

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DANIEL ESTEBAN MALACALZA

**CONTROLE PREDITIVO DE SISTEMAS
MISTOS LÓGICOS-DINÂMICOS**

Porto Alegre
2004

DANIEL ESTEBAN MALACALZA

**CONTROLE PREDITIVO DE SISTEMAS
MISTOS LÓGICOS-DINÂMICOS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Automação e Instrumentação Eletro-Eletrônica

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

Porto Alegre
2004

DANIEL ESTEBAN MALACALZA

**CONTROLE PREDITIVO DE SISTEMAS
MISTOS LÓGICOS-DINÂMICOS**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr. , UFRGS
Doutor pela Université Paul Sabatier - Toulouse, França

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Argemiro Secchi , UFRGS
Doutor pela Universidade Federal de Rio de Janeiro - Rio de Janeiro, Brasil

Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto , UFSC
Doutor pela Université Paul Sabatier - Toulouse, França

Prof. Dr. Romeu Reginato , UFRGS
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina - Florianópolis, Brasil

Coordenador do PPGEE: _____
Prof. Dr. Carlos Eduardo Pereira

Porto Alegre, dezembro de 2004.

RESUMO

O comportamento dinâmico de um sistema é tradicionalmente descrito por um modelo, em geral associado a um conjunto de equações diferenciais ou de equações de diferenças, onde as variáveis representam grandezas físicas. Sistemas complexos, principalmente na indústria de processos, incorporam elementos com comportamento dinâmico lógico, tais como atuadores e sensores ON-OFF (estados aberto/fechado) ou proposições lógicas (estados verdadeiro/falso). Estes sistemas são denominados “*Sistemas Híbridos*”, “*Sistemas Mistos Lógicos-dinâmicos*” ou, simplesmente, “*Sistemas Mistos*”. Neste trabalho, são apresentadas técnicas que, associando variáveis lógicas a estes elementos, e mediante a incorporação de restrições sobre as variáveis, permitem obter um modelo matemático do sistema misto. Neste caso, técnicas clássicas de controle não permitem a incorporação destas novas variáveis e restrições. Como opção de controle de sistemas mistos, é então proposta e estudada uma técnica de controle preditivo baseado em modelo. São apresentados tanto a formulação teórica do problema de controle, quanto exemplos e simulações bem como um estudo de caso de sua aplicação sobre um sistema de equalização de uma planta de tratamento de efluentes.

Palavras-chave: Sistemas Mistos Lógicos-Dinâmicos , Controle Preditivo.

ABSTRACT

The dynamical behavior of a system is classically described by a model, generally represented by a set of differential or difference equations in variables representing physical values. Mainly in the process industry, complex systems include components with logical dynamics, such as ON-OFF actuators and sensors (open/closed status) or propositional logics (true/false status). These systems are known as “*Hybrid Systems*” or “*Mixed Logical Dynamical Systems*”. In this work, modelling techniques to obtain a model for these systems by associating logical variables to the new elements and by defining appropriate constraints on the variables, are presented. In this case, classical control techniques do not allow these logical variables to be incorporated. As a hybrid systems control option, a model based predictive control technique is therefore proposed. A formal statement of the predictive control problem as well as illustrative examples and simulations are presented. Finally, a case study of the application of the proposed method on an equalization system part of a waste-water treatment plant is presented in order to illustrate the applicability of the proposed techniques.

Keywords: Mixed Logical-Dynamical Systems, Predictive Control

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	7
LISTA DE ABREVIATURAS	8
1 INTRODUÇÃO	9
2 FUNDAMENTOS DO CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO (MPC) LINEAR	12
2.1 Introdução	12
2.2 Modelo de Equações de Estado	14
2.3 Preditor de estado	14
2.4 Preditor de saída	16
2.5 Função de custo quadrática	17
2.5.1 Função de custo para a evolução do estado	17
2.5.2 Função de custo para a evolução da saída	19
2.6 Efeito de perturbações	19
2.7 Restrições	22
2.7.1 Restrições comuns encontradas na prática	23
2.7.2 Modelamento Genérico de Restrições	25
2.8 O Problema de Otimização	26
2.8.1 Formulação	26
2.8.2 Solução	26
3 SISTEMAS MISTOS	28
3.1 Introdução	28
3.2 Exemplos de sistemas envolvendo variáveis contínuas e lógicas	28
3.3 Tipos de variáveis	32
3.4 Representação algébrica de expressões lógicas simples	32
3.4.1 Procedimento sistemático de modelamento de expressões lógicas	35
3.5 Representação algébrica de expressões lógicas complexas	36
3.6 Modelamento de Sistemas Mistos	38
3.6.1 Caso 1	38
3.6.2 Caso 2	39
3.6.3 Caso 3	44

4	CONTROLE PREDITIVO DE SISTEMAS HÍBRIDOS	46
4.1	Introdução	46
4.2	Controle preditivo do sistema de múltiplas dinâmicas e eventos discretos externos	46
4.3	Sistemas de múltiplas dinâmicas e eventos discretos internos	48
4.3.1	Formulação do problema de controle preditivo do sistema	48
4.4	Sistemas com variáveis de controle lógicas	52
4.4.1	Controle preditivo do sistema	53
4.4.2	Formulação do problema de otimização	53
4.5	Solução do problema de otimização	53
4.6	Exemplos	54
4.6.1	Sistema com duas regiões de operação (1)	54
4.6.2	Exemplo com duas regiões de operação (2)	62
4.6.3	Exemplo com duas regiões de operação (3)	66
4.6.4	Exemplo: Sistema dinâmico com variável manipulada discreta	68
4.6.5	Simulação	69
5	ESTUDO DE CASO: SISTEMA DE EQUALIZAÇÃO DE UMA PLANTA DE TRATAMENTO DE EFLUENTES	71
5.1	Introdução	71
5.2	O sistema	71
5.3	Modelamento matemático do sistema	74
5.3.1	Equações de estado da planta	74
5.4	Equações Dinâmicas	76
5.4.1	Modelo híbrido	77
5.4.2	Linearização do modelo	77
5.4.3	Ponto de equilíbrio	83
5.4.4	Considerações com relação à definição de variáveis aleatórias auxiliares	85
5.4.5	Sistema em tempo discreto	86
5.4.6	Restrições	87
5.5	Controle Preditivo	89
5.5.1	Preditor de estado	89
5.5.2	Função de Custo	91
5.6	Resultados da simulação	93
6	CONCLUSÕES	104
	REFERÊNCIAS	106

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 3.1:	Sistema de nível: resposta ao degrau unitário para os casos (I) Uma válvula aberta (II) Duas válvulas abertas	30
Figura 3.2:	Forno elétrico	31
Figura 4.1:	Simulação de sistema com duas regiões de operação e eventos internos (1)	62
Figura 4.2:	Simulação exemplo tomado de (BEMPORADI; MORARI (1999)) . .	66
Figura 4.3:	Simulação alternativa do sistema com duas regiões de operação	69
Figura 4.4:	Simulação do sistema com variáveis manipuladas discretas	70
Figura 5.1:	Sistema de Equalização de Planta de Tratamento de Efluentes	73
Figura 5.2:	Resultados da simulação: Perturbações aplicadas	95
Figura 5.3:	Resultados da simulação: PV e MV	96
Figura 5.4:	Resultados da simulação: Variáveis de Estado	97
Figura 5.5:	Resultados da simulação: Válvulas	98
Figura 5.6:	Simulação para condição inicial distante do ponto de equilíbrio: Perturbações aplicadas	100
Figura 5.7:	Simulação para condição inicial distante do ponto de equilíbrio: PV e MV	101
Figura 5.8:	Simulação para condição inicial distante do ponto de equilíbrio: Variáveis de Estado	102
Figura 5.9:	Simulação para condição inicial distante do ponto de equilíbrio: Válvulas	103

LISTA DE ABREVIATURAS

MPC	Model Predictive Control
MBPC	Model Based Predictive Control
MLD	Mixed Logic-Dynamic
SISO	Single Input-sSingle Output
NLP	Non-linear Programming
MINLP	Mixed Integer Non-linear Programming
QP	Quadratic programming
LP	Linear Programming
MIQP	Mixed Integer Quadratic Programming

1 INTRODUÇÃO

A necessidade, especialmente na indústria de processos, de aprimorar aspectos da produção tais como qualidade de produto, uso eficiente da energia e responsabilidade com relação a segurança e meio ambiente, entre outros, tem levado à pesquisa de novas técnicas de controle que atendam a especificações cada vez mais estritas (OGUNNAIKE; RAY (1994)). Dentro deste contexto, o Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC ou MBPC), surge como um dos mais promissores, já que permite, entre outros (OGUNNAIKE; RAY (1994), CAMACHO; BORDONS (2000)):

- Trabalhar com sistemas multivariáveis, geralmente com acoplamento ou interação entre variáveis significativos.
- Trabalhar em presença de perturbações, sejam estas mensuráveis ou não.
- Controlar sistemas com comportamentos dinâmicos complexos, tais como atrasos de transporte, instabilidade da malha aberta e fase não mínima.
- Controlar tanto sistemas lineares como não lineares.
- Utilização de diferentes modelos (resposta impulsiva, resposta ao degrau, função de transferência, variáveis de estado, ARIMA, CARIMA, etc.).
- Lidar com restrições de diferentes tipos, tais como:
 - restrições na amplitude de entradas, saídas, estados
 - restrições nas taxas de variação (restrições de *slew rate*)
- Otimização do desempenho, com função objetivo que pondera, tipicamente os erros nas variáveis sob controle e o esforço de controle (variáveis manipuladas) permitindo, inclusive, o tratamento de problemas multiobjetivo (CAMACHO; BORDONS (2000), SCHEFFER (2003)). Um exemplo desta situação é um sistema requerendo diferentes objetivos de controle durante a partida e durante o regime estacionário. Dados “ m ” objetivos de controle representados por suas funções de custo \mathcal{J}_i com $i = 1, \dots, m$, poderia ser definida uma única função de custo, como a soma ponderada dos diferentes objetivos de controle, isto é, $\sum_{i=1}^m \beta_i \mathcal{J}_i$, onde os parâmetros β_i são os pesos ou ponderações das respectivas funções de custo. Níveis de prioridade ou hierarquias entre os diferentes objetivos, podem, também, ser definidos (CAMACHO; BORDONS (2000)).

Apesar destas características, nem todos os processos apresentarão melhores desempenhos pelo fato de serem utilizadas técnicas de controle preditivo. Por outro lado, existe um consenso para a aplicabilidade de controle preditivo em sistemas que apresentem algumas destas características (OGUNNAIKE; RAY (1994)):

- Sistemas multivariáveis com significativa interação ou acoplamento entre as malhas SISO.
- Número de entradas diferente do número de saídas.
- Comportamentos dinâmicos complexos.
- Restrições.

Dentro do contexto da necessidade de melhoras contínuas, e aprimoramento dos sistemas de controle, já nos finais da década de 80, no meio acadêmico, começou a se dar maior ênfase ao fato de que a grande maioria dos sistemas, não necessariamente de alta complexidade, não somente estão caracterizados por dinâmicas contínuas, como também envolvem outras variáveis com comportamento dinâmico discreto, geralmente lógico, isto é, assumindo um de dois possíveis valores (1 – 0, “liga-desliga”, “verdadeiro-falso”). Estes sistemas envolvendo variáveis contínuas e lógicas, são chamados “*Sistemas Híbridos*”, “*Sistemas Mistos Lógicos-dinâmicos*” ou, simplesmente, “*Sistemas Mistos*”. Exemplos de componentes com comportamento lógico são válvulas ON-OFF, chaves fim de curso, chaves de nível, termostatos, pressostatos, etc.. Outras variáveis lógicas dentro de um processo, surgem de proposições lógicas do tipo se-então-senão (*if-then-else*). Outros exemplos de sistemas mistos, são sistemas nos quais se produzem chaveamentos de dinâmicas frente a situações, tais como, entre outras:

- Tomada de decisão, geralmente resultado de proposições do tipo if-then-else.
- Comportamentos não lineares: por exemplo um sistema com saturação de entrada, pode ser modelado como sistema misto.
- Chaveamento de região de operação segundo a evolução do estado.

Outra situação interessante em sistemas com atuadores com comportamento lógico, resulta do fato de considerar os graus de liberdades destes dispositivos como variáveis de controle.

Tipicamente, nos sistemas mistos, existe significativa interação entre ambos tipos de variáveis. A modelamento matemática destes sistemas tem sido estudada e proposta por vários pesquisadores, como por exemplo em (BEMPORADI; MORARI (1999), RAMAN; GROSSMANN (1991), RAMAN; GROSSMANN (1992), BRANICKY (1998), BARTON; LEE (2002), TYLER; MORARI (1999)).

Dadas as características dos sistemas mistos lógicos-dinâmicos e da sua modelamento através da introdução de restrições, a utilização de controle preditivo baseado em modelo parece ser uma abordagem bastante apropriada para o controle deste tipo de sistemas. Em particular, a aplicação de técnicas de controle preditivo a sistemas com estas características, permite fazer previsões sobre as evoluções dos mesmos ao longo de cada previsão. Em (BEMPORADI; MORARI (1999)), são apresentadas algumas técnicas de modelamento de sistemas mistos, e é estudada a aplicação de técnicas de controle preditivo baseado em modelo a estes sistemas.

Neste trabalho, tem-se como principal objetivo confirmar a aplicabilidade desta técnica de controle preditivo baseado em modelo (MPC) a este tipo de sistemas, determinando vantagens, desvantagens e potencialidades. Para isto, os principais tipos de sistemas mistos são identificados, e os resultados obtidos são validados através de exemplos numéricos e simulações.

O presente trabalho está organizado como segue. O capítulo 2 estuda fundamentos de Controle Preditivo baseado em Modelo, utilizando o modelo de espaço de estado. Determinam-se preditores tanto para o estado como para a saída. É também estudado o efeito de perturbações e a inclusão de restrições, finalizando com a formulação do problema de otimização.

No capítulo 3 é introduzido o conceito de sistema misto e a sua modelamento, desde sistemas combinatoriais simples, até sistemas de maior complexidade onde variáveis contínuas auxiliares devem ser introduzidas. São analisados os sistemas mistos de interesse para a área de controle. Três casos típicos básicos de sistemas mistos são estudados em maior detalhe. O capítulo 4 combina os dois capítulos anteriores, aplicando a técnica de controle preditivo desenvolvida no capítulo 3 aos sistemas mistos estudados no capítulo 4. A simplicidade da incorporação de restrições no problema de otimização resulta ser o principal motivador dos estudos efetuados neste capítulo. Vários exemplos numéricos e suas simulações são apresentados.

Finalmente, no capítulo 5 é apresentado um estudo de caso. Passo a passo, começa-se pela obtenção do modelo de equações de estado da planta em estudo, seguindo pela obtenção do modelo híbrido da mesma e formulação do problema de controle preditivo, finalizando com simulações sob diferentes condições. No final do trabalho são apresentadas as conclusões.

2 FUNDAMENTOS DO CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO (MPC) LINEAR

2.1 Introdução

O controle preditivo baseado em modelo é uma estratégia de controle que, a partir de um modelo matemático do sistema, faz a predição da sua evolução em função da seqüência de ações de controle. Com base nesta predição, a seqüência de ações de controle a ser aplicada, é determinada através da minimização de uma função de custo.

A estratégia MPC, a partir do instante atual t (CAMACHO; BORDONS (2000)), pode ser resumida pelos seguintes passos:

1. Medição das variáveis de estado ou saídas. No caso em que as variáveis não estão disponíveis para medição, pode-se, para estimar o estado do sistema, utilizar um observador de estado (por exemplo, filtro de Kalman).
2. Com estes valores, a “história” do sistema (valores passados) e o modelo, é obtida a seqüência de valores da variável manipulada (MV) que resulta da minimização de uma função de custo. Esta função de custo incluirá, por exemplo, o erro quadrático ponderado da seqüência de valores preditos das variáveis sob controle, com relação a uma seqüência desejada ou especificada como objetivo de controle, e o quadrado ponderado das ações de controle.
3. O primeiro valor da seqüência de ações de controle – o correspondente ao instante t – será o efetivamente aplicado ao processo. No instante seguinte ($t + T_s$), onde T_s é o período de amostragem do sistema discretizado, o procedimento é repetido.

O MPC define uma estratégia e diversas técnicas foram e estão sendo desenvolvidas para a sua implementação. Porém, todas elas têm os seguintes elementos em comum (CAMACHO; BORDONS (2000)):

- Modelo do processo: por exemplo função de transferência, espaço de estados, resposta ao salto ou resposta impulsiva.
- Preditor: com base no modelo, determina-se uma equação – geralmente de tempo discreto – que descreve a evolução futura – predição da evolução – do sistema, em função do valor atual do estado (ou da saída) e das ações de controle a serem aplicadas.

- Trajetória de Referência: é uma seqüência de valores que descreve a trajetória ou evolução “desejada” das variáveis de estado ou das variáveis de processo (saída).
- Função de custo (também chamada função objetivo ou função de otimização): geralmente é um critério quadrático que penaliza ou pondera o erro quadrático futuro – predito – das trajetórias do estado ou da saída (quadrado da diferença entre estas últimas e suas correspondentes trajetórias de referência) e os quadrados dos valores atuais e futuros das ações de controle. Esta função representa um compromisso entre precisão de seguimento de referência (erro ponderado) e esforços de controle (ações de controle ponderadas). A sua minimização com relação às ações de controle, permite obter a seqüência de valores ou “movimentos” futuros da mesma para o estado ou a saída seguir a referência, de forma ótima.
- Horizonte deslizante: na descrição do procedimento utilizado em MPC, foi mencionado que são feitas predições do comportamento do sistema. A questão é de por quantos períodos de amostragem será feita a predição ou, introduzindo novos termos, qual será o “*horizonte*” de predição. Para a situação de horizonte finito – número finito de predições –, no procedimento mais acima detalhado, a cada novo instante de amostragem, o horizonte é “restaurado” ou “deslizado” seguindo uma política chamada de “horizonte deslizante” ou “receding horizon”. A partir desta definição, são introduzidas as seguintes (CAMACHO; BORDONS (2000)):
 - Horizonte de Predição: quantidade de predições do estado ou da saída, em unidades de períodos de amostragem. Daqui em diante será representado como “ N ”.
 - Horizonte de Controle: quantidade de movimentos (N_u , em unidades de períodos de amostragem) da ação de controle. Sendo que deve ser $N_u \leq N$, os valores da ação de controle de N_u a N , são considerados iguais ao valor da ação de controle no instante N_u .

A utilização de técnicas de controle preditivo na indústria, resulta de grande interesse devido as vantagens que oferece (CAMACHO; BORDONS (2000), GARCÍA; PRETT; MORARI (1989), OGUNNAIKE; RAY (1994), PIKE (1996), CLARKE; MOHTADI (1989)), tais como:

- Aplicação tanto em sistemas monovariáveis como multivariáveis.
- Facilidade de incorporação de restrições.
- Compromisso entre desempenho temporal e esforço de controle.

Como fora mencionado, não existe um único método de controle preditivo. O método utilizado neste trabalho baseia-se no modelo de variáveis de estado, e utiliza o critério de otimização quadrático já descrito. A seguir será feita a descrição de cada um dos elementos básicos da estratégia MPC a ser explorada ao longo do manuscrito.

2.2 Modelo de Equações de Estado

Considere o sistema representado no espaço de estado em tempo discreto ¹:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$, $C \in \mathcal{R}^{n_s \times n}$, $D \in \mathcal{R}^{n_s \times m}$, $x \in \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{R}^m$, $y \in \mathcal{R}^{n_s}$.

Os vetores x , u e y são, respectivamente, os vetores de estado, controle e saída.

2.3 Preditor de estado

Considera-se, daqui em diante, que o estado no instante t é mensurável e conhecido. A solução da equação de estado – equação de diferenças – em um instante $t + j$, onde j é um número inteiro de vezes o período de amostragem, referido a um instante passado – instante inicial – t é obtido a partir da aplicação sucessiva do modelo (2.1), como segue:

$$x(t+j) = A^j x(t) + \sum_{i=1}^j A^{j-i} B u(t+i-1) \quad (2.2)$$

Sendo o modelo conhecido, pode-se aplicar a equação anterior considerando t como sendo o instante atual e, como consequência, $t+j$ um instante futuro. Utiliza-se a notação $\hat{x}(t+j|t)$ para indicar a predição do valor do estado x no instante futuro $t+j$, feita no instante t . Com esta consideração, obtém-se o preditor ou equação de predição do estado seguinte (RAWLINGS (2000)):

$$\hat{x}(t+j|t) = A^j x(t) + \sum_{i=1}^j A^{j-i} B u(t+i-1) \quad (2.3)$$

Aplicando a equação (2.3) recursivamente para $j = 1, 2, \dots, N$, onde N é o horizonte de predição, é obtido o seguinte conjunto de equações :

¹Considera-se, daqui em diante, t inteiro (positivo), e taxa de amostragem unitária, sem perda de generalidade

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}(t+1|t) = Ax(t) + Bu(t) \\ \hat{x}(t+2|t) = A^2x(t) + ABu(t) + Bu(t+1) \\ \hat{x}(t+3|t) = A^3x(t) + A^2Bu(t) + ABu(t+1) + Bu(t+2) \\ \vdots \\ \hat{x}(t+N|t) = A^Nx(t) + A^{N-1}Bu(t) + \dots + ABu(t+N-2) + Bu(t+N-1) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Como já fora mencionado, não necessariamente tem-se $N_u = N$. Para a situação $N_u < N$, será considerado:

$$u(t+j) = u(t+N_u-1), \quad \forall j = N_u, N_u+1, \dots, N \quad (2.5)$$

Definindo os seguintes vetores e matrizes

$$\mathcal{X}_p = \begin{bmatrix} \hat{x}(t+1|t) \\ \hat{x}(t+2|t) \\ \vdots \\ \hat{x}(t+N_u-1|t) \\ \vdots \\ \hat{x}(t+N|t) \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{nN} \quad (2.6)$$

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ \vdots \\ u(t+N_u-1) \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{mN_u} \quad (2.7)$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{N_u-1} \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{nN \times n} \quad (2.8)$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ AB & B & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N_u-1}B & A^{N_u-2}B & \dots & B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & \sum_{l=N_u}^N A^{N-l}B \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{nN \times mN_u}, \quad (2.9)$$

onde a matriz $\mathbf{0}$ é um bloco de zeros de dimensão adequada. O conjunto de equações (2.4) em forma matricial escreve-se, então, como segue:

$$\mathcal{X}_p = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}U \quad (2.10)$$

A equação (2.10) será chamada daqui em diante de “*preditor de estado*”.

2.4 Preditor de saída

Utilizando os resultados anteriores, o preditor de saída é obtido a seguir. A saída em $t + j$ é dada por:

$$y(t + j) = Cx(t + j) + Du(t + j) \quad (2.11)$$

Substituindo $x(t + j)$ na equação anterior conforme a expressão (2.2), tem-se que:

$$y(t + j) = CA^j x(t) + \sum_{i=1}^j CA^{j-i} Bu(t + i - 1) + Du(t + j) \quad (2.12)$$

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado na obtenção do preditor de estado, considerando t o instante atual, a predição da saída no instante futuro $t + j$ é:

$$\hat{y}(t + j|t) = CA^j x(t) + \sum_{i=1}^j CA^{j-i} Bu(t + i - 1) + Du(t + j) \quad (2.13)$$

Definindo as matrizes

$$\mathcal{Y}_p = \begin{bmatrix} \hat{y}(t + 1|t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t + N|t) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^N \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} CB & D & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ CAB & CB & D & \dots & \mathbf{0} \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N_u-1}B & CA^{N_u-2}B & CA^{N_u-3}B & \dots & D \\ CA^{N_u}B & CA^{N_u-1}B & CA^{N_u-2}B & \dots & CB \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & \dots & \sum_{l=N_u}^N CA^{N-l}B \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

a expressão matricial do “preditor de saída” resulta, então, em:

$$\mathcal{Y}_p = \mathcal{C}x(t) + \mathcal{D}U \quad (2.17)$$

2.5 Função de custo quadrática

Define-se nesta seção a função de custo como a soma dos erros quadráticos ponderados da evolução do sistema – estado ou saída – com relação à trajetória de referência, mais a soma ponderada dos quadrados das ações de controle.

2.5.1 Função de custo para a evolução do estado

Considerando o vetor de trajetória – seqüência de valores futuros – de referência de estado seguinte

$$\mathcal{X}_{ref} = \begin{bmatrix} x_{ref}(t+1) \\ x_{ref}(t+2) \\ \vdots \\ x_{ref}(t+N) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

define-se a função de custo (CAMACHO; BORDONS (2000)):

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_x = 0.5 \sum_{j=1}^N (\hat{x}(t+j|t) - x_{ref}(t+j))^T \tilde{Q}_x (\hat{x}(t+j|t) - x_{ref}(t+j)) + \\ + 0.5 \sum_{j=1}^{N_u} u(t+j)^T \tilde{Q}_u u(t+j) \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde a matriz \tilde{Q}_x , definida ou semi-definida positiva, é a ponderação ou peso do erro médio quadrático da trajetória de estado, e a matriz \tilde{Q}_u , definida positiva, é a ponderação das ações de controle.

Definindo as matrizes

$$Q_x = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_x & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \tilde{Q}_x \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

e

$$Q_u = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_u & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \tilde{Q}_u \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

a função de custo pode ser expressada matricialmente como segue:

$$J_x = 0.5 (\mathcal{X}_p - \mathcal{X}_{ref})^T Q_x (\mathcal{X}_p - \mathcal{X}_{ref}) + 0.5 \mathcal{U}^T Q_u \mathcal{U}, \quad (2.22)$$

Introduzindo a expressão do preditor (2.10) nesta última equação e após algumas manipulações algébricas, chega-se à seguinte expressão:

$$J_x = 0.5 \mathcal{U}^T (\mathcal{B}^T Q_x \mathcal{B} + Q_u) \mathcal{U} + (x^T(t) \mathcal{A}^T - \mathcal{X}_{ref}^T) Q_x \mathcal{B} \mathcal{U} + 0.5 (x(t)^T \mathcal{A}^T - \mathcal{X}_{ref}^T) Q_x (\mathcal{A}x(t) - \mathcal{X}_{ref}) \quad (2.23)$$

Observe que a equação anterior é uma função quadrática em \mathcal{U} , da forma:

$$J_x = 0.5 \mathcal{U}^T H \mathcal{U} + f^T \mathcal{U} + G \quad (2.24)$$

onde

$$H = (\mathcal{B}^T Q_x \mathcal{B} + Q_u) \quad (2.25)$$

$$f^T = (x^T(t) \mathcal{A}^T - \mathcal{X}_{ref}^T) Q_x \mathcal{B} \quad (2.26)$$

$$G = 0.5 (x(t)^T \mathcal{A}^T - \mathcal{X}_{ref}^T) Q_x (\mathcal{A}x(t) - \mathcal{X}_{ref}) \quad (2.27)$$

Observe que sendo que $x(t)$ é o valor medido do estado no instante t , a matriz G é uma matriz de constantes.

2.5.2 Função de custo para a evolução da saída

De forma similar, considerando a otimização da saída , sendo a trajetória de referência

$$\mathcal{Y}_{ref} = \begin{bmatrix} y_{ref}(t+1) \\ y_{ref}(t+2) \\ \vdots \\ y_{ref}(t+N) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

define-se a função de custo:

$$J_y = 0.5 (\mathcal{Y}_p - \mathcal{Y}_{ref})^T Q_y (\mathcal{Y}_p - \mathcal{Y}_{ref}) + 0.5 \mathcal{U}^T Q_u \mathcal{U} \quad (2.29)$$

Substituindo \mathcal{Y}_p por sua expressão (2.17), e após algumas manipulações algébricas obtém-se:

$$J_y = 0.5 \mathcal{U}^T (\mathcal{D}^T Q_y \mathcal{D} + Q_u) \mathcal{U} + (\mathcal{C}x(t) - \mathcal{Y}_{ref})^T Q_y \mathcal{D} \mathcal{U} + 0.5 (\mathcal{C}x(t) - \mathcal{Y}_{ref})^T Q_y (\mathcal{C}x(t) - \mathcal{Y}_{ref}) \quad (2.30)$$

A função J_y é uma função quadrática em \mathcal{U} , da forma:

$$J_y = 0.5 \mathcal{U}^T H_y \mathcal{U} + f_y^T \mathcal{U} + G_y \quad (2.31)$$

2.6 Efeito de perturbações

Considerando que o sistema sofre o efeito de perturbações aditivas sobre o estado e sobre a saída, o modelo de espaço de estado considerando estas perturbações é dado por:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + \Upsilon \nu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + \Psi \omega(t) \end{cases} \quad (2.32)$$

onde $\nu(t) \in \mathfrak{R}^{n_\nu}$ e $\omega(t) \in \mathfrak{R}^{n_\omega}$ são, respectivamente, os vetores de perturbação sobre o estado e sobre a saída, $\Upsilon \in \mathfrak{R}^{n_s \times n_\nu}$ e $\Psi \in \mathfrak{R}^{n \times n_\omega}$.

