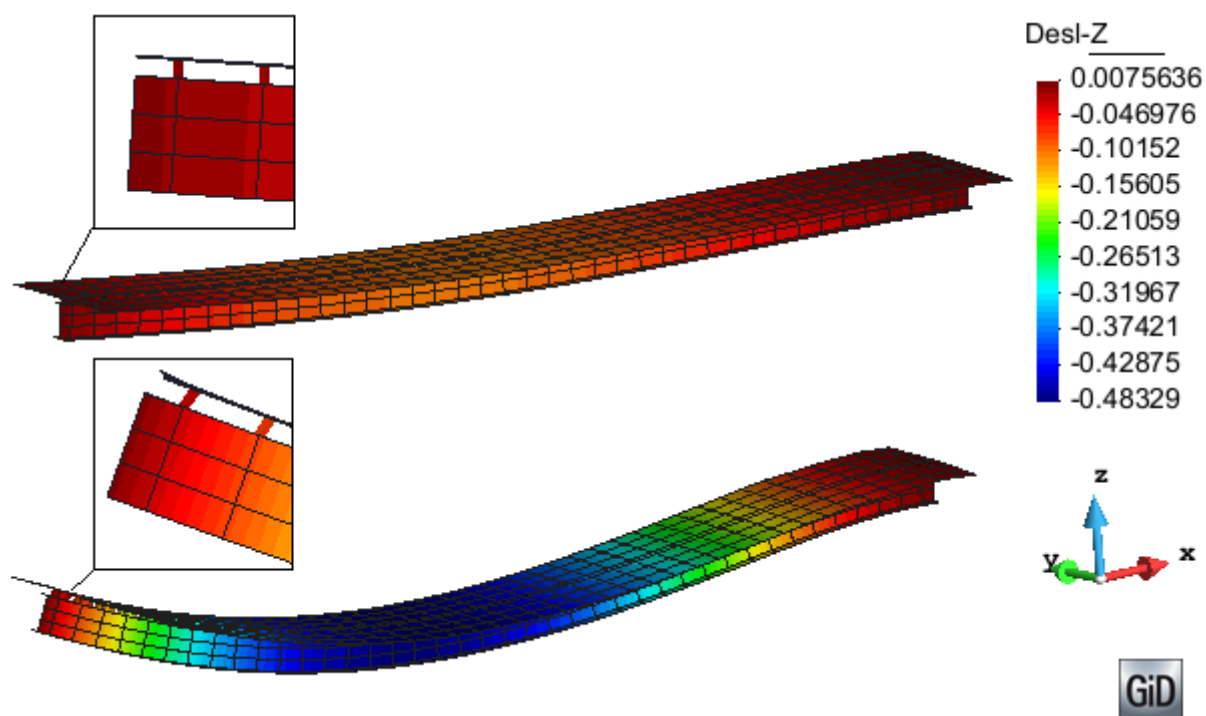


Figura 120: Deslocamentos (cm), deformada e detalhe dos conectores da viga B1 para 3 e 340 dias.

Já na Figura 121 encontra-se a evolução da fissuração na camada superior da laje de concreto. A carga de peso próprio aplicada aos 3 dias não gerou fissuração, sendo que as primeiras fissuras começam a surgir aproximadamente aos 38 dias. Nota-se que devido à

baixa carga ocorre pouca fissuração, concentrando-se próxima a zona do apoio central, onde o momento é negativo e as tensões de tração são suficientes para causar as fissuras.

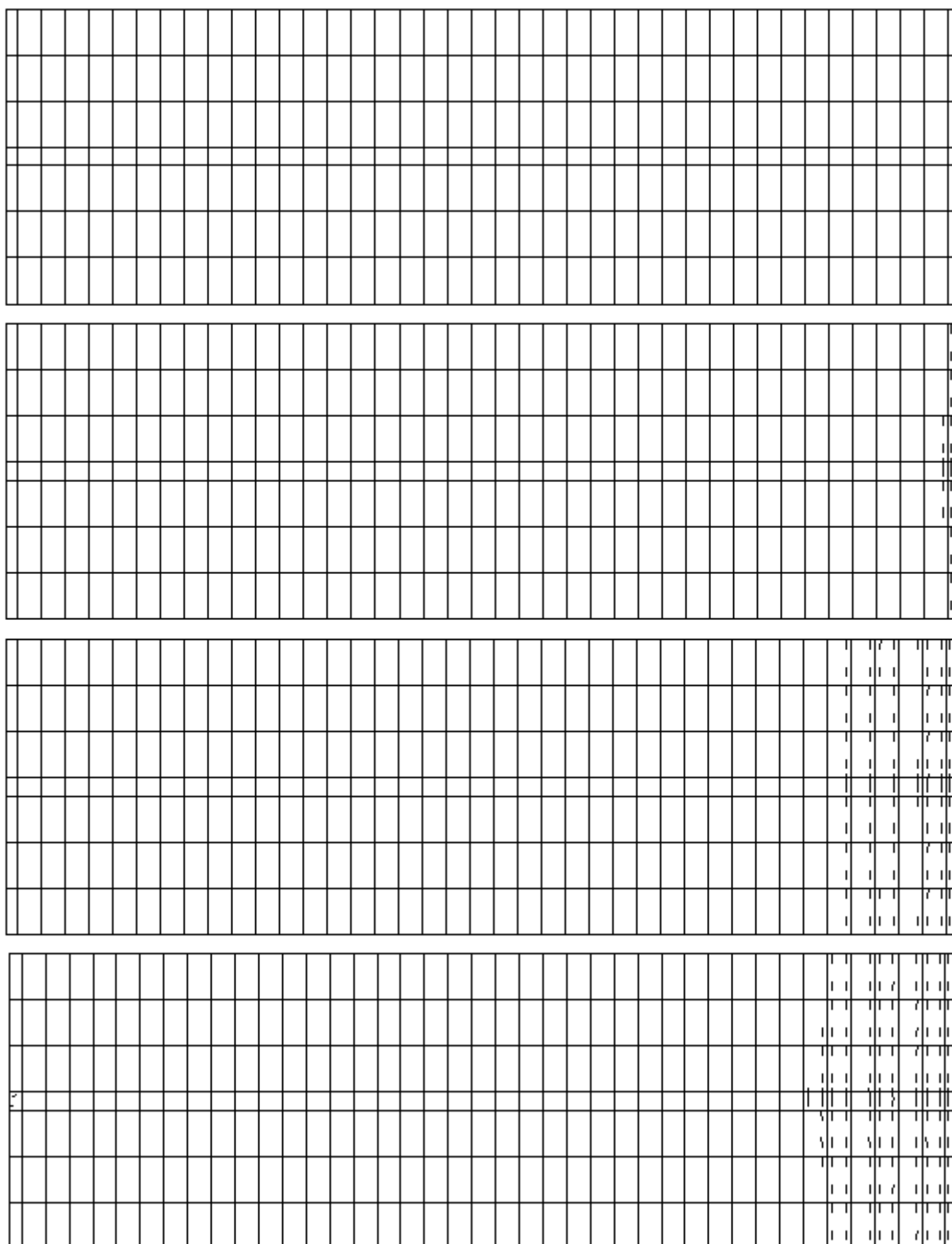


Figura 121: Fissuração na camada superior da laje B1 para 3, 38, 150 e 340 dias

As mesmas considerações são feitas para a viga B2. Nas Figuras 122 e 123 encontram-se a evolução dos deslocamentos verticais e deslocamento relativo dos conectores para os

---

Análise numérica de vigas mistas aço-concreto pelo método dos elementos finitos: efeitos de longa duração

mesmos tempos da viga B1. O mesmo comportamento apresentado pelos conectores na viga B1, foi obtido na viga B2. A magnitude do deslocamento relativo, obtido no extremo da viga, foi cerca de 0,054mm aos 3 dias e 0,32mm aos 340 dias.

