

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

MODELAGEM E INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS  
ESTRUTURADOS TIXOTRÓPICOS

por

Cleiton Elsner da Fonseca

Tese para obtenção do Título de  
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Março de 2013

MODELAGEM E INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS  
ESTRUTURADOS TIXOTRÓPICOS

por

Cleiton Elsner da Fonseca  
Mestre Engenheiro Mecânico

Tese submetido ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia Mecânica

Área de concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Frey

Co-orientador: Prof. Dr. Mônica Nacacche

Comissão de avaliação:

Prof<sup>a</sup>. Dr. Paulo Roberto de Souza Mendes/PUC-Rio

Prof<sup>a</sup>. Dr. Nilo Sérgio Medeiros Cardozo / UFRGS

Prof. Dr. Adriane Prisco Petry / UFRGS

Prof. Dr. Rogério José Marczak  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, Março 2013

## RESUMO

Fluidos Não-newtonianos estão presentes em grande quantidade na natureza e em muitas aplicações industriais. Tais fluidos apresentam uma variedade de comportamentos específicos. Dentre eles podemos citar: elasticidade, plasticidade, viscosidade variando com a taxa de deformação, tixotropia. Esta tese de doutorado apresenta um recente modelo para Fluidos Estruturados Tixotrópicos (de Souza Mendes, 2009), no qual baseasse nas tradicionais equações de balanço de momentum e massa, em uma equação constitutiva de Maxwell-b modificada e uma equação de evolução para o nível de estrutura do material. Na equação constitutiva de Maxwell-b modificada, tempo de relaxação e viscosidade estrutural são funções da estrutura do material. A equação evolutiva para o parâmetro de estrutura prevê efeitos de tixotropia, dependentes do tempo de equilíbrio do material. As equações que constituem o modelo mecânico para Fluidos Estruturados Tixotrópicos são aproximadas numericamente através do Método de Elementos Finitos de Galerkin Mínimos-quadrados (GLS). Tal método adicionou termos dependentes de malha ao método clássico de Galerkin, de forma a aumentar a estabilidade da formulação original, proporcionando compatibilizar os sub-espacos de velocidade e pressão. São investigados escoamentos *creeping flow* de Fluidos Estruturados Tixotrópicos em dois problemas clássicos de engenharia: em torno de um cilindro confinado entre duas placas e em uma expansão planar abrupta. Parâmetros relevantes ao modelo são variados em faixas pertinentes ao problema físico simulado e os resultados demonstraram uma boa capacidade de previsão.

Palavras-chave: Fluido Estruturado Tixotrópico; Fluidos Não-newtonianos; Método de Galerkin Mínimos-quadrados.

## ABSTRACT

Non-Newtonian fluids are present in large quantities in nature and in many industrial applications. Such fluids exhibit a variety of specific behaviors. Among them we can mention: elasticity, plasticity, viscosity varying with the strain rate, thixotropy, etc. This thesis presents a new model for thixotropic Structured Fluids (de Souza Mendes, 2009), in which were a basis in traditional balance equations of mass and momentum, the constitutive equation of Maxwell-type and an evolution equation for the level structure of the material. In the modified constitutive equation of Maxwell-b, relaxation time and structural viscosity are functions of material structure. The structure parameter evolutive equation provides effects of thixotropy, dependent on the equilibration time of the material. The equations which constitute the mechanical model for Structured Thixotropic fluids are approximated numerically using the Galerkin Least-squares Finite Element Method (GLS). Such a method added mesh dependent terms to the classical method of Galerkin in order to increase the stability of the original formulation, providing compatibility between sub-spaces of velocity and pressure. Are investigated Structured Thixotropic Fluids creeping flow in two classical problems in engineering: around a cylinder confined between two plates and in a planar abrupt expansion. Relevant parameters to the model are varied in pertinent ranges to physical problem simulated and the results demonstrated a good predictive capability.

Keywords: Structure Tixotropic Fluids; Non Newtonian Fluids, Galerkin Least-square Method.

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1	Propriedades de Fluidos Não-newtonianos.....	4
1.1.1	Viscosidade dependente da taxa de deformação .....	4
1.1.2	Viscosidade elongacional .....	6
1.1.3	Viscoplasticidade .....	7
1.1.4	Diferenças de tensões normais .....	9
1.1.5	Efeitos de memória do fluido .....	10
1.1.6	Instabilidades viscoelásticas .....	14
1.1.7	Tixotropia .....	11
1.2	Introdução ao método numérico: Método de Elementos Finitos .....	14
1.3	Estado da arte .....	16
1.3.1	Fluidos Tixotrópicos .....	16
1.3.2	Fluidos Elásticos .....	19
1.3.3	Fluidos Viscopoplásticos .....	20
1.4	Sinopse do trabalho .....	23
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: PRINCÍPIOS BÁSICOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO E MODELAGEM MECÂNICA</b> .....	<b>24</b>
2.1	Cinemática .....	24
2.1.1	Configuração de referência e movimento .....	24
2.1.2	Campos de Velocidade e Aceleração .....	26
2.1.3	Derivada material .....	27
2.1.4	Mudanças de referencial .....	27
2.2	Gradiente de deformação e tensores de deformação.....	32
2.2.1	Gradiente de deformação .....	32
2.2.2	Tensor Deformação de Cauchy-Green .....	33
2.2.3	Tensor Deformação Relativo .....	35
2.3	Equações de balanço .....	35
2.3.1	Conservação de Massa .....	35
2.3.2	Balanço de Momentum .....	36
2.3.3	Equações constitutivas.....	39
2.3.4	Requisitos de objetividade para Equações Constitutivas .....	39
2.3.5	Equação Constitutiva de Maxwell-b .....	44
2.3.6	Equação Constitutiva para Fluidos Estruturados Tixotrópicos .....	47
2.4	Equação de evolução para o parâmetro de estruturação .....	49
2.5	Cálculo da taxa de deformação em estado de equilíbrio .....	53
2.6	Critério de determinação da <i>yielded surface</i> .....	54
2.7	Parâmetros adimensionais do escoamento .....	56
2.8	Coefficiente de arrasto .....	59
<b>3</b>	<b>MÉTODO NUMÉRICO</b> .....	<b>60</b>
3.1	Formulação forte de elementos finitos .....	61
3.2	Formulação fraca de elementos finitos (variacional) .....	61
3.3	Método de Galerkin .....	66
3.3.1	Método de Galerkin: dificuldades do método.....	68
3.4	Método multi-campos de galerkin mínimos-quadrados .....	69

3.4.1	Parâmetros de estabilidade para os termos GLS .....	69
3.5	Problema matricial .....	72
3.6	Elemento quadrangular bi-linear .....	73
3.7	Integração numérica: quadratura gaussiana .....	72
3.7.1	Quadratura Gaussiana .....	73
3.7.2	Regra geral para Quadratura Gaussiana .....	76
3.7.3	Quadratura Gaussiana em varias dimensões .....	78
3.8	Derivadas das funções de forma e sub-rotinas .....	79
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>82</b>
4.1	Cilindro confinado entre duas placas planas .....	82
4.1.1	Descrição do problema do cilindro confinado entre duas placas planas .....	82
4.1.2	Teste de independência de malha para o problema do cilindro confinado entre duas placas planas.....	83
4.1.3	Análise de sensibilidade do problema do cilindro confinado entre duas placas planas.....	89
4.2	Expansão planar abrupta .....	107
4.2.1	Descrição do problema da expansão planar abrupta .....	107
4.2.2	Teste de independência de malha para o problema da expansão planar abrupta.....	108
4.2.3	Análise de sensibilidade do problema da expansão planar abrupta .....	112
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS .....</b>	<b>124</b>
5.1	Conclusão .....	124
5.2	Perspectivas futuras.....	126
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>129</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Escoamento cisalhante gerado por uma placa deslizando .....	5
Figura 1.2	Viscosidade de um polietileno fundido a baixa densidade e com diferentes temperaturas variando entre , $T=388-513K$ .....	6
Figura 1.3	Razão de Trouton transiente para uma solução de poliisobutileno de alto peso molecular - razão extensional $a=2s^{-1}$ .....	7
Figura 1.4	Flow Curve: (a)Newtoniano; (b) Plástico de Bingham; (c) Pseudoplástico; (d) Dilatante; (e) Pseudoplástico com limite de escoamento .....	8
Figura 1.5	Funções viscométricas a 6,8% de poliisobutileno em cetano a $24^{\circ}C$ .....	10
Figura 1.6	A <i>flow curve</i> de um fluido tixotrópico em um teste de <i>hysteresis loop</i> .....	12
Figura 1.7	Comparação entre soluções obtidas entre o método de Galerkin clássico e o método GLS: (a) campo de velocidades pelo método de Galerkin clássico; (b) campo de pressões pelo método de Galerkin clássico; (c) campo de velocidades pelo método GLS; (d) campo de pressões pelo método GLS .....	15
Figura 2.1	Sistema de referencial: (a) referencial inicial; (b) referencial final....	28
Figura 2.2	Localização de vetores: (a) em relação a um referencial fixo; (b) em relação a um referencial <sup>***</sup> ; (c) em relação a um referencial fixo após transformação .....	28
Figura 2.3	Um elemento $d\mathbf{X}$ em $\mathbf{X}$ na configuração de referência em $t=0$ mudando para $d\mathbf{x}$ em $\mathbf{x}$ no tempo $t$ .....	34
Figura 2.4	Construção de parâmetros no tetraedro com vértice no ponto $x$ .....	37
Figura 2.5	Representação do modelo constitutivo de Maxwell.....	45
Figura 2.6	Função viscosidade estrutural versus parâmetro de estruturação.....	48
Figura 2.7	Representação gráfica da viscosidade em estado de equilíbrio.....	51
Figura 2.8	Funções de Tensão cisalhante e viscosidade em estado de equilíbrio (De Souza Mendes, 2009).....	57
Figura 3.1	Domínio de elemento quadrilátero bilinear no domínio aparente e ordenação nodal .....	74
Figura 3.2	Funções de forma local ( $N_a$ ) e global ( $N_A$ ) do elemento quadrilátero bi-linear Q1 (Hughes, 1987).....	76
Figura 3.3	Locais dos pontos de integração da Quadratura Gaussiana.....	79
Figura 4.1	Descrição do problema: cilindro confinado entre duas placas planas.....	82

Figura 4.2	Perfil do parâmetro de estruturação adimensionais para as malhas M1, M2 e M3 e $\theta_0^*=4$ , $U^*=1$ , $n=0,5$ , $J=200$ e $t_{eq}^*=1$ para: (a) $x_1^*=0$ ; (b) $x_2^*=0$ e superfície do canal ; (b) $x_2^*=8$ .....	85
Figura 4.3	Malha selecionada para o problema do cilindro confinado entre placas planas:(a) uma visão completa; (b) uma visão explodida.....	89
Figura 4.4	Isobandas do parâmetro de estruturação, para $U^*=1$ , $n=0,5$ , $J=200$ e $t_{eq}^*=1$ : (a) $\theta_0^*=4$ ; (b) $\theta_0^*=8$ ; (c) $\theta_0^*=12,9$ ; (d) $\theta_0^*=20$ .....	90
Figura 4.5	Isobandas das <i>yielded/unyielded regions</i> , para $U^*=1$ , $n=0,5$ , $J=200$ e $t_{eq}^*=1$ : (a) $\theta_0^*=4$ ; (b) $\theta_0^*=8$ ; (c) $\theta_0^*=12,9$ ; (d) $\theta_0^*=20$ .....	92
Figura 4.6	Isobandas do parâmetro de estruturação, para $\theta_0^*=4$ , $U^*=1$ , $n=0,5$ e $J=200$ : (a) $t_{eq}^*=0,01$ ; (b) $t_{eq}^*=0,3$ ; (c) $t_{eq}^*=1$ ; (d) $t_{eq}^*=5$ ; (e) $t_{eq}^*=10$ .....	93
Figura 4.7	Isobandas das regiões <i>yielded/unyielded</i> , para $\theta_0^*=4$ , $U^*=1$ , $n=0,5$ e $J=200$ : (a) $t_{eq}^*=0,01$ ; (b) $t_{eq}^*=0,3$ ; (c) $t_{eq}^*=1$ ; (d) $t_{eq}^*=5$ ; (e) $t_{eq}^*=10$ .....	95
Figura 4.8	Isobandas do módulo do tensor-extra de tensão, para $U^*=1$ , $n=0,5$ , $J=200$ e $t_{eq}^*=1$ : (a) $\theta_0^*=4$ ; (b) $\theta_0^*=8$ ; (c) $\theta_0^*=12,9$ ; (d) $\theta_0^*=20$ .....	96
Figura 4.9	Isobandas do módulo do tensor-extra de tensão, para $\theta_0^*=4$ , $U^*=1$ , $n=0,5$ e $J=200$ : (a) $t_{eq}^*=0,01$ ; (b) $t_{eq}^*=0,3$ ; (c) $t_{eq}^*=1$ ; (d) $t_{eq}^*=5$ ; (e) $t_{eq}^*=10$ .....	97
Figura 4.10	Isobandas da viscosidade estrutural, para $U^*=1$ , $n=0,5$ , $J=200$ e $t_{eq}^*=1$ : (a) $\theta_0^*=4$ ; (b) $\theta_0^*=8$ ; (c) $\theta_0^*=12,9$ ; (d) $\theta_0^*=20$ .....	98
Figura 4.11	Isobandas da viscosidade estrutural, para $\theta_0^*=4$ , $U^*=1$ , $n=0,5$ e $J=200$ : (a) $t_{eq}^*=0,01$ ; (b) $t_{eq}^*=0,3$ ; (c) $t_{eq}^*=1$ ; (d) $t_{eq}^*=5$ ; (e) $t_{eq}^*=10$ .....	99
Figura 4.12	Isobandas do módulo das velocidades, para $U^*=1$ , $n=0,5$ , $J=200$ e $t_{eq}^*=1$ : (a) $\theta_0^*=4$ ; (b) $\theta_0^*=8$ ; (c) $\theta_0^*=12,9$ ; (d) $\theta_0^*=20$ .....	100
Figura 4.13	Isobandas do módulo das velocidades, para $\theta_0^*=4$ , $U^*=1$ , $n=0,5$ e $J=200$ : (a) $t_{eq}^*=0,01$ ; (b) $t_{eq}^*=0,3$ ; (c) $t_{eq}^*=1$ ; (d) $t_{eq}^*=5$ ; (e) $t_{eq}^*=10$ .....	101
Figura 4.14	Isobandas do parâmetro de estruturação, para $\theta_0^*=4$ , $U^*=1$ , $n=0,5$ e $t_{eq}^*=1$ : (a) $J=200$ ; (b) $J=500$ ; (c) $J=800$ .....	102
Figura 4.15	Isobandas da viscosidade estrutural, para $\theta_0^*=4$ , $U^*=1$ , $n=0,5$ e $t_{eq}^*=1$ : (a) $J=200$ ; (b) $J=500$ ; (c) $J=800$ .....	103
Figura 4.16	Isobandas do parâmetro de estruturação, para $\theta_0^*=4$ , $U^*=1$ , $J=200$ e $t_{eq}^*=1$ : (a) $n=0,25$ ; (b) $n=0,5$ ; (c) $n=0,75$ ; (d) $n=1$ .....	104
Figura 4.17	Influencia do <i>shear-thinning</i> para $\theta_0^*=4$ , $U^*=1$ , $J=200$ e $t_{eq}^*=1$ : perfil axial de velocidades em $x_1^*=35$ .....	105
Figura 4.18	Coefficiente de Arrasto para: (a) variação de $\theta_0^*$ ; (b) variação de $t_{eq}^*$ ..	106
Figura 4.19	Descrição do problema: expansão planar abrupta 1:4.....	107
Figura 4.20	Perfis do parâmetro de estruturação para, $\theta_0^*=5$ , $J=500$ , $t_{eq}^*=1$ , $n=0,5$ e $U^*=1$ : (a) perfis transversais em $x_1^*=0$ ; (b) perfis longitudinais na linha de centro em $x_2^*=0$ ; (c) perfis ao longo da parede do canal.....	108
Figura 4.21	A malha de elementos finitos bi-linear selecionada para o problema do escoamento de Fluidos Estruturados Tixotrópicos em uma	

	expansão planar abrupta 1:4.....	112
Figura 4.22	Isobandas do parâmetro de estruturação, para $U^*=1$ , $n=0,5$ , $J=500$ e $t_{eq}^*=1$ : (a) $\theta_0^*=5$ ; (b) $\theta_0^*=10$ ; (c) $\theta_0^*=25$ ; (d) $\theta_0^*=50$ ; (d) $\theta_0^*=100$ .....	112
Figura 4.23	Isobandas das <i>yielded/unyielded regions</i> , para $U^*=1$ , $n=0,5$ , $J=200$ e $t_{eq}^*=1$ : (a) $\theta_0^*=5$ ; (b) $\theta_0^*=10$ ; (c) $\theta_0^*=25$ ; (d) $\theta_0^*=50$ (e) $\theta_0^*=100$ .....	114
Figura 4.24	Isobandas do parâmetro de estruturação, para $\theta_0^*=5$ , $U^*=1$ , $n=0,5$ e $J=500$ : (a) $t_{eq}^*=0,01$ ; (b) $t_{eq}^*=0,3$ ; (c) $t_{eq}^*=1$ ; (d) $t_{eq}^*=5$ ; (e) $t_{eq}^*=10$ .....	115
Figura 4.25	Isobandas das regiões <i>yielded/unyielded</i> , para $\theta_0^*=5$ , $U^*=1$ , $n=0,5$ e $J=500$ : (a) $t_{eq}^*=0,01$ ; (b) $t_{eq}^*=0,3$ ; (c) $t_{eq}^*=1$ ; (d) $t_{eq}^*=5$ ; (e) $t_{eq}^*=10$ .....	115
Figura 4.26	Isobandas do módulo do tensor-extra de tensão para $U^*=1$ , $n=0,5$ , $J=200$ e $t_{eq}^*=1$ : (a) $\theta_0^*=5$ ; (b) $\theta_0^*=10$ ; (c) $\theta_0^*=25$ ; (d) $\theta_0^*=50$ (e) $\theta_0^*=100$ .....	116
Figura 4.27	Isobandas do módulo do tensor-extra de tensão para $\theta_0^*=4$ , $U^*=1$ , $n=0,5$ e $J=500$ : (a) $t_{eq}^*=0,01$ ; (b) $t_{eq}^*=0,03$ ; (c) $t_{eq}^*=1$ ; (d) $t_{eq}^*=5$ ; (e) $t_{eq}^*=10$ . .....	117
Figura 4.28	Isobandas da viscosidade estrutural, para $U^*=1$ , $n=0,5$ , $J=500$ e $t_{eq}^*=1$ : (a) $\theta_0^*=5$ ; (b) $\theta_0^*=10$ ; (c) $\theta_0^*=25$ ; (d) $\theta_0^*=50$ ; (d) $\theta_0^*=100$ .....	118
Figura 4.29	Isobandas da viscosidade estrutural, para $\theta_0^*=5$ , $U^*=1$ , $n=0,5$ e $J=500$ : (a) $t_{eq}^*=0,01$ ; (b) $t_{eq}^*=0,03$ ; (c) $t_{eq}^*=1$ ; (d) $t_{eq}^*=5$ ; (e) $t_{eq}^*=10$ ...	119
Figura 4.30	Isobandas do módulo das velocidades, para $U^*=1$ , $n=0,5$ , $J=500$ e $t_{eq}^*=1$ : (a) $\theta_0^*=4$ ; (b) $\theta_0^*=8$ ; (c) $\theta_0^*=12,9$ ; (d) $\theta_0^*=20$ .....	120
Figura 4.31	Isobandas do módulo das velocidades, para $\theta_0^*=5$ , $U^*=1$ , $n=0,5$ e $J=500$ : (a) $t_{eq}^*=0,01$ ; (b) $t_{eq}^*=0,03$ ; (c) $t_{eq}^*=1$ ; (d) $t_{eq}^*=5$ ; (e) $t_{eq}^*=10$ ...	121
Figura 4.32	Isobandas do parâmetro de estruturação, para $\theta_0^*=4$ , $U^*=1$ , $n=0,5$ e $t_{eq}^*=1$ : (a) $J=200$ ; (b) $J=500$ ; (c) $J=800$ .....	122
Figura 4.33	Isobandas da viscosidade estrutural, para $\theta_0^*=4$ , $U^*=1$ , $n=0,5$ e $t_{eq}^*=1$ : (a) $J=200$ ; (b) $J=500$ ; (c) $J=800$ .....	123

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	Coordenadas Nodais no espaço $\xi$ .....	75
Tabela 4.1	Coefficiente de Arrasto para Fluido de Maxwell-b.....	84
Tabela 4.2	Erro relativo para o perfis do parâmetro de estruturação transversais em $x_1^*$ .....	86
Tabela 4.3	Erro relativo para perfis do parâmetro de estruturação ao longo da linha de centro do canal e superficie do cilindro.....	87
Tabela 4.4	Erro relativo para perfis do parâmetro de estruturação ao longo da parede do canal.....	88
Tabela 4.5	Erro relativo para o perfis do parâmetro de estruturação transversais em $x_1^*$ .....	110
Tabela 4.6	Erro relativo para perfis do parâmetro de estruturação longitudinais na linha de centro em $x_2^*=0$ .....	110
Tabela 4.7	Erro relativo para perfis do parâmetro de estruturação ao longo da parede do canal.....	111

## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>A</b>	Tensor genérico
$A$	Área, $m^2$
$a$	Constante adimensional
$a$	Aceleração de uma partícula
<b>a</b>	Vetor genérico
$b$	Constante adimensional
<b>b</b>	Vetor genérico
$c$	Constante adimensional
$C^0$	Espaço das funções contínuas em $\Omega$
$C_h$	Partição do domínio $\Omega$ em elementos finitos
$C_D$	Coefficiente de arrasto
<b>D</b>	Tensor taxa de deformação, $s^{-1}$
De	Número de Deborah
E	Lugar ocupado pela partícula $\zeta$
$f(\tau)$	Função associada ao termo <i>breakdown</i>
$F_D$	Componente da força de arrasto, N
$G_s$	Módulo de elasticidade estrutural, Pa
$G_0$	Módulo de elasticidade para um material totalmente estruturado, Pa
<b>g</b>	Aceleração da gravidade, $m/s^2$
$H$	Altura do canal do problema do cilindro confinado, m
$H_{in}$	Altura do canal de entrada da expansão planar abrupta, m
$H_{out}$	Altura do canal de saída da expansão planar abrupta, m
$H^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev formado pelas funções de $L^2(\Omega)$
$H_0^1(\Omega)$	Espaço das funções de $H^1(\Omega)$ que se anulam em $\Gamma_g$
$h_k$	tamanho do elemento $K$
<b>I</b>	Tensor unitário
$I_D$	Primeiro invariantes do tensor taxa de deformação
$II_D$	Segundo invariantes do tensor taxa de deformação
$III_D$	Terceiro invariantes do tensor taxa de deformação
<b>J</b>	Matriz Jacobiana
$\tilde{J}$	Derivada convectada de <i>Jaumann</i>
$J$	<i>Jump number</i>
$K$	Índice de consistência, $Pa \cdot s^n$
$K_1, K_2$	Coefficientes de proporcionalidade
$L^2(\Omega)$	Espaço das funções de quadrado integráveis em $\Omega$
<b>L</b>	Gradiente de velocidades
$L_0^2(\Omega)$	Espaço das funções de $L^2(\Omega)$ com média nula em $\Omega$
$m$	Parâmetro Regularizador de Papanastasiou
$m$	Grau de interpolação dos elementos finitos dos tipos $P_m$ e $Q_m$
$m_k$	Parâmetro proveniente da análise de erro da formulação GLS
$N$	Número de dimensões do problema
$N$	Número de partículas por unidade de volume
$N_A$	Função de aproximação do nó global $A$ da partição $C_h$
$N_1$	Primeira diferença de tensão normal, Pa
$N_2$	Segunda diferença de tensão normal, Pa
$n$	Índice de <i>power-law</i>

<b>n</b>	Vetor normal exterior unitária
$p$	Pressão hidrostática do fluido, Pa
$P$	Espaço funcional do campo de pressão
$p$	Função aproximação de elementos finitos do campo de pressão
$P_m$	Espaço polinomial de grau $m$ para elemento triangular ou tetraédrico
$P_n$	Polinômio de Legendre
$Q_m$	Espaço polinomial de grau $m$ para elemento quadrilátero ou hexaédrico
<b>Q</b>	Tensor ortogonal
$q$	Função peso do campo de pressão
<b>R</b>	Resíduo da equação variacional de elementos finitos
$R$	Raio do cilindro, m
$\mathfrak{R}$	Espaço dos números reais
$Re$	Número de Reynolds
$Re_K$	Número de Reynolds de malha
$R_m$	Espaço polinomial de grau $m$
$S$	Função peso do campo de tensão
<b>T</b>	Tensor tensão, $N/m^2$
$t$	Tempo, s
$t_{eq}$	Tempo de equilíbrio da estrutura do material, s
$t_h$	Força de superfície, $N/m^2$
<b>U</b>	Vetor de variáveis
$U^*$	Intensidade de escoamento
<b>u</b>	Campo de velocidade admissível, m/s
$u_c$	Velocidade característica, m/s
$u_i$	Componente da velocidade na direção $i$ , m/s
$u_g$	Campo de velocidades sobre $\Gamma_g$ , m/s
<b>V</b>	Espaço funcional do campo de velocidade
$v$	Função peso do campo de velocidades, m/s
Q1	Elemento quadrangular bi-linear
$w$	Largura do canal, m
<b>W</b>	Espaço funcional do campo de tensão
<b>W</b>	Aproximação por elementos finitos do campo de tensão
$Wi$	Número de Weissenberg
$x$	Posição em uma configuração
<b>X</b>	Vetor posição
<b>Y(t)</b>	Pontos no antigo referencial
$\alpha$	Parâmetro de estabilidade para a equação d balanço de momentun
$\beta$	Parâmetro de estabilidade para a equação constitutiva
$\delta$	Parâmetro de estabilidade para a equação da continuidade
$\epsilon$	Parâmetro de estabilidade para a equação de quasi-incompressibilidade
$\Gamma$	Fronteira do domínio $\Omega$
$\Gamma_g$	Parte da fronteira $\Gamma$ na qual são impostas condições de Dirichlet
$\Gamma_h$	Parte da fronteira $\Gamma$ na qual são impostas condições de Neumann
$\mu$	Viscosidade absoluta do fluido newtoniano, Pa.s
$\kappa$	Configuração de referência
$\eta$	Viscosidade aparente, Pa.s
$\eta_E$	Viscosidade elongacional, Pa.s
$\eta_{eq}$	Viscosidade em estado de equilíbrio, Pa.s

$\eta_v$	Viscosidade estrutural
$\eta_0$	Viscosidade do material completamente estruturado
$\eta_\infty$	Viscosidade do material não-estruturado
$\rho$	Massa específica do fluido, kg/m <sup>3</sup>
$\tau_y$	Tensão limite de escoamento estática, Pa
$\tau_{yd}$	Tensão limite de escoamento dinâmica, Pa
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor-extra de tensão, Pa
$\boldsymbol{\tau}_H$	Tensão <i>Hookianiana</i> , Pa
$\boldsymbol{\tau}_N$	Tensão <i>Newtoniana</i> , Pa
$\Omega$	Domínio do problema
$\bar{\Omega}$	Domínio limitado fechado do problema
$\Omega_K$	Domínio do elemento finito K
$\zeta$	Parâmetro de estabilidade
$\zeta$	Elemento de um corpo
$\dot{\gamma}$	Taxa de deformação por cisalhamento, s <sup>-1</sup>
$\dot{\gamma}_{0d}$	Taxa de deformação dinâmico, s <sup>-1</sup>
$\dot{\gamma}_{eq}$	Taxa de deformação em estado de equilíbrio, s <sup>-1</sup>
$\gamma_H$	Deformação <i>Hookianiana</i> , s <sup>-1</sup>
$\xi$	Coordenada natural
$\eta$	Coordenada natural
$\nu$	Número de ligações em um agregado médio
$\nu_1$	Primeiro coeficiente de tensão normal, Pa.s <sup>2</sup>
$\nu_2$	Segundo coeficiente de tensão normal, Pa.s <sup>2</sup>
$\theta$	Tempo de relaxação, s
$\theta_0^*$	Tempo de relaxação adimensional
$\lambda$	Parâmetro de estruturação
$\lambda_{eq}$	Parâmetro de estruturação em estado de equilíbrio
$\lambda_g$	Campo do parâmetro de estruturação sobre $\Gamma_g$
$\Lambda$	Espaço funcional do parâmetro de estruturação
$\Sigma$	Espaço funcional do parâmetro de tensão
$\varphi$	Função peso do parâmetro de estruturação
$\psi$	Parâmetro de estabilidade para a equação do parâmetro de estruturação GLS
$\nabla$	Operador gradiente espacial
$\otimes$	Produto Tensorial
$\cdot$	Produto escalar
$tr$	Operador traço

# 1 INTRODUÇÃO

Uma grande gama de fluidos conhecidos pelo homem apresenta um comportamento Não-newtoniano. Essa classe de fluidos pode apresentar diversos tipos de comportamento dentre eles: tensão mínima de escoamento, efeitos de *shear-thinning* e *shear-thickening*, efeitos de memória, primeira diferença de tensões normais não nulas em escoamentos puramente cisalhantes, tixotropia. O objetivo principal desta tese é estudar o comportamento de uma classe de fluidos Não-newtonianos, denominada de Fluidos Estruturados Tixotrópicos. Faz parte deste estudo implementar numericamente um modelo mecânico recentemente proposto para o tipo de material em estudo (de Souza Mendes, 2009), e apresentar resultados para problemas clássicos de engenharia, onde serão variados parâmetros significativos ao modelo.

Fluidos Não-Newtonianos Estruturados são materiais que apresentam microestruturas com comportamento elástico a baixos níveis de tensão. A altos níveis de tensão, ocorre um colapso de sua microestrutura, provocando drásticas quedas na viscosidade e elasticidade. Sob condições de tensão constante, a microestrutura dos Fluidos Estruturados Tixotrópicos tende a apresentar uma configuração estável. As mudanças na microestrutura dos Fluidos Estruturados Tixotrópicos não ocorrerem de maneira instantânea após uma mudança de tensão, e desta forma, pode ser dito que são dependente do tempo. Essa dependência do tempo é chamada de tixotropia quando a viscosidade diminui/aumenta com o respectivo aumento/diminuição da taxa de deformação no tempo. É interessante notar que a dependência temporal dos Fluido Estruturados Tixotrópicos, não está necessariamente relacionada com a viscoelasticidade.

O termo tixotropia apresentou uma grande mudança de conceito durante os anos, desde sua primeira utilização na literatura. O primeiro artigo que apresentou o termo tixotropia adequadamente foi o de Peterfi (1927), onde ele descreveu um material que era liquidificado por agitação e que solidificava novamente após um certo tempo, sem qualquer mudança visível no sistema. Ele combinou as palavras gregas *thixis* (agitação) e *trepo* (virar ou mudar) para criar o termo tixotropia. Em um trabalho um pouco mais recente, Bauer e Collins (1967) afirmaram que “quando há uma redução na magnitude das propriedades reológicas de um sistema (tais como módulo de elasticidade, tensão mínima de escoamento e viscosidade) ocorre de forma reversível, isotérmica e com uma dependência de tempo distinta sobre a aplicação da tensão de cisalhamento, o sistema é descrito como tixotrópico”. Esta

definição está mais próxima do que entendemos hoje como tixotropia. Mesmo nos dias atuais, tixotropia ainda é um assunto em aberto e sem definição concreta sobre o assunto. Para exemplificar, podemos citar alguns exemplos de definições de tixotropia em alguns dos mais renomados dicionários e enciclopédias científicas, sendo que nem todas descrevem com clareza essa definição:

Oxford Encyclopedic Dictionary of Physics - “Tixotropia: Certos materiais se comportam como sólidos quando as tensões aplicadas são muito pequenas, mas sob altas tensões altas tornam-se líquidos. Quando as tensões são removidas do material, este volta para a sua consistência original. Esta propriedade é particularmente associada com determinados colóides, que formam géis quando deixados em repouso, mas que se tornam sois quando mexido ou agitado, devido a uma redistribuição da fase sólida.”

Chambers Dictionary of Science and Technology - “Propriedade reológica de fluidos e sólidos plásticos caracterizada por uma alta viscosidade em baixa tensão, mas um decaimento viscosidade quando há um aumento da tensão é aplicada. É uma propriedade útil em tintas, porque faz com que um filme espesso seja, no entanto, facilmente trabalhado.”

Van Nostrand's Scientific Encyclopedia - “Um fluido tixotrópico é um fluido cuja viscosidade é uma função não só da tensão de cisalhamento, mas também do histórico do movimento dentro do fluido. A viscosidade geralmente diminui com o período de tempo em que o fluido está em movimento. Tais sistemas são comumente soluções concentradas de substâncias com alto peso molecular, ou suspensões coloidais.”

Oxford Concise Science Dictionary - “Mais comum, entretanto, é o efeito oposto em que a viscosidade não depende apenas do gradiente de viscosidade, mas também do tempo para o qual foi aplicado. Estes líquidos diz-se exibir tixotropia. Quanto mais rápido um líquido tixotrópico move, menos viscoso ele se torna. Esta propriedade é encontrada em tintas e óleos lubrificantes.”

Chambers 20th Century Dictionary - “Tixotropia: propriedade de géis que apresentam uma redução temporária da viscosidade quando sacudido ou agitados”

Polymer Technology Dictionary - “Tixotropia. Um termo usado em reologia que significa que a viscosidade do material diminui significativamente com o tempo de cisalhamento e, em seguida, aumenta significativamente quando a força de indução do escoamento é removido”

Polymer Science Dictionary - “Fluidos com comportamento tempo-dependente em que a viscosidade aparente diminui com o tempo de cisalhamento e na qual a viscosidade recupera, ou perto, o seu valor original quando cessa o cisalhamento. A recuperação pode

ocorrer ao longo de um tempo considerável. Isso às vezes pode ocorrer com sistemas poliméricos, quando aumenta o desagrupamento molecular com o tempo de cisalhamento.”

Pôde-se perceber que existem dois pontos de vista em relação ao conceito de tixotropia: um acredita-se em que o tempo de resposta da microestrutura é provocado por cisalhamento ou repouso e os efeitos reológicos resultantes daí. Este ponto de vista muitas vezes é usado em um sentido muito restrito de alterações de viscosidade apenas, sem nenhuma referência à transição reversível do comportamento de gel-fluido; o outro trata tixotropia como um gel que possui propriedades de fluido que desaparece com agitação e reaparecem em repouso. Assim pode-se concluir que o assunto, apesar de ser estudado por inúmeros pesquisadores por algumas décadas, possui pontos em aberto, tornando-se de grande interesse para a classe científica.

Os Fluidos Estruturados Tixotrópicos estão presentes em grande número de nossas atividades diárias, e podem ser encontrados tanto na natureza como em aplicações industriais. Exemplos incluem emulsões, tintas, nano-compósitos, géis, fluidos de perfuração, alimentos e minerais. Estes fluidos tipicamente consistem em soluções ou misturas de compostos formados por macromoléculas, que lhes dão uma estrutura microscópica que irá influenciar o seu comportamento macroscópico em resposta a uma tensão aplicada. Muitos modelos constitutivos tixotrópicos foram propostos ao longo das últimas décadas, mas ainda há uma falta de dados disponíveis sobre testes e validações. Além disso, um modelo geral capaz de descrever todas as características dos Fluidos Estruturados Tixotrópicos ainda não foi desenvolvido (Mewis e Wagner, 2009).

O objetivo desta tese de doutorado é analisar o desempenho da equação constitutiva para Fluidos Estruturados Tixotrópicos recentemente proposta por de Souza Mendes (2009), em escoamentos complexos, apresentando resultados e alterações em relação ao modelo. Esta equação é uma generalização do modelo de Maxwell Convectado, que permite alterações do tempo de relaxação e *shear-thinning* da viscosidade. Este modelo foi posteriormente melhorado para incluir um elemento newtoniano na equação constitutiva semelhante a de Maxwell (de Souza Mendes, 2010). Ambos os modelos são capazes de capturar as características típicas dos Fluidos Estruturados Tixotrópicos, tais como picos de tensão, causado pela avaria da micro-estrutura do material para experimentos com taxa de cisalhamento constante, as curvas não-monotônica do escoamento e bifurcações da função viscosidade. Nos modelos propostos por de Souza Mendes (2009 e 2010), tanto o tempo de relaxação do fluido como a viscosidade são funções de um parâmetro de estrutura do material, que depende da taxa de deformação do escoamento. O parâmetro de estrutura é obtido através

de uma equação de evolução. Em uma primeira aproximação, a sua variação temporal é negligenciada na presença de termos de contabilidade para sua advecção espacial e para a acumulação e degradação da estrutura do material. Tal suposição leva a uma simplificação que transforma a equação do parâmetro de estrutura puramente hiperbólicos, o que certamente requer um cuidado especial na sua aproximação numérica. A modelagem numérica das equações que regem é baseado em um modelo quatro-campos Galerkin mínimos quadrados em termos do parâmetro de estrutura, tensão-extra, pressão e velocidade.

A formulação descrita é usada para realizar uma investigação numérica do escoamento permanente de um Fluido Estruturado Tixotrópico em dois problemas típicos de engenharia: em torno de um cilindro confinado entre duas placas planas paralelas; em uma expansão planar abrupta. A inércia é negligenciada e os efeitos elásticos e tixotrópicos são avaliados por um conjunto relevante de parâmetros governantes. Todos os resultados numéricos provaram ser fisicamente significativos e de acordo com a literatura relacionada, indicando que a equação constitutiva é capaz de dar uma boa previsão do comportamento mecânico dos fluidos tixotrópicos.

## 1.1 Propriedades de Fluidos Não-newtonianos

Fluidos com microestruturas inexpressivas são bem descritos pela equação constitutiva Newtoniana, que diz que o tensor tensão é proporcional ao tensor taxa de deformação. Fluidos com microestruturas complexas, como por exemplo, suspensões de partículas ou gotículas (sangue, tintas, asfalto, condimentos alimentícios, etc) polímeros fundidos e soluções (plásticos fundidos, plásticos reforçados com partículas ou fibras), exibem uma ampla variação de comportamentos. Alguns destes comportamentos serão apresentados a seguir.

### 1.1.1 Viscosidade dependente da taxa de deformação

Um das grandezas mais importantes para análise de engenharia é a viscosidade. Esta quantidade é definida como razão da tensão de cisalhamento e da taxa de deformação.

Aqui, como mostrado na Fig.1.1, o escoamento é gerado por um placa deslizando acima de outra, com o fluido entre as duas. As quantidades de interesse são a taxa de deformação,  $\dot{\gamma} = U/h$  ( $U$  é a velocidade da placa no topo,  $h$  é a espessura da amostra),  $\tau = F/A$  é a tensão de cisalhamento ( $F$  é a força tangencial na placa no topo,  $A$  de contato

com o fluido). A tensão de cisalhamento é uma função da taxa de deformação. Além disso, em fluidos viscoelásticos, pode apresentar uma força normal nas placas (Phan-Thien, 2002).

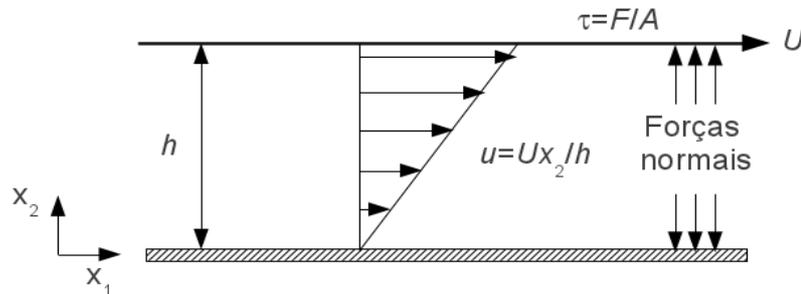


Figura 1.1 - Escoamento cisalhante gerado por uma placa deslizante

Quando um escoamento permanente pode ser estabelecido, a viscosidade  $\eta$  é definida como

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (1.1)$$

Para um fluido Newtoniano, a viscosidade é constante dependendo somente da temperatura. Para a maioria dos fluidos com cadeia de microestrutura longa (polímeros fundidos e soluções), a viscosidade é uma função decrescente da taxa de deformação. Este tipo de comportamento é chamado de *shear thinning*. O comportamento contrário, *shear thickening*, é às vezes observado com algumas suspensões, devido a formação de aglomerados. Uma curva de viscosidade versus taxa de deformação típica é mostrada na Fig.1.2 para um polietileno com densidade baixa (LDPE) a diferentes temperaturas.

Pode ser visto que a viscosidade é fortemente influenciada pela temperatura. A  $60^\circ\text{C}$  de aumento na temperatura induz um decaimento de dez vezes na viscosidade. Além disso, a viscosidade decai a uma ordem de grandeza, a uma taxa de deformação de  $\dot{\gamma} = 10^{-1} \text{s}^{-1}$ . Uma viscosidade constante não pode designar um fluido como sendo Newtoniano. O termo Newtoniano é muito mais restritivo na sua aceção.

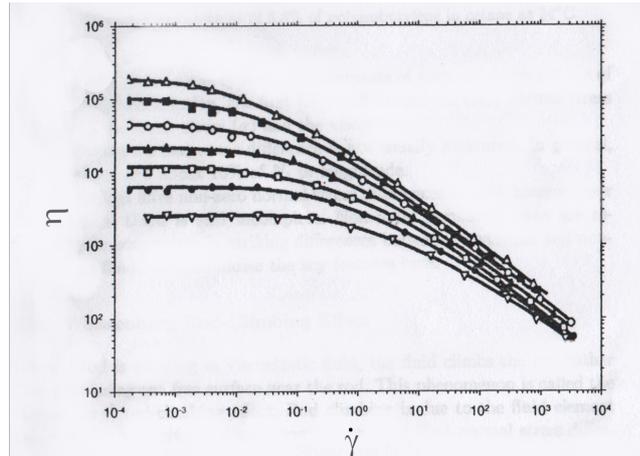


Figura 1.2 - Viscosidade de um polietileno fundido a baixa densidade e com diferentes temperaturas variando entre ,  $T=388-513\text{K}$  (Phan-Thien, 2002)

Para alguns materiais com comportamento semelhante aos de um sólido (por exemplo, massa de pão e tecidos biológicos), a medição de viscosidade não faz sentido, uma vez que a tensão de cisalhamento continua aumentando com o tempo até a amostra quebrar ou escoar para fora da célula de teste, sendo assim, o que pode ser medido não é uma propriedade do material, mas uma indicação do atrito entre uma amostra e o aparato de testes.

Com suspensões de partículas, com cargas superficiais, pode-se obter a viscosidade comportando-se de várias maneiras diferentes; mesmo uma descontinuidade de uma taxa de deformação particular pode ser induzida.

### 1.1.2 Viscosidade elongacional

Escoamentos elongacionais referem-se ao escoamento onde o gradiente de velocidades é diagonal, i.e.,

$$u=ax, \quad v=by, \quad w=cz \quad (1.2)$$

onde  $a+b+c=0$  para incompressibilidade, que corresponde ao estiramento ou alongamento de uma amostra de fluido. Estes escoamentos de forma eficiente, esticam os elementos fluidos. Quando  $b=-a$  e  $c=0$  tem-se um escoamento elongacional planar, e um escoamento elongacional uni-axial quando  $a=b=-c/2$ . Este último escoamento ocorre em vários processos; aqui  $a$  é determinado a taxa de alongação.

A viscosidade elongacional é definida como

$$\eta_E = \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{a} \quad (1.3)$$

Exceto para muito baixas taxas de alongação, a viscosidade alongacional geralmente não chega a um estado estacionário. Para um fluido Newtoniano, a viscosidade alongacional é três vezes a viscosidade cisalhante, mas para uma solução polimérica, a viscosidade alongacional pode ser de maior magnitude. A razão de Trouton é definida pela razão de viscosidade alongacional e a viscosidade cisalhante do fluido

$$\text{Razão de Trouton} = \frac{\eta_E}{\eta} \quad (1.4)$$

Um típico gráfico da razão de Trouton para uma solução de Polibuteno é apresentado na Fig.1.3. Para um fluido Newtoniano, a razão de Trouton é três, para um fluido viscoelástico esta razão pode ser muito maior.

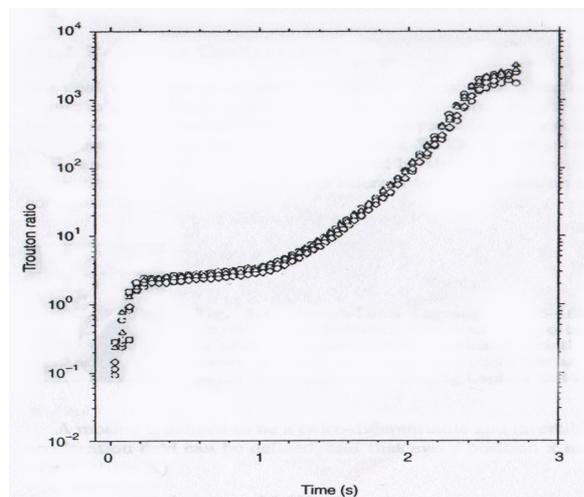


Figura 1.3 - Razão de Trouton transiente para uma solução de poliisobutileno de alto peso molecular - razão extensional  $a=2s^{-1}$  (Phan-Thien, 2002)

### 1.1.3 Viscoplasticidade

A viscoplasticidade é caracterizada por materiais com alta viscosidade a baixas tensões e a altas tensões uma viscosidade variando com a taxa de deformação. Materiais com viscoplasticidade requerem a aplicação de uma tensão mínima,  $\tau_y$ , denominada de limite de

escoamento, para que haja alguma deformação cisalhante. Quando o escoamento é submetido a uma tensão menor que  $\tau_y$ , o material teoricamente comporta-se como um sólido, ou seja, material com uma viscosidade altíssima. Assim, o fluido apresentaria regiões onde escoaria com um movimento de corpo rígido e regiões estagnadas. Esse tipo de fluido frequentemente também apresenta comportamento *shear thinning* ou *shear thickening*, como mostra a Fig.1.4

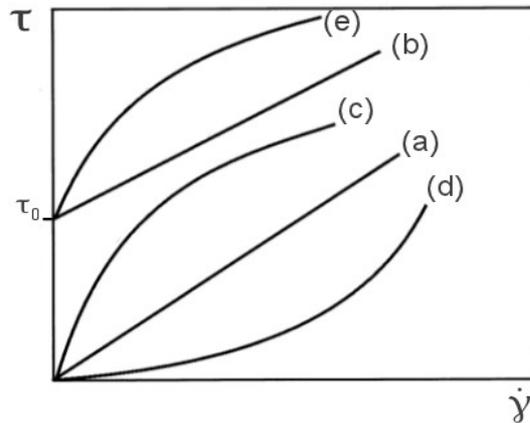


Figura 1.4 – Curva de escoamento: (a)Newtoniano; (b) Plástico de Bingham; (c) Pseudoplástico; (d) Dilatante; (e) Pseudoplástico com limite de escoamento

O modelo mais tradicional a descrever o comportamento viscoplástico é o Plástico de Bingham (Fig.1.4(b)).

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_y + \mu \dot{\gamma} & se \quad \tau > \tau_y \\ \dot{\gamma} &= 0 & se \quad \tau < \tau_y \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde  $\mu$  é a viscosidade plástica. Esse modelo prediz uma viscosidade infinita no limite em que a taxa de deformação vai a zero. Com a adição de um novo parâmetro a equação de Bingham, o modelo de Herschel-Bulkley consegue prever o comportamento *shear thinning* do material (Fig.4(e)):

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_y + K \dot{\gamma}^n & se \quad \tau > \tau_y \\ \dot{\gamma} &= 0 & se \quad \tau < \tau_y \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde  $K$  é o índice de consistência e  $n$  o índice de *power-law*. Modelos regularizados com função viscosidade contínua a qual é válida para a ampla faixa de tensões, foram

desenvolvidos, de modo a superar as limitações impostas pelo carácter descontínuo do modelo clássico de Herschel-Bulkley. Papanastasiou (1987) propôs uma modificação nos modelos introduzindo um parâmetro regularizador  $m$  que controla o crescimento exponencial da tensão. Mais recentemente, uma nova regularização foi introduzida no trabalho de de Sousa Mendes (2004), onde a tensão é descrita como:

$$\tau = (1 - \exp(-\eta_0 \dot{\gamma} / \tau_y)) (\tau_y + K \dot{\gamma}^n) \quad (1.7)$$

e a partir da regularização da equação constitutiva da tensão, pode-se definir uma equação da viscosidade aparente regularizada. A função viscosidade em estado de equilíbrio utilizada pelo modelo de Fluidos Estruturados Tixotrópicos é derivada da Eq.1.7 e será apresentada posteriormente.

