Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

PROPRIEDADES ARITMÉTICAS DE ALGUMAS FUNÇÕES DE PARTIÇÃO

Dissertação de Mestrado

ALESSANDRO BAGATINI

Porto Alegre, 18 de março de 2013

Dissertação submetida por Alessandro Bagatini*, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

Banca examinadora:
Prof. Dra. Bárbara Seelig Pogorelski (UFRGS)
Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos (UNICAMP)
Prof. Dr. Vilmar Trevisan (UFRGS)

*Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Agradecimentos

Foram tantos momentos em minha vida em que tive de agradecer profundamente aos meus pais. Não obstante, este não poderia ser diferente. Nestes dois anos do mestrado, se eu tivesse que agradecer a tudo que foi feito, faria uma escrita digna de uma nova dissertação. Por isso, simplesmente, quero dizer um singelo OBRIGADO, mas que nele está embutida toda a minha gratidão pelo apoio prestado (emocional e financeiro, é claro!). Certamente não teria conseguido sem a ajuda de vocês.

Um agradecimento mais do que especial eu devo ao professor Eduardo, pela orientação, especialmente nestes dois anos de mestrado, sem contar o tempo como bolsista na graduação. Você é um exemplo de professor, pesquisador e principalmente um exemplo de pessoa. Agradeço pela paciência, ajuda, pedidos de socorro, conselhos e etc. Muito Obrigado!

Aos meus familiares, que além deste laço, são principalmente amigos. Obrigado pela compreensão nos momentos em que estive ausente e todo o suporte dado, conselhos e cobranças, fundamentais para que este momento se realizasse.

Um agradecimento especial eu devo a UFRGS pela oportunidade de um ensino de extrema qualidade. Juntamente, aproveito para agradecer ao Instituto de Matemática e seu excelente corpo docente, indispensáveis para uma boa formação tanto na graduação como na pós. Aos colegas de curso, pelo apoio, momentos de estudos, auxílios e conversas na "sala do café". Agradeço especialmente a Grasi, a Camilla, ao Gui e ao Fernandinho.

Bem como dizem, amigos são jóias preciosas. Comigo não seria diferente. Aos meus amigos, que tanto me apoiaram e compreenderam os momentos em que não pude sair e fazer festa com o intuito de estudar para as provas. E olha que não foram poucos estes momentos. Foram pessoas com quem eu pude contar, sempre que precisei. OBRIGADO!

Aos professores José Plínio, Bárbara e Vilmar por aceitarem participar da banca da minha dissertação. Sobretudo, quero agradecer ao professor José Plínio por me aceitar como orientando de doutorado. Sempre admirei o teu trabalho e fico muito honrado por essa oportunidade.

Aos meus pais, meus exemplos de vida.

Resumo

Neste trabalho temos como objetivo principal apresentar algumas congruências relacionadas ao número de partições de um inteiro seguindo algumas restrições. Serão três tipos de partições consideradas. Primeiramente tomam-se partições m-árias, ou seja, cujas partes são potências de m, com m inteiro. Com partições binárias, apesar de serem um caso particular das m-árias com $m = 2$, diferentes resultados serão apresentados. Por último, as partições em que as partes pares são distintas. No desenvolver desta dissertação, usaremos resultados como o do Produto Triplo de Jacobi e a fórmula ${}_1\psi_1$ de Ramanujan.

Abstract

In this work we intend to show some congruences related to the number of partitions of a integer, subject to some restrictions. We consider three types of partitions. At first, we will take m-ary partitions, it means that whose parts are power of m, where m is integer. About binary partitions, despite the fact they are a specific case from m-ary partitions, different theorems will be shown. The last one, partitions whose parts are distinct. In the development of this dissertation, we are going to use known results such as the Jacobi's Triple Product and the Ramanujan's ${}_1\psi_1$ formula.

Índice

Introdução

Srinivasa Ramanujan foi um importantíssimo matemático indiano, nascido em 1887. Desde cedo, era notável sua inteligência e facilidade com