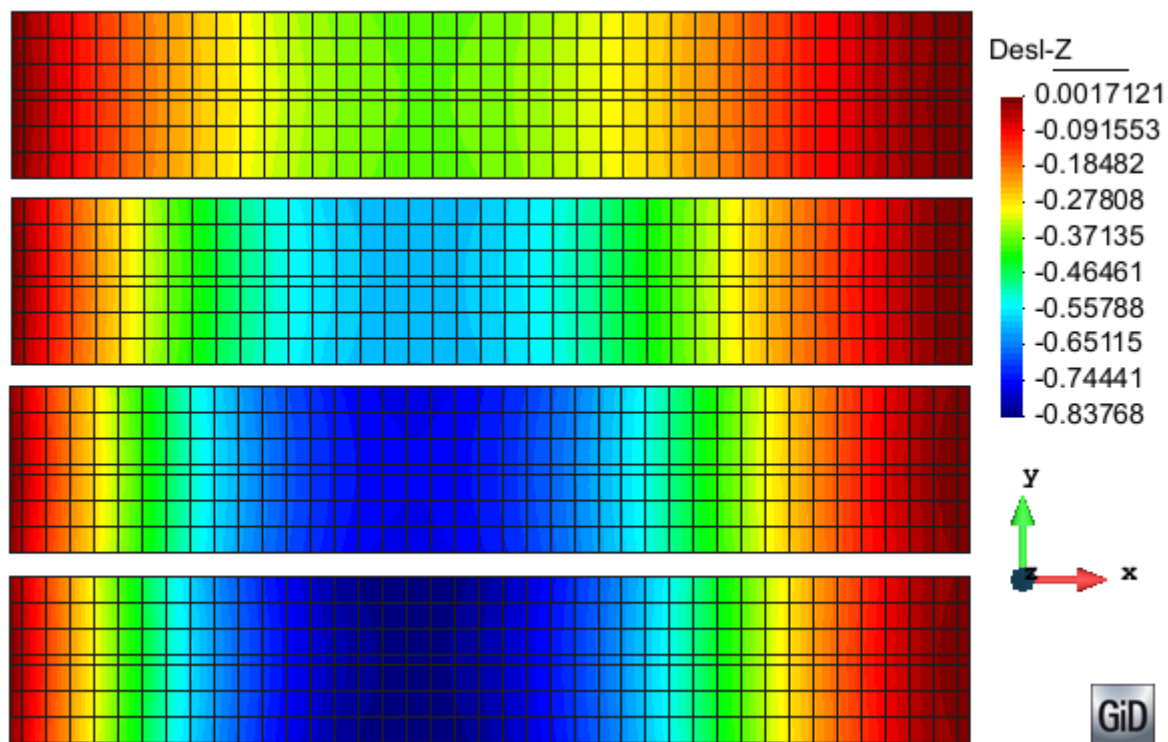


Figura 122: Deslocamentos (cm) na laje da viga mista B2 para 3, 38, 150 e 340 dias

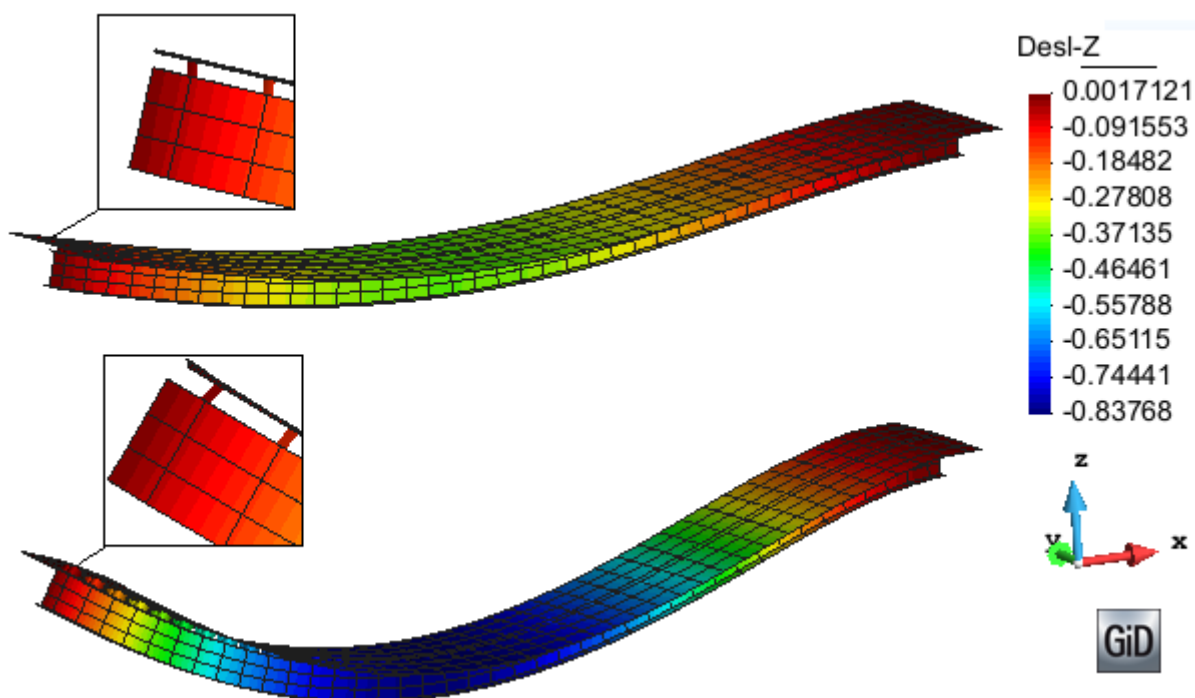


Figura 123 Deslocamentos (cm), deformada e detalhe dos conectores da viga B2 para 3 e 340 dias.

Devido à sobrecarga aplicada na viga B2, o nível de fissuração apresentado na laje de concreto foi um pouco mais elevado comparado com a viga B1. O mapeamento das fissuras pode ser observado na Figura 124 onde novamente o padrão de fissuração foi concentrado próximo à zona de momento negativo da parte superior da laje de concreto.