As equações de predição (2.4), incorporando o efeito das perturbações , resultam então em:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}(t+1|t) = Ax(t) + Bu(t) + \Upsilon\nu(t) \\ \hat{x}(t+2|t) = A^2x(t) + ABu(t) + Bu(t+1) + A\Upsilon\nu(t) + \Upsilon\nu(t+1) \\ \hat{x}(t+3|t) = A^3x(t) + A^2Bu(t) + ABu(t+1) + Bu(t+2) + A^2\Upsilon\nu(t) + \\ \quad + A\Upsilon\nu(t+1) + \Upsilon\nu(t+2) \\ \vdots \\ \hat{x}(t+N|t) = A^Nx(t) + A^{N-1}Bu(t) + \dots + ABu(t+N-2) + Bu(t+N-1) + \\ \quad + A^{N-1}\Upsilon\nu(t) + \dots + A\Upsilon\nu(t+N-1) + \Upsilon\nu(t+N-1) \end{array} \right.$$

As equações de saída são modificadas como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{y}(t+1|t) = CAx(t) + CBu(t) + Du(t+1) + C\Upsilon\nu(t) + \Psi\omega(t) \\ \hat{y}(t+2|t) = CA^2x(t) + CABu(t) + CBu(t+1) + Du(t+2) + CA\Upsilon\nu(t) + \\ \quad + C\Upsilon\nu(t+1) + \Psi\omega(t+1) \\ \hat{y}(t+3|t) = CA^3x(t) + CA^2Bu(t) + CABu(t+1) + CBu(t+2) + Du(t+3) + \\ \quad + CA^2\Upsilon\nu(t) + CA\Upsilon\nu(t+1) + C\Upsilon\nu(t+2) + \Psi\omega(t+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+N|t) = CA^Nx(t) + CA^{N-1}Bu(t) + \dots + CABu(t+N-2) + CBu(t+N-1) + \\ \quad + CA^{N-1}\Upsilon\nu(t) + \dots + CA\Upsilon\nu(t+N-1) + C\Upsilon\nu(t+N-1) + \Psi\omega(t+N) \end{array} \right.$$

Com relação aos valores das perturbações a serem usadas na predição, três situações podem ser consideradas ²:

1. As perturbações são mensuráveis.

Nesta situação as perturbações poderão ser consideradas constantes ao longo do horizonte de predição com valor igual ao medido no instante t , isto é, para $j = 1, 2, \dots, N-1$:

$$\begin{aligned} \nu(t+j) &= \nu(t) \\ \omega(t+j) &= \omega(t) \end{aligned} \tag{2.33}$$

2. As perturbações não são mensuráveis e a suas médias são conhecidas.

Esta situação é similar à anterior, porém os valores a serem considerados para as perturbações, são as suas respectivas médias. Logo, para $j = 1, 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \nu(t+j) &= \bar{\nu} \\ \omega(t+j) &= \bar{\omega} \end{aligned} \tag{2.34}$$

²Embora não possam ser feitas predições sobre as perturbações, poderiam ser introduzidas extrapolações a partir dos valores medidos, tais como rampas, filtros de primeira ordem, etc.

3. As perturbações são não mensuráveis e as suas médias são desconhecidas.

Neste caso, não há outra possibilidade a não ser considerá-las nulas. Então, para $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$:

$$\begin{aligned}\nu(t + j) &= 0 \\ \omega(t + j) &= 0\end{aligned}\tag{2.35}$$

Pelas considerações feitas, as perturbações serão consideradas constantes, com a ressalva de que para o primeiro caso o valor deverá ser atualizado a cada período de amostragem. O terceiro caso é um particular do segundo (constante igual a zero).

Desta forma, definindo a matriz

$$\tilde{\Upsilon} = \begin{bmatrix} \Upsilon \\ A\Upsilon + \Upsilon \\ \vdots \\ A^{N-1}\Upsilon + \dots + A\Upsilon + \Upsilon \end{bmatrix}\tag{2.36}$$

os preditores de estado e de saída do sistema na presença de perturbações, resultam, respectivamente:

$$\mathcal{X}_p = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}U + \tilde{\Upsilon}\nu(t)\tag{2.37}$$

$$\mathcal{Y}_p = \mathcal{C}x(t) + \mathcal{D}U + \mathcal{C}\tilde{\Upsilon}\nu(t) + \Psi\omega(t)\tag{2.38}$$

Definindo agora:

$$\tilde{\mathcal{A}} = [\mathcal{A} \quad \tilde{\Upsilon}]\tag{2.39}$$

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \nu(t) \end{bmatrix}\tag{2.40}$$

$$\tilde{\mathcal{C}} = [\mathcal{C} \quad \mathcal{C}\tilde{\Upsilon} \quad \Psi]\tag{2.41}$$

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \nu(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

As equações de predição podem ser re-escritas como segue:

$$\mathcal{X}_p = \tilde{\mathcal{A}}\tilde{x}(t) + \mathcal{B}U \quad (2.43)$$

$$\mathcal{Y}_p = \tilde{\mathcal{C}}\tilde{x}(t) + \mathcal{D}U \quad (2.44)$$

Finalmente, introduzindo as equações anteriores nas respectivas funções de custo (2.23) e (2.30), estas resultam:

$$J_x = 0.5U^T (\mathcal{B}^T Q_x \mathcal{B} + Q_u)U + (\tilde{\mathcal{A}}\tilde{x}(t) - \mathcal{X}_{ref})^T Q_x \mathcal{B}U + 0.5 (\tilde{\mathcal{A}}\tilde{x}(t) - \mathcal{X}_{ref})^T Q_x (\tilde{\mathcal{A}}\tilde{x}(t) - \mathcal{X}_{ref}) \quad (2.45)$$

$$J_y = 0.5U^T (\mathcal{D}^T Q_y \mathcal{D} + Q_u)U + (\tilde{\mathcal{C}}\tilde{x}(t) - \mathcal{Y}_{ref})^T Q_y \mathcal{D}U + 0.5 (\tilde{\mathcal{C}}\tilde{x}(t) - \mathcal{Y}_{ref})^T Q_y (\tilde{\mathcal{C}}\tilde{x}(t) - \mathcal{Y}_{ref}) \quad (2.46)$$

Observe-se que as equações anteriores são também funções quadráticas em U , da forma:

$$J = 0.5U^T H U + \tilde{f}^T U + \tilde{G} \quad (2.47)$$

2.7 Restrições

Em geral todo processo apresenta restrições. Por exemplo, um controlador não pode fornecer sinal de controle além da sua capacidade (efeito de saturação) e uma variável de processo, por diferentes motivos, não poderá sair de determinada faixa ou ter uma taxa de variação superior ou inferior à especificada. A seguir serão apresentadas algumas das restrições que aparecem com maior frequência em controle de processos.

2.7.1 Restrições comuns encontradas na prática

As restrições mais comuns encontradas num processo são as seguintes (CAMACHO; BORDONS (2000)):

- **Restrições de amplitude do sinal de controle**

Por limitações físicas, do processo ou considerações relativas à máxima potência que o atuador pode fornecer (por limitações físicas, de consumo de energia, etc.), entre outras, o sinal que pode ser fornecido terá limites máximos e mínimos. Por exemplo, num sistema de controle de vazão ou nível que utiliza uma válvula de controle como atuador, o mesmo terá limites extremos (aberturas 0% e 100%). Pode expressar-se esta situação da seguinte forma:

$$\underline{U} \leq u(t) \leq \bar{U}, \forall t,$$

onde o vetor \underline{U} corresponde à amplitude de controle mínima, e o vetor \bar{U} à máxima.

- **Restrições de slew rate (velocidade de variação) do sinal de controle**

Da mesma forma que a válvula do exemplo não pode fornecer certos valores de amplitude, também não pode fornecer uma variação “instantânea” do sinal. Resulta claro que a resposta do atuador será limitada ou restrita a uma velocidade máxima de variação. Esta velocidade de variação máxima, é chamada *slew rate* ou *taxa de variação*. Matematicamente, esta restrição pode ser representada por:

$$\underline{u} \leq \Delta u(t) \leq \bar{u}, \forall t$$

onde os vetores \underline{u} e \bar{u} são, respectivamente, as taxas mínima e máxima de variação, e $\Delta u(t) = u(t) - u(t - 1)$.

- **Restrições de amplitude sobre a saída**

Com relação à saída, resulta necessário muitas vezes considerar as amplitudes máxima e mínima, por razões de segurança, respeito a especificações de qualidade, etc.. Matematicamente, a expressão é similar à de restrições de amplitude de controle:

$$\underline{y} \leq y(t) \leq \bar{y}, \forall t,$$

sendo os vetores \underline{y} a amplitude de saída mínima, e \bar{y} a máxima. A equação anterior é equivalente à seguinte, envolvendo o estado:

$$\underline{y} \leq Cx(t) + Du(t) \leq \bar{y}, \quad \forall t$$

- **Restrições sobre os estados**

De maneira genérica, as restrições sobre os estados podem ser representadas por uma inequação,

$$\Phi x(t) \leq \Theta \tag{2.48}$$

Note que esta restrição define uma região poliedral no espaço de estados, onde a trajetória de estado deverá estar contida

- **Outros exemplos de possíveis restrições**

Outras restrições que podem aparecer, embora as mais comuns sejam as anteriores, são indicadas a seguir:

- **Restrições de faixa**

Neste caso, o estado ou a saída do sistema segue uma trajetória dentro de uma faixa de tolerância, que pode ser interpretada como uma trajetória de mínimos ($\underline{y}(t)$) e outra de máximos ($\bar{y}(t)$)

$$\underline{y}(t) \leq y(t) \leq \bar{y}(t)$$

- **Restrições de sobrepasso**

A introdução desta restrição é simples. Supondo que a referência tenha sido mantida constante por um período suficiente de tempo (o sistema está em regime permanente), frente a uma variação da mesma, impõe-se uma restrição que indica uma porção do horizonte de predição na qual o sobrepasso pode ocorrer. Matematicamente, tem-se

$$y(t+j) \leq \tilde{\bar{y}}(t), j = N_{o1}, \dots, N_{o2}, \text{ no caso de aumento da referência}$$

ou

$$y(t+j) \geq \tilde{\underline{y}}(t), j = N_{o1}, \dots, N_{o2}, \text{ no caso de diminuição da referência}$$

onde $\tilde{\bar{y}}(t)$ e $\tilde{\underline{y}}(t)$ representam respectivamente as trajetórias máxima e mínima que limitam $y(t)$ durante o período no qual o sobrepasso é aceitável, e $1 \leq N_{o1} \leq N_{o2} \leq N$.

Para evitar a possibilidade de oscilações após o instante N_{o2} , poderia ser imposta uma restrição de amplitude para $j > N_{o2}$.

- **Comportamento monotônico**

Frente a variações na referência, alguns sistemas apresentam oscilações antes mesmo de terem passado pelo novo valor de referência. Para evitar este fenômeno conhecido como *kick back*, se impõe a restrição de que a saída deve evoluir monotonicamente (crescente ou decrescente, conforme for a variação da referência positiva ou negativa). Esta restrição pode ser representada da seguinte forma:

$$\text{Se } y(t) < y_{ref}(t) \Rightarrow y(t+j) \leq y(t+j+1)$$

Isto equivale a dizer que se a variável de processo é menor que a referência, sua evolução é restrita a ser monotonicamente (não estritamente) crescente. A situação inversa expressa-se assim:

$$\text{Se } y(t) > y_{ref}(t) \Rightarrow y(t+j) \geq y(t+j+1).$$

Aqui, $y_{ref}(t)$ representa a evolução ou trajetória da referência.

- **Comportamento de fase mínima**

Esta restrição pode ser imposta para evitar que os sistemas apresentem comportamento de fase não mínima, e pode ser expressado como:

$$\text{Se } y(t) < y_{ref}(t) \Rightarrow y(t+j) \geq y(t)$$

$$\text{Se } y(t) > y_{ref}(t) \Rightarrow y(t+j) \leq y(t)$$

Note-se que as três últimas restrições apresentadas, referem-se a situações de variações na referência.

2.7.2 Modelamento Genérico de Restrições

Na subseção anterior, foram apresentados alguns tipos de restrições que aparecem sobre ações de controle (u), saídas (y) e/ou estados (x). Sendo que uma vez impostas as restrições sobre os estados, implicitamente são impostas restrições sobre as saídas, a seguir se trabalhará somente com os estados, sendo os resultados obtidos extensivos às saídas, bastando-se escrever estas últimas em função dos estados. Algumas das restrições especificam o conjunto de valores que ditas variáveis podem assumir. Assim, por exemplo, sendo $x \in \mathfrak{R}^n$, num determinado processo somente poderá assumir valores dentro de um determinado conjunto $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$. Da mesma forma, as ações de controle estarão limitadas geralmente por restrições físicas, podendo também existir restrições impostas por questões de segurança, uso eficiente de energia, preservação do meio ambiente, etc.. Este tipo de restrições são as chamadas *restrições de conjunto*. Assim, tem-se, genericamente, as seguintes restrições:

$$\begin{cases} x \in \Omega, \Omega = \{x \in \mathfrak{R}^n, Rx \leq T_x\} \\ u \in \mathcal{U}, \mathcal{U} = \{u \in \mathfrak{R}^m, Su \leq T_u\} \end{cases} \quad (2.49)$$

onde $R \in \mathfrak{R}^{n_{rs} \times n}$, $S \in \mathfrak{R}^{n_{rn} \times m}$, $T_x \in \mathfrak{R}^{n_{rs}}$, $T_u \in \mathfrak{R}^{n_{rn}}$. Estas restrições, podem também ser expressadas como segue (BEMPORADI; MORARI (1999)):

$$\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{C}, \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n+m}, Rx + Su \leq T \right\} \quad (2.50)$$

O conjunto \mathcal{C} , representa a região de valores válidos ou admissíveis, ou domínio de validade de estado e controle. Note-se que as restrições descritas na seção 2.7.1 podem ser genericamente colocadas na forma (2.50).

Outras restrições podem apresentar-se como funções vetoriais nas variáveis de estado e controle. Estas restrições podem ser expressadas como segue:

$$g(x, u) \leq \Lambda_{un}, \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{C} \quad (2.51)$$

onde $g(x, u) : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^{n_{rg}}$ e $\Lambda_{un} \in \mathfrak{R}^{n_{rg}}$.

Caso particular das restrições funcionais anteriores são as seguintes:

$$h(x, u) = \Lambda_{eq}, \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{C} \quad (2.52)$$

onde $h(x, u) : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^{n_{rh}}$ e $\Lambda_{eq} \in \mathfrak{R}^{n_{rh}}$

As primeiras são chamadas *restrições de desigualdade*, e as segundas *restrições de igualdade*. Λ_{un} e Λ_{eq} são vetores e $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$ funções vetoriais lineares ou não lineares. Exemplos desta restrições vão se apresentar na modelamento de sistemas mistos, no próximo capítulo.

2.8 O Problema de Otimização

2.8.1 Formulação

Finalmente, formula-se o problema de otimização do controle preditivo como o de calcular a seqüência de ações de controle \mathcal{U} a ser aplicada ao sistema que minimize a função de custo J_x (para o caso de preditor de estado), sujeito às restrições de conjunto e funcionais que corresponderem.

Formalmente, o problema de otimização resume-se a obter

$$\min_{\mathcal{U}} 0.5\mathcal{U}^T H\mathcal{U} + f^T\mathcal{U} + G \quad (2.53)$$

sob

$$\begin{cases} \hat{x}(t+j|t) \in \Omega \\ u(t+j) \in \mathcal{U} \\ g(\hat{x}(t+j|t), u(t+j)) \leq \Lambda_{un} \\ h(\hat{x}(t+j|t), u(t+j)) = \Lambda_{eq} \end{cases} \quad \forall j = 1, 2, \dots, N, \quad \forall i = 0, \dots, N_u - 1 \quad (2.54)$$

Uma análise similar é válida para o caso de trabalhar-se com o preditor de saída.

2.8.2 Solução

Em geral, as restrições que se apresentam são lineares. Neste caso (função de custo quadrática e restrições lineares), o problema de otimização se reduz a um de *Programação Quadrática*, ou *QP* (CAMACHO; BORDONS (2000)). Vários algoritmos de programação quadrática tem sido desenvolvidos, baseados em métodos de aproximação mencionados a seguir (CAMACHO; BORDONS (2000), LUENBERGER (1973)).

- Métodos das Direções Factíveis (*Feasible Directions*) ou métodos do Ponto Interior (*Interior Point*)

Seja $f(u)$ a função a minimizar, e seja u^k um ponto factível (pontos factíveis são aqueles para os quais todas as restrições são satisfeitas). A partir de u^k , a idéia é determinar uma direção d_k de forma tal que um passo suficientemente pequeno a partir de u^k na direção d_k resulte num ponto u^{k+1} factível para o qual resulte $f(u^{k+1}) < f(u^k)$. Diz-se que d_k é uma direção factível. Executando esta operação iterativamente, chega-se ao mínimo da função. Existem vários métodos para a geração de direções factíveis. Um deles é o Método da Projeção do Gradiente de Rosen.

- Métodos Pivotantes (*Pivoting*) ou métodos dos Conjuntos Ativos (*Active Sets*)

Um dos métodos mais conhecidos e utilizados para a solução de problemas de programação linear (LP), é o Simplex. Uma grande vantagem destes métodos é que são fáceis de programar e, em um número finito de passos encontram a solução ou indicam a não existência de soluções factíveis. A minimização de funções quadráticas sujeitas a restrições lineares pode ser realizadas com estes métodos. Um destes métodos reduz o problema QP a um problema de programação linear complementar.

3 SISTEMAS MISTOS

3.1 Introdução

Na prática, nem sempre apresentam-se processos regidos exclusivamente por dinâmicas contínuas. Em geral um processo apresenta variáveis de evolução contínua e dispositivos com comportamento discreto, mais especificamente ON-OFF. Muitos sistemas apresentam, também, proposições lógicas como variáveis de tomada de decisão, por exemplo, em proposições do tipo “*se-então-senão*” (*if-then-else*). Estas variáveis também têm um comportamento lógico (verdadeiro ou falso). Embora em muitos casos os comportamentos contínuo e discreto são facilmente desacopláveis, em sistemas com certo grau de complexidade, onde ambas dinâmicas interagem fortemente, esta tarefa não resulta simples. Os sistemas que envolvem estes dois tipos de dinâmicas, são chamados *Sistemas Mistos* ou *Híbridos*. Em geral, um sistema híbrido pode ser considerado como um sistema hierárquico, onde o sistema contínuo (geralmente modelado através de um conjunto de equações diferenciais) encontra-se no nível hierárquico mais baixo e o sistema lógico, num nível superior, supervisiona o sistema total, impondo, por exemplo, condições de operação, e também resolvendo situações de conflito. Porém, em certos sistemas, esta divisão ou “independência” entre sistema contínuo e sistema discreto não é tão evidente devido à forte interrelação entre variáveis contínuas e variáveis lógicas (variáveis contínuas representando grandezas físicas e variáveis lógicas representando proposições ou expressões lógicas e restrições em geral)(BEMPORADI; MORARI (1999), RAMAN; GROSSMANN (1991), RAMAN; GROSSMANN (1992)).

Neste capítulo será apresentada, primeiramente, através de exemplos, uma forma intuitiva de modelar sistemas mistos, para passar, então, à apresentação de um método sistemático.

3.2 Exemplos de sistemas envolvendo variáveis contínuas e lógicas

A seguir são apresentados dois exemplos. O primeiro é um sistema de controle de nível de um reservatório com duas válvulas ON-OFF de saída, onde a ação de controle (vazão de entrada) é uma variável contínua. No segundo exemplo, é analisado um sistema de controle de temperatura de um forno elétrico, aquecido por quatro resistências acionadas por comandos ON-OFF independentes.

Exemplo 3.2.1 Na prática, sistemas complexos são muitas vezes controlados através de estratégias clássicas do tipo multi-malha, aliadas ou não a técnicas de desacoplamento.

Cada uma das malhas de controle, tipicamente utiliza um algoritmo PID para o controle, sintonizado para um determinado ponto de trabalho. Para dar um exemplo ilustrativo, considere um sistema de controle de nível de líquido de um reservatório onde a variável manipulada é a vazão de entrada. O sistema resultante tem uma configuração cascata, onde se tem a malha interna de vazão, sendo geralmente a variável manipulada o posicionamento de uma válvula de controle (ou velocidade de uma bomba) baseado na referência indicada pela malha externa e que é a variável manipulada da malha de nível.

Considerando que a variável manipulada seja a vazão de entrada e a de processo o nível de líquido no reservatório, a função de transferência que modela a dinâmica do sistema é a seguinte:

$$G(s) = \frac{1/C}{s + 1/RC} \quad (3.1)$$

onde C é a capacitância, igual à seção transversal do reservatório, e R é a resistência da válvula ON-OFF de saída. Em regime estacionário, $R = \frac{H}{Q_o}$, sendo H e Q_o o nível no reservatório e a vazão passando pela válvula de saída, respectivamente. O projeto do controlador para este processo será feito com base nesta dinâmica. Suponha-se agora que outra válvula de saída ON-OFF com a mesma resistência à passagem de líquido R é acoplada ao reservatório (estas válvulas poderiam estar sendo utilizadas, por exemplo, como ações de controle para um enchimento ou esvaziamento mais rápido do tanque). A constante de tempo equivalente resulta ser a metade como assim também o ganho em regime permanente. Na figura 3.1 se apresentam as respostas ao degrau unitário para as duas dinâmicas considerando $C = 0.5m^2$ e $R = 50 \frac{s}{m^2}$. Resulta evidente que o ajuste do PID feito para uma dinâmica não resultará no mesmo desempenho para a outra. Assim, se for feito o ajuste para o caso de somente uma válvula aberta, quando a segunda for aberta, o controlador não conseguirá levar o sistema ao equilíbrio no tempo de resposta especificado. Se pelo contrário, a sintonia da malha for feita para o situação das duas válvulas abertas, quando uma delas for fechada, o controlador levará o sistema na direção do equilíbrio com uma velocidade tal que, em sistemas de maior ganho, possivelmente apresentará um sobrepasso considerável, e oscilações de amplitude também consideráveis até alcançar o equilíbrio.

Como se verá na seqüência, o apresentado é um típico exemplo de um sistema lógico-dinâmico misto (MLD: mixed logical dynamical), ou simplesmente sistema misto ou híbrido.

Utilizando os valores indicados para C e R , introduz-se uma variável lógica auxiliar $\delta(t)$ a qual assume o valor 1 quando somente uma válvula está aberta e o valor 0 quando as duas válvulas estão abertas. A função de transferência, levando em conta a abertura ou o fechamento da válvula ON-OFF, pode ser então descrita da seguinte forma:

$$G_1(s) = \frac{2}{s + 0.04} \delta(t) + \frac{2}{s + 0.08} (1 - \delta(t)) \quad (3.2)$$

Outra possível representação é a seguinte:

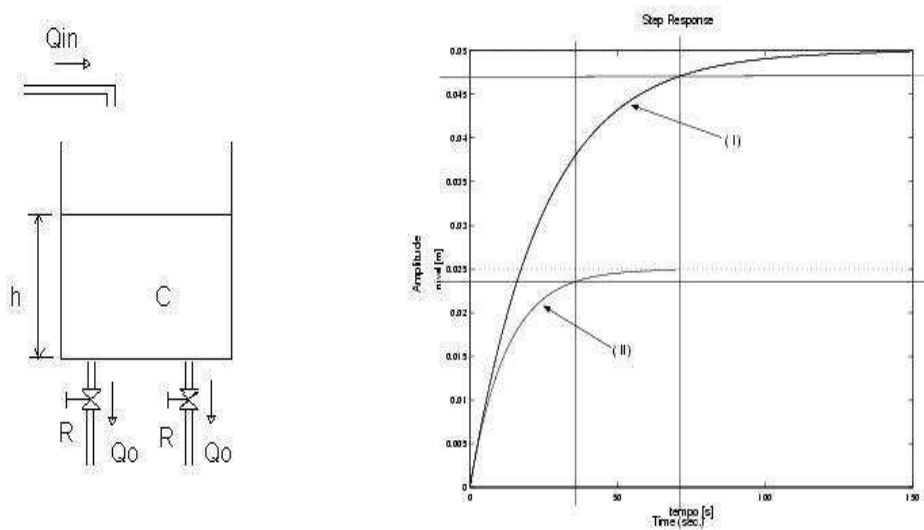


Figura 3.1: Sistema de nível: resposta ao degrau unitário para os casos (I) Uma válvula aberta (II) Duas válvulas abertas

$$G_2(s) = \frac{2}{s + (0.08 - 0.04\delta(t))} \quad (3.3)$$

O modelo de espaço de estado do sistema resulta em

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} -0.04x(t) + u(t) & \leftrightarrow \delta(t) = 1 \\ -0.08x(t) + u(t) & \leftrightarrow \delta(t) = 0 \end{cases} \\ y(t) = 2x(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

A variável lógica pode também ser introduzida no modelo da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dot{x} = (-0.04x(t) + u(t)) \delta(t) + (-0.08x(t) + u(t)) (1 - \delta(t)) \\ y(t) = 2x(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

ou ainda da seguinte:

$$\begin{cases} \dot{x} = (-0.08 + 0.04\delta(t)) x(t) + u(t) \\ y(t) = 2x(t) \end{cases} \quad (3.6)$$

Em quaisquer das representações, resulta claro que o sistema tem um comportamento dinâmico não linear (no caso, linear por partes), evidenciada pela introdução de variável

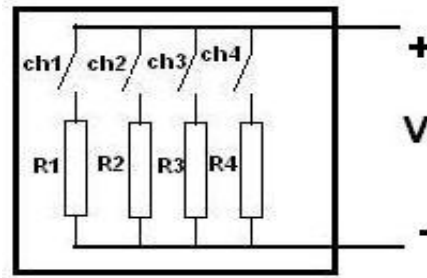


Figura 3.2: Forno elétrico

binária auxiliar $\delta(t)$.

Exemplo 3.2.2 Considere-se agora um forno elétrico representado esquematicamente na figura 3.2, e seja seu modelo no espaço de estado o seguinte:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.7)$$

Suponha-se que todas as resistências sejam iguais a R . A potência fornecida ao forno têm valores discretos dentro do conjunto de valores

$$\left\{ 0 \quad (V^2/R) \quad (2V^2/R) \quad (3V^2/R) \quad (4V^2/R) \right\} = \left\{ 0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \right\}$$

Considere-se também que se deseja controlar a temperatura de forma a atingir um determinado objetivo de controle (por exemplo, mantê-la dentro de uma determinada faixa).

São introduzidas as variáveis lógicas $\delta_1(t)$, $\delta_2(t)$, $\delta_3(t)$, $\delta_4(t)$ que assumem o valor $\delta_i = 1, i = 1, 2, 3, 4$ para a proposição [*i* chaves fechadas = verdadeiro] e $\delta = 0$ para o caso contrário. Mais especificamente, define-se

$$[\text{chaves } 1 \text{ a } i \text{ fechadas}] = \text{verdadeiro} \rightarrow \delta_i(t) = 1 \quad (3.8)$$

Assim a variável manipulada pode ser descrita da seguinte forma:

$$u(t) = \delta_1(t)u_1 + \delta_2(t)u_2 + \delta_3(t)u_3 + \delta_4(t)u_4 \quad (3.9)$$

Pode-se concluir então que as variáveis lógicas assim definidas neste caso, resultam ser variáveis de decisão (variáveis de controle ou manipuladas). Porém, o modelo ainda não está completo. Falta expressar matematicamente a condição seguinte:

“somente um único $\delta_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$ pode assumir o valor 1 ou todos podem ser 0”

A forma mais intuitiva de representar matematicamente esta restrição é a seguinte:

$$\delta_1(t) + \delta_2(t) + \delta_3(t) + \delta_4(t) \leq 1 \quad (3.10)$$

Validando a desigualdade anterior, esta é cumprida se e somente se um único $\delta_i(t)$ é 1 ou se todos são nulos.