#### 1.1.4 Diferenças de Tensões Normais

Diferença de tensões normais se refere a diferença entre não iguais tensões normais em um escoamento puramente cisalhante (para um fluido Newtoniano em um escoamento puramente cisalhante, as tensões normais são todas iguais). Com os três componentes de tensão normal, podemos definir a primeira e a segunda diferença de tensões normais

$$N_1 = \tau_{11} - \tau_{22}, \quad N_2 = \tau_{22} - \tau_{33} \quad (1.8)$$

Estas diferenças de tensão normal são funções da taxa de deformação, e portanto se definem os coeficientes de tensões normais como:

$$\nu_1 = \frac{N_1}{\dot{\gamma}^2}, \quad \nu_2 = \frac{N_2}{\dot{\gamma}^2} \quad (1.9)$$

Estes coeficientes de tensão normal são funções da taxa de deformação. As Diferenças de tensões normais e viscosidade cisalhante são chamadas de funções viscométricas; Elas são funções materiais representando as propriedades viscométricas do fluido.

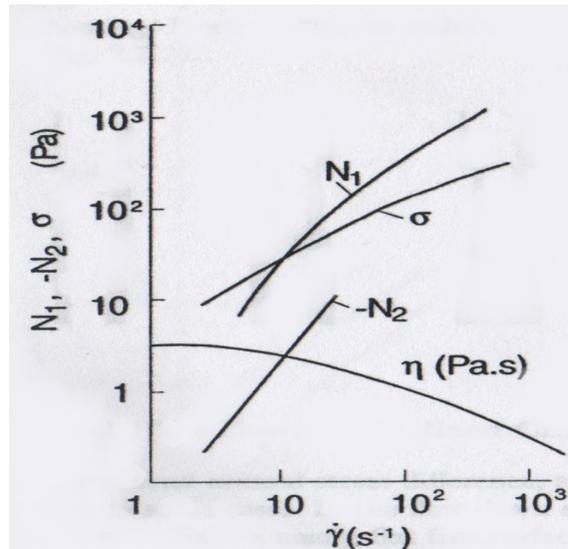


Figura 1.5 - Funções viscométricas a 6,8% de poliisobutileno em cetano a 24°C (Phan-Thien, 2002)

A Fig.1.5 mostra medições típicas das propriedades viscométricas para uma solução poliisobutileno, a primeira ( $N_1$ ) e a segunda ( $N_2$ ) diferenças de tensões normais, a tensão de cisalhamento ( $\tau$ ) e a viscosidade. A segunda diferença de tensões normais não é usualmente medida. Em geral ela é negativa e em volta de 10% de  $N_1$  em magnitude.

Suspensões também tem diferenças de tensões normais não-nulas; contudo nosso conhecimento é incompleto. Tensões normais não iguais são responsáveis por algumas diferenças impressionantes entre fluidos Newtoniano e Não-Newtoniano.

### 1.1.5 Efeitos de Memória do Fluido

O modelo de fluido Newtoniano generalizado não pode descrever o chamado efeito de memória. Há dois mecanismos fundamentalmente distintos que dão origem a esses efeitos:

- (a) O primeiro mecanismo surge pelo fato de que alguns materiais podem armazenar parte da energia mecânica, ocorrendo algum atraso em sua resposta. O armazenamento e subsequente relaxação da energia mecânica ocorre com fluidos viscoelásticos. Esse tipo de comportamento é característica de muitas soluções concentradas e polímeros fundidos de alto peso molecular.
- (b) No segundo mecanismo existe uma completa dissipação da energia mecânica, e os efeitos de memória resultam do ajustamento atrasado da estrutura interna do fluido na atual condição de cisalhamento. O fenômeno viscoso (inelástico), mas com comportamento tempo-

dependente do fluido, é chamado tixotropia e ocorrem muitas vezes na indústria (tintas, tintas de impressão, muitos materiais alimentícios, graxas, lamas de perfuração, etc).

O parâmetro que leva em conta a influência dos efeitos de memória no escoamento é o número de Deborah, Eq.1.10. Este número é definido como a razão entre o tempo característico do fluido e o tempo característico do processo:

$$De = \frac{\text{tempo característico do fluido}}{\text{tempo característico do processo}} \quad (1.10)$$

Para baixos números de Deborah, a influência da memória do fluido no escoamento pode ser negligenciada, e portanto, as propriedades reológicas do fluido podem ser aproximadas por um modelo Newtoniano Generalizado. Para altos números de Deborah, entretanto, os efeitos de memória precisam ser levados em conta.

### 1.1.6 Instabilidades Viscoelásticas

Por causa das não linearidades nas equações constitutivas viscoelásticas, escoamentos viscoelásticos apresentam instabilidades. Estas instabilidades podem não depender da inércia, e são impulsionados principalmente pelas tensões normais do fluido (elasticidade), ou pela natureza das condições de contorno. Para citar algumas, nós temos instabilidades em escoamentos de Taylor-Couette, em escoamentos torcionais entre dois discos paralelos, em escoamentos cisalhantes entre cone e placa, em escoamentos em tubo curvo, em escoamentos em contrações, em escoamentos de extrusão, etc. A distorção extrudada, geralmente chamada de fratura por fundição, é um exemplo de instabilidades devido a interação entre viscoelasticidade e a natureza das condições de contorno.

### 1.1.7 Tixotropia

Um fluido tixotrópico apresenta a seguintes características (Ferguson, 1991):

- (i) A estrutura se desenvolve quando o líquido está no descanso.
- (ii) A estrutura pode ser destruída pela aplicação de cisalhamento.
- (iii) O processo de quebra e reconstrução da estrutura é reversível e ocorre isotermicamente,

(iv) Em escoamento cisalhante laminar, sobre condições de tensão constante e mantida desta forma por um tempo suficientemente longo, a taxa de deformação aproxima a um valor de equilíbrio dependendo somente da tensão aplicada.

Um teste qualitativo tradicional para a existência de tixotropia é o chamado *loop test*. Assume-se um fluido tixotrópico, quando após um período suficientemente longo de repouso, e ao ser exposto a uma taxa de deformação que cresce continuamente de zero até um valor máximo e decai continuamente até zero. Por causa da quebra da estrutura do fluido que ocorre durante o experimento, obtém-se uma *flow curve* (tensão cisalhante versus taxa de deformação) como um *hysteresis loop*. Na Fig.1.6 é apresentado um exemplo das várias formas em que a *flow curve* pode tomar, onde os vetores indicam a cronologia do processo.

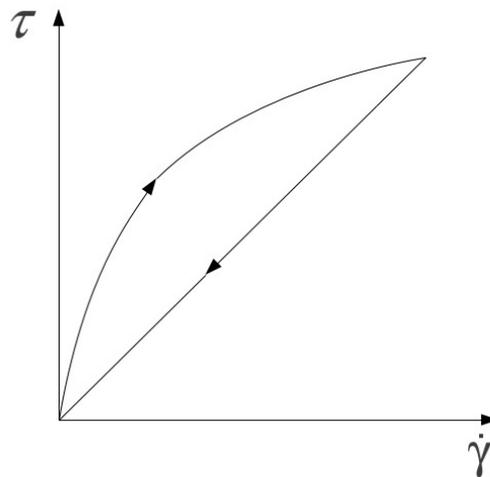


Figura 1.6 - A *flow curve* de um fluido tixotrópico em um teste de *hysteresis loop*

Além da tixotropia positiva descrita anteriormente, define-se também uma tixotropia negativa ou anti-tixotropia. Ao contrário do comportamento dos fluidos tixotrópicos, o fluido anti-tixotrópico exibe (após um período suficientemente longo de repouso) um crescimento reversível na tensão de cisalhamento com o tempo, para uma taxa de deformação constante em condições isotérmicas. Estes materiais são, contudo, relativamente raros.

Tixotropia pode ser explicada como uma consequência da agregação de partículas suspensas. Tais sistemas de interação que ocorrem entre partículas são resultados da atração devido as forças de Van der Waals por um lado, e a repulsão devido a eletrostática e efeitos estéricos por outro. A estabilidade do sistema depende da existência de uma barreira de energia potencial que impede as partículas de aproximarem-se uma das outras. Desta forma, os laços físicos comparativamente fracos entre a partículas dão origem a agregação.

Se a suspensão está em repouso, a agregação de partículas podem formar uma rede espacial onde a suspensão desenvolve uma estrutura interna. Naturalmente, a rede tem que ser forte o suficiente para resistir a destruição causada pelos efeitos de desintegração dos movimentos térmicos.

Se a suspensão é cisalhada, os laços físicos fracos são quebrados e a rede decompõe-se em agregados separados que podem se desintegrar em fragmentos menores, chamados unidades de escoamento. Por outro lado, os movimentos térmicos causam colisões entre as unidades de escoamentos e um conseqüente crescimento no número de agregados. Depois de algum tempo, a uma dada taxa de deformação, um equilíbrio dinâmico é estabelecido entre a destruição total e o crescimento. Em altas taxas de deformação o equilíbrio é deslocado na direção de maior dispersão.

A energia dissipada no processo de escoamento que acaba de ser descrita pode ser dividido em duas partes:

- (i) uma parte atribuída ao escoamento viscoso do fluido em torno das unidades de escoamento;
- (ii) a energia adicional dissipada por causa da quebra das ligações entre as unidades de escoamento, seja dentro ou entre os agregados

A principal razão para a diminuição da viscosidade no sistema, com o crescimento da taxa de deformação, é a diminuição da parte da dissipação de energia que é atribuída à ruptura das ligações entre partículas (o número de ligações é baixo com altas taxas de deformação).

O mecanismo de *shear-thinning* descrito acima é apenas uma das características do fenômeno de tixotropia. Outra característica é a tempo-dependência da viscosidade, que pode ser explicado da seguinte forma:

O equilíbrio dinâmico entre o processo de quebra e reconstrução da estrutura depende da ação simultânea dos movimentos térmicos e cisalhantes. Assume-se que a taxa de formação das novas ligações é proporcional ao número de partículas por uma unidade de volume, porque a probabilidade de colisão cresce com a concentração de partículas. A taxa de quebra das ligações entre partículas em um agregado médio é proporcional ao número de ligações existentes. Portanto, a taxa resultante em que as ligações são formadas pode ser representada pela seguinte equação cinemática,

$$d_t v = K_1 N - K_2 v \quad (1.11)$$

onde  $\nu$  é o número de ligações em um agregado médio,  $N$  é o número de partículas por unidade de volume, e  $K_1, K_2$  são coeficientes de proporcionalidade (dependentes da taxa de deformação) para a formação e quebra das ligações, respectivamente.

Pela a Eq.1.11 segue que para uma taxa de deformação constante ( $K_1=\text{cte}, K_2=\text{cte}$ ) o número de ligações varia com o tempo e se aproximará a um valor de equilíbrio  $\nu_e(\dot{\gamma})$  quando  $d\nu/dt=0$ . Portanto, a viscosidade também vai mudar com o tempo e aproximar a uma valor de equilíbrio  $\eta_{eq}(\dot{\gamma})$ . Portanto, podemos explicar o tempo-dependência da viscosidade de um fluido tixotrópico em termos de um ajuste de atraso da estrutura do material às condições de cisalhamento real.

A partir do mecanismo de tixotropia descrito anteriormente, para caracterizar o estado reológico do material tixotrópico é preciso saber o número real de ligações entre partículas nos agregados, sendo isso impossível. Portanto, se faz necessário introduzir um parâmetro fenomenológico para descrever quantitativamente a estrutura material. Este parâmetro adimensional é chamado o parâmetro de estruturação.

O conceito do parâmetro estruturação foi introduzido por Cheng e Evans (1965). Eles desenvolveram a teoria chamada estrutura única dos materiais tixotrópicos. De acordo com essa teoria, a viscosidade do material em um escoamento cisalhante laminar depende não somente da taxa de deformação, mas também do instantâneo estado da estrutura do material, que pode ser descrito por um único parâmetro escalar.

## 1.2 Introdução ao método numérico: Método de Elementos Finitos

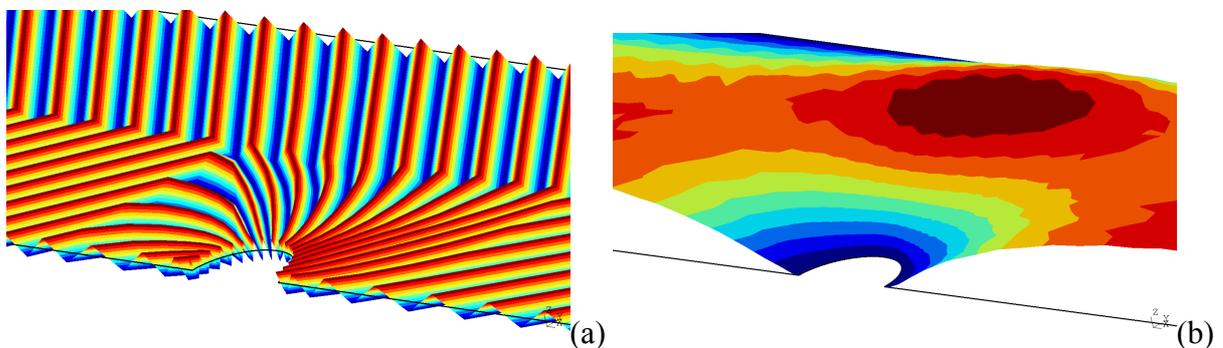
Com a evolução das ferramentas computacionais, método numéricos ganharam força na solução de problemas complexos de engenharia. Afim de resolver as equações propostas para o modelo de Fluidos Estruturados Tixotrópicos optou-se pelo método numérico de Elementos Finitos como método para a solução. Mas uma pergunta surge: por que o método de Elementos Finitos? Primeiramente podemos exaltar o notável desenvolvimento alcançado pelo método na área de mecânica dos sólidos, onde este método está consolidado. Nas últimas décadas o método de elementos finitos vem obtendo um grande desenvolvimento também na área da mecânica dos fluidos, principalmente a partir dos resultados teóricos de Babuska (1973) e Brezzi (1974) para problemas mistos. Como vantagens que o método de elementos finitos apresenta pode-se citar:

- (i) flexibilidade para tratar geometrias complexas,

- (ii) flexibilidade que permite tratar condições de contorno genéricas,
- (iii) flexibilidade para tratar materiais de resposta não lineares e/ou com propriedades variáveis,
- (iv) permite uma sistematização no desenvolvimento de códigos computacionais.
- (v) possui um sólido respaldo matemático, o qual dá confiabilidade aos seus códigos e, em muitos problemas, torna possível estabelecer a priori uma estimativa para o erro envolvido na aproximação de elementos finitos.

Como desvantagem, se comparado com outros métodos numéricos, a flexibilidade do método de elementos finitos vem acompanhada com uma maior complexidade de programação e uma quantidade maior de memória computacional.

O método de elementos finitos consiste em uma aproximação numérica de equações diferenciais, baseado no conceito de que a solução de uma equação diferencial pode ser representada como uma combinação linear de graus de liberdade incógnitos e funções de aproximação selecionadas ao longo de todo o domínio do problema. Entre as formulações mais empregadas está o método de Elemento Finitos de Galerkin, onde esta formulação foi aplicado a uma variada classe de problemas. Através de anos de estudos, onde aplicou-se este método para problemas de escoamento, observou-se o surgimento de oscilações espúrias sobre todo o domínio computacional, fazendo com que as aproximações de escoamentos divergissem (ver seção 3.3.1, onde será apresentada uma discussão mais detalhada). Estas oscilações estão ilustradas na Fig.1.7(a) e (b) onde são apresentados campos de velocidades e pressão aproximados pelo método de Galerkin clássico e pelo método estabilizado GLS para o problema de um cilindro confinado entre placas planas.



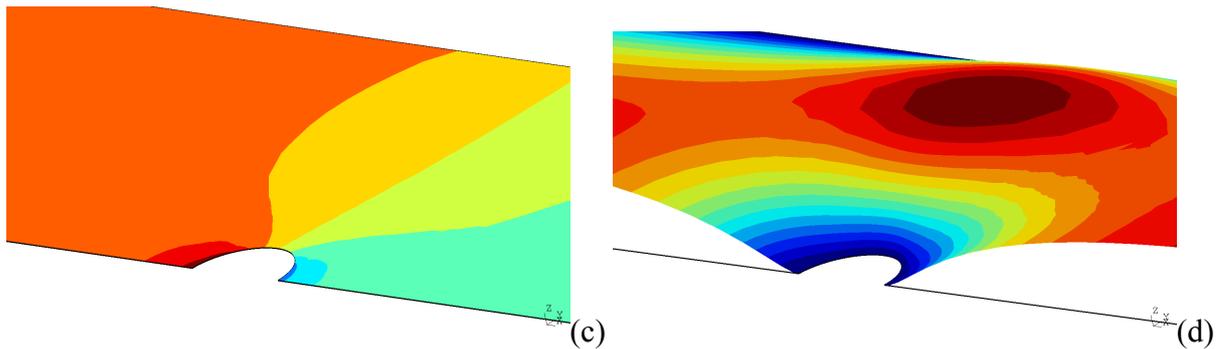


Figura 1.7 – Comparação entre soluções obtidas entre o método de Galerkin clássico e o método GLS: (a) campo de velocidades pelo método de Galerkin clássico; (b) campo de pressões pelo método de Galerkin clássico; (c) campo de velocidades pelo método GLS; (d) campo de pressões pelo método GLS

A fim de sanar estes problemas, desenvolveu-se métodos estabilizados, no qual foi desenvolvido o método *streamline-upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG). Dentre os métodos desenvolvidos a partir do método SUPG destaca-se, o chamado método Galerkin mínimos-quadrados (GLS), introduzido por Hughes et al., 1987 no contexto do problema de Stokes. Como contribuição, esta metodologia adicionou termos dependentes de malha ao método clássico de Galerkin de forma a aumentar a estabilidade da formulação original, apresentado assim, soluções com campos mais suaves de suas incógnitas (Fig.1.7(c) e (d)) sem a necessidade de uma maior refinamento da discretização do problema. Dada a sua grande flexibilidade, a metodologia GLS vem sendo aplicada a uma extensa gama de problemas de fluidos, como atestam os trabalhos de Franca e Frey, 1992; Franceschini e Frey, 2003; Zinani e Frey, 2006; Coronado et al., 2006; Labeur e Wells, 2007; Blasco, 2008; Berrone e Marro, 2009. Para os problemas simulados nesta tese empregou-se o método GLS, ao qual, mostrou-se capaz de superar as dificuldades citadas acima, e apresentando resultados muito satisfatórios.

### 1.3 Estado da arte

#### 1.3.1 Fluidos Tixotrópicos

Um dos trabalhos pioneiros no estudo de tixotropia, D. Acierno (1976) apresentou uma equação constitutiva não linear para polímeros fundidos e soluções concentradas. Com base nos resultados conhecidos de teorias de rede, o modelo apresentado contém um traço diferenciado em relação ao modelos da época: a de deixar que o tempo de relaxação dependa da estrutura existente. O modelo estende a equação constitutiva de viscoelasticidade linear

para a região não-linear de uma forma bem definida, com apenas um único parâmetro ajustável. Resultados do modelo para casos comuns de resposta não-linear são apresentados e discutidos.

Com as pesquisas de efeitos tixotrópicos avançando, J. Mewis (1979), estudou a evolução do conceito de tixotropia e uma definição generalizada é apresentada. Os vários métodos experimentais da época são apresentados com o qual medições de tixotropia podem ser realizadas. As dificuldades específicas experimentais encontradas com os sistemas em questão são discutidas. Os materiais tixotrópicos ou anti-tixotrópicos são classificados em grupos de acordo com sua origem ou aplicação. O quadro resultante é usado para deduzir as características que acompanham os fenômenos tixotrópicos. Isto leva a uma discussão dos efeitos do tempo, em termos da estrutura molecular ou microscópica. É feita uma tentativa de proporcionar uma descrição sistemática dos modelos publicados até aquele momento e possíveis equações constitutivas para materiais tixotrópicos.

Com um avanço de décadas de estudos, Barnes (1997), apresentou uma revisão sobre o assunto onde o fenômeno da tixotropia é descrito e discutido, apresentando a evolução do conceito no passar dos anos. Experimentos típicos e comportamentos do fluido são apresentados e analisados. A relação entre tixotropia e viscoelasticidade, reversibilidade e modelagem também são discutidos. Uma lista de diferentes exemplos de sistemas tixotrópicos é apresentada, assim como, vários tipos de teorias que foram propostas para descrever matematicamente o fenômeno são listadas. Este trabalho demonstra um novo interesse da classe científica sobre o assunto, descrevendo o estudo de tixotropia como um assunto atual e com grandes desafios.

Com o crescimento do interesse sobre os efeitos tixotrópicos, novos trabalhos e modelos são apresentados. Mujumdar et al. (2002) desenvolveu um modelo para descrever o comportamento dos escoamentos de fluidos tixotrópicos com tensão de escoamento, com base no processo cinético responsável pelas alterações estruturais no fluido. Portanto, um parâmetro de estruturação que indica o nível de estrutura do material é definido. A resposta reológica é uma função da estrutura material, e os efeitos de tempo são levados em conta na equação de evolução para o parâmetro de estruturação. Na equação constitutiva proposta, a tensão total é uma combinação de tensões elásticas e viscosas, ponderada pelo parâmetro de estruturação  $\lambda$ . Quando a estrutura material se rompe, um comportamento viscoso começa a ocorrer, fazendo com que diminua a elasticidade. Uma análise e comparação de dados experimentais envolvendo escoamentos de cisalhamento oscilatório são apresentados para avaliar a precisão do modelo.

Modelar problemas reais de engenharia para materiais com efeitos tixotrópicos tornou-se interessante para pesquisadores e Petera et al. (2004), propôs um modelo reológico não-isotérmico para prever o comportamento tixotrópico de ligas metálicas em processos de tixoconformação. O modelo proposto utiliza uma abordagem bi-fásica para a descrição do escoamento com duas equações de conservação de momentum interligadas por uma pressão comum e uma interface de força de arrasto. Os fenômenos tixotrópicos que ocorrem na da estrutura globular da liga são modelado por meio de uma equação cinética adicional descrevendo o grau de aglomeração. Os processos não isotérmicos são governados pela equação de conservação de energia térmica juntamente com uma relação entre temperatura-entalpia e uma fração sólida. É utilizado o método de elementos finitos para resolver o problema numérico e os resultados comparados com experimentos disponíveis na literatura, com bons resultados.

Konraad Dullaert (2006), apresentou um modelo de cinética estrutural geral para descrever o comportamento de escoamentos de sistemas tixotrópicos baseados em meios de suspensão inelásticos. A tensão total é dividida em contribuições elásticas estrutura-dependentes e viscosas. A equação cinética para o parâmetro de estrutura apresentada leva em conta o efeito de cisalhamento na quebra e reconstrução da estrutura, assim como o efeito do movimento browniano de reconstrução. O relaxamento e deformação dos flocos também são incluídos nesta equação. Tanto a cinética como as equações de relaxamento contêm uma distribuição de constantes de tempo. As previsões deste modelo, assim como as de dois modelos representativos na literatura, são comparadas com os dados experimentais.

Com o interesse e rápido avanço sobre as pesquisas dos efeitos tixotrópicos, Mewis e Wagner (2009) apresentaram uma nova revisão sobre o assunto e observaram que diferentes abordagens têm sido utilizadas para a modelagem de tixotropia. Modelos fenomenológicos que descrevem o comportamento do escoamento com o auxílio do parâmetro de estrutura material relacionado com a microestrutura do fluido são apresentados. Outra abordagem apresentada é baseada nos princípios gerais da mecânica contínuo, que segue o procedimento utilizado para descrever viscoelasticidade usando as funções de memória para levar em conta os efeitos do tempo.

Apesar de todos esforços de pesquisadores, modelos que descrevem o comportamento de uma forma mais geral de materiais tixotrópicos ainda são escassos. Com objetivo de descrever de um modo geral tal fluido, de Souza Mendes (2009), apresentou uma nova abordagem para a modelagem do comportamento mecânico de fluidos viscoplásticos tixotrópicos. Curvas de escoamento não-monotônicas, picos de tensão durante a quebra da

microestrutura com taxa de cisalhamento constante e bifurcação da viscosidade, são alguns dos aspectos comuns de Fluidos Estruturados Tixotrópicos, que foram previstos pelo modelo apresentado. O modelo apresenta duas equações de evolução, uma para a tensão e a outra para o parâmetro de estrutura, com uma base física clara. Mostrou-se que o modelo é capaz de prever corretamente o comportamento observado nos habituais escoamentos reométricos transientes, entre os quais as mudanças bruscas das taxas de cisalhamento (experimentos de acúmulo ou quebra da microestrutura) e mudanças bruscas da tensão de cisalhamento (experimentos de bifurcação da viscosidade). O modelo é indiferente ao referencial e aplicável aos escoamentos complexos. O modelo foi empregado em diferentes escoamentos e testes reológicos, e os resultados demonstraram uma boa capacidade de previsão.

### 1.3.2 Fluidos Elásticos

Fluidos que apresentam elasticidade foram minuciosamente estudados nas últimas décadas o que acarretou o desenvolvimento de muitos modelos e trabalhos sobre o assunto. Visando citar os trabalhos mais recentes, podemos citar Yurun Fan et al. (1999), onde em seu artigo usaram três formulações (EVSS, DEVSS, MIX1), combinadas com algoritmo de elemento finito com formulação SUPG para resolver as equações constitutivas viscoelásticas em três problemas: o escoamento do fluido de Maxwell convectado superior entre cilindros excêntricos, o escoamento do fluido Maxwell em torno de uma esfera interna a um tubo e do escoamento de fluidos de Maxwell e Oldroyd-B em torno de um cilindro confinado em um canal. Os resultados são verificados com trabalhos publicados anteriormente e uma boa concordância foi obtida.

Alves et al. (2001) utilizaram o método numérico de Oliveira et al. (1998), para o escoamento em torno de um cilindro confinado entre placas planas. O procedimento numérico foi baseado no método de volumes finitos, empregando uma malha não estruturada, com um arranjo das variáveis dependentes, e fazendo uso de uma interpolação diferenciada para evitar uma dissociação entre tensão-velocidade. Dois sistemas de alta resolução (MINMOD e SMART) são aplicados para representar os termos convectivos nas equações constitutivas de Maxwell convectada superior e fluidos Oldroyd-B. São apresentados resultados para o coeficiente de arrasto e comparado com resultados de trabalhos anteriores. Perfis de velocidade e tensão são apresentados para vários números de Deborah.

Explorando o mesmo problema do escoamento de fluidos elásticos em torno de um cilindro confinado entre placas planas, Behr et al. (2004) estudaram uma formulação de

elementos finitos estabilizada de três-campos de Galerkin Mínimos-Quadrados para fluidos viscoelásticos de Oldroyd-B para vários números de Weissenberg. Para abordar a questão da fraca consistência exibida pela baixa ordem das interpolações de velocidade, foi empregado um recuperador do gradiente de velocidades e estudado o modo como esta abordagem afeta a qualidade dos resultados obtidos. Foi mostrado que as quantidades características do escoamento obtidas com a nova formulação estão de acordo com os resultados obtidos pelo método DEVSS padrão.

Ju Min Kim et al. (2005) em seu trabalho apresentam aproximações de escoamentos de fluidos viscoelásticos em uma contração planar 4:1 transiente, usando um método de elementos finitos (EFM) e técnicas de estabilização (DEVSS-G/DG) com funções de interpolação linear de igual-ordem. O modelo Oldroyd-B foi utilizado como equação constitutiva. A intensidade do vórtice e o comprimento de recolamento do escoamento na quina apresentaram boa convergência e foram comparados com resultados anteriores da literatura.

Visando melhores performances numéricas em escoamentos de fluidos elásticos, novos métodos numéricos também foram desenvolvidos. Oscar M. Coronado et al. (2006) apresentaram um novo método de elementos finitos de Galerkin Mínimos-Quadrados (GLS) estabilizado para escoamentos viscoelásticos. Este novo método GLS introduz uma variável para representar o gradiente de velocidade, segundo a qual as equações de conservação de massa e momentum e a equação constitutiva material são convertidas em um conjunto equações diferenciais parciais de primeira ordem a quatro campos: pressão, velocidade, deformação e gradiente de velocidades – com estes campos aproximados por funções de elementos finitos de baixa ordem. O método proposto é aplicado à equação constitutiva de Oldroyd-B e testado em dois problemas: o escoamento no interior de um canal plano e o escoamento ao redor de um cilindro interno a um canal.

Também utilizado o aproximações de elementos finitos de Galerkin Mínimos-quadrados (GLS) para o tensor extra-tensão, pressão e velocidade, Frey et al (2009), apresenta uma investigação numérica de fluidos de Maxwell-b. Esta formulação tem a vantagem de permanecerem estáveis em regiões localmente elástico dominadas, mesmo para escoamentos que empregam uma combinação de igual ordem para interpolações de elementos finitos. O desempenho da formulação proposta é avaliado através da análise do escoamento em torno de um cilindro confinado entre duas placas paralelas, para números de Deborah variando de 0 a 0,9. Os resultados numéricos obtidos confirmam as boas características da formulação GLS, uma vez que são obtidas soluções estáveis com o aumento dos efeitos elásticos.

### 1.3.3 Fluidos Viscopoplásticos

Importantes fluidos industriais podem ser modelados como fluidos viscopoplásticos, o que gerou um grande desenvolvimento e interesse sobre este tipo de material nas últimas décadas. Apesar dos modelos desenvolvidos não apresentarem efeitos elásticos – o que o modelo de Fluidos Estruturados Tixotrópicos pode prever – comportamentos de materiais como petróleo, lamas de perfuração, alguns cosméticos e condimentos alimentares são bem modelados como fluidos viscopoplásticos. Um importante trabalho que gerou grande desenvolvimento na pesquisa de fluidos viscopoplásticos foi o de Papanastasiou (1987), onde estudou escoamentos permanentes bidimensionais de fluidos de Bingham modelados através de uma equação constitutiva regularizada, válida para todo escoamento – seja nas regiões onde ocorre escoamento como nas regiões onde praticamente o material não escoa. As equações de conservação e a relação constitutiva foram resolvidas simultaneamente via método de elementos finitos de Galerkin clássico e o esquema iterativo de Newton. Esta análise foi aplicada para o escoamento em um canal unidimensional, para o escoamento de uma camada limite bidimensional e para o escoamento de uma extrusão bidimensional. As aproximações de elementos finitos concordaram satisfatoriamente com soluções analíticas disponíveis para casos assintóticos.

Utilizando a regularização apresentada por Papanastasiou para a equação constitutiva de Herschel-Bulkley, Alexandrou et al. (2001) relataram em seu artigo um estudo sobre escoamentos permanentes de fluidos viscopoplásticos em expansões planares tridimensionais com razão de aspecto 1:2: e 1:4. O escoamento foi aproximado numericamente empregando uma formulação mista de elementos finitos de Galerkin acoplado a um método iterativo de Newton. Os autores apresentaram resultados para a topologia das regiões de escoamento e rígida ao longo das expansões (*yielded/unyielded regions*) como uma função dos números de Bingham, de Reynolds e do índice *power-law*. Seus resultados revelaram forte dependência entre os números de Reynolds e Bingham e suas influências na formação e destruição das zonas de estagnação nas quinas da expansão, e no tamanho e localização das regiões dos *plug flows* (escoamento tampão).

Pascal Jay et al. (2001) realizaram simulações numéricas de escoamentos através de uma expansão 1:4 axissimétrica abrupta, usando os modelos de fluidos de Herschel-Bulkley e Bingham com modelo de bi-viscosidade. Eles analisaram a influência da pseudoplasticidade,

da inércia, da tensão limite de escoamento, a estrutura dos escoamentos e suas perdas de cargas. Os resultados numéricos foram obtidos comparados com resultados experimentais apresentando uma ótima concordância.

Uma importante pesquisa que serve de comparação para muitos trabalhos de estudo dos fluidos viscoplásticos foi apresentado por Mitsoulis (2001). Em seu trabalho, Mitsoulis apresenta simulações numéricas escoamentos *creeping flow* para fluidos de Bingham regularizados escoando em torno de um cilindro confinado entre duas placas planas. Escoamentos em diferentes razões de aspecto dadas pela razão entre o raio do cilindro e altura do canal são simulados. Resultados para *yielded/unyielded zones* são apresentados assim como o coeficiente de arrasto para materiais viscoplásticos de Bingham.

Semelhante a função viscosidade para um estado de equilíbrio utilizada no modelo de Fluidos Estruturados Tixotrópicos, de Souza Mendes et al. (2004) propuseram uma nova função de viscosidade para fluidos com alta pseudoplasticidade e com tensão limite de escoamento. Essa função é contínua e apresenta um platô para baixas taxas de cisalhamento, seguido por uma queda brusca da viscosidade para valores da taxa de cisalhamento limiar (tensão limite), e uma subsequente região de *power-law*. A equação foi ajustada para os dados de duas soluções aquosas de Carbopol com diferentes concentrações, para fluidos de perfuração, para emulsão água/óleo e maionese comercial. Os resultados obtidos mostram-se plenamente satisfatórios.

Em 2007, de Souza Mendes et al. analisaram o escoamento axissimétrico de um fluido viscoplástico através de uma expansão abrupta seguida de uma contração abrupta, utilizando-se da função viscosidade proposta em seu trabalho de 2004. Os resultados obtidos nas simulações numéricas foram comparado à resultados obtidos com experimentos de visualização de escoamentos com uma solução aquosa de Carbopol em diferentes concentrações.

O efeito dos parâmetros de inércia e reológicos sobre o escoamento de fluidos viscoplásticos no interior de uma cavidade é investigado em Santos et al. (2011). O comportamento do material viscoplástico é descrito pelo modelo introduzido por de Souza Mendes, 2007 – posteriormente chamado de fluido SMD. As equações de balanço incompressíveis, acopladas com o modelo não-linear e SMD, são aproximadas pelo método multi-campos de Galerkin Mínimos-quadrados em termos do tensor extra-tensão, pressão e velocidade. A influência da inércia e parâmetros reológicos na morfologia da *yield surface* é analisado e discutido.

## 1.4 Sinopse do trabalho

Esta tese é composta dos seguintes itens:

- Capítulo 1 – Introdução: motivação da tese, revisão bibliográfica, apresentação dos principais comportamentos reológicos, introdução ao método numérico e sinopse da tese.
- Capítulo 2 – Fundamentação teórica: estudo da cinemática e dinâmica dos corpos contínuos, modelagem mecânica com a definição de grandezas e leis de conservação da mecânica utilizadas na modelagem de problemas de escoamentos de Fluidos Não-Newtonianos, estudo da teoria constitutiva para o comportamento material de Fluidos Estruturados Tixotrópicos, apresentação da equação evolutiva do parâmetro de estruturação;
- Capítulo 3 - Método dos elementos finitos: descrição do método de elementos finitos, Formulação de Galerkin mínimos-quadrados em multi-campos campos e métodos de solução;
- Capítulo 4 - Resultados numéricos: escoamentos de Fluidos Estruturados Tixotrópicos em torno de um cilindro confinado entre duas placas planas e em uma expansão abrupta, análise e investigação numérica.
- Capítulo 5 – Conclusões: fechamento da tese com as principais tópicos estudados e resultados atingidos.
- Capítulo 6 – Referências bibliográficas: são encontradas as referências bibliográficas citadas no texto.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: PRINCÍPIOS BÁSICOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO E MODELAGEM MECÂNICA.

Nesta seção será apresentada a fundamentação teórica necessária para o entendimento desta tese. De acordo com o modelo proposto em de Souza Mendes (2009), considerando um domínio aberto  $\Omega$  no  $\mathfrak{R}^2$ , delimitado por uma fronteira poligonal regular, no qual um fluido estruturado assume um escoamento *creeping flow*. tal escoamento pode ser descrito como de costume pelas equações de conservação de massa e de balanço de momentum, juntamente com uma equação de Maxwell-b modificada e uma equação de evolução para o parâmetro de estruturação. As equações que formam o modelo mecânico proposto estão fundamentadas de acordo com os princípios da mecânica do contínuo que baseia-se na hipótese de que a massa é distribuída continuamente no espaço, desprezando-se os fenômenos em nível molecular.

### 2.1 Cinemática

Como definição de cinemática podemos afirmar que é o estudo das alterações geométricas em um contínuo sem levar em conta as forças que as provocam. Nesta seção estaremos introduzindo alguns conceitos e definições de cinemática relevantes ao estudo realizado.

#### 2.1.1 Configuração de Referência e movimento

Começamos esta seção definindo que qualquer elemento  $\zeta$  de um corpo é chamado de partícula ou partícula material. Uma partícula material é um primitivo, no sentido de que ela não está definida, mas as suas propriedades são descritas.

A configuração do corpo pode ser descrita como um mapeamento contínuo deste conjunto de partículas materiais em uma região do espaço  $E$  estudados em uma geometria elementar, assim:

$$\begin{aligned} x &= X(\zeta) \\ \zeta &= X^{-1}(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde o ponto  $x$  de  $E$  é dito como o lugar ocupado pela partícula  $\zeta$  e  $\zeta = X^{-1}(x)$  a partícula cujo lugar em  $E$  é  $x$ . É completamente equivalente para descrever a configuração de um corpo em termos do vetor posição  $\mathbf{x}$  do ponto  $x$  em relação à origem  $O$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \chi(\zeta) \\ \zeta &= \chi^{-1}(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (2.2)$$

onde  $\chi^{-1}$  indica a inversa do mapeamento  $\chi$ . Com uma origem  $O$  sendo definida, é uma ambiguidade referir  $\mathbf{x}$  como o lugar ocupado pela partícula  $\zeta$  e  $\zeta = \chi^{-1}(\mathbf{x})$  a partícula cujo o lugar é  $\mathbf{x}$ .

Um movimento de um corpo é uma família de parâmetros da configuração de um corpo, e o parâmetro real  $t$  é o tempo. Podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \chi(\zeta, t) \\ \zeta &= \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\quad (2.3)$$

É interessante agora descrever uma partícula material com a sua posição numa configuração de referência,  $\kappa$ , do corpo. Esta configuração de referência pode ser, mas não necessariamente precisa ser, um lugar realmente ocupado pelo corpo no decurso do seu movimento. O lugar de uma partícula em  $\kappa$  será denotado por:

$$\mathbf{X} = \kappa(\zeta)\quad (2.4)$$

A partícula no local  $\mathbf{X}$  na configuração  $\kappa$  pode ser expressa como:

$$\zeta = \kappa^{-1}(\mathbf{X})\quad (2.5)$$

O movimento de um corpo é então descrito como:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \chi(\zeta, t) \\ &= \chi_{\kappa}(\mathbf{X}, t) \\ &= \chi(\kappa^{-1}(\mathbf{X}), t)\end{aligned}\quad (2.6)$$

Podemos observar que a partícula que estava na posição  $\mathbf{X}$  na configuração de referência é no tempo  $t$  na posição  $\mathbf{x}$ . Esta expressão define uma família de deformações da configuração de referência. O vetor  $\mathbf{X}$  determina a posição de  $\zeta$  em relação à origem  $O$ , quando o corpo está na configuração de referência  $\kappa$ . Se este vetor for apresentado em termo de coordenadas cartesianas, podemos expressar a Eq.2.6 como:

$$\mathbf{x} = \chi_{\kappa}(X_1, X_2, X_3, t) \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{X} = X_i e_i$ . Esta é chamada de descrição Lagrangiana do movimento. Note que  $\mathbf{X} = \chi_{\kappa}(\mathbf{X}, 0)$ . Coletivamente  $\chi_{\kappa}(\mathbf{X}, t)$ ,  $\mathbf{X} \in \kappa$  nos dá uma descrição espacial do movimento. Uma vez que  $\chi$  é invertido,

$$\mathbf{X} = \chi_{\kappa}^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.8)$$

temos a referência em termos da configuração atual.

### 2.1.2 Campos de Velocidade e Aceleração

O campo de velocidade e a aceleração são definidos como

$$\hat{\mathbf{u}} = \partial_t \chi_{\kappa}(\mathbf{X}, t) \quad (2.9)$$

e

$$\hat{\mathbf{a}} = \partial_t^2 \chi_{\kappa}(\mathbf{X}, t) \quad (2.10)$$

respectivamente.

Costuma-se referir ao campo de velocidades e à aceleração como funções da posição atual, assim chamado de descrição Euleriana. Isto é feito usando a Eq.2.8.

Escrevendo como o campo de velocidades Euleriano, podemos dizer que o campo de aceleração é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \partial_T \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{u} \cdot \partial_t \mathbf{x} \\ &= \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{u},\end{aligned}\quad (2.11)$$

onde introduzimos o tensor gradiente de velocidade como:

$$\mathbf{L} = (\partial_x \mathbf{u})^T = (\nabla \mathbf{u})^T \quad (2.12)$$

### 2.1.3 Derivada Material

A derivada em um campo espacial incorporada na Eq.2.11 é chamada de derivada material,

$$d_t(\cdot) = \partial_t(\cdot) + \mathbf{u} \cdot \nabla(\cdot) \quad (2.13)$$

onde a quantidade  $(\cdot)$  representa uma variável genérica ao qual se está derivando, A parte simétrica do gradiente de velocidade é chamada de tensor taxa de deformação,  $\mathbf{D}$ , e a parte anti-simétrica é chamada de tensor vorticidade,  $\mathbf{W}$ ,

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T). \quad (2.14)$$

### 2.1.4 Mudanças de referencial

Para um melhor entendimento de um sistema de referência, observe o seguinte exemplo: coloque um vetor  $\mathbf{A}$  sobre uma superfície  $S$ , como mostrado na Fig.2.1(a), e tome uma das bordas desta superfície, que se encontra no canto inferior esquerdo, como o seu sistema de referência para a posição. O vetor  $\mathbf{A}$  aponta para longe  $\mathbf{b}_2$  e em direção à  $\mathbf{b}_1$ . Sem mover o vetor, transfira o sistema de referência para o canto superior do lado esquerdo da superfície. O vetor  $\mathbf{A}$  agora parece apontar para a interseção de  $\mathbf{b}_1$  e  $\mathbf{b}_2$  como mostra a Fig.2.1(b).

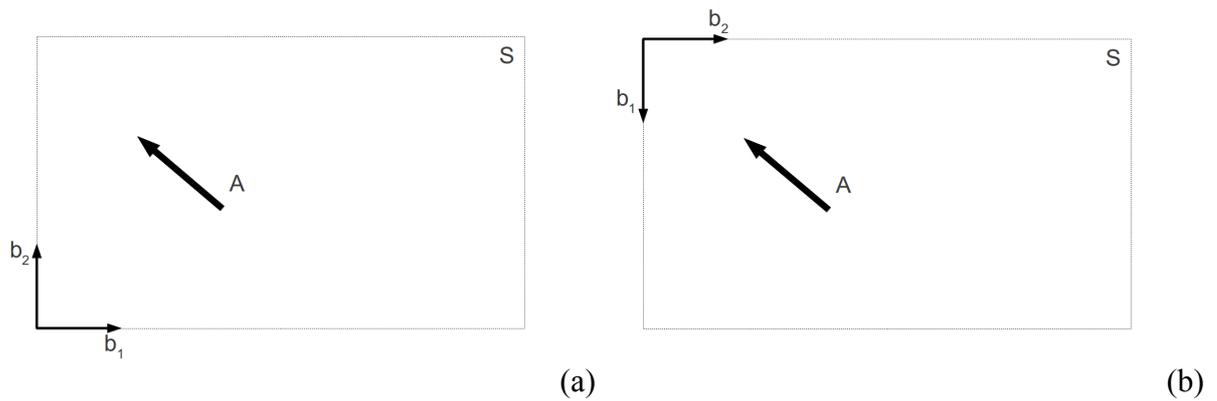


Figura 2.1 – Sistema de referencial: (a) referencial inicial; (b) referencial final.

Uma vez que todos os objetos que definem um referencial não se encontram no mesmo plano, pode-se visualizar a sua substituição por três vetores unitários mutuamente ortogonais (Fig.2.2(a)).

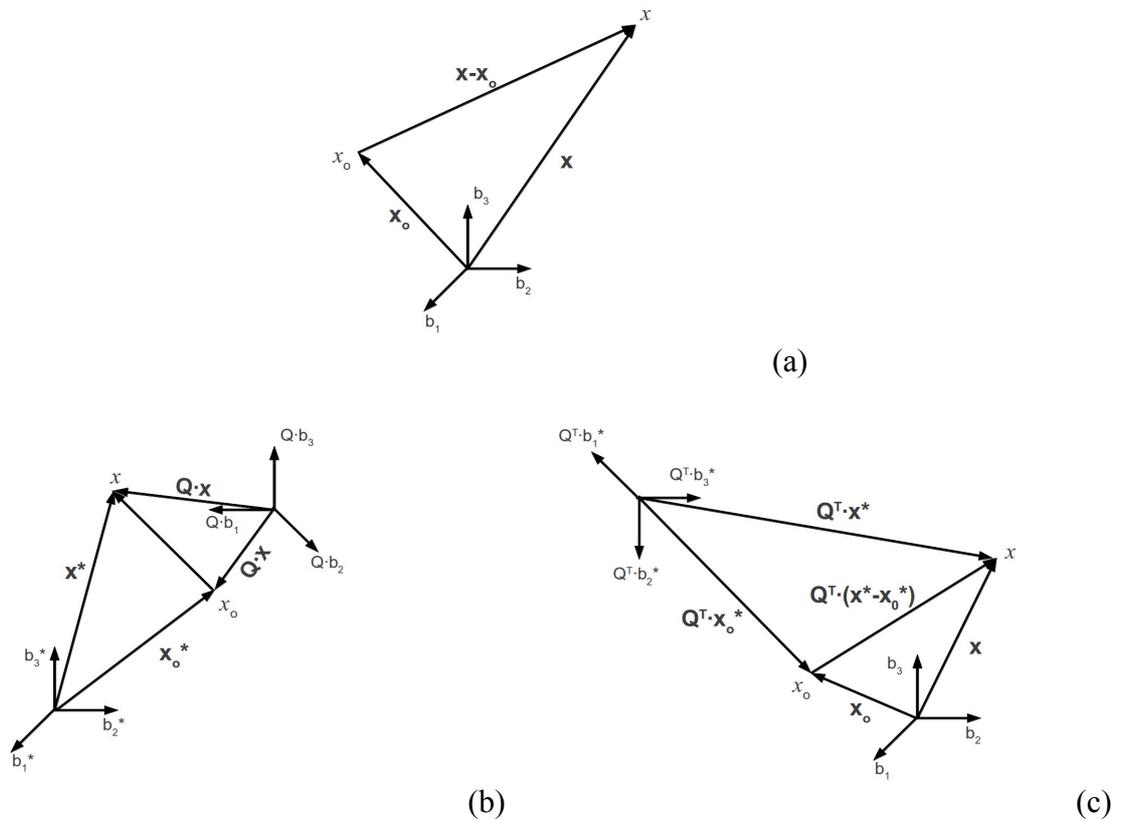


Figura 2.2 – Localização de vetores: (a) em relação a um referencial fixo; (b) em relação a um referencial transformado; (c) em relação a um referencial fixo após transformação

Observa-se um ponto  $x$  típico neste espaço, em relação a dois sistemas de referência:  $\mathbf{b}_i$  ( $i=1,2,3$ ) na Fig.2.2(a) e  $\mathbf{b}_j^*$  ( $j=1,2,3$ ). Uma transformação ortogonal preserva ambos os comprimentos e ângulos. Seja  $\mathbf{Q}$  a transformação ortogonal que descreve a rotação e (possivelmente) a reflexão que leva a  $\mathbf{x}_i$  (sendo  $i=1,2,3$ ) na Fig.2.2(a) nos vectores  $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x}_i$ , que são observados na Fig.2.2(c) com respeito ao referencial “\*” para a posição. Uma reflexão permite a possibilidade de que um observador no novo sistema de referência olhe para o antigo referencial através de um espelho. Alternativamente, um reflexo permite a possibilidade de que dois observadores orientem-se opostamente.

O vector  $(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$  na Fig.2.2(a) torna-se  $\mathbf{Q}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$  quando visto no referencial “\*” mostrado na Fig.2.2(b). A partir da Fig.2.2(b), segue-se também que

$$\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0^* = \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2.15)$$

Da mesma forma,  $(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0^*)$  na Fig.2.2(b) é visto como  $\mathbf{Q}^T(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0^*)$  quando observado com respeito ao referencial sem “\*” na Fig.2.2(c). A Fig.2.2(c) também deixa claro que

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0^*) \quad (2.16)$$

Seja  $\mathbf{x}$  e  $t$  uma posição e tempo no referencial antigo, e  $\mathbf{x}^*$  e  $t^*$  são a posição e o tempo correspondentes no novo referencial, podemos escrever a forma mais geral para a mudança de referencial como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{x}_0^*(t) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ t^* &= t + a \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde a forma da Eq.2.17 permite que os dois referenciais discutidos nas Fig.2.3 possam rotar e transladar um em relação ao outro, como funções do tempo. Equivalentemente, podemos também escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0^*) \\ t &= t^* + a \end{aligned} \quad (2.18)$$

É importante distinguir cuidadosamente entre um referencial para a posição e um sistema de coordenadas. Qualquer sistema de coordenadas pode ser usado para localizar pontos no espaço em relação aos três vectores que definem um referencial.