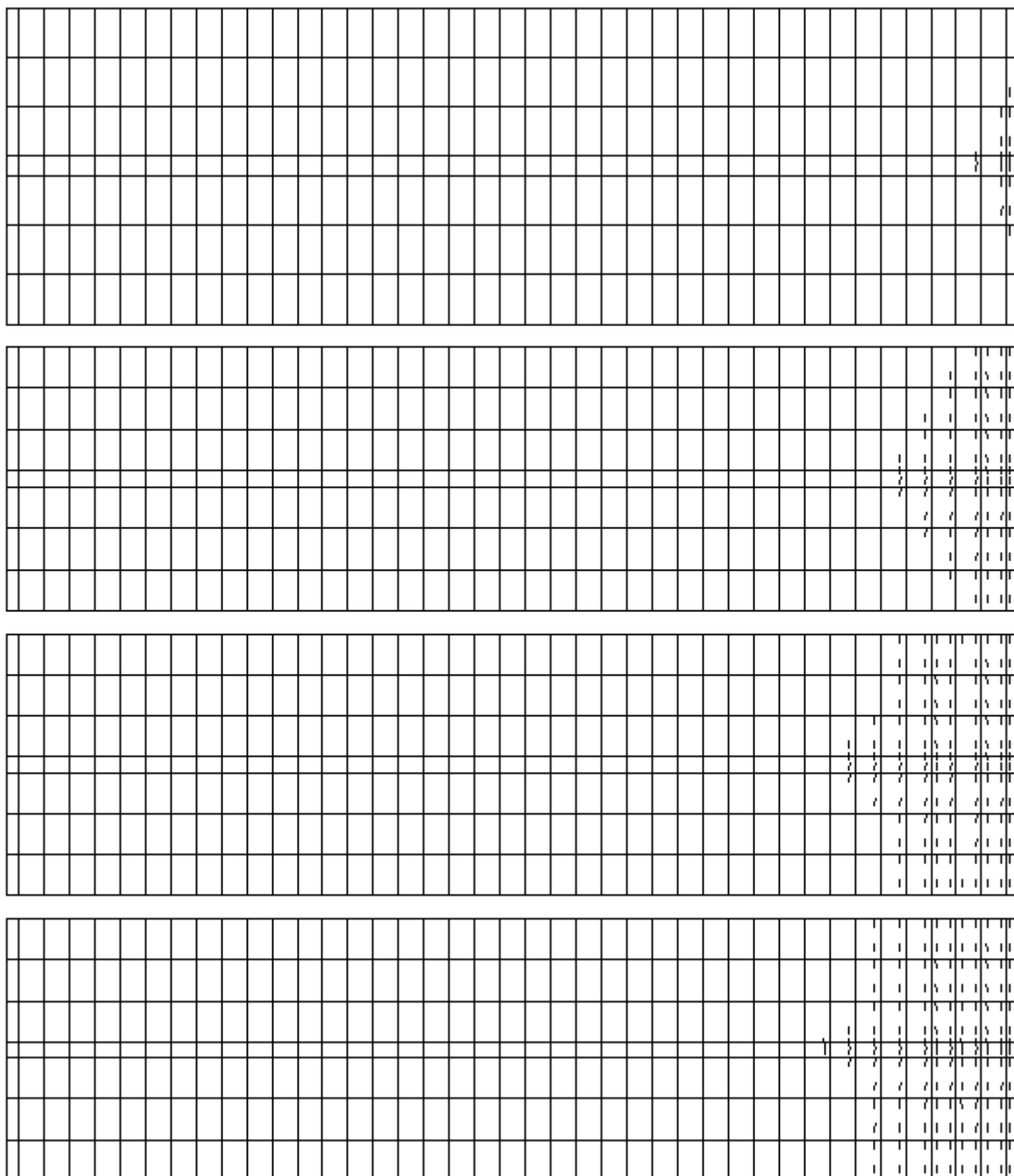


Figura 124: Fissuração na camada superior da laje B2 para 3, 38, 150 e 340 dias

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo principal do presente trabalho foi a implementação dos efeitos de longa duração em estruturas mistas, compostas por uma viga de aço ligada a uma laje de concreto armado, através de conectores de cisalhamento. Tomou-se como ponto de partida um código computacional em linguagem de programação Fortran, desenvolvido por Tamayo (2011), para análise de estruturas mistas submetidas à carga última. Este código modela numericamente o comportamento elasto-plástico deste tipo complexo de estrutura, empregando o método dos elementos finitos. Os efeitos da fluência e retração do concreto ao longo do tempo para cargas de serviço foram adicionadas ao programa, ao longo do trabalho aqui apresentado.

A Teoria da Solidificação proposta por Bazant e Prasannan (1989), mostrou-se uma ferramenta muito interessante para predição do comportamento devido à fluência do concreto. Essa ferramenta facilita a abordagem dos efeitos devido à fluência, por tratar o concreto como um material viscoelástico sem envelhecimento. Um histórico de deformações foi usado para expressar a taxa total da componente de deformação viscoelástica e a não-linearidade foi obtida modificando a atual taxa de fluência por uma função da tensão atual.

O modelo reológico para o concreto utilizando elementos de Kelvin em série apresentou bons resultados para cadeias de 4 a 6 elementos, que foram obtidos através do processo de mínimos quadrados. Os tempos de retardação empregados nas séries de Dirichlet e os parâmetros  $E\mu$  da cadeia calculados, mostraram-se adequados para as análises, pois produziram resultados bastante próximos aos experimentais.

Nas análises com mais de uma história de carregamento, como foram os exemplos dos corpos de prova submetidos às histórias de tensão variável e a laje de McNeice, o princípio da superposição mostrou-se bastante adequado, gerando uma boa concordância das deformações e deslocamentos observados.

Os modelos de fluência e retração do CEB-FIP 90 foram capazes de quantificar de maneira correta o coeficiente de fluência e a deformação por retração dos exemplos analisados, gerando por fim, bons resultados para as análises de serviço. O conhecimento dos

parâmetros empregados nesse modelo e sua correta medição (ou quantificação), são fundamentais para uma boa concordância dos resultados, sendo a sua ausência a possível causa de divergência em alguns resultados obtidos.

Em termos de pré-processamento o emprego do *software* GiD auxiliou nas etapas de criação da geometria, malha dos elementos finitos e geração de arquivo de entrada. A customização que é permitida no programa facilita a adequação das necessidades do usuário e torna a sua utilização personalizada, causando uma maior rapidez na etapa de geração do arquivo de entrada necessário ao programa em Fortran. Além disso, o pós-processamento permite a visualização integral dos resultados, auxiliando a verificação de possíveis problemas ou inadequações.

Nas análises de serviço o mapeamento da fissuração é bastante importante, pois permite uma melhor visualização das falhas localizadas na estrutura. Com o auxílio do *software* Matlab esta visualização pôde ser realizada.

Uma nova formulação para a rigidez dos conectores foi testada no presente trabalho. Uma abordagem de rigidez secante foi comparada com a abordagem tangente já implementada. Para o exemplo em que a falha na viga ocorre devido ao esmagamento do concreto, o emprego de ambas as formulações geraram resultados bastante próximos, pois para valores baixos de deslocamento relativo as rigidezes secante e tangente são bastante parecidas. Já para o exemplo onde a falha ocorre devido aos conectores, a diferença entre as formulações é mais relevante. Os resultados obtidos parecem comprovar que a rigidez tangente consegue modelar com maior precisão o comportamento dos conectores de cisalhamento.

O maior tempo computacional gasto na análise de curta duração foi de aproximadamente 85 minutos para 57 incrementos de carga e para análise de longa duração foi de 114 minutos para 149 passos de tempo. A longa duração nas análises de cargas de ruptura é devido a utilização de muitos incrementos de carga, necessários as análises que envolvem plasticidade. Foi utilizado um processador AMD Athlon X2 com velocidade de 2,7 GHz.