3.3 Tipos de variáveis

A partir dos exemplos da seção anterior, pode-se concluir que, além de variáveis dinâmicas contínuas, faz-se necessária a introdução de outras variáveis para representar o comportamento de sistemas MLD:

- Variáveis lógicas “de decisão”: são variáveis que fazem parte do processo e que podem ser manipuladas, respondendo a necessidades do próprio processo ou dos objetivos de controle (e.g. no caso do controle ótimo de um sistema envolvendo atuadores ON-OFF que, conforme às necessidades, serão acionados ou não).
- Variáveis lógicas auxiliares: variáveis que são associadas a um evento ou proposição lógica (e.g. à expressão [temperatura do produto $\geq 60^\circ C$] lhe será associada uma variável lógica com valor “1” se a expressão resultar verdadeira e “0” no caso contrário).
- Variáveis contínuas auxiliares: são definidas na etapa de modelamento e geralmente são o produto de uma variável contínua do sistema (estado, saída ou variável manipulada) com uma variável lógica auxiliar (e.g. $z(t) = \delta(t)x(t)$, onde $x(t)$ e $\delta(t)$ são, respectivamente, a variável contínua e a lógica).

Ressalva-se que o uso da expressão “variáveis contínuas” faz referência a variáveis que representam grandezas físicas, em tempo contínuo ou discreto.

3.4 Representação algébrica de expressões lógicas simples

A incorporação de expressões lógicas num modelo paramétrico, requer uma expressão matemática das mesmas. Nesta seção apresenta-se um procedimento sistemático para a obtenção de ditas expressões.

As expressões lógicas podem ter um de dois estados: verdadeiro ou falso. Resulta evidente a característica binária das mesmas. A uma expressão lógica P pode ser-lhe associada uma variável lógica (binária) δ , de forma que se P é verdadeira, $\delta = 1$. A seguir, algumas expressões lógicas e suas correspondentes expressões algébricas serão apresentadas, conforme proposto em (RAMAN; GROSSMANN (1991) BEMPORADI; MORARI (1999)).

- OR lógica

Considerem-se duas proposições lógicas P_1 e P_2 e sejam δ_1 e δ_2 as respectivas variáveis lógicas ou binárias a elas associadas. Seja P_3 uma terceira expressão lógica definida por:

$$P_3 \doteq P_1 \vee P_2 \quad (3.11)$$

Esta expressão lógica é equivalente à expressão algébrica seguinte:

$$\delta_1 + \delta_2 \geq 1 \quad (3.12)$$

Observe que os possíveis estados de P_3 são

$$\begin{array}{c|c|c} P_1 \setminus P_2 & F & V \\ \hline F & F & V \\ \hline V & V & V \end{array} \quad (3.13)$$

e os possíveis valores da soma $\delta_1 + \delta_2$ são:

$$\begin{array}{c|c|c} \delta_1 \setminus \delta_2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array} \quad (3.14)$$

Vê-se claramente que se P_3 é verdadeira, então a soma $\delta_1 + \delta_2$ é igual a 1 ou 2, ou seja, é maior ou igual que 1.

- AND lógica

Se a expressão lógica

$$P_3 \doteq P_1 \wedge P_2 \quad (3.15)$$

é verdadeira, então δ_1 e δ_2 são ambos diferentes de 0, ou equivalentemente

$$\delta_1 = 1; \delta_2 = 1 \quad (3.16)$$

ou

$$\delta_1 + \delta_2 = 2 \quad (3.17)$$

- OR exclusiva

A expressão

$$P_3 \doteq P_1 \oplus P_2 \quad (3.18)$$

é equivalente a

$$\delta_1 + \delta_2 = 1 \quad (3.19)$$

- Negação

$$P_3 \doteq \neg P \quad (3.20)$$

equivale a

$$\delta = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - \delta = 1 \quad (3.21)$$

- Implicação

A expressão

$$P_3 = P_1 \rightarrow P_2 \quad (3.22)$$

é equivalente a

$$\delta_1 - \delta_2 \leq 0 \quad (3.23)$$

Observe-se que a implicação, indica que é condição suficiente ser P_1 verdadeira para ser P_2 verdadeira; se P_1 for falsa, o valor a assumir P_2 pode ser qualquer. Define-se, por exemplo que seja verdadeiro. Assim tem-se a seguinte tabela:

$$\begin{array}{c|cc} P_1 \setminus P_2 & F & V \\ \hline F & - & - \\ \hline V & F & V \end{array} \quad (3.24)$$

ou

$$\begin{array}{c|cc} P_1 \setminus P_2 & F & V \\ \hline F & V & V \\ \hline V & F & V \end{array} \quad (3.25)$$

Os possíveis valores da diferença $\delta_1 - \delta_2$ são:

$$\begin{array}{c|cc} \delta_1 \setminus \delta_2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \quad (3.26)$$

- Equivalência

A expressão

$$P_1 \leftrightarrow P_2 \quad (3.27)$$

é equivalente a

$$\delta_1 - \delta_2 \leq 0; \delta_2 - \delta_1 \leq 0 \quad (3.28)$$

3.4.1 Procedimento sistemático de modelamento de expressões lógicas

O método de modelamento a utilizar, parte da expressão normal conjuntiva da expressão lógica. O procedimento de conversão, consiste de três passos (RAMAN; GROSSMANN (1991)):

- Passo 1: substituir implicação por sua expressão disjuntiva:

$$P_1 \rightarrow P_2 \leftrightarrow \neg P_1 \vee P_2 \quad (3.29)$$

- Passo 2: distribuir a negação aplicando o teorema de De Morgan:

$$\neg(P_1 \wedge P_2) \leftrightarrow \neg P_1 \vee \neg P_2 \quad (3.30)$$

$$\neg(P_1 \vee P_2) \leftrightarrow \neg P_1 \wedge \neg P_2 \quad (3.31)$$

- Passo 3: Distribuir OR lógicas sobre AND lógicas, utilizando a propriedade:

$$(P_1 \wedge P_2) \vee P_3 \leftrightarrow (P_1 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_3) \quad (3.32)$$

Executados estes passos, chega-se a uma expressão do tipo $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_p$; substituída cada Q_i por sua equivalência algébrica, obtém-se um conjunto de desigualdades (considerando que uma igualdade pode ser expressada como duas desigualdades) que devem ser satisfeitas para que o conjunto de expressões lógicas seja verdadeiro. Este conjunto de expressões representam condições ou *restrições* impostas ao sistema.

Exemplo 3.4.1 *Seja a proposição lógica*

$$P_1 \vee P_2 \vee P_3 \rightarrow P_4 \quad (3.33)$$

Aplicando o procedimento descrito se obtém a seguinte seqüência de equivalências:

$$\neg(P_1 \vee P_2 \vee P_3) \vee P_4 \quad (3.34)$$

$$(\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3) \vee P_4 \quad (3.35)$$

$$(\neg P_1 \vee P_4) \wedge (\neg P_2 \vee P_4) \wedge (\neg P_3 \vee P_4) \quad (3.36)$$

Considerando que $\delta_i, i = 1 \dots 4$ são as respectivas variáveis lógicas associadas a $P_i, i = 1 \dots 4$, o conjunto de expressões algébricas equivalente é o seguinte:

$$\begin{cases} -\delta_1 + \delta_4 \geq 0 \\ -\delta_2 + \delta_4 \geq 0 \\ -\delta_3 + \delta_4 \geq 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

3.5 Representação algébrica de expressões lógicas complexas

Os resultados obtidos na subseção anterior aplicam-se a sistemas lógicos. A partir destes, serão deduzidos outros que vinculem os comportamentos contínuo e lógico dos sistemas mistos ou híbridos (BEMPORADI; MORARI (1999)).

Seja $f(x) : \mathfrak{R}^n \mapsto R$ uma função linear num conjunto limitado Ω e seja $x \in \Omega$. Definem-se:

$$M \doteq \max_{x \in \Omega} f(x) \quad (3.38)$$

$$m \doteq \min_{x \in \Omega} f(x) \quad (3.39)$$

Considerando a expressão lógica

$$[f(x) \leq 0] \quad (3.40)$$

verificam-se as seguintes equivalências:

- $[f(x) \leq 0] \wedge [\delta = 1] \leftrightarrow f(x) - \delta \leq -1 + m(1 - \delta)$

Quando $\delta = 1$, a desigualdade acima resulta $f(x) - 1 \leq -1$, situação verificada se e somente se $f(x) \leq 0$. Quando $\delta = 0$, resulta $f(x) \leq -1 + m$, resultando necessário que $f(x)$ seja menor que seu mínimo, não verificando-se, nesta situação, a desigualdade.

- $[f(x) \leq 0] \vee [\delta = 1] \leftrightarrow f(x) - \delta \leq M\delta$

Se $f(x) \leq 0$, a desigualdade resulta válida para qualquer valor de δ ; se $\delta = 1$, verifica-se tanto para valores positivos ou negativos de $f(x)$. Se $f(x) > 0$ e $\delta = 0$, a desigualdade não se verifica.

- $\neg[f(x) \leq 0] \leftrightarrow f(x) \geq 0$

- $[f(x) \leq 0] \rightarrow [\delta = 1] \leftrightarrow f(x) \geq m\delta$

Pode-se ver que se $f(x) \leq 0$, a única forma de verificar a desigualdade é com $\delta = 1$. Neste caso, a expressão lógica é também equivalente à seguinte:

$$f(x) \leq M(1 - \delta) \quad (3.41)$$

Sendo $[f(x) \leq 0]$, a expressão anterior verifica-se somente se $\delta = 1$.

- $[f(x) \leq 0] \leftrightarrow [\delta = 1] \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M(1 - \delta) \\ f(x) \geq m\delta \end{cases}$

Se $f(x) \leq 0$, para $\delta = 0$, a segunda desigualdade não se verifica; se $\delta = 1$, ambas se verificam. Analogamente, se $\delta = 1$, a primeira desigualdade não é verificada para $f(x) > 0$, e ambas são verificadas se $f(x) \leq 0$.

- Para as variáveis auxiliares, resultantes do produto de variáveis contínuas e lógicas, verifica-se que:

$$y = \delta f(x) \leftrightarrow \begin{cases} y \leq M\delta \\ y \geq m\delta \\ y \leq f(x) - m(1 - \delta) \\ y \geq f(x) - M(1 - \delta) \end{cases} \quad (3.42)$$

Se $\delta = 0$, resulta $y = 0$, e o sistema acima resulta

$$\begin{cases} y \leq 0 \\ y \geq 0 \\ 0 \leq f(x) - m \\ 0 \geq f(x) - M \end{cases} \quad (3.43)$$

e portanto, $y = 0$, e $m \leq f(x) \leq M$.

Se $\delta = 1$, tem-se que:

$$\begin{cases} y \leq M \\ y \geq m \\ y \leq f(x) \\ y \geq f(x) \end{cases} \quad (3.44)$$

ou seja $y = f(x)$ e $m \leq y \leq M$

3.6 Modelamento de Sistemas Mistos

Nesta seção serão obtidos os modelos mistos para os três tipos básicos de sistemas:

- **Caso 1: Sistema com múltiplas dinâmicas e eventos externos**

Trata-se de um sistema que possui diferentes dinâmicas, produzindo-se a passagem ou chaveamento de uma para outra na ocorrência de determinado evento ou eventos discretos externos. Ditos eventos apresentam-se de forma aleatória. Por exemplo no sistema de nível do exemplo (3.2.1), as válvulas abrem e fecham aleatoriamente: a operação das válvulas neste caso é representada por respectivas variáveis lógicas auxiliares, (por exemplo, num sistema de enchimento não se têm conhecimento do momento de abertura/fechamento de válvulas).

- **Caso 2: Sistema com múltiplas dinâmicas e eventos internos**

Diferentemente do caso anterior, os eventos não se apresentam aleatoriamente, mas dependem da evolução do sistema. Geralmente, atendendo ao objetivo de controle, os chaveamentos dependerão da região de operação (por exemplo, num sistema de nível se o mesmo superar um determinado valor, uma válvula será aberta). Para resultar mais compreensível, a diferença entre este caso e o anterior, observe que no primeiro um evento externo gera o chaveamento de dinâmica e no caso 2 a evolução do sistema gera um evento interno.

- **Caso 3: Sistema com variáveis de controle lógicas**

Atendendo ao objetivo de controle, os chaveamentos de componentes ON-OFF são ações de controle. Um exemplo desta situação é o forno apresentado na seção 3.2.2.

3.6.1 Caso 1

A primeira das possibilidades para as variáveis lógicas, corresponde a variáveis lógicas auxiliares que comutam aleatoriamente gerando, desta forma, modificações na dinâmica do sistema. Seja então o sistema descrito pelas equações de estado:

$$x(t+1) = \begin{cases} A_1x(t) + B_1u(t) & \text{se } \delta_1(t) = 1 \\ A_2x(t) + B_2u(t) & \text{se } \delta_2(t) = 1 \\ \vdots \\ A_qx(t) + B_su(t) & \text{se } \delta_q(t) = 1 \end{cases} \quad (3.45)$$

Claro está que se $\delta_i = 1 \Rightarrow \delta_j = 0, \forall i \neq j$, situação esta indicada algebricamente introduzindo a restrição seguinte:

$$\sum_{i=1}^q \delta_i = 1 \quad (3.46)$$

Como as variáveis auxiliares aqui introduzidas são booleanas, completa-se este modelo com as restrições de conjunto

$$\delta_i \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, q. \quad (3.47)$$

A equação(3.45) pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^q [A_i x(t) + B_i u(t)] \delta_i(t) \quad (3.48)$$

Resumindo, o modelo híbrido deste tipo de sistema misto resulta:

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^q [A_i x(t) + B_i u(t)] \delta_i(t) \\ \sum_{i=1}^q \delta_i = 1 \\ \delta_i \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, q \end{cases} \quad (3.49)$$

3.6.2 Caso 2

A representação em equações de estado deste caso é, em princípio, igual à do caso 1, com a diferença de que as variáveis lógicas (eventos discretos) chaveiam em conformidade com a região de operação, resultado da evolução do sistema (BEMPORADI; MORARI (1999)). Assim, tem-se:

$$x(t+1) = \begin{cases} A_1 x(t) + B_1 u(t) \leftrightarrow [x^T \quad u^T]^T \in \mathcal{C}_1 \\ A_2 x(t) + B_2 u(t) \leftrightarrow [x^T \quad u^T]^T \in \mathcal{C}_2 \\ \vdots \\ A_q x(t) + B_q u(t) \leftrightarrow [x^T \quad u^T]^T \in \mathcal{C}_q \end{cases} \quad (3.50)$$

onde $\mathcal{C}_i = \{ [x^T \quad u^T]^T \in \mathbb{R}^{n+m}, R_i x(t) + S_i u(t) \leq T_i \}, i = 1, 2, \dots, q$, são conjuntos compactos que definem as regiões de operação no espaço de estados/controles e $R_i \in \mathbb{R}^r \times n$, $S_i \in \mathbb{R}^r \times m$ e $T_i \in \mathbb{R}^r$.

Associam-se, então, variáveis lógicas auxiliares a cada região de operação como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1(t) = 1 \leftrightarrow [x^T \quad u^T]^T \in \mathcal{C}_1 \\ \delta_2(t) = 1 \leftrightarrow [x^T \quad u^T]^T \in \mathcal{C}_2 \\ \vdots \\ \delta_q(t) = 1 \leftrightarrow [x^T \quad u^T]^T \in \mathcal{C}_q \end{array} \right. \quad (3.51)$$

Para as discussões a seguir, considera-se a condição de exclusão

$$\bigoplus_{i=1}^q [\delta_i = 1] \quad (3.52)$$

Observe-se que a condição lógica anterior, é equivalente à expressão algébrica $\sum_{i=1}^q \delta_i = 1$. Definindo

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^q \mathcal{C}_i \quad (3.53)$$

da condição “ou-exclusiva”, resulta

$$\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad (3.54)$$

Trabalhando algebricamente de forma similar ao primeiro caso, tem-se que

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^q [A_i x(t) + B_i u(t)] \delta_i(t) \quad (3.55)$$

Definem-se então as seguintes variáveis auxiliares (BEMPORADI; MORARI (1999)):

$$z_i(t) = [A_i x(t) + B_i u(t)] \delta_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.56)$$

Logo, a evolução do estado pode ser re-escrita como segue:

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^q z_i(t) \quad (3.57)$$

Sejam agora

$$M^j = \max_i \left\{ \max_{[x^T \ u^T]^T \in \mathcal{C}_i} \{A_i^j x(t) + B_i^j u(t)\} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.58)$$

e

$$m^j = \min_i \left\{ \min_{[x^T \ u^T]^T \in \mathcal{C}_i} \{A_i^j x(t) + B_i^j u(t)\} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.59)$$

onde o supra-índice $j = 1, 2, \dots, n$ refere-se às linhas da matrizes. Definem-se os vetores

$$M = [M^1 \quad M^2 \quad \dots \quad M^n]^T \quad (3.60)$$

e

$$m = [m^1 \quad m^2 \quad \dots \quad m^n]^T \quad (3.61)$$

As seguintes restrições deverão, então, ser verificadas, conforme (3.42):

$$\begin{cases} z_i(t) \leq \delta_i(t)M \\ z_i(t) \geq \delta_i(t)m \\ z_i(t) \leq A_i x(t) + B_i u(t) - m(1 - \delta_i(t)) \\ z_i(t) \geq A_i x(t) + B_i u(t) - M(1 - \delta_i(t)) \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, q \quad (3.62)$$

Ressalva-se que os operadores “ \leq ” e “ \geq ” referem-se a desigualdades elemento a elemento.

Para completar o modelo, falta introduzir a dinâmica das passagens ou chaveamentos entre regiões de operação. A incorporação das condições de chaveamento - que não são outra coisa mais do que proposições lógicas do tipo “Se expressão lógica [Proposição I] é verdadeira, então a região de operação do sistema é [Região I]” - será feita através de desigualdades algébricas que passarão a ser restrições funcionais a serem acrescentadas ao modelo híbrido. O procedimento geral de modelamento destas situações é apresentado a seguir.

A validação de uma proposição lógica será representada por uma variável lógica auxiliar $\delta = 1$. Em controle, estas proposições geralmente são do tipo

$$[f(x, u, t, T, \dots) \leq 0] \quad (3.63)$$

As variáveis destas funções são o estado (x), a variável manipulada (u), o tempo (t), o tempo acumulado (T), etc.. Definem-se, assim, regiões de operação. A cada uma destas é associada uma variável lógica auxiliar, de modo que

$$[f(x, u, t, T, \dots) \leq 0] \leftrightarrow \delta = 1. \quad (3.64)$$

A seguinte expressão algébrica é equivalente à expressão anterior (BEMPORADI; MORARI (1999)):

$$f(x, u, t, T, \dots) \geq \tilde{m}\delta, \quad (3.65)$$

e

$$f(x, u, t, T, \dots) \leq \tilde{M}(1 - \delta), \quad (3.66)$$

onde $\tilde{m} \doteq \min_{\{[x^T \ u^T]^T, t, T, \dots\} \in \tilde{\mathcal{C}}} f(x, u, t, T, \dots)$ e $\tilde{M} \doteq \max_{\{[x^T \ u^T]^T, t, T, \dots\} \in \tilde{\mathcal{C}}} f(x, u, t, T, \dots)$,

sendo $\tilde{\mathcal{C}}$ o domínio de validade do conjunto de variáveis $\{[x^T \ u^T]^T, t, T, \dots\}$. Para um melhor entendimento, são apresentados, a seguir, alguns exemplos.

Exemplo 3.6.1 *Considere que a variável de processo é tal que $y(t) \in [0, 2]$ e que duas regiões de operação estão definidas pela proposição $[y(t) \leq 0.5]$. Associam-se a cada uma destas regiões variáveis binárias de modo tal que*

$$\begin{cases} [y(t) \leq 0.5] \rightarrow \delta_1(t) = 1 \\ [y(t) > 0.5] \rightarrow \delta_2(t) = 1 \\ \delta_1(t) + \delta_2(t) = 1 \end{cases} \quad (3.67)$$

Reescrevendo as expressões anteriores, tem-se que:

$$\begin{cases} [y(t) - 0.5 \leq 0] \rightarrow \delta_1(t) = 1 \\ [-y(t) + 0.5 < 0] \rightarrow \delta_2(t) = 1 \\ \delta_1(t) + \delta_2(t) = 1 \end{cases} \quad (3.68)$$

o que é equivalente a:

$$\begin{cases} y(t) - 0.5 \geq -0.5\delta_1(t) \\ -y(t) + 0.5 > -1.5\delta_2(t) \\ \delta_1(t) + \delta_2(t) = 1 \end{cases} \quad (3.69)$$

Verificando agora com os valores mais acima propostos de $y(t)$

- $y(t) = 0.2$

$$\begin{cases} -0.3 \geq -0.5\delta_1(t) \\ 0.3 > -1.5\delta_2(t) \\ \delta_1(t) + \delta_2(t) = 1 \end{cases} \quad (3.70)$$

As condições anteriores verificam-se se e somente se $\delta_1(t) = 1$ e $\delta_2(t) = 0$.

- $y(t) = 1$

$$\begin{cases} 0.5 \geq -0.5\delta_1(t) \\ -0.5 > -1.5\delta_2(t) \\ \delta_1(t) + \delta_2(t) = 1 \end{cases} \quad (3.71)$$

As condições anteriores verificam-se se e somente se $\delta_1(t) = 0$ e $\delta_2(t) = 1$.

A seguir apresenta-se genericamente a modelamento da dinâmica dos chaveamentos entre regiões de operação. Considere-se um sistema com “ q ” regiões de operação tais que:

$$\begin{cases} S_i x(t) + R_i u(t) \leq T_i \rightarrow \delta_i(t) \\ \bigoplus_{i=1}^q [\delta_i(t) = 1], \quad i = 1, \dots, q \end{cases} \quad (3.72)$$

onde

$$\begin{aligned} M_i^* &= [M_i^1 \ M_i^2 \ \dots \ M_i^{l_i}] \\ M_i^j &= \max_{x \in \mathcal{C}} (S_i^j x(t) + R_i^j u(t) - T_i^j), \quad j = 1, 2, \dots, l_i \end{aligned} \quad (3.73)$$

Aplicando a equivalência (3.41) à expressão anterior, resulta em:

$$\begin{cases} S_i x(t) + R_i u(t) - T_i \leq M_i^* (1 - \delta_i(t)), \quad i = 1 \dots q \\ \sum_{i=1}^q \delta_i(t) = 1 \end{cases} \quad (3.74)$$

onde $M_i^* = \max_{x \in \mathcal{C}} (S_i x(t) + R_i u(t) - T_i)$.

Exemplo 3.6.2 Considere o sistema do exemplo 3.2.1. Tal sistema tem duas regiões de operação e, portanto, uma única superfície de chaveamento “ T ”. Seja $T = 2$ e considere a faixa de operação do estado $x(t) \in [0, 5]$ e do sinal de controle $u(t) \in [0, 20]$. Resultam, desta forma, $S_1 = 1$, $S_2 = -1$, $R_1 = R_2 = 0$, $T_1 = 2$, $T_2 = -2$, $M_1 = 3$ e $M_2 = 2$. O conjunto de inequações que definem as restrições que determinam a região de operação, para os valores indicados, são as seguintes:

$$\begin{cases} x(t) - 2 \leq 3(1 - \delta_1(t)) \\ -x(t) + 2 < 2(1 - \delta_2(t)) \\ \delta_1(t) + \delta_2(t) = 1 \end{cases} \quad (3.75)$$

Em função das variáveis auxiliares, as restrições anteriores resultam:

$$\begin{cases} z_1(t-1) + z_2(t-1) - 2 \leq 3(1 - \delta_1(t)) \\ -z_1(t-1) - z_2(t-1) + 2 \leq 2(1 - \delta_2(t)) \\ \delta_1(t) + \delta_2(t) = 1 \end{cases} \quad (3.76)$$

3.6.2.1 Modelo híbrido

Resumindo, o modelo híbrido de sistemas mistos enquadrados no presente caso, é, genericamente, o seguinte:

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^q z_i(t) \\ \delta_i \in \{0, 1\} \\ z_i(t) \leq \delta_i(t)M \\ z_i(t) \geq \delta_i(t)m \\ z_i(t) \leq A_i x(t) + B_i u(t) - m(1 - \delta_i(t)) \\ z_i(t) \geq A_i x(t) + B_i u(t) - M(1 - \delta_i(t)) \\ S_i x(t) + R_i u(t) - T_i \leq M_i^*(1 - \delta_i(t)) \\ \sum_{i=1}^q \delta_i(t) = 1 \end{cases} \quad \forall i = 1, 2, \dots, q \quad (3.77)$$

3.6.3 Caso 3

Este caso considera a situação na qual os componentes com comportamento ON-OFF, aos quais variáveis lógicas lhes são associadas, são elementos de atuação sobre o sistema, ou seja, variáveis manipuladas. Diferentemente dos casos anteriores, os chaveamentos respondem a necessidades de controle ou graus de liberdade a mais no controle.

As equações de estado do sistema são as seguintes:

$$x(t+1) = Ax(t) + B_u u_u(t) + B_\delta u_\delta(t) \quad (3.78)$$

Nesta equação aparecem os vetores de ações de controle $u_u(t)$, que contém as variáveis manipuladas contínuas, e $u_\delta(t)$, que contém as discretas, com suas respectivas matrizes de controle. Generalizando o resultado obtido no exemplo 3.2.2, seja:

$$u_\delta(t) \in \{u_{\delta_1}, u_{\delta_2}, \dots, u_{\delta_r}\} \quad (3.79)$$

Logo, associando variáveis lógicas $\delta_1(t), \delta_2(t), \dots, \delta_r(t)$, aos correspondentes valores discretos acima indicados, pode-se expressar:

$$u_\delta(t) = u_{\delta_1}\delta_1(t) + u_{\delta_2}\delta_2(t) + \dots + u_{\delta_r}\delta_r(t) \quad (3.80)$$

Para fazer uma formulação genérica do modelo, deve ser considerado que não necessariamente existe uma condição de exclusão entre todos os elementos de u_δ . No exemplo 3.2.2 as ações de controle correspondem a um único “tipo”: potência elétrica. Outra seria a situação se fosse, por exemplo, necessária a abertura/fechamento de *dampers*. Neste caso ter-se-ia outro “tipo” de ação de controle com a sua própria condição de exclusão. Logo, generalizando, aparecem condições de exclusão entre alguns ou todos os valores assumidos por $u_\delta(t)$. Considere r valores de ações de controle e p grupos de ações de controle com r_l elementos cada uma, e cada um com sua condição de exclusão (o caso particular de exclusão entre os r elementos, corresponde a $r_l = r$). Incorporam-se, então, restrições do tipo

$$\sum_{i=1}^{r_l} \delta_i(t) = 1, \quad r_l \leq r \quad (3.81)$$

onde $\sum_{l=1}^p r_l = r$.