Se pensarmos em  $(x_1, x_2, x_3)$  estando em um sistema de coordenadas cartesianas retangulares associados com um referencial  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ , do mesmo modo que,  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  em um sistema de coordenadas cartesianas retangulares associados a outro referencial  $(\mathbf{b}_1^*, \mathbf{b}_2^*, \mathbf{b}_3^*)$ , diremos que estes dois sistemas de coordenadas são os mesmos, se a orientação dos campo das bases  $\mathbf{e}_i$  em relação ao vectores  $\mathbf{b}_j$  é idêntica à orientação do campo de bases  $\mathbf{e}_i^*$  em relação aos vectores de  $\mathbf{b}_j$ :

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{b}_j = \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{b}_j^* \quad \text{para todo } i, j = 1, 2, 3 \quad (2.19)$$

Utilizando o mesmo sistema de coordenadas cartesianas retangulares para discutir a mudança de referenciais ilustrada na Fig.2.2, o tensor ortogonal,

$$\mathbf{Q} = Q_{ij} \mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j \quad , \quad (2.20)$$

descreve a rotação (e, possivelmente, a reflexão), que transforma os vectores base  $\mathbf{e}_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) nos vectores

$$\mathbf{Q} \mathbf{e}_j = Q_{ij} \mathbf{e}_i^* \quad , \quad (2.21)$$

que são vectores expressos em termos do referencial “\*” para a posição. Os componentes retangulares cartesianas de  $\mathbf{Q}$  são definidos pelos ângulos entre  $\mathbf{e}_i^*$  e  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j$ :

$$Q_{ij} = \mathbf{e}_i^* \cdot (\mathbf{Q} \mathbf{e}_j) \quad (2.22)$$

O vetor  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  na Fig.2.2(a) torna-se

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = Q_{ij} (x_j - x_{0j}) \mathbf{e}_i^* \quad (2.23)$$

quando visto no referencial “\*”, mostrado na Fig.2.2(b) A partir da Fig.2.2(b), segue-se também que

$$z_i^* e_i^* = z_0^* e_i^* + Q_{ij} (z_j - z_{0j}) e_i^* \quad (2.24)$$

Podemos definir que uma quantidade é indiferente ao referencial quando permanece inalterado ou invariante, sob todas as mudanças de estrutura. Se um escalar  $b$  for indiferente ao referencial não muda seu valor, então:

$$b^* = b \quad (2.25)$$

Um vetor espacial indiferente ao referencial continua a ser o mesmo elemento de linha dirigido sob uma mudança de referencial, no sentido em que se  $\mathbf{u} = \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2$  e  $\mathbf{u}^* = \mathbf{z}_1^* - \mathbf{z}_2^*$ . Pela Eq.2.15

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \mathbf{Q}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \\ &= \mathbf{Q} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Um tensor de segunda ordem indiferente ao referencial é aquele que transforma vetores espaciais indiferentes ao referencial, em vetores espaciais indiferentes ao referencial. Se,

$$\mathbf{u} = \mathbf{T} \mathbf{w} \quad , \quad (2.27)$$

o requisito de para que  $\mathbf{T}$  seja um tensor de segunda ordem indiferente ao referencial é

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{T}^* \mathbf{w}^* \quad , \quad (2.28)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \mathbf{Q}^* \mathbf{u} \\ \mathbf{w}^* &= \mathbf{Q}^* \mathbf{w} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Isto significa que

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \mathbf{u} &= \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{w} \\ &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{w} \end{aligned} \quad (2.30)$$

o que implica em

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}^T \mathbf{T}^* \mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{T}^* = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T \quad (2.31)$$

A importância das alterações de referencial se tornará aparente na seção 2.4.1, onde o princípio de indiferença ao referencial é introduzido. Este princípio será usado repetidamente para discutir as representações de comportamento material.

## 2.2 Gradiente de deformação e tensores de deformação

### 2.2.1 Gradiente de Deformação

O gradiente de  $\mathbf{x}$  com respeito a  $\mathbf{X}$  é chamado de gradiente de deformação, onde

$$\mathbf{F} = (\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{x})^T \quad (2.32)$$

No tempo  $t=0$  o valor inicial de  $\mathbf{F}$  é

$$\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}, \quad (2.33)$$

onde  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade. A massa na região  $V$  é

$$\int_V \rho \, dx = \int_{V_0} \rho |J| \, dX, \quad (2.34)$$

onde  $J = \det \mathbf{F}$  e  $V_0$  é a região ocupada pela configuração de referência. Desta maneira,  $\det \mathbf{F} > 0$ , para que o mapeamento não seja degenerado. Para um fluido incompressível, a restrição cinemática é  $\det \mathbf{F} = 1$ .

Por causa da regra da cadeia,

$$(\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{X})^T = \mathbf{F}^{-1} \quad (2.35)$$

A conexão entre a deformação e o gradiente de velocidades, em notação indicial, surge da igualdade

$$\begin{aligned} \partial_{X_j}(\partial_t \chi_{\kappa i}) &= \partial_t(\partial_{X_i} \chi_{\kappa i}) \\ \partial_{X_i} \hat{u}_i &= \partial_t F_{ij} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Usando a descrição Euleriana para a velocidade

$$\partial_{X_i} \hat{u}_i = \partial_{x_k} u_i \partial_{X_j} x_k = L_{ik} F_{kj} \quad (2.37)$$

onde temos,

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}\mathbf{F}, \quad \mathbf{F}(0) = \mathbf{I} \quad (2.38)$$

e onde o ponto superior denota a *time derivative*. Esta equação prevê um problema de valor inicial para  $\mathbf{F}$ .

### 2.2.2 Tensor Deformação de Cauchy-Green

O conceito de deformação é introduzido através da comparação do comprimento do elemento fluido no momento atual com a configuração de referência. Assim, a partir da definição do gradiente de deformação temos,

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}, \quad (2.39)$$

onde  $d\mathbf{X}$  é um elemento fluido no ponto  $\mathbf{X}$ , que no tempo  $t$  foi alterado para  $d\mathbf{x}$  no ponto  $\mathbf{x}$ , como mostra a Fig.2.3.

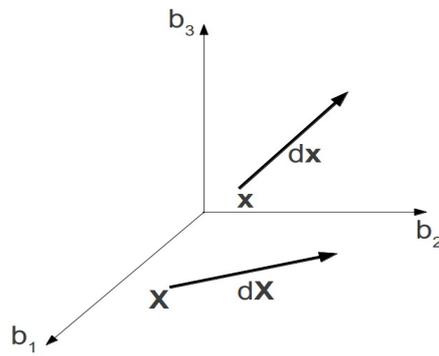


Figura 2.3 – Um elemento  $d\mathbf{X}$  em  $\mathbf{X}$  em  $t=0$  mudando para  $d\mathbf{x}$  em  $\mathbf{x}$  no tempo  $t$

Seu tamanho atual é

$$d\mathbf{x}^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = F_{ij} dX_j F_{ik} dX_k = d\mathbf{X} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} d\mathbf{X} \quad (2.40)$$

O tensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.41)$$

é portando uma medida das deformações do fluido, e é chamado de tensor de Cauchy-Green direito. O tensor de Cauchy-Green esquerdo é definido como

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (2.42)$$

O nome refere-se a decomposição polar direita ou esquerda de  $\mathbf{F}$ ,

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} \mathbf{U} (\text{direita}) = \mathbf{V} \mathbf{Q} (\text{esquerda}) \quad , \quad (2.43)$$

onde  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  são tensores simétrico positivo-definidos e  $\mathbf{Q}$  é um tensor ortogonal. Assim,

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \quad \mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \quad (2.44)$$

A inversa do tensor de Cauchy-Green também é usada, e é chamada de tensor deformação de Finger.

### 2.2.3 Tensor Deformação Relativo

A configuração de referência não possui um status matemático particular, embora possa ter um significado físico. Suponha que o  $\mathbf{X}$  de partícula no tempo  $t_1$  ocupa a posição  $P$ . Definindo o gradiente de deformação relativa,  $\mathbf{F}_t(t_1) = (\partial_x P)^T$ , e correspondentemente, o relativo tensor de Cauchy-Green direito (ou esquerdo),  $\mathbf{C}_t(t_1) = \mathbf{F}_t(t_1)^T \mathbf{F}_t(t_1)$ . Por causa da regra da cadeia temos,

$$\mathbf{F}_t(t_1) = \mathbf{F}(t_1) \mathbf{F}(t)^{-1} \quad (2.45)$$

## 2.3 Equações de balanço

### 2.3.1 Conservação de Massa

De acordo com o princípio da conservação de massa, tem-se que “a massa total de fluido no interior do volume  $\Omega$ , somente aumentará devido ao afluxo líquido de fluido através da fronteira  $\Gamma$  “. Matematicamente, aplicando o teorema da divergência de Gauss, o teorema de transporte de Reynolds e o teorema da localização, chega-se à forma diferencial Euleriana da equação da continuidade (Astarita e Marrucci 1972).

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (2.46)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do fluido e  $\mathbf{u}$  o vetor velocidade.

Empregando-se o conceito do operador derivada material de um campo escalar [Astarita e Marrucci, 1972] na Eq.2.46, pode-se ainda, obter a forma diferencial Lagrangeana da equação da continuidade,

$$\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.47)$$

e ainda sendo simplificada, onde  $\nabla \cdot \rho = 0$ ,

$$\partial_t \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.48)$$

Neste trabalho, foi imposta a hipótese de que o fluido estudado tenha sua massa específica constante. Esta hipótese faz com que a equação da continuidade, tanto na forma Euleriana (Eq.2.47) quanto na forma Lagrangeana (Eq.2.48), possa ser simplificada, tendo assim a seguinte forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.49)$$

### 2.3.2 Balanço de Momentum

Segundo o princípio da conservação de momentum, “a taxa de aumento de quantidade de movimento total do fluido no interior do volume  $\Omega$  é igual ao afluxo líquido de movimento através de suas fronteiras  $\Gamma$  mais à ação das resultantes das forças de contato e corpo atuando no fluido” [Astarita e Marrucci, 1972]. Matematicamente, aplicando-se os teoremas da divergência de Gauss, de transporte de Reynolds e da localização, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \partial_t (\rho \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} d\Omega \quad (2.50)$$

O termo das forças de contato, inicialmente aplicado à superfície do volume de controle, é garantido ser aplicado a um volume devido ao teorema do tensor de Cauchy.

**Teorema 2.1** - Teorema do Tensor Tensão de Cauchy: A existência do Tensor Tensão de Cauchy é garantida pelo seguinte teorema:

(i) O vetor tração satisfaz

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; -\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) \quad (2.51)$$

(ii) Existe um campo de tensor de segunda ordem  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  com as seguintes propriedades:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \quad (2.52)$$

e com os componentes em um referencial  $F=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , temos em notação indicial,

$$T_{ij}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i \quad (2.53)$$

Prova: Na Fig.2.4 é apresentada a construção de parâmetros no tetraedro com vértice no ponto  $x$  e altura  $h$ .

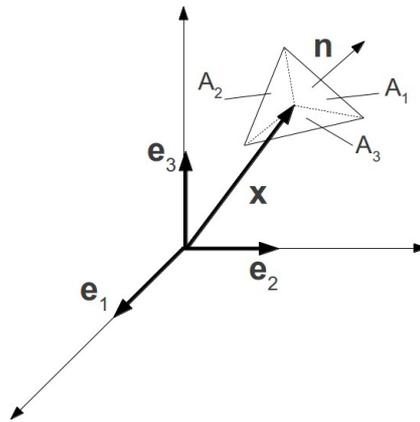


Figura 2.4 – Construção de parâmetros no tetraedro com vértice no ponto  $x$

A face normal a  $\mathbf{n}$  é a área  $A$ ; a face normal a  $-\mathbf{e}_i$  é a área  $A_i$ . A partir do cosseno direcional de  $\mathbf{n}$

$$A_i(h) = A(h) n_i \quad (2.54)$$

Além disto, o volume do tetraedro é  $V_h = 1/3 h A(h)$ .

Aplicando a Eq.2.50 no tetraedro - desprezando a derivada parcial da velocidade no tempo (hipótese de regime permanente):

$$\int_{V_h} \rho \mathbf{a}(\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}) = \int_{V_h} \rho \mathbf{b}(\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}) + \int_{A(h)} \mathbf{t}(\mathbf{y}; \mathbf{n}) dS(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^3 \int_{A(h)} \mathbf{t}(\mathbf{y}; -\mathbf{e}_j) dS(\mathbf{y}) \quad (2.55)$$

Pela continuidade de todos os campos de variáveis e o teorema do valor médio

$$(\rho \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mu) V_h = (\rho \mathbf{b}(\mathbf{x}) + \alpha) V_h + (\mathbf{t}(\mathbf{x}; \mathbf{n}) + \beta) A(h) + \sum_{j=1}^3 \llbracket \mathbf{t}(\mathbf{x}; -\mathbf{e}_j) \rrbracket A(h) n_j \quad (2.56)$$

onde  $\alpha(h)$ ,  $\beta(h)$ ,  $\beta_j(h)$ ,  $\mu(h)=o(1)$ ,  $h \rightarrow 0$ . Se dividir a Eq.2.56, por  $A(h)$  e permitir que  $h \rightarrow 0$ , obtemos

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}; \mathbf{n}) = - \sum_{j=1}^3 \mathbf{t}(\mathbf{x}; -\mathbf{e}_j) n_j \quad (2.57)$$

No caso onde  $\mathbf{n}=\mathbf{e}_i$  ( $i$  fixo)

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}; -\mathbf{e}_i) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{e}_i) \quad (2.58)$$

o que leva a Eq.2.58, devido a configuração arbitrária do referencial. Assim,

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}; \mathbf{n}) = \sum_{j=1}^3 \mathbf{t}(\mathbf{x}; \mathbf{e}_j) n_j \quad (2.59)$$

Da Eq.2.59, os componentes de  $\mathbf{t}$  são dados por

$$\begin{aligned} t_i(\mathbf{x}; \mathbf{n}) &= \mathbf{t}(\mathbf{x}; \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 \mathbf{t}(\mathbf{x}; \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i n_j \\ &= T_{ij}(\mathbf{x}) n_j \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde os componentes  $T_{ij}$  são definidos na Eq.2.53. Da regra do quociente,  $T_{ij}$  são de fato os componentes de um tensor de segunda ordem, assim, provando a existência do tensor de tensão.

Com todos os termos aplicados sobre o volume de controle, podemos obter a forma diferencial Euleriana da equação balanço de momentum (Eq.2.61), onde o seu lado esquerdo do sinal de igual representa as forças de inércia por unidade de volume atuantes no fluido, enquanto seu lado direito representa as forças de contato e de corpo atuantes no fluido, por unidade de volume,

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (2.61)$$

e a forma Lagrangeana da equação de balanço de momentum é dada pela Eq.2.62:

$$\rho D_t \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (2.62)$$

onde a descrição do escoamento é especificado apenas em função do tempo. Na Eq.2.62,  $\mathbf{g}$  é a força gravitacional por unidade de massa e o tensor  $\mathbf{T}$  é o tensor tensão, no qual estão armazenados as todas as tensões de superfície experimentadas por uma porção infinitesimal do fluido. Este tensor pode ser descrito da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.63)$$

sendo  $p$  a pressão hidrostática,  $\mathbf{I}$  o tensor identidade e  $\boldsymbol{\tau}$  o tensor-extra de tensão. Utilizando a hipótese já mencionada para fluidos incompressíveis, a equação de balanço de momentum apresenta a seguinte forma:

$$\rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (2.64)$$

## 2.4 Equações constitutivas

### 2.4.1 Requisitos de objetividade para Equações Constitutivas

Uma equação constitutiva é a declaração matemática de algumas suposições sobre o comportamento mecânico de um material, ou, mais geralmente, de uma classe de materiais. Tal declaração matemática deve satisfazer a exigência de que o comportamento dos materiais não pode depender de convenções artificiais que foram escolhidas para descrevê-lo matematicamente, ou seja, o mesmo comportamento deve ser descrito independentemente das convenções consideradas e invariantes a elas.

É evidente que uma equação constitutiva deve ser invariante a uma mudança de sistema de coordenadas. A escolha deste sistema, na verdade, é uma convenção usada para atribuir componentes para vetores e tensores. Quando uma equação constitutiva é escrita em uma forma tensorial, e dado um referencial para observação, os tensores envolvidos devem permanecer inalterados sob uma mudança do sistema de coordenadas, embora seus componentes possam mudar. Isto fica imediatamente óbvio quando tensores são definidos como operadores lineares, porque suas definições são independentes da escolha de qualquer sistema de coordenadas.

Uma exigência mais sutil, mas igualmente básica, de invariância de equações constitutivas é que elas permanecem inalteradas sob uma mudança de referencial, mesmo para um referencial tempo-dependente. Esta ideia pode tanto ser considerada como um postulado, ou aceita intuitivamente.

É importante se observar que a indiferença de referencial não é requerida por todas as leis da física: por exemplo a equação de balanço de momentum não é indiferente ao referencial. Na verdade a equação de balanço de momentum define um referencial “inercial”, e perde sua validade se um referencial escolhido é acelerado em relação a um referencial inercial.

Note que o princípio da objetividade material não implica uma suposição de isotropia do material. Materiais anisotrópicos devem obedecer o princípio da objetividade material. Se for o caso, o princípio da objetividade material implica uma suposição de isotropia do espaço: uma mudança de observador deve deixar o comportamento do material não afetado. Note também que o princípio da objetividade material é mais forte do que uma suposição de indiferença para com rotações, porque indiferença ao referencial também é exigida sob rotações indevidas. Apesar de sua aparente simplicidade, as aplicações do princípio podem ser difíceis, se considerarmos o quão recentemente foi afirmado em forma rigorosa. Isso pode ser parcialmente devido ao fato de que a exigência da indiferença de referencial não se aplique a equação de balanço de momentum, que é usada em conjunto com a equação constitutiva na solução de problemas práticos.

Na literatura encontra-se mais de uma equação constitutiva que não obedece ao princípio da objetividade material. Em particular, algumas equações da literatura sobre viscoelasticidade linear sofrem desta desvantagem, especialmente porque os dados experimentais disponíveis são ocasionalmente inúteis, na medida em que os resultados foram publicados na forma obtida após manipulação com base em uma equação constitutiva não-invariante.

Um terceiro requisito de invariante é uma invariância dimensional. Este requisito não impõe qualquer restrição sobre a forma da equação constitutiva, mas apenas implica que este deve conter um número mínimo de parâmetros dimensionais. Pode-se mostrar que, no caso mais geral, três parâmetros são necessários: dimensões de tensão, de tempo e de comprimento.

A exigência de invariância dimensional apresenta, através da análise dimensional, certas regras de escala para uma variedade de problemas em engenharia. Existem casos em que a exigência de invariância dimensional não possui regras de escala. A existência destas

regras se torna verdade apenas quando as formas linearizadas dos pressupostos constitutivos são escolhidos. Quando formas não-lineares são usadas, regras de escala só podem ser encontrada quando o mesmo material é utilizado, tanto no modelo quanto no protótipo. De fato, a validade assintótica da teoria linear é demonstrada principalmente pelo sucesso do uso de regras de escala aplicada à diferentes materiais, ao invés de confirmação experimental direta dos pressupostos fundamentais.

Finalmente, uma exigência que não é uma das invariâncias deve ser considerada: a saber, que a segunda lei da termodinâmica não deve ser violada. Esta exigência para um Fluido Newtoniano é simplesmente conhecida através da atribuição de um valor não-negativo para a viscosidade. Para pressupostos constitutivos mais complexos, o assunto não pode ser igualmente simples: a segunda lei da termodinâmica impõe restrições tanto para a equação de estado constitutiva e a de energia.

A exigência de que equações constitutivas permaneçam invariantes sob uma mudança de referencial, claramente impõe algumas restrições sobre as equações constitutivas. Quando todos os tensores que dela constam são transformados para o novo referencial, a equação constitutiva deve permanecer a mesma.

O primeiro tensor da equação constitutiva a ser considerando é o tensor tensão  $\mathbf{T}$ . É usado asteriscos para indicar vetores e tensores no referencial "novo". Temos então, a partir da definição de  $\mathbf{T}$ ,

$$d\mathbf{t} = \mathbf{T} d\mathbf{s} \quad (2.65)$$

$$d\mathbf{t}^* = \mathbf{T}^* d\mathbf{s}^* \quad (2.66)$$

A área do vetor,  $d\mathbf{s}$ , é obviamente indiferente por ser um vetor geométrico. Pelo postulado de que o vetor força de tensão,  $d\mathbf{t}$ , também é indiferente, temos

$$d\mathbf{s}^* = \mathbf{Q} d\mathbf{s} \quad (2.67)$$

$$d\mathbf{t}^* = \mathbf{Q} d\mathbf{t} \quad (2.68)$$

onde  $\mathbf{Q}$  é um tensor ortogonal. Pela combinação das Eq.2.65-2.68 obtemos

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}) d\mathbf{s} = (\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{Q}) d\mathbf{s} \quad (2.69)$$

para toda a superfície  $ds$ ; assim,

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T \quad (2.70)$$

e a Eq.2.70 mostra que o tensor tensão é indiferente.

Neste momento, pode-se apresentar a lógica pela qual este conceito foi provado. As Eq.2.65 e 2.66 tem a mesma forma e ambas são a definição do tensor  $\mathbf{T}$ . Em geral, se assume que a definição de um tensor é indiferente ao referencial: assim podemos escrever

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{a} \quad (2.71)$$

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{A}^* \mathbf{a}^* \quad (2.72)$$

onde ambas as equações definem  $\mathbf{A}$  como o operador linear que atribui para o vetor  $\mathbf{a}$ , o vetor  $\mathbf{b}$  – ambos vetores sendo previamente definidos. Se  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{a}$  são indiferentes, então  $\mathbf{A}$  é também indiferente. Em particular, considerando o tensor unitário  $\mathbf{I}$ , que é definido como

$$\mathbf{a} = \mathbf{I} \mathbf{a} \quad (2.73)$$

para todo vetor  $\mathbf{a}$ . Sendo assim,

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}^* = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \mathbf{I} \mathbf{Q}^T \quad (2.74)$$

e mostra que o tensor unitário e todo tensor isotrópico é indiferente.

Quando esse resultado é combinado com a Eq.2.70, é visto que o tensor-extra de tensão também é indiferente (a soma de dois tensores indiferentes é um tensor indiferente):

$$\boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{Q} \boldsymbol{\tau} \mathbf{Q}^T \quad (2.75)$$

Considerando agora o vetor gradiente de velocidades  $\nabla \mathbf{u}$  e sua definição temos:

$$\nabla \mathbf{u} d\mathbf{X} = d\mathbf{u} \quad (2.76)$$

$$\nabla \mathbf{u}^* d\mathbf{X}^* = d\mathbf{u}^* \quad (2.77)$$

onde  $d\mathbf{X}$  é um vetor geométrico e por isso é indiferente:

$$d\mathbf{X}^* = \mathbf{Q} d\mathbf{X} \quad (2.78)$$

Utilizando a equação de mudança de referencial representada por

$$\mathbf{X}^* - \mathbf{Y}(t) = \mathbf{Q}(t)(\mathbf{X} - \mathbf{Z}) \quad (2.79)$$

em que a Eq.2.79 nos dá a regra de transformação de um ponto, onde vamos interpretar  $\mathbf{X}(t)$  como a variável de posição com o tempo de uma partícula e, portanto,  $\mathbf{X}^*(t)$  como a posição correspondente da mesma partícula em um referencial diferente,  $\mathbf{Y}(t)$  e  $\mathbf{Z}$  pontos no antigo referencial e  $\mathbf{Q}(t)$  um tensor ortogonal. Diferenciando a Eq.2.79 em respeito ao tempo temos:

$$d_t \mathbf{X}^* - d_t \mathbf{Y} = \mathbf{Q} d_t \mathbf{X} + d_t \mathbf{Q} (\mathbf{X} - \mathbf{Z}) \quad (2.80)$$

Sendo  $d_t \mathbf{X} = \mathbf{u}$ , a Eq.2.80 pode ser reescrita como

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{Q} \mathbf{u} + d_t \mathbf{Y} + d_t \mathbf{Q} (\mathbf{X} - \mathbf{Z}) \quad (2.81)$$

onde podemos constatar por esta equação que a condição para que um vetor seja indiferente não está cumprida, ou seja, a velocidade não é um vetor indiferente.

Aplicando a Eq.2.82, a regra da transformação para  $d\mathbf{u}$  é obtida como

$$d\mathbf{u}^* = \mathbf{Q} d\mathbf{u} + d_t \mathbf{Q} d\mathbf{X} \quad (2.82)$$

onde foi feito uso do fato de que  $\mathbf{Q}$  e  $d_t \mathbf{Y}$  não são campos, mas são um tensor fixo e um vetor fixo, respectivamente (a mudança de referencial dependente do tempo é um movimento de corpo rígido do referencial). A translação do novo referencial,  $\mathbf{Y}(t)$ , não dá nenhuma contribuição para  $d\mathbf{u}^*$  embora ele contribua para  $\mathbf{u}^*$ , que na verdade, as diferenças de velocidade são indiferentes a uma translação rígida sobreposta.

Combinando as Eq.2.76-2.82 obtemos

$$\nabla \mathbf{u}^* \mathbf{Q} d\mathbf{X} = \mathbf{Q} \nabla \mathbf{u} d\mathbf{X} + d_t \mathbf{Q} d\mathbf{X} \quad (2.83)$$

valendo para todo  $d\mathbf{X}$ . Assim:

$$\nabla \mathbf{u}^* = \mathbf{Q} \nabla \mathbf{u} \mathbf{Q}^T + d_t \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \quad (2.84)$$

concluindo assim que o gradiente de velocidades não é indiferente.

A transformação do tensor taxa de deformação,  $\mathbf{D}$ , é obtida a partir de sua definição

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^* &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^* + \nabla \mathbf{u}^{T*}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{Q} \nabla \mathbf{u} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \nabla \mathbf{u}^T \mathbf{Q}^T + d_t \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T) \\ &= \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^T + \frac{1}{2} d_t (\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T) \end{aligned} \quad (2.85)$$

o último termo da Eq.2.85 é zero, sendo a derivada temporal do tensor unitário onde é aplicada a propriedade  $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ . Chegamos então a seguinte expressão:

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^T \quad (2.86)$$

o que mostra que  $\mathbf{D}$  é indiferente.

A grande maioria das equações constitutivas são construídas utilizando os tensores apresentados sendo assim indiferentes. As equações constitutivas apresentadas posteriormente nesse trabalho seguem estes mesmos passos, não ferindo assim, os requisitos de objetividade material.

#### 2.4.2 Equação Constitutiva de Maxwell-b

O modelo de Fluidos Estruturados Tixotrópicos utilizado nesta tese apresenta uma equação constitutiva baseada na equação constitutiva de Maxwell-b. Por este motivo, torna-se interessante primeiramente apresentarmos a equação constitutiva de Maxwell-b. O modelo constitutivo de Maxwell-b é o modelo diferencial mais simples a modelar o comportamento de fluidos viscoelásticos, sendo amplamente usado por sua facilidade de implementação, em algoritmos numéricos. O modelo consiste em combinar em série, elementos que representam

um comportamento reológico ideal: uma deformação elástica Hookeana e um escoamento viscoso Newtoniano (Fig.2.5).

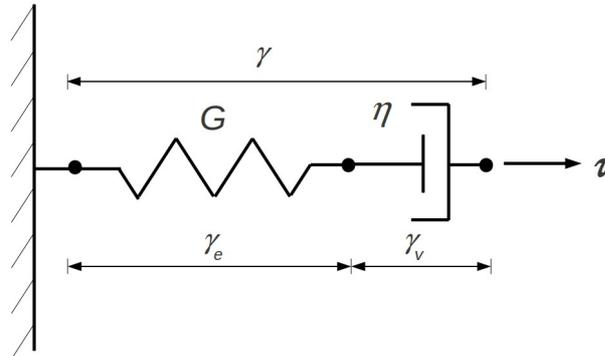


Figura 2.5 - Representação do modelo constitutivo de Maxwell

O elemento *Hookeano* pode ser representado fisicamente por um amortecedor e matematicamente pela seguinte expressão:

$$\tau_H = G \gamma_H \quad (2.87)$$

onde  $\tau_H$  é a tensão *Hookeana*,  $G$  é o módulo de elasticidade e  $\gamma_H$  a deformação. O elemento *Newtoniano*, por sua vez, é representado fisicamente por uma mola e matematicamente por,

$$\tau_N = \eta \dot{\gamma}_N \quad (2.88)$$

onde  $\eta$  é a viscosidade do fluido constante e  $\dot{\gamma}_N$  a taxa de deformação.

Para este modelo, a tensão é igual para ambos os elementos, e a deformação total é a soma das deformações de ambos elementos:

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_H = \tau_N \\ \gamma &= \gamma_H + \gamma_N \end{aligned} \quad (2.89)$$

Diferenciando a Eq.2.89 em respeito ao tempo,

$$d_t \gamma = d_t \gamma_H + d_t \gamma_N \quad (2.90)$$

Diferenciando o elemento Hookeano dado pela Eq.2.87 em respeito do tempo e utilizando o elemento Newtoniano dado pela Eq.2.83, pode-se escrever

$$d_t \gamma = \frac{1}{G} d_t \tau_H + \frac{\tau_N}{\eta} , \quad (2.91)$$

e multiplicando os dois lados da equação e utilizando o fato que a tensão é igual em ambos os elementos, obtém-se

$$\eta \partial_t \gamma = \frac{\eta}{G} d_t \tau + \tau \quad (2.92)$$

A razão entre a viscosidade e o módulo de elasticidade tem dimensões de tempo e é denominado como tempo de relaxação do fluido,  $\theta$ . Desta forma é obtida a forma linear da equação constitutiva de Maxwell. Para uma forma mais geral, uma configuração tensorial é necessária. Assim, para derivar a tensão – agora numa forma tensorial - no tempo utilizamos as derivadas de Jaumann.

#### **Derivada de Jaumann:**

(i) Derivada convectada superior,

$$\overset{\nabla}{\mathbf{J}} = d_t \mathbf{J} = \partial_t \mathbf{J} + (\nabla \mathbf{J}) \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{J} - \mathbf{J} (\nabla \mathbf{u})^T ; \quad (2.93)$$

(ii) Derivada convectada inferior,

$$\overset{\wedge}{\mathbf{J}} = d_t \mathbf{J} = \partial_t \mathbf{J} + (\nabla \mathbf{J}) \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{J} + \mathbf{J} (\nabla \mathbf{u})^T , \quad (2.94)$$

onde  $\mathbf{J}$  é um tensor de terceira ordem.

Aplicando ao tensor tensão-extra a derivada de Jaumann convectada superior e para regime permanente temos:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = (\nabla \boldsymbol{\tau}) \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} (\nabla \mathbf{u})^T \quad (2.95)$$

A taxa de deformação dada pela variação da deformação no tempo pode ser representada tensorialmente pelo tensor taxa de deformação,  $\mathbf{D}$ . Assim, o modelo de Maxwell-b pode ser escrito da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\tau} + \theta \overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}} = 2 \eta \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (2.96)$$

De acordo com a Eq.2.96, a tensão  $\boldsymbol{\tau}$  depende da taxa de deformação. Por isso o modelo de Maxwell-b ilustra o comportamento reológico de um fluido viscoelástico. Para tensão constante (quando), a Eq.2.96 se reduz à  $\boldsymbol{\tau} = 2 \eta \mathbf{D}(\mathbf{u})$ , e sendo assim, modelando um fluido Newtoniano.

### 2.4.3 Equação Constitutiva para Fluidos Estruturados Tixotrópicos

A construção do modelo de Fluidos Estruturado Tixotrópicos baseia-se na equação constitutiva de Maxwell-b (Eq.2.96), onde agora, a viscosidade e o módulo de elasticidade são funções do parâmetro de estruturação,  $\lambda$ . Este parâmetro expressa o estado da estrutura e por definição, varia entre 0 e 1. A equação evolutiva de  $\boldsymbol{\tau}$  é apresentada agora como:

$$\boldsymbol{\tau} + \theta(\lambda) \overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}} = 2 \eta_v(\lambda) \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (2.97)$$

onde  $\eta_v$  é a viscosidade estrutural. O tempo de relaxação do fluido,  $\theta$ , agora também é função implícita de  $\lambda$  e dado por:

$$\theta(\lambda) = \frac{\eta_v(\lambda)}{G_s(\lambda)} \quad (2.98)$$

Pode-se observar que a equação tem a mesma forma linear que a forma clássica do fluido viscoelástico de Maxwell-b, porém com uma viscosidade e módulo de elasticidade não mais constantes. O módulo de elasticidade  $G_s$ , é dependente do parâmetro de estruturação e deve seguir algumas características para descrever a física do modelo. O módulo de elasticidade deve ser pequeno para regiões do escoamento em que o fluido está totalmente

estruturado e aumentar gradativamente com a quebra da estruturação do fluido. A expressão sugestionada por de Souza Mendes (2009) para o módulo de elasticidade é,

$$G_s(\lambda) = \frac{G_0}{\lambda^m} \quad (2.99)$$

onde  $G_0$  é o módulo de elasticidade para um material totalmente estruturado ( $\lambda=1$ ) e  $m$  uma constante adimensional. A viscosidade estrutural,  $\eta_v$ , por sua vez varia entre  $[\eta_0, \eta_\infty]$  onde  $\eta_\infty$  é a viscosidade do material não-estruturado e  $\eta_0$  a viscosidade do material completamente estruturado, (onde pode ser visto em um exemplo apresentado na Fig.2.6). Uma função considerada adequada pode ser apresentada como:

$$\eta_v(\lambda) = \left(\frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right)^\lambda \eta_\infty \quad (2.100)$$

Note que esta equação é função das viscosidades envolvidas no modelo e também do parâmetro de estruturação. Assim, pode-se concluir que tanto os efeitos elásticos, quanto os efeitos viscosos, dependem diretamente da estrutura do material, o que é fisicamente correto.

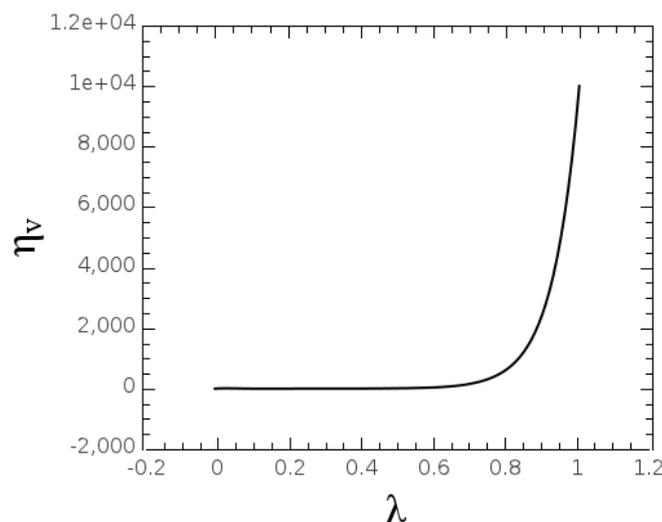


Figura 2.6 – Função viscosidade estrutural versus parâmetro de estruturação.

Uma equação de evolução para o parâmetro de estruturação será apresentada na próxima seção.

## 2.5 Equação de evolução para o parâmetro de estruturação

De acordo com o trabalho de de Souza Mendes (2009), é assumido que a equação evolutiva para o parâmetro de estrutura,  $\lambda$ , segue a seguinte estrutura:

$$D_t \lambda = \frac{1}{t_{eq}} [(1-\lambda)^a - f(\tau) \lambda^b] \quad (2.101)$$

onde  $a$  e  $b$  são coeficientes escalares positivos. Na equação de evolução, o lado esquerdo representa a taxa de variação da estruturação no tempo e o lado direito um mecanismo com termos muito distintos: o primeiro termo chamado de *buildup* que representa o acúmulo, ou crescimento da estrutura; o segundo termo é chamado de *breakdown*, determinando o quanto quebra a estrutura.

O parâmetro  $t_{eq}$  é chamado de tempo de equilíbrio. Ele tem a função de escala de tempo para o processo de acumulação da microestrutura. Não é uma escala de tempo para a quebra da microestrutura porque o processo de desagregação é fortemente dependente da intensidade de tensão e da taxa de deformação, para este modelo.

É importante notar que existe uma função associada ao termo *breakdown*. Essa função é dependente do módulo da tensão aplicado no fluido, onde o nível de tensão produz a quebra da estrutura do material. O módulo da tensão é calculado como:

$$\tau = \left( \frac{1}{2} tr \boldsymbol{\tau}^2 \right)^{1/2} \quad (2.102)$$

onde  $tr$  é o operador traço. Geralmente na literatura, encontramos a função  $f$  que multiplica o termo de *breakdown* na equação da evolução do parâmetro de estruturação como função da taxa de deformação, tal que seja zero em  $\dot{\gamma} = 0$  e aumentando monotonicamente com o  $\dot{\gamma}$ . No entanto, parece mais adequado que o termo de *breakdown* seja uma função da tensão de cisalhamento, tal que seja igual a zero em  $\tau = 0$  e aumente monotonicamente com o crescimento da tensão. Imagine um caso particular, se um material completamente estruturado inicialmente em repouso, de repente fosse submetido a uma taxa de deformação constante e com a tensão de cisalhamento inicialmente nula, aumentando linearmente com o tempo: é

razoável esperar que a taxa de quebra (termo de *breakdown*) do material seja pequena, quando a microestrutura é quase indeformada e sob tensões pequenas, e com o decorrer do tempo e com o acúmulo de tensão, o aumento da taxa de quebra. No entanto, note que se a dependência de  $f$  for assumida em função da taxa de deformação, não mudaria com o tempo e teria a taxa de quebra máxima no início do escoamento (quando a tensão é zero), e diminuiria à medida que as quebras de microestrutura diminuíssem. Por esse motivo, como já comentado anteriormente, se justifica que a equação de evolução tenha dependência da tensão aplicada. Sendo assim, o função  $f$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(\tau) = \frac{(1 - \lambda_{eq}^a(\tau, \dot{\gamma}_{eq}))}{\lambda_{eq}^b(\tau, \dot{\gamma}_{eq})} \left( \frac{\tau}{\eta_v(\lambda)\dot{\gamma}} \right)^c \quad (2.103)$$

computando a taxa de deformação como  $\dot{\gamma} = (2 \operatorname{tr} \mathbf{D}^2)^{1/2}$  e a taxa de deformação de equilíbrio,  $\dot{\gamma}_{eq}$ , à ser apresentada na seção seguinte.

Em um fluxo constante no sentido Lagrangiano, onde uma partícula de material é submetida a uma intensidade de tensão constante  $\tau$  para um período de tempo suficientemente longo, a microestrutura da partícula atinge um estado de equilíbrio, em que as taxas de acumulação e distribuição tornam-se iguais e o parâmetro de estrutura assume um valor de equilíbrio,  $\lambda = \lambda_{eq}$ . Transpondo a Eq.2.100 para função do parâmetro de estruturação, e para o caso particular deste parâmetro em um estado de equilíbrio,  $\lambda_{eq}$ , pode-se obter a Eq.2.99

$$\lambda_{eq}(\dot{\gamma}) = \frac{\ln \eta_{eq}(\dot{\gamma}_{eq}) - \ln \eta_{\infty}}{\ln \eta_0 - \ln \eta_{\infty}} \quad (2.104)$$

Existe um ponto  $(\tau, \dot{\gamma}_{eq})$  na curva de fluxo, que é o ponto atrator para alterações microestruturais. Este ponto corresponde à  $\lambda_{eq}(\tau, \dot{\gamma}_{eq})$ , que é o nível de micro-estruturação que seria atingido se, a partir do estado atual ponto  $(\tau, \dot{\gamma}_{eq})$ , a intensidade de tensão fosse mantida fixa até que o equilíbrio fosse alcançado.

A viscosidade em estado de equilíbrio,  $\eta_{eq}$ , é função da taxa de deformação em equilíbrio, e assim, diferentemente da viscosidade estrutural, não é influenciada pela estrutura do material. Conceitualmente, a viscosidade em estado de equilíbrio não sofre os efeitos de tixotropia e é diretamente ligada a tensão aplicada ao fluido. Para se entender melhor, é

apresentada uma representação gráfica do cálculo da viscosidade em estado de equilíbrio na Fig.2.7.

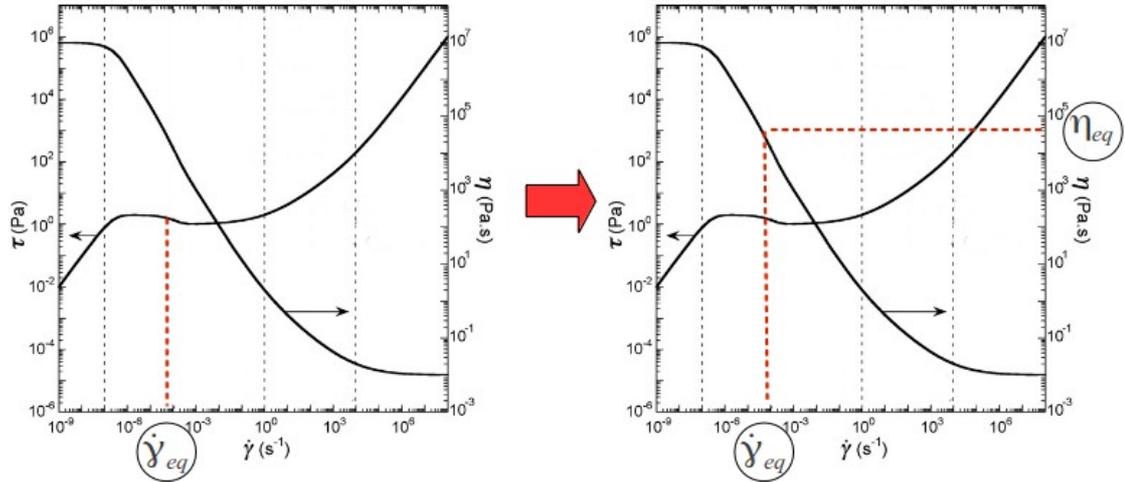


Figura 2.7 – Representação gráfica da viscosidade em estado de equilíbrio.

A equação para a viscosidade em estado de equilíbrio é dada pela equação proposta em de Souza Mendes (2004) para Fluidos Viscoplasticos.

$$\eta_{eq}(\dot{\gamma}_{eq}) = \left[ 1 - e^{-\frac{\eta_0 \dot{\gamma}_{eq}}{\tau_y}} \right] \left[ \frac{\tau_y - \tau_{y_d}}{\dot{\gamma}_{eq}} e^{-\frac{\dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_{eq}}} + \frac{\tau_{y_d}}{\dot{\gamma}_{eq}} + K \dot{\gamma}_{eq}^{n-1} \right] + \eta_{\infty} \quad (2.105)$$

onde  $\tau_y$  e  $\tau_{y_d}$  são as tensões de escoamento estática e dinâmica, respectivamente,  $\dot{\gamma}_0$  é a taxa de deformação na transição da tensão de  $\tau_y$  para  $\tau_{y_d}$ ,  $\dot{\gamma}_1$  é a taxa de deformação transicional que especifica o começo da região *power-law*,  $K$  é o índice de consistência e  $n$  o coeficiente *power-law*.

Combinando as Eq.2.101 e 2.103 obtemos a equação de evolução do parâmetro de estruturação para um regime permanente,

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \lambda = \frac{1}{t_{eq}} \left[ (1 - \lambda)^a - (1 - \lambda_{eq})^a \left( \frac{\lambda}{\lambda_{eq}} \right)^b \left( \frac{\tau}{\eta_v(\lambda) \dot{\gamma}} \right)^c \right] \quad (2.106)$$

sendo que o termo temporal de variação da estrutura no lado esquerdo da equação foi negligenciado da derivada total, pelo fato de estar em um regime permanente, apresentando somente variação espacial determinada pelo termo de advecção de  $\lambda$ .

Alguns comentários devem ser adicionados às observações detalhadas nos parágrafos anteriores. Uma questão que merece ser mais detalhada é como o nível de estrutura do material muda ao longo do escoamento, estabelecendo desta forma a topologia de maiores e menores regiões estruturadas. Em resumo, o valor do parâmetro  $\lambda$  é determinado pelo mecanismo de transporte e fonte que aparece na equação de evolução (Eq.2.106). O mecanismo de transporte de nível do parâmetro estrutura  $\lambda$  é simples de ser compreendido; dependendo do tempo característico  $t_{eq}$ , o nível de estrutura é carregado ao longo do escoamento, esticando ou encolhendo as regiões estruturadas. Valores mais elevados de  $t_{eq}$  levam a uma advecção mais eficaz do nível de estrutura, ou seja, efeitos tixotrópicos mais preponderantes. Além deste processo de transporte, o lado direito da Eq.2.106. introduz um mecanismo muito engenhoso, *build-up* e *breakdown*, para mudança do nível de estrutura material. Da Eq.2.106, segue-se que os termos *build-up* e *breakdown* estão inextricavelmente ligados pelo parâmetro de estruturação; em nossos cálculos, na verdade, eles são linearmente relacionados desde que o valor do coeficiente  $a$  seja igual a 1. Por uma questão de simplicidade, vamos concentrar nossa atenção em regiões altos níveis de estruturação ( $\lambda \approx 1$ ) e baixos níveis de estruturação ( $\lambda \approx 0$ ). Para ambas as regiões, os níveis de sua estrutura é suposto ser inalterado e, portanto, a contribuição desses termos deve ser desprezível. Primeiramente analisando a região altamente estruturada, pode-se notar que a contribuição do termo *build-up* tende a zero, visto que  $\lambda \rightarrow 1$ . Sobre o termo *breakdown*, um mecanismo simultâneo entra em ação para desaparecer a sua resposta, isto é, o *shear-thinning* da viscosidade em estado de equilíbrio,  $\eta_{eq}$  (Eq.2.105). Uma vez que uma região experimenta valores muito baixos da taxa de deformação -  $\dot{\gamma} \rightarrow 0 \Rightarrow \eta_{eq} \rightarrow \eta_0$ , o que obriga  $\lambda_{eq}$  a ser um, de acordo com a Eq.2.104. Conseqüentemente, o termo *breakdown* também tende a zero, uma vez que  $(1-\lambda_{eq}) \rightarrow 0$  e, conseqüentemente desaparecendo o termo *breakdown* da Eq.2.106. Agora, focando nossa atenção em regiões pouco estruturadas, a resposta do termo *build-up* da Eq.2.106 trivialmente é igual a um, já que  $\lambda$  tende a zero nessas regiões. Uma vez que eles são submetidos a altas taxas de deformação, as taxas de  $\eta_{eq} \rightarrow \eta_{\infty}$  de acordo com a Eq.2.105, que leva a  $\lambda_{eq} \rightarrow 0$  na Eq.2.104. Na verdade, não é difícil ver que todos os fatores do termo *breakdown* vão para um, cancelando de tal maneira as contribuições dos termos *build-up* e

*breakdown* da Eq.2.106 e, conseqüentemente, desaparecendo a influência de ambos os termos nas regiões de baixa estruturação, como esperado. Finalmente, o mecanismo *buildup/breakdown* desempenha um papel importante no desenvolvimento de zonas de transição entre as regiões altamente estruturadas, que podem ser vistas em regiões de baixos níveis de tensão e baixas taxas de deformações, e as regiões pouco estruturadas, em regiões de altos níveis de tensão e altas taxas de deformações. Nessas regiões heterogêneas, do ponto de vista do nível de estrutura, o termo *build-up*, como também o termo *breakdown*, raramente tendem a zero ou são cancelados uns com os outros, devido aos fortes gradientes de taxa de deformação encontrados nessas regiões. Assim um gradiente vai agir como um gatilho para desencadear as mudanças nos mecanismos do nível de estrutura presente na Eq.2.106.