De maneira geral, o modelo apresentado neste trabalho permitiu obter bons resultados para análises de vigas mistas de aço e concreto, principalmente no que diz respeito às análises de longa duração, nas quais os efeitos da fluência e retração geram efeitos que devem ser consideradas.

## 6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Algumas contribuições para a evolução do estudo sobre vigas mistas de aço e concreto são comentadas a seguir.

- Implementação dos efeitos de fluência e retração na relaxação da armadura de protensão do elemento de concreto, que pode ser útil para modelar vigas de concreto, ou eventualmente vigas mistas;
- Realização de um estudo paramétrico de vigas mistas, alterando propriedades da seção, vãos, disposição dos conectores e cargas externas. Variar parâmetros como o tipo de cimento, a temperatura e a umidade relativa;
- Consideração de carga térmica, simulando por exemplo, a exposição de uma estrutura às intempéries que podem causar expansão e contração do concreto e do aço e consequentes deformações;
- Os conectores de cisalhamento ainda podem ser mais explorados, pois são elementos muito importantes nas estruturas compósitas, responsáveis pela interação entre a laje de concreto e a viga de aço. Mais exemplos devem ser estudados para verificar a melhor formulação para a rigidez destes elementos;
- A introdução de cargas móveis ao programa, pode permitir a análise de problemas reais com maior precisão, além disso, a fadiga causada nos conectores e nas vigas metálicas em razão desse tipo de carga pode ser estudada;
- Por fim um estudo de caso de uma estrutura real (por exemplo: uma ponte) aplicando o código computacional pode ser realizado.



## REFERÊNCIAS

ACI. **Prediction of Creep , Shrinkage , and Temperature Effects in Concrete Structures Reported by ACI Committee 209**. Detroit, Michigan, 1971.

ARAÚJO, J. M. **Análise de Barragens de Gravidade de Concreto Considerando a Fase Construtiva e a Interação Dinâmica Barragem-Reservatório-Fundação**, 1995. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

BAZANT, Z. P. Material models for structural creep analysis. **Mathematical Modeling of creep and shrinkage of concrete**. p.pp. 99-215, 1988. John Wiley & Sons Ltd.

BAZANT, Z.P.; PRASANNAN, S. Solidification Theory for Aging Creep. **Cement and Concrete Research**, v. 18, p. 923-932, 1988.

BAZANT, Z. P.; PRASANNAN, S. Solidification Theory for concrete creep. I: Formulation. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 115, n. 8, p. 1691-1703, 1989.

BAZANT, Z. P.; PRASANNAN, S. Solidification Theory for concrete creep. II: verification and application. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 115, n. 8, p. 1704-1725, 1990.

BAZANT, Z. P.; XI, Y. Continuous Retardation Spectrum for Solidification Theory of Concrete Creep. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 121, n. 2, p. 281-288, 1995.

BUJNAK, J.; BOUCHAIR, A. Numerical model for steel concrete composite beam with partial shear connection. v. B, p.17-24, 2005. **Proceedings of Eurosteel**, v.B,s.4.3.

CHAPMAN, J. C.; BALAKRISHNAN, S. Experiments on composite beams. **The structural engineer**, v. 42, n. 11, p. 369-383, 1964.

CHAUDHARY, S.; PENDHARKAR, U.; NAGPAL, A. K. Service load behavior of continuous composite beams with precast decks considering creep, shrinkage and cracking. **Asian Journal of Civil Engineering (Building and housing)**, v. 8, n. 4, p. 423-442, 2007.

CHEN, W. F. **Plasticity in Reinforced Concrete**. J.Ross Publishing Edition, 2007.

CHONG, K. T.; FOSTER, S. J.; GILBERT, R IAN. Time-dependent modelling of RC structures using the cracked membrane model and Solidification Theory. **Computers & Structures**, v. 86, p. 1305-1317, 2008.

CIMNE. **Manual de referência do GiD**. Disponível em: <<http://gid.cimne.upc.es/>>. Acessado em 2 fevereiro de 2012.

COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Model Code 1990**. 1990, Lausanne.

DEZI, L.; TARANTINO, A. M. Creep in composite continuous beams. I: Theoretical Treatment. **Journal of Structural Engineering**, v. 119, n. 7, p. 2095-2111, 1993.

ELIGEHAUSEN, R.; KAZIC M.; SIPPEL, T. M. **Creep and fatigue analysis of reinforced concrete structures**. International Conference on Bond in Concrete, Riga, Latvia, Oct. 15-17, 1992, Comite Euro-International du Beton, V. 2, 1992, pp. 7-49 - 7-58.

FIGUEIRAS, J. A. **Ultimate Load Analysis of Anisotropic and Reinforced Concrete Plates and Shells**, PhD. Thesis, University of Wales, 1983.

FIGUEIRAS, J. A.; PÓVOAS, R. H. C. F. Modelling of prestress in non-linear analysis of concrete structures. **Computers & Structures**, v. 53, n. 1, p. 173-187, 1994.

FOSTER, S.J, MARTI, P. FE modelling of RC membranes using the CMM formulation. In: Mang HA, Rammerstorfer FG, Eberhardsteiner J, editors. **Proceedings of the fifth world congress on computational mechanics (WCCM V)**, July 7–12, Vienna, Austria, Vienna University of Technology; 2002.

GILBERT, R. I. **Time Effects in Concrete Structures**. New York NY: Elsevier Science Publishers, 1988.

GILBERT, R. I.; BRADFORD, M. A. Time-dependent behavior of continuous composite beams at service loads. **Journal of Structural Engineering**, v. 121, n. 2, p. 319-327, 1995.

GILBERT, R. I.; BRADFORD, M. A. Composite beams with partial interaction under sustained loads. **Journal of Structural Engineering**, Vol. 118, No. 7, p. 1871-1883, 1992.

GIUSSANI, F.; PH, D.; MOLA, F.; ASCE, M. Displacement Method for the Long-Term Analysis of Steel-Concrete Beams with Flexible Connection. **Journal of Structural Engineering**, v. 136, n. March, p. 265-274, 2010.

GOBETTI, L. C. W.; CAMPAGNOLO, J. L.; CAMPOS FILHO, A. Análise teórico experimental de vigas de concreto armado submetidas a cargas de curta e longa duração. **Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural**, v. 2, 1983. Santiago - Chile.

GOMES, H. M. **Análise da confiabilidade de estruturas de concreto armado usando o método dos elementos finitos e processos de simulação**, 1997. Dissertação de Mestrado. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

GUO, T.; SAUSE, R.; FRANGOPOL, D. M.; LI, A. Time-Dependent Reliability of PSC Box-Girder Bridge Considering Creep, Shrinkage and Corrosion. **Journal of Bridge Engineering**, v. 16, n. 1, p. 29-43, 2011.

JACCOUD, J. P.; FAVRE, R. Flèche des structures en béton armé - Vérification expérimentale d'une méthode de calcul. **Annales de l'institut technique du bâtiment et des travaux publics**. p.21-66, 1982. Lausanne, Suisse.

JIANG, M.; QIU, W.; ZHANG, Z. Time-dependent analysis of steel-concrete composite beams. **2009 International Conference on Engineering Computation**. p.8-11, 2009. Ieee.