Definindo as matrizes $B = [B_u \quad B_\delta]$ e $u(t) = \begin{bmatrix} u_u(t) \\ u_\delta(t) \end{bmatrix}$, re-escreve-se a equação (3.78):

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ u_\delta(t) = \sum_{i=1}^r u_{\delta_i} \delta_i(t) \\ u(t) = \begin{bmatrix} u_u(t) \\ u_\delta(t) \end{bmatrix} \\ \delta_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, r \\ \sum_{i=1}^{r_1} \delta_i(t) = 1 \\ \sum_{i=r_1+1}^{r_2} \delta_i(t) = 1 \\ \vdots \\ \sum_{i=r_{p-1}+1}^{r_p} \delta_i(t) = 1 \\ \sum_{l=1}^p r_l = r \end{array} \right. \quad (3.82)$$

4 CONTROLE PREDITIVO DE SISTEMAS HÍBRIDOS

4.1 Introdução

No capítulo anterior foram apresentados procedimentos de modelamento de sistemas híbridos. Como foi visto, esta modelamento introduz uma série de restrições sobre as variáveis do sistema. Por outro lado, como foi visto no capítulo 2, o controle preditivo baseado em modelo é uma técnica de controle que permite, com relativa simplicidade, tratar sistemas apresentando restrições sobre variáveis de estado ou controle. Portanto, no presente capítulo é proposta a aplicação da técnica de controle preditivo desenvolvida, a sistemas mistos. Serão estudados os três casos particulares (básicos) de sistemas mistos, a saber:

1. Sistemas de múltiplas dinâmicas e eventos discretos externos.
2. Sistemas de múltiplas dinâmicas e eventos discretos internos.
3. Sistemas com variáveis de controle lógicas.

Para cada um dos casos, será feita a formulação teórica do problema de controle preditivo, e a sua avaliação através de exemplos e simulações.

4.2 Controle preditivo do sistema de múltiplas dinâmicas e eventos discretos externos

Recapitulando, este tipo de sistema corresponde ao caso 1 estudado no capítulo anterior. Neste caso, como a comutação das variáveis lógicas é aleatória, para os efeitos de predição, serão consideradas constantes ao longo do horizonte de predição.

Trabalhando algebricamente a equação (3.48) da seguinte forma,

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^q [A_i \delta_i(t) x(t) + B_i \delta_i(t) u(t)] \quad (4.1)$$

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^q [A_i I_{n \times n} \delta_i(t)] x(t) + \sum_{i=1}^q [B_i I_{m \times m} \delta_i(t)] u(t) \quad (4.2)$$

a mesma pode ser re-escrita matricialmente definindo-se as seguintes matrizes, considerando-se

que $I_{n \times n}$ e $I_{m \times m}$ são, respectivamente, as matrizes identidade de dimensões n e m :

$$\Delta_A(t) = \begin{bmatrix} I_{n \times n} \delta_1(t) \\ I_{n \times n} \delta_2(t) \\ \vdots \\ I_{n \times n} \delta_q(t) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\Delta_B(t) = \begin{bmatrix} I_{m \times m} \delta_1(t) \\ I_{m \times m} \delta_2(t) \\ \vdots \\ I_{m \times m} \delta_q(t) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$A(t) = [A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_q] \Delta_A(t) \quad (4.5)$$

$$B(t) = [B_1 \quad B_2 \quad \cdots \quad B_q] \Delta_B(t) \quad (4.6)$$

Re-escreve-se então a equação de estado como segue:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (4.7)$$

Seria possível, também, se trabalhar com a equação de saída, obtendo-se resultados similares.

O preditor de estado obtido na capítulo 2 é o seguinte:

$$\mathcal{X}_p = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u \quad (4.8)$$

Observe que neste caso a matriz \mathcal{A} será composta considerando-se que $A(t) = A$, ou seja, a matriz dinâmica será suposta constante durante todo o horizonte de predição, e igual ao valor de $A(t)$, que por sua vez, dependerá do valor conhecido ou medido de δ no instante t . A função de custo a utilizar é a seguinte, conforme obtido no capítulo 2 (2.23):

$$J_x(\mathcal{U}) = 0.5 \mathcal{U}^T (\mathcal{B}^T Q_x \mathcal{B} + Q_u) \mathcal{U} + (x^T(t) \mathcal{A}^T - \mathcal{X}_{ref}^T) Q_x \mathcal{B} \mathcal{U} + 0.5 (x(t)^T \mathcal{A}^T - \mathcal{X}_{ref}^T) Q_x (\mathcal{A}x(t) - \mathcal{X}_{ref}) \quad (4.9)$$

a qual é uma função do tipo

$$J = 0.5\mathcal{U}^T H\mathcal{U} + f^T\mathcal{U} + G \quad (4.10)$$

Como os chaveamentos das variáveis lógicas são aleatórios, e seu valor é conhecido ou medido a cada instante de amostragem, considera-se que o mesmo é constante ao longo do horizonte de predição. Neste caso, no processo de otimização não existem variáveis binárias, reduzindo-se o problema, portanto, ao de programação quadrática ou QP (*Quadratic Programming*) seguinte:

“Dado o sistema (4.8), com \mathcal{A} definido a partir da matriz $A(t)$ no instante ” t “, obtida a partir de $\delta_i(t)$, $i = 1, \dots, q$ tais que $\sum_{i=1}^q \delta_i(t) = 1$, determinar \mathcal{U} que minimiza a função de custo $J_x(\mathcal{U})$, sujeito a possíveis restrições sobre a seqüência de controle e os estados”.

4.3 Sistemas de múltiplas dinâmicas e eventos discretos internos

Estes sistemas referem-se ao caso 2 apresentado no capítulo anterior.

4.3.1 Formulação do problema de controle preditivo do sistema

A equação de predição, por extensão da equação (3.57), resulta:

$$\hat{x}(t+j|t) = \sum_{i=1}^q z_i(t+j-1) \quad (4.11)$$

Sendo N o horizonte de predição, o preditor resulta:

$$\mathcal{X}_p = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q z_i(t) \\ \sum_{i=1}^q z_i(t+1) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^q z_i(t+N-1) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Considerem-se agora as seguintes definições:

$$\mathcal{Z}_i = [z_i^T(t) \quad z_i^T(t+1) \quad \dots \quad z_i^T(t+N-1)]^T \quad (4.13)$$

$$\Delta_i = [\delta_i(t) \quad \delta_i(t+1) \quad \dots \quad \delta_i(t+N-1)] \quad (4.14)$$

$i = 1, \dots, q$

$$\mathcal{Z} = [\mathcal{Z}_1^T \quad \mathcal{Z}_2^T \quad \dots \quad \mathcal{Z}_q^T]^T \quad (4.15)$$

$$\delta(t+j) = [\delta_1(t+j) \quad \delta_2(t+j) \quad \dots \quad \delta_q(t+j)]^T \quad (4.16)$$

$$\Delta = [\delta(t)^T \quad \delta(t+1)^T \quad \dots \quad \delta^T(t+N-1)^T]^T \quad (4.17)$$

O preditor de estado é dado então por:

$$\mathcal{X}_p = \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 + \dots + \mathcal{Z}_q = I_{qN} \mathcal{Z} \quad (4.18)$$

com $I_{qN} = [\mathbf{1}_{nN \times nN} \quad \mathbf{1}_{nN \times nN} \quad \dots \quad \mathbf{1}_{nN \times nN}] \in \mathfrak{R}^{nN \times qnN}$, onde $\mathbf{1}_{nN \times nN}$ é a matriz identidade de dimensão nN .

A equação genérica da função de custo é re-escrita como segue:

$$\mathcal{J}_x = 0.5(\mathcal{X}_p - X_{ref})^T \mathcal{Q}_x (\mathcal{X}_p - X_{ref}) + 0.5(\mathcal{U} - U_{ref})^T \mathcal{Q}_u (\mathcal{U} - U_{ref}) \quad (4.19)$$

onde ao invés de ponderar a seqüência de controle, é ponderado seu desvio com relação à seqüência de referência U_{ref} .

Introduzindo na expressão anterior a equação (4.18), após algumas manipulações algébricas e definindo o vetor de variáveis de otimização

$$\mathcal{S} = [\mathcal{U}^T \quad \mathcal{Z}^T \quad \Delta^T]^T \quad (4.20)$$

obtém-se:

$$\mathcal{J}_x = 0.5 \mathcal{S}^T H \mathcal{S} + f^T \mathcal{S} + K \quad (4.21)$$

onde

$$H = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_u & 0_{qN} & 0_{qN} \\ 0_N & I_{qN}^T \mathcal{Q}_x I_{qN} & 0_{qN} \\ 0_N & 0_{qN} & 0_{qN} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$f^T = [-\mathcal{U}_{ref}^T \mathcal{Q}_u \quad -\mathcal{X}_{ref}^T \mathcal{Q}_x I_{qN} \quad 0_{qN}] \quad (4.23)$$

$$K = cte \quad (4.24)$$

onde 0_N é uma matriz de zeros de dimensão $N \times N$, e 0_{qN} é a matriz de zero de dimensão $N \times qN$. A inclusão das variáveis lógicas auxiliares dentro do vetor de variáveis de decisão, deve-se à possibilidade de variarem ao longo do horizonte de predição.

As restrições introduzidas pela definição das variáveis contínuas auxiliares para $j = 1, \dots, N$ são obtidas a seguir. Para cada $z_i(t+j-1)$, $i = 1, \dots, q$, conforme obtido em (3.62) tem-se que $\forall i = 1, \dots, q$:

$$\begin{cases} z_i(t+j-1) \leq \delta_i(t+j-1)M \\ z_i(t+j-1) \geq \delta_i(t+j-1)m \\ z_i(t+j-1) \leq A_i x(t+j-1) + B_i u(t+j-1) - m(1 - \delta_i(t+j-1)) \\ z_i(t+j-1) \geq A_i x(t+j-1) + B_i u(t+j-1) - M(1 - \delta_i(t+j-1)) \end{cases} \quad (4.25)$$

Considerando em primeiro lugar a primeira desigualdade $z_i(t + j - 1) \leq \delta_i(t + j - 1)M$, para $j = 1, \dots, N$, resultam

$$\begin{cases} z_i(t) \leq \delta_i(t)M \\ z_i(t + 1) \leq \delta_i(t + 1)M \\ \vdots \\ z_i(t + N - 1) \leq \delta_i(t + N - 1)M \end{cases} \quad (4.26)$$

De forma mais compacta, escreve-se

$$\mathcal{Z}_i \leq \overline{M}\Delta_i \quad (4.27)$$

e de forma similar, para a segunda desigualdade de (4.25):

$$\mathcal{Z}_i \geq \overline{m}\Delta_i \quad (4.28)$$

com a definição das seguintes matrizes

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} M & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\overline{m} = \begin{bmatrix} m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Para a terceira desigualdade, tem-se que

$$\begin{cases} z_i(t) \leq A_i x(t) + B_i u(t) + m\delta_i(t) - m \\ z_i(t + 1) \leq A_i x(t + 1) + B_i u(t + 1) + m\delta_i(t + 1) - m = \\ \quad = A_i \sum_{l=1}^q z_l(t) + B_i u(t + 1) + m\delta_i(t + 1) - m \\ z_i(t + 2) \leq A_i x(t + 2) + B_i u(t + 2) + m\delta_i(t + 2) - m = \\ \quad = A_i \sum_{l=1}^q z_l(t + 1) + B_i u(t + 2) + m\delta_i(t + 2) - m \\ \vdots \\ z_i(t + N - 1) \leq A_i \sum_{l=1}^q z_l(t + N - 2) + B_i u(t + N - 1) + m\delta(t + N - 1) - m \end{cases} \quad (4.31)$$

Definindo as seguintes matrizes

$$\mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ A_i & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_i & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & A_i & \mathbf{0} \end{bmatrix} I_{qN} \in \mathfrak{R}^{nN \times qnN} \quad (4.32)$$

$$\mathcal{B}_i = \text{diag}(B_i) \in \mathfrak{R}^{nN \times mN} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{m} = \left[(m - A_i x(t))^T \quad m^T \quad \dots \quad m^T \right]^T \in \mathfrak{R}^{nN} \quad (4.34)$$

as restrições (4.25) escrevem-se em forma matricial como segue:

$$\mathcal{Z}_i \leq \mathcal{A}_i \mathcal{Z} + \mathcal{B}_i \mathcal{U} + \overline{m} \Delta - \mathbf{m} \quad (4.35)$$

Fazendo extensivo este resultado à quarta desigualdade de (4.25), tem-se que:

$$\mathcal{Z}_i \geq \mathcal{A}_i \mathcal{Z} + \mathcal{B}_i \mathcal{U} + \overline{M} \Delta - \mathfrak{M}_i \quad (4.36)$$

onde $\mathfrak{M} = \left[(M - A_i x(t))^T \quad M^T \quad \dots \quad M^T \right]^T \in \mathfrak{R}^{nN}$

Com relação às regiões de operação, como foi visto na seção 3.6.2, equação (3.73), a dinâmica dos chaveamentos entre regiões de operação são modelados pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} S_i x(t) + R_i u(t) - T_i \leq M_i^* (1 - \delta_i(t)), \quad i = 1 \dots q \\ \sum_{i=1}^q \delta_i(t) = 1 \end{cases} \quad (4.37)$$

onde $M_i^* = \max_{x \in \mathcal{C}} (S_i x(t) + R_i u(t) - T_i)$.

Re-escrevendo-a da seguinte forma,

$$\begin{cases} S_i x(t) + R_i u(t) + M_i^* \delta_i(t) \leq M_i^* + T_i, \quad i = 1 \dots q \\ \sum_{i=1}^q \delta_i(t) = 1 \end{cases} \quad (4.38)$$

ao longo do horizonte de predição ($j = 1, \dots, N$), resulta ser

$$\begin{cases} S_i x(t+j-1) + R_i u(t+j-1) + M_i^* \delta_i(t+j-1) \leq M_i^* + T_i, \quad i = 1 \dots q \\ \sum_{i=1}^q \delta_i(t+j-1) = 1 \end{cases} \quad (4.39)$$

Trabalhando algebricamente a equação anterior, recursivamente para $j = 1, \dots, N$, tem-se que

$$\left\{ \begin{array}{l} S_i x(t) + R_i u(t) + M_i^* \delta_i(t) \leq +M_i^* + T_i \\ S_i x(t+1) + R_i u(t+1) + M_i^* \delta_i(t+1) = \\ = S_i \sum_{l=1}^q z_l(t) + R_i u(t+1) + M_i^* \delta_i(t+1) \leq +M_i^* + T_i \\ S_i x(t+2) + R_i u(t+2) + M_i^* \delta_i(t+2) = \\ = S_i \sum_{l=1}^q z_l(t+1) + R_i u(t+2) + M_i^* \delta_i(t+2) \leq +M_i^* + T_i \\ \vdots \\ S_i x(t+N-1) + R_i u(t+N-1) + M_i^* \delta_i(t+N-1) = \\ = S_i \sum_{l=1}^q z_l(t+N-2) + R_i u(t+N-1) + M_i^* \delta_i(t+N-1) \leq +M_i^* + T_i \end{array} \right.$$

Definindo as seguintes matrizes

$$\mathcal{S}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ S_i & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_i & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & S_i & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{l_i N \times q n N} \quad (4.40)$$

$$\mathcal{R}_i = \text{diag}(R_i) \in \mathfrak{R}^{l_i N \times m N} \quad (4.41)$$

$$\mathcal{M}_i^* = \text{diag}(M_i^*) \in \mathfrak{R}^{l_i N \times q N} \quad (4.42)$$

$$\mathcal{T}_i = \left[(T_i + M_i^* - S_i x(t))^T \quad \dots \quad (T_i + M_i^*)^T \right]^T \in \mathfrak{R}^{l_i N \times 1} \quad (4.43)$$

o conjunto de restrições que as representam, resultam ser os seguintes:

$$\mathcal{S}_i \mathcal{Z} + \mathfrak{R}_i \mathcal{U} + \mathcal{M}_i^* \Delta \leq \mathcal{T}_i \quad (4.44)$$

Logo, o problema de otimização é formulado como segue:

$\min_{\mathcal{S}} J_x$, sujeito a

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Z}_i \leq \text{diag}(M) \Delta_i \\ \mathcal{Z}_i \geq \text{diag}(m) \Delta_i \\ \mathcal{Z}_i \leq \mathcal{A}_i \mathcal{Z} + \mathcal{B}_i \mathcal{U} + \text{diag}(m) \Delta_i - \mathfrak{m} \\ \mathcal{Z}_i \geq \mathcal{A}_i \mathcal{Z} + \mathcal{B}_i \mathcal{U} + \text{diag}(M) \Delta_i - \mathfrak{M} \\ \mathcal{S}_i \mathcal{Z} + \mathfrak{R}_i \mathcal{U} + \mathcal{M}_i^* \Delta \leq \mathcal{T}_i \\ \sum_{i=1}^q \delta_i(t+j-1) = 1 \\ \left[\begin{array}{c} x(t) \\ u(t+j-1) \end{array} \right] \in \mathcal{C} \\ \forall j = 1, \dots, N; \quad \forall i = 1, \dots, q \end{array} \right. \quad (4.45)$$

4.4 Sistemas com variáveis de controle lógicas

Este caso considera a situação na qual os componentes com comportamento ON-OFF, aos quais variáveis lógicas são associadas, são elementos de atuação sobre o sistema, ou

seja, variáveis manipuladas. Dentro deste caso está enquadrado o exemplo do forno com chaveamento de resistências. Diferentemente dos casos anteriores, os chaveamentos não são aleatórios nem dependem da evolução do estado, mas responderão às necessidades de controle, podendo estes, então, acontecer ao longo do horizonte de predição.

A descrição do sistema é a seguinte:

$$x(t+1) = Ax(t) + B_u u_u(t) + B_\delta u_\delta(t) \quad (4.46)$$

Nesta equação aparecem os vetores de ações de controle $u_u(t)$, que contém as variáveis manipuladas contínuas, e $u_\delta(t)$, que contém as lógicas ou inteiras, com suas respectivas matrizes de controle.

Considerando que

$$u_\delta(t) = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_p][\delta_1(t) \ \delta_2(t) \ \dots \ \delta_p(t)]^T = \mathbf{u}\delta(t)$$

e definindo as matrizes $\bar{B}_\delta = B_\delta \mathbf{u}$, $B = [B_u \ \bar{B}_\delta]$ e $\bar{u}(t) = \begin{bmatrix} u_u(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}$, re-escreve-se a equação (4.46):

$$x(t+1) = Ax(t) + B\bar{u}(t) \quad (4.47)$$

4.4.1 Controle preditivo do sistema

Sendo o preditor de estado do tipo $\mathcal{X}_p = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}\mathcal{U}$, a função de custo resulta ser

$$J_x = 0.5 \mathcal{U}^T (\mathcal{B}^T Q_x \mathcal{B} + Q_u) \mathcal{U} + (\mathcal{A}x(t) - \mathcal{X}_{ref})^T Q_x \mathcal{B} \mathcal{U} + 0.5 (\tilde{\mathcal{A}}\tilde{x}(t) - \mathcal{X}_{ref})^T Q_x (\tilde{\mathcal{A}}\tilde{x}(t) - \mathcal{X}_{ref}) \quad (4.48)$$

4.4.2 Formulação do problema de otimização

O tratamento é análogo ao apresentado na seção (2.5.1). O problema fica definido com segue:

“Encontrar a seqüência de ações de controle \mathcal{U} que minimiza a função de custo $J_x(\mathcal{U})$, sujeito às restrições $\sum_{i=1}^q \delta_i(t+j-1) = 1, \forall j = 1, \dots, N$.”

4.5 Solução do problema de otimização

No caso de sistemas apresentando chaveamentos de regiões de operação por eventos externos aleatórios, como foi visto, o problema de otimização reduz-se a um problema de programação quadrática. No segundo caso, onde os chaveamentos acontecem por eventos internos, e sendo que as variáveis lógicas auxiliares variam ao longo do horizonte de predição, o problema de otimização é um de programação quadrática mista. Da mesma forma, o terceiro caso também resulta num problema de programação quadrática mista, já que as variáveis lógicas são variáveis de decisão.

Tratando-se de um sistema sujeito a restrições, a minimização deverá ser feita valendo-se de algoritmos de programação numérica, por ser a resolução analítica extremamente difícil ou até impossível de ser realizada. No caso de sistemas híbridos, pela presença de variáveis lógicas, requerem-se algoritmos de programação numérica linear ou não linear inteira mista, denominados respectivamente MILP (*Mixed Integer Linear Programming*) e MINLP (*Mixed Integer Non-Linear Programming*). Estes algoritmos minimizam funções

que incluem variáveis dinâmicas contínuas (no sentido de que podem assumir qualquer valor dentro de um certo intervalo) e variáveis inteiras.

Entre os métodos de resolução de problemas MINLP podemos citar os seguintes (PEREIRA; SECCHI, BUSSIECK; PRUESNER (2003)):

- Branch and Bound (BB)
- Generalized Benders Decomposition (GBD)
- Outer Aproximation (OA)

Em geral, estes métodos se baseiam na solução de sucessivos problemas de programação não linear (NLP) com relaxamento das variáveis inteiras, isto é, desconsiderando a integralidade das mesmas e considerando-as como contínuas. Em (PEREIRA; SECCHI) é explicado passo a passo o algoritmo desenvolvido pelos autores.

Embora vários algoritmos estejam disponíveis para serem utilizados, o maior alvo das pesquisas é o desenvolvimento de algoritmos adequados para serem utilizados em aplicações de controle, em tempo real. Esta necessidade é evidente pelo fato de o controle ter que ser ajustado a cada período de amostragem, requerendo-se para estes fins, a solução do problema de otimização dentro do mesmo.

Deve ser observado que, em muitos casos, na procura de obter generalizações para as estratégias de controle ótimo de processos híbridos, esquece-se o fato de que na maioria dos casos, as variáveis inteiras são, na realidade, binárias (ou booleanas) o que permite a utilização de algoritmos de otimização mais simples e, portanto, com menores tempos de execução. Mais ainda, no caso do sistema apresentar efetivamente variáveis inteiras, estas sempre podem ser representadas em forma binária. Assim, por exemplo, uma variável inteira Z pertencente ao intervalo 0 a 7, poderá ser representada mediante a introdução de 3 variáveis binárias δ_1 , δ_2 e δ_3 , de forma que

$$Z = 2^0\delta_1 + 2^1\delta_2 + 2^2\delta_3, \quad (4.49)$$

transformando o processo com variáveis inteiras em um com variáveis binárias.

Os algoritmos de otimização nestes casos, são chamados "de Programação 0-1 Mista". Por exemplo, detalhes do algoritmo chamado *Lift-and-Project*, podem ser encontrados em (BALAS; CERIA; CORNUÉJOLS).

Nos cass 2 e 3 vistos, sendo que variáveis contínuas e variáveis lógicas estão envolvidas e sendo que as funções de custo são quadráticas, os problemas de otimização resultam ser de programação quadrática mista ou MIQP (*Mixed Integer Quadratic Programming*).

4.6 Exemplos

4.6.1 Sistema com duas regiões de operação (1)

O sistema possui duas dinâmicas. O chaveamento entre elas produz-se quando o estado cruzar um determinado valor, que será chamado, em diante, de superfície de chaveamento. As dinâmicas estão representadas pelas equação de estado seguintes:

$$x(t+1) = \begin{cases} 0.9608x(t) + 0.01961u(t) & \leftrightarrow x(t) \in \mathcal{C}_1 \\ 0.9231x(t) + 0.01922u(t) & \leftrightarrow x(t) \in \mathcal{C}_2 \end{cases} \quad (4.50)$$

Sejam as regiões de operação as seguintes:

- Região 1:

$$\mathcal{C}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : x \leq 2\} \quad (4.51)$$

A esta região associamos a variável lógica $\delta_1(t)$, de forma que se $x(t) \in \mathcal{C}_1 \leftrightarrow \delta_1(t) = 1$.

- Região 2:

$$\mathcal{C}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : x > 2\} \quad (4.52)$$

A esta região associamos a variável lógica $\delta_2(t)$, de forma que se $x(t) \in \mathcal{C}_2 \leftrightarrow \delta_2(t) = 1$.

4.6.1.1 Modelo Híbrido

Com base nas variáveis lógicas definidas acima, o comportamento do sistema é descrito pela equação

$$x(t+1) = [0.9608x(t) + 0.01961u(t)]\delta_1(t) + [0.9231x(t) + 0.01922u(t)]\delta_2(t) \quad (4.53)$$

com $\delta_1(t) + \delta_2(t) = 1$.

Definindo agora as variáveis auxiliares

$$z_1(t) = [0.9608x(t) + 0.01961u(t)]\delta_1(t) \quad (4.54)$$

$$z_2(t) = [0.9231x(t) + 0.01922u(t)]\delta_2(t) \quad (4.55)$$

resulta que

$$x(t+1) = z_1(t) + z_2(t) \quad (4.56)$$

Neste exemplo $T = 2$ e considerando as faixas de operação do estado e do sinal de controle sendo $x(t) \in [0, 5]$ e $u(t) \in [0, 20]$, resultam $S_1 = 1$, $S_2 = -1$, $R_1 = R_2 = 0$, $T_1 = 2$, $T_2 = -2$, $M_1 = 3$ e $M_2 = 2$. O conjunto de inequações que definem restrições que se equivalem às equações que determinam a região de operação, para os valores indicados são as seguintes:

$$\begin{cases} x(t) - 2 \leq 3(1 - \delta_1(t)) \\ -x(t) + 2 < 2(1 - \delta_2(t)) \\ \delta_1(t) + \delta_2(t) = 1 \end{cases} \quad (4.57)$$

Em função das variáveis auxiliares, as expressões anteriores resultam em

$$\begin{cases} z_1(t-1) + z_2(t-1) - 2 \leq 3(1 - \delta_1(t)) \\ -z_1(t-1) - z_2(t-1) + 2 \leq 2(1 - \delta_2(t)) \\ \delta_1(t) + \delta_2(t) = 1 \end{cases} \quad (4.58)$$

Por outro lado, para o presente exemplo $M = 5.1962$ e $m = 0$ e o conjunto de restrições introduzidas pela definição de variáveis auxiliares, é o seguinte:

$$\begin{cases} z_1(t) \leq 5.1962\delta_1(t) \\ z_1(t) \geq 0 \\ z_1(t) \leq 0.9608x(t) + 0.01961u(t) \\ z_1(t) \geq 0.9608x(t) + 0.01961u(t) - 5.1962(1 - \delta_1(t)) \\ z_2(t) \leq 5.1962\delta_2(t) \\ z_2(t) \geq 0 \\ z_2(t) \leq 0.9231x(t) + 0.01922u(t) \\ z_2(t) \geq 0.9231x(t) + 0.01922u(t) - 5.1962(1 - \delta_2(t)) \end{cases} \quad (4.59)$$

Substituindo o estado conforme a equação (4.56) chega-se a

$$\begin{cases} z_1(t) \leq 5.1962\delta_1(t) \\ z_1(t) \geq 0 \\ z_1(t) \leq 0.9608z_1(t-1) + 0.9608z_2(t-1) + 0.01961u(t) \\ z_1(t) \geq 0.9608z_1(t-1) + 0.9608z_2(t-1) + 0.01961u(t) - 5.1962(1 - \delta_1(t)) \\ z_2(t) \leq 5.1962\delta_2(t) \\ z_2(t) \geq 0 \\ z_2(t) \leq 0.9231z_1(t-1) + 0.9231z_2(t-1) + 0.01922u(t) \\ z_2(t) \geq 0.9231z_1(t-1) + 0.9231z_2(t-1) + 0.01922u(t) - 5.1962(1 - \delta_2(t)) \end{cases} \quad (4.60)$$

4.6.1.2 Controle preditivo

Considerando os horizontes de predição e controle iguais a 3 nas expressões(4.58), substituindo t por $t + j$, e escrevendo-a recursivamente para $j = 1, \dots, N$, obtém-se as desigualdades que definem as regiões de operação:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) - 2 \leq 3(1 - \delta_1(t)) \\ z_1(t) + z_2(t) - 2 \leq 3(1 - \delta_1(t+1)) \\ z_1(t+1) + z_2(t+1) - 2 \leq 3(1 - \delta_1(t+2)) \\ -x(t) + 2 \leq 3(1 - \delta_1(t)) \\ -z_1(t) - z_2(t) + 2 \leq 2(1 - \delta_2(t+1)) \\ -z_1(t+1) - z_2(t+1) + 2 \leq 2(1 - \delta_2(t+2)) \\ \delta_1(t) + \delta_2(t) = 1 \\ \delta_1(t+1) + \delta_2(t+1) = 1 \\ \delta_1(t+2) + \delta_2(t+2) = 1 \end{array} \right. \quad (4.61)$$