## 2.6 Cálculo da taxa de deformação em estado de equilíbrio

A taxa de deformação em estado de equilíbrio, pode ser entendida como a taxa de deformação imediata relativa a tensão aplicada ao fluido, sem que haja efeitos de tixotropia (variação da taxa de deformação com o tempo até se atingir um equilíbrio). Para o cálculo da taxa de deformação em estado de equilíbrio é utilizada a equação do Fluido Newtoniano Generalizado,

$$\tau = \eta_{eq}(\dot{\gamma}_{eq}) \dot{\gamma}_{eq} \quad , \quad (2.107)$$

e uma vez que a curva de escoamento é uma função da taxa de deformação,  $\eta_{eq}$  também é avaliado em  $\dot{\gamma}_{eq}$  e dado pela Eq.2.104.

Substituindo a Eq.2.105 em 2.107 chegamos a seguinte expressão:

$$\tau = \left( \eta_{eq}(\dot{\gamma}_{eq}) = \left[ 1 - e^{-\frac{\eta_0 \dot{\gamma}_{eq}}{\tau_y}} \right] \left[ \frac{\tau_y - \tau_{y_d}}{\dot{\gamma}_{eq}} e^{-\frac{\dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_{eq}}} + \frac{\tau_{y_d}}{\dot{\gamma}_{eq}} + K \dot{\gamma}_{eq}^{n-1} \right] + \eta_{\infty} \right) \dot{\gamma}_{eq} \quad (2.108)$$

Ao tentar resolver a Eq.2.108 em termos de  $\dot{\gamma}_{eq}$  chegamos a uma expressão transcendental, de modo que, será necessário um método iterativo para solucioná-la. A fim de solucionar esse problema será aplicado o método de *quasi-newton* da seguinte forma:

O primeiro passo é calcular  $\tau$  através da aproximação de elementos finitos e determinar uma estimativa inicial para  $\dot{\gamma}_{eq}$ , em  $k=0$ . Após a obtenção da estimativa para  $\tau$ , a cada iteração, é resolvido o sistema linear,

$$\mathbf{J}(\dot{\gamma}_{eq_k}) \Delta \dot{\gamma}_{eq} = \mathbf{R}(\dot{\gamma}_{eq_k}) \quad (2.109)$$

onde,

$$\mathbf{R}(\dot{\gamma}_{eq}) = \tau - \left( \left[ 1 - e^{-\frac{\eta_0 \dot{\gamma}_{eq}}{\tau_y}} \right] \left[ \frac{\tau_y - \tau_{yd}}{\dot{\gamma}_{eq}} e^{-\frac{\dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_{0s}}} + \frac{\tau_{yd}}{\dot{\gamma}_{eq}} + K \dot{\gamma}_{eq}^{n-1} \right] + \eta_{\infty} \right) \dot{\gamma}_{eq} = 0 \quad (2.110)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\dot{\gamma}_{eq_k}) = \frac{\partial \mathbf{R}(\dot{\gamma}_{eq_k})}{\partial \dot{\gamma}_{eq_k}} = & -\eta_{\infty} + \frac{(\tau_y - \tau_{yd})}{\dot{\gamma}_{0d}} e^{-\frac{\dot{\gamma}_{eq_k}}{\dot{\gamma}_{0d}}} - k n \dot{\gamma}_{eq_k}^{n-1} - \frac{(\tau_y - \tau_{yd})}{\dot{\gamma}_{0d}} e^{-\frac{\dot{\gamma}_{eq_k}}{\dot{\gamma}_{0d}}} e^{-\frac{\eta_0}{\tau_y} \dot{\gamma}_{eq_k}} + k n \dot{\gamma}_{eq_k}^{n-1} e^{-\frac{\eta_0}{\tau_y} \dot{\gamma}_{eq_k}} \\ & - \frac{\eta_0}{\tau_y} (\tau_0 - \tau_{0d}) e^{-\frac{\dot{\gamma}_{eq_k}}{\dot{\gamma}_{0d}}} e^{-\frac{\eta_0}{\tau_y} \dot{\gamma}_{eq_k}} - \frac{\tau_{0d} \eta_0}{\tau_0} e^{-\frac{\eta_0}{\tau_y} \dot{\gamma}_{eq_k}} - \frac{\eta_0}{\tau_y} k \dot{\gamma}_{eq_k}^{n-1} e^{-\frac{\eta_0}{\tau_y} \dot{\gamma}_{eq_k}} \end{aligned} \quad (2.111)$$

para encontrar o vetor incremental  $\dot{\gamma}_{eq_{k+1}}$  e computar

$$\dot{\gamma}_{eq_{k+1}} = \dot{\gamma}_{eq_k} + \Delta \dot{\gamma}_{eq} \quad (2.112)$$

Quando a norma de  $\mathbf{R}(\dot{\gamma}_{eq})$  for inferior a um valor de tolerância é assumido que a convergência é alcançada.

## 2.7 Critério de determinação da *yield surface*

Fluidos Estruturados Tixotrópicos, assim como Fluidos Viscoplasticos, possuem uma região geométrica chamada de *yield surface*. Esta superfície separa duas regiões distintas do escoamento: *yielded region* (regiões deformadas), onde o escoamento comporta-se como um Fluido Newtoniano Generalizado (GNL), e assim, escoar apresentando efeitos de pseudo-plasticidade (*shear-thinning*) e dilatância (*shear-thickening*); *unyielded region* (regiões não-

deformadas), onde o escoamento apresenta uma viscosidade altíssima, com movimentos próximos de um corpo rígido e zonas quase estagnadas. Nas *unyielded region* os Fluidos Estruturados Tixotrópicos, diferentemente dos Fluidos Viscopoplásticos, apresentam efeitos de elasticidade.

Existem na literatura, inúmeros critérios para se determinar a *yield surface*. Como exemplo podemos citar critérios de tensão mínima de escoamento, bi-viscosidade, de taxa de deformação, etc. Para os Fluidos Estruturados Tixotrópicos, nenhum destes critérios seriam fisicamente corretos. Isto se deve por que, como já mencionado antes, existe uma dependência temporal entre a tensão aplicada e a taxa de deformação devido aos efeitos tixotrópicos. Imaginemos por exemplo uma tensão aplicada ao fluido, dependendo do nível de tixotropia do material, a taxa de deformação demorará um certo tempo até atingir um equilíbrio com a tensão aplicada. Se fôssemos, por exemplo, aplicar o critério de tensão mínima de escoamento, poderíamos ter tensões acima da tensão mínima de escoamento em um instante de tempo, o que indicaria que o material estaria na *yielded region*, mas com taxas de deformação muito pequenas, o que caracteriza uma *unyielded region*. Esta mesma incoerência física se aplicaria aos outros critérios clássicos encontrados na literatura.

Assim, um critério interessante para se obter a *yielded surface* de um Fluido Estruturado Tixotrópico seria determinar, não uma tensão ou taxa de deformação limitadora, e sim um nível de estruturação do material ao qual determinaria se o material estaria na *yielded region* ou na *unyielded region*. Mas qual nível de estruturação escolher? Primeiramente, devemos escolher um nível de estruturação do material em equilíbrio. Para o cálculo do parâmetro de estruturação em equilíbrio devemos resolver a Eq.2.104. Como mencionado anteriormente, este parâmetro é uma função como  $\lambda_{eq}(\tau, \eta_{eq}(\dot{\gamma}_{eq}))$ . Desta maneira, devemos escolher um par  $(\tau, \dot{\gamma})$  adequado para determinar uma *yielded surface*. Uma tensão que se demonstra fisicamente correta corresponde a  $\tau_{yd}$ . Como no critério tradicional, esta tensão na curva de escoamento corresponde a tensão de transição entre local em que o material encontra-se com altíssima viscosidade e um local ao qual o material irá de fato escoar apresentando os efeitos de *shear-thinning* ou *shear-thickening*. Para determinar a taxa de deformação, pode-se resolver a equação para um Fluido Newtoniano Generalizado. Mas antes devemos então, determinar uma viscosidade que caracterize esta região de transição. Para a escolha desta viscosidade, parece apropriado escolhermos  $\eta_0$ . Como  $\tau_{yd}$ , na curva de escoamento, é a partir deste ponto que o material começa a escoar. Agora podemos calcular a taxa de deformação mínima de escoamento:

$$\dot{\gamma}_0 = \frac{\tau_{yd}}{\eta_0} \quad (2.113)$$

Com a taxa de deformação mínima de escoamento é calculada agora a viscosidade em estado de equilíbrio referente ao par  $(\tau_{yd}, \dot{\gamma}_0)$  pela Eq.2.105 e posteriormente o nível de estruturação também referente a este par. A partir da obtenção deste nível de estruturação, pelo critério adotado, afirma-se que materiais com níveis de estrutura maior que o nível de estrutura encontrado do par  $(\tau_{yd}, \dot{\gamma}_0)$  estaria na *unyielded region*, enquanto que para materiais com níveis menores estariam na *yielded region*.

## 2.8 Parâmetros adimensionais do escoamento

Os parâmetros adimensionais governantes e as equações adimensionais são obtidos aqui aproveitando o adimensionamento reológico proposto em de Souza Mendes (2007) e de Souza Mendes (2009). Esta adimensionalização alternativa para a mecânica dos fluidos não-dimensional tem a virtude do desacoplamento dos efeitos cinemáticos e reológicos nos parâmetros adimensionais provindos das equações do movimento e material. Esta tarefa é alcançada principalmente dimensionando o campo de velocidade - ou, alternativamente, a distribuição das taxas de deformações - por uma escala na ordem de  $\dot{\gamma}_1 L_c$ , onde  $L_c$  é um comprimento característico do escoamento e  $\dot{\gamma}_1$  uma deformação característica (definida a seguir), em vez da abordagem tradicional que faz uso de uma velocidade característica do escoamento do fluido. Para a pressão e as tensões, essa escala é escolhida ser da ordem de  $\tau_y$ .

Assim, introduzindo o conjunto de variáveis adimensionais abaixo

$$\begin{aligned} t^* &= t \dot{\gamma}_1 & \mathbf{x}^* &= \frac{\mathbf{x}}{L_c} & \mathbf{u}^* &= \frac{\mathbf{u}}{\dot{\gamma}_1 L_c} & \dot{\gamma}^* &= \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_1} & \\ P^* &= \frac{P}{\tau_{yd}} & \boldsymbol{\tau}^* &= \frac{\boldsymbol{\tau}}{\tau_{yd}} & \eta_v^*(\dot{\gamma}^*) &= \frac{\eta_v(\dot{\gamma})}{\tau_{yd}/\dot{\gamma}_1}, & \end{aligned} \quad (2.114)$$

as equações não-dimensionais que governam os escoamentos permanentes de fluidos estruturados são escritas como

$$\begin{aligned}
\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \\
\nabla^* \cdot \boldsymbol{\tau}^* - \nabla^* P^* &= 0 \\
\boldsymbol{\tau}^* + \theta^*(\lambda) \overset{\nabla^*}{\boldsymbol{\tau}}^* &= 2\eta_v^*(\lambda) \mathbf{D}^*(\mathbf{u}^*) \\
\mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \lambda &= \frac{1}{t_{eq}^*} \left[ (1-\lambda)^a - (1-\lambda_{eq})^a \left( \frac{\lambda}{\lambda_{eq}} \right)^b \left( \frac{\boldsymbol{\tau}^*}{\eta_v^*(\lambda) \dot{\gamma}^*} \right)^c \right]
\end{aligned} \tag{2.115}$$

onde  $\theta^*(\lambda) = \theta(\lambda) \dot{\gamma}_1$  é o tempo de relaxação adimensional,  $\mathbf{D}^* = 1/2(\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^* \mathbf{u}^{*\top})$ , e

$\overset{\nabla^*}{\boldsymbol{\tau}}^*$  é definido como  $\overset{\nabla^*}{\boldsymbol{\tau}}^* = (\nabla^* \boldsymbol{\tau}^*) \mathbf{u}^* - (\nabla^* \mathbf{u}^*) \boldsymbol{\tau}^* - \boldsymbol{\tau}^* (\nabla^* \mathbf{u}^*)^\top$ .

A versão adimensional da função viscosidade de equilíbrio é

$$\eta_{eq}^*(\dot{\gamma}^*) = \left[ 1 - e^{-(J+1)\dot{\gamma}_{eq}^*} \left[ \frac{\tau_y^* - 1}{\dot{\gamma}_{eq}^*} e^{-\frac{\dot{\gamma}_{eq}^*}{\dot{\gamma}_0^*}} + \frac{1}{\dot{\gamma}_{eq}^*} + \dot{\gamma}_{eq}^{*n-1} \right] \right] + \eta_\infty^* \tag{2.116}$$

e o número  $J$  é definido como:

$$J \equiv \frac{\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} = \eta_0^* - 1 \tag{2.117}$$

onde  $J$  é uma medida do salto da taxa de deformação que ocorre quando o material escoar, apresentando um plateau formado quando a taxa de cisalhamento salta de  $\dot{\gamma}_{0_d} \equiv \tau_{y_d}/\eta_0$  para  $\dot{\gamma}_1 \equiv (\tau_{y_d}/K)^{1/n}$  enquanto a tensão está aproximadamente sobre  $\tau_y$  (Fig.2.8),

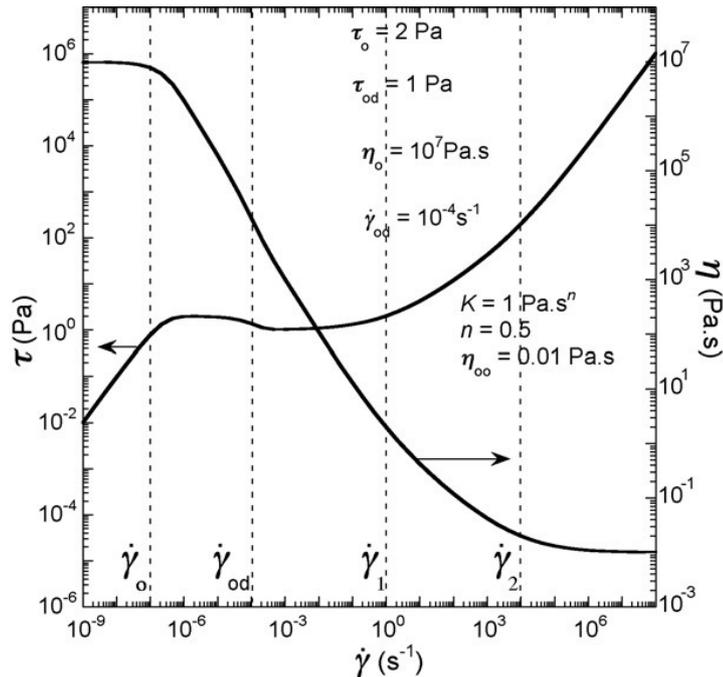


Figura 2.8 - Funções de Tensão cisalhante e viscosidade em estado de equilíbrio (de Souza Mendes, 2009).

O tempo de relaxação adimensional do fluido totalmente estruturado,  $\theta_0^*$ , é o parâmetro elástico do problema. Este parâmetro é dado por:

$$\theta_0^* \equiv \theta^*(1) = \frac{\eta_0 \dot{\gamma}_1}{G_0} = \frac{\tau_{od}}{G_0} (J + 1) \quad (2.118)$$

O parâmetro adimensional que leva em conta a cinemática do escoamento - a intensidade do fluxo  $U^*$  - surge a partir da condição de contorno adimensionais de Dirichlet para a velocidade,

$$U^* = \frac{U}{\dot{\gamma}_1 L_c} \quad (2.119)$$

Efeitos de elasticidade podem ser aumentados através do aumento da taxa de fluxo  $U^*$  ou do parâmetro de elasticidade  $\theta_0^*$ , da mesma forma que no problema dimensional. Além disso, o produto das quantidades locais  $\theta_0^* u^* = \theta u / L_c$  (onde  $u$  e  $u^*$  são as magnitudes de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}^*$ , respectivamente) pode ser visto como um número de Deborah local, isto é, que dá a importância local de elasticidade. No entanto, o produto  $\theta_0^* U^* = \theta U / L_c$  não é um número de

Deborah global para o escoamento, porque  $U/L_c$  não é uma taxa de deformação representativa para as *unyielded regions*, onde o fluido é totalmente estruturado e onde  $\theta=\theta_0$ .

A equação de evolução adimensional para  $\lambda$  contribui para a análise não-dimensional do escoamento através do tempo de equilíbrio,  $t_{eq}$ , que representa uma escala de tempo para mudanças no nível de estruturação. O tempo de equilíbrio também é adimensionalizado de maneira reológica,  $t_{eq}^* = t_{eq} \dot{\gamma}_1$ , tendo como característica ser independente de  $U$  (onde tempos são adimensionalizados por uma taxa de deformação dependente de  $U$  em análise adimensional tradicional). É também interessante comparar o tempo de equilíbrio,  $t_{eq}^*$ , com um tempo de escoamento característico, digamos  $L_c/U$ . A relação destas duas escalas de tempo é um número de tixotropia:

$$\frac{t_{eq}}{L_c/U} = U^* t_{eq}^* \quad (2.120)$$

O número de tixotropia  $U^* t_{eq}^*$  é útil na análise do nível de estruturação de um escoamento complexo. O seu significado físico é prontamente perceptível quando nota-se que ele é essencialmente um produto entre uma velocidade adimensional e um tempo adimensional e, portanto, tendo como resultado um comprimento adimensional. Este comprimento pode ser interpretado como uma distância característica que uma partícula de material não estruturado viaja até atingir o equilíbrio em um estado mais estruturado. Note que o número de tixotropia é mais significativo do que o tempo de equilíbrio adimensional por si só, uma vez que, para um valor fixo (não-zero) de  $t_{eq}^*$ , o efeito de tixotropia será traduzido na distância em que as partículas materiais viajam antes de sua microestrutura responder a uma nova intensidade de tensão.

Em resumo, de acordo com adimensionalização reológica introduzida por de Souza Mendes (2007), os parâmetros não-dimensionais que comandam a análise não-dimensional dos escoamentos de Fluidos Estruturados Tixotrópicos não-inerciais, são o tempo de relaxação adimensional, a intensidade do fluxo de  $U^*$  e o tempo adimensional de mudança de estrutura material  $t_{eq}^*$  e seu derivado número de tixotropia. Além disso, temos os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  presentes na equação de evolução para o parâmetro de estruturação (para esta tese,  $a=b=1$ ) em seus termos *build-up* e *breakdown*, o número de salto  $J$ , as viscosidades adimensionais  $\eta_0^*$  e  $\eta_\infty^*$ , a tensão de escoamento estática adimensional  $\tau_y^*$  e o índice de *power-law*,  $n$ .

## 2.8 Coeficiente de arrasto

Visando a computação das forças de arrasto de tensão e pressão agindo na superfície do cilindro, o coeficiente de arrasto adimensional é calculado como (Alves et al., 2001; Zisis and Mitsoulis, 2002)

$$C_D = \frac{F_D}{\rho u_c^2 L_c} \quad (2.121)$$

onde  $F_D$  é a componente da força de arrasto paralela a direção relativa do fluido em movimento,

$$F_D = 2 \int_{\Gamma_c} \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 2 L_c \int_0^\pi [(-p + \tau_{11}) \cos \theta] + \tau_{12} \cos \theta R d\theta \quad (2.122)$$

com  $\mathbf{e}_1$  representando o vetor unitário na direção  $x_1$ ,  $\mathbf{n}$  o vetor unitário normal à superfície do cilindro,  $w$  a largura do canal - assumido como unitário - e  $\theta$  é o componente de um sistema de coordenadas cilíndricas centrada no eixo do cilindro.

### 3 MÉTODO NUMÉRICO

O método de elementos finitos é um método de aproximação numérica de equações integro-diferenciais, considerado uma generalização dos métodos variacionais e de resíduos ponderados, o qual baseia-se de que a aproximação de uma equação variacional pode ser representada como uma combinação linear de graus de liberdade incógnitos e funções de base propriamente seleccionadas ao longo do domínio do problema. Estas funções são construídas de modo a satisfazer as condições de contorno do problema diferencial estudado (Reddy e Gartling, 1994).

Desta forma, o domínio do problema estudado é discretizado em um conjunto de subdomínios finitos não superpostos, chamados de elementos finitos. Este domínio é definido como o espaço aberto  $\Omega \subset \mathcal{R}^{nsd}$ , onde  $nsd$  é o número de dimensões espaciais considerados no problema. As fronteiras do domínio são definidas como:

$$\begin{cases} \Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h \\ \Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset, \quad \Gamma_g \neq \emptyset \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\Gamma$  é a fronteira do domínio  $\Omega$ ,  $\Gamma_g$  é a parte da fronteira na qual são impostas as condições de contorno de Dirichlet (essenciais) e  $\Gamma_h$  a região na qual são prescritas as condições de contorno de Neumann (naturais). Sobre o domínio fechado  $\bar{\Omega}$  é então realizado uma partição de elementos finitos  $C_h$  com domínio  $K$  na seguinte forma:

$$\bar{\Omega} = \left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{K_i \in C_h} K_i \\ K_i \cap K_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j \mid K_i, K_j \in C_h \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

A aproximação de elementos finitos  $U^h$ , de uma variável genérica  $\mathbf{u}$  para o modelo proposto, é representada como:

$$U^h = \sum_A N_A(\mathbf{x}) d_A \quad (3.3)$$

onde  $N_A$  são as funções de base (*shape function*) associadas ao nó global  $A$  da discretização  $C_h$ , nos quais os graus de liberdade incógnitos,  $d_A$ , são calculados. As funções de bases são

funções arbitrárias e requerem satisfazer algumas condições impostas. Nesta tese são usadas funções de base de mesma ordem para todas as incógnitas do modelo.

### 3.1 Formulação forte de Elementos Finitos

A formulação forte do problema em estudo é obtida da particularização das equações de conservação de massa (Eq.2.49) e balanço de momentum (Eq.2.64) para um Fluido Estrurado Tixotrópico escoando lentamente em regime laminar e permanente, juntamente com uma equação constitutiva para  $\boldsymbol{\tau}$  (Eq.2.97), e uma equação de evolução para o parâmetro de estruturação do material (Eq.2.106). Pode-se construir a formulação multi-campos, considerando um domínio aberto  $\Omega$  no  $\mathfrak{R}^2$  e delimitado por uma fronteira poligonal regular, para o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\
 \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \nabla P &= \mathbf{0} && \text{em } \Omega \\
 \boldsymbol{\tau} + \theta(\lambda) \overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}} &= 2\eta_v(\lambda) \mathbf{D}(\mathbf{u}) && \text{em } \Omega \\
 \mathbf{u} \cdot \nabla \lambda &= \frac{1}{t_{eq}} \left[ (1-\lambda)^a - (1-\lambda_{eq})^a \left( \frac{\lambda}{\lambda_{eq}} \right)^b \left( \frac{\boldsymbol{\tau}}{\eta_v(\lambda) \dot{\boldsymbol{\gamma}}} \right)^c \right] && \text{em } \Omega \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g^{\mathbf{u}} \\
 \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}_g && \text{sobre } \Gamma_g^{\boldsymbol{\tau}} \\
 \lambda &= \lambda_g && \text{sobre } \Gamma_g^{\lambda} \\
 [\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}] \mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h^{\boldsymbol{\tau}} \\
 \nabla \lambda \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sobre } \Gamma_h^{\lambda}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

no qual  $\mathbf{u}$  é o campo de velocidades admissível,  $P \equiv p + \rho\varphi$  é a pressão modificada,  $\mathbf{g} = -\nabla\varphi$  é a força gravitacional por unidade de massa,  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $\mathbf{D}$  o tensor taxa de deformação,  $\mathbf{t}_h$  a força de superfície,  $\overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}}$  é a derivada convectada temporal superior do tensor  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\theta$  o tempo de relaxação do fluido.

### 3.2 Formulação fraca de Elementos Finitos (variacional)

Para definir a forma fraca, ou variacional, é preciso primeiro caracterizar dois conjuntos de funções. A primeira é definida como soluções candidatas ou tentativas. Essas possíveis soluções precisam satisfazer as condições de contorno e estar dentro dos espaços de funções apropriados como apresentado a seguir,

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= \left\{ f \mid \int_{\Omega} f^2 d\Omega < \infty \right\} \\ H^1(\Omega) &= \left\{ f \in L^2(\Omega) \mid \partial_{x_i} f \in L^2(\Omega), \quad i=1, \dots, n \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde os espaços de funções,  $L^2(\Omega)$  define o espaço de funções quadrado-integráveis sobre  $\Omega$ ,  $H^1(\Omega)$  o espaço de Sobolev de funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre  $\Omega$  (Rektorys, 1975).

O segundo conjunto de funções é chamado de funções peso ou variacionais. Esse conjunto de funções é muito semelhante as funções tentativas exceto porque requerem ser zero sobre o contorno, ou seja, estar nos seguintes espaços:

$$\begin{aligned} L_0^2(\Omega) &= \left\{ f \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} f d\Omega = 0 \right\} \\ H_0^1(\Omega) &= \left\{ f \in H^1(\Omega) \mid f = 0 \text{ sobre } \Gamma_g \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde  $L_0^2(\Omega)$  o espaço de funções quadrado-integráveis com média igual a zero sobre  $\Omega$  e  $H_0^1(\Omega)$  o espaço de Sobolev de funções com primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre  $\Omega$  que se tornam zero em  $\Gamma_g$  (Rektorys, 1975).

Assim as funções solução operadas no problema em questão nesta tese, pertencem aos seguintes espaços:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left\{ \lambda \in H^1(\Omega) \quad e \quad \varphi \in H^1(\Omega) \right\} \\ P &= \left\{ p \in C^0(\Omega) \cap L^2(\Omega) \quad e \quad q \in C^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \right\} \\ \mathbf{V} &= \left\{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^N \quad e \quad \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega) \right\} \\ \Sigma &= \left\{ \boldsymbol{\tau} \in C^0(\Omega) \cap L^2(\Omega) \quad e \quad \mathbf{S} \in C^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

O próximo passo é integrar a formulação forte ao modo que ocorra uma diminuição no grau da derivada, e um produto interno das equações e suas respectivas funções peso, tornando assim, uma equação variacional: Achar  $(\lambda, \boldsymbol{\tau}, p, \mathbf{u}) \in \Lambda \times \Sigma \times P \times \mathbf{V}_g$  tal que para todo  $\forall (\varphi, \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) \in \Lambda \times \Sigma \times P \times \mathbf{V}$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{S} \, d\Omega - \int_{\Omega} 2\eta_v \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{S} \, d\Omega - \int_{\Omega} \theta(\lambda) (\nabla \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau} : \mathbf{S} \, d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \theta(\lambda) (\nabla \boldsymbol{\tau}) \mathbf{u} : \mathbf{S} \, d\Omega - \int_{\Omega} \theta(\lambda) \boldsymbol{\tau} (\nabla \mathbf{u})^T : \mathbf{S} \, d\Omega \\
& + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \lambda) \varphi \, d\Omega + t_{eq}^{-1} \int_{\Omega} \lambda \varphi \, d\Omega - t_{eq}^{-1} \int_{\Omega} \left[ \frac{1 - \lambda_{eq}}{\lambda_{eq}} \left( \frac{\boldsymbol{\tau}}{\eta_v(\lambda) \dot{\gamma}} \right)^c \right] \lambda \varphi \, d\Omega \\
& = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} t_{eq}^{-1} \varphi \, d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Pode-se perceber que alguns termos da equação variacional (Eq.3.8) não estão de acordo com as definições de espaço anteriormente apresentadas, sendo assim necessárias algumas manipulações nestes termos da equação. O primeiro é o termo de pressão da equação de balanço de momentum. É aplicada uma operação entre um escalar e vetor para decompor o termo em duas partes e após é utilizado o Teorema da Divergência. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (p \mathbf{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} (p \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega \\
&= - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega
\end{aligned} \tag{3.9}$$

**Operadores de escalares, vetores e tensores:** Dado  $\varphi$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{S}$ , sendo campos suaves com  $\varphi$  um valor escalar,  $\mathbf{v}$  um vetor e  $\mathbf{S}$  um tensor. Então

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\varphi \mathbf{v}) &= \varphi (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \\
\nabla \cdot (\mathbf{S}^T \mathbf{v}) &= \mathbf{S} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{S})
\end{aligned} \tag{3.10}$$

**Teorema 3.1 - Teorema da Divergência:** Seja  $\mathcal{R}$  uma região delimitada regular, e dado  $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{v} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{V}$  e  $\mathbf{S} : \mathcal{R} \rightarrow \text{Lin}$  sendo um campo suave. Então

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \varphi \mathbf{n} \, d\Gamma &= \int_{\Omega} \nabla \varphi \, d\Omega \\
\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \\
\int_{\Gamma} \mathbf{S} \mathbf{n} \, d\Gamma &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{S} \, d\Omega
\end{aligned} \tag{3.11}$$

onde  $\mathbf{n}$  é a normal unitária exterior da área  $\Gamma$ .

**Prova:** Os resultados relativos a  $\varphi$  e  $\mathbf{v}$  são clássicos e não serão verificados aqui (ver Kellogg, 1954). Para estabelecer a última relação, dado  $\mathbf{a}$  sendo um vetor. Então

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \int_{\Gamma} \mathbf{S} \mathbf{n} d\Gamma &= \int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{S} \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} (\mathbf{S}^T \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{S}^T \mathbf{a}) d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{a} d\Omega = \mathbf{a} \cdot \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{S}) d\Omega \end{aligned} \quad (3.12)$$

que implica o resultado desejado, uma vez que  $\mathbf{a}$  é arbitrário.

Um segundo termo que precisa de manipulação é o termo de difusão de tensão da equação de balanço de momentum. Utilizando-se das propriedades e dos operadores de tensores e vetores (Eq.3.11), podemos decompor o termo e manipulando o primeiro termo do lado direito da equação, onde se utiliza o Teorema da Divergência<sup>3</sup>, temos,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}^T \mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\tau} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} d\Omega \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pelo fato da função peso ser zero nas fronteiras (ver definições de espaço) o primeiro termo do lado direito da equação vai para zero. Manipulando agora o segundo termo, podemos decompor o  $\nabla \mathbf{v}$  em uma parte simétrica e em uma parte antissimétrica,  $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{D}(\mathbf{v}) + \mathbf{W}(\mathbf{v}) = 1/2(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) + 1/2(\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T)$ . Pelo fato de que um produto interno entre um tensor simétrico ser igual a zero vamos então obter:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} d\Omega &= - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}(\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{W}(\mathbf{v}) d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}(\mathbf{v}) d\Omega \end{aligned} \quad (3.14)$$

Utilizando esses procedimentos, podemos então apresentar o seguinte problema de valor de contorno: Dado  $\mathbf{f}$ ,  $u_g$ ,  $\boldsymbol{\tau}_g$  e  $\lambda_g$ . Achar  $(\lambda, \boldsymbol{\tau}, p, \mathbf{u}) \in \Lambda \times \boldsymbol{\Sigma} \times P \times \mathbf{V}_g$  tal que para todo  $\forall (\phi, \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) \in \Lambda \times \boldsymbol{\Sigma} \times P \times \mathbf{V}$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q d\Omega - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}(\mathbf{v}) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{S} d\Omega - \int_{\Omega} 2\eta_v \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{S} d\Omega - \int_{\Omega} \theta(\lambda) (\nabla \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau} : \mathbf{S} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \theta(\lambda) (\nabla \boldsymbol{\tau}) \mathbf{u} : \mathbf{S} d\Omega - \int_{\Omega} \theta(\lambda) \boldsymbol{\tau} (\nabla \mathbf{u})^T : \mathbf{S} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \lambda) \phi d\Omega + t_{eq}^{-1} \int_{\Omega} \lambda \phi d\Omega - t_{eq}^{-1} \int_{\Omega} \left[ \frac{1 - \lambda_{eq}}{\lambda_{eq}} \left( \frac{\boldsymbol{\tau}}{\eta_v(\lambda) \dot{\gamma}} \right)^c \right] \lambda \phi d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} t_{eq}^{-1} \phi d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{v} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde  $\Lambda, \Sigma, P, \mathbf{V}$  e  $\mathbf{V}_g$  são os conjuntos de funções de elementos finitos.

### 3.3 Método de Galerkin

O método de aproximações de elementos finitos de Galerkin consiste em aproximar os espaços de dimensão infinita, utilizados na formulação fraca do problema, por subespaços de dimensão finita apropriados. Logo, sendo  $\Lambda, P, \mathbf{V}$  e  $\Sigma$  os espaços funcionais dos campos do parâmetro de estruturação, pressão, velocidade e tensão respectivamente, pode-se escrever,

$$\begin{aligned} \Lambda^h &\subset \Lambda && \text{(isto é, se } \lambda^h \in \Lambda^h, \text{ então } \lambda^h \in \Lambda) \\ P^h &\subset P && \text{(isto é, se } p^h \in P^h, \text{ então } p^h \in P) \\ \mathbf{V}^h &\subset \mathbf{V} && \text{(isto é, se } \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h, \text{ então } \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}) \\ \Sigma^h &\subset \Sigma && \text{(isto é, se } \boldsymbol{\tau}^h \in \Sigma^h, \text{ então } \boldsymbol{\tau}^h \in \Sigma) \end{aligned} \quad (3.16)$$

A aproximação de elementos finitos da Eq.(3.15), portanto, é construída sobre as definições dos subespaços usuais da dinâmica dos fluidos para a aproximação dos campos do parâmetro de estruturação ( $\Lambda^h$ ), velocidade ( $\mathbf{V}^h$ ), pressão ( $P^h$ ) e tensão ( $\Sigma^h$ ),

$$\begin{aligned} \Lambda_g^h &= \left\{ \phi \in H^1(\Omega)^N \mid \phi_{\Omega}^K \in R_l(\Omega_K)^N, K \in \Omega^h, \phi = \phi_g \text{ sobre } \Gamma^h \right\} \\ P^h &= \left\{ q \in C^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \mid p_{\Omega_k} \in R_m(\Omega_k), K \in \Omega^h \right\} \\ \mathbf{V}^h &= \left\{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}_{\Omega_k} \in R_l(\Omega_K)^N, K \in \Omega^h \right\} \\ \mathbf{V}_g^h &= \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}_{\Omega}^K \in R_l(\Omega_K)^N, K \in \Omega^h, \mathbf{v} = \mathbf{u}_g \text{ sobre } \Gamma^h \right\} \\ \Sigma^h &= \left\{ \mathbf{S} \in C^0(\Omega)^{N \times N}, S_{ij} = S_{ji}, i, j = 1, \dots, N \mid \mathbf{S}_{\Omega_k} \in R_K(\Omega_K)^{N \times N}, K \in \Omega^h \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde  $R_k, R_l$  denotam, respectivamente, espaços polinomiais de grau  $k$  e  $l$ , e apresentados da seguinte maneira,

$$R_m(K) = \begin{cases} P_m(K) & \text{se } K \text{ é um triângulo ou tetrahedro} \\ Q_m(K) & \text{se } K \text{ é um quadrângulo ou hexahedro} \end{cases}$$

onde  $m \geq 0$ , sendo  $m$  o grau de interpolação dos elementos finitos do tipo  $P_m$  e  $Q_m$ . (Ciarlet, 1978).

Desta forma pode-se escrever o problema variacional apresentado na seção 3.2 em termos dos subespaços apresentados na Eq.3.17 da seguinte forma:

Dado  $\mathbf{f}$ ,  $u_g$ ,  $\boldsymbol{\tau}_g$  e  $\lambda_g$ . Achar  $(\lambda^h, \boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h) \in \Lambda^h \times \boldsymbol{\Sigma}^h \times P^h \times \mathbf{V}_g^h$  tal que para todo  $\forall (\phi^h, \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) \in \Lambda^h \times \boldsymbol{\Sigma}^h \times P^h \times \mathbf{V}^h$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}^h) q^h d\Omega - \int_{\Omega} p^h (\nabla \cdot \mathbf{v}^h) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^h : \mathbf{D}^h(\mathbf{v}^h) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^h : \mathbf{S}^h d\Omega - \int_{\Omega} 2\eta_v \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) : \mathbf{S}^h d\Omega - \int_{\Omega} \theta(\lambda) (\nabla \mathbf{u}^h) \boldsymbol{\tau}^h : \mathbf{S}^h d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \theta(\lambda) (\nabla \boldsymbol{\tau}^h) \mathbf{u}^h : \mathbf{S}^h d\Omega - \int_{\Omega} \theta(\lambda^h) \boldsymbol{\tau}^h (\nabla \mathbf{u}^h)^T : \mathbf{S}^h d\Omega \\
& + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^h \cdot \nabla \lambda^h) \varphi^h d\Omega + t_{eq}^{-1} \int_{\Omega} \lambda^h \varphi^h d\Omega - t_{eq}^{-1} \int_{\Omega} \left[ \frac{1 - \lambda_{eq}}{\lambda_{eq}} \left( \frac{\boldsymbol{\tau}}{\eta_v(\lambda^h) \dot{\gamma}} \right)^c \right] \lambda^h \varphi^h d\Omega \\
& = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} t_{eq}^{-1} \varphi^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.18}$$

### 3.3.1 Método de Galerkin: dificuldades do método

Com a utilização do método de Galerkin para problemas de escoamentos de fluidos complexos, algumas dificuldades foram observadas. Devido ao carácter misto das equações, surge uma necessidade de compatibilizar os sub-espaços de velocidade e pressão, sob pena de gerar oscilações espúrias e o trancamento (locking) do campo de velocidade. Portanto, combinações arbitrárias desses sub-espaços – onde algumas são desejáveis do ponto de vista de implementação computacional – não são permitidas na aproximação da Eq. (3.18). Com o objetivo de compreender este problema, uma teoria matemática para estabilidade do métodos de elementos finitos mistos foi estabelecida. Baseada na chamada condição de Babuška-Brezzi ou condição LBB (Oden e Carey, 1983; Babuška, 1973; Brezzi, 1974), a teoria estabelece que uma vez em que esta condição é satisfeita, uma dada combinação dos sub-espaços de velocidade e pressão irá gerar aproximações estáveis para os seus respectivos campos. Para demonstrar esta teoria matemática, é apresentado o teorema de Brezzi para uma formulação mista do problema de Stokes.

**Teorema 3.2** - Teorema de Brezzi: Sendo a formulação mista do problema de Stokes dada por: Achar o par  $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times P$  tal que

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(p, \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) & \mathbf{v} &\in \mathbf{V} \\
b(q, \mathbf{u}) &= 0 & q &\in P
\end{aligned} \tag{3.19}$$

onde

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, d\Omega \\
 b(p, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \\
 b(q, \mathbf{u}) &= - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \\
 (\mathbf{f}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

e supondo,

(i) (continuidade de  $a(\cdot, \cdot)$  e  $b(\cdot, \cdot)$ ) Existem constantes  $C_1, C_2 > 0$  tais que

$$\begin{aligned}
 |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq C_1 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} & \mathbf{u}, \mathbf{v} &\in \mathbf{V} \\
 |b(q, \mathbf{u})| &\leq C_2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} \|q\|_P & (\mathbf{u}, q) &\in \mathbf{V} \times P
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

(ii) (**K**-elipticidade de  $a(\cdot, \cdot)$ ) Existe uma constante  $C_3 > 0$  tal que

$$|a(\mathbf{v}, \mathbf{v})| \geq C_3 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 \quad \mathbf{v} \in \mathbf{K} \tag{3.22}$$

(iii) (condição de Babuška-Brezzi) Existe uma constante  $C_4 > 0$  tal que

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \frac{|b(q, \mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}} \geq C_4 \|q\|_P \quad q \in P \tag{3.23}$$

então a Eq.(3.19) admite solução única  $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times P$ .

Prova: (Brezzi, 1974)

Como alternativas para superar as dificuldades apresentadas devido a incompatibilidade dos sub-espacos, surgiram metodologias as quais não necessitam satisfazer a condição de Babuška-Brezzi, sendo, a princípio, estáveis para qualquer combinação de sub-espacos de velocidade e pressão. Estes métodos procuram manter a estrutura da formulação clássica de Galerkin e adicionar termos que os confirmam a desejada estabilidade à formulação resultante, sem, contudo, ser inconsistente. Estes métodos são chamados de Métodos Estabilizados de Elementos Finitos.

Trabalhos importantes como os de Brooks e Hughes, 1982, foram um grande passo no desenvolvimento de métodos estabilizados. Estes trabalhos desenvolveram o método

Streamline-upwind/Petrov-Galerkin, ou SUPG. O método apresenta uma formulação Petrov-Galerkin utilizando funções peso descontínuas. Estas funções foram construídas através da adição de uma perturbação às funções clássicas do método de Galerkin, que atuam sobre todos os termos da equação, e desta forma, fazendo com que a condição de ortogonalidade do resíduo com relação a elas sejam satisfeitas. Observou-se resultados com elevada precisão mas com oscilações localizadas (*overshoot* ou *undershoot*) no contorno ou em camadas internas ao domínio, porém, sem comprometer a solução a alguma distância da descontinuidade. Como uma derivação do método SUPG surgiram os métodos estabilizados.

Os métodos estabilizados seguem estratégias que constituem principalmente na adição de termos dependentes da malha ao método clássico de Galerkin. Estes termos de perturbação, assim como para o método SUPG, são projetados de forma a aumentar a estabilidade da formulação de Galerkin original sem prejudicar sua consistência, onde a solução exata do problema satisfaz aos resíduos de Euler-Lagrange. Dentre os métodos estabilizados, podemos destacar o método Galerkin mínimos quadrados (GLS), introduzido por Hughes et al., 1989. Para este método, os termos estabilizadores resultam de uma minimização pelo método dos mínimos quadrados de uma formulação utilizando funções de forma do método de Galerkin. Como meio de obter resultados ainda mais precisos, perturbações malha-dependentes foram desenvolvidos, onde parâmetros de estabilização são formulados criteriosamente a adição dos termos estabilizadores. O método GLS é considerado uma evolução do método SUPG que combina o método de Galerkin com métodos de mínimos quadrados (Franca, 1998). A seguir é apresentada a formulação de Galerkin Mínimos-quadrados para modelagem de escoamentos *creeping flow* de Fluidos Estruturados Tixotrópicos.

### 3.4 Método Multi-campos de Galerkin Mínimos-quadrados

A solução numérica é obtida usando uma formulação multi-campos Galerkin Mínimos-quadrados (GLS) em termos do parâmetro de estruturação, tensão-extra, velocidade e pressão. Em uma tentativa de aumentar a estabilidade Galerkin clássica, esta formulação GLS tem como principais características o uso de combinações simples de interpolações de elementos finitos e uma aproximação estável tanto para regiões de escoamento elástico ou viscoso-dominado. Empregando os usuais subespaços de elementos finitos para o problema multi-campos incompressível – isto é,  $\lambda \in H^1(\Omega)$ ,  $\boldsymbol{\tau} \in C^0(\Omega)^{N \times N} \cap H^2(\Omega)^{N \times N}$ ,

$p \in C^0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  e  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^N$  - tal formulação é escrita como: Procurar a quádrupla  $(\lambda^h, \boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h) \in \Lambda^h \times \boldsymbol{\Sigma}^h \times P^h \times \mathbf{V}_g^h$  tal que  $\forall (\phi^h, \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) \in \Lambda^h \times \boldsymbol{\Sigma}^h \times P^h \times \mathbf{V}^h$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}^h) q^h d\Omega + \varepsilon \int_{\Omega} p^h q^h d\Omega - \int_{\Omega} p^h (\nabla \cdot \mathbf{v}^h) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^h : \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^h : \mathbf{S}^h d\Omega - \int_{\Omega} 2\eta_v \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) : \mathbf{S}^h d\Omega - \int_{\Omega} \theta(\lambda) \boldsymbol{\tau}^h (\nabla \mathbf{u}^h)^T : \mathbf{S}^h d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \theta(\lambda^h) (\nabla \boldsymbol{\tau}^h) \mathbf{u}^h : \mathbf{S}^h d\Omega - \int_{\Omega} \theta(\lambda^h) (\nabla \mathbf{u}^h) \boldsymbol{\tau}^h : \mathbf{S}^h d\Omega \\
& + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^h \cdot \nabla \lambda^h) \varphi^h d\Omega + t_{eq}^{-1} \int_{\Omega} \lambda^h \varphi^h d\Omega - t_{eq}^{-1} \int_{\Omega} \left[ \frac{1 - \lambda_{eq}}{\lambda_{eq}} \left( \frac{\tau}{\eta_v(\lambda) \dot{\gamma}} \right)^c \right] \lambda^h \varphi^h d\Omega \\
& + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}^h) \delta (\nabla \cdot \mathbf{v}^h) d\Omega + \sum_{K \in \Omega^h} \int_{\Omega_K} (\nabla p^h - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^h) \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) (\nabla q^h - \nabla \cdot \mathbf{S}^h) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \mathbf{u} \cdot \nabla \lambda^h + t_{eq}^{-1} \lambda^h - \left[ \frac{1 - \lambda_{eq}}{\lambda_{eq}} \left( \frac{\tau}{\eta_v(\lambda^h) \dot{\gamma}} \right)^c \right] \lambda^h \right] \\
& \quad \cdot \psi \left[ \mathbf{u}^h \cdot \nabla \varphi^h + t_{eq}^{-1} \varphi^h - \left[ \frac{1 - \lambda_{eq}}{\lambda_{eq}} \left( \frac{\tau}{\eta_v(\lambda^h) \dot{\gamma}} \right)^c \right] \varphi^h \right] d\Omega \\
& + 2\eta_p \int_{\Omega} \left( (2\eta_p)^{-1} \boldsymbol{\tau}^h + (2\eta_p)^{-1} \theta(\lambda) ((\nabla \boldsymbol{\tau}^h) \mathbf{u}^h - \nabla \mathbf{u}^h \boldsymbol{\tau}^h - \boldsymbol{\tau}^h \nabla (\mathbf{u}^h)^T) + \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \right) \\
& \quad : \beta \left( (2\eta_p)^{-1} \mathbf{S}^h + (2\eta_p)^{-1} \theta(\lambda) ((\nabla \mathbf{S}^h) \mathbf{u}^h - \nabla \mathbf{u}^h \mathbf{S}^h - \mathbf{S}^h \nabla (\mathbf{u}^h)^T) - \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) \right) d\Omega \\
& = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} t_{eq}^{-1} \varphi^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma + \sum_{K \in \Omega^h} \int_{\Omega_K} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) (-\nabla q^h + \nabla \cdot \mathbf{S}^h) d\Omega \\
& \quad + \int_{\Omega} t_{eq}^{-1} \cdot \psi \left[ \mathbf{u}^h \cdot \nabla \varphi^h + t_{eq}^{-1} \varphi^h - \left[ \frac{1 - \lambda_{eq}}{\lambda_{eq}} \left( \frac{\tau}{\eta_v(\lambda) \dot{\gamma}} \right)^c \right] \varphi^h \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{3.24}$$

onde os parâmetros de estabilidade  $\alpha$  e  $\delta$  são os propostos em Franca e Frey (1992) para fluidos com viscosidade constante,  $\psi$  é o parâmetro introduzido em Franca et al. (1992) no contexto da equação advecção-reação-difusão, e o parâmetro  $\beta$  é definido de acordo com a estimativa de erro GLS estabelecido em Behr et al. (1993) e serão apresentados na sub-seção seguinte.

### 3.4.1 Parâmetros de estabilidade para os termos GLS

O objetivo principal dos parâmetros estabilizadores dos termos GLS é dosar a quantidade destes termos que estarão sendo adicionados a formulação, sem que o método perca a representação física ao qual se propõe. Os parâmetros estabilizadores dos termos GLS apresentam diferentes estratégias em função das dimensões e da essência do fenômeno ao qual as equações em que está estabilizando representa.

O parâmetro estabilizador da equação de balanço de momentum,  $\alpha$ , depende do número de Reynolds de malha e do tamanho do elemento dosando a quantidade de difusão artificial adicionada a formulação. O número de Reynolds de malha é dado pela seguinte expressão:

$$\text{Re}_K = \frac{\rho m_k |\mathbf{u}|_p h_K}{4 \eta_p} \quad (3.25)$$

onde  $h_K$  é o tamanho do elemento dado pela maior diagonal do elemento, a constante  $m_k = \min\{1/3, 2C_k\}$ , e a constante  $C_k$  é derivada da estimativa de erro (Franca e Frey, 1992). A p-norma da velocidade é dada pela seguinte expressão:

$$|\mathbf{u}(\mathbf{x})|_p = \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^N |\mathbf{u}_i(\mathbf{x})|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1, N} |\mathbf{u}_i(\mathbf{x})|, & p = \infty \end{cases} \quad (3.26)$$

Com as dimensões apropriadas, o parâmetro  $\alpha$  é dado pela expressão,

$$\alpha(x) = \frac{h_K}{2|\mathbf{u}|_p} \text{Re}_K = \frac{\rho m_k h_K^2}{8 \eta_v} \quad (3.27)$$

Note que, pelo fato do problema ter o termo advectivo negligenciado, este parâmetro é exclusivamente função do tamanho do elemento.