JURKIEWIEZ, B.; BUZON, S.; SIEFFERT, J. G. **Incremental viscoelastic analysis of composite beams with partial interaction**. **Computers & Structures**, v. 83, n. 21-22, p. 1780-1791, 2005.

KABIR, A. F. **Nonlinear analysis of reinforced concrete panels, slabs and shells for time dependent effects**, 1976. University of California. Berkeley, California.

KABIR, A. F.; SCORDELIS, A. C. Analysis of RC shells for time dependent effects. **Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures**, v. 20-1, n. 69, p. 11, 1979. Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures.

KOTINDA, T. I. **Modelagem numérica de vigas mistas aço-concreto simplesmente apoiadas: ênfase ao estudo da interface laje-viga**, 2006. Dissertação de mestrado. Departamento de Engenharia de Estruturas. EESC-USP.

KUPFER, H. ; HILSDORF, H. K. ; RUSCH, H. Behaviour of Concrete under Biaxial Stresses. **Proc. Am. Concr. Inst.**, Vol. 66, No. 8, p. 656-666, 1969.

MACORINI, L.; FRAGIACOMO, M.; AMADIO, C.; IZZUDDIN, B. A. Long-term analysis of steel-concrete composite beams: FE modelling for effective width evaluation. **Engineering Structures**, v. 28, p. 1110-1121, 2006.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: Microestrutura, propriedades e materiais**. 3ed ed. São Paulo: IBRACON, 2008.

NEVILLE, A. M. **Propriedades do concreto**. São Paulo: Pini, 1997.

OEHLERS, D. J.; BRADFORD, MARK A. **Elementary Behaviour of Composite Steel and Concrete Structural Members**. Woburn, 1999.

OVEN, V. A.; BURGESS, I. W.; PLANK, R. J.; WALI, A. A. A. An analytical model for the analysis of composite beams with partial interaction. **Computers & Structures**, v. 62, n. 3, p. 493-504, 1997.

PÓVOAS, R. H. C. DE F. **Modelos não-lineares de análise e dimensionamento de estruturas laminares de betão incluindo efeitos diferido**, 1991. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

PRATES JUNIOR, N. P. **Um modelo elasto-viscoplástico para análise de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos**, 1992. Dissertação de mestrado. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

ROSS, A. Creep of concrete under variable stress. **Journal of ACI Proceedings**, p. 739-758, 1958.

SILVA, S. J. H. **Análise de estruturas de concreto armado sujeitas à corrosão de armadura por cloretos através do método dos elementos finitos**, 2003. Dissertação de mestrado. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

SMERDA, Z.; KRISTEK, V. **Creep and Shrinkage of Concrete Elements and Structures**. Elsevier Science Ltd, 1988.

STEVENS, R. F. **Deflections of reinforced concrete beams**. Institution of Civil Engineers, Part 2, Research and Theory, 1972.

TAMAYO, J. L. P. **Análise Numérica de Vigas Mistas pelo Método dos Elementos Finitos**, 2011. Dissertação de mestrado. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

VALIPOUR H.R. ; BRADFORD M.A. **A Steel-Concrete Composite Beam Element with Material Nonlinearities and Partial Shear Interaction**. Finite Elements in Analysis and Design Design, Vol. 45, p. 966-972, 2009.

WANG, W.; DAI, J.; LI, G.; HUANG, C. **Long-Term Behavior of Prestressed Old-New Concrete Composite Beams**. Journal of Bridge Engineering, v. 16, n. 2, p. 275-285, 2011.

YAM, L. C. P.; CHAPMAN J. C. The inelastic behaviour of simply supported composite beams of steel and concrete. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, v. 41, n. 1, p. 651-683, 1968.

## APÊNDICE A – AJUSTE DE CURVAS POR MÍNIMOS QUADRADOS

O método dos mínimos quadrados pode ser generalizado para permitir o ajuste de curvas a partir de uma combinação linear de funções não lineares. Esta combinação pode ser escrita como:

$$F(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_n f_n(x) = \sum_{j=1}^n C_j f_j(x) \quad (A1.1)$$

sendo  $f_j$  funções prescritas e  $C_j$  coeficientes desconhecidos. Empregando uma regressão por mínimos quadrados a equação A1.1 é usada para fazer o ajuste de um conjunto de  $L$  pontos  $(x_L, y_L)$  minimizando o erro total dado pela soma dos quadrados dos resíduos:

$$Erro = \sum_{i=1}^L \left[ y_i - \sum_{j=1}^n C_j f_j(x_i) \right]^2 \quad (A1.2)$$

Quando a derivada parcial do Erro em relação a cada um dos coeficientes  $C_j$  é igual a zero obtém-se o mínimo valor para esses coeficientes, então:

$$\frac{\partial Erro}{\partial C_k} = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n \quad (A1.3)$$

Substituindo a Equação A1.2 em A1.3 tem-se:

$$\sum_{i=1}^L 2 \left[ y_i - \sum_{j=1}^n C_j f_j(x_i) \right] \left[ (-1) \frac{\partial}{\partial C_k} \left( \sum_{j=1}^n C_j f_j(x_i) \right) \right] = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n \quad (A1.4)$$

Como os coeficientes a serem encontrados são independentes uns dos outros:

$$\frac{\partial}{\partial C_k} \left( \sum_{j=1}^n C_j f_j(x_i) \right) = f_k(x_i) \quad (A1.5)$$

Com isso, a Equação A1.4 torna-se:

$$- \sum_{i=1}^L 2 \left[ y_i - \sum_{j=1}^n C_j f_j(x_i) \right] f_k(x_i) = 0 \quad (A1.6)$$

A última equação é escrita como:

$$\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^n C_j f_j(x_i) f_k(x_i) = \sum_{i=1}^L y_i f_k(x_i) \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n \quad (A1.7)$$

Na equação acima,  $x_i, y_i$  e  $f_k(x_i)$  são grandezas conhecidas e  $C_j$  são as incógnitas. O conjunto de equações da expressão A1.7 é um sistema de  $m$  equações lineares, em função das incógnitas  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

## APÊNDICE B – SIMULAÇÕES DOS PARÂMETROS DA CADEIA

Algumas simulações foram realizadas no que diz respeito ao ajuste da curva de fluência para uma cadeia de Kelvin de 5 elementos com a formulação empírica dada pelo CEB-FIP 90. Empregou-se espessura fictícia (h) de 545.4mm e umidade relativa (RH) de 70% (utilizados no cálculo da função  $\varphi_1(t, t_0)$ ). As seguintes expressões foram empregadas para determinar o número de pontos a serem considerados no eixo do tempo:

$$\tau_\mu = \tau_1 10^{\mu-1} \quad \mu = 1, 2, \dots, N \quad \text{sendo} \quad \tau_1 = 0,01t_0 \quad \text{e} \quad \tau_N \geq 0,5t_{\text{máx}}$$

Foram analisados os parâmetros  $t_0$  de 14 e 28 dias,  $m$  de 4 e 10, para um tempo final de 2.000 dias. Para os pontos no eixo do tempo têm-se:

$$t_{r+1} - t_0 = 10^{1/m}(t_r - t_0) \quad \text{com} \quad t_1 - t_0 = 0,1t_0$$

Os resultados obtidos para os parâmetros  $E_\mu$  encontram-se na Tabela B. 1

Tabela B. 1: Cálculo dos parâmetros  $E_\mu$  da cadeia Kelvin.