Seja o vetor de variáveis de decisão

$$\mathcal{S} = [u(t) \quad u(t+1) \quad u(t+2) \quad z_1(t) \quad z_1(t+1) \quad z_1(t+2) \quad z_2(t) \\ z_2(t+1) \quad z_2(t+2) \quad \delta_1(t) \quad \delta_1(t+1) \quad \delta_1(t+2) \quad \delta_2(t) \quad \delta_2(t+1) \quad \delta_2(t+2)]^T$$

Escrevendo (4.61) em forma matricial:

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \mathcal{S} \leq \left[\begin{array}{c} -x(t) + 5 \\ 5 \\ 5 \\ x(t) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad (4.62)$$

Complementam-se as restrições de desigualdade anteriores com as restrições de igualdade seguintes:

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \mathcal{S} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] \quad (4.63)$$

Trabalhando de forma similar à anterior, com as equações (4.60),

$$\left\{ \begin{array}{l}
z_1(t) \leq 5.1962\delta_1(t) \\
z_1(t+1) \leq 5.1962\delta_1(t+1) \\
z_1(t+2) \leq 5.1962\delta_1(t+2) \\
z_1(t) \geq 0 \\
z_1(t+1) \geq 0 \\
z_1(t+2) \geq 0 \\
z_1(t) \leq 0.9608x(t) + 0.01961u(t) \\
z_1(t+1) \leq 0.9608z_1(t) + 0.9608z_2(t) + 0.01961u(t+1) \\
z_1(t+2) \leq 0.9608z_1(t+1) + 0.9608z_2(t+1) + 0.01961u(t+2) \\
z_1(t) \geq 0.9608x(t) + 0.01961u(t) - 5.1962(1 - \delta_1(t)) \\
z_1(t+1) \geq 0.9608z_1(t) + 0.9608z_2(t) + 0.01961u(t+1) - 5.1962(1 - \delta_1(t+1)) \\
z_1(t+2) \geq 0.9608z_1(t+1) + 0.9608z_2(t+1) + 0.01961u(t+2) - 5.1962(1 - \delta_1(t+2)) \\
z_2(t) \leq 5.1962\delta_2(t) \\
z_2(t+1) \leq 5.1962\delta_2(t+1) \\
z_2(t+2) \leq 5.1962\delta_2(t+2) \\
z_2(t) \geq 0 \\
z_2(t+1) \geq 0 \\
z_2(t+2) \geq 0 \\
z_2(t) \leq 0.9231x(t) + 0.01922u(t) \\
z_2(t+1) \leq 0.9231z_1(t+1) + 0.9231z_2(t+1) + 0.01922u(t+1) \\
z_2(t+2) \leq 0.9231z_1(t+2) + 0.9231z_2(t+2) + 0.01922u(t+2) \\
z_2(t) \geq 0.9231x(t) + 0.01922u(t) - 5.1962(1 - \delta_2(t)) \\
z_2(t+1) \geq 0.9231z_1(t+1) + 0.9231z_2(t+1) + 0.01922u(t+1) - 5.1962(1 - \delta_2(t+1)) \\
z_2(t+2) \geq 0.9231z_1(t+2) + 0.9231z_2(t+2) + 0.01922u(t+2) - 5.1962(1 - \delta_2(t+2))
\end{array} \right. \tag{4.64}$$

Matricialmente,

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 -0.01961 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -0.01961 & 0 & -0.9608 & 1 & 0 & -0.9608 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -0.01961 & 0 & -0.9608 & 1 & 0 & -0.9608 & 0 \\
 0.01961 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0.01961 & 0 & 0.9608 & -1 & 0 & 0.9608 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0.01961 & 0 & 0.9608 & -1 & 0 & 0.9608 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 -0.01922 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & -0.01922 & 0 & -0.9231 & 0 & 0 & -0.9231 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & -0.01922 & 0 & -0.9231 & 0 & 0 & -0.9231 & 1 \\
 0.01922 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0.01922 & 0 & 0.9231 & 0 & 0 & 0.9231 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0.01922 & 0 & 0.9231 & 0 & 0 & 0.9231 & -1
 \end{bmatrix}$$

(4.65)

$$\begin{bmatrix}
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
-5.1962 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -5.1962 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -5.1962 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5.1962 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 5.1962 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 5.1962 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -5.1962 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -5.1962 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5.1962 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 5.1962 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5.1962 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.1962
\end{bmatrix}
\mathcal{S} \leq
\begin{bmatrix}
-x(t) + 5 \\
5 \\
5 \\
x(t) \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0.9608x(t) \\
0 \\
0 \\
-0.9608x(t) + 5.1962 \\
5.1962 \\
5.1962 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0.9231x(t) \\
0 \\
0 \\
-0.9231x(t) + 5.1962 \\
5.1962 \\
5.1962
\end{bmatrix}
\tag{4.66}$$

4.6.1.3 Preditor e Função de Custo

O preditor para o presente caso é:

$$\mathcal{X}_p = \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 = \begin{bmatrix} I_N & I_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_1^T & \mathcal{Z}_2^T \end{bmatrix}^T \tag{4.67}$$

e a função de custo

$$\mathcal{J}_x = 0.5\mathcal{S}^T H \mathcal{S} + f^T \mathcal{S} + K. \tag{4.68}$$

onde

$$H = \begin{bmatrix} Q_u & 0_{2N} & 0_{2N} \\ 0_N & I_{2N} Q_x I_{2N} & 0_{2N} \\ 0_N & 0_{2N} & 0_{2N} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

e

$$f^T = [-\mathcal{U}_{ref}^T Q_u \quad -\mathcal{X}_{ref}^T Q_x I_{2N} \quad 0_{2N}] \quad (4.70)$$

4.6.1.4 Simulação numérica

O exemplo foi simulado com o Matlab, utilizando, para a obtenção numérica da solução ótima, o algoritmo para otimização de sistemas mistos desenvolvido por Bemporad e Mignone (BEMPORAD; MIGNONE (2000)), disponibilizado para download em <http://control.ee.ethz.ch/hybrid/miqp/>. Este algoritmo soluciona o problema de otimização MIQP seguinte:

$$\min_x 0.5 s^T H s + f^T s$$

sujeito a

$$\begin{cases} \Phi_{un} s \leq \Lambda_{un} \\ \Phi_{eq} s \leq \Lambda_{eq} \\ s_{lb} \leq s \leq s_{ub} \\ s = [s_c^T \quad s_d^T]^T \\ s_c \in \mathbb{R}^{n_c} \\ s_d \in \{0, 1\}^{n_d} \end{cases} \quad (4.71)$$

Algumas questões práticas devem ser salientadas. Observou-se que que uma proporção considerável das soluções obtidas resultavam (a) não factíveis ou (b) factíveis, porém não com soluções inteiras, ou seja, com relaxamento das variáveis inteiras. Nas simulações constatou-se que muitas vezes as soluções estão no limite das restrições e, portanto, aproximações ou arredondamentos feitos pelo algoritmo resultam em soluções fora da região de factibilidade. No exemplo, as únicas restrições funcionais introduzidas devem-se à definição das variáveis auxiliares. A solução encontrada foi a de relaxar estas restrições (considerando $\epsilon > 0$, nas restrições introduzidas pela definição de variáveis auxiliares, substitui-se M por $M + \epsilon$ e m por $m - \epsilon$; ϵ pode ser considerado como uma constante positiva de valor suficientemente pequeno, ou uma variável positiva e inclui-lo na função de custo, ponderando seu valor quadrático). Faz-se também necessário adotar políticas para administrar as não factibilidades que eventualmente aparecerem. No presente caso foi adotada a de manter a solução do período anterior. Observou-se que o processo em geral volta rapidamente para a região de soluções factíveis. Na figura 4.1 observam-se os resultados obtidos.

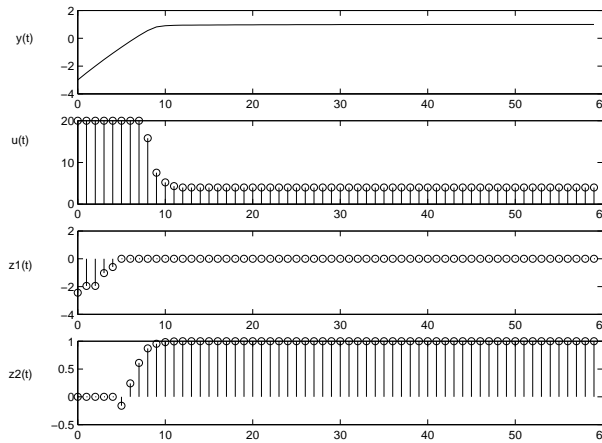


Figura 4.1: Simulação de sistema com duas regiões de operação e eventos internos (1)

Nesta simulação foram considerados os seguintes parâmetros e valores iniciais:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_u = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ Q_x = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \\ Q_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ x(t) = 0 \\ x_{ref}(t+j) = 3, \quad j = 1, 2, \dots, N \\ u(t-1) = 0 \end{array} \right. \quad (4.72)$$

Nos gráficos de saída pode ser observado que, aproximadamente, no instante $t = 8$ o estado cruza o valor 2, produzindo-se o chaveamento de região de operação, fato evidenciado nos gráficos das trajetórias das variáveis auxiliares, quando z_1 passa a ser nula e z_2 passa a assumir os valores de x . No último gráfico foi representada a factibilidade de cada solução. A saída de factibilidade do algoritmo utilizado (BEMPORAD; MIGNONE (2000)) assume o valor 1 quando a solução é factível, o valor 5 quando a solução é factível porém não a parte de variáveis inteiras (problema com relaxamento de variáveis inteiras factível) e o valor 7 quando a solução é não factível.

4.6.2 Exemplo com duas regiões de operação (2)

O exemplo a seguir foi tomado de (BEMPORADI; MORARI (1999)). As dinâmicas do sistema estão representadas pelas equações de estado seguintes:

$$x(t+1) = \begin{cases} 0.8x(t) + u(t) & \leftrightarrow x(t) \in \mathcal{C}_1 \\ -0.8x(t) + u(t) & \leftrightarrow x(t) \in \mathcal{C}_2 \end{cases} \quad (4.73)$$

Sejam as regiões de operação as seguintes:

- Região 1:

$$\mathcal{C}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\} \quad (4.74)$$

A esta região associamos a variável lógica $\delta_1(t)$, de forma que se $x(t) \in \mathcal{C}_1 \leftrightarrow \delta_1(t) = 1$.

- Região 2:

$$\mathcal{C}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : x < 0\} \quad (4.75)$$

A esta região associamos a variável lógica $\delta_2(t)$, de forma que se $x(t) \in \mathcal{C}_2 \leftrightarrow \delta_2(t) = 1$.

Sendo $T = 0$ e $x(t) \in [-10, 10]$ e $u(t) \in [-1, 1]$, resultam, para este sistema, $S_1 = -1$, $S_2 = 1$, $R_1 = R_2 = 0$, $T_1 = T_2 = 0$ e $M_1 = M_2 = 10$.

Modelando de forma similar à anterior obtém-se as seguintes restrições introduzidas pela definição das variáveis auxiliares e as regiões de operação $GS \leq b$, onde:

$$b = \begin{bmatrix} x(t) + 10 \\ 10 \\ 10 \\ -x(t) + 10 \\ 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.8x(t) + 9 \\ 9 \\ 9 \\ -0.8x(t) + 9 \\ 9 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.8x(t) + 9 \\ 9 \\ 9 \\ -0.8x(t) + 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

O resultado da simulação é apresentado na figura (4.6.2).

As mesmas considerações feitas no exemplo anterior com relação à necessidade de relaxamento de restrições, valem para este exemplo.

Nesta simulação foram considerados os seguintes parâmetros e valores iniciais:

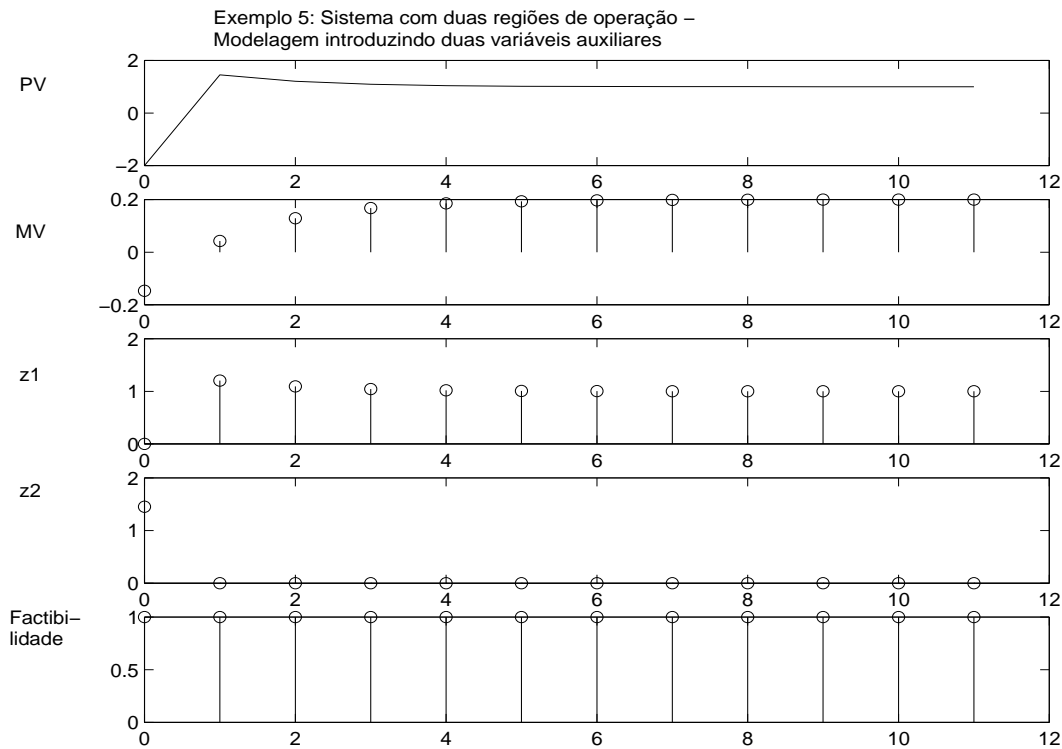


Figura 4.2: Simulação exemplo tomado de (BEMPORADI; MORARI (1999))

$$\left\{ \begin{array}{l}
 Q_u = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \\
 Q_x = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \\
 Q_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 x(t) = -2 \\
 x_{ref}(t+j) = 1, \quad j = 1, 2, \dots, N \\
 u(t-1) = 0
 \end{array} \right. \quad (4.78)$$

Nas figuras observa-se claramente o chaveamento de região de operação. Neste caso, observando a trajetória de estado, a condição de chaveamento é atingida entre dois instantes de amostragem.

4.6.3 Exemplo com duas regiões de operação (3)

É importante observar que a modelamento de um sistema misto não é única, porém os resultados são equivalentes. Para ilustrar este fato, considere a seguinte modelamento alternativa para o sistema do exemplo anterior, feito com uma única variável auxiliar. Seja:

$$x(t+1) = \begin{cases} 0.8x(t) + u(t) & \leftrightarrow x(t) \in \mathcal{C}_1 \\ -0.8x(t) + u(t) & \leftrightarrow x(t) \in \mathcal{C}_2 \end{cases} \quad (4.79)$$

Sejam as regiões de operação as seguintes:

- Região 1:

$$\mathcal{C}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\} \quad (4.80)$$

A esta região associamos a variável lógica $\delta(t)$, de forma que se $x(t) \in \mathcal{C}_1 \leftrightarrow \delta(t) = 1$.

- Região 2:

$$\mathcal{C}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : x < 0\} \quad (4.81)$$

A esta região associamos a variável lógica $\delta_2(t) = 1 - \delta(t)$, de forma que se $x(t) \in \mathcal{C}_2 \leftrightarrow \delta(t) = 0$. Isto surge diretamente da condição de exclusão entre regiões de operação

A equação dinâmica do sistema pode ser escrita como segue:

$$x(t+1) = 0.8x(t)\delta(t) - 0.8x(t)(1 - \delta(t)) + u(t) \quad (4.82)$$

Trabalhando esta última equação, resulta

$$x(t+1) = -0.8x(t) + 1.6x(t)\delta(t) + u(t) \quad (4.83)$$

Definindo $z(t) = x(t)\delta(t)$ obtém-se a equação linear

$$x(t+1) = -0.8x(t) + 1.6z(t) + u(t) \quad (4.84)$$

4.6.3.1 Modelo Híbrido

Este modelo é do tipo

$$x(t+1) = A(t)x(t) + A_2z(t) + B_1u(t) \quad (4.85)$$

Definindo as seguintes matrizes,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & A_2 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

o modelo resulta do tipo,

$$x(t+1) = \bar{A}(t)\bar{x}(t) + B_1u(t) \quad (4.88)$$

4.6.3.2 Preditor e função de custo

O preditor resulta análogo ao do exemplo anterior:

$$\mathcal{X}_p = \bar{A}\bar{x}(t) + \mathcal{B}\mathcal{S} \quad (4.89)$$

$$\mathcal{J}_x = 0.5\mathcal{S}^T H \mathcal{S} + f^T \mathcal{S} + K \quad (4.90)$$

4.6.3.3 Simulação

Para os valores dados no exemplo 2, resultam $A = -0.8$, $A_2 = 1.6$, $B_1 = 1$, os parâmetros R_1 , R_2 , S_1 , S_2 , T_1 e T_2 assumem os mesmos valores que no exemplo anterior, $M_1 = M_2 = 10$, $M = 10$ e $m = -10$.

Na figura 4.3 se observa que os resultados são análogos aos obtidos com a outra modelamento. Sendo que os resultados são iguais, esta modelamento resulta mais conveniente, já que apresenta menor quantidade de variáveis de decisão e de restrições. Como consequência disto, o tempo de execução das otimizações resulta sensivelmente menor.

4.6.4 Exemplo: Sistema dinâmico com variável manipulada discreta

A seguir analisa-se o sistema do exemplo (3.2.2). Neste caso de sistema híbrido, não se tem chaveamentos de dinâmica.

Considerem-se os seguintes valores numéricos:

$$V = 220V$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10\Omega$$

$$T = 120s$$

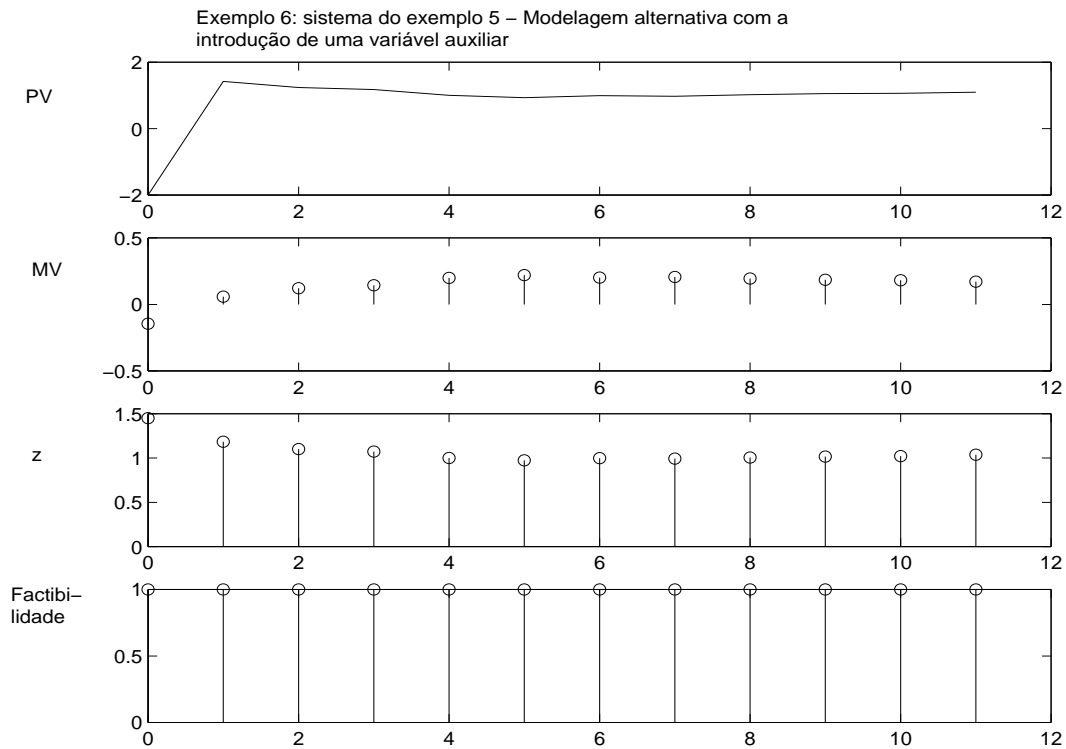


Figura 4.3: Simulação alternativa do sistema com duas regiões de operação

$$G(0) = 2.7273 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{A}}$$

Para uma taxa de amostragem $T_s = 10\text{s}$, as equações de estado do sistema são:

$$\begin{cases} x(t+1) = 0.92x(t) + 0.2181u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad (4.91)$$

onde $u(t) \in [0.0 \ 22 \ 44 \ 66 \ 88]$ são os diferentes valores de corrente (e, portanto, potência) que podem ser entregues ao sistema. A temperatura deve estar compreendida na faixa $y(t) \in [0, 300]$.

Introduzem-se variáveis lógicas que indicam quantas chaves estão fechadas (quantas resistências estão energizadas). Para simplificar um pouco, substitui-se a variável lógica que indica que todas as chaves estão abertas, pela condição de todas as outras variáveis estarem em 0.

Neste caso, tendo 5 valores diferentes, foram definidas 4 variáveis lógicas. A quinta variável lógica é substituída pela condição de todas as outras serem nulas. Isto surge diretamente da condição de exclusão. Este fato pode ser representado modificando a condição de exclusão e substituindo-a pela seguinte restrição:

$$\sum_{i=1}^4 \delta_i(t) \leq 1 \quad (4.92)$$

4.6.5 Simulação

Na figura 4.4 se apresentam os resultados desta simulação.

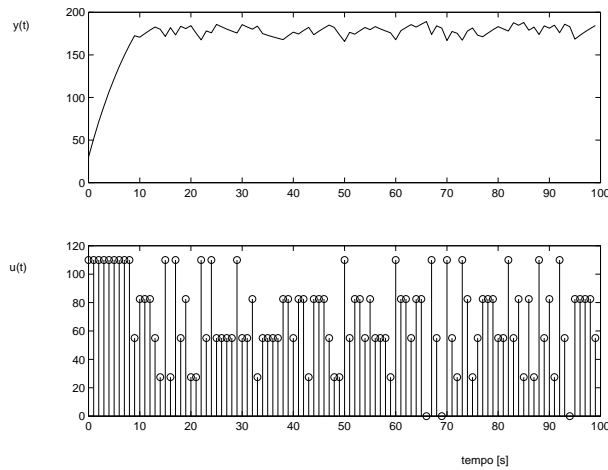


Figura 4.4: Simulação do sistema com variáveis manipuladas discretas

As condições de simulação foram $N = 4$, $x(0) = 30$, $x \in [25, 200]$, $y_{ref}(t) = x_{ref}(t) = 180 \forall t$, $u(0) = 0$, peso sobre o estado $q_x = 0.008$. Observe que no regime estacionário, a temperatura se mantém dentro de uma faixa de aproximadamente $\pm 10^\circ C$ do valor de referência desejado.

5 ESTUDO DE CASO: SISTEMA DE EQUALIZAÇÃO DE UMA PLANTA DE TRATAMENTO DE EFLUENTES

5.1 Introdução

Os sistemas de tratamento de efluentes são bastante sensíveis a variações tanto da concentração de contaminantes como da vazão do influente. Como forma de minimizar este problema, muitas instalações de tratamento de efluentes incorporam sistemas de equalização cuja finalidade é manter constantes ou aproximadamente constantes estas variáveis. Em outras palavras, o objetivo do sistema de equalização é o de filtrar as ditas variações. Estes sistemas estão geralmente compostos por vários tanques interligados contando também com válvulas ON-OFF nas entradas, saídas e/ou transferências entre tanques.

O presente estudo de caso baseia-se na planta de equalização estudada em (HARMAND et al. (1999), QUEINEC; TABOURIECH (2004)). No primeiro destes trabalhos é proposta uma estratégia de controle LQG e utiliza um controle supervísório de lógica difusa (fuzzy logic) para se adaptar ao ponto de operação, calculando os valores de referência a serem utilizados. Nos outros dois trabalhos são utilizadas técnicas de síntese de controladores em presença de saturação.

Destaca-se que nos trabalhos citados, os respectivos estudos são feitos para uma configuração fixa de válvulas, ou seja, a presença de elementos lógicos no sistema não é explorada. O presente estudo de caso propõe a utilização deste grau de liberdade. Para chegar a um controlador que possa modificar o estado aberto ou fechado das válvulas, conforme um objetivo de controle, faz-se necessária a obtenção de um modelo híbrido da planta. Como primeiro passo, são obtidas as equações que descrevem o processo, passando-se depois à obtenção de um modelo híbrido que será utilizado no projeto do controlador preditivo. Como estratégia de controle para este tipo de sistema, o MPC, como já foi estudado, resulta bem adequado pelas interessantes possibilidades de trabalho na presença de restrições e a incorporação de sinais de atuação lógicos, entre outros motivos.

5.2 O sistema

O sistema em estudo é apresentado na figura (5.1). O mesmo é formado por 3 tanques contendo efluentes em volumes e concentrações V_1/C_1 , V_2/C_2 e V_3/C_3 respectivamente. O sistema recebe águas residuais residenciais que entram no sistema com vazão Q_{in} e concentração C_{in} , e águas residuais industriais, com alta concentração

de contaminantes, com vazão Q_{tr} e concentração C_{tr} , descarregadas por caminhões. Os tanques são interligados por um sistema de tubulações e válvulas como o apresentado na figura 5.1. Resumindo, os elementos componentes e variáveis do sistema são os seguintes:

T_1 : tanque 1;

T_2 : tanque 2;

T_3 : tanque 3;

P_{in} : bomba de entrada;

$P1$: Bomba de saída do tanque 1;

$P2$: Bomba de saída do tanque 2;

$P3$: Bomba de saída do tanque 3;

v_{i1} : válvula (ON-OFF) de entrada do tanque 1;

v_{i2} : válvula (ON-OFF) de entrada do tanque 2;

v_{i3} : válvula (ON-OFF) de entrada do tanque 3;

v_{1o} : válvula (ON-OFF) de saída do tanque 1;

v_{3o} : válvula (ON-OFF) de saída do tanque 3;

v_{12} : válvula (ON-OFF) de recirculação do tanque 1 para o 2;

v_{32} : válvula (ON-OFF) de recirculação do tanque 3 para o 2;

V_1 : volume do tanque 1 [m^3];

V_2 : volume do tanque 2 [m^3];

V_3 : volume do tanque 3 [m^3];

C_1 : concentração no tanque 1 [q/m^3];

C_2 : concentração no tanque 2 [q/m^3];

C_3 : concentração no tanque 3 [q/m^3];

C_{in} : concentração de entrada do sistema (águas residuais residenciais) [q/m^3];

Q_{in} : vazão de entrada do sistema (águas residuais residenciais) [m^3/h];

C_{tr} : concentração de entrada do sistema (águas residuais industriais descarregadas de caminhões) [q/m^3];

Q_{tr} : vazão de entrada do sistema (águas residuais industriais descarregadas de caminhões) [m^3/h];

C_{out} : concentração de saída [q/m^3];

Q_{out} : vazão de saída do sistema [m^3/h]

Das variáveis acima indicadas, V_1, V_2, V_3, C_1, C_2 e C_3 são as variáveis de estado; Q_1, Q_2 e Q_3 as variáveis manipuladas contínuas através das bombas P_1, P_2 e P_3 ; as válvulas ON-OFF as variáveis manipuladas lógicas (assumindo o valor “0” quando fechadas e “1” no caso contrário); C_{in}, Q_{in}, C_{tr} e Q_{tr} as perturbações; e, finalmente, C_{out} e Q_{out} as saídas do sistema.

Destaca-se que o sistema tem certas restrições em relação aos estados das válvulas. Estas restrições são:

- somente uma única válvula de entrada pode estar aberta durante um período de amostragem.
- somente uma única das válvulas de recirculação tanque 1-tanque 2 (v_{12}) 2 ou de saída de tanque 1 (v_{1o}) pode estar aberta durante um período de amostragem.
- somente uma única das válvulas de recirculação tanque 3-tanque 2 (v_{32}) 2 ou de saída de tanque 3 (v_{3o}) pode estar aberta durante um período de amostragem.