O parâmetro estabilizador  $\delta$  controla a adição do termo GLS da equação da conservação de massa. A expressão para  $\delta$  proposta em Franca and Frey, 1992, é apresentada da seguinte maneira:

$$\delta = \lambda |\mathbf{u}|_p h_K \text{Re}_K = \frac{\lambda \rho m_k h_K^2 |\mathbf{u}|_p^2}{4 \eta_v} \quad (3.28)$$

onde  $\lambda > 0$  é um parâmetro positivo.

O parâmetro de estabilização da equação evolutiva para o parâmetro de estabilização,  $\psi$ , tem um contexto de uma equação de advecção-reação-difusão (Franca, 1999) adaptada a

equação de advecção-reação ao qual ele estabiliza. Este parâmetro depende do número de Peclet de malha e do tamanho do elemento. O número de Peclet de malha é representado por duas expressões como apresentado abaixo:

$$Pe_K^1(\mathbf{x}) = \frac{2\nu}{m_k \sigma h_K^2} \quad e \quad Pe_K^2(\mathbf{x}) = \frac{m_k |\mathbf{u}|_p h_K}{\nu} \quad (3.29)$$

Dependendo dos valores encontrados para os números de Peclet, obtemos o valor da função  $\xi$  como apresentado a seguir:

$$\xi = \begin{cases} 1, & 0 < \mathbf{x} \leq 1 \\ \mathbf{x}, & \mathbf{x} \geq 1 \end{cases} \quad (3.30)$$

onde  $\mathbf{x}$  aqui representa os números de Peclet. O parâmetro  $\psi$  é dado então por:

$$\psi = \frac{h_K^2}{\sigma h_K^2 \xi(Pe_K^1) + \frac{2\nu}{m_K} \xi(Pe_K^2)} \quad (3.31)$$

*Observações:*

- (i) A constante  $\sigma$  é o coeficiente representando o parâmetro reativo na equação de advecção-reação-difusão. Assim, ao aplicarmos a equação de evolução para o parâmetro de estruturação, este coeficiente é igual a função associada ao termo *breakdown*.
- (ii) Para que a estratégia montada para o parâmetro de estabilização do mínimo-quadrado da equação de evolução para o parâmetro de estruturação esteja de acordo com um contexto de uma equação de advecção-reação, a constante  $\nu$  (coeficiente representando o parâmetro difusivo na equação de advecção-reação-difusão) deve ser um valor muito pequeno, próximo a zero.

Para determinar a faixa em que do parâmetro  $\beta$  opera, foi apresentado em Behr, 1993, um estudo de estabilidade do método GLS. A formulação utilizada nesta tese é chamada por Behr de Método II, onde a única restrição é  $\beta > 0$ . Optou-se por  $\beta = 1$ , onde observou-se bons resultados. O parâmetro  $\varepsilon$  que multiplica o termo de quasi-incompressibilidade tem o objetivo de aproximar este termo a zero, afim de suprir algumas posições na matriz de rigidez que seriam iguais a zero e evitar problemas numéricos.

### 3.5 Problema matricial

As discretizações da Eq.3.24 são obtida a partir das expansões das aproximações de elementos finitos para  $\lambda^h$ ,  $\tau^h$ ,  $\mathbf{u}^h$ ,  $p^h$ ,  $\varphi^h$ ,  $\mathbf{S}^h$ ,  $\mathbf{v}^h$  e  $q^h$  como uma combinação das suas respectivas funções de forma e graus de liberdade, assim, gerando um sistema residual de equações de rigidez não lineares. As funções aproximação para  $\lambda^h$ ,  $\tau^h$ ,  $\mathbf{u}^h$ ,  $p^h$ ,  $\varphi^h$ ,  $\mathbf{S}^h$ ,  $\mathbf{v}^h$  e  $q^h$  são dadas por expansões polinomiais:

$$\begin{aligned} S_{ij}^h(x) &= \sum_{\hat{A} \in \Omega^t} N_{\hat{A}}(x) S_{ij}^{\hat{A}} \\ v_i^h(x) &= \sum_{A \in \Omega^h} N_A(x) v_i^A \\ q^h(x) &= \sum_{\tilde{A} \in \Omega^t} N_{\tilde{A}}(x) q_{\tilde{A}} \\ \lambda^h(x) &= \sum_{\tilde{A} \in \Omega^t} N_{\tilde{A}}(x) \lambda_{\tilde{A}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

e são substituídos na formulação GLS da Eq.3.24. Nas Eq 3.32,  $N_A(x)$ ,  $N_{\hat{A}}(x)$ ,  $N_{\tilde{A}}(x)$  são polinômios de  $\tilde{A}$ ,  $A$ ,  $\hat{A}$  e  $\tilde{A}$ , ponto nodal para o parâmetro de estruturação, velocidade, tensão-extra e pressão, respectivamente. Para as simulações desta tese utilizou-se funções de forma lineares e de mesma ordem para todas as variáveis. As integrais no  $L^2$  normais da formulação da Eq.3.24 são aproximadas via quadratura Gaussiana. O resultante sistema algébrico pode ser resumido como:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}^h) = 0 \quad (3.33)$$

onde  $\mathbf{U}$  é o vetor dos graus de liberdade nodais para as variáveis primais  $\lambda^h$ ,  $\tau^h$ ,  $\mathbf{u}^h$  e  $p^h$ .

A fim de obter a solução dos sistemas algébricos representados pela Eq.3.34, foi empregado o método *quasi-Newton*. Este método requer uma estimativa inicial  $\mathbf{U}_k$ ,  $k=0$  e, a cada iteração, é resolvido o sistema linear

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}_k^h) \Delta \mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{R}(\mathbf{U}^h) \quad (3.34)$$

onde  $\mathbf{J}(\mathbf{U}_k^h)$  definido por

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}_k^h) = \partial_{\mathbf{U}} \mathbf{R} \quad (3.35)$$

a fim de encontrar o vetor incremental  $\Delta \mathbf{U}_{k+1}$  e para computar

$$\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{U}_k + \Delta \mathbf{U}_{k+1} \quad (3.36)$$

é assumido que a convergência é alcançada quando a norma de  $\mathbf{R}(\mathbf{U}_k)$  é inferior a um valor de tolerância – neste trabalho determinou-se  $10^{-7}$ .

*Comentário:* Visando acelerar a convergência do método de *quasi-Newton*, foi implementada uma estratégia de continuação atuando sobre o termo de aceleração convectiva da equação de movimento da formulação GLS. Como estimativa inicial, emprega-se campos nulos de velocidade e pressão (Franceschini e Frey, 2003).

### 3.6 Elemento quadrangular bi-linear

O elemento quadrangular bi-linear, identificado pelo símbolo Q1, tem seu domínio elementar global definido pela localização de seus quatro pontos nodais de coordenadas globais  $x_a^e$ ,  $a = 1, \dots, 4$  no plano  $\mathcal{R}^2$ . Os pontos nodais locais são numerados no sentido anti-horário (Fig.3.2) e através de uma transformação linear, relaciona-se o elemento global com o elemento do ponto de vista local. O quadrilátero bi-unitário é chamado de Domínio Aparente e é representado pelas coordenadas locais  $\xi = \{\xi, \eta\}$ , nos quais  $\xi$  e  $\eta$  são as chamadas coordenadas naturais.

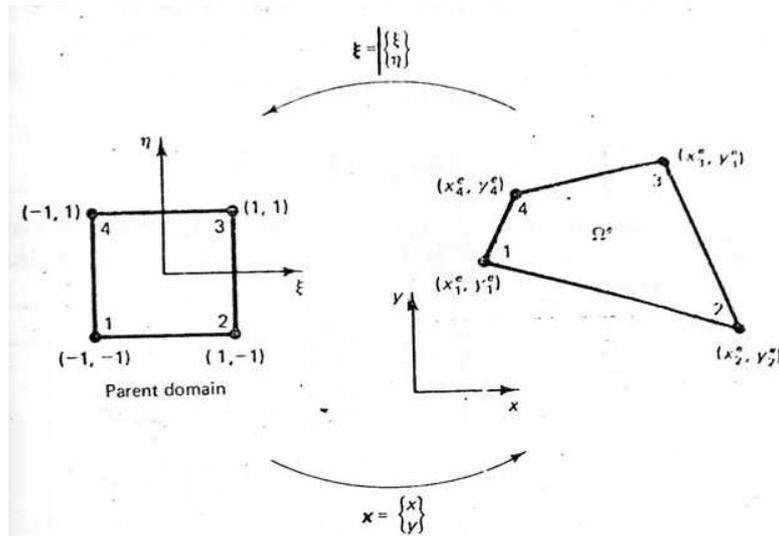


Figura 3.1 - Domínio de elemento quadrilátero bilinear no domínio aparente e ordenação nodal local (Hughes, 1987).

As coordenadas locais são relacionadas com as coordenadas do ponto,  $\mathbf{x}=\{x_1, x_2\}$ , no domínio do elemento,  $\Omega^e$ , por um mapeamento na forma

$$\begin{aligned} x_1(\xi, \eta) &= \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) x_{1a}^e \\ x_2(\xi, \eta) &= \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) x_{2a}^e \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde de uma forma mais sucinta podemos descrever as expressões como:

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi) \mathbf{x}_a^e \quad (3.38)$$

As funções de base locais  $N_a(\xi)$ , podem ser determinadas assumindo, inicialmente, as expansões

$$\begin{aligned} x_1(\xi, \eta) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \xi \eta \\ x_2(\xi, \eta) &= \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \xi \eta \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros a serem determinados. O segundo passo é impôr que as Eq.3.39 satisfaçam, respectivamente, as condições ,

$$\begin{aligned} x_1(\xi_a, \eta_a) &= x_{1a}^e \\ x_2(\xi_a, \eta_a) &= x_{2a}^e \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde  $\eta_a$  e  $\xi_a$  são definidos na Tab.3.1

Tabela 3.1 - Coordenadas Nodais no espaço  $\xi$

a	$\xi_a$	$\eta_a$
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1

As condições descritas pela Eq.3.30 impõem restrições nas funções  $N_a$ , onde  $N_a(\xi_b) = \delta_{ab}$ .

Para observar isso combinando a Eq.3.37 e 3.40,

$$\begin{aligned} x_{1b}^e - x(\xi_b, \eta_b) &= \sum_{a=1}^4 N_a(\xi_b, \eta_b) x_{1a}^e \\ x_{2b}^e - x(\xi_b, \eta_b) &= \sum_{a=1}^4 N_a(\xi_b, \eta_b) x_{2a}^e \end{aligned}$$

que vigora somente se  $N_a(\xi_b, \eta_b) = \delta_{ab}$ . A Eq.3.39 e 3.40 conduzem ao seguinte sistema matricial:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{11}^e \\ x_{12}^e \\ x_{13}^e \\ x_{14}^e \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{21}^e \\ x_{22}^e \\ x_{23}^e \\ x_{24}^e \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Em cada caso, a matriz dos coeficientes é a mesma. Resolvendo-se os sistemas e para os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ , obtém-se a equação da função de forma, ou de aproximação, bi-linear local  $N_a(\xi)$ :

$$N_a(\xi) = N_a(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta) \quad (3.42)$$

Note que é precisamente o produto das funções de forma unidimensionais derivadas anteriormente. Na Fig.3.3 é apresentada a representação gráfica das funções de forma obtidas acima.

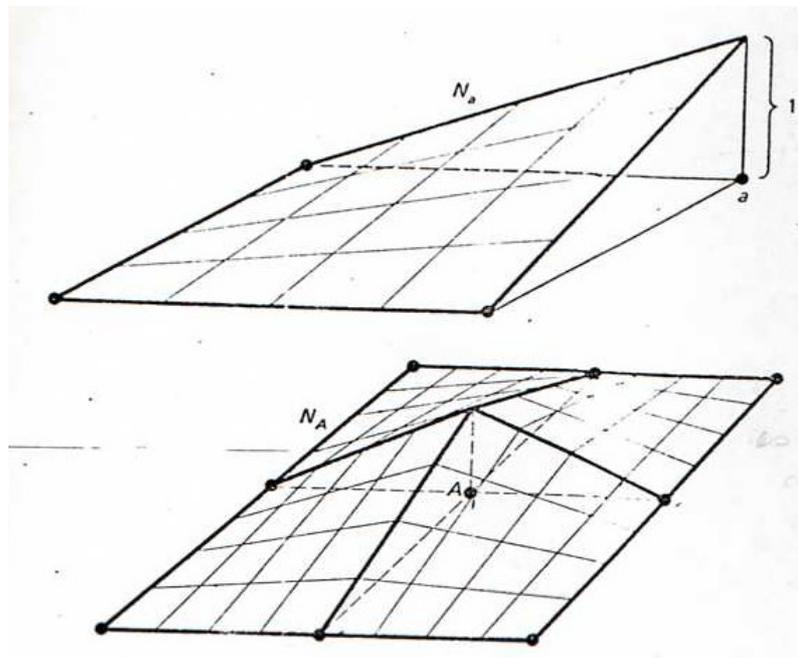


Figura 3.2 - Funções de forma local ( $N_a$ ) e global ( $N_A$ ) do elemento quadrilátero bi-linear Q1 (Hughes, 1987).

### 3.7 Integração numérica: Quadratura Gaussiana

Seja  $f: \Omega^e \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  sendo uma função dada,

$$\int_{\Omega^e} f(x) d\Omega \quad (3.43)$$

onde estamos interessados no cálculo deste termo para fins de construção do elemento da matriz (pode-se pensar em  $f$  como qualquer termo em um integrando na formulação variacional). Em todo o domínio,  $f$  é considerado suave e integrável, portanto, não há ambiguidade quanto ao sentido da Eq.3.33. Em cada caso, é interessante trazer a integral sobre o domínio global para um domínio aparente. No caso bidimensional, a integral é dada como:

$$\int_{\Omega^e} f(x) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x_1(\xi, \eta), x_2(\xi, \eta)) j(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.44)$$

onde  $j$  é o determinante Jacobiano dado por  $j = \det(\partial x / \partial \xi)$ .

Em cada caso pode-se avaliar uma integral da seguinte forma:

$$\underbrace{\int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1}_{n_{sd} \text{ tempos}} g(\underbrace{\xi, \dots}_{n_{sd} \text{ argumentos}}) \underbrace{d\xi \dots}_{n_{sd} \text{ diferenciais}}$$

Considerando um caso unidimensional, onde é desejado para avaliar

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \quad (3.45)$$

Essa expressão pode ser aproximadamente calculada por meio de uma fórmula de integração numérica da seguinte forma:

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi = \sum_{l=1}^{n_{int}} g(\tilde{\xi}_l) W_l + R \simeq \sum_{l=1}^{n_{int}} g(\tilde{\xi}_l) W_l \quad (3.46)$$

onde  $n_{int}$  é o número de pontos de integração,  $R$  é o resto e  $W$  é o peso.

### 3.7.1 Quadratura Gaussiana

Este método apresenta uma grande precisão e é o utilizado para cálculo das integrais que formam o modelo apresentado neste trabalho. Os locais dos pontos de quadratura e valores dos pesos associados são determinados para atingir a precisão máxima.

### 3.7.2 Regra geral para Quadratura Gaussiana

Nesta seção será apresentada a regra geral para integração através do método da Quadratura Gaussiana, onde pode-se calcular da seguinte forma:

$$W_l = \frac{2}{[(1 - \xi_l^2)(\partial_\xi P_{n_{\text{int}}})(\xi_l)]^2} \quad 1 \leq l \leq n_{\text{int}} \quad (3.47)$$

$$R = \frac{2^{2n_{\text{int}}+1} (n_{\text{int}}!)^4}{(2n_{\text{int}}+1)[(2n_{\text{int}})!]^3} \partial_\xi^{2n_{\text{int}}} g(\xi) \quad (3.48)$$

onde  $\tilde{\xi}_l$  é o  $l^{\text{a}}$  zero do polinômio de Legendre  $P_{n_{\text{int}}}(\xi)$ . O polinômio de Legendre é definido por

$$P_{n_{\text{int}}}(\xi) = \frac{1}{2^{n_{\text{int}}} n_{\text{int}}!} d_\xi^{n_{\text{int}}} (\xi^2 - 1)^{n_{\text{int}}} \quad (3.49)$$

### 3.7.3 Quadratura Gaussiana em várias dimensões

A regra Gaussiana para integrais em várias dimensões é construída através do emprego da regra Gaussiana unidimensional em cada coordenada separadamente. Em duas dimensões, a regra Gaussiana é dada por

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi d\eta &\approx \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{j^{(1)}=1}^{n_{\text{int}}^{(1)}} g(\tilde{\xi}_{j^{(1)}}^{(1)}, \eta) W_{j^{(1)}}^{(1)} \right\} d\eta \\ &\approx \sum_{j^{(1)}=1}^{n_{\text{int}}^{(1)}} \sum_{j^{(2)}=1}^{n_{\text{int}}^{(2)}} g(\tilde{\xi}_{j^{(1)}}^{(1)}, \tilde{\eta}_{j^{(2)}}^{(2)}) W_{j^{(1)}}^{(1)} W_{j^{(2)}}^{(2)} \end{aligned} \quad (3.50)$$

A localização dos pontos de integração elemento Q1 e Q2 são ilustrados na Fig.3.4

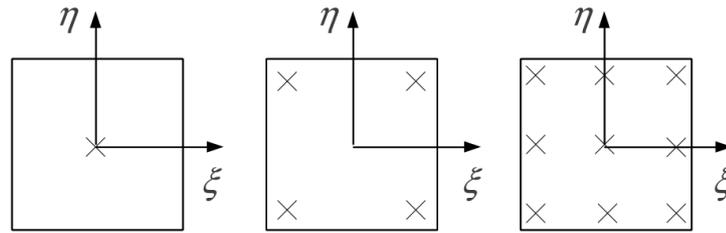


Figura 3.3 - Locais dos pontos de integração da Quadratura Gaussiana

### 3.8 Derivadas das funções de forma e sub-rotinas

É necessário calcular explicitamente as derivadas das funções de forma para construir as matrizes de rigidez elementares. As derivadas da  $N_a$  com respeito a  $x_1$  e  $x_2$  pode ser avaliada com auxílio da regra da cadeia:

$$\partial_{x_1} N_a = \partial_{\xi} N_a \partial_{x_1} \xi + \partial_{\eta} N_a \partial_{x_1} \eta \quad (3.51)$$

$$\partial_{x_2} N_a = \partial_{\xi} N_a \partial_{x_2} \xi + \partial_{\eta} N_a \partial_{x_2} \eta \quad (3.52)$$

É interessante reformular essas relações na seguinte forma matricial:

$$\langle \partial_{x_1} N_a \partial_{x_2} N_a \rangle = \langle \partial_{\xi} N_a \partial_{\eta} N_a \rangle \begin{bmatrix} \partial_{x_1} \xi & \partial_{x_2} \xi \\ \partial_{x_1} \eta & \partial_{x_2} \eta \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

As derivadas  $\partial_{\xi} N_a$  e  $\partial_{\eta} N_a$  podem ser explicitamente calculadas. Contudo, os termos na matriz não podem ser diretamente calculados, pois não se tem expressões explícitas  $\xi = \xi(x_1, x_2)$  e  $\eta = \eta(x_1, x_2)$ . Por outro lado, pode-se obter a relação inversa,

$$x_1(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\xi, \eta) x_{1a}^e \quad (3.54)$$

$$x_2(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\xi, \eta) x_{2a}^e \quad (3.55)$$

o que permite que seja calculada a matriz

$$\partial_{\xi} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \partial_{\xi} x_1 & \partial_{\eta} x_1 \\ \partial_{\xi} x_2 & \partial_{\eta} x_2 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

onde os componentes são:

$$\partial_{\xi} x_1 = \sum_{a=1}^{n_{en}} \partial_{\xi} N_a x_{1a}^e \quad \partial_{\eta} x_1 = \sum_{a=1}^{n_{en}} \partial_{\eta} N_a x_{1a}^e \quad (3.57)$$

$$\partial_{\xi} x_2 = \sum_{a=1}^{n_{en}} \partial_{\xi} N_a x_{2a}^e \quad \partial_{\eta} x_2 = \sum_{a=1}^{n_{en}} \partial_{\eta} N_a x_{2a}^e \quad (3.58)$$

A matriz dada na Eq.3.56 é o inverso da matriz dada na Eq.3.53, assim,

$$\begin{bmatrix} \partial_{x_1} \xi & \partial_{x_2} \xi \\ \partial_{x_1} \eta & \partial_{x_2} \eta \end{bmatrix} = (\partial_{\xi} \mathbf{x})^{-1} = \frac{1}{j} \begin{bmatrix} \partial_{\eta} x_2 & -\partial_{\eta} x_1 \\ -\partial_{\xi} x_2 & \partial_{\xi} x_1 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

onde

$$j = \det(\partial_{\xi} \mathbf{x}) = \partial_{\xi} x_1 \partial_{\eta} x_2 - \partial_{\eta} x_1 \partial_{\xi} x_2 \quad (3.60)$$

Todas as relações anteriores são tipicamente avaliadas em sub-rotinas de Funções de Forma. É conveniente separar os cálculos em que podem ser realizados de uma só vez para todos os elementos do mesmo tipo e aqueles que precisam ser repetidos para cada elemento.

Para o grupo elementar, calcular regra de integração, funções de forma e derivadas locais:

$$\begin{aligned} & \text{Para } l=1, \dots, n_{\text{int}} \\ & \text{Determine: } W_l, \tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l \\ & \text{Para } a=1, \dots, n_{\text{en}} \\ & \text{Calcular: } N_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l), \partial_{\xi} N_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l), \partial_{\eta} N_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) \end{aligned}$$

Dado a enésima coordenada dos elementos ( $x_a^e, y_a^e$  onde  $1 \leq a \leq n_{\text{en}}$ ), calcular as derivadas globais das funções de forma e os determinantes Jacobianos:

Para  $l=1, \dots, n_{\text{int}}$

Calcular:

$$\partial_{\xi} x_1(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) = \sum_{a=1}^{n_{\text{en}}} \partial_{\xi} N_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) x_{1a}^e$$

$$\partial_{\eta} x_1(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) = \sum_{a=1}^{n_{\text{en}}} \partial_{\eta} N_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) x_{1a}^e$$

$$\partial_{\xi} x_2(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) = \sum_{a=1}^{n_{\text{en}}} \partial_{\xi} N_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) x_{2a}^e$$

$$\partial_{\eta} x_2(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) = \sum_{a=1}^{n_{\text{en}}} \partial_{\eta} N_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) x_{2a}^e$$

$$j(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) = \partial_{\xi} x_1(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) \partial_{\eta} x_2(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) - \partial_{\eta} x_1(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) \partial_{\xi} x_2(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)$$

Para  $a=1, \dots, n_{\text{en}}$

Calcular:

$$\partial_{x_1} N_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) = \frac{\partial_{\xi} N_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) \partial_{\eta} x_2(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) - \partial_{\eta} N_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) \partial_{\xi} x_2(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}{j(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}$$

$$\partial_{x_2} N_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) = \frac{-[\partial_{\xi} N_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) \partial_{\eta} x_1(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) - \partial_{\eta} N_a(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l) \partial_{\xi} x_1(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)]}{j(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)}$$

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Simulações numéricas de escoamentos de Fluidos Estruturados Tixotrópicos são aqui obtidas por aproximações estabilizadas de elementos finitos das equações governantes definidas pelas Eq.3.24. O esquema numérico introduzido na seção anterior é utilizado para aproximar escoamentos *creeping flows* (escoamentos lentos,  $Re \ll 1$ ) em regime permanente de Fluidos Estruturados Tixotrópicos que escoam através de dois problemas característicos de engenharia: um cilindro confinado entre duas placas planas e uma expansão planar abrupta. Características do escoamento são apresentados e discutidos para faixas relevantes de parâmetros reológicos e cinemáticos que o regem. Os resultados são principalmente voltados para o desenvolvimento do nível de estrutura material, juntamente com a identificação das *yielded/unyielded regions*, apresentação dos níveis de viscosidade estrutural, campo do módulo das velocidades e tensor-extra de tensão. A identificação das *yielded/unyielded regions* é obtida através da análise de distribuição do parâmetro de estruturação e pela determinação das *yield surface* do material.

### 4.1 Cilindro confinado entre duas placas planas

#### 4.1.1 Descrição do problema do cilindro confinado entre duas placas planas

A geometria e as condições de contorno são ilustradas na Fig.4.1, onde observamos um cilindro de raio  $R$  (comprimento característico,  $L_c$ , para este problema) confinado em um canal planar de altura  $H$  e razão  $H/R$  de oito para um. Para garantir regiões de escoamento totalmente desenvolvido a montante e a jusante do cilindro, um comprimento de  $50R$  unidades é fornecido para ambas as regiões. O escoamento é assumido ter um plano de simetria ao longo da linha central do canal ( $x_2=0$ ) e, portanto, apenas metade do domínio precisa ser considerado.

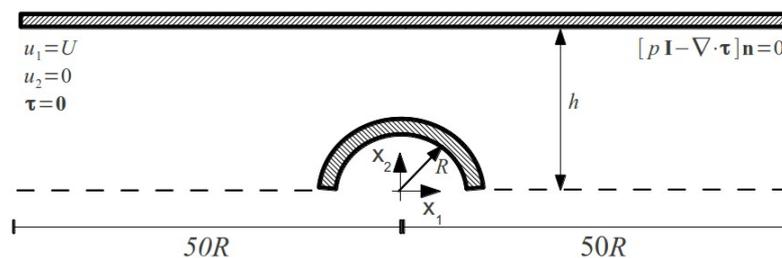


Figura 4.1 – Descrição do problema: cilindro confinado entre duas placas planas.

As condições de contorno cinemáticas são:

- (i) não deslizamento e impermeabilidade ao longo da parede do canal e sobre a superfície do cilindro ( $\mathbf{u}=0$ );
- (ii) simetria ao longo da linha de centro do canal ( $\tau_{12}=\partial x_2 u_1=u_2=0$ ) ;
- (iii) perfis uniformes para velocidade e tensão extra ao longo da entrada do canal ( $\boldsymbol{\tau}=\mathbf{0}, u_1=U, u_2=0$ ) ;
- (iv) tração livre ao longo da saída do canal  $[-\nabla p \mathbf{I} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] \mathbf{n} = \mathbf{0}$  ;

Enquanto, para o parâmetro de estruturação, são dadas as seguintes condições de contorno;

- (v) perfil uniforme ao longo da entrada do canal,  $\lambda=1$ ;

Um importante tópico que merece atenção diz respeito à imposição de condições de contorno cinemáticas ao longo da entrada do canal. Ao contrário dos escoamentos puramente viscoelásticos ou viscoplásticos, para o qual apropriadas soluções exatas para perfis totalmente desenvolvidos de tensão e velocidade estão disponíveis, uma imposição das condições de contorno não é possível para os escoamentos de Fluidos Estruturados Tixotrópicos. Os escoamentos estruturados aqui abordados não são nem puramente viscoelásticos Maxwell-b, nem escoamentos puramente viscoplásticos SMD. Na verdade, dependendo do nível de estrutura local do material sob o escoamento, o comportamento dos Fluidos Estruturados Tixotrópicos podem se aproximar, em certo grau, a um desses modelos. Portanto, a imposição de perfis de tensão e de velocidade ao longo da entrada é uma questão que permanece aberta para os escoamentos de Fluidos Estruturados Tixotrópicos. De acordo com a condição de contorno de entrada para a equação de evolução ( $\lambda=1$ , simulando um material totalmente estruturado elástico), parece fisicamente mais significativo a considerar os perfis de entrada *flat* para tensão e velocidade, mesmo que tal escolha leve a severos picos de tensão gerando dificuldades numéricas.

#### 4.1.2 Teste de independência de malha para o problema do cilindro confinado entre duas placas planas

O domínio computacional é particionado em elementos finitos não-sobrepostos onde é aplicado um procedimento de teste de independência de malha, envolvendo o cálculo do coeficiente de arrasto ao longo da superfície do cilindro e o cálculo de variações locais da

tensão. O objetivo deste teste é determinar uma malha o menos refinada possível, para que não apresente um custo computacional alto, e que não influencie nos resultados obtidos. Três diferentes malhas bi-lineares lagrangeanas (Q1) foram investigadas: (i) malha M1, com 3102 elementos Q1; (ii) malha M2, com 5830 elementos Q1; (iii) malha M3, com 9570 elementos Q1.

Por falta de resultados para Fluidos Estruturados Tixotrópicos disponíveis na literatura, optou-se primeiramente por apresentar comparações entre resultados para fluido de Maxwell-b através da mesma geometria e utilizando-se do mesmo método numérico (ver detalhes em Frey, 2010). Os resultados do coeficiente de arrasto obtido com o presente código, mas usando o modelo de Maxwell-b padrão foram comparados com os resultados de Oldroyd-b em Behr et al., 2005. Os erros máximos obtidos para valores elevados do número Deborah ( $De = \theta u_c / R = 0,9$ ) foram, abaixo de 2,75% para a malha M1, abaixo de 1,82% para a malha M2, e abaixo de 1,13% para a malha de M3. Os resultados obtidos são apresentados na Tab.4.1.

Tabela 4.1 – Coeficiente de Arrasto para Fluido de Maxwell-b

Wi	M1	M2	M3	Sun et al.	Behr et al.
0	15.5851	15.7269	15.7221	15.7220	15.6720
0.1	15.5891	15.7282	15.7228	15.7050	15.6748
0.2	15.6011	15.7321	15.7293	15.6910	15.6648
0.3	15.6219	15.7391	15.7290	15.6820	15.6516
0.4	15.6530	15.7503	15.7355	15.6680	15.6384
0.5	15.6969	15.7674	15.7454	15.6620	15.6292
0.6	15.7575	15.7927	15.7602	15.6520	15.6270
0.7	15.8408	15.8302	15.7820	15.6650	15.6346
0.8	15.9555	15.8859	15.8141	15.6930	15.6536
0.9	16.1164	15.9718	15.8627	15.7280	15.6852

Determinando como critério de independência de malha um erro relativo de aproximadamente 1%, podemos assim afirmar que o refinamento da malha M3 é suficiente para não alterar os resultados. É interessante ainda comparar resultados obtidos para simulações com o Fluido Estruturado Tixotrópico antes de determinar a malha a ser utilizada. Na Fig.4.2 são apresentados perfis do parâmetro de estruturação para diferentes localizações dentro do escoamento. Os parâmetros adimensionais que definem o escoamento são fixos nos seguintes valores:  $\theta_0^* = 4$ ,  $U^* = 1$ ,  $n = 0.5$ ,  $J = 200$  e  $t_{eq}^* = 1$ .

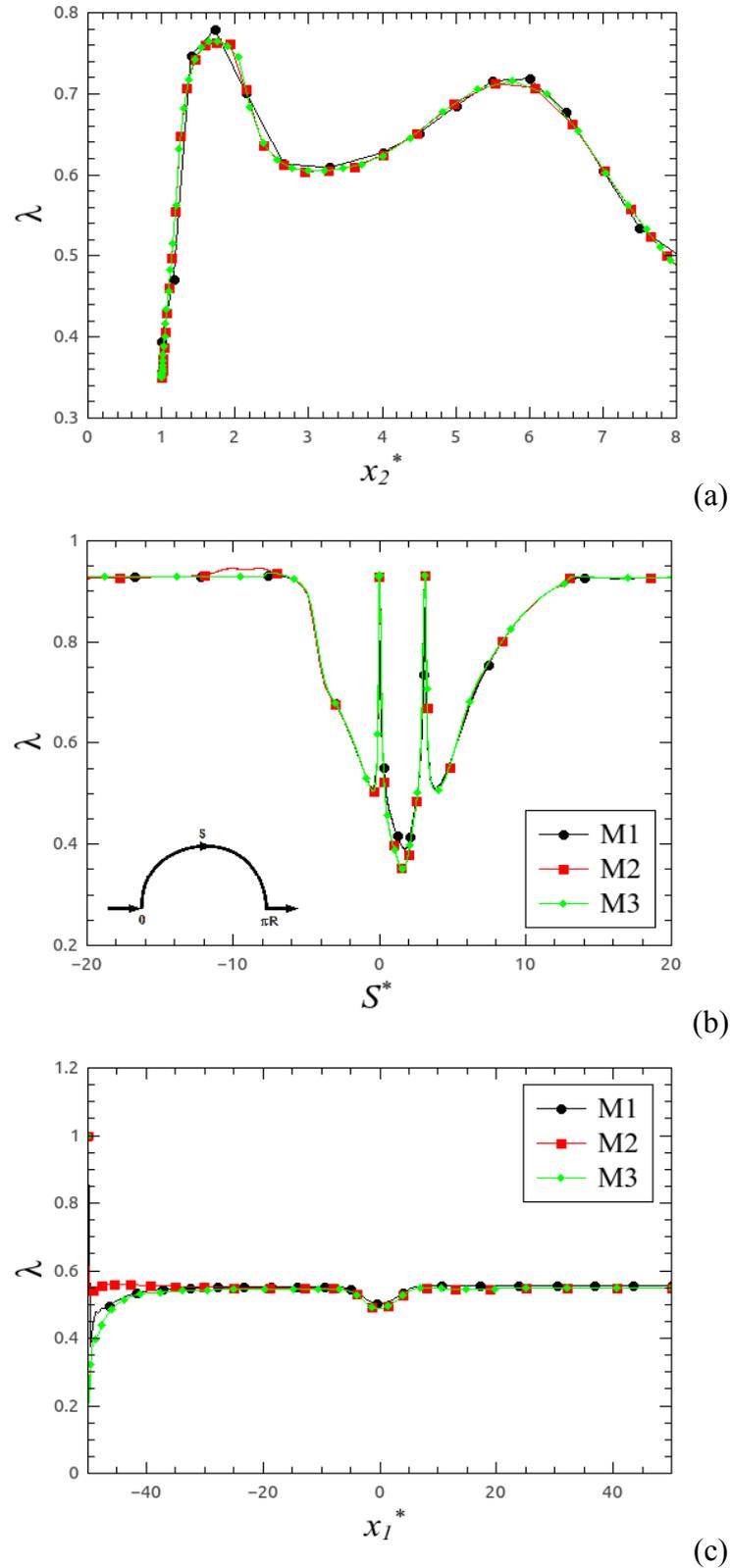


Figura 4.2 – Perfil do parâmetro de estruturação adimensionais para as malhas M1, M2 e M3 e  $\theta_0^*=4$   $U^*=1$ ,  $n=0.5$ ,  $J=200$  e  $t_{eq}^*=1$  para: (a)  $x_1^*=0$ ; (b)  $x_2^*=0$  e superfície do canal; (c)  $x_2^*=8$

A escolha deste campo como parâmetro de comparação se deve aos seguintes motivos: primeiro sua relevância dentro do modelo, onde algumas grandezas importantes ao modelo são função de sua magnitude; em sua equação de evolução, grandezas como tensão, viscosidade e taxa de deformação são computadas, e sendo assim, sensível a qualquer mudança destas grandezas. Pode-se observar que os resultados obtidos com as três malhas estão em boa concordância porém, a malha M3 apresenta um perfil mais suave principalmente próximo a superfície do cilindro, na parede da placa e na entrada do escoamento. Este comportamento é visto devido ao maior refinamento da malha M3 nestas regiões. Na Fig.4.2(b) é introduzido uma variável  $S^*$  para melhor avaliar o comportamento do nível de estruturação sobre a superfície do cilindro. Esta variável leva em conta o perímetro do cilindro e é adimensionalizada da mesma forma que  $x$ .

Com o objetivo de confirmar a independência de malha, serão apresentados a seguir os erros relativos entre malhas para os perfis do parâmetro de estruturação nas mesmas regiões do escoamento onde foram plotados gráficos da Fig.4.2 e os parâmetros fixos de  $\theta_0^*=4$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0.5$ ,  $J=200$  e  $t_{eq}^*=1$ . Ao se computar os erros entre uma malha menos refinada e uma malha posteriormente mais refinada, espera-se afirmar ser independente quando o critério já mencionado seja atingido. Como observação, é importante esclarecer que os pontos geométricos não são exatos, e sim, aproximados as coordenadas apresentadas nas tabelas a seguir. A Tab.4.2, os erros relativos apresentados são referentes a perfis do parâmetro de estruturação para a coordenada  $x_1^*=0$ , relativo ao topo do cilindro.

Tabela 4.2 – Erro relativo para o perfis do parâmetro de estruturação transversais em  $x_1^*$

$x_2^*$	erro relativo	
	M1-M2	M2-M3
1.0	11.3200%	0.1000%
1.7	2.0800%	0.2600%
3.2	0.6700%	0.0100%
4.0	0.2300%	0.1300%
7.0	0.0200%	0.4500%
8.0	2.8800%	0.1800%

Pode-se observar erros acima do critério estipulado de 1%, para a malha M1 em relação a malha M2. Estes erros estão exatamente nas camadas limites sobre o cilindro e sobre a parede do canal. Com o aumento do refinamento nestas regiões, os erros caem bruscamente, o que pode ser observado no erro relativo entre as malhas M2 e M3.

Tabela 4.3 – Erro relativo para perfis do parâmetro de estruturação ao longo da linha de centro do canal e superfície do cilindro

$S^*$	erro relativo	
	M1-M2	M2-M3
-25.1	0.5151%	0.5733%
-20.0	0.2917%	0.2931%
-15.4	0.1053%	0.1167%
-10.4	1.7337%	1.6873%
-5.3	0.1530%	0.0525%
-3.0	0.2668%	0.3900%
-1.1	0.1032%	1.0694%
0.0	16.7312%	0.0845%
0.5	8.0075%	0.0340%
1.0	9.9611%	0.1032%
1.6	11.3157%	0.0977%
2.0	3.7278%	0.1546%
2.6	0.9878%	0.7828%
3.1	7.9487%	0.0799%
3.5	0.9189%	0.3009%
5.5	0.3432%	0.6408%
10.1	0.1229%	0.2952%
15.3	0.1012%	0.0161%
20.6	0.0303%	0.0076%
25.2	0.3584%	0.0994%

Na Tab.4.3 são apresentados os erros relativos entre malhas para perfis do parâmetro de estruturação ao longo da linha de centro do canal e sobre a superfície do cilindro. Pode-se observar que para ambas as análises de erros relativos entre malhas, os valores estão dentro do critério estipulado ao longo da linha de centro. Com a presença do cilindro e a formação de uma camada limite em sua superfície, erros que não estão mais dentro do critério adotado são vistos. Entre as malhas M1 e M2, erros relativos na ordem de 10% podem ser constatados, o que determina que os resultados para a malha M1 não são suficientemente precisos para afirmarmos que estão independentes de seu refinamento, e desta forma, podem ser descartados os resultados obtidos por ela. Os erros relativos entre as malhas M2 e M3 estão todos na ordem de 1%, mesmo dentro da camada limite, o que nos aponta uma não necessidade de refinamento maior. Ainda devemos ressaltar que alguns poucos pontos estão com erro acima de 1% para a comparação dos resultados entre as malhas M2 e M3, o que podem ser atribuídos a pequenas oscilações numéricas locais em alguma das malhas em questão.

É interessante ainda estarmos avaliando os erros relativos entre malhas dentro da camada limite formada na superfície da parede do canal. A Tab.4.4 apresenta o erro relativo

entre malhas para os perfis do parâmetro de estruturação ao longo da superfície da parede do canal para os parâmetros fixos de  $\theta_0^*=4$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0.5$ ,  $J=200$  e  $t_{eq}^*=1$ .

Tabela 4.4 – Erro relativo para perfis do parâmetro de estruturação ao longo da parede do canal

$x_1^*$	erro relativo	
	M1-M2	M2-M3
50.0	1.3425%	0.0012%
45.4	1.3667%	0.0077%
40.1	1.3691%	0.0096%
35.5	1.3757%	0.0100%
30.3	1.3781%	0.0107%
25.0	1.3848%	0.0117%
20.4	1.3920%	0.0156%
15.2	1.4172%	0.0104%
10.6	1.3796%	0.0357%
5.3	0.8427%	0.1427%
4.0	1.4643%	0.0285%
2.7	2.0074%	0.0380%
1.3	2.5272%	0.1151%
0.0	2.8821%	0.1805%
-1.3	2.6925%	0.1837%
-2.7	1.9142%	0.1475%
-4.0	1.2964%	0.1925%
-5.4	0.9382%	0.3643%
-10.4	1.1917%	0.2873%
-15.5	1.0707%	0.4072%
-20.6	0.8169%	0.6386%
-25.2	0.4729%	0.9723%
-30.2	0.1811%	1.6464%
-35.3	1.3392%	2.7975%
-40.3	3.3778%	4.5276%
-45.4	10.3289%	11.5815%

Novamente podemos observar erros acima do critério estipulado para a malha M1 em relação a malha M2. Estes erros encontram-se principalmente na região da camada limite que sofre influência do cilindro. Para os erros relativos computados entre as malhas M2 e M3, a influência do cilindro gera erros aceitáveis dentro do critério estipulado. Observa-se também erros de maior magnitude (na ordem de 10%) na entrada do canal para ambas as relações entre malhas. Como já mencionado, as condições de contorno na entrada do escoamento geram um complexo problema de *entry flow*, o que acarreta em grandes picos de tensão, e por consequência, grandes oscilações numéricas. Assim desta forma podemos não levar em consideração estes pontos, principalmente por que o objetivo principal é estar estudando a influência do cilindro no escoamento. O estudo das condições de contorna de entrada em

escoamentos de Fluidos Estruturados Tixotrópicos é um dos tópicos que deve ser abordado como proposta de continuação desta presente tese.

Com base nos resultados apresentados, determinou-se que para todos os casos seria utilizada a malha M3, mostrada na Fig.4.3(a). Mesmo que os erros relativos apontem a malha M2 como suficientemente refinada, optou-se por uma escolha de malha mais conservadora, principalmente pela análise dos resultados apresentados na Tab.4.1. A malha M3 é construída para ser mais refinada ao longo da parede do canal e na superfície do cilindro, a fim de capturar com precisão os gradientes de velocidade observados nestas regiões. O menor tamanho adimensional da malha M3,  $h_{\min}^* = h_K/R$ , é igual a 0,0524. Este elemento encontra-se em torno do cilindro. Esta região é mostrada na vista explodida encontrada na Fig.4.3(b).

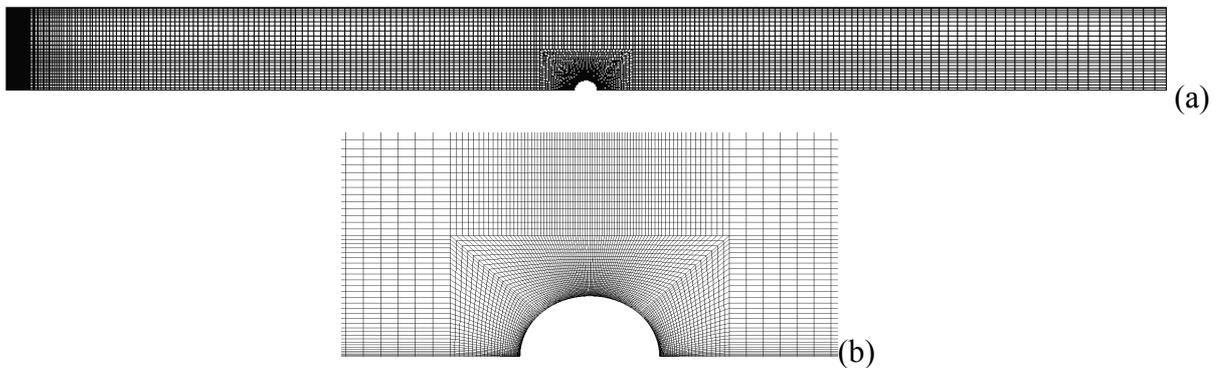


Figura 4.3 - Malha seleccionada para o problema do cilindro confinado entre placas planas:

(a) uma visão completa; (b) uma visão explodida.

#### 4.1.3 Análise de sensibilidade do problema do cilindro confinado entre duas placas planas

Nesta seção serão apresentadas simulações numéricas com o objetivo de investigar a influência da elasticidade e da tixotropia no nível de estruturação, nas *yielded/unyielded zones* e na dinâmica de fluidos. Nas situações analisadas, o tempo de relaxação adimensional  $\theta_0^*$  varia de 4 a 20,  $t_{eq}^*$  (ou o número de tixotropia) varia de  $10^{-1}$  a 10,  $J$  varia de 200 a 800 e  $n$  entre 0,25 e 1.

Nas simulações numéricas verificou-se que a influência do  $\theta_0^*$  sobre a convergência é a mais pronunciada; para maiores valores de  $\theta_0^*$ , mais complicado se torna a história de convergência. Isto se deve aos efeitos elásticos mais pronunciados que geram picos de tensões. Para superar essa dificuldade de convergência para os valores maiores de  $\theta_0^*$ , uma continuação de ordem zero no  $\theta_0^*$  foi implementada para assegurar a convergência, mesmo

para escoamentos elástico-dominados. A partir da estimativa de tensão e velocidade de escoamentos de Maxwell-b com suaves números de Deborah e um campo unitário para o parâmetro estruturação, o algoritmo de *quasi-Newton* realiza iterações até que o critério de convergência seja satisfeito. Isto é conseguido quando o residual das equações discretas é menor que  $10^{-7}$ . Então, uma nova iteração começa usando a solução anterior como uma estimativa inicial para a nova simulação, e assim, por estar mais próximo da solução, uma maior estimativa de convergência é esperada para o valor de  $\theta_0^*$  maior. Como o esperado, assim como a dificuldade de convergência, o número de iterações aumenta drasticamente para valores maiores de  $\theta_0^*$ , devido à natureza viscoelástica forte desses escoamentos.

Os efeitos de tixotropia em escoamentos complexos são melhores entendidos por um ponto de vista Lagrangeano. Em outras palavras, este ponto de vista é mais ilustrativo para analisar o que acontece a uma partícula material genérica de um fluido elasto-viscoplástico tixotrópico viajando ao longo do domínio do escoamento. Este tipo de análise é frequentemente utilizada a seguir para auxiliar na interpretação dos resultados numéricos obtidos.

A Fig.4.4 detalha a influência do tempo de relaxação adimensional  $\theta_0^*$  sobre a distribuição do parâmetro de estrutura  $\lambda$ , para valores fixos da intensidade de escoamento  $U^*$ , índice de *power-law*,  $n$ , número de salto,  $J$ , e o tempo de mudança da estrutura,  $t_{eq}^*$ . O tempo de relaxação adimensional,  $\theta_0^*$ , varia de 4 a 20.

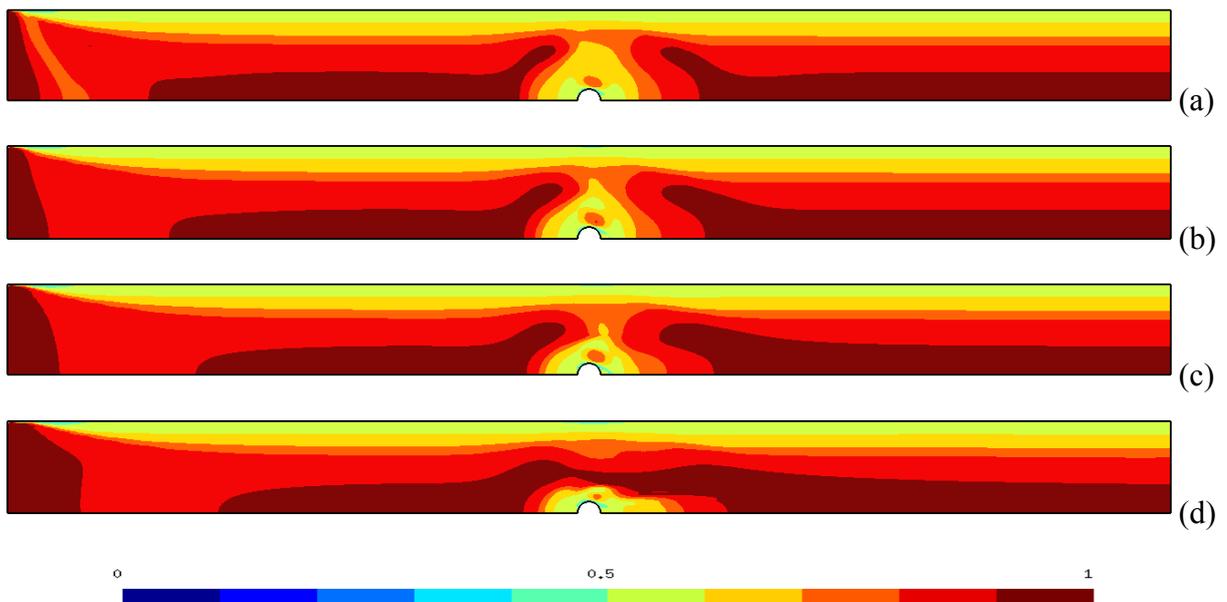


Figura 4.4 - Isobandas do parâmetro de estruturação, para  $U^*=1$ ,  $n=0.5$ ,  $J=200$  e  $t_{eq}^*=1$ :

(a)  $\theta_0^*=4$ ; (b)  $\theta_0^*=8$ ; (c)  $\theta_0^*=12.9$ ; (d)  $\theta_0^*=20$ .