$t_0$ (dias)	14				28			
$m$	4		10		4		10	
$\mu$	$E_\mu$	$\tau_\mu$	$E_\mu$	$\tau_\mu$	$E_\mu$	$\tau_\mu$	$E_\mu$	$\tau_\mu$
1	9,32	0,14	9,35	0,14	7,25	0,28	7,28	0,28
2	10,45	1,40	10,45	1,40	8,26	2,80	9,18	2,80
3	4,52	14,0	4,50	14,0	3,44	28,0	3,45	28,0
4	2,56	140,0	2,57	140,0	2,67	280,0	2,64	280,0
5	5,40	1400,0	5,15	1400,0	12,53	2800,0	15,58	2800,0

O parâmetro  $m$  que define o número de passos por década alterou pouco os resultados. Por exemplo, para  $m = 10$  e  $t_0 = 28$  dias tem-se o gráfico na Figura B.1 da função encontrada e da função tomada como base para a aproximação.

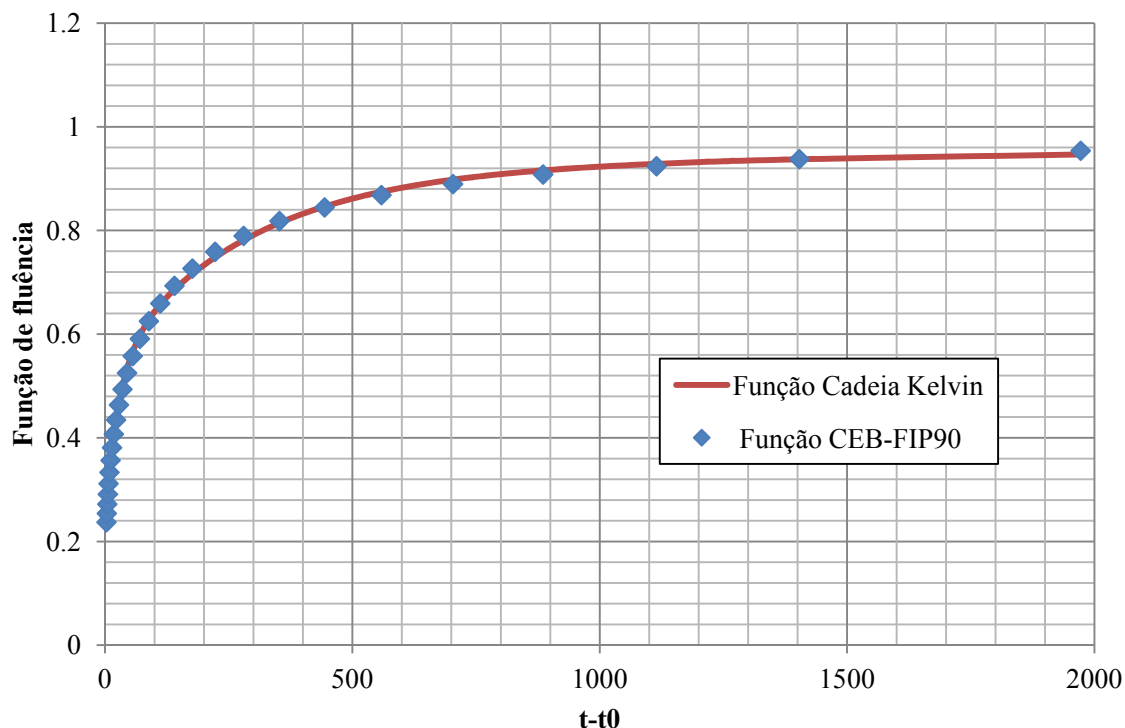


Figura B.1: Gráfico da função de aproximação dos parâmetros da cadeia de Kelvin.

A seguir o código em Fortran90 da rotina empregada para o cálculo dos parâmetros da cadeia kelvin é exposto. A formulação empregada nesta rotina encontra-se no item 3.2.4.

```

!*****
!subrotina kelvin chain
!esta rotina realiza o cálculo dos parâmetros Eu da cadeia kelvin
!*****

subroutine kelvinchain
use mgbtime
implicit none
!variáveis locais
real(8),allocatable      :: c(:,:)      !matriz [C]
real(8),allocatable      :: b(:)        !vetor {B}
real(8)                  :: bht         !coeficiente beta h CEB-FIP90
real(8)                  :: gama        !deformação da cadeia kelvin
real(8)                  :: a1,a2,aa,d4,d2 !acumuladores
integer(2)               :: ntau,ndti,k,i,j !ponteiros
!dicionário
!real8:ac                 -module mgbtime-  área da seção transversal (mm²)
!real8:uar                -module mgbtime-  perímetro da seção transversal (mm)

```



!real8:rh	-module mgbtime-	umidade relativa do ambiente (%)
!real8:hfic	-module mgbtime-	espessura fictícia
!real8:t0	-module mgbtime-	dia da primeira aplicação de carga
!integer2:nkelvin	-module mgbtime-	número de cadeias
!integer2:ndt	-module mgbtime-	número de intervalos
!real8:tau(:)	-module mgbtime-	tempo de retardação
!real8:dti(:)	-module mgbtime-	duração do carregamento
!real8:euchain(:)	-module mgbtime-	vetor com parâmetros da cadeia

!cálculo da espessura fictícia

hfic=2.0d0\*ac/uar

!cálculo do parâmetro bht

bht=(((150.0d0\*(1.0d0+(1.2d0\*(rh/100.0d0))\*\*18))\*(hfic/100.0d0))+250.0d0)\*exp((1500.d0/(273.d0+tempera))-5.12d0)

if(bht>1500.0d0) then

bht=1500.d0

end if

!calcula o número de cadeias kelvin

nkelvin=0

do

nkelvin=nkelvin+1

d4=(10.d0\*\*(nkelvin-1))\*(0.01d0\*timei)

if(d4>=(timef/2.d0)) then

exit

end if

end do

!limita o número de elementos da cadeia

if(nkelvin>=7) then

nkelvin=6

end if

!aloca vetor de tempo de retardação

allocate(tau(nkelvin))

!inicializa vetor

tau=0.d0

!calcula tempos de retardação

tau(1)=0.01d0\*timei

```

do ntau=2,nkelvin
    tau(ntau)=(10.0d0**(ntau-1))*tau(1)
end do
!calcula o número de intervalos ndt
ndt=0
d2=timei*0.1d0
do
    ndt=ndt+1
    d2=(10**(1.d0/ndec))*d2
    if(d2>=timef-timei) then
        exit
    end if
end do
!aloca vetores e matrizes
allocate(dti(ndt))
allocate(euchain(nkelvin))
allocate(c(nkelvin,nkelvin))
allocate(b(nkelvin))
!inicializa variáveis
euchain=0.d0
dti=0.d0
c=0.0d0
b=0.0d0
!calcula passos de tempo
dti(1)=timei*0.1d0
do ndti=2,ndt
    dti(ndti)=(10.d0**(1.d0/ndec))*dti(ndti-1)
end do
dti(ndt)=timef-timei
!calcula matriz [C]
do i=1,nkelvin
    do j=1,nkelvin
        do k=1,ndt
            a1=1.0d0-exp(-dti(k)/tau(i))
            a2=1.0d0-exp(-dti(k)/tau(j))