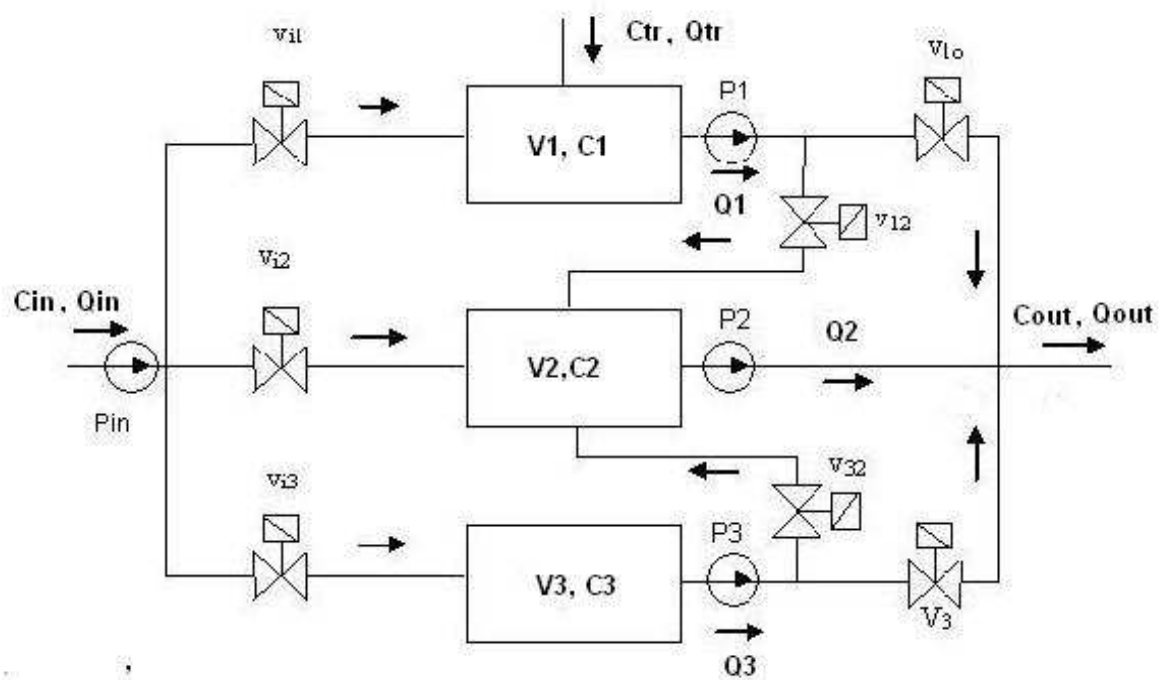


Figura 5.1: Sistema de Equalização de Planta de Tratamento de Efluentes

5.3 Modelamento matemático do sistema

5.3.1 Equações de estado da planta

Como já fora indicado, as variáveis de estado do sistema são os volumes e concentrações de efluentes nos três tanques. A seguir é detalhada a obtenção das equações de estado e de saída que regem o comportamento dinâmico do sistema. Para isto considera-se um reservatório com diferentes entradas e saídas de produto, dadas respectivamente por $Q_{in_j}(t)$, $j = 1 \dots n_i$ e $Q_{out_l}(t)$, $l = 1 \dots n_o$.

- **Evolução dinâmica dos volumes**

Genericamente, a variação de volume ΔV em um dado reservatório num período de tempo Δt suficientemente pequeno, resulta

$$\Delta V(t) = \left(\sum_{j=1}^{n_i} Q_{in_j}(t) - \sum_{l=1}^{n_o} Q_{out_l}(t) \right) \Delta t. \quad (5.1)$$

Portanto, no limite $\Delta t \rightarrow 0$, obtém-se a equação diferencial que descreve a evolução do volume

$$\frac{dV(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n_i} Q_{in_j}(t) - \sum_{l=1}^{n_o} Q_{out_l}(t) \quad (5.2)$$

- **Evolução dinâmica das concentrações**

No tanque considerado, tem-se que $m(t) = C(t)V(t)$, onde $m(t)$, $C(t)$ e $V(t)$ são, respectivamente, massa de contaminantes, concentração de contaminantes no efluente e volume de efluente no tanque. Sejam $m_{in_j}(t)$, $j = 1 \dots n_i$ e $m_{out_l}(t)$, $l = 1 \dots n_o$, respectivamente, as quantidades (massas) de contaminantes de entrada e de saída. Logo, a variação de contaminantes $\Delta m(t)$ no tanque num intervalo de tempo suficientemente pequeno Δt , resulta em:

$$\Delta m(t) = m(t + \Delta t) - m(t) = \sum_{j=1}^{n_i} m_{in_j}(t) - \sum_{l=1}^{n_o} m_{out_l}(t) \quad (5.3)$$

Considerando que

$$\sum_{j=1}^{n_i} m_{in_j}(t) = \sum_{j=1}^{n_i} \Delta t Q_{in_j}(t) C_{in_j}(t) \quad (5.4)$$

e

$$\sum_{l=1}^{n_o} m_{out_l}(t) = \sum_{l=1}^{n_o} \Delta t Q_{out_l}(t) C_{out_l}(t) \quad (5.5)$$

tanto para entrada como para saída, a equação (5.3) resulta:

$$m(t + \Delta t) - m(t) = \sum_{j=1}^{n_i} \Delta t Q_{in_j}(t) C_{in_j}(t) - \sum_{l=1}^{n_o} \Delta t Q_{out_l}(t) C_{out_l}(t) \quad (5.6)$$

A concentração resultante em $t + \Delta t$ é

$$\begin{aligned} C(t + \Delta t) &= \frac{m(t + \Delta t)}{V(t + \Delta t)} = \\ &= \frac{C(t)V(t) + \sum_{j=1}^{n_i} \Delta t Q_{in_j}(t) C_{in_j}(t) - \sum_{l=1}^{n_o} \Delta t Q_{out_l}(t) C_{out_l}(t)}{V(t + \Delta t)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Como $V(t + \Delta t) = V(t) + \Delta t \left(\sum_{j=1}^{n_i} Q_{in_j}(t) - \sum_{l=1}^{n_o} Q_{out_l}(t) \right)$, tem-se que

$$C(t + \Delta t) = \frac{C(t)V(t) + \sum_{j=1}^{n_i} \Delta t Q_{in_j}(t) C_{in_j}(t) - \sum_{l=1}^{n_o} \Delta t Q_{out_l}(t) C_{out_l}(t)}{V(t) + \Delta t \left(\sum_{j=1}^{n_i} Q_{in_j}(t) - \sum_{l=1}^{n_o} Q_{out_l}(t) \right)} \quad (5.8)$$

Subtraindo em ambos membros da equação anterior $C(t)$, e trabalhando algebricamente, obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta C(t) = C(t + \Delta t) - C(t) &= \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \Delta t Q_{in_j}(t) C_{in_j}(t) - \sum_{l=1}^{n_o} \Delta t Q_{out_l}(t) C_{out_l}(t)}{V(t) + \Delta t \left(\sum_{j=1}^{n_i} Q_{in_j}(t) - \sum_{l=1}^{n_o} Q_{out_l}(t) \right)} - \\ &\quad - \frac{\Delta t C(t) \left(\sum_{j=1}^{n_i} Q_{in_j}(t) - \sum_{l=1}^{n_o} Q_{out_l}(t) \right)}{V(t) + \Delta t \left(\sum_{j=1}^{n_i} Q_{in_j}(t) - \sum_{l=1}^{n_o} Q_{out_l}(t) \right)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Observe que, como os tanques possuem uma única saída,

$$\sum_{l=1}^{n_o} \Delta t Q_{out_l}(t) C_{out_l}(t) = \Delta t Q_{out}(t) C_{out}(t), \quad (5.10)$$

tem-se também que:

$$C_{out}(t) = C(t) \quad (5.11)$$

Trabalhando a expressão (5.9) com as considerações anteriores, resulta que:

$$\frac{\Delta C(t)}{\Delta t} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} Q_{in_j}(t)(C_{in_j}(t) - C(t))}{V(t) + \Delta t \left(\sum_{j=1}^{n_i} Q_{in_j}(t) - \sum_{l=1}^{n_o} Q_{out_l}(t) \right)} \quad (5.12)$$

Logo, para o limite $\Delta t \rightarrow 0$ resulta

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} Q_{in_j}(t)(C_{in_j}(t) - C(t))}{V(t)} \quad (5.13)$$

É importante observar que esta equação é não linear.

5.4 Equações Dinâmicas

Aplicando as equações (5.2) e (5.13) no sistema em estudo, obtém-se as equações dinâmicas que descrevem a evolução do estado. Por enquanto, por simplicidade de notação, omite-se a dependência temporal das variáveis. Considerando-se que v_{i1} , v_{i2} , v_{i3} são variáveis lógicas associadas às válvulas ON-OFF e, portanto, assumem valor 1 ou 0 (conforme estiverem abertas ou fechadas), as equações de estado são então as seguintes:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = Q_{tr} + v_{i1}Q_{in} - Q_1 \\ \dot{C}_1 = \frac{Q_{tr}(C_{tr}-C_1)+v_{i1}Q_{in}(C_{in}-C_1)}{V_1} \\ \dot{V}_2 = v_{i2}Q_{in} + v_{i2}Q_1 + v_{i3}Q_3 - Q_2 \\ \dot{C}_2 = \frac{v_{i2}Q_{in}(C_{in}-C_2)+v_{i2}Q_1(C_1-C_2)+v_{i3}Q_3(C_3-C_2)}{V_2} \\ \dot{V}_3 = v_{i3}Q_{in} - Q_3 \\ \dot{C}_3 = \frac{v_{i3}Q_{in}(C_{in}-C_3)}{V_3} \end{cases} \quad (5.14)$$

As equações de saída do sistema são:

$$\begin{cases} Q_{out} = v_{o1}Q_1 + Q_2 + v_{o3}Q_3 \\ C_{out} = \frac{v_{o1}Q_1C_1+Q_2C_2+v_{o3}Q_3C_3}{v_{o1}Q_1+Q_2+v_{o3}Q_3} \end{cases} \quad (5.15)$$

Estas equações devem ser complementadas com os intertravamentos entre válvulas conforme foi indicado na seção 5.2. Estes são modelados matematicamente como segue:

$$\begin{cases} v_{i1} + v_{i2} + v_{i3} = 1 \\ v_{1o} + v_{12} = 1 \\ v_{3o} + v_{32} = 1 \end{cases} \quad (5.16)$$

respectivamente, os vetores de saída, de estado, de controle e de perturbação.

5.4.1 Modelo híbrido

Obtém-se a seguir um modelo de espaço de estado localmente linear, por meio de uma linearização por série de Taylor numa vizinhança de um ponto de equilíbrio genérico.

Primeiramente, definem-se as seguintes variáveis auxiliares, resultantes do produto entre variáveis lógicas (válvulas ON/OFF) e variáveis contínuas (BEMPORADI; MORARI (1999)):

$$\begin{cases} z_{1o} = v_{1o}Q_1 \\ z_{3o} = v_{3o}Q_3 \\ z_{12} = v_{12}Q_1 \\ z_{32} = v_{32}Q_3 \\ z_{in1} = v_{i1}Q_{in} \\ z_{in2} = v_{i2}Q_{in} \\ z_{in3} = v_{i3}Q_{in} \end{cases} \quad (5.17)$$

Com as variáveis auxiliares mais acima definidas, as equações de estado (5.14) e de saída (5.15) podem ser re-escritas como:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = Q_{tr} + z_{in1} - Q_1 \\ \dot{C}_1 = \frac{Q_{tr}(C_{tr}-C_1)+z_{in1}(C_{in}-C_1)}{V_1} \\ \dot{V}_2 = z_{in2} + z_{12} + z_{32} - Q_2 \\ \dot{C}_2 = \frac{z_{in2}(C_{in}-C_2)+z_{12}(C_1-C_2)+z_{32}(C_3-C_2)}{V_2} \\ \dot{V}_3 = z_{in3} - Q_3 \\ \dot{C}_3 = \frac{z_{in3}(C_{in}-C_3)}{V_3} \end{cases} \quad (5.18)$$

$$\begin{cases} Q_{out} = z_{1o} + Q_2 + z_{3o} \\ C_{out} = \frac{z_{1o}C_1+Q_2C_2+z_{3o}C_3}{z_{1o}+Q_2+z_{3o}} \end{cases} \quad (5.19)$$

5.4.2 Linearização do modelo

Considere um ponto de equilíbrio para o sistema (5.18)-(5.19) e definam-se os seguintes vetores de desvio com relação a este último:

$$x = [\tilde{V}_1 \quad \tilde{C}_1 \quad \tilde{V}_2 \quad \tilde{C}_2 \quad \tilde{V}_3 \quad \tilde{C}_3]^T \quad (5.20)$$

$$u = [\tilde{Q}_1 \quad \tilde{Q}_2 \quad \tilde{Q}_3]^T, \quad (5.21)$$

$$\nu = [\tilde{C}_{tr} \quad \tilde{Q}_{tr} \quad \tilde{C}_{in} \quad \tilde{Q}_{in}]^T \quad (5.22)$$

$$z_u = [\tilde{z}_{1o} \quad \tilde{z}_{3o} \quad \tilde{z}_{12} \quad \tilde{z}_{32}]^T \quad (5.23)$$

$$z_\nu = [\tilde{z}_{in1} \quad \tilde{z}_{in2} \quad \tilde{z}_{in3}]^T \quad (5.24)$$

onde o “ ” nas variáveis indica que são desvios com relação ao ponto de equilíbrio denotado por $(x^*, u^*, z_u^*, \nu^*, z_\nu^*)$. Observe-se que, como o vetor ν é de perturbações, o vetor z_ν também o é, já que seus componentes são o produto entre variáveis representando perturbações e variáveis lógicas. Neste último caso, deverá ser estudado cuidadosamente como lidar com o fato de serem estas variáveis auxiliares assim definidas, parte do conjunto de variáveis de otimização. Isto será analisado numa próxima seção.

Utilizando a aproximação de Taylor de primeira ordem, obtém-se o seguinte modelo linearizado para o sistema (5.18)-(5.19), no entorno do ponto de equilíbrio considerado (por simplicidade na notação, daqui em diante substitui-se a indicação do ponto de equilíbrio “ $|_{(x^*, u^*, z_u^*, \nu^*, z_\nu^*)}$ ” por “ $|_*$ ”):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{V}_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \dot{C}_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \dot{V}_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \dot{C}_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \dot{V}_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \dot{C}_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \end{bmatrix} \Big|_* x(t) + \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{V}_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \dot{C}_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \dot{V}_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \dot{C}_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \dot{V}_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \dot{C}_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_* u(t) + \quad (5.25)$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{V}_1}{\partial z_u} \\ \frac{\partial \dot{C}_1}{\partial z_u} \\ \frac{\partial \dot{V}_2}{\partial z_u} \\ \frac{\partial \dot{C}_2}{\partial z_u} \\ \frac{\partial \dot{V}_3}{\partial z_u} \\ \frac{\partial \dot{C}_3}{\partial z_u} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial z_u} \end{bmatrix} \Big|_* z_u(t) + \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{V}_1}{\partial z_\nu} \\ \frac{\partial \dot{C}_1}{\partial z_\nu} \\ \frac{\partial \dot{V}_2}{\partial z_\nu} \\ \frac{\partial \dot{C}_2}{\partial z_\nu} \\ \frac{\partial \dot{V}_3}{\partial z_\nu} \\ \frac{\partial \dot{C}_3}{\partial z_\nu} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial z_\nu} \end{bmatrix} \Big|_* z_\nu(t) + \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{V}_1}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \dot{C}_1}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \dot{V}_2}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \dot{C}_2}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \dot{V}_3}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \dot{C}_3}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \nu} \end{bmatrix} \Big|_* \nu(t) \quad (5.26)$$

Podem observar-se que as equações de estado correspondentes à evolução V_1 , V_2 e V_3 são originariamente lineares.

A seguir serão detalhadas as linearizações dos outros termos.

- **Gradiente das derivadas das concentrações (\dot{C}_i , $i = 1, 2, 3$) com relação ao estado:**

$$\frac{\partial \dot{C}_i}{\partial x} \Big|_* = \left[\frac{\partial \dot{C}_i}{\partial V_1} \quad \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial C_1} \quad \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial V_2} \quad \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial C_2} \quad \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial V_3} \quad \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial C_3} \right] \Big|_* \quad (5.27)$$

Da equação (5.27) resulta ¹:

$$\left. \frac{\partial \dot{C}_1}{\partial x} \right|_* = \left[-\frac{Q_{tr}^*(C_{tr}^* - C_1^*) + z_{in1}^*(C_{in}^* - C_1^*)}{V_1^{*2}} \quad -\frac{Q_{tr}^* + z_{in1}^*}{V_1^*} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \quad (5.28)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{C}_2}{\partial x} \right|_* = \left[0 \quad \frac{z_{12}^*}{V_2^*} \quad -\frac{z_{in2}^*(C_{in}^* - C_2^*) + z_{12}^*(C_1^* - C_2^*) + z_{32}^*(C_3^* - C_2^*)}{V_2^{*2}} \quad -\frac{z_{in2}^* + z_{12}^* + z_{32}^*}{V_2^*} \quad 0 \quad \frac{z_{32}^*}{V_2^*} \right] \quad (5.29)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{C}_3}{\partial x} \right|_* = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{z_{in3}^*(C_{in}^* - C_3^*)}{V_3^{*2}} \quad -\frac{z_{in3}^*}{V_3^*} \right] \quad (5.30)$$

- **Gradiente das concentrações com relação ao vetor de controle**

De forma similar ao item anterior, com relação a u :

$$\left. \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial u} \right|_* = \left[\frac{\partial \dot{C}_i}{\partial Q_1} \quad \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial Q_2} \quad \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial Q_3} \right] \Big|_* \quad (5.31)$$

Da equação anterior resulta:

$$\left. \frac{\partial \dot{C}_1}{\partial u} \right|_* = \left[0 \quad 0 \quad 0 \right] \quad (5.32)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{C}_2}{\partial u} \right|_* = \left[0 \quad 0 \quad 0 \right] \quad (5.33)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{C}_3}{\partial u} \right|_* = \left[0 \quad 0 \quad 0 \right] \quad (5.34)$$

¹A indicação “*” nas variáveis, denota o seu valor de equilíbrio

- **Gradiente das concentrações com relação ao vetor variáveis auxiliares de controle**

As derivadas parciais das concentrações com relação a z_u são:

$$\left. \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial z_u} \right|_* = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial z_{1o}} & \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial z_{3o}} & \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial z_{12}} & \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial z_{32}} \end{array} \right] \Big|_* \quad (5.35)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{C}_1}{\partial z_u} \right|_* = [0 \ 0 \ 0 \ 0] \Big|_* \quad (5.36)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{C}_2}{\partial z_u} \right|_* = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \frac{C_1^* - C_2^*}{V_2^*} & \frac{C_3^* - C_2^*}{V_2^*} \end{array} \right] \Big|_* \quad (5.37)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{C}_3}{\partial z_u} \right|_* = [0 \ 0 \ 0 \ 0] \Big|_* \quad (5.38)$$

- **Gradiente das concentrações com relação ao vetor variáveis aleatórias auxiliares**

As derivadas parciais das concentrações com relação a z_ν são:

$$\left. \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial z_\nu} \right|_* = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial z_{in1}} & \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial z_{in2}} & \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial z_{in3}} \end{array} \right] \Big|_* \quad (5.39)$$

donde tem-se:

$$\left. \frac{\partial \dot{C}_1}{\partial z_\nu} \right|_* = \left[\begin{array}{ccc} \frac{C_{in}^* - C_1^*}{V_1^*} & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (5.40)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{C}_2}{\partial z_\nu} \right|_* = \left[\begin{array}{ccc} 0 & \frac{C_{in}^* - C_2^*}{V_2^*} & 0 \end{array} \right] \quad (5.41)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{C}_3}{\partial z_\nu} \right|_* = \left[0 \quad 0 \quad \frac{C_{in}^* - C_3^*}{V_3^*} \right] \quad (5.42)$$

- **Gradiente das concentrações com relação ao vetor de perturbações**

Finalmente, as derivadas parciais das concentrações com relação a ν ,

$$\left. \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial \nu} \right|_* = \left[\frac{\partial \dot{C}_i}{\partial C_{tr}} \quad \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial Q_{tr}} \quad \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial C_{in}} \quad \frac{\partial \dot{C}_i}{\partial Q_{in}} \right] \Big|_* \quad (5.43)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{C}_1}{\partial \nu} \right|_* = \left[\frac{Q_{tr}^*}{V_1^*} \quad \frac{C_{tr}^* - C_1^*}{V_1^*} \quad \frac{z_{in1}^*}{V_1^*} \quad 0 \right] \quad (5.44)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{C}_2}{\partial \nu} \right|_* = \left[0 \quad 0 \quad \frac{z_{in2}^*}{V_2^*} \quad 0 \right] \quad (5.45)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{C}_3}{\partial \nu} \right|_* = \left[0 \quad 0 \quad \frac{z_{in3}^*}{V_3^*} \quad 0 \right] \quad (5.46)$$

A partir dos desenvolvimentos apresentados na seção 5.4.2, a linearização do modelo no entorno de um ponto de equilíbrio genérico $(x^*, u^*, z_u^*, \nu^*, z_\nu^*)$ resulta no seguinte modelo

$$\dot{x} = A^* x + B_1^* u + B_2^* z_u + \Gamma^* \nu + \Gamma_z^* z_\nu \quad (5.47)$$

com as matrizes A^* , B_1^* , B_2^* , Γ^* e Γ_z^* , definidas como segue:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{Q_{tr}^*(C_{tr}^*-C_1^*)+z_{in1}^*(C_{in}^*-C_1^*)}{V_1^{*2}} & -\frac{Q_{tr}^*+z_{in1}^*}{V_1^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z_{12}^*}{V_2^*} & -\frac{z_{in2}^*(C_{in}^*-C_2^*)+z_{12}^*(C_1^*-C_2)+z_{32}^*(C_3^*-C_2^*)}{V_2^{*2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & -\frac{z_{in2}^*+z_{12}^*+z_{32}^*}{V_2^*} & 0 & \frac{z_{32}^*}{V_2^*} \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -\frac{z_{in3}^*(C_{in}^*-C_3^*)}{V_3^{*2}} & -\frac{z_{in3}^*}{V_3^*} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

$$B_1^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

$$B_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{C_1^*-C_2^*}{V_2^*} & \frac{C_3^*-C_2^*}{V_2^*} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

$$\Gamma^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{Q_{tr}^*}{V_1^*} & \frac{C_{tr}^*-C_1^*}{V_1^*} & \frac{Z_{Q_{in1}}}{V_1^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z_{in2}^*}{V_2^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z_{in3}^*}{V_3^*} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

$$\Gamma_z^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{C_{in}^* - C_1^*}{V_1^*} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{C_{in}^* - C_2^*}{V_2^*} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{C_{in}^* - C_3^*}{V_3^*} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

5.4.3 Ponto de equilíbrio

Considera-se que no ponto de equilíbrio tem-se a seguinte configuração de válvulas (QUEINEC; TABOURIECH (2004), QUEINEC; HARMAND; TABOURIECH (2004)):

$$\begin{cases} v_{i1}^* = 0 \\ v_{i2}^* = 0 \\ v_{i3}^* = 1 \\ v_{1o}^* = 0 \\ v_{3o}^* = 0 \\ v_{12}^* = 1 \\ v_{32}^* = 1 \end{cases} \quad (5.53)$$

isto é, as válvulas de entrada a tanque 3 e de re-circulação do tanque 1 ao tanque 2 e do tanque 3 ao tanque 2 estão abertas e as restantes fechadas, o que resulta nas variáveis auxiliares de equilíbrio seguintes

$$\begin{cases} z_{1o}^* = 0 \\ z_{3o}^* = 0 \\ z_{12}^* = Q_1^* \\ z_{32}^* = Q_3^* \\ z_{in1}^* = 0 \\ z_{in2}^* = 0 \\ z_{in3}^* = Q_3^* \end{cases} \quad (5.54)$$

Considerando para as perturbações (vetor ν) os valores médios como valores de equilíbrio, e para os volumes dos equalizadores a metade da faixa de variação, tem-se:

$$\nu^* = [0 \ 0 \ 4000 \ 90]^T \quad (5.55)$$

$$\begin{cases} V_1^* = 507.5 \\ V_2^* = 1012.5 \\ V_3^* = 1012.5 \end{cases} \quad (5.56)$$

As faixas de variação de volume nos tanques são: $V_1 \in [270, 745]m^3$ e $V_2, V_3 \in [540, 1485]m^3$.

Sendo que no ponto de equilíbrio $\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V}_3 = 0$ e $\dot{C}_1 = \dot{C}_2 = \dot{c}_3 = 0$, obtém-se os valores de equilíbrio para as variáveis restantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1^* = 0 \\ Q_2^* = 90 \\ Q_3^* = 90 \\ C_1^* = 40000 \\ C_2^* = 4000 \\ C_3^* = 4000 \\ z_{32}^* = 90 \\ z_{12}^* = 0 \\ z_{10}^* = 0 \\ z_{in3}^* = 90 \end{array} \right. \quad (5.57)$$

As matrizes do sistema neste ponto de equilíbrio resultam, então:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0079 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0889 & 0 & 0.0889 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0889 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

$$B_1^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

$$B_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 35.5556 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

$$\Gamma^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3.9506 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0889 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

$$\Gamma_z^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -70.9360 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

5.4.4 Considerações com relação à definição de variáveis aleatórias auxiliares

Sendo que Q_{in} é uma perturbação, ao invés de utilizar as variáveis auxiliares z_{in1} , z_{in2} e z_{in3} definidas pelas equações (5.17) como variáveis de otimização, seria mais correto considerar Q_{in} com seu valor esperado (valor médio) ou com seu valor medido, e utilizar as variáveis binárias auxiliares v_{in1} , v_{in2} e v_{in3} como variáveis de otimização. Sendo que, conforme obtido na equação (3.42), a definição de cada variável auxiliar incorpora 4 restrições, logo, além de resultar o problema de otimização num outro com menor número de restrições, resultará num com menor número, também, de variáveis de otimização. Por exemplo, para um horizonte de predição 3, terão, para esta última situação, 36 ($4 \times \text{horizonte} \times \text{número de variáveis}$) restrições e 9 ($\text{horizonte} \times \text{número de variáveis}$) variáveis de otimização a menos. Seguindo este raciocínio, modifica-se o termo $\Gamma_z \nu_z$ da expressão 5.47 como se apresenta a seguir.

Considerando que

$$z_\nu = \begin{bmatrix} z_{in1} \\ z_{in2} \\ z_{in3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{in} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{in} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ v_{i3} \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

e como o sistema está linearizado em torno do ponto de equilíbrio, substitui-se $\Gamma_z z_\nu$ da seguinte forma:

$$\Gamma_z^* z_\nu = \Gamma_z^* \begin{bmatrix} Q_{in}^* & 0 & 0 \\ 0 & Q_{in}^* & 0 \\ 0 & 0 & Q_{in}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ v_{i3} \end{bmatrix} = \Gamma_{in}^* \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ v_{i3} \end{bmatrix} = \Gamma_{in}^* v_{in} \quad (5.64)$$

Para o ponto de equilíbrio indicado, resulta:

$$\Gamma_{in}^* = \begin{bmatrix} 90 & 0 & 0 \\ -6384.24 & 0 & 0 \\ 0 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

O sistema resultante é o seguinte:

$$\dot{x} = A^*x + B_1^*u + B_2^*z_u + \Gamma_{in}^*v_{in} + \Gamma^*\nu \quad (5.66)$$

Ressalva-se que até aqui foi omitida a dependência temporal das variáveis, para maior simplicidade na notação. A partir deste ponto faz-se necessário evidenciar este fato, para identificar diferentes períodos de amostragem ao longo do horizonte de predição.