Nestes resultados os processos *build-up* e *breakdown* de decomposição da estrutura do material ao longo do canal podem ser visualizados. Regiões ao qual o material preserva os níveis de sua estrutura são bem diferenciadas das regiões em que os níveis de sua estrutura são severamente destruídos, devido a valores elevados de tensão e taxas de deformação  $\dot{\gamma}$ . Uma vez que o material é totalmente estruturado na entrada do canal - devido à condição de contorno de entrada ( $\lambda=1$ ) da equação de evolução - as regiões do escoamento sujeitos a baixas tensões e taxas de deformação preservam os níveis de sua estrutura (regiões com altos  $\lambda$  na Fig.4.4). Como pode ser notado, regiões altamente estruturadas são encontradas principalmente em uma estreita proximidade da entrada do canal e ao longo da linha central de escoamento, a montante e a jusante do cilindro. Por outro lado, as regiões que apresentaram alta taxas de deformação, por consequência dos altos níveis de tensão, têm os níveis de sua estrutura destruídos e são caracterizadas por valores mais baixos  $\lambda$  na Fig.4.4. Essas regiões aparecem ao redor do cilindro e perto da parede do canal. Do ponto de vista da cinemática, aquelas regiões com altos níveis de tensão e altas taxas de deformação são originadas pela desaceleração do escoamento nas proximidades das fronteiras da geometria sólida. Evidentemente, regiões com baixo nível de estruturação, estão sujeitas a níveis suaves de tensão e taxas de deformação, ou seja, regiões as quais a estrutura do material não é drasticamente destruída pelas tensões aplicadas e pelas deformações sofridas pelo fluido. Essas regiões estão localizadas principalmente fora das camadas limite do escoamento. Apesar do padrão simétrico mostrado pelas regiões de alta estrutura a montante e a jusante do cilindro, para materiais com menos elasticidade, uma simetria completa entre eles não é possível. Este comportamento observado acontece principalmente devido ao efeito *upwind* ditado pelo termo advectivo da equação de evolução (Eq.2.106), demonstrando efeitos de tixotropia para valores de  $t_{eq}^*$  não nulos. Devido a este efeito, os baixos valores de  $\lambda$  em torno do cilindro são levados mais a jusante do que a montante do cilindro. Uma segunda questão que deve-se levar em conta é o *entry flow* (problema de escoamento na entrada do canal) que se originou na entrada do canal. Nesta região observa-se que o aumento da elasticidade faz com que a microestrutura das partículas entrando permaneça mais a jusante, isto por que, as partículas materiais elásticas são capazes de sofrer grandes deformações recuperáveis antes da microestrutura começar a quebrar.

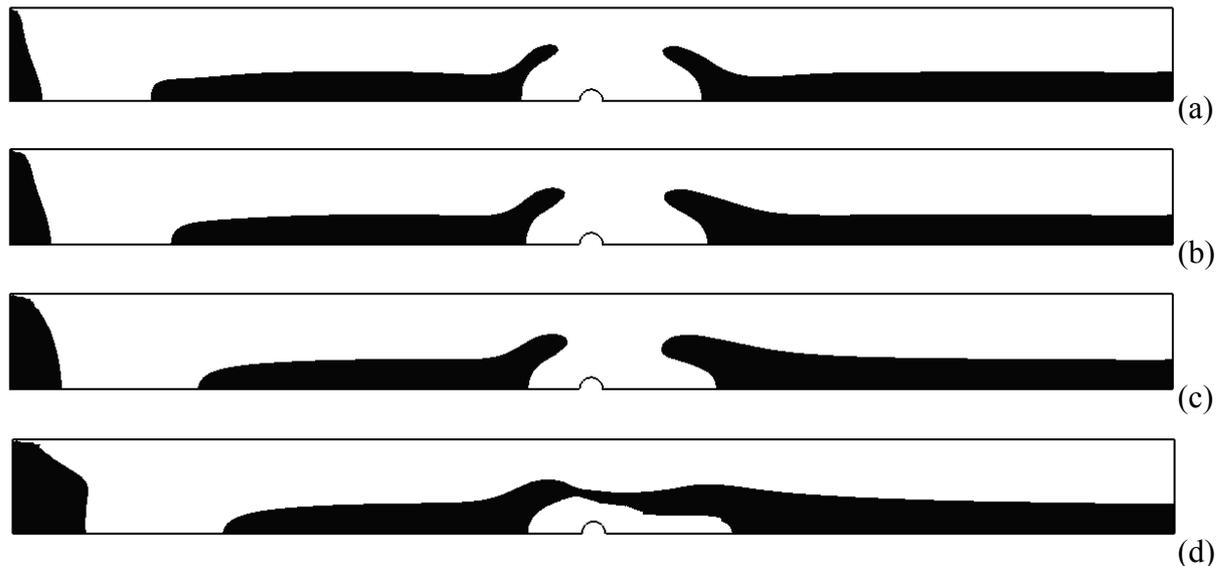


Figura 4.5 - Isobandas das *yielded/unyielded regions*, para  $U^*=1$ ,  $n=0.5$ ,  $J=200$  e  $t_{eq}^*=1$ :

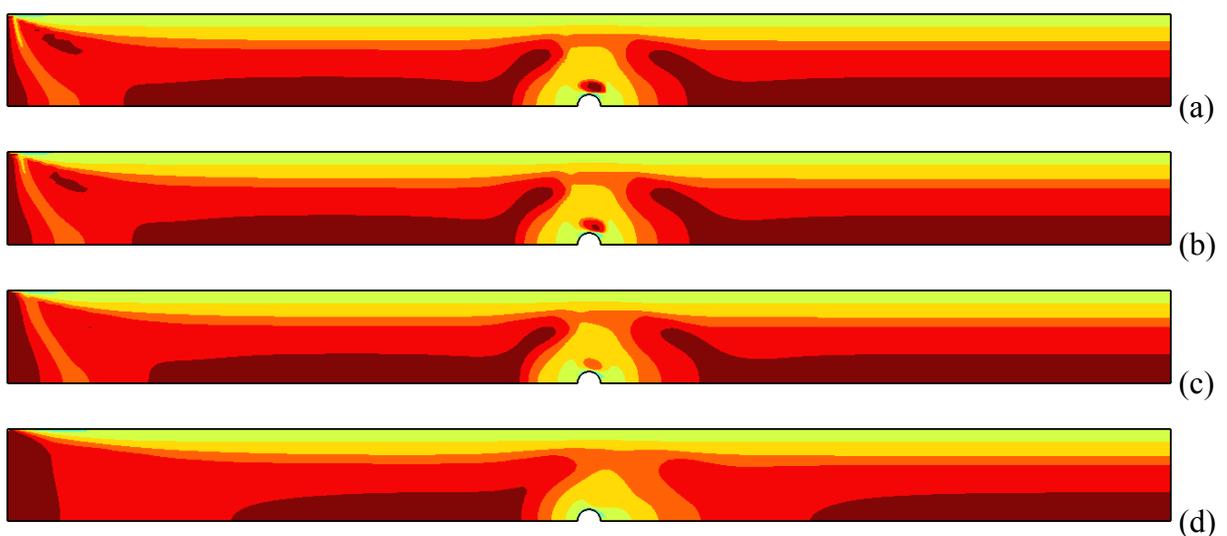
(a)  $\theta_0^*=4$ ; (b)  $\theta_0^*=8$ ; (c)  $\theta_0^*=12.9$ ; (d)  $\theta_0^*=20$ .

A Fig.4.5 mostra a influência do tempo de relaxação adimensional,  $\theta_0^*$ , na topologia das *yielded/unyielded regions*, para os mesmos parâmetros relatados na Fig.4.4. As *yield surfaces* que interagem entre ambas as regiões são computadas como apresentado na seção 2.7. Assim, a superfície que delimita estas duas regiões foi definida como o lugar geométrico onde o nível de estrutura do material está,  $\lambda \approx 0,9$ . Portanto, de acordo com esta definição, as *unyielded regions* (zonas negras) enfrentam níveis de estrutura acima do nível de estrutura considerado, garantindo assim, taxas de deformação pequenas e viscosidades estruturais altas. Nas *yielded regions* (zonas brancas), o nível de estruturação está abaixo do nível considerado como limitador, escoando com níveis de elasticidade pequenos e apresentando efeitos de *shear thinning* e *shear-thickening* em sua viscosidade estrutural.

Podemos confirmar uma tendência de simetria, mas não completamente, devido aos efeitos tixotrópicos comentados na análise da Fig.4.4. Pode-se perceber claramente também que, com o aumento do nível de elasticidade do fluido, mais *unyielded regions* estão presentes, o que mostra uma predição correta e fisicamente coerente do modelo, já que são nestas regiões onde os efeitos elásticos se dão presentes. Em relação ao caso com maior elasticidade mostrado nas Fig.4.4(d), o material altamente estruturado consegue atravessar a região de alta tensão em torno do cilindro e atinge o lado jusante dele com uma pequena redução do seu nível de estruturação. Quando o material aproxima-se da superfície do cilindro, deforma-se elasticamente comprimindo-se através da área de passagem estreitada pelo cilindro e, em seguida, ele recupera a sua forma anterior, uma vez que atinge as regiões

de menor intensidade de tensão. Assim, quando a elasticidade for elevada, a presença do cilindro provoca o colapso da microestrutura muito menor, devido à capacidade aumentada do material de sofrer grandes deformações recuperáveis. Por conseguinte, uma maior parte do material é mantido altamente estruturado, e as *unyielded regions* tornam-se maiores. Para materiais sujeitos a níveis mais baixos de elasticidade (Fig.4.4(a) e (b)), a redução gradual das *unyielded regions* com a diminuição de  $\theta_0^*$ , leva as *unyielded regions* a serem cada vez mais confinadas a zona central do canal, quer a montante ou a jusante do cilindro. O recuo das *unyielded regions* evolui progressivamente, até sua separação completa sobre o cilindro (Fig.17(c)), dando origem a duas disjuntas *unyielded regions* a montante e a jusante do cilindro - como já relatado em trabalhos viscoplásticos usando uma geometria similar (Zisis e Mitsoulis, 2002). Tal comportamento poderia ser esperado pela queda de elasticidade, produzido pela queda de  $\theta_0^*$ , acelerando o desenvolvimento das regiões não-estruturadas (puramente viscosas) nas zonas do canal sujeitas a altos valores das taxas de deformação e a tensões não amortecidas pelos efeitos elásticos. De fato, uma comparação entre a Fig.4.4 e a Fig.4.5 sugere uma estreita semelhança de ambos os conjuntos de figuras, confirmando a existência de uma forte ligação entre a topologia de regiões de alta estruturação e as *unyielded regions*.

A influência do tempo de equilíbrio não-dimensional,  $t_{eq}^*$  (ou o número de tixotropia  $t_{eq}^*U^*$ ), pode ser avaliada nas Figs. 4.6 e 4.7, mostrando as isobandas do parâmetro de estruturação e as *unyielded regions*, para valores fixos de  $\theta_0^*$ ,  $n$ ,  $J$ , e  $U^*$ .



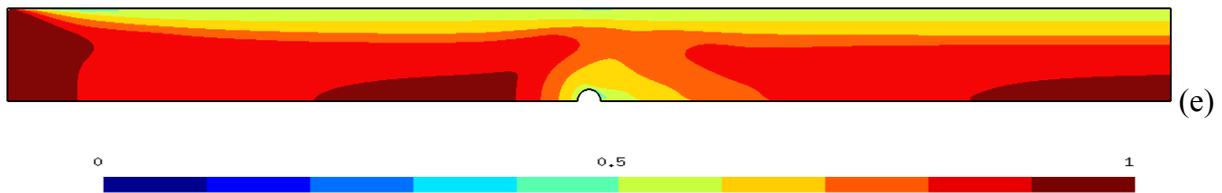


Figura 4.6 - Isobandas do parâmetro de estruturação, para  $\theta_0^*=4$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0.5$  e  $J=200$ :

(a)  $t_{eq}^*=0,01$ ; (b)  $t_{eq}^*=0,3$ ; (c)  $t_{eq}^*=1$ ; (d)  $t_{eq}^*=5$ ; (e)  $t_{eq}^*=10$ .

Como já mencionado, o tempo  $t_{eq}^*$  controla a intensidade do mecanismo de transporte do nível de estrutura do material, uma vez que multiplica o termo advectivo da equação de evolução (Eq.2.106). Assim é visto que, para pequenos valores do tempo de equilíbrio (Fig.4.6(a) e (b)), somente são observados pequenos efeitos de tixotropia em torno do cilindro onde tensões mais elevadas são esperadas e, por consequência, uma região de níveis mais baixos de estruturação. Isto indica que a microestrutura responde rapidamente à intensidade de tensão imposta. Por este fato, o padrão dos nível estruturação nesta região perto do cilindro é aproximadamente simétrico. Na região de entrada, pequenos efeitos tixotrópicos também são observados, onde o fluido entra totalmente estruturado, mas seus níveis de estruturação decaem em uma distância bastante curta. Isto ocorre por que a microestrutura da partícula material responde rapidamente com as intensidades da alta tensão que ocorrem devido à elevada viscosidade do fluido nesta região. Observa-se também que o fluxo se desenvolve a curtas distâncias a jusante do cilindro, o que é mais uma evidência de uma resposta rápida da microestrutura (tixotropia baixa).

O comportamento muda significativamente com o aumento do número de tixotropia (Fig.4.6(c)-(e)). Para estes casos, longas distâncias são percorridas antes da microestrutura conseguir responder ao campo de intensidade de tensão. Observa-se que um fluido com elevado nível de estruturação, progressivamente invade a região na vizinhança da seção transversal  $x_1^*=0$ , onde há intensidade de tensão. Assim o padrão de simetria apresentado para os casos com número de tixotropia baixos é quebrado. A mesma tendência é observada na entrada do canal, onde uma região maior de fluido altamente estruturado é observado com o aumento do número de tixotropia, porque a microestrutura das partículas materiais respondem mais lentamente a tensão aplicada. Além disso, depois de deixar a região de alta tensão na proximidade do cilindro, as partículas materiais avançam a jusante num estado não estruturado, alcançando maiores distâncias antes da sua microestrutura conseguir atingir um estado de equilíbrio. Mudando brevemente para uma análise Euleriana, podemos ver que, tal

como o número de tixotropia é aumentado, a informação do nível de estruturação é convectado mais a jusante.

Em resumo, seu significado deve ser entendido em um "senso de Lagrange" em nossos cálculos, onde o parâmetro,  $t_{eq}^*$ , multiplica a derivada substancial de  $\lambda$ , e por consequência, lida com as mudanças no tempo e no espaço vivenciado por uma partícula material ao longo do escoamento. Se mudarmos nosso modo de analisar os efeitos do número de tixotropia para uma visão "Euleriana", podemos afirmar que, o aumento deste parâmetro faz com que a informação do nível de estruturação seja convectado na direção do escoamento.

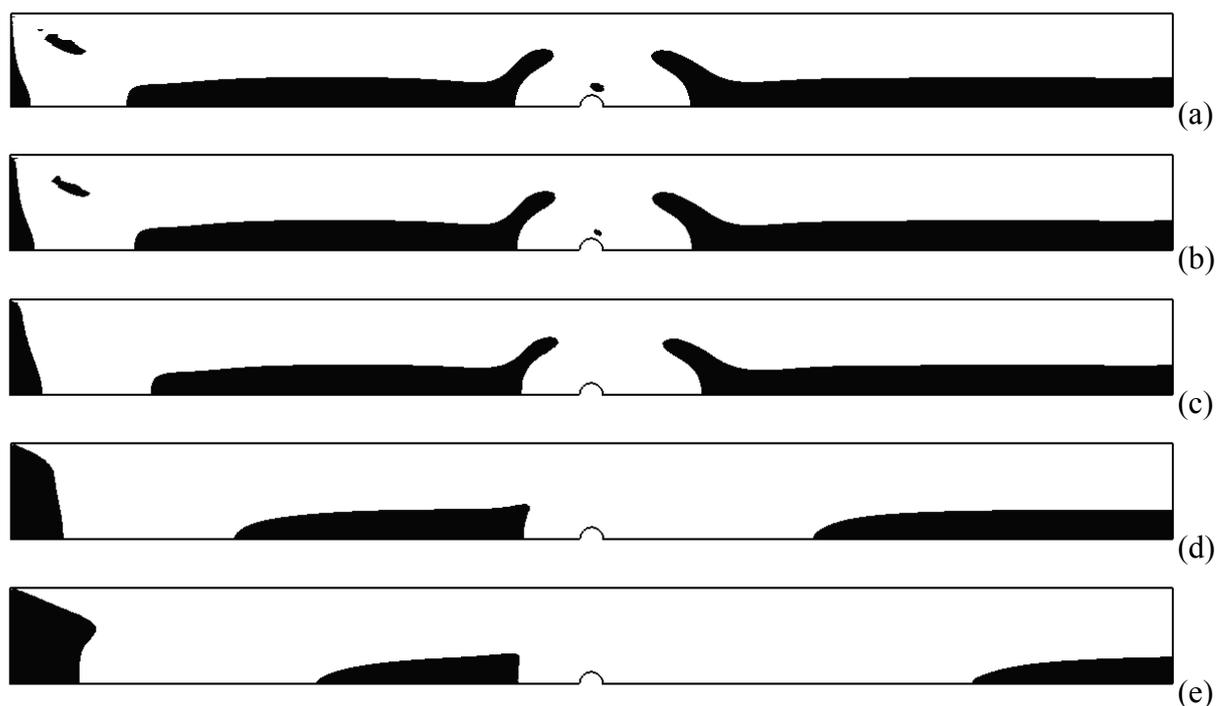


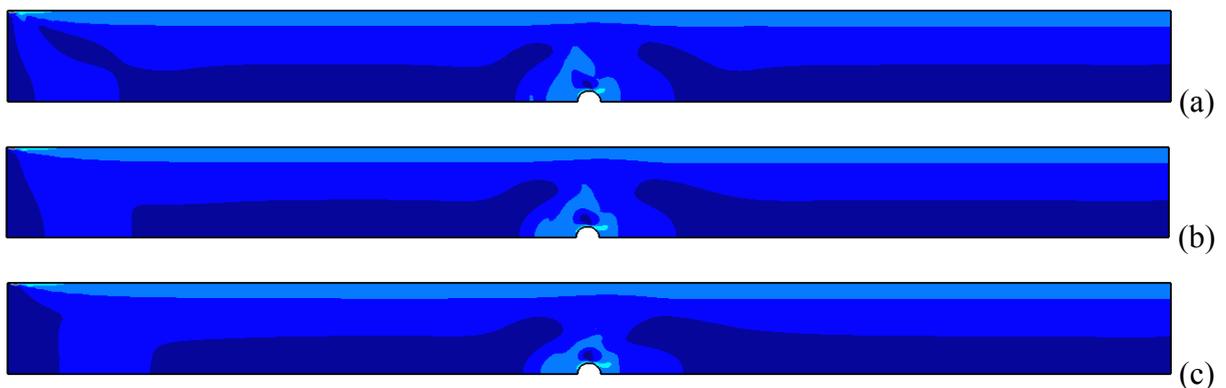
Figura 4.7 - Isobandas das regiões *yielded/unyielded*, para  $\theta_0^*=4$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0.5$  e  $J=200$ :

(a)  $t_{eq}^*=0,01$ ; (b)  $t_{eq}^*=0,03$ ; (c)  $t_{eq}^*=1$ ; (d)  $t_{eq}^*=5$ ; (e)  $t_{eq}^*=10$ .

Em respeito às *unyielded regions* mostradas na Fig.4.7, podemos observar padrões profundamente distintos dependendo do nível de tixotropia do material. Para materiais com baixo nível de tixotropia, Fig.4.7(a) e (b), a topologia das *unyielded regions* apresentadas pelo material são extremamente próxima a topologia clássica dos *plug-flows* encontrados em materiais viscoplásticos – dois *plug-flows* simétricos em torno do cilindro e uma região insular sobre o cilindro (ver, por exemplo, Zizis e Mitsoulis, 2002). Observando materiais com maiores níveis de tixotropia, claramente a simetria é quebrada. Em ambos os canais, a montante e a jusante do cilindro, o mecanismo de transporte do nível de estrutura altera a topologia clássica dos *plug-flows* encontrados em materiais viscoplásticos. Tensões geradas

na superfície do cilindro e tensões geradas no *entry flow*, quebram a estrutura do material, e os efeitos tixotrópicos forçam que o material se reestruture em um espaço maior de tempo (lagrangeano), e assim, perturbem severamente os padrões simétricos. O aumento do  $t_{eq}^*$ , e por consequência o aumento dos efeitos tixotrópicos, é fisicamente interpretado como uma reconstrução mais lenta da estrutura, o que faz com que a partícula material que tem sua estrutura quebrada pelas altas tensões geradas pela diminuição da área devido a presença do cilindro e pelo *entry-flow*, demorem mais a entrar em equilíbrio com as tensões menores logo após experimentadas por ela. A consequência deste comportamento é uma formação mais tardia das *unyielded regions* como pode ser observado nas Fig.4.7(d) e (e). Matematicamente pode-se perceber claramente este mecanismo, pois o tempo de equilíbrio multiplica o termo de advecção da equação de evolução para o parâmetro de estruturação, proporcionando uma aceleração (espacial) maior, e a magnitude do tensor extra de tensão atuante no material colabora no colapso da estrutura do material, uma vez que está presente no *breakdown term* desta equação, como mencionado na seção 2.5.

A Fig.4.8 mostra o campo do módulo do tensor-extra de tensão para uma variação dos efeitos elásticos no escoamento *creeping flow* de um Fluido Estruturado Tixotrópico. Os parâmetros fixos são  $J=200$ ,  $n=0.5$ ,  $U^*=1$  e  $t_{eq}^*=1$  e uma variação de  $\theta_0^*=4-20$ . Níveis de tensão mais altos na entrada do canal e sobre a superfície do cilindro podem ser observados. Para fluidos com mais elasticidade, maiores níveis de tensão. Este comportamento era esperado, como relatado em vários trabalhos na literatura (Alves, 2001; Coronado, 2006). Uma comparação direta com o campo do parâmetro de estruturação é conveniente na análise do módulo de tensões. Para o caso em questão, com baixo nível de tixotropia, os campos do módulo de tensões e do parâmetro de estruturação são muito semelhantes qualitativamente.



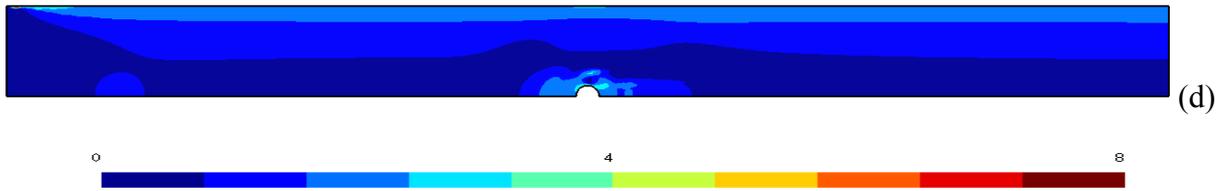


Figura 4.8 – Isobandas do módulo do tensor-extra de tensão, para  $U^*=1$ ,  $n=0.5$ ,  $J=200$  e  $t_{eq}^*=1$ :  
(a)  $\theta_0^*=4$ ; (b)  $\theta_0^*=8$ ; (c)  $\theta_0^*=12.9$ ; (d)  $\theta_0^*=20$ .

É interessante apresentar o campo do módulo do tensor-extra de tensão para uma variação de  $t_{eq}^*=0,01-10$  e os parâmetros fixos de  $\theta_0^*=4$ ,  $J=200$ ,  $n=0.5$ ,  $U^*=1$ , e uma análise de como ele altera a estruturação do fluido.

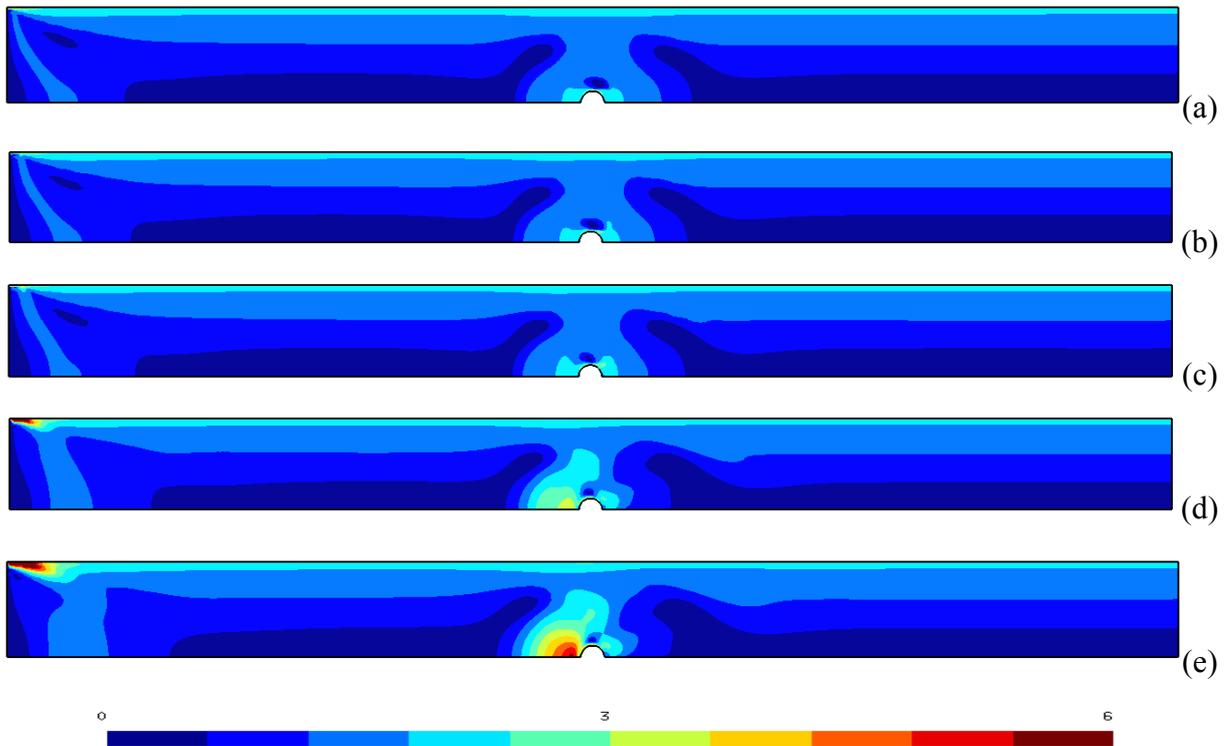


Figura 4.9 – Isobandas do módulo do tensor-extra de tensão, para  $\theta_0^*=4$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0.5$  e  $J=200$ :  
(a)  $t_{eq}^*=0,01$ ; (b)  $t_{eq}^*=0,03$ ; (c)  $t_{eq}^*=1$ ; (d)  $t_{eq}^*=5$ ; (e)  $t_{eq}^*=10$ .

Assim como na análise anterior, podemos observar níveis de tensões mais elevados na entrada do canal, criados pelo *entry flow*, e sobre a superfície do cilindro. Comparando o campo do módulo do tensor-extra de tensão (Fig.4.9) e campo do parâmetro de estruturação (Fig.4.6), para os mesmos parâmetros, é evidente a semelhança entre eles a baixos níveis de tixotropia. Se analisarmos a equação de evolução para o parâmetro de estruturação

(Eq.2.106), a tensão aplicada ao fluido esta diretamente ligada a estruturação/desestruturação do material, como mencionado anteriormente. Para baixos níveis de tixotropia, a estrutura chega ao equilíbrio com a tensão aplicada quase que instantaneamente, e assim, apresentando campos qualitativamente muito semelhantes. Para os casos com níveis de tixotropia altos, este quadro não se repete. Com um tempo de equilíbrio mais elevado, a estrutura requer um tempo (Lagrangeano no caso estudado nesta tese) para entrar em equilíbrio com a tensão solicitada ao fluido, e mesmo em regiões com baixas tensões podemos encontrar níveis de estruturação baixos. Este comportamento é claramente visto nos resultados apresentados para o campo do módulo de tensões comparado com o campo do parâmetro de estruturação (exemplo Fig.4.9(d)-(e) e Fig.4.6(d)-(e)). A montante do cilindro são geradas tensões que quebram a estrutura do material e que são convectadas (em uma visão Euleriana) para o escoamento a jusante do cilindro. Podemos observar então, uma região com baixos níveis de tensão, e níveis de estruturação não relativos a essa solicitação.

Na Fig.4.10 são apresentados os resultados obtidos para as isobandas da viscosidade estrutural para materiais com uma cinemática fixa,  $J=200$ ,  $n=0,5$  e, onde variou-se  $\theta_0^*$ , afim de estudar os efeitos causados pela elasticidade sobre este campo.

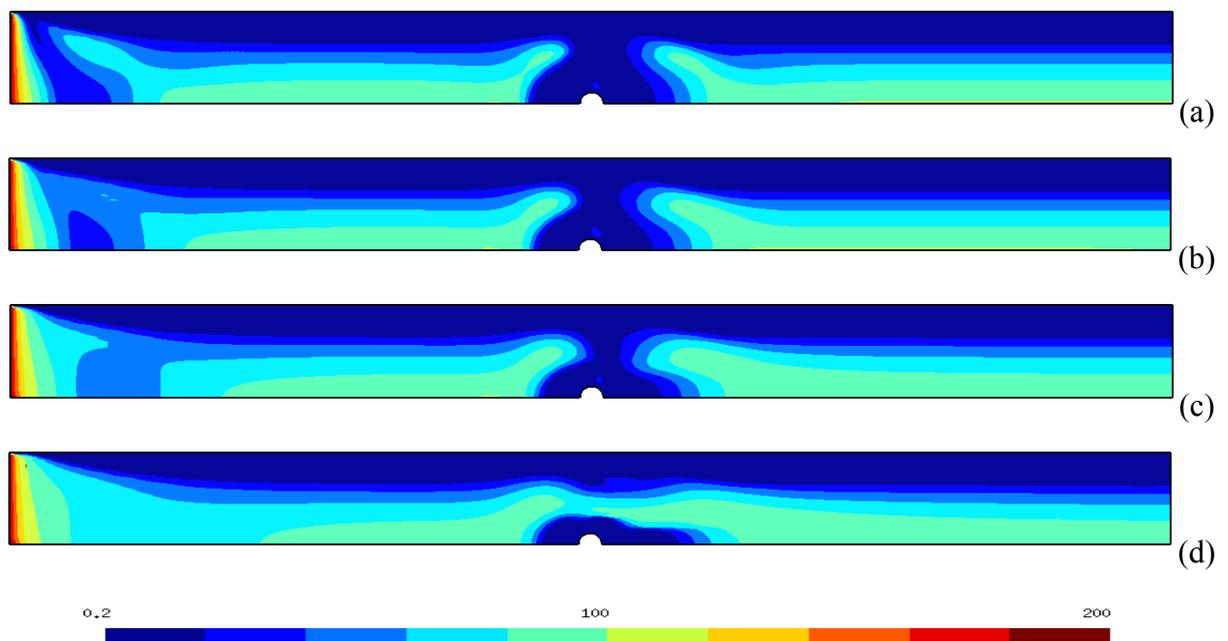


Figura 4.10 - Isobandas da viscosidade estrutural, para  $U^*=1$ ,  $n=0.5$ ,  $J=200$  e  $t_{eq}^*=1$ :

(a)  $\theta_0^*=4$ ; (b)  $\theta_0^*=8$ ; (c)  $\theta_0^*=12.9$ ; (d)  $\theta_0^*=20$ .

Uma primeira observação, e talvez a mais evidente, é a grande semelhança do campo de viscosidade estrutural com a morfologia das *yielded/unyielded regions* (Fig.4.5). Se pensarmos que as *unyielded regions* são regiões do escoamento altamente viscosas e elásticas, esta semelhança se justifica. A viscosidade estrutural é uma função direta do parâmetro de estrutura como visto na Eq.2.95 e Fig.2.6. Assim, regiões estruturadas do material apresentam maiores viscosidades estruturais. Isto pode ser observado se compararmos as Fig.4.5 e Fig.4.10. Na região de *entry flow*, onde a condição de contorno do fluido é de totalmente estruturado, a viscosidade estrutural é igual a  $\eta_0^*$ .

Os próximos resultados apresentam a influencia da tixotropia no campo da viscosidade estrutural para os parâmetros fixos de  $\theta_0^*=4$ ,  $J=200$ ,  $n=0,5$ ,  $U^*=1$ .

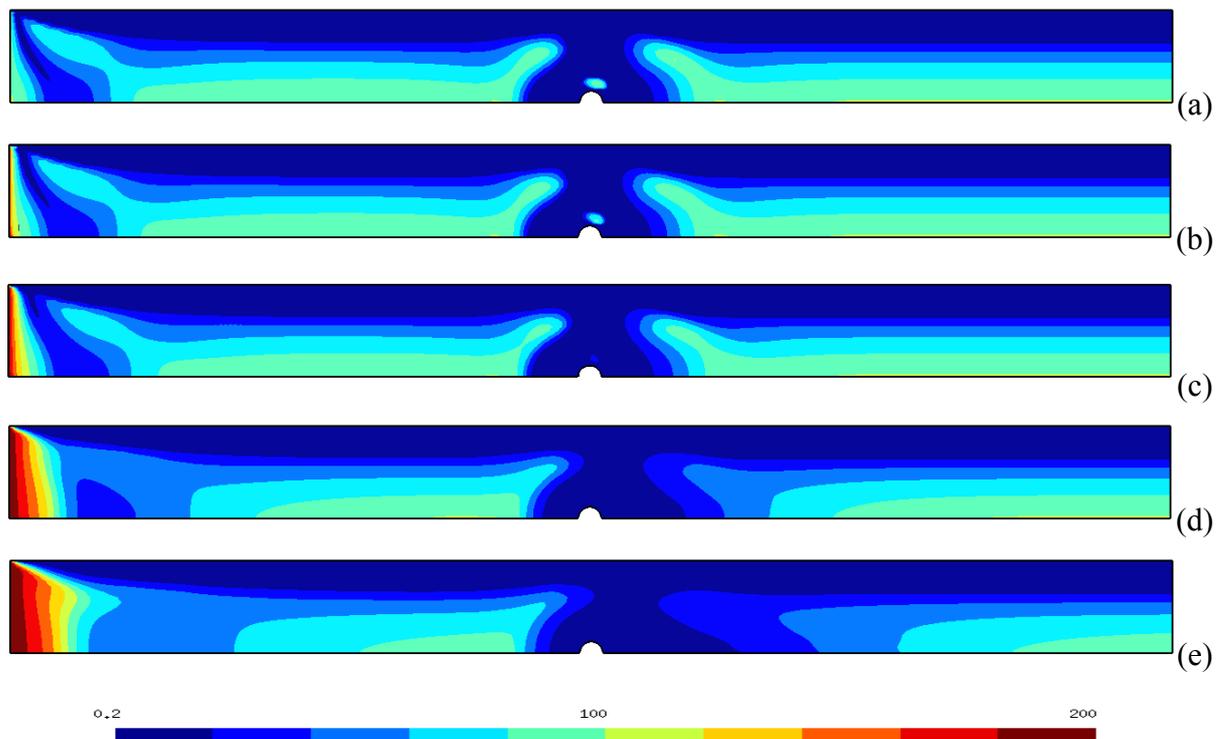


Figura 4.11 - Isobandas da viscosidade estrutural, para  $\theta_0^*=4$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0.5$ ,  $J=200$  e  $t_{eq}^*=1$ :

(a)  $t_{eq}^*=0,01$ ; (b)  $t_{eq}^*=0,03$ ; (c)  $t_{eq}^*=1$ ; (d)  $t_{eq}^*=5$ ; (e)  $t_{eq}^*=10$ .

Como nos resultados anteriores (Fig.4.10), a morfologia do campo de viscosidade estrutural está muito próxima ao das *yielded/unyielded regions* e altamente influenciado pela estruturação do fluido. Assim como efeitos tixotrópicos (representados pela variação  $t_{eq}^*$ ) alteram a reestruturação do fluido, de forma semelhante influenciam na viscosidade estrutural. Como visto na Fig.2.6, o decaimento/crescimento da viscosidade estrutural acompanha o

decaimento/crescimento do parâmetro de estruturação, mas de uma maneira não linear. Assim, a tixotropia do fluido que desacelera a reestruturação do material, também altera o crescimento da viscosidade estrutural, mas em uma taxa diferente de crescimento.

A seguir, podemos analisar a influência dos efeitos elásticos no campo do módulo das velocidades para os parâmetros fixos de  $t_{eq}^*=1$ ,  $J=200$ ,  $n=0,5$ ,  $U^*=1$  e variando  $\theta_0^*=4-20$ . O módulo das velocidades é calculado como  $|\mathbf{u}^*| = \sqrt{u_1^{*2} + u_2^{*2}}$ .

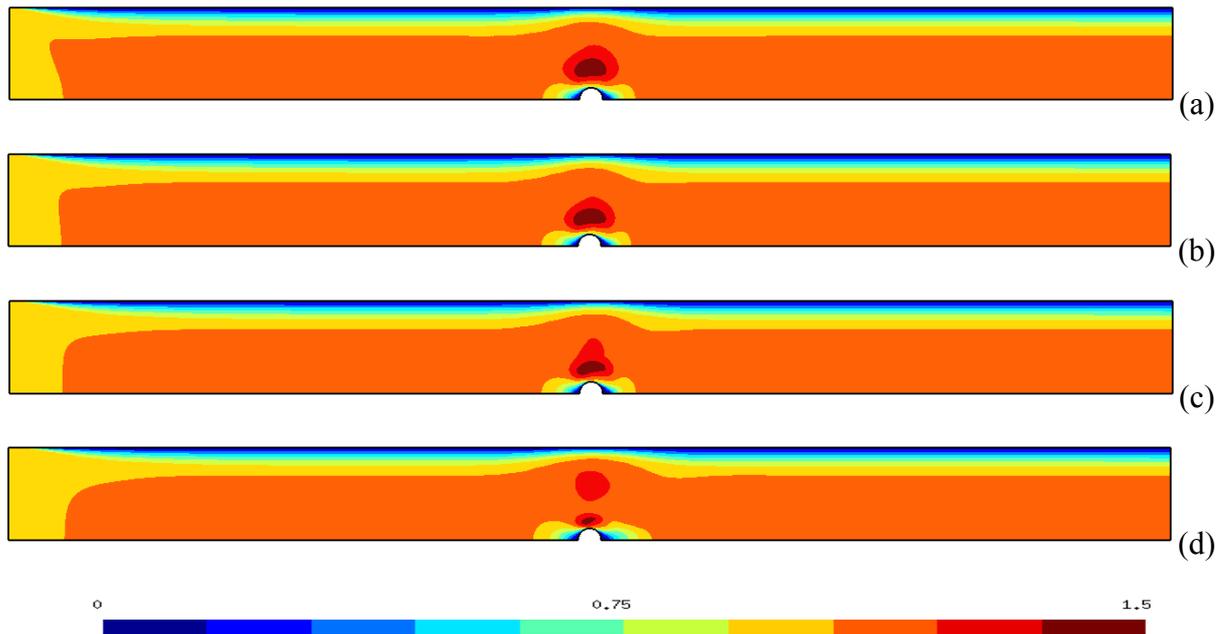


Figura 4.12 - Isobandas do módulo das velocidades, para  $U^*=1$ ,  $n=0,5$ ,  $J=200$  e  $t_{eq}^*=1$ :

(a)  $\theta_0^*=4$ ; (b)  $\theta_0^*=8$ ; (c)  $\theta_0^*=12,9$ ; (d)  $\theta_0^*=20$ .

Podemos notar primeiramente um problema de *entry flow*. Como já comentado anteriormente, nos debatemos em um problema muito complexo de condições de contorno para os Fluidos Estruturados Tixotrópicos. Na falta de soluções analíticas de perfis desenvolvidos para este tipo de fluido, precisamos aproximar condições de contorno que nem sempre são as ideais. Para que o problema de *entry flow* não influencie nos resultados obtidos sobre o cilindro (o objetivo é estar estudando a influência do cilindro sobre o escoamento de Fluidos Estruturados Tixotrópicos), um canal suficientemente longo para que o escoamento se desenvolva é necessário. Ao se analisar os resultados pode-se perceber indícios que este objetivo foi alcançado. Após passado o problema de *entry flow*, claramente pode-se notar que as isolinhas de velocidades tornam-se paralelas e, não modificam este padrão, até o escoamento ser influenciado pelo cilindro. Com a influência do cilindro, o efeitos elásticos se tornam

expressivos ao ponto de alterar o perfil do módulo das velocidades. Nos casos mais elásticos, as partículas fluidas ao se chocarem com o cilindro geram tensões elásticas que “quebram” o perfil desenvolvido do módulo das velocidades mais cedo a montante do cilindro e, estes mesmos efeitos dificultam a formação de um novo perfil desenvolvido a jusante do cilindro, em comparação com os casos de menor elasticidade. A região onde o fluido está com o módulo das velocidades em seu valor máximo, no topo do cilindro, é menor para materiais com maior elasticidade.

Na Fig.4.13 será apresentado o estudo da influência da tixotropia no perfil do módulo das velocidades. Nos casos estudados, teremos os parâmetros fixos de  $\theta_0^*=4$ ,  $t_{eq}^*=1$ ,  $J=200$ ,  $n=0,5$ ,  $U^*=1$  e variando  $t_{eq}^*=0,01-10$ .

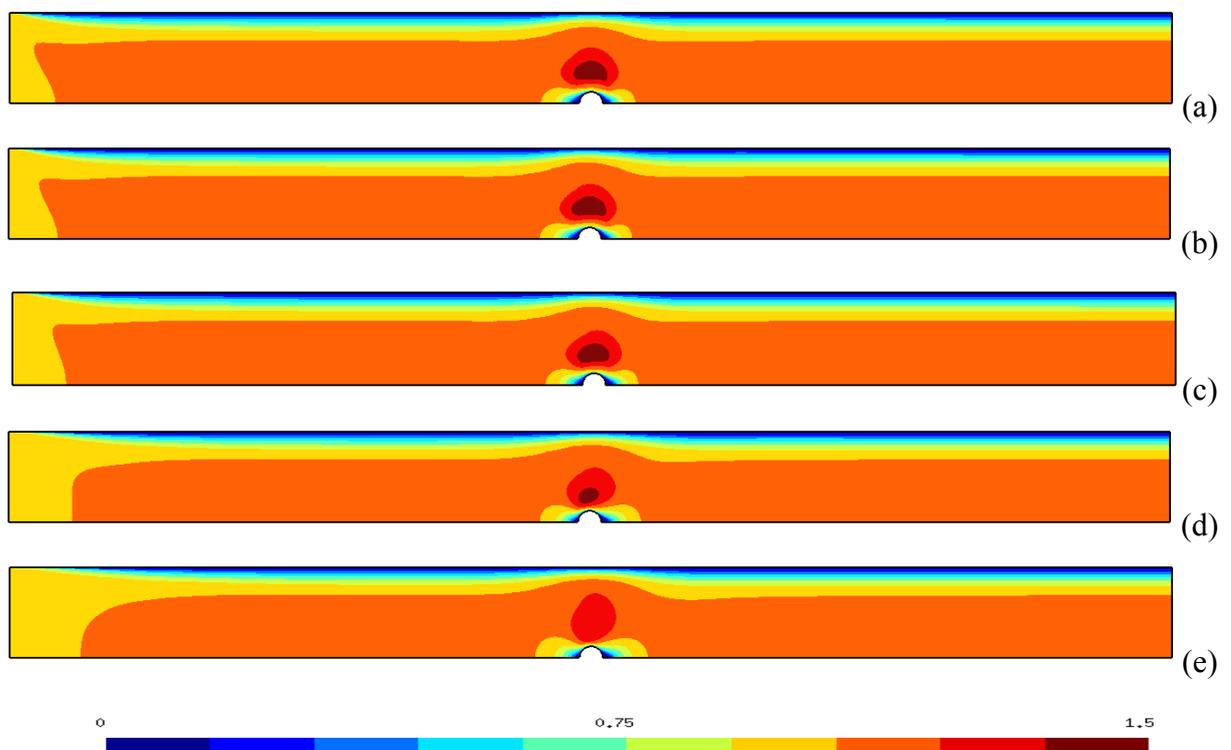


Figura 4.13 - Isobandas da viscosidade estrutural, para  $\theta_0^*=4$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0,5$ ,  $J=200$ :

(a)  $t_{eq}^*=0,01$ ; (b)  $t_{eq}^*=0,03$ ; (c)  $t_{eq}^*=1$ ; (d)  $t_{eq}^*=5$ ; (e)  $t_{eq}^*=10$ .

Na entrada do canal pode-se perceber que, materiais com maiores efeitos tixotrópicos, como já relatado, aumentam o tempo (neste caso estudado, em termos espaciais) de reconstrução da estrutura do material, e também apresentam um perfil desenvolvido mais tardio. A ocorrência deste fenômeno deve-se ao fato acima citado. Com um maior tempo de equilíbrio, o material que inicialmente estava totalmente estruturado devido as condições de

contorno, adentra mais no escoamento, e assim, demorando mais tempo em termos Lagrangeanos para entrar em um regime desenvolvido. Este comportamento acaba afetando da mesma forma o perfil do módulo das velocidades. Estes mesmos mecanismos de quebra/reconstrução são acionados ao sentir a presença do cilindro. Desta forma, *yielded/unyielded regions* são formadas, e por consequência, alterações no perfil do módulo das velocidades são vistos. Nos casos menos tixotrópicos, Fig.4.13(a) e (b), com maiores formações de *unyielded regions* e regiões mais estruturadas em torno do cilindro devido a rápida reconstrução da estrutura, o perfil desenvolvido também se forma mais rapidamente a jusante e se desfaz mais tardiamente a montante em comparação com os materiais com efeitos tixotrópicos mais acentuados. Mais altos picos de velocidades podem ser vistos no topo do cilindro em relação a materiais mais tixotrópicos, devido a formação de *unyielded regions*, e também por essa região estar mais estruturada em materiais menos tixotrópicos (ver Figs.4.7 e 4.6)

Uma análise de interesse à pesquisa aqui realizada é a variação do número adimensional  $J$  (*jump number*). Os resultados serão apresentados nas Figs.4.14 e 4.15 abaixo. Na Fig.4.14, podemos analisar os resultados para o campo do parâmetro de estruturação para  $J=200$ , 500 e 800 e os outros parâmetros que descrevem o escoamento são fixos e iguais a  $\theta_0^*=10$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0.5$  e  $t_{eq}^*=1$ .

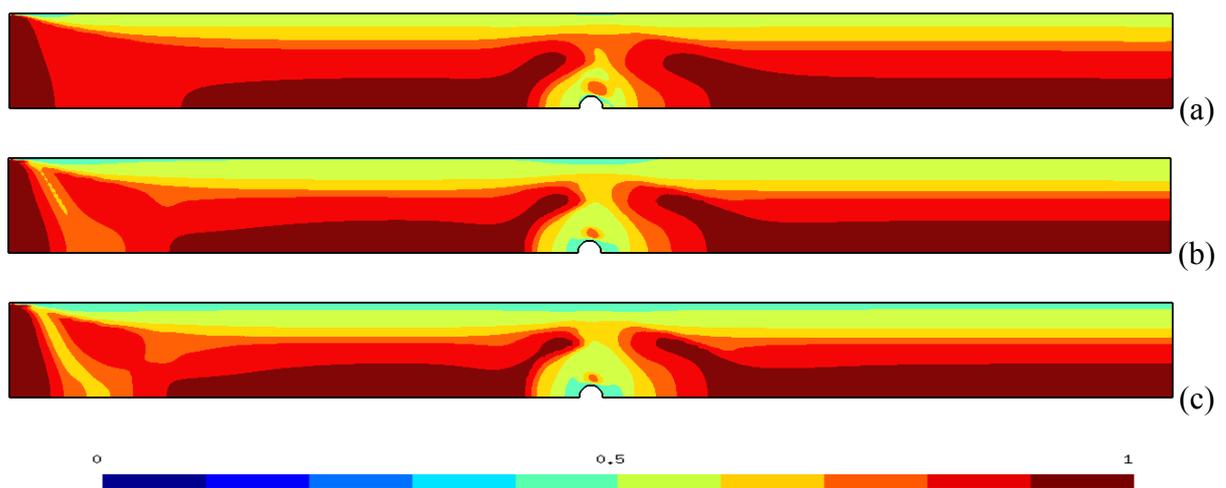


Figura 4.14 - Isobandas do parâmetro de estruturação, para  $\theta_0^*=4$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0,5$  e  $t_{eq}^*=1$ :

(a)  $J=200$ ; (b)  $J=500$ ; (c)  $J=800$ .