```

```

                aa=a1*a2
                c(i,j)=c(i,j)+aa
            end do
        end do
    end do
!calcula vetor {B}
do i=1,nkelvin
    do k=1,ndt
        a1=1.0d0-exp(-dti(k)/tau(i))
        a2=(dti(k)/(bht+dti(k)))**0.3d0
        aa=a1*a2
        b(i)=b(i)+aa
    end do
end do
!soluciona sistema
call gauss(c,b,nkelvin)
!parâmetros Eu da cadeia
euchain=1.d0/b
!saída de dados
write(*,*)
write(*,*) '*****DIRICHLET SERIES*****'
write(*,*)
write(*,*)
write(*,*) 'HFIC=', hfic
write(*,*) 'BHT=', bht
write(*,*) 'RETARDATION TIMES='
write(*,2) tau
write(*,*) 'DTI='
write(*,2) dti
write(*,*) 'KELVIN CHAIN PARAMETERS'
write(*,2) euchain
write(*,*)
write(10,*) 'HFIC=', hfic
write(10,*) 'BHT=', bht
write(10,*) 'RETARDATION TIMES='

```

```
write(10,2) tau
write(10,*) 'DTI='
write(10,2) dti
write(10,*) 'KELVIN CHAIN PARAMETERS'
write(10,2) euchain
write(10,*)
!formato da saída de dados
1 format(1x,5e12.4)
2 format(1x,5f14.6)
3 format(e15.4)

end subroutine kelvinchain
```

## APÊNDICE C – PASSOS DE TEMPO EMPREGADOS NAS ANÁLISES

- Teste de 1 a 5

Passos em dias								
Teste 1								
14,00	18,46	24,33	32,07	42,28	55,74	73,82	97,31	128,28
14,33	18,89	24,90	32,82	43,26	57,03	75,54	99,58	131,27
14,66	19,33	25,48	33,58	44,27	58,36	77,29	101,89	134,32
15,00	19,78	26,07	34,37	45,30	60,00	79,10	104,27	140,00
15,35	20,24	26,68	35,17	46,36	61,40	80,94	106,70	
15,71	20,71	27,30	35,99	47,44	62,83	82,82	109,18	
16,07	21,19	27,93	36,82	48,54	64,29	84,75	111,73	
16,45	21,68	28,58	37,68	49,67	65,79	86,73	114,33	
16,83	22,19	29,25	38,56	50,83	67,32	88,75	116,99	
17,22	22,71	29,93	39,46	52,01	68,89	90,81	119,72	
17,62	23,23	30,63	40,38	53,23	70,49	92,93	122,50	
18,04	23,78	31,34	41,32	54,47	72,14	95,09	125,36	
Teste 2								
28,00	35,25	44,38	55,87	70,49	88,75	111,95	140,99	180,93
28,65	36,07	45,41	57,17	72,14	91,00	114,56	144,27	185,15
29,32	36,91	46,47	58,50	73,82	93,12	117,23	147,63	190,00
30,00	37,77	47,55	60,00	75,54	95,29	120,00	154,00	
30,70	38,65	48,66	61,40	77,29	97,51	122,80	157,59	
31,42	39,55	49,79	62,83	79,10	99,78	125,66	161,26	
32,15	40,47	50,95	64,29	80,94	102,10	128,58	165,01	
32,90	41,42	52,14	65,79	82,82	104,48	131,58	168,86	
33,66	42,38	53,35	67,32	84,75	106,92	134,64	172,79	
34,45	43,37	54,60	68,89	86,73	109,41	137,78	176,82	
Teste 3 e 4								
8,00	11,30	16,00	22,60	32,15	45,41	64,47	92,10	131,58
8,19	11,56	16,37	23,13	32,90	46,47	65,97	94,24	134,64
8,38	11,83	16,75	23,67	33,66	47,55	67,51	96,44	137,78
8,57	12,11	17,14	24,22	34,45	48,66	69,08	98,68	140,99
8,77	12,39	17,54	24,78	35,25	49,79	70,69	100,98	144,27
8,98	12,68	17,95	25,36	36,07	50,95	72,33	103,33	147,63
9,19	12,97	18,37	25,95	36,91	52,14	74,02	105,74	151,07
9,40	13,28	18,80	26,55	37,77	53,35	75,74	108,20	154,59
9,62	13,59	19,24	27,17	38,65	54,60	77,51	110,72	158,19
9,84	13,90	19,68	28,00	39,55	55,87	79,31	113,30	161,88
10,07	14,23	20,14	28,65	40,47	57,17	81,16	115,94	165,65
10,31	14,56	20,61	29,32	41,42	58,50	83,05	120,00	169,50
10,55	14,90	21,09	30,00	42,38	59,86	84,98	122,80	173,45

10,79	15,24	21,58	30,70	43,37	61,26	86,96	125,66	180,00
11,04	15,60	22,09	31,42	44,38	63,00	90,00	128,58	
Teste 5								
8,00	11,30	16,07	22,71	32,15	45,41	64,47	92,10	131,58
8,19	11,56	16,45	23,23	32,90	46,47	65,97	94,24	134,64
8,38	11,83	16,83	23,78	33,66	47,55	67,51	96,44	137,78
8,57	12,11	17,22	24,33	34,45	48,66	69,08	98,68	140,99
8,77	12,39	17,62	24,90	35,25	49,79	70,69	100,98	144,27
8,98	12,68	18,04	25,48	36,07	50,95	72,33	103,33	147,63
9,19	12,97	18,46	26,07	36,91	52,14	74,02	105,74	151,07
9,40	13,28	18,89	26,68	37,77	53,35	75,74	108,20	154,59
9,62	13,59	19,33	27,30	38,65	54,60	77,51	110,72	158,19
9,84	14,00	19,78	28,00	39,55	55,87	79,31	113,30	161,88
10,07	14,33	20,24	28,65	40,47	57,17	81,16	115,94	165,65
10,31	14,66	20,71	29,32	41,42	58,50	83,05	120,00	169,50
10,55	15,00	21,19	30,00	42,38	59,86	84,98	122,80	173,45
10,79	15,35	21,68	30,70	43,37	61,26	86,96	125,66	180,00
11,04	15,71	22,19	31,42	44,38	63,00	90,00	128,58	

- Viga V7/V8

Passos em dias						
70 dias	100000 dias					
18,65	18,65	100,95	546,33	2956,56	16000,00	86587,12
21,75	21,75	117,70	636,97	3447,10	18654,63	100000,00
25,36	25,36	137,23	742,65	4019,02	21749,70	
29,57	29,57	160,00	865,87	4685,83	25358,29	
34,47	34,47	186,55	1009,53	5463,28	29565,60	
40,19	40,19	217,50	1177,03	6369,71	34470,96	
46,86	46,86	253,58	1372,31	7426,54	40190,18	
54,63	54,63	295,66	1600,00	8658,71	46858,31	
63,70	63,70	344,71	1865,46	10095,32	54632,78	
74,27	74,27	401,90	2174,97	11770,28	63697,15	
86,00	86,59	468,58	2535,83	13723,13	74265,42	

- Viga k

Passos em dias				
28,00	157,46	885,44	4979,18	28000,00
37,34	209,97	1180,75	6639,85	37338,60
49,79	280,00	1574,56	8854,38	49791,82
66,40	373,39	2099,70	11807,50	66398,46
88,54	497,92	2800,00	15745,56	100000,00