5.4.5 Sistema em tempo discreto

As equações acima obtidas correspondem ao sistema em tempo contínuo. Adotando uma taxa de amostragem de $0.2horas$, o modelo de tempo discreto resultante apresenta-se a seguir, onde, por simplicidade na notação, omitem-se os supra-índices “*”.

$$x(t+1) = A_d x(t) + B_{1d} u(t) + \Gamma_{ind} v_{in}(t) + B_{2d} z_u(t) + \Gamma_d \nu(t) \quad (5.67)$$

As matrizes são as seguintes:

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9984 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9822 & 0 & 0.0178 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9822 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

$$B_{1d} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

$$\Gamma_{ind} = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ -1276.8 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

$$B_{2d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 7.1111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

$$\Gamma_d = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -3.9506 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0889 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

Complementam este modelo de tempo discreto, as restrições introduzidas na seção seguinte.

5.4.6 Restrições

Tem-se as seguintes restrições de conjunto (HARMAND et al. (1999), QUEINEC; TABOURIECH (2004), QUEINEC; HARMAND; TABOURIECH (2004)) sobre o estado

$$\begin{cases} V_1 \in [270, 745]m^3 \\ V_2 \in [540, 1485]m^3 \\ V_3 \in [540, 1485]m^3 \end{cases} \quad (5.73)$$

e as seguintes sobre o controle

$$\begin{cases} Q_1 \in [0, 8]m^3/h \\ Q_2 \in [0, 188]m^3 \\ Q_3 \in [0, 180]m^3 \end{cases} \quad (5.74)$$

As medições sobre as perturbações no estudo realizado em (QUEINEC; HARMAND; TABOURIECH (2004)), resultaram nos seguintes valores nominais/máxima variação:

$$\begin{cases} \bar{Q}_{in}/\Delta_{max}Q_{in} \rightarrow 90/26.9 [m^3] \\ \bar{C}_{in}/\Delta_{max}C_{in} \rightarrow 4000/1675.8 [g/m^3] \\ \bar{Q}_{tr}/\Delta_{max}Q_{tr} \rightarrow 4/3.74 [m^3] \\ \bar{C}_{tr}/\Delta_{max}C_{tr} \rightarrow 40000/1918.5 [g/m^3] \end{cases} \quad (5.75)$$

Além das restrições de conjunto, temos as seguintes restrições funcionais:

- $v_{1o}(t) + v_{12}(t) = 1$
- $v_{3o}(t) + v_{32}(t) = 1$
- $v_{i1}(t) + v_{i2}(t) + v_{i3}(t) = 1$

Incorporam-se, também, as restrições introduzidas pela definição de variáveis auxiliares (BEMPORADI; MORARI (1999)).

Definem-se

$$\begin{cases} M_{Q_1} = \max(Q_1) \\ M_{Q_3} = \max(Q_3) \\ m_{Q_1} = \min(Q_1) \\ m_{Q_3} = \min(Q_3) \end{cases} \quad (5.76)$$

Finalmente, as restrições introduzidas são as seguintes:

$$\begin{cases} z_{1o}(t) \leq M_{Q_1}v_{1o}(t) \\ -z_{1o}(t) \leq -m_{Q_1}v_{1o}(t) \\ z_{1o}(t) \leq Q_1(t) + m_{Q_1}v_{1o}(t) - m_{Q_1} \\ -z_{1o}(t) \leq -Q_1(t) - M_{Q_1}v_{1o}(t) + M_{Q_1} \end{cases} \quad (5.77)$$

$$\begin{cases} z_{3o}(t) \leq M_{Q_3}v_{3o}(t) \\ -z_{3o}(t) \leq -m_{Q_3}v_{3o}(t) \\ z_{3o}(t) \leq Q_3(t) + m_{Q_3}v_{3o}(t) - m_{Q_3} \\ -z_{3o}(t) \leq -Q_3(t) - M_{Q_3}v_{3o}(t) + M_{Q_3} \end{cases} \quad (5.78)$$

$$\begin{cases} z_{12}(t) \leq M_{Q_1}v_{12}(t) \\ -z_{12}(t) \leq -m_{Q_1}v_{12}(t) \\ z_{12}(t) \leq Q_1(t) + m_{Q_1}v_{12}(t) - m_{Q_1} \\ -z_{12}(t) \leq -Q_1(t) - M_{Q_1}v_{12}(t) + M_{Q_1} \end{cases} \quad (5.79)$$

$$\begin{cases} z_{32}(t) \leq M_{Q_3}v_{32}(t) \\ -z_{32}(t) \leq -m_{Q_3}v_{32}(t) \\ z_{32}(t) \leq Q_3(t) + m_{Q_3}v_{32}(t) - m_{Q_3} \\ -z_{32}(t) \leq -Q_3(t) - M_{Q_3}v_{32}(t) + M_{Q_3} \end{cases} \quad (5.80)$$

5.5 Controle Preditivo

Nesta seção estuda-se a aplicação de técnicas de controle preditivo baseado em modelo (CAMACHO; BORDONS (2000), CLARKE; MOHTADI (1989), CLARKE; MOHTADI; STUFFS (1987), OGUNNAIKE; RAY (1994), GARCÍA; PRETT; MORARI (1989)) ao sistema em estudo. Por simplicidade de notação, os sub-índices d serão omitidos. A análise a seguir baseia-se nos resultados obtidos no capítulo 4.

5.5.1 Preditor de estado

A equação de predição do estado é dada por:

$$\hat{x}(t+j|t) = A \hat{x}(t+j-1|t) + B_1 u(t+j-1) + \Gamma_{in} v_{in}(t+j-1) + B_2 z_u(t+j-1) + \Gamma \nu(t+j-1) \quad (5.81)$$

onde $\hat{x}(t+j|t)$ é a predição do estado no instante futuro $t+j$, feita em t ; j um número inteiro positivo.

Com relação às perturbações, como foi observado no capítulo 4 podem ser mensuráveis ou não. No caso de poderem ser medidas, serão consideradas constantes ao longo do horizonte de predição, com valor igual ao medido em t , e, no caso de não serem mensuráveis, serão consideradas como perturbações constantes, com valores iguais às médias. No caso do exemplo em estudo, os valores médios são conhecidos para todas elas. Na aplicação, C_{in} e Q_{in} serão consideradas perturbações mensuráveis. Para C_{tr} e Q_{tr} o tratamento será diferente. Devido a que estas últimas correspondem a descargas feitas com caminhões, as quais em grande parte do tempo serão nulas, ou seja, são perturbações que se apresentam na forma de pulsos, serão consideradas nulas com relação ao seus pontos de equilíbrio, e não mensuráveis.

Os horizontes de predição e de controle são considerados iguais a N . Trabalhando com a equação de predição (5.81) de forma recursiva, e sendo que, pelas observações feitas sobre perturbações, $\nu(t+j-1) = \nu(t)$, $\forall j = 1, \dots, N$, chega-se ao seguinte preditor

$$\mathcal{X}_p = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}_1 \mathcal{U} + \mathcal{B}_{1\Gamma_{in}} \mathcal{V}_{in} + \mathcal{B}_2 \mathcal{Z}_u + \mathcal{A}_\nu \nu(t) \quad (5.82)$$

onde:

$$\mathcal{A} = [A \quad A^2 \quad \dots \quad A^N]^T \quad (5.83)$$

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ AB_1 & B_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B_1 & A^{N-2}B_1 & \dots & B_1 \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

$$\mathcal{B}_{1\Gamma_{in}} = \begin{bmatrix} \Gamma_{in} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ A\Gamma_{in} & \Gamma_{in} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}\Gamma_{in} & A^{N-2}\Gamma_{in} & \dots & \Gamma_{in} \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

$$\mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0_{n \times n_z} & \dots & 0_{n \times n_z} \\ AB_2 & B_2 & \dots & 0_{n \times n_z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B_2 & A^{N-2}B_2 & \dots & B_2 \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

$$\mathcal{A}_\nu = \begin{bmatrix} \Gamma \\ A\Gamma + \Gamma \\ \vdots \\ A^{N-1}\Gamma + A^{N-2}\Gamma + \dots + \Gamma \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

$$\mathcal{X}_p = [\hat{x}(t+1) \quad \hat{x}(t+2) \quad \dots \quad \hat{x}(t+N)]^T \quad (5.88)$$

$$\mathcal{U} = [u(t) \quad u(t+1) \quad \dots \quad u(t+N-1)]^T \quad (5.89)$$

$$\mathcal{V}_{in} = [v_{in}(t) \quad v_{in}(t+1) \quad \dots \quad v_{in}(t+N-1)]^T \quad (5.90)$$

$$\mathcal{Z}_u = [z_u(t) \quad z_u(t+1) \quad \dots \quad z_u(t+N-1)] \quad (5.91)$$

Definindo

$$\tilde{\mathcal{A}} = [\mathcal{A} \quad \mathcal{A}_\nu] \quad (5.92)$$

$$\tilde{x}(t) = [x^T(t) \quad \nu^T(t)]^T \quad (5.93)$$

$$\mathcal{B} = [\mathcal{B}_1 \quad \mathcal{B}_{1\Gamma_{in}} \quad B_2] \quad (5.94)$$

$$\mathcal{S} = [\mathcal{U}^T \quad \mathcal{V}_{in}^T \quad \mathcal{Z}_u^T]^T \quad (5.95)$$

a equação do preditor resulta na forma mais compacta:

$$\mathcal{X}_p = \tilde{\mathcal{A}} \tilde{x}(t) + \mathcal{B} \mathcal{S} \quad (5.96)$$

5.5.2 Função de Custo

Sejam as trajetórias de referência:

$$\mathcal{X}_{ref} = [x^*(t+1) \quad x^*(t+2) \quad \dots \quad x^*(t+N)]^T \quad (5.97)$$

$$\mathcal{U}_{ref} = [u^*(t) \quad u^*(t+1) \quad \dots \quad u^*(t+N-1)]^T \quad (5.98)$$

$$\mathcal{V}_{in_{ref}} = [v_{in}^*(t) \quad v_{in}^*(t+1) \quad \dots \quad v_{in}^*(t+N-1)]^T \quad (5.99)$$

$$\mathcal{Z}_{u_{ref}} = [z_u^*(t) \quad z_u^*(t+1) \quad \dots \quad z_u^*(t+N-1)]^T \quad (5.100)$$

$$\mathcal{S}_{ref} = [\mathcal{U}_{ref}^{*T} \quad \mathcal{V}_{in_{ref}}^{*T} \quad \mathcal{Z}_{u_{ref}}^{*T}]^T \quad (5.101)$$

Seja Q_x a matriz definida ou semidefinida positiva que pondera o erro de trajetória de estado, e Q_u , Q_v e Q_{z_u} respectivamente, as matrizes de ponderação das trajetórias de variáveis de controle contínuas, de controle lógicas e auxiliares. Define-se para simplicidade na notação:

$$R = \begin{bmatrix} Q_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & Q_{z_u} \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

De maneira análoga ao capítulo 4, consideraremos o seguinte critério de otimização:

$$J = 0.5(\mathcal{X}_p - \mathcal{X}_{ref})^T Q_x (\mathcal{X}_p - \mathcal{X}_{ref}) + 0.5(\mathcal{S} - \mathcal{S}_{ref})^T R (\mathcal{S} - \mathcal{S}_{ref}) \quad (5.103)$$

Trabalhando algebricamente a equação (5.103), tem-se

$$J = 0.5\mathcal{X}_p^T Q_x \mathcal{X}_p - \mathcal{X}_{ref}^T Q_x \mathcal{X}_p + 0.5\mathcal{S}^T R \mathcal{S} - \mathcal{S}_{ref}^T R \mathcal{S} + k_0 \quad (5.104)$$

Na equação anterior, k_0 corresponde a valores positivos constantes (termos quadráticos dos valores de equilíbrio). Estes termos não tem influência na determinação dos valores das variáveis de decisão, assim, sem perda de generalidade, e com a finalidade de simplificar as manipulações algébricas, podem ser desconsiderados.

Manipulando individualmente cada um dos termos da função de custo, tem-se:

$$J_1 = 0.5\mathcal{X}_p^T Q_x \mathcal{X}_p = \tilde{x}^T(t) \tilde{\mathcal{A}}^T Q_x \mathcal{B} \mathcal{S} + 0.5\mathcal{S}^T \mathcal{B}^T Q_x \mathcal{B} \mathcal{S} + k_1 \quad (5.105)$$

onde k_1 corresponde aos termos quadráticos e produtos cruzados em $x(t)$ e $\nu(t)$. Note que k_1 , da mesma forma que k_0 , sendo valores constantes, pode ser excluído da toma de decisão, simplificando os cálculos.

Outro termo da função de custo envolvendo o preditor é:

$$J_2 = -\mathcal{X}_{ref}^T Q_x \mathcal{X}_p = -\mathcal{X}_{ref}^T Q_x \mathcal{B} \mathcal{S} + k_2 \quad (5.106)$$

Desta vez, k_2 inclui produtos cruzados entre o estado de equilíbrio com o estado medido $x(t)$ e com as perturbações $\nu(t)$, termos que resultam constantes, e não serão considerados para fins de otimização.

Com estas simplificações, obtém-se a função de custo equivalente:

$$\bar{J} = 0.5\mathcal{S}^T (\mathcal{B}^T \mathcal{Q}_x \mathcal{B} + R) \mathcal{S} + (\tilde{x}^T(t) \tilde{\mathcal{A}}^T \mathcal{Q}_x \mathcal{B} - \mathcal{X}_{ref}^T \mathcal{Q}_x \mathcal{B} - \mathcal{S}_{ref}^T R) \mathcal{S} \quad (5.107)$$

Esta última é uma função do tipo

$$\bar{J} = 0.5\mathcal{S}^T H \mathcal{S} + f^T \mathcal{S} \quad (5.108)$$

Resumindo, o problema de otimização é formulado a seguir:

$\min_{\mathcal{S}} \bar{J}$ sujeito às seguintes restrições, para $j = 1, \dots, N$:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1(t+j) \in [270, 745]m^3 \\ V_2(t+j) \in [540, 1485]m^3 \\ V_3(t+j) \in [540, 1485]m^3 \\ Q_1(t+j) \in [0, 8]m^3/h \\ Q_2(t+j) \in [0, 188]m^3 \\ Q_3(t+j) \in [0, 180]m^3 \\ v_q(t+j) \in \{0, 1\}, q = i1, i2, i3, 1o, 3o, 12, 32 \\ v_{1o}(t+j) + v_{12}(t+j) = 1 \\ v_{3o}(t+j) + v_{32}(t+j) = 1 \\ v_{i1}(t+j) + v_{i2}(t+j) + v_{i3}(t+j) = 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} z_{1o}(t+j) \leq M_{Q_1} v_{1o}(t+j) \\ -z_{1o}(t+j) \leq -m_{Q_1} v_{1o}(t+j) \\ z_{1o}(t+j) \leq Q_1(t+j) + m_{Q_1} v_{1o}(t+j) - m_{Q_1} \\ -z_{1o}(t+j) \leq -Q_1(t+j) - M_{Q_1} v_{1o}(t+j) + M_{Q_1} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} z_{3o}(t+j) \leq M_{Q_3} v_{3o}(t+j) \\ -z_{3o}(t+j) \leq -m_{Q_3} v_{3o}(t+j) \\ z_{3o}(t+j) \leq Q_3(t+j) + m_{Q_3} v_{3o}(t+j) - m_{Q_3} \\ -z_{3o}(t+j) \leq -Q_3(t+j) - M_{Q_3} v_{3o}(t+j) + M_{Q_3} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} z_{12}(t+j) \leq M_{Q_1} v_{12}(t+j) \\ -z_{12}(t+j) \leq -m_{Q_1} v_{12}(t+j) \\ z_{12}(t+j) \leq Q_1(t+j) + m_{Q_1} v_{12}(t+j) - m_{Q_1} \\ -z_{12}(t+j) \leq -Q_1(t+j) - M_{Q_1} v_{12}(t+j) + M_{Q_1} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} z_{32}(t+j) \leq M_{Q_3} v_{32}(t+j) \\ -z_{32}(t+j) \leq -m_{Q_3} v_{32}(t+j) \\ z_{32}(t+j) \leq Q_3(t+j) + m_{Q_3} v_{32}(t+j) - m_{Q_3} \\ -z_{32}(t+j) \leq -Q_3(t+j) - M_{Q_3} v_{32}(t+j) + M_{Q_3} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.109)$$

5.6 Resultados da simulação

Nesta seção serão apresentados alguns resultados de simulação do sistema considerando a modelamento e o controle preditivo descritos nas seções anteriores, com os seguintes parâmetros:

- horizonte de controle $N = 3$

- matriz de pesos do estado $Q_x = \begin{bmatrix} q_x & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & q_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & q_x \end{bmatrix}$

onde $q_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- matriz de pesos sobre o vetor de controle $Q_u = \begin{bmatrix} q_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & q_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & q_u \end{bmatrix}$

onde $q_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$

- matriz de pesos sobre o vetor de válvulas $Q_v = \begin{bmatrix} q_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & q_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & q_v \end{bmatrix}$

onde $q_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- matriz de pesos sobre o vetor de variáveis auxiliares $Q_{z_u} = \begin{bmatrix} q_z & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & q_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & q_z \end{bmatrix}$

onde $q_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

O sistema foi simulado para as perturbações indicadas na figura 5.2, partindo de um estado inicial próximo do equilíbrio. A simulação do processo foi feita a partir do modelo não linear (5.14), em tempo discreto, com uma taxa de atualização dez vezes maior que a taxa de amostragem do controle.

Como pode ser observado na figura 5.3, o sistema tem um bom comportamento em regulação. A saída apresenta variações máximas de concentração da ordem de 1% e variações máximas de vazão da ordem de 0.04%, sendo que as perturbações (caso C_{in} , Q_{in} , tiveram variações máximas da ordem de 7.5% e 22% respectivamente. Por exemplo, observe que aproximadamente entre os períodos 5 e 25, a concentração de entrada aumenta em 5% do valor médio, e na saída se “reflete” uma variação máxima na concentração de aproximadamente 0.06%. Observe, também que nos períodos (aproximadamente) 48, 60 e 73, se produzem chaveamentos entre v_{i2} e v_{i3} ; estes chaveamentos originam os patamares e “dentes de serra” observados V_2 , V_3 , Q_2 e Q_3 , como resultado principalmente

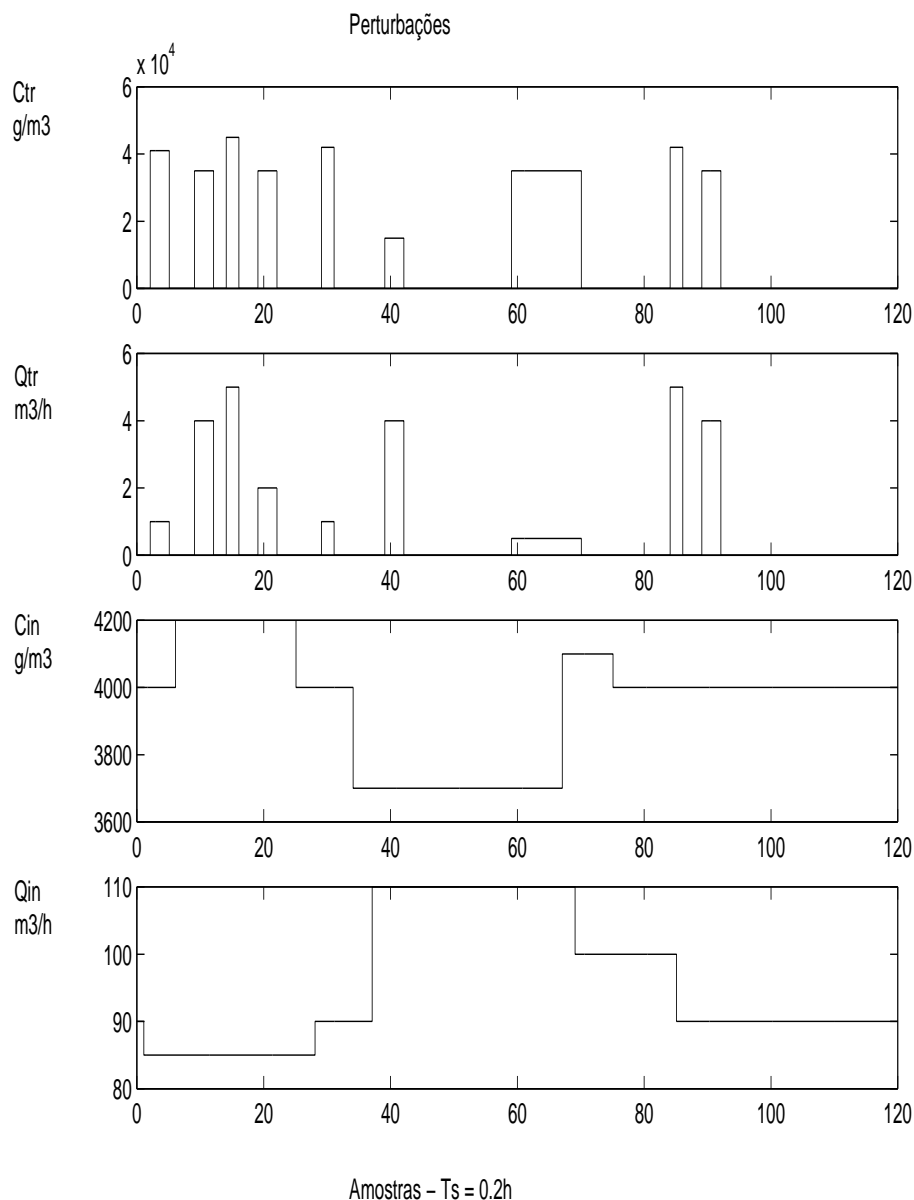


Figura 5.2: Resultados da simulação: Perturbações aplicadas

do aumento da vazão de entrada. Se observa, também, que o valor final de concentração está abaixo da referência (1%) e o da vazão muito pouco acima (0.03%). A explicação pode deduzir-se observando as perturbações C_{in} e Q_{in} : a média de contaminantes (contaminantes nos tanques - contaminantes saíntes + contaminantes entrantes) diminuiu, ou seja, a concentração resultante do sistema não é suficiente como para sustentar a saída no nível de referência; para o caso da vazão, a variação praticamente desprezível, é resultado de ter sido a variação “filtrada” pelos tanques, através do aumento de volume. Na figura 5.4 pode observar-se como os estados, principalmente os volumes, “filtram” as perturbações. Finalmente, a figura 5.5, podem ser observados os chaveamentos das válvulas.

Uma outra simulação a partir de um estado inicial distante do de equilíbrio, permite observar que o sistema apresenta boas características de seguimento, como pode ser conferido nas figuras 5.6, 5.7, 5.8 e 5.9. Pode ser observado como a saída evolui suavemente