Fluidos com menores  $J$ , Fig.4.14, apresentam uma formação mais estruturada. Com o aumento do  $J$ , observa-se uma quebra maior da estrutura tanto na entrada quanto em torno do

cilindro, exatamente por que nestes locais, ocorrem as maiores diferenças de taxas de deformação. O número adimensional  $J$  pode ser interpretado como um parâmetro que nos indica a “fluência” do material, ou seja, mudanças de taxas de deformação sem que haja mudanças na tensão. É importante salientar que, no caso de Fluidos Estruturados Tixotrópicos, podemos ter tensões e deformações dependentes do tempo e assim, a fluência seria entendida para um caso em estado de equilíbrio. De qualquer forma, a mudança no platô delimitado por  $\dot{\gamma}_0$  e  $\dot{\gamma}_1$  na curva de escoamento (Fig.2.8), altera a forma do campo do parâmetro de estruturação. A equação de evolução para o parâmetro de estruturação tem como um de seus parâmetros o nível de estrutura do material em estado de equilíbrio.

Pela definição do *jump number*, dada pela Eq.2.117, podemos perceber também uma grande influência nos níveis de viscosidade estrutural do material. Esta análise será apresentada a seguir.

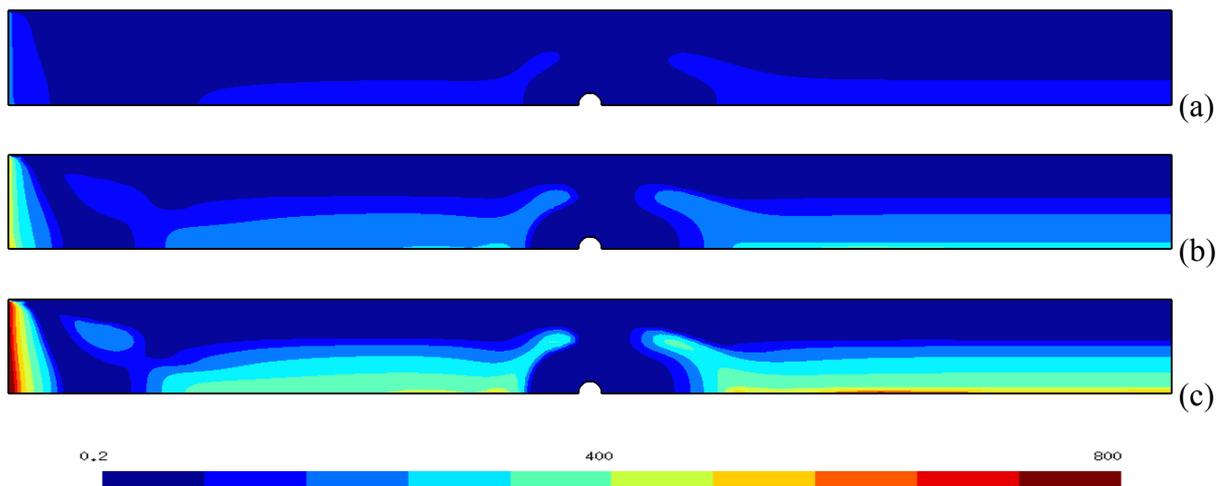


Figura 4.15 - Isobandas da viscosidade estrutural, para  $\theta_0^*=4$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0,5$  e  $t_{eq}^*=1$ :

(a)  $J=200$ ; (b)  $J=500$ ; (c)  $J=800$ .

A Fig.4.15 mostra o campo da viscosidade estrutural para  $J=200$ , 500 e 800 e para parâmetros fixos iguais a  $\theta_0^*=10$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0,5$  e  $t_{eq}^*=1$ . Os níveis de viscosidade estrutural são maiores para materiais que apresentam maiores *jump numbers*, principalmente nas regiões mais estruturadas do material onde o fluido tem sua viscosidade próxima a  $\eta_0$ . A distribuição da viscosidade estrutural está muito próxima ao do campo do parâmetro de estruturação pelos motivos mencionados em análises anteriores.

Outro importante parâmetro que deve ter sua influência investigada é o índice de *power law*. Este parâmetro está presente na equação que determina a viscosidade do fluido em

estado de equilíbrio (Eq.2.105), e é responsável pelos fenômenos de *shear-thinning* e *shear-thickening*. Para fluidos sem limite de escoamento (plasticidade),  $n < 1$  o fluido teria a característica de um fluido pseudoplástico (*shear-thinning*), para  $n > 1$  este material apresentaria características de um fluido dilatante (*shear-thickening*) e  $n = 1$  um fluido Newtoniano (com viscosidade constante). Já para fluidos com plasticidade, que é como um Fluido Estruturado Tixotrópico se comporta,  $n < 1$  o fluido teria a característica de um fluido pseudoplástico com limite de escoamento (ex. Fluido de Herschel-Bulkley) e  $n = 1$  um fluido plástico ideal (Fluido de Bingham). Fluidos com limite de escoamento e dilatância são muito raros e dificilmente encontrados na literatura e por esse motivo será estudado somente o comportamento das duas situações acima citadas. Na Fig.4.16 é apresentado os resultados do campo do parâmetro de estruturação para valores de  $n = 0,25-1$  e  $\theta_0^* = 4$ ,  $U^* = 1$ ,  $J = 200$  e  $t_{eq}^* = 1$ .

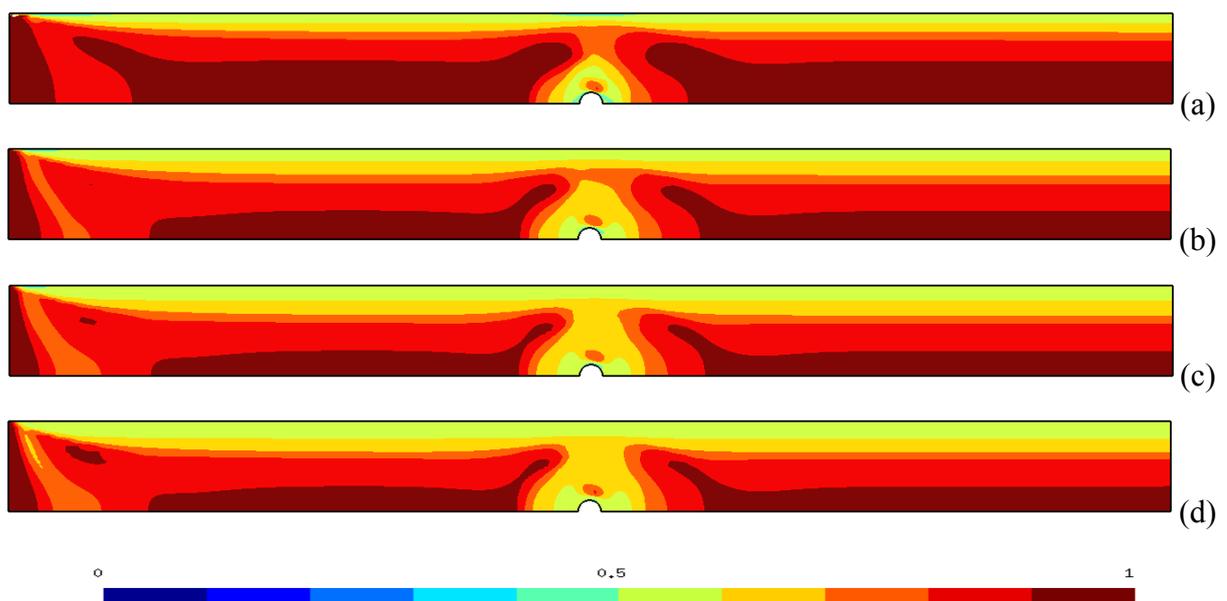


Figura 4.16 - Isobandas do parâmetro de estruturação, para  $\theta_0^* = 4$ ,  $U^* = 1$ ,  $J = 200$  e  $t_{eq}^* = 1$ :

(a)  $n = 0,25$ ; (b)  $n = 0,5$ ; (c)  $n = 0,75$ ; (d)  $n = 1$ .

Analisando os resultados podemos observar dois fenômenos distintos. Antes de descrever os fenômenos analisados devemos ter primeiro em mente que regiões estruturadas estão associadas a regiões de alta viscosidade. Se estudarmos a influência do  $n$  na Eq.2.105, podemos perceber que para taxas de deformação pequenas ( $\dot{\gamma} < 1$ ), a viscosidade em estado de equilíbrio aumenta com a diminuição de  $n$  (por  $n$  estar no expoente e números menores que 1 elevados a números também menores que 1 e negativos terem sua magnitude aumentada) e para taxas de deformação altas ( $\dot{\gamma} > 1$ ), a viscosidade de equilíbrio diminui com o aumento

de  $n$  (fenômeno inverso do explicado acima). Seguindo esse pensamento, para fluidos com maior *shear-thinning*, regiões de menores taxas de deformação terão maiores magnitudes de viscosidade em estado de equilíbrio enquanto regiões com maiores taxas de deformação terão menores magnitudes de viscosidade em estado de equilíbrio, comparados com fluidos com comportamento de menores *shear-thinning*. Este processo reflete também na estrutura do material. Pode-se ver que, maiores viscosidades estruturais acarretam em maiores níveis de estruturação em estado de equilíbrio (Eq.2.105). Na equação de evolução para o parâmetro de estruturação, para maiores níveis do parâmetro  $n$ , maiores viscosidades em estado de equilíbrio, e assim, maiores níveis de estrutura o material apresentará (ver a função  $f$  na Eq.2.103 e termo *breakdown* na Eq.2.101). Agora podemos avaliar estes dois fenômenos descritos nos resultados apresentados na Fig.4.16. Fluidos com menores índices de *power law* apresentam regiões mais estruturadas no centro do canal, tanto a jusante quanto a montante do canal em comparação com fluidos de maiores índices de *power law*. Estas regiões apresentam menores taxas de deformação, sendo assim, de acordo com a análise feita anteriormente. Na região próxima a superfície do cilindro e próxima as paredes do canal podemos ver o fenômeno reverso, com zonas menos estruturadas para menores valores de  $n$ , e mais estruturadas para maiores valores de  $n$ .

Na Fig.4.17 é apresentada a influência do *shear-thinning* no perfil de velocidades axiais para valores fixos  $\theta_0^*=4$ ,  $J=200$ ,  $t_{eq}^*=1$ ,  $U^*=1$  e uma posição  $x_1^*=35$ .

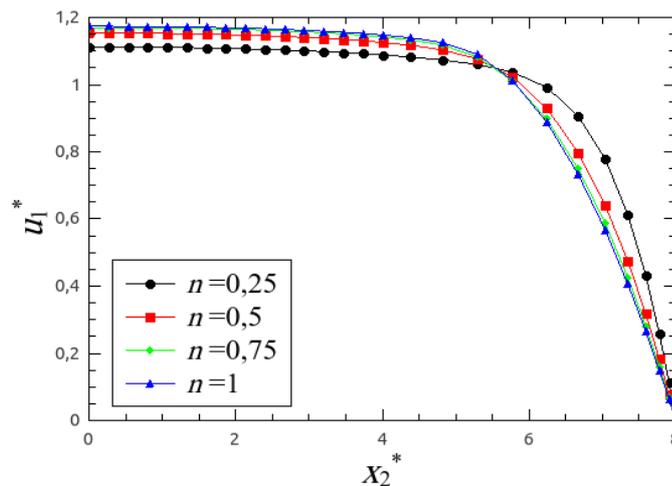


Figura 4.17 - Influência do *shear-thinning* para  $\theta_0^*=4$ ,  $U^*=1$ ,  $J=200$  e  $t_{eq}^*=1$ : perfil axial de velocidades em  $x_1^*=35$ .

Com a diminuição do *shear thinning* (menores índices de *power law*) o perfil de velocidades  $u_1^*$  torna-se mais achatado, comportamento típico de fluidos com menores índices de *power law* (ver Fonseca, 2008). Esse comportamento mostra que o modelo utilizado para descrever o comportamento de Fluidos Estruturados Tixotrópicos em escoamentos permanentes *creeping flow* consegue prever a influência deste parâmetro.

Na Fig.4.18 é apresentado o cálculo do coeficiente de arrasto para diferentes  $\theta_0^*$  e  $t_{eq}^*$ , visando examinar a influência da elasticidade e da tixotropia para fluidos com  $J=200$  e  $n=0,5$  e escoamentos *creeping flows* com cinemática de  $U^*=1$ .

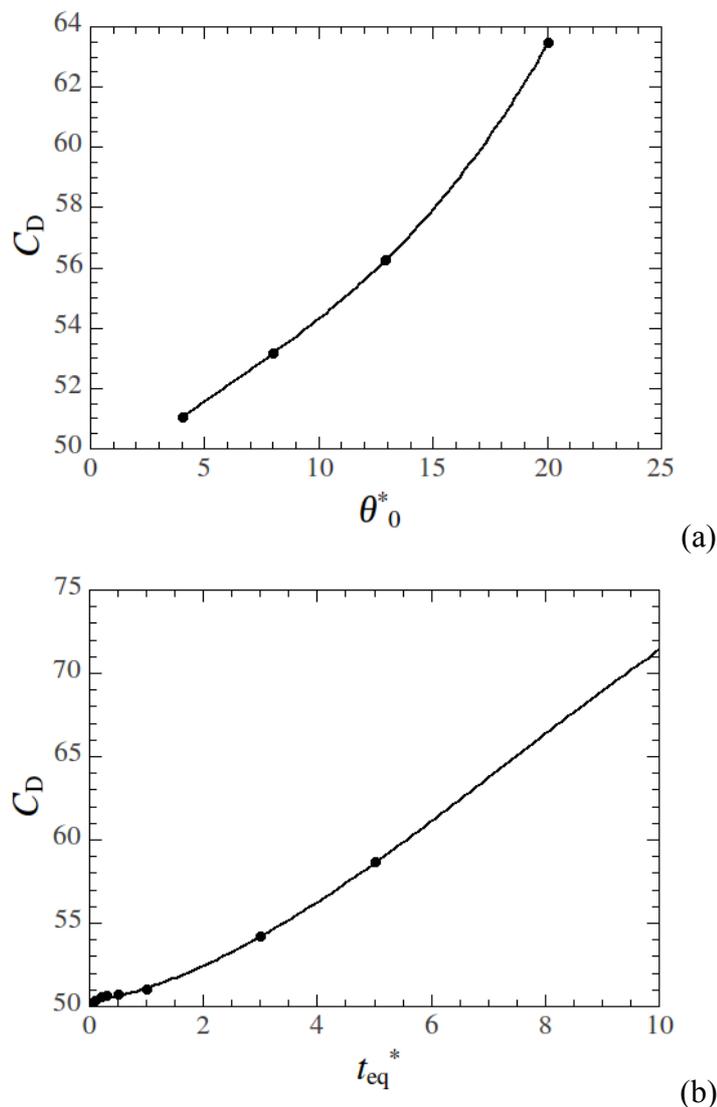


Figura 4.18– Coeficiente de Arrasto para: (a) variação de  $\theta_0^*$ ; (b) variação de  $t_{eq}^*$

O resultado apresentado na Fig.4.18(a) mostra um aumento da coeficiente de arrasto com o aumentos dos efeitos elásticos. Este comportamento era esperado, pois, com o

aumentos de  $\theta_0^*$ , maiores tensões elásticas são observadas (ver Fig.4.8). A influência dos efeitos tixotrópicos desencadeia um comportamento semelhante. Um aumento de  $t_{eq}^*$  faz com que o escoamento apresente maiores tensões e torna do cilindro (Fig.4.9), o que reflete no coeficiente de arrasto. Assim é visto um aumento exponencial do coeficiente de arrasto com o aumento dos efeitos tixotrópicos.

## 4.2 Expansão planar abrupta

### 4.2.1 Descrição do Problema da expansão planar abrupta

A expansão abrupta é um importante problema de engenharia, pois encontra-se na maioria dos sistemas de bombeamento de fluidos. A expansão abrupta também é muito utilizada como *benchmark* para testar códigos numéricos por que apresenta regiões de aumento e diminuição da quantidade de movimento (aceleração e desaceleração do fluido), zonas de recirculação e picos de tensões devido a quinas e mudanças de área abruptas. A geometria e as condições de contorno são apresentadas na Fig.4.19. Como no cilindro confinado entre placas planas, a expansão abrupta tem  $50L_c$  unidades a jusante e a montante do plano de expansão, onde  $L_c$  é igual a metade da altura do canal a montante do plano de expansão. Este comprimento dos canais a jusante e a montante do plano de expansão é considerado suficiente afim para se obter um escoamento completamente desenvolvido. A razão de aspecto dado por  $H_{in}/H_{out}$  é de 1:4.

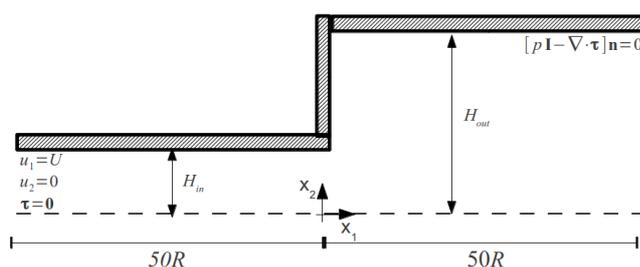


Figura 4.19 – Descrição do problema: expansão planar abrupta 1:4

As condições de contorno cinemáticas para a expansão abrupta, como para o cilindro confinado entre duas placas planas, são:

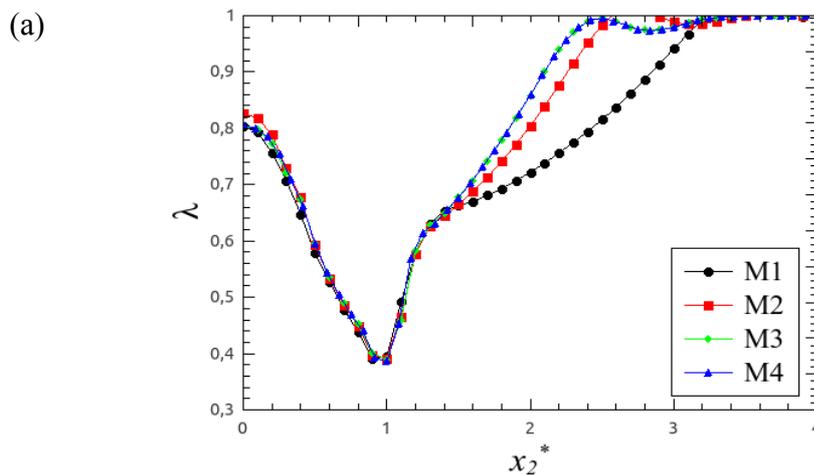
- (i) não deslizamento e impermeabilidade ao longo da parede do canal e sobre a superfície do cilindro ( $\mathbf{u} = 0$ );

- (ii) simetria ao longo da linha de centro do canal ( $\tau_{12} = \partial x_2 u_1 = u_2 = 0$ ) ;
- (iii) perfis uniformes para velocidade e tensão extra ao longo da entrada do canal ( $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}, u_1 = U, u_2 = 0$ ) ;
- (iv) tração livre ao longo da saída do canal  $[-\nabla p \mathbf{I} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] \mathbf{n} = \mathbf{0}$  ;
- (v) perfil uniforme ao longo da entrada do canal,  $\lambda = 1$ ;

Os comentários sobre as condições de contorno são os mesmos apresentados para o cilindro confinado entre placas planas visto na seção anterior.

#### 4.2.2 Teste de independência de malha para o problema da expansão planar abrupta

Afim de avaliar a independência dos resultados em relação a malha utilizada para as simulações de escoamentos de Fluidos Estruturados Tixotrópicos em uma expansão abrupta, confeccionou-se quatro malhas bi-lineares lagrangeanas (Q1) com diferentes refinamentos: (i) malha M1, com 2500 elementos Q1; (ii) malha M2; com 5000 elementos Q1; (iii) malha M3, com 6500 elementos Q1; (iv) malha M4, com 7680 elementos Q1. Para a investigação das malhas confeccionadas, optou-se pela comparação dos perfis transversais do parâmetro de estruturação no plano de expansão e perfis longitudinais do parâmetro de estruturação na linha de centro e ao longo da parede da expansão abrupta. Esta escolha se torna interessante pelo fato de que, como dito anteriormente, o parâmetro de estruturação envolve em sua equação de evolução (Eq.2.106), modulo do tensor- extra de tensões, viscosidades estrutural, taxa de deformação e efeitos tixotrópicos. As localizações dos perfis também foram escolhidas por estarem em regiões as quais são sentidos os principais efeitos sobre o escoamento. Os resultados são apresentados na Fig.4.20 para os parâmetros fixos de  $\theta_0^* = 5$ ,  $J = 500$ ,  $U^* = 1$ ,  $n = 0,5$  e  $t_{eq}^* = 1$ .



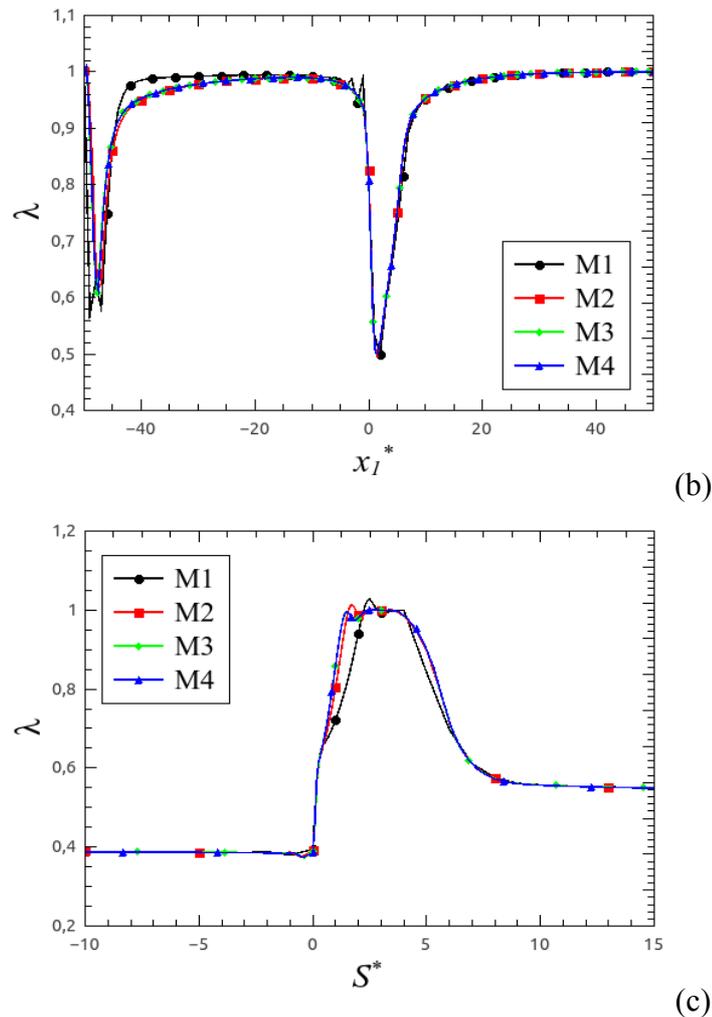


Figura 4.20 – Perfis do parâmetro de estruturação para,  $\theta_0^* = 5$ ,  $J = 500$ ,  $t_{eq}^* = 1$ ,  $n = 0,5$  e  $U^* = 1$ :  
 (a) perfis transversais em  $x_1^* = 0$ ; (b) perfis longitudinais na linha de centro em  $x_2^* = 0$ ;  
 (c) perfis ao longo da parede do canal.

Todos as malhas apresentaram resultados com boa concordância, mas com alguma discrepância para os resultados com as malhas menos refinadas. Pode-se perceber que as malhas M3 e M4 apresentam resultados muito próximos, mostrando inicialmente, uma não necessidade de um maior refinamento. Na Fig.4.20(c) é introduzida uma variável auxiliar que descreve o perímetro (distância medida linearmente) da parede do canal,  $S$ . Esta variável é adimensionalizada da mesma forma que  $\mathbf{x}$ , onde  $S^* = S/L_c$ .

Nas tabelas abaixo são apresentados os cálculos do erro relativo dos resultados obtidos para o parâmetro de estruturação nos perfis apresentados na Fig.4.12, onde  $\theta_0^* = 5$ ,  $J = 500$ ,  $U^* = 1$ ,  $n = 0,5$  e  $t_{eq}^* = 1$ . O erro relativo é calculado entre malhas onde compara-se a malha com menor refinamento e a malha com refinamento maior mais próxima, da mesma forma que apresentado anteriormente na seção 4.1.2. Os resultados são considerados independentes do

refinamento da malha quando o erro esteja dentro do critério estipulado de aproximadamente 1%, como determinado na seção 4.1.2.

Tabela 4.5 – Erro relativo para o perfis do parâmetro de estruturação transversais em  $x_1^*$

$x_2^*$	erro relativo		
	M1-M2	M2-M3	M3-M4
0	2.80%	2.64%	0.29%
0,5	2.46%	0.35%	0.22%
1	0.75%	0.48%	0.96%

A Tab.4.5 apresenta os erros relativos entre malhas para os perfis transversais do parâmetro de estruturação de um Fluido Estruturado Tixotrópico sobre a coordenada  $x_1^*=0$ . Utilizando-se do critério citado, é possível afirmar que para refinamentos iguais ou superiores a malha M3, os resultados já não são mais afetados pela malha.

Tabela 4.6 – Erro relativo para perfis do parâmetro de estruturação longitudinais na linha de centro em  $x_2^*=0$

$x_1^*$	erro relativo		
	M1-M2	M2-M3	M3-M4
-50	0.0000%	0.0000%	0.0000%
-45	1.2298%	2.6874%	0.1839%
-40	3.7899%	0.3114%	0.0644%
-35	2.3463%	0.1426%	0.0153%
-30	1.6152%	0.1606%	0.0045%
-25	1.0550%	0.0521%	0.0121%
-20	0.7501%	0.0348%	0.0281%
-15	0.5628%	0.0238%	0.0503%
-10	0.4446%	0.0164%	0.0833%
-5	1.0194%	0.0067%	0.1499%
0	2.8022%	2.7086%	0.2860%
5	3.0174%	0.6067%	0.1208%
10	0.1944%	0.0438%	0.0089%
15	0.0664%	0.0162%	0.0041%
20	0.0312%	0.0076%	0.0031%
25	0.0160%	0.0040%	0.0028%
30	0.0086%	0.0021%	0.0031%
35	0.0047%	0.0012%	0.0038%
40	0.0024%	0.0006%	0.0043%
45	0.0003%	0.0001%	0.0028%
50	0.0028%	0.0004%	0.0037%

Nas Tab.4.6 é apresentado os erros relativos para os perfis transversais na linha de centro do canal em  $x_2^*=0$ . Analisando os erros relativos apresentados na Tab.4.6, e aplicando o critério já estabelecido, verifica-se que os erros relativos entre as malhas M3 e M4 estão dentro da faixa que considera os resultados como independente da malha. Os demais erros relativos entre as malhas com menor refinamento apresentam alguns pontos que não entram na faixa considerada pelo critério de independência de malha.

Tabela 4.7 – Erro relativo para perfis do parâmetro de estruturação ao longo da parede do canal

S*	erro relativo		
	M1-M2	M2-M3	M3-M4
-50	0.0000%	0.0000%	0.0000%
-45	0.3340%	0.1230%	0.0532%
-40	0.0832%	0.0066%	0.1451%
-35	0.0623%	0.0033%	0.1496%
-30	0.0231%	0.0050%	0.1498%
-25	0.0227%	0.0055%	0.1506%
-20	0.0117%	0.0057%	0.1512%
-15	0.0141%	0.0057%	0.1513%
-10	0.0107%	0.0051%	0.1517%
-5	0.0205%	0.0078%	0.1510%
0	0.7546%	0.4788%	0.9603%
1	10.2481%	6.3080%	0.0594%
1,5	17.0522%	1.2651%	0.0188%
2	4.7701%	0.9250%	0.0155%
2,5	2.7598%	0.0424%	0.0034%
3	0.5460%	0.0048%	0.0025%
8	0.3724%	0.0834%	0.1039%
13	0.0242%	0.0080%	0.0880%
18	0.0206%	0.0031%	0.0906%
23	0.0087%	0.0006%	0.0925%
28	0.0040%	0.0006%	0.0937%
33	0.0013%	0.0013%	0.0943%
38	0.0001%	0.0017%	0.0947%
43	0.0013%	0.0019%	0.0949%
48	0.0019%	0.0024%	0.0948%
53	0.0453%	0.0166%	0.0914%

Por último são analisados os perfis do parâmetro de estruturação ao longo da superfície da parede do canal. Com a variável  $S$  introduzida anteriormente, podemos avaliar todos os níveis de estruturação do material na parede da expansão abrupta 1:4. Novamente, aplicando o critério estipulado, é visto o padrão observado nas análises anteriormente feitas. Os erros relativos entre as malhas M3 e M4 estão dentro do critério de independência de malha adotado, e assim, pode-se determinar a malha M3 como suficientemente refinada para que não interfira nos resultados a seguir apresentados.

Na Fig.4.21 temos a malha utilizada nas simulações numéricas de escoamentos de Fluidos Estruturados Tixotrópicos em uma expansão planar abrupta.

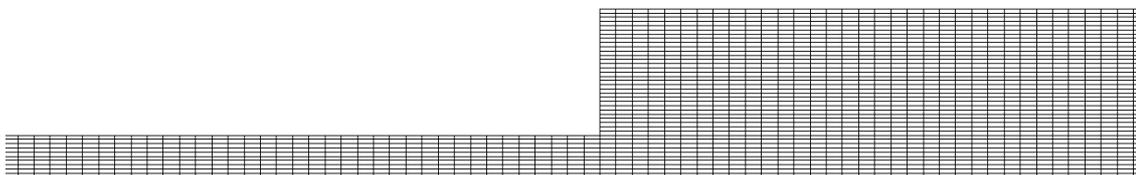


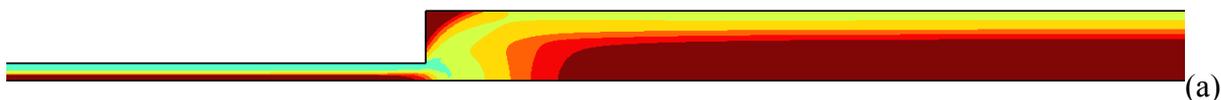
Figura 4.21– A malha de elementos finitos bi-linear selecionada para o problema do escoamento de Fluidos Estruturados Tixotrópicos em uma expansão planar abrupta 1:4

A malha M3 é uniforme em toda a extensão de seu domínio, tendo como menor tamanho adimensional da malha,  $h_{\min}^* = h_K/L_c$ , igual a 0,397.

### 4.2.3 Análise sensibilidade do problema da expansão planar abrupta

Nesta seção serão analisadas as aproximações numéricas de elementos finitos aplicadas ao escoamento de Fluidos Estruturados Tixotrópicos através de uma expansão planar abrupta. Tendo como objetivo avaliar a influência da tixotropia e da visco-elasticidade nos escoamentos, parâmetros pertinentes a estes fenômenos serão variados. É apresentado uma análise minuciosa dos campos do parâmetro de estruturação, *yielded/unyielded regions*, viscosidade estrutural, módulo do tensor-extra de tensão e velocidades.

Como na seção anterior, uma primeira análise da influência dos efeitos elásticos será realizada. Na Fig.4.22 são apresentados os resultados para o campo do parâmetro de estruturação para  $\theta_0^* = 5-100$ , e os parâmetros fixos de  $J=500$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0,5$  e  $t_{eq}^*=1$ .



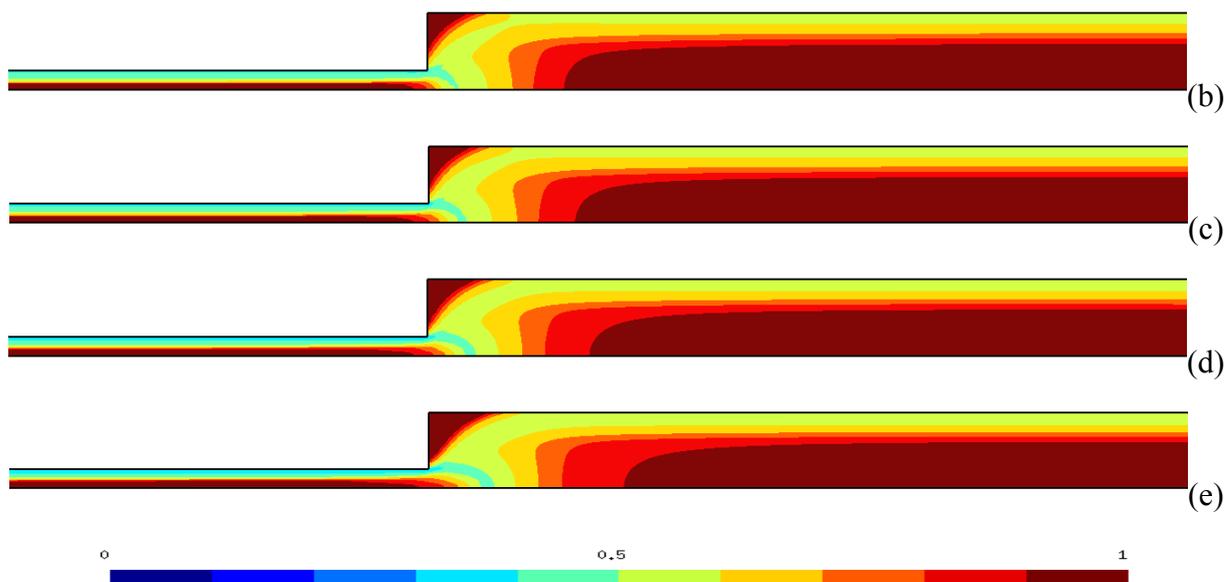


Figura 4.22 - Isobandas do parâmetro de estruturação, para  $U^*=1$ ,  $n=0,5$ ,  $J=500$  e  $t_{eq}^*=1$ :  
 (a)  $\theta_0^*=5$ ; (b)  $\theta_0^*=10$ ; (c)  $\theta_0^*=25$ ; (d)  $\theta_0^*=50$ ; (e)  $\theta_0^*=100$ .

Em uma primeira análise pode-se perceber regiões mais estruturadas em torno do centro do canal e no córner superior formada pelo aumento de área no plano da expansão. Estas regiões apresentam baixas tensões e taxas de deformações, tornando um quadro insuficiente para uma grande quebra da estrutura. Para escoamentos de materiais mais elásticos (Fig.4.22(d) e (e)), são vistos campos com maiores regiões estruturadas tanto a montante quanto a jusante do plano de expansão, em comparação com os materiais com menos elasticidade (Fig.4.22(a)-(c)). Esta observação demonstra uma coerência com o que se esperava para este tipo de análise, já que as regiões estruturadas estão fortemente associadas a regiões elásticas. Materiais mais elásticos apresentam também uma reestruturação a jusante do plano de expansão mais tardia em comparado com materiais com menor elasticidade. Este comportamento se deve as tensões elásticas geradas devido a quina no plano de expansão. Mais elasticidade, maiores tensões geradas, quebrando a estrutura do material em uma região maior nas proximidades da quina (ver Fig.4.26).

É interessante agora analisar o comportamento das *yielded/unyielded regions* para escoamentos *creeping flow* de Fluidos Estruturados Tixotrópicos com diferentes níveis de elasticidade em expansões planares abruptas. Determinando o nível de estruturação do fluido que delimita as *yielded/unyielded regions*, de acordo com os procedimentos apresentados na seção.2.7, encontrou-se a *yielded surface* no local geométrico onde  $\lambda \approx 0,96$ .

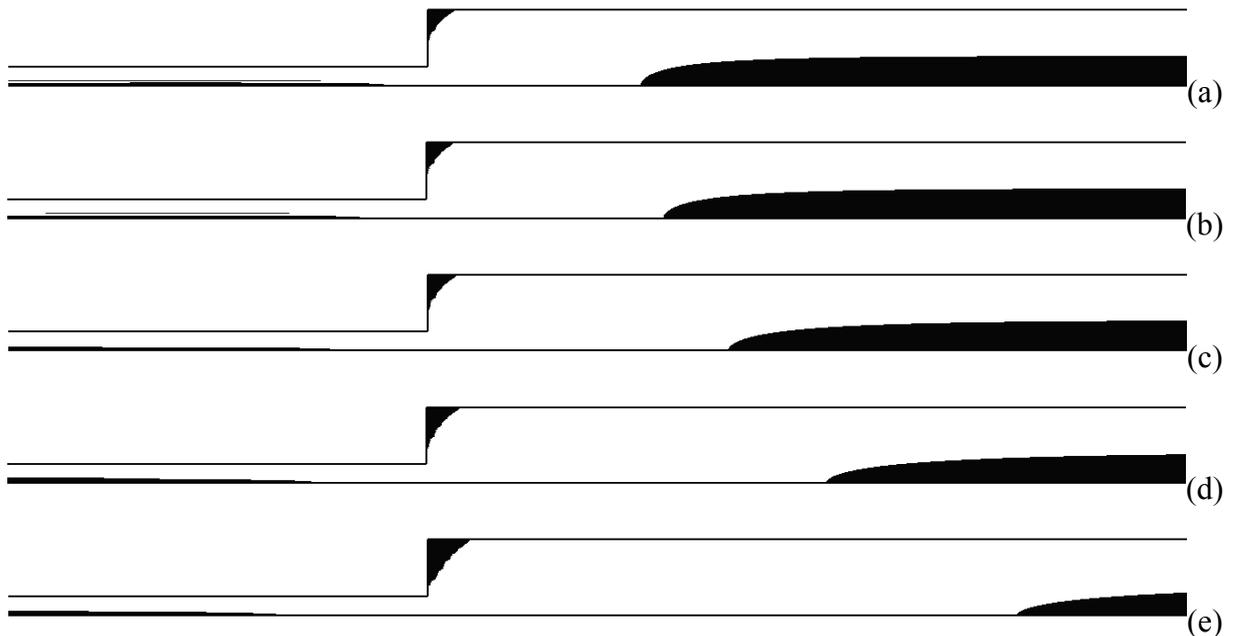


Figura 4.23 - Isobandas das *yielded/unyielded regions*, para  $U^*=1$ ,  $n=0,5$ ,  $J=500$  e  $t_{eq}^*=1$ :

(a)  $\theta_0^*=5$ ; (b)  $\theta_0^*=10$ ; (c)  $\theta_0^*=25$ ; (d)  $\theta_0^*=50$ ; (e)  $\theta_0^*=100$ .

A Fig.4.23 mostra as *yielded/unyielded zones* para níveis de elasticidade de  $\theta_0^*=5-100$ , e os parâmetros fixos de  $J=500$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0,5$  e  $t_{eq}^*=1$  para o escoamento *creeping flow* através de uma expansão planar abrupta. Podemos observar que o padrão apresentado pelo campo do parâmetro de estruturação se reflete na morfologia das *yielded/unyielded regions*. Um pequeno crescimento das *unyielded regions* a montante do plano de expansão para materiais com maior elasticidade. Observa-se também um aumento das *unyielded regions* no corner da expansão para maiores níveis de elasticidade. A jusante do plano de expansão, uma formação mais tardia das *unyielded regions* são vistas. Como descrito anteriormente, maiores níveis de tensões elásticas são geradas na quina da expansão para escoamento com maior elasticidade, que quebram a estrutura do material e por consequência uma formação mais a jusante das *unyielded regions*. Este comportamento é apresentado posteriormente, na Fig.4.26.

Nas Figs.4.24 e 4.25 são apresentados os resultados para a variação dos efeitos tixotrópicos em um escoamento *creeping flow* de um Fluido Estruturado Tixotrópico através de uma expansão planar abrupta com razão de aspecto 1:4. A Fig.4.24 apresenta o campo do parâmetro de estruturação para os parâmetros  $\theta_0^*=5$ ,  $J=500$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0,5$  e um tempo de equilíbrio (número de tixotropia),  $t_{eq}^*=0,01-10$ .

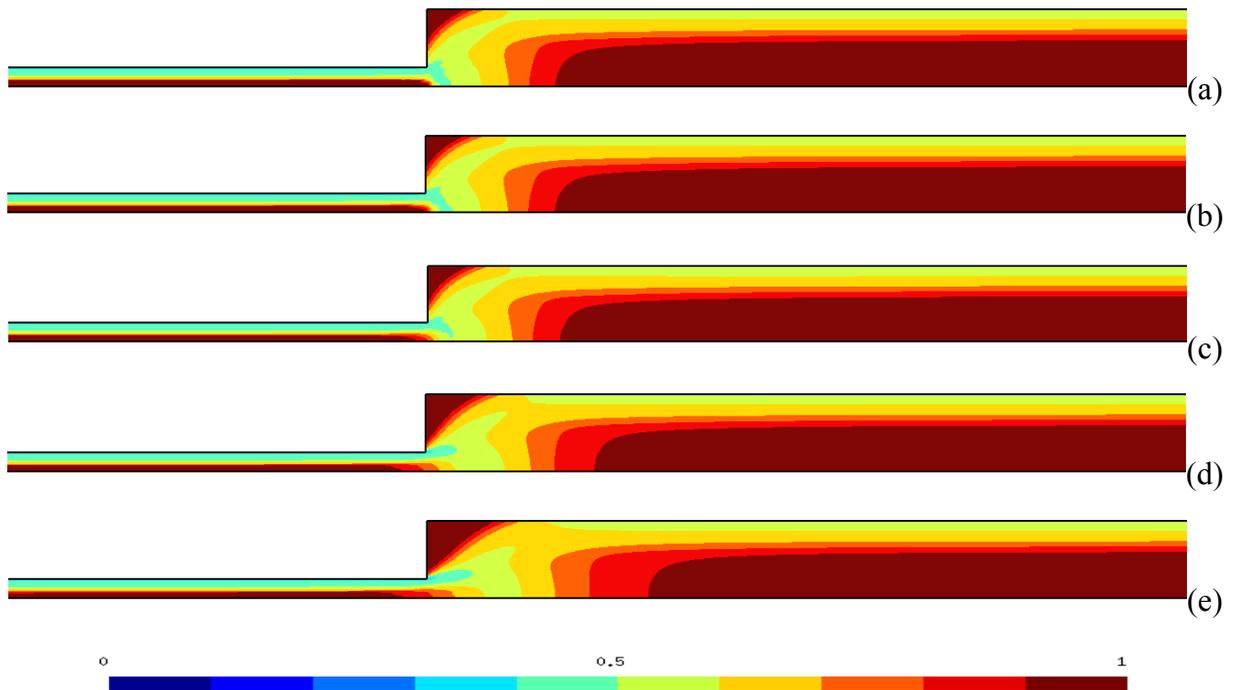


Figura 4.24 - Isobandas do parâmetro de estruturação, para  $\theta_0^*=5$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0.5$  e  $J=500$ :

(a)  $t_{eq}^*=0,01$ ; (b)  $t_{eq}^*=0,3$ ; (c)  $t_{eq}^*=1$ ; (d)  $t_{eq}^*=5$ ; (e)  $t_{eq}^*=10$ .

Como já discutido anteriormente, um aumento dos efeitos tixotrópicos fazem com que a estrutura do material, e consequentemente a taxa de deformação, apresentem um tempo maior de reestruturação até atingir o equilíbrio com a tensão aplicada. Ao analisar os resultados obtidos para as simulações utilizando o modelo de Fluidos Estruturados Tixotrópicos pode-se perceber claramente este efeito. Os materiais com maiores números de tixotropia tem a formação de sua estrutura a jusante do plano de expansão mais tardia, onde a aceleração espacial do parâmetro de estruturação (termo advectivo da Eq.2.106) é maior. Pode-se verificar também que o material que estava altamente estruturado no corner superior da expansão também foi convectado para o interior do escoamento, tornando-se assim, regiões maiores do que para materiais com pouca tixotropia.

O campo das *yielded/unyielded regions* para uma investigação da influência dos efeitos tixotrópicos em escoamentos de Fluidos Estruturados Tixotrópicos em expansão abrupta é mostrado nos resultados da Fig.4.25. Aqui, como na Fig.4.24, o tempo de equilíbrio varia entre 0,01 e 10 e os demais parâmetros são fixos em  $\theta_0^*=5$ ,  $J=500$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0,5$ .



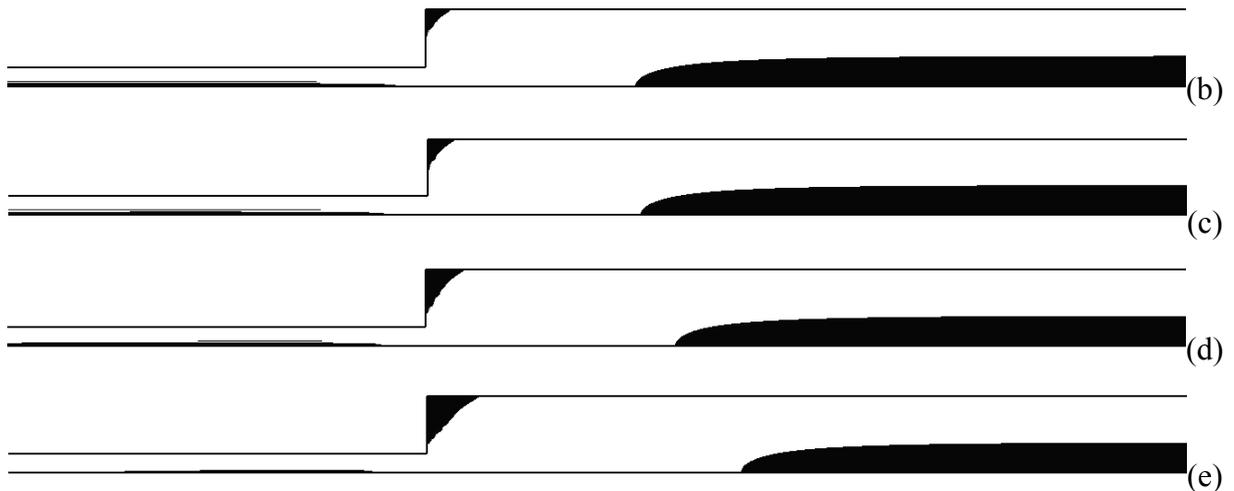
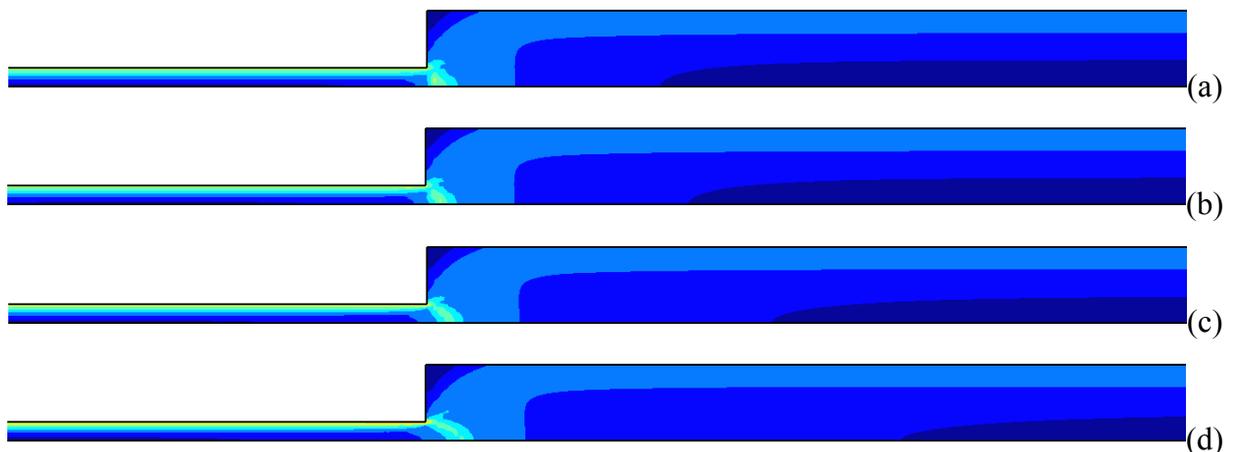


Figura 4.25 - Isobandas das regiões *yielded/unyielded*, para  $\theta_0^*=5$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0.5$  e  $J=500$ :

(a)  $t_{eq}^*=0,01$ ; (b)  $t_{eq}^*=0,03$ ; (c)  $t_{eq}^*=1$ ; (d)  $t_{eq}^*=5$ ; (e)  $t_{eq}^*=10$ .