118,08	663,98	3733,86	20997,04	
--------	--------	---------	----------	--

- Vigas da série C

C11									
28,00	36,49	47,55	61,97	80,75	105,23	137,14	178,71	232,89	303,50
28,32	36,91	48,10	62,68	81,69	106,45	138,73	180,78	235,59	307,01
28,65	37,34	48,66	63,41	82,63	107,69	140,33	182,88	238,32	310,57
28,98	37,77	49,22	64,14	83,59	108,93	141,96	184,99	241,08	314,17
29,32	38,21	49,79	64,89	84,56	110,19	143,60	187,14	243,87	317,80
29,66	38,65	50,37	65,64	85,54	111,47	145,26	189,30	246,69	321,48
30,00	39,10	50,95	66,40	86,53	112,76	146,95	191,50	249,55	325,21
30,35	39,55	51,54	67,17	87,53	114,07	148,65	193,71	252,44	328,97
30,70	40,01	52,14	67,95	88,54	115,39	150,37	195,96	255,36	332,78
31,06	40,47	52,74	68,73	89,57	116,72	152,11	198,22	258,32	336,63
31,42	40,94	53,35	69,53	90,61	118,08	153,87	200,52	261,31	340,53
31,78	41,42	53,97	70,33	91,66	119,44	155,65	202,84	264,34	344,48
32,15	41,89	54,60	71,15	92,72	120,83	157,46	205,19	267,40	348,46
32,52	42,38	55,23	71,97	93,79	122,22	159,28	207,57	270,49	352,50
32,90	42,87	55,87	72,80	94,88	123,64	161,12	209,97	273,63	356,58
33,28	43,37	56,51	73,65	95,97	125,07	162,99	212,40	276,79	360,71
33,66	43,87	57,17	74,50	97,09	126,52	164,88	214,86	280,00	365,00
34,05	44,38	57,83	75,36	98,21	127,98	166,79	217,35	283,24	
34,45	44,89	58,50	76,24	99,35	129,47	168,72	219,87	286,52	
34,85	45,41	59,18	77,12	100,50	130,97	170,67	222,41	289,84	
35,25	45,94	59,86	78,01	101,66	132,48	172,65	224,99	293,20	
35,66	46,47	60,56	78,91	102,84	134,02	174,65	227,59	296,59	
36,07	47,01	61,26	79,83	104,03	135,57	176,67	230,23	300,03	

C12, C13, C14 e C15									
28,00	37,77	50,95	68,73	92,72	125,07	168,72	227,59	307,01	414,15
28,32	38,21	51,54	69,53	93,79	126,52	170,67	230,23	310,57	418,95
28,65	38,65	52,14	70,33	94,88	127,98	172,65	232,89	314,17	423,80
28,98	39,10	52,74	71,15	95,97	129,47	174,65	235,59	317,80	428,70
29,32	39,55	53,35	71,97	97,09	130,97	176,67	238,32	321,48	433,67
29,66	40,01	53,97	72,80	98,21	132,48	178,71	241,08	325,21	438,69
30,00	40,47	54,60	73,65	99,35	134,02	180,78	243,87	328,97	443,77
30,35	40,94	55,23	74,50	100,50	135,57	182,88	246,69	332,78	448,91
30,70	41,42	55,87	75,36	101,66	137,14	184,99	249,55	336,63	454,11
31,06	41,89	56,51	76,24	102,84	138,73	187,14	252,44	340,53	459,37
31,42	42,38	57,17	77,12	104,03	140,33	189,30	255,36	344,48	464,68
31,78	42,87	57,83	78,01	105,23	141,96	191,50	258,32	348,46	470,07

32,15	43,37	58,50	78,91	106,45	143,60	193,71	261,31	352,50	475,51
32,52	43,87	59,18	79,83	107,69	145,26	195,96	264,34	356,58	481,01
32,90	44,38	59,86	80,75	108,93	146,95	198,22	267,40	360,71	486,58
33,28	44,89	60,56	81,69	110,19	148,65	200,52	270,49	364,89	492,22
33,66	45,41	61,26	82,63	111,47	150,37	202,84	273,63	369,11	497,92
34,05	45,94	61,97	83,59	112,76	152,11	205,19	276,79	373,39	503,68
34,45	46,47	62,68	84,56	114,07	153,87	207,57	280,00	377,71	509,52
34,85	47,01	63,41	85,54	115,39	155,65	209,97	283,24	382,08	515,42
35,25	47,55	64,14	86,53	116,72	157,46	212,40	286,52	386,51	521,38
35,66	48,10	64,89	87,53	118,08	159,28	214,86	289,84	390,98	528,00
36,07	48,66	65,64	88,54	119,44	161,12	217,35	293,20	395,51	
36,49	49,22	66,40	89,57	120,83	162,99	219,87	296,59	400,09	
36,91	49,79	67,17	90,61	122,22	164,88	222,41	300,03	404,72	
37,34	50,37	67,95	91,66	123,64	166,79	224,99	303,50	409,41	

- Laje McNeice

Passos em dias							
14,00	17,62	22,19	27,93	35,17	44,37	55,85	70,49
14,16	17,83	22,45	28,26	35,57	44,88	56,50	71,31
14,33	18,04	22,71	28,58	35,99	45,40	57,16	72,14
14,49	18,24	22,97	28,92	36,40	45,93	57,82	72,97
14,66	18,46	23,23	29,25	36,82	46,46	58,49	73,82
14,83	18,67	23,50	29,59	37,25	47,00	59,16	74,67
15,00	18,89	23,78	29,93	37,68	47,54	60,00	75,54
15,17	19,10	24,05	30,28	38,12	48,09	60,69	76,41
15,35	19,33	24,33	30,63	38,56	48,65	61,40	77,29
15,53	19,55	24,61	30,98	39,01	49,21	62,11	78,19
15,71	19,78	24,90	31,34	39,46	49,78	62,83	80,00
15,89	20,00	25,18	31,71	40,00	50,36	63,56	
16,07	20,24	25,48	32,07	40,46	50,94	64,29	
16,26	20,47	25,77	32,44	40,93	51,53	65,04	
16,45	20,71	26,07	32,82	41,41	52,13	65,79	
16,64	20,95	26,37	33,20	41,89	52,73	66,55	
16,83	21,19	26,68	33,58	42,37	53,34	67,32	
17,03	21,44	26,99	33,97	42,86	53,96	68,10	
17,22	21,68	27,30	34,37	43,36	54,58	68,89	
17,42	21,93	27,61	34,76	43,86	55,22	69,69	

- Viga mista vão simples B1, B2, B3 e B4

Passos em dias				
10,00	19,95	39,81	79,43	158,49
11,22	22,39	44,67	89,13	177,83



12,59	25,12	50,12	100,00	199,53
14,13	28,18	56,23	112,20	223,87
15,85	31,62	63,10	125,89	250,00
17,78	35,48	70,79	141,25	

- Viga mista vão duplo B1 e B2

Passos em dias			
3,00	11,94	47,55	189,29
3,78	15,04	59,86	238,30
4,75	18,93	75,36	350,00
5,99	23,83	94,87	
7,54	30,00	119,43	
9,49	37,77	150,36	