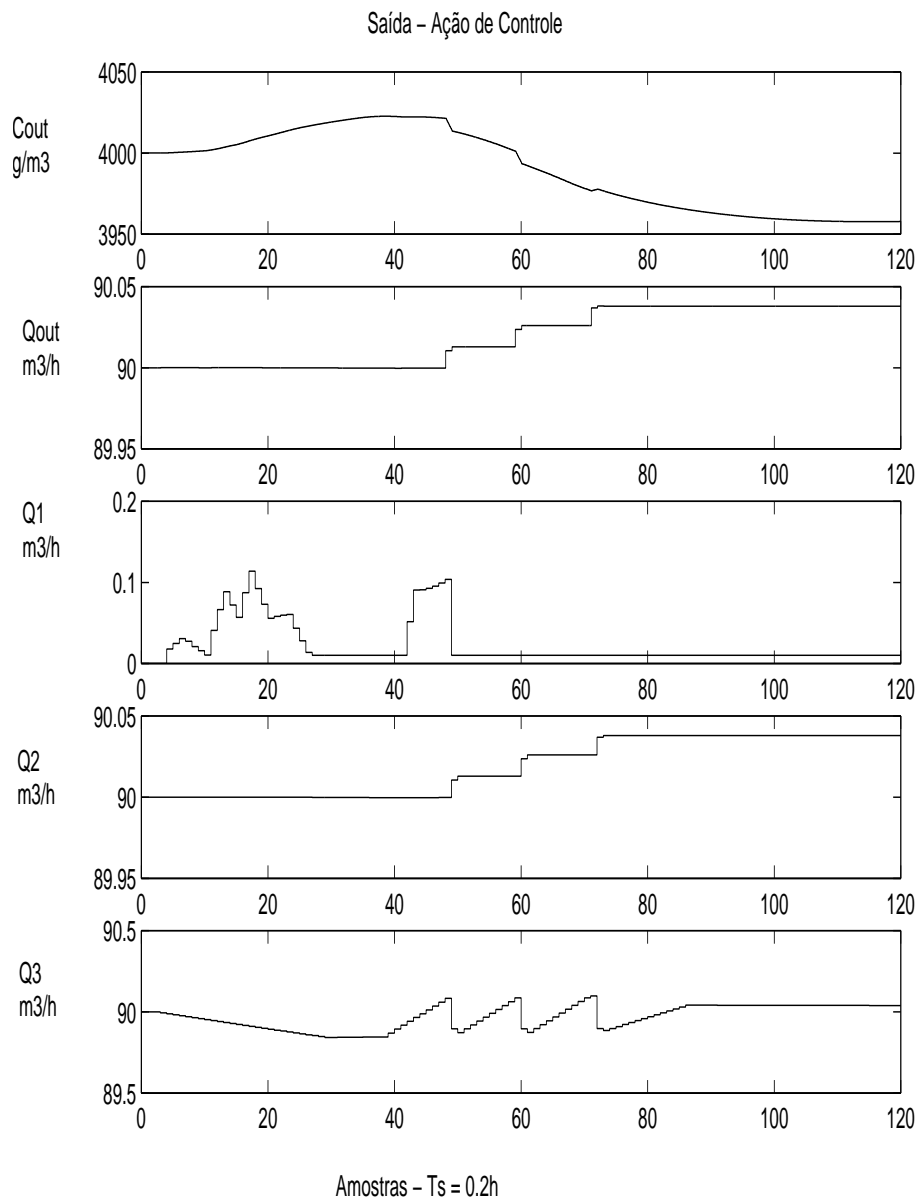


Figura 5.3: Resultados da simulação: PV e MV

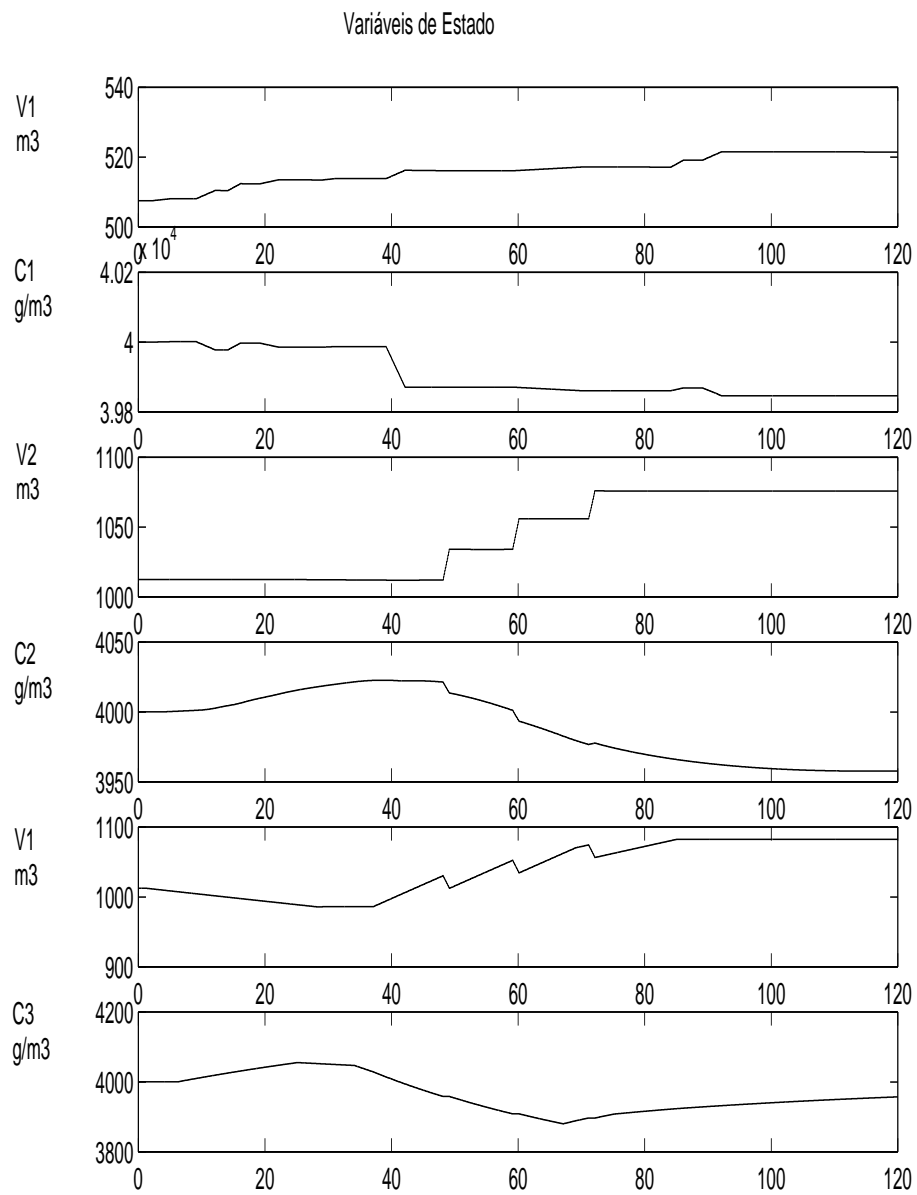


Figura 5.4: Resultados da simulação: Variáveis de Estado

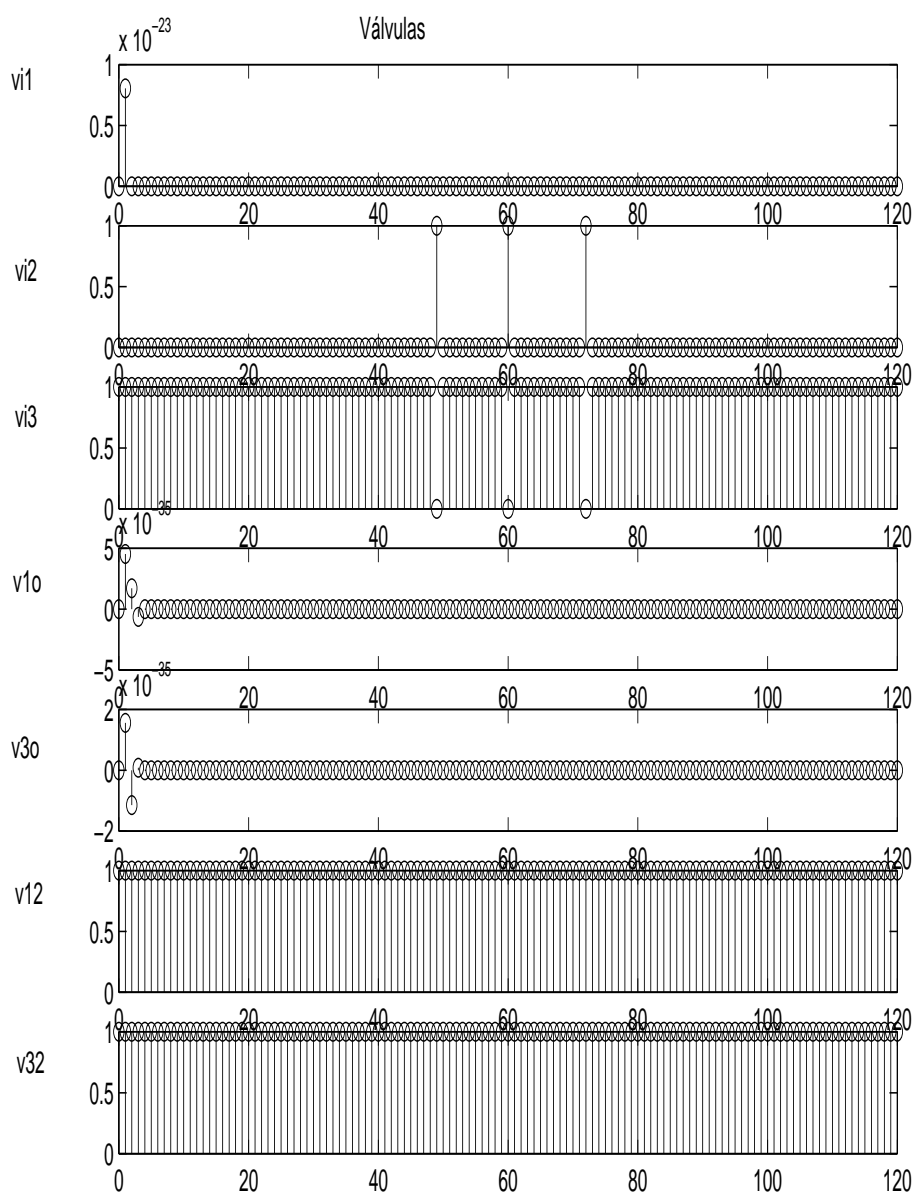


Figura 5.5: Resultados da simulação: Válvulas

em direção ao equilíbrio. Diferentemente da simulação anterior, na qual o sistema era levado até um estado próximo do equilíbrio até liberar o controle automático, podem ser observados grande quantidade de chaveamentos nas válvulas, até estas alcançarem, finalmente, a situação de equilíbrio.

A simulação foi feita para as seguintes condições iniciais:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = [400 \quad 42000 \quad 1500 \quad 4200 \quad 1700 \quad 3800]^T \\ \nu(t) = [0 \quad 0 \quad 4000 \quad 90]^T \\ u(t-1) = [0 \quad 80 \quad 100]^T \\ v_{i1}(t-1) = 1 \\ v_{i2}(t-1) = 1 \\ v_{i3}(t-1) = 0 \\ v_{1o}(t-1) = 1 \\ v_{3o}(t-1) = 1 \\ v_{12}(t-1) = 0 \\ v_{32}(t-1) = 0 \end{array} \right. \quad (5.110)$$

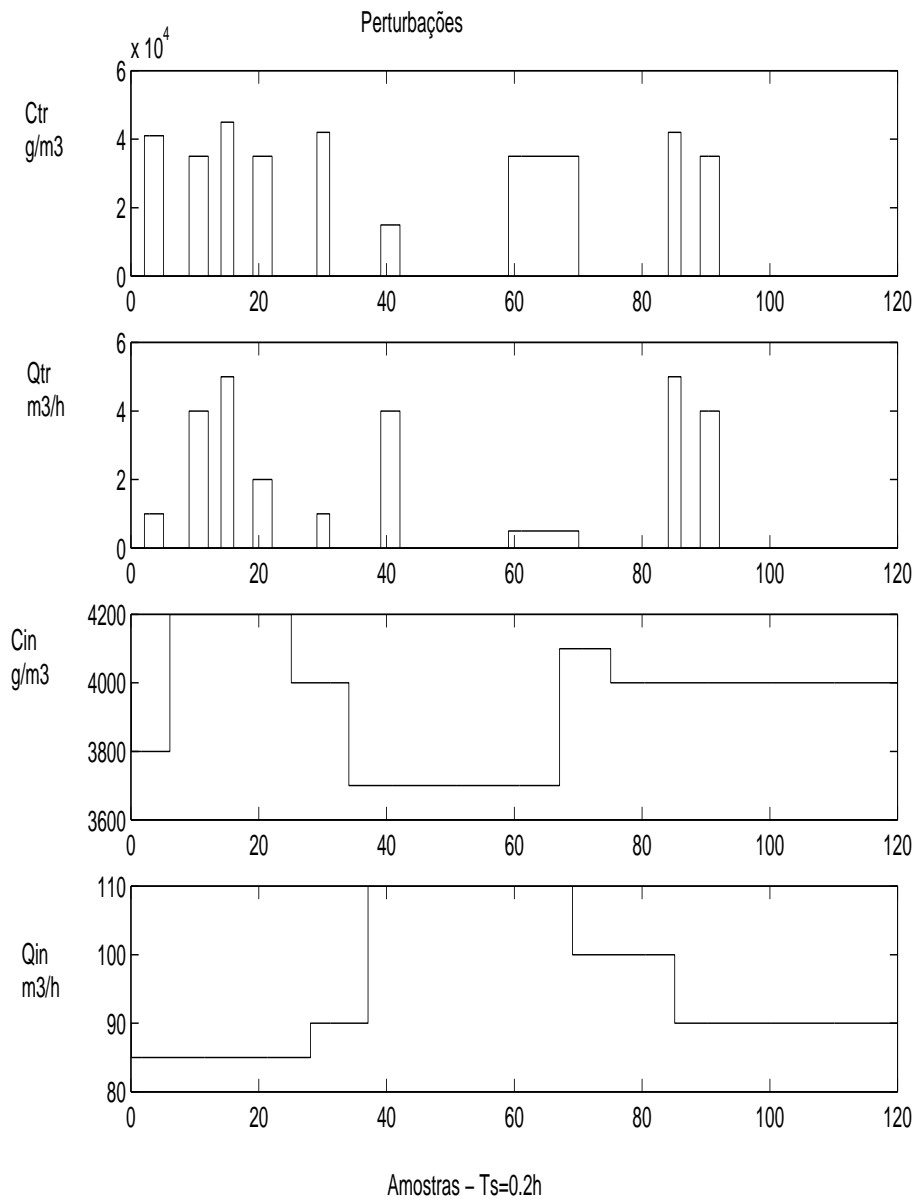


Figura 5.6: Simulação para condição inicial distante do ponto de equilíbrio: Perturbações aplicadas

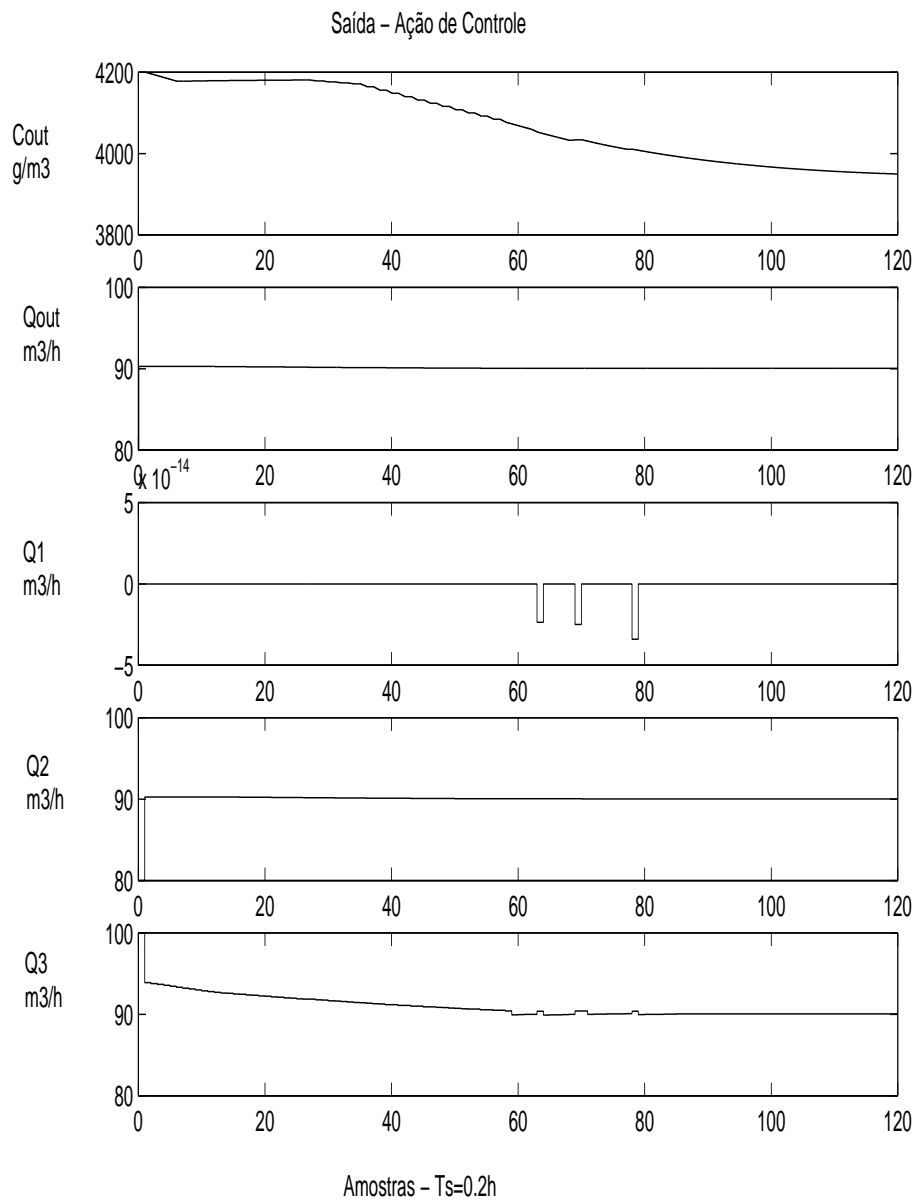


Figura 5.7: Simulação para condição inicial distante do ponto de equilíbrio: PV e MV

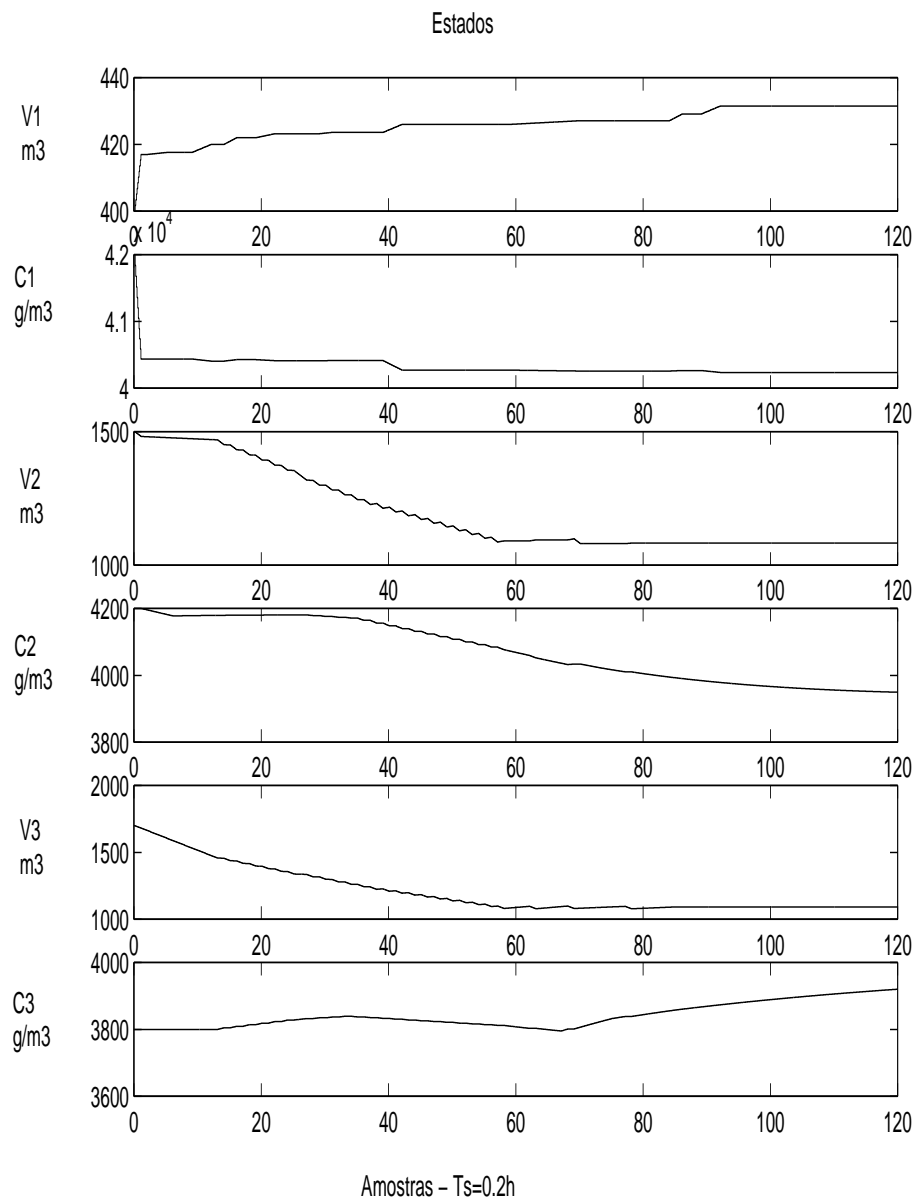


Figura 5.8: Simulação para condição inicial distante do ponto de equilíbrio: Variáveis de Estado

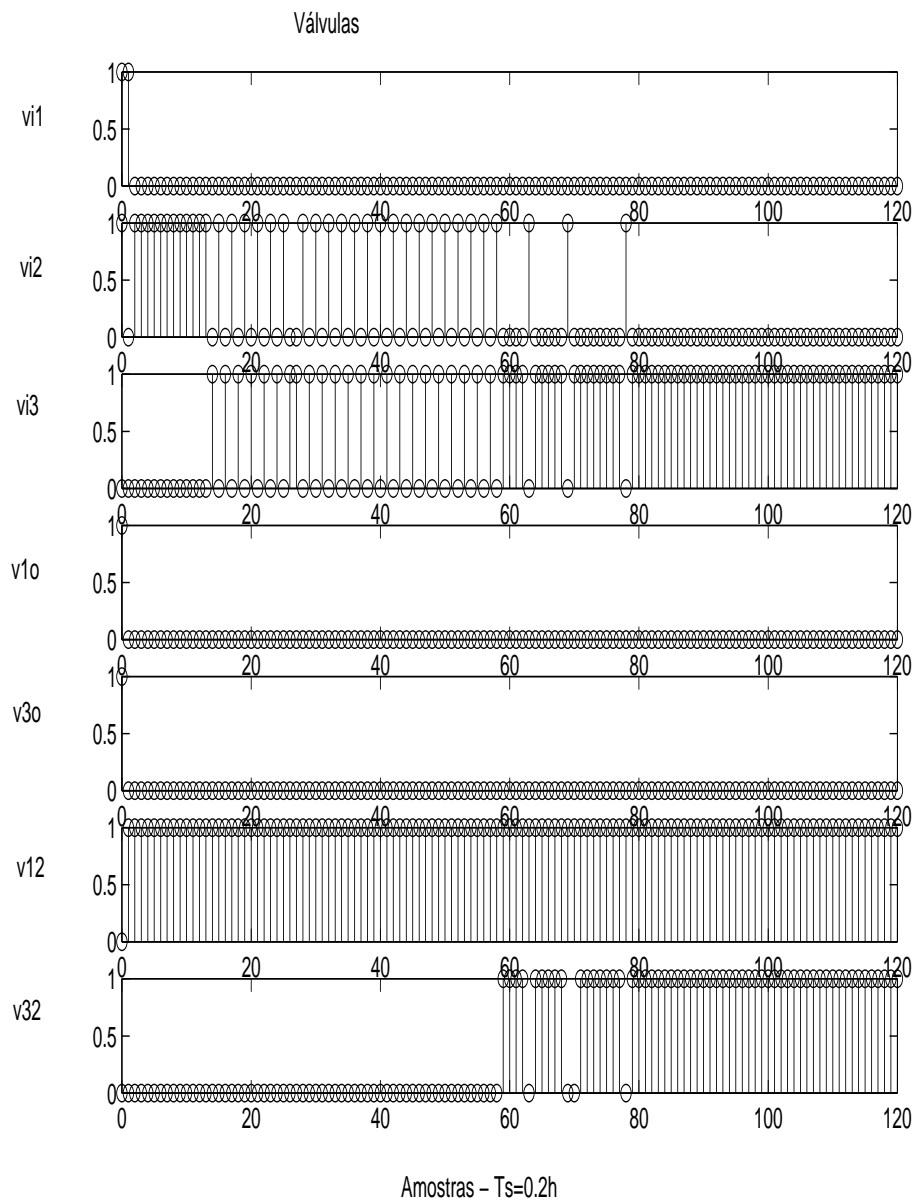


Figura 5.9: Simulação para condição inicial distante do ponto de equilíbrio: Válvulas

6 CONCLUSÕES

Na procura de novas técnicas para a obtenção de sistemas de controle cada vez mais eficientes com relação às especificações cada vez mais estritas no que se refere, principalmente, a qualidade de produto, uso eficiente de energia, segurança e preservação ambiental, ao longo deste trabalho, utilizou-se uma técnica de controle preditivo baseado em modelo. A técnica MPC proposta utiliza o modelo de equações de estado e otimiza o controle do sistema através da minimização de uma função de custo quadrática que pondera o erro médio quadrático da variável sob controle e o esforço de controle. Sob restrições sobre o controle e sobre os estados ou as saídas, o problema de otimização no controle preditivo de sistemas contínuos, pode ser formulado um problema de programação numérica quadrática ou QP.

A necessidade de considerar em processos físicos reais os efeitos da presença de variáveis inteiras ou lógicas, motivou a procura de técnicas de modelagens deste sistemas complexos.

Através de exemplos foi introduzido o conceito de sistemas mistos e técnicas de modelamento aplicáveis aos mesmos. Num primeiro momento, alguns modelos desses exemplos foram obtidos intuitivamente. Posteriormente foi estudado um método sistemático de modelamento. Três tipos de sistemas mistos básicos (e de maior interesse em controle) foram identificados e estudados. Exemplos e simulações destes foram apresentados e avaliados. Ressalva-se que estes três tipos de sistema são considerados básicos no sentido de que grande parte dos sistemas mistos podem pertencer a um deles, ou ser uma combinação dos mesmos.

Devido às suas características, foi então mostrado que o controle preditivo baseado em modelo se apresenta como uma alternativa para o controle de sistemas mistos, uma vez que técnicas de controle clássico não permitem a inclusão de variáveis inteiras ou lógicas, por exemplo, como ações de controle.

Finalmente foi apresentado um estudo de caso no qual foram evidenciadas as características de desempenho satisfatórias da técnica aplicada, tanto em regulação como em seguimento de referência. O sistema estudado tem um comportamento não linear e, como as técnicas apresentadas são lineares, foi necessária a linearização do modelo num ponto genérico de equilíbrio. Este sistema, se enquadra no terceiro caso dos apresentados, já que tem ações de controle lógicas e contínuas.

Os resultados obtidos, permitem confirmar a aplicabilidade e vantagens desta técnica. Embora o modelo de sistemas mistos seja bastante complexo, a estratégia de controle preditivo, através da introdução de restrições apropriadas, permite tratar o problema.

Assim como foram observadas vantagens, destacou-se a principal desvantagem vinda do fato de longos tempos de execução de algoritmos de programação inteira mista.

Um outro problema que não pode ser deixado fora de consideração, é a necessidade

de políticas de administração de não factibilidades. No capítulo 4, foram apresentados exemplos nos quais apresentaram-se soluções não factíveis. Uma política simples foi aplicada, mediante a qual, na presença de uma não factibilidade, a solução obtida no instante anterior é aplicado no instante atual. Porém, em sistemas mais complexos, e na presença de dinâmicas complexas, possivelmente não será suficiente.

Como perspectivas de continuidade deste trabalho e de pesquisas futuras, podem ser citadas, entre outras, as seguintes:

- Desenvolvimento de algoritmos para a solução de problemas MINLP de baixo tempo de execução, que permitam a aplicação das técnicas apresentadas a sistemas de menores constantes de tempo. Como foi visto, a grande quantidade de variáveis de otimização e de restrições envolvidas, limitam a aplicação a sistemas com dinâmicas muito lentas.
- Estudos de robustez e de estabilidade dos métodos apresentados.
- Aplicação a sistemas instáveis em malha aberta, a sistemas com grandes atrasos de transporte e a sistemas com comportamento de fase não mínima.
- Estudo de políticas de administração de não factibilidades em sistemas complexos.
- Considerar a modelamento de sistemas mistos não lineares, e aplicação de técnicas MPC não lineares. Neste caso, especial atenção deverá ser dada à complexidade computacional dos algoritmos de otimização (PEREIRA; SECCHI).

REFERÊNCIAS

- BALAS, E.; CERIA, S.; CORNUÉJOLS, G. Solving Mixed 0-1 Problems by a Lift-and-Project Method. **Carnegie Mellon University**, [S.l.], p.232–242.
- BARTON, P. I.; LEE, C. K. Modeling, Simulation, Sensitivity Analysis and optimization of Hibrid Systems. **ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation**, [S.l.], v. Vol. 12, p.256–289, October 2002.
- BEMPORAD, A.; MIGNONE, D. A Matlab Fuction for Solving Mixed Integer Quadratic Programs, Version 1.02, User Guide. **Institut für Automatik, ETH**, Swiss Federal Institute of Technology, Zürich, Switzerland, October 2000.
- BEMPORADI, A.; MORARI, M. Control of Systems Integrating Logic, Dynamics and Constraints. **Automatica**, [S.l.], v.35, p.407–427, 1999.
- BRANICKY, M. S. A Unified Framework for Hybrid Control: model and optimal control theory. **IEEE Trans Aut. Control**, [S.l.], v.35, p.31–45, 1998.
- BUSSIECK, M. R.; PRUESNER, A. Mixed-Integer Nonlinear Programming. **GAMS Development Corporation**, Washington, DC - USA, February 2003.
- CAMACHO, E.; BORDONS, C. **Model Predictive Control**. [S.l.]: Springer, 2000.
- CLARKE, D.; MOHTADI, C. Properties of Generalized Predictive Control. **Automatica**, [S.l.], v.25, p.859–875, 1989.
- CLARKE, D.; MOHTADI, C.; STUFFS, P. Generalized Predictive Control - Part II. Extensions and Interpretations. **Automatica**, [S.l.], v.23, p.149–160, 1987.
- GARCÍA, C.; PRETT, D.; MORARI, M. Model Predictive Control: theory and practice - a survey. **Automatica**, [S.l.], v.25, p.335–348, 1989.
- HARMAND, J.; STEYER, J. P.; DEVISSCHER, M.; VANROLLEGHEM, P. Fuzzy supervisory control of an industrial wastewater equalization system. In: **WORLD MULTICONFERENCE ON SYSTEMATICS, CYBERNETICS AND INFORMATICS 3**, 1999. Orlando - USA, p.95–101.
- LUENBERGER, D. G. **Introduction to Linear and Quadratic Programming**. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1973.
- OGUNNAIKE, B. A.; RAY, W. H. **Process Dynamics Modeling and Control - Model Predictive Control**. New York - USA: Oxford University Press, 1994.
- PEREIRA, E.; SECCHI, A. Algorithm for Solution of Convex MINLP problems. **Relatório Técnico Dpto. Matemática e Eng. Química**, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - Brasil.

- PIKE, A. **The Control Handbook - Predictive Control**. Industrial Control Centre, University of Starthclyde, Glasgow/Scotland - U.K.: CRC Press, Inc., 1996.
- QUEINEC, I.; HARMAND, J.; TABOURIECH, S. Analysis and control of a wastewater equalization system. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER APPLICATIONS IN BIOTECHNOLOGY 9, 2004. Nancy, France.
- QUEINEC, I.; TABOURIECH, S. A saturated control strategy for a wastewater equalization system. **Seminário Anual de Automática, Eletrônica Industrial e Instrumentação (SAAEI-EPF'04)**, Toulouse, France, September 2004.
- RAMAN, R.; GROSSMANN, I. E. Relation between MILP Modelling and Logical Inference for Chemical Process Synthesis. **Comp. Chem. Eng.**, [S.l.], v. Vol. 15, p.73–84, 1991.
- RAMAN, R.; GROSSMANN, I. E. Integration of Logic and Heuristic Knowledge in MILP Optimization for Process Synthesis. **Comp. Chem. Eng.**, [S.l.], v. Vol. 16, p.155–171, 1992.
- RAWLINGS, J. B. Tutorial Overview of Model Predictive Control. **IEEE Control Systems Magazine**, [S.l.], p.38–52, June 2000.
- SCHEFFER, C. B. D. Controle Preditivo Multiobjetivo para Sistemas com Atraso. **Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica**, Florianópolis/SC - Brasil, 2003.
- TYLER, M. L.; MORARI, M. Propositional Logic in Control and Monitoring Problems. **Automatica**, [S.l.], v. Vol. 35, p.565–582, 1999.