Aqui os efeitos de tixotropia também são evidentes, sendo mais pronunciados para tempos de equilíbrio adimensionais acima de 1 e mais discretos para menores. Observa-se que as zonas mortas no corner da expansão aumentam e são convectadas para dentro do canal com o aumento dos efeitos tixotrópicos. Para as *unyielded regions* no centro do canal os efeitos tixotrópicos também se mostram evidentes. Com a quebra da estrutura do material devido as tensões geradas na quina do plano de expansão, *yielded regions* são vistas. Com a reestruturação do fluido no centro do canal, devido as baixas tensões aplicas ao fluido nessa região, *unyielded regions* são formadas. Para os casos menos tixotrópicos a formação das *unyielded regions* são claramente mais rápidas (aceleração espacial, em termos Lagrangeanos) do que para os casos mais tixotrópicos.

São apresentado na Fig.4.26 os resultados para a influência da elasticidade no campo do módulo das tensões para  $\theta_0^*=5-100$ , e os parâmetros fixos de  $J=500$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0,5$  e  $t_{eq}^*=1$ .



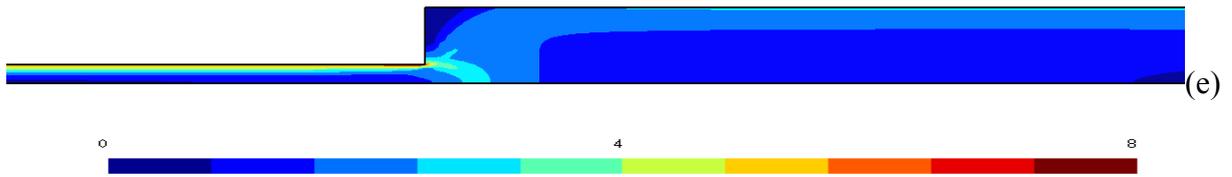
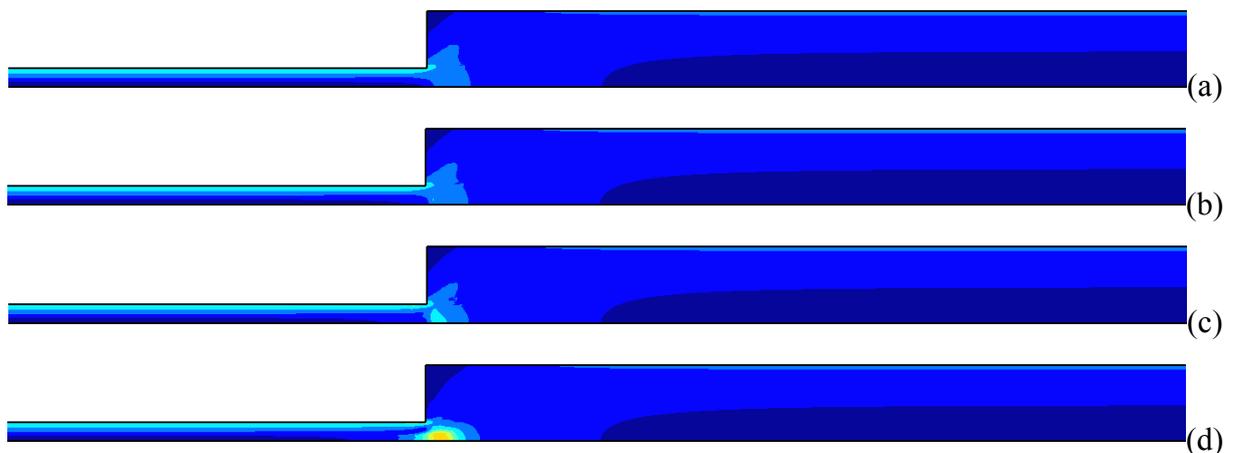


Figura 4.26 – Isobandas do módulo do tensor-extra de tensão para  $U^*=1$ ,  $n=0.5$ ,  $J=200$  e  $t_{eq}^*=1$ : (a)  $\theta_0^*=5$ ; (b)  $\theta_0^*=10$ ; (c)  $\theta_0^*=25$ ; (d)  $\theta_0^*=50$ ; (e)  $\theta_0^*=100$ .

Como observado anteriormente para os casos simulados para o escoamento em torno de um cilindro confinado entre duas placas planas, maiores efeitos elásticos geram maiores tensões, principalmente em pontos críticos como quinas e mudanças de áreas bruscas. Este comportamento das tensões elásticas reflete diretamente no campo do parâmetro de estruturação o que torna interessante uma análise conjunta entre esses dois campos. Como descrito anteriormente, pelo fato dos efeitos tixotrópicos serem baixos, os campos do módulo das tensões e o campo do parâmetro de estruturação (Fig.4.22) são qualitativamente muito semelhantes. As tensões geradas quebram a estrutura, onde percebe-se zonas de baixos níveis de estruturação após a mudança de área. Para fluidos com maior elasticidade, maiores são estas regiões. Este comportamento reflete diretamente na formação das *yielded/unyielded regions*, onde o que observa-se são formações mais tardias das *unyielded regions* (Fig.4.23) para materiais mais elásticos

A variação do  $t_{eq}^*$  para os parâmetros adimensionais fixos  $\theta_0^*$ ,  $J$ ,  $U^*$  e  $n$  são apresentados a seguir na Fig.4.27



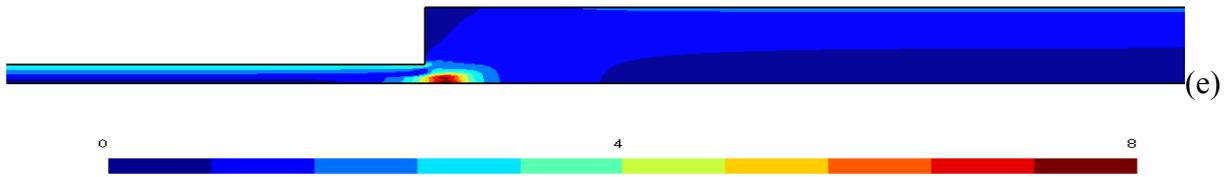
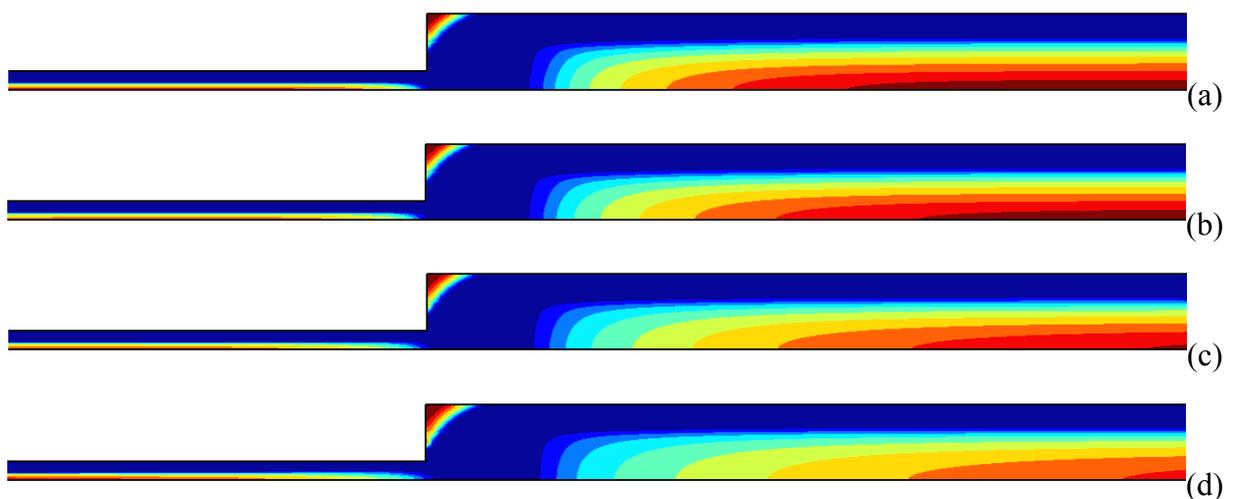


Figura 4.27 - Isobandas do módulo do tensor-extra de tensão para  $\theta_0^*=4$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0,5$  e  $J=500$ :

(a)  $t_{eq}^*=0,01$ ; (b)  $t_{eq}^*=0,03$ ; (c)  $t_{eq}^*=1$ ; (d)  $t_{eq}^*=5$ ; (e)  $t_{eq}^*=10$ .

Para os casos de fluidos com pouca tixotropia, observa-se campos do módulo das tensões qualitativamente muito semelhantes ao campo do parâmetro de estruturação, e por consequência, pode-se também observar semelhança com a formação das *yielded/unyielded regions*. Este comportamento não se repete para fluidos com maior nível de tixotropia. Com um tempo de equilíbrio maior a quebra/reestruturação do material não é instantânea, sendo assim, campos qualitativos não semelhantes. Como explicado anteriormente, podemos ter regiões com baixas tensões e baixos níveis de estruturação, assim como, regiões com tensões mais altas e níveis altos de estruturação do material.

Na Fig.4.28 são apresentado os resultados para o campo da viscosidade estrutural para a variação dos efeitos elásticos no escoamento *creeping flow* de um Fluido Estrutural Tixotrópico no interior de uma expansão planar abrupta. Aqui, como nos casos anteriores, foram fixados os parâmetros adimensionais,  $J=500$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0,5$  e  $t_{eq}^*=1$  e uma varredura de  $\theta_0^*=5-100$ .



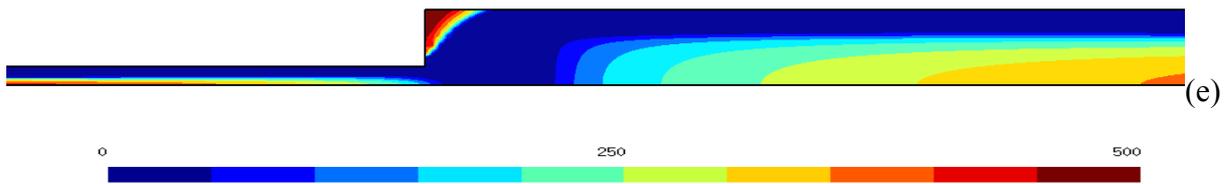
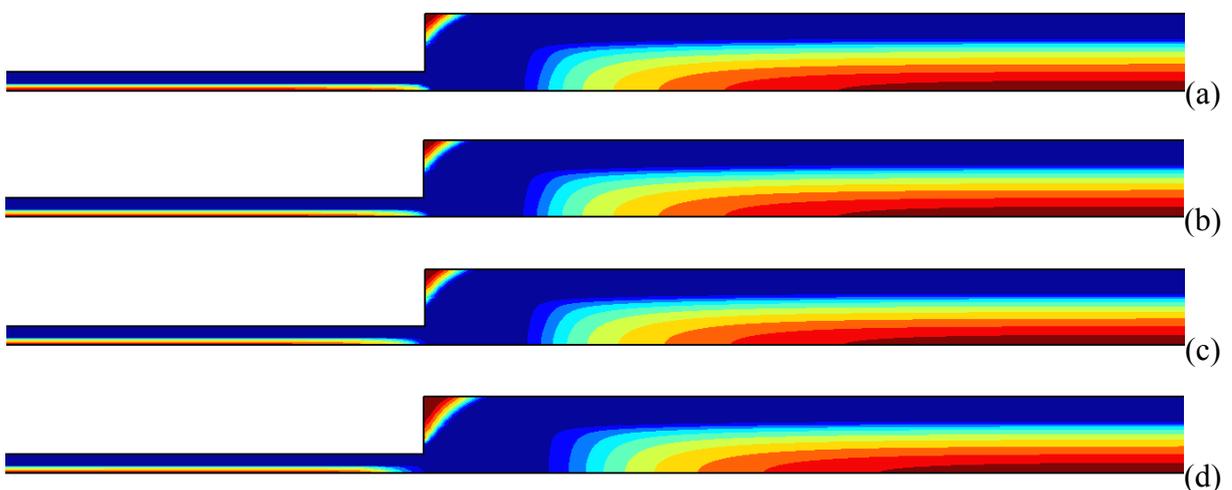


Figura 4.28 - Isobandas da viscosidade estrutural, para  $U^*=1$ ,  $ln=0,5$ ,  $J=500$  e  $t_{eq}^*=1$ :

(a)  $\theta_0^*=5$ ; (b)  $\theta_0^*=10$ ; (c)  $\theta_0^*=25$ ; (d)  $\theta_0^*=50$ ; (d)  $\theta_0^*=100$ .

Como é teoricamente determinado pelo modelo, aqui pode-se observar que a viscosidade estrutural varia entre as viscosidades adimensionais  $\eta_0$  e  $\eta_\infty$ . É observado uma grande semelhança entre o campo da viscosidade estrutural e o campo do parâmetro de estruturação (Fig.4.22). Esta semelhança se justifica pelo fato de que as regiões estruturadas estão associadas a altas viscosidades estruturais, próximas a  $\eta_0$ , e regiões desestruturadas a viscosidades estruturais baixas, próximas a  $\eta_\infty$ . Por este fato, pode-se observar também que as regiões de alta viscosidade estruturais são associadas as *unyielded regions*. Esta semelhança pode ser constatada ao comparar as zonas de altas viscosidades estruturais na Fig.4.28 com as *unyielded zones* da Fig.4.23. Em relação aos efeitos elásticos percebe-se que para maiores  $\theta_0^*$ , maiores zonas mortas no corner da expansão, onde as tensões elásticas e taxas de deformação não são fortes o suficiente para quebrar a estrutura do material. Com as *unyielded regions* associadas a zonas de altas viscosidades estruturais, o crescimento das zonas com alta viscosidade se justifica. Para o campo de viscosidade estrutural a jusante do plano de expansão é vista uma formação com mais altas viscosidades para fluidos com menores efeitos elásticos. Materiais com mais elasticidade geram maiores tensões fazendo com que ocorra uma diminuição de viscosidade devido a quebra da estrutura.



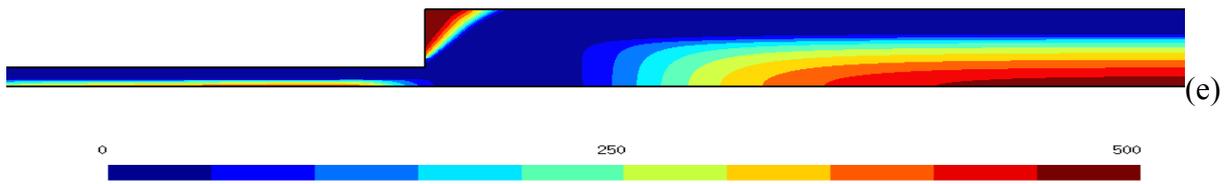


Figura 4.29 - Isobandas da viscosidade estrutural, para  $\theta_0^*=5$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0,5$  e  $J=500$ :

(a)  $t_{eq}^*=0,01$ ; (b)  $t_{eq}^*=0,03$ ; (c)  $t_{eq}^*=1$ ; (d)  $t_{eq}^*=5$ ; (e)  $t_{eq}^*=10$ .

Na Fig.4.29 é feita uma análise dos efeitos tixotrópicos sobre o campo da viscosidade estrutural. Os parâmetros fixos são  $\theta_0^*=5$ ,  $J=500$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0,5$  e é variado o  $t_{eq}^*=0,01-10$ . Os efeitos tixotrópicos tornam-se evidentes no campo da viscosidade estrutural. Para valores baixos de  $t_{eq}^*$  (número de tixotropia) os efeitos são discretos. A partir de  $t_{eq}^*=1$  (Fig.4.29(c)) percebe-se claramente sua influência sobre o escoamento *creeping flow* de Fluidos Estruturados Tixotrópicos. A região de alta viscosidade criada no corner, devido as baixas tensões que ali se encontram, é convectada com o aumento de  $t_{eq}^*$ . Também percebe-se que a região de alta viscosidade no centro do canal tem sua formação em uma distância maior em relação ao plano de expansão.

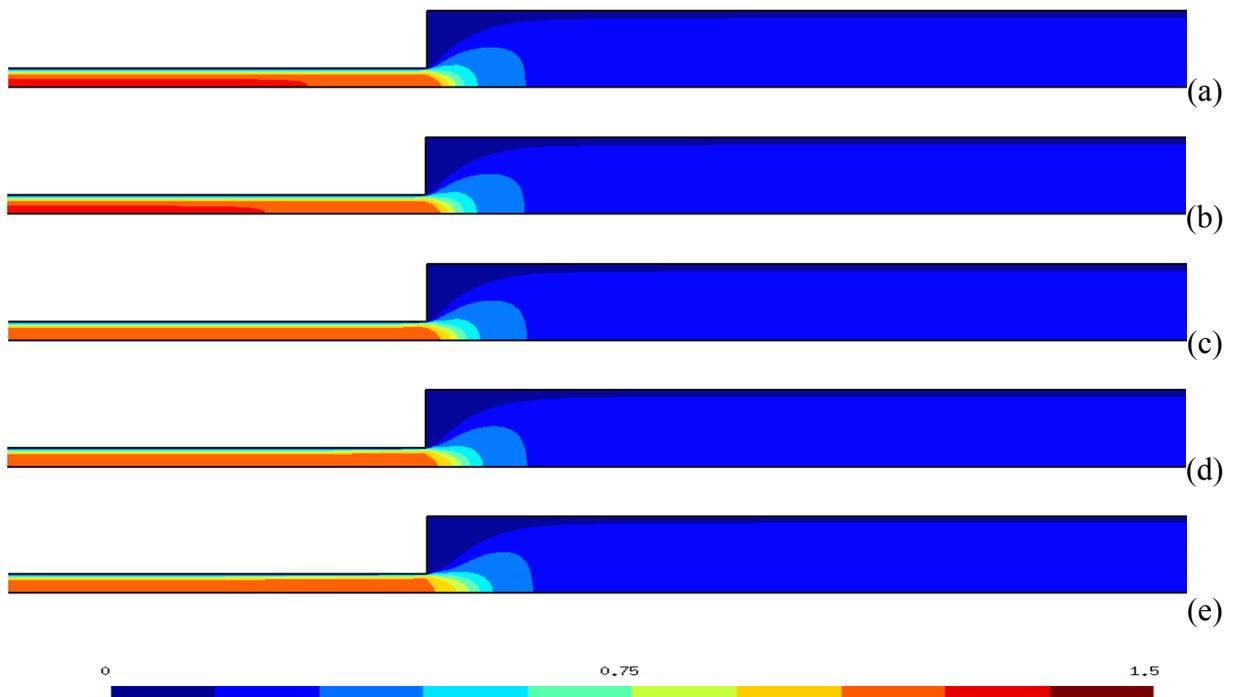


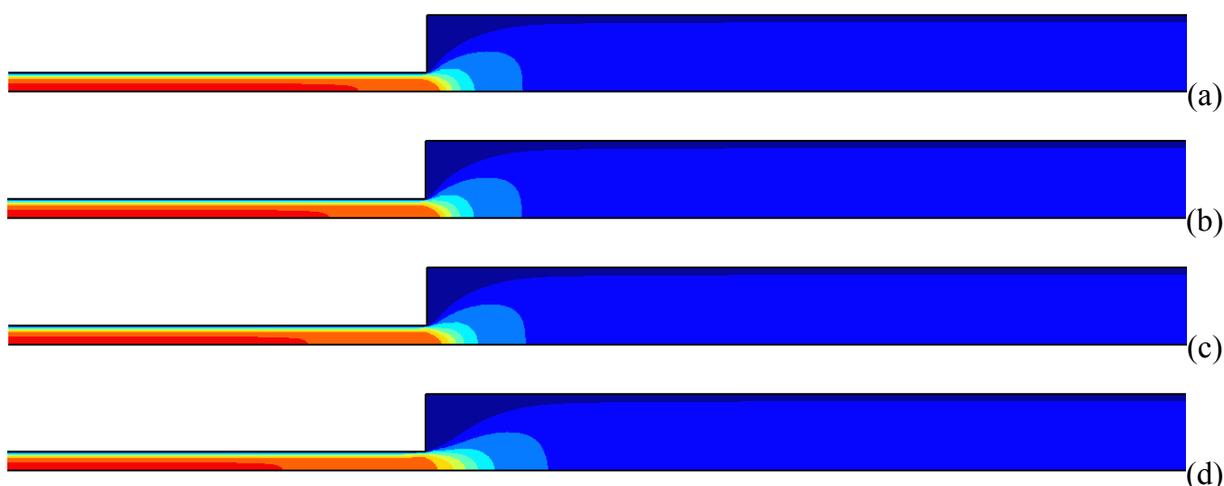
Figura 4.30 - Isobandas do módulo das velocidades, para  $U^*=1$ ,  $n=0,5$ ,  $J=500$  e  $t_{eq}^*=1$ :

(a)  $\theta_0^*=4$ ; (b)  $\theta_0^*=8$ ; (c)  $\theta_0^*=12,9$ ; (d)  $\theta_0^*=20$ .

Como comentado anteriormente, altas viscosidades estruturais estão relacionadas a altos níveis de estruturação. A diminuição/aumento dos efeitos tixotrópicos alteram o comportamento da estrutura do material e por consequência os níveis de viscosidade estrutural.

A Fig.4.30 apresenta os resultados para o campo do módulo de velocidades adimensional para diferentes níveis de elasticidade. Para analisar os efeitos elásticos sobre o campo do módulo de velocidades, varia-se  $\theta_0^*=5-100$  e mantêm-se fixos  $J=500$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0,5$  e  $t_{eq}^*=1$ . Uma primeira análise nos mostra perfis desenvolvidos para o campo do módulo de velocidades, onde as isobandas estão paralelas e sem mudanças ao longo do canal, verificando assim que o comprimento, tanto de entrada quanto de saída do canal, são suficientes para se obter um escoamento desenvolvido. O perfil do módulo de velocidades sofre mudanças muito suaves e discretas com a variação da elasticidade no escoamento de Fluidos Estruturados Tixotrópicos em expansão abrupta 1:4. A montante do plano de expansão o perfil do módulo sofre um achatamento para materiais com maiores níveis de elasticidade, devido principalmente pelo pequeno crescimento do *plug flow* no centro do canal. A jusante do plano de expansão, a influência dos efeitos elásticos são ainda mais discretos, apenas com uma formação do perfil desenvolvido sendo um pouco retardada em comparação com os materiais de menos elasticidade.

É apresentado a seguir o campo do módulo de velocidades para  $t_{eq}^*=0,01-10$  e os parâmetros adimensionais fixos  $\theta_0^*=5$ ,  $J=500$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0,5$ .



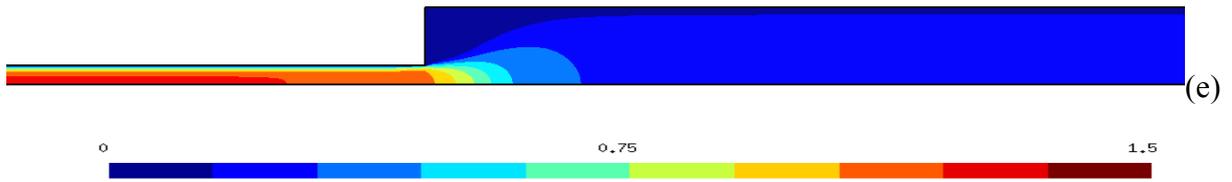


Figura 4.31 - Isobandas do módulo das velocidades, para  $\theta_0^*=5$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0,5$  e  $J=500$ :

(a)  $t_{eq}^*=0,01$ ; (b)  $t_{eq}^*=0,03$ ; (c)  $t_{eq}^*=1$ ; (d)  $t_{eq}^*=5$ ; (e)  $t_{eq}^*=10$ .

Como nos resultados apresentados anteriormente (Fig.4.30), podemos verificar um escoamento totalmente desenvolvido nos canais, tanto a montante quanto a jusante, do plano de expansão. A influência dos efeitos tixotrópicos no campo do módulo de velocidades é mais notável, mas muito semelhante ao dos efeitos elásticos. Pode-se perceber uma quebra no perfil desenvolvido a montante do plano de expansão para todos os casos analisados, com uma quebra mais próxima ao plano de expansão para materiais menos tixotrópicos, e mais longínqua para materiais mais tixotrópicos. Após o plano de expansão (a jusante) uma formação mais tardia do perfil desenvolvido para materiais mais tixotrópicos pode ser observado.

Os próximos resultados apresentam a influência do *jump number*,  $J$ , nos escoamentos *creeping flow* de Fluidos Estruturados Tixotrópicos em expansão abrupta. Primeiramente é apresentado o campo do parâmetro de estruturação e posteriormente o campo da viscosidade estrutural para  $J=200$ , 500 e 800, e os parâmetros fixos  $\theta_0^*=5$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0,5$  e  $t_{eq}^*=1$ .

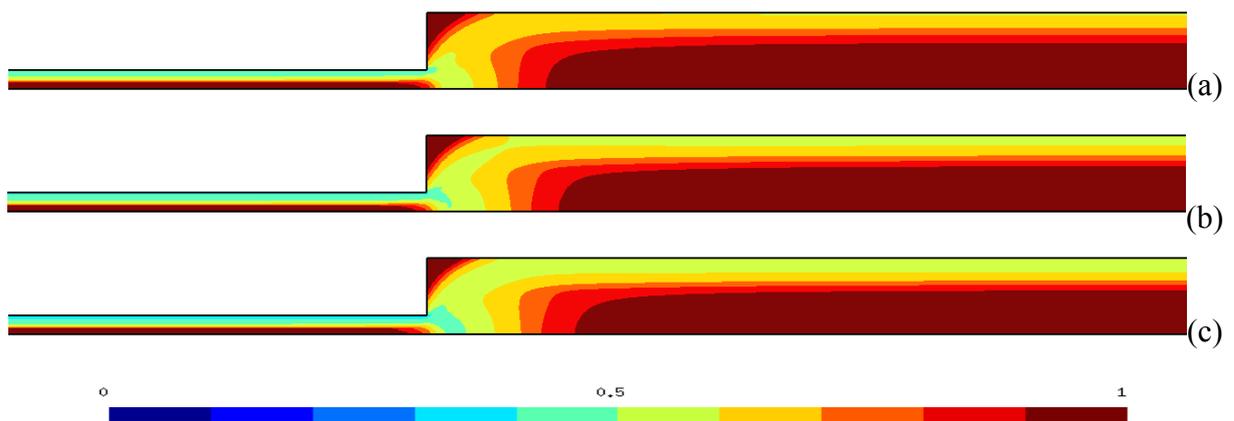


Figura 4.32 - Isobandas do parâmetro de estruturação, para  $\theta_0^*=4$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0,5$  e  $t_{eq}^*=1$ :

(a)  $J=200$ ; (b)  $J=500$ ; (c)  $J=800$ .

Os fluidos com menores  $J$  apresentam, assim como já mencionado para escoamentos em torno do cilindro, um campo mais estruturado do parâmetro de estruturação. Para maiores  $J$ , uma quebra na estrutura mais acentuada no plano de expansão pode ser observada. Pela definição do *jump number* é possível observar uma mudança de nível de  $\eta_0^*$  com a mudança deste número adimensional, o que influencia seu nível de estruturação em estado de equilíbrio, e conseqüentemente, no campo de estruturação do fluido. Por este motivo é interessante estarmos analisando o campo da viscosidade estrutural.

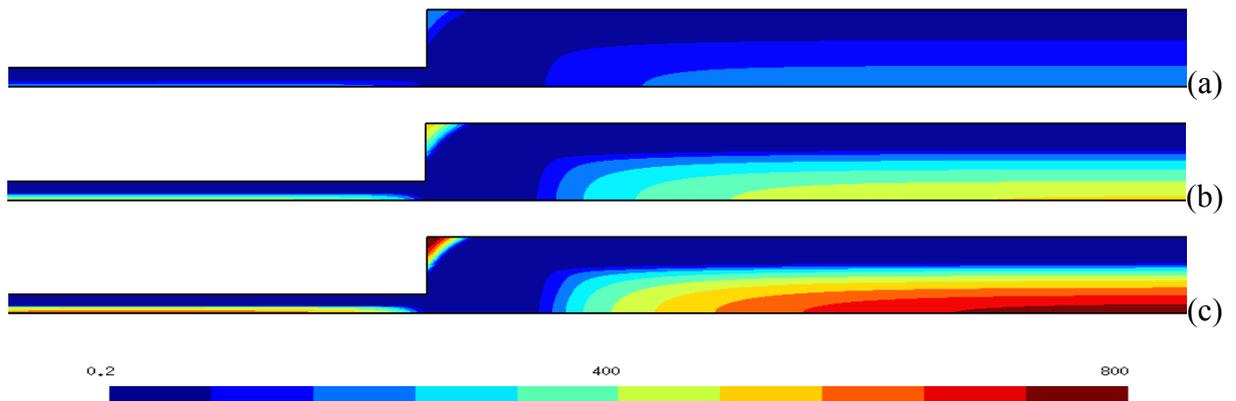


Figura 4.33 - Isobandas da viscosidade estrutural, para  $\theta_0^*=4$ ,  $U^*=1$ ,  $n=0,5$  e  $t_{eq}^*=1$ :  
(a)  $J=200$ ; (b)  $J=500$ ; (c)  $J=800$ .

Analisando a Fig.4.33 podemos confirmar as afirmações feitas acima. São visto níveis de viscosidade estrutural mais baixos para menores  $J$  e mais altos para maiores  $J$ . Ao analisar a definição da viscosidade estrutural (Eq.2.95), nos deixa claro esta influência onde seu crescimento é diretamente proporcional a  $\eta_0^*$ .

## 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

### 5.1 Conclusão

Esta tese aborda soluções numéricas para escoamentos *creeping flows* de Fluidos Estruturados Tixotrópicos em dois problemas clássicos de engenharia: (i) ao redor de um cilindro confinado entre duas placas planas paralelas, (ii) através de uma expansão planar abrupta. A modelagem mecânica é aproximada fazendo-se uso de aproximações GLS em termos de tensão-extra, pressão, velocidade e o parâmetro de estruturação. O modelo mecânico é feito pelas equações habituais de balanço de massa e momentum, juntamente com uma equação constitutiva para Fluidos Estruturados Tixotrópicos e uma equação evolutiva para o nível de estrutura, recentemente proposta por de Souza Mendes (2009).

No início do trabalho é enfatizado a relevância e a importância de se estar estudando o comportamento de Fluidos Não-newtonianos e mais especificamente Fluidos Estruturados Tixotrópicos. São apresentados os principais comportamentos de tais fluidos, demonstrando uma vasta gama de efeitos envolvendo escoamentos de Fluidos Não-newtonianos e suas dificuldades em modelá-los.

Como introdução a modelagem mecânica são apresentados princípios básicos da mecânica do contínuo onde são abordadas principalmente a cinemática e a dinâmica dos fluidos, assim como as deformações dos corpos contínuos. Na modelagem mecânica são apresentadas as equações utilizadas para descrever o comportamento dos Fluidos Estruturados Tixotrópicos. É apresentada a dedução das equações de balanço de momentum e de massa, assim como uma dedução para a equação constitutiva de Maxwell-b, sendo essa, uma forma de introduzir a equação constitutiva para Fluidos Estruturados Tixotrópicos. A equação constitutiva para Fluidos Estruturados Tixotrópicos, segundo este modelo, descreve a resposta material da estrutura do fluido por uma equação tipo Maxwell-b para a tensão, modificada para acomodar tanto o tempo de relaxação como o *shear-thinning* da viscosidade como funções do parâmetro de estruturação. Para fechar o modelo uma equação de evolução para a estrutura do material se faz necessária. Esta equação de evolução regula os processos de desagregação, transporte e acumulação do nível de estrutura material.

O modelo proposto para estudo é aproximado pelo método numérico de Elementos Finitos. A forma clássica do método de Elementos Finitos de Galerkin apresenta instabilidades que geram oscilações nos campos obtidos como resultado, devido a

incompatibilidade de seus sub-espacos de elementos finitos. Desta forma se fez necessária a utilizaçao de uma formulacao estabilizada para superar este obstáculo. A formulacao GLS (Galerkin Mínimos-Quadrados) utilizada mostrou-se capaz de diminuir as oscilações da formulacao clássica de Galerkin, apresentando campos suaves de suas variáveis.

Os resultados apresentados por esta tese podem ser considerados como soluções de referência para escoamentos de Fluidos Estruturados Tixotrópicos em relaçao tanto as quantidades cinemáticas e dinâmicas, onde na literatura não encontramos resultados para tais fluidos. Os resultados incluem: a topologia de regiões *yielded/unyielded*, para diferentes níveis de elasticidade (tempo de relaxacao adimensional) e tixotropia (tempo de equilíbrio do material); distribuicao do nível de estrutura do material através do escoamento para as relevantes faixas do tempo de relaxacao adimensional, tempo de equilíbrio da estrutura do material adimensional, níveis de *shear-thinning* e do *jump number*; campo da viscosidade estrutural para diferentes faixas do tempo de relaxacao adimensional, tempo de equilíbrio adimensional e do *jump number*; campo do módulo do tensor-extra e da velocidade também para a variacao de elasticidade e de tixotropia.

Para condições de escoamento permanente, observou-se que o desenvolvimento das regiões de alta estrutura foi fortemente associada a regiões de escoamento submetidos a baixos níveis de tensão e, similarmente, as de baixa estrutura estavam relacionados a altos níveis de tensão. O que se pode confirmar ao comparar os campos do parâmetro de estruturacao e o campo do módulo do tensor de tensão-extra. As *yielded/unyielded zones* seguem este mesmo comportamento, sendo que, estão associadas a certos níveis de estruturacao do material para determinar a superfície que as delimita. Os campos do parâmetro de estruturacao e as *yielded/unyielded zones* mostram-se sensíveis aos parâmetros que o regem, como se segue: (i) maiores  $\theta_0^*$  geram tensões elásticas maiores em regiões em que ocorre mudança de área, quinas e obstáculos, quebrando a estrutura do material, e por consequência o surgimento de maiores *yielded zones*. Para regiões onde ocorrem baixas tensões, a capacidade dos materiais de sofrerem deformações elásticas faz com que maiores níveis de estruturacao e maiores *unyielded zones* sejam observados; (ii)  $t_{eq}^*$  maiores, maiores regiões de alta estruturacao e *unyielded zones* na entrada dos canais estudados, devido ao aumento dos efeitos *upwind* no nível de estrutura. Após a quebra da estrutura devido a tensões aplicadas ao fluido, um tempo maior de reestruturacao (no aspecto Lagrangeano) pode ser visto e, por consequência, uma formacao mais tardia *unyielded zones*. (iii) variando o *jump number* e por consequência uma mudança de nível de  $\eta_0^*$ , o que influencia seu nível de estruturacao, observa-se que para menores  $J$  um escoamento mais estruturado pode ser visto.

(iv) no estudo da influência dos efeitos de *shear-thinning* são vistos dois comportamentos distintos dependendo da região focada. Para menores  $n$ , regiões mais estruturadas para locais com menores taxas de deformação, e um comportamento reverso, com regiões menos estruturadas para locais com maiores taxas de deformação.

Os campos da viscosidade estrutural são muito próximos qualitativamente ao campo do parâmetro de estruturação e uma comparação entre os dois campos se torna muito interessante. Esta semelhança se justifica pelo fato de que as regiões estruturadas estarem associadas a altas viscosidades estruturais, e assim, as mesmas conclusões citadas para o campo de estruturação podem ser aplicadas ao campo de viscosidade estrutural.

A análise do campo do módulo das tensões se torna muito interessante para entendermos os níveis de estruturação do escoamento, já que é este o principal agente na quebra da estrutura do material. Assim, um estudo em conjunto com os resultados para o campo do parâmetro de estruturação nos dá visão completa do mecanismo agindo sobre o escoamento de Fluidos Estruturados Tixotrópicos. Regiões com maior intensidade de tensões são as mesmas regiões que apresentam menores níveis de estruturação.

Como uma última análise, é apresentado o campo do módulo de velocidades, onde podemos constatar um escoamento totalmente desenvolvido, tanto a montante quanto a jusante do cilindro, assim como, do plano de expansão. Assim podemos concluir que, o comprimento dos canais dos dois problemas simulados tem um comprimento suficiente para que o problema de *entry flow*, causado pela imposição das condições de contorno na entrada do escoamento, não influencie as regiões de maior interesse para o estudo aqui realizado.

Por fim, podemos confirmar que os resultados apresentados confirmaram a adequabilidade do modelo de Fluidos Estruturados Tixotrópicos empregados como uma alternativa atraente para a modelagem de escoamentos de materiais viscoplásticos apresentando grau de elasticidade.

## 5.2 Perspectivas futuras

Após a finalização do trabalho proposto como tese, pode-se afirmar a pesquisa realizada apresentou algumas colaborações na área da Dinâmica dos Fluidos Não-newtonianos Computacional e Reologia. Mas podemos afirmar também que alguns aspectos ainda estão em aberto no que se trata de modelagem de Fluidos Estruturados Tixotrópicos, o que dá margem para continuação deste trabalho. Desta forma, uma continuação do presente

trabalho é extremamente aconselhável, onde alguns dos aspectos mais importantes a continuação do trabalho estão listados a seguir:

- Estudo das condições de contorno, visando evitar os problemas de *entry flow* e picos de tensão.
- Análise de estimativa de erro sobre a formulação GLS para Fluidos Estruturados Tixotrópicos;
- Um minucioso estudo de estabilidade numérica das equações variacionais para escoamentos de Fluidos Estruturados Tixotrópicos;
- Uma extensão do código computacional para problemas com escoamentos não-permanentes, o que se torna muito interessante para a modelagem dos fluidos em questão pelo fato de que efeitos de tixotropia variam com o tempo, e desta maneira, ter maiores possibilidades de estar simulando situações reais e de interesse de engenharia.
- Implementação dos termos de advecção de velocidade na equação de balanço de momentum na formulação GLS para Fluidos Estruturados Tixotrópicos, visando estudar os efeitos de inércia sobre o escoamento de Fluidos Estruturados Tixotrópicos.
- Implementação do método de conformação logarítmica do tensor conformação. Devido a instabilidade dos termos do tensor-extra de tensão na equação constitutiva empregada, um método de conformação logarítmica foi proposto no trabalho de Fattal and Kupferman, 2004, como uma alternativa para contornar este problema. Este método baseia-se numa reformulação da lei constitutiva em termos do logaritmo da matriz do tensor de conformação. De acordo com Fattal e Kupferman, utilizando o logaritmo do tensor conformação reduz a grande variação do tensor-extra de tensão (geralmente exponencial em pontos de estagnação, ou perto das paredes). A nova variável pode ser mais precisamente aproximada por um polinômio de interpolação, e o método também preserva a característica positiva definida do tensor conformação. No método de conformação logarítmica o conjunto de equações que formam o modelo mecânico, devem ser resolvidas, em função do tensor conformação e seu logarítmico:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \nabla P = \mathbf{0} \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.2)$$

$$(\nabla \mathbf{u}) \boldsymbol{\Theta} - (\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Theta} - \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Omega}) - 2 \mathbf{B} = \frac{1}{\theta(\lambda)} (e^{-\boldsymbol{\Theta}} - \mathbf{I}) \quad (5.3)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \lambda = \frac{1}{t_{eq}} [(1 - \lambda)^a - (1 - f(\boldsymbol{\tau})) \lambda] \quad (5.4)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\eta_v}{\lambda} (\mathbf{e}^\Theta - \mathbf{I}) \quad (5.5)$$

Na representação *log* da conformação, a Eq.5.3 é a equação de evolução equivalente para o logaritmo do tensor de conformação,  $\boldsymbol{\Theta} = \text{Log}\boldsymbol{\sigma}$ , beneficiando do facto de que  $\boldsymbol{\sigma}$  é uma matriz simétrica positiva definida e, portanto, poder ser na forma diagonalizada,  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R}^T$ , onde  $\mathbf{R}$  é uma matriz ortogonal que consistem dos autovectores da matriz  $\boldsymbol{\sigma}$ , e  $\boldsymbol{\Lambda}$  é uma matriz diagonal construída com os correspondentes três autovalores distintos de matriz  $\boldsymbol{\sigma}$ . O tensor  $\boldsymbol{\Omega}$  é o componente extensional e o tensor  $\mathbf{B}$  o componente rotacional provenientes da decomposição do tensor  $\nabla\mathbf{u}$  (Fatal, 2004).

Como ultimo comentário pode-se afirmar que trabalho realizado promoveu o estudo de diversos tópicos de interesse para a pesquisa e a ciência: foram abordados tópicos relevantes da Mecânica do Contínuo; realizou-se um estudo da reologia dos Fluidos Estruturados tixotrópicos apresentado a influência dos efeitos tixotrópicos e efeitos elásticos sobre campos relevantes ao material estudado; foram estudados os princípios para a construção do método clássico de Galerkin e as dificuldades deste no caso da aproximação de escoamentos de Fluidos Estruturados Tixotrópicos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acierno, D., La Mantia, F.P., Marrucci, G., Titomanlio, G.. A non-linear viscoelastic model with structure-dependent relaxation times: I. Basic formulation, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 1, p. 125-146, 1976.

Alexandrou, A. N., McGilvray, T. M., and Burgos, G. Steady Herschel-Bulkley fluid in tree-dimensional expansions, **J. Non-Newtonian Fluid Mech**, vol. 100, p. 77-96, 2001.

Alves, M.A., Pinho, F.T., Oliveira, P.J. The flow of viscoelastic fluids past a cylinder: finite-volume high-resolution methods, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 97, p. 207-232, 2001.

Astarita, G., Marrucci, G. **Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, McGraw-Hill, London, 1974.

Babuska, I. The finite element method with lagrangean multipliers, **Numer. Math.**, vol. 20, p.179- 192, 1973.

Barnes, A.B. Thixotropy - a review, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 70, p. 1-33, 1997.

Bauer, W.H., Collins, E.A. **Rheology: Theory and Applications**, Vol. 4, Academic Press, New York, 1967.

Behr, A. M., Franca, L. P., Tezduyar, T. E. Stabilized finite element methods for the velocity – pressure – stress formulation of incompressible flows, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 104, p. 31-48, 1993.

Berrone, S., Marro, M. Space-Time adaptive simulations for unsteady Navier-Stokes problems, **Computers & Fluids**, vol. 38, p. 1132-1144, 2009.

Blasco, J. An anisotropic GLS-stabilized finite element method for incompressible flow problems, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 197, p. 3712–3723, 2007.

Brezzi F.. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers, **RAIRO Anal. Numér.**, vol. 8, p. 129-151, 1974

Brooks, A.N., Hughes, T.J.R. Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convective Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 32, p. 199-259, 1982.

**Chambers 20th Century Dictionary Chambers**, London, 1993,

**Chambers Dictionary of Science and Technology**, W&R Chambers, Edinburgh, 1971.

Cheng, D.C.H., Evans, F. Phenomenological characterization of the rheological behaviour of inelastic reversible thixotropic and antithixotropic fluids, **Brit. J. Appl. Phys.**, vol. 16, p. 1599-1617, 1965.

Coronado, M. J., Arora, D., Behr and M., Pasquali, M. Four-field Galerkin/Least-squares formulation for viscoelastic fluids, **J. of Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 140, p. 132-144, 2006.

De Souza Mendes, P. R., Dutra, E. S. S. Viscosity Function for Yield-Stress Liquids, **Appl. Rheol.**, vol. 14, p. 296-302, 2004.

De Souza Mendes, P. R. Dimensionless non-Newtonian fluid mechanics, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 147, p. 109-116, 2007.

De Souza Mendes, P. R. Modeling the thixotropic behavior of structured fluids, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** vol. 164, p. 66–75, 2009.

De Souza Mendes, P. R. Thixotropic elasto-viscoplastic model for structured fluids, **Soft Matter**, 2010.

Dos Santos, D.O., Frey, S., Naccache, M.F., de Souza Mendes, P.R. Numerical approximations for flow of viscoplastic fluids in a lid-driven cavity, **J. Non-Newtonian Fluid Mech**, vol. 166, p. 667-679, 2011.

Fatal, R., Kupferman, R. Constitutive laws for the matrix-logarithm of the conformation tensor, **J. Non-Newtonian Fluid Mech**, vol. 123, p. 281-285, 2004.

Ferguson, J. **Applied Fluid Rheology**, Elsevier Science Publishers LTD, USA, 1991.

Fonseca, C. Uma investigação numérica de escoamentos planares de fluidos herschel-bulkley regularizados empregando um método multi-campos de galerkin mínimos-quadrados . **Dissertação de mestrado**, Ufrgs, Brasil, 2008.

Franca, L.P., and Frey, S. Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 99, p. 209-233, 1992.

Franceschini, F.S., and Frey, S. Finite element approximation for single-phase multicomponent flows, **Mechanics Research Communications** , vol. 32, p. 53-64, 2003.

Frey, S., Fonseca, C., Zinani, F., Naccache, M.F. Galerkin least-squares approximations for upper-convected Maxwell fluid flows , **Mechanics Research Communications** , vol. 37, p. 666-671, 2010.

Hughes, T.J.R. **The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1987.

Kim, J.M., Kim, C., Kim, J.H., Chung, C., Ahn, K.H., Lee, S.J. High-resolution finite element simulation of 4:1 planar contraction flow of viscoelastic fluid, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 129, pp. 23-37, 2005.

Kellogg, O.D. **Foundations of Potential Theory**, Dover, New York, USA, 1954.

Konraad, D., Mewis, J. A structural kinetics model for thixotropy, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 139, p. 21-30, 2006.

Labour, R.J., Wells, G.N. A Galerkin interface stabilisation method for the advection-diffusion and incompressible Navier–Stokes equations, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 196, p. 49-52, 2007.

Marek Behr, Dhruv Arora, Oscar Coronado-Matutti, Matteo Pasquali. Stabilized finite element methods of gls type for oldroyd-b viscoelastic fluid, **European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering**, 2004

Mewis, J. Thixotropy - a general review, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 6, p. 1-20, 1979.

Mewis, J., Wagner, N. J. Thixotropy, **Advances in Colloid and Interface Science**, vol. 147-148, p. 214–227, 2009.

Mujumdar, A., Beris, A. N., Metzner, A. B. Transient phenomena in thixotropic systems, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 102, p. 157–178, 2002.

Oden, J. T., Carey, G. F. **Finite elements: mathematical aspects**. vol. IV, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 1983.

**Oxford Concise Science Dictionary**, 2nd edn., Oxford University Press, Oxford, 1991.

**Oxford Encyclopedia Dictionary of Physics**, Pergamon Press, Oxford, 1962.

Papanastasiou, T. C. Flows of Materials with Yield", **Journal of Rheology**, vol. 31 (5), p. 385-404, 1987.

Pascal, J., Magnin, A., and Piau, J. M. Viscoplastic Fluid Flow Through a Sudden Axisymmetric Expansion, **AIChE Journal**, vol. 47, p. 2155-2166, 2001.

Patankar, S.V., Spalding, D.B. A Calculation Procedure for Heat, Mass And Momentum Transfer In Three-Dimensional Parabolic Flows, **Int. J. of Heat Mass Transfer**, vol. 15, p. 1787-1806, 1972.

Patankar, S.V. **Numerical heat transfer and fluid flow**, McGraw-Hill, New York, 1980.

Petera, J., Kotynia, M. The finite element model of non-isothermal semi-solid fluid flow, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 47, p. 1483–1498, 2004.

Peterfi, T. A. **Entwicklungsmech d. Organism**. vol. 112, p. 680, 1927,

Phan-Thien, N. **Understanding Viscoelasticity**, Springer, Berlin, 2002.

**Polymer Science Dictionary**, Elsevier Applied Science, London, 1990.

**Polymer Technology Dictionary**, Chapman & Hall, London, 1994.

Pryce-Jones, J., **JOCCA**, 17 (1934) 305; 19 (1936) 395; 26 (1943) 3.

Reddy, J.N. **An Introduction to Continuum Mechanics**, Cambridge University Press, USA, 2008.

Reddy, J.N., and Gartling, D.K. **The finite element method in heat transfer and fluid dynamics**, CRC Press Inc., USA, 1994.

Rektorys, K. **Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering**, Reidel, U.S.A, 1975,

**Van Nostrand's Scientific Encyclopedia**, 5<sup>th</sup> end, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1976,

Yurun Fan, R.I. Tanner, N. Phan-Thien. Galerkin/least-square finite- element methods for steady viscoelastic flows, **J. Non-Newtonian Fluid Mech**, vol. 84, p. 233-256, 1999

Zinani, F.; Frey, S. Galerkin Least-Squares Finite Element Approximations for Isochoric Flows of Viscoplastic Liquids. **Journal of Fluids Engineering - Transactions of the Asme**, Estados Unidos, vol. 128, p. 856-863, 2006.

Zinani, F., Frey, S. Galerkin Least-Squares Multi-Field Approximations for Flows of Inelastic Non-Newtonian Fluids, **J. Fluids Engineering**, Vol. 130, p. 1-14, 2008.

Zisis, Th., Mitsoulis, E. Viscoplastic flow around a cylinder kept between parallel plates, **J. Non-Newtonian Fluid Mech**, vol. 105, p. 120, 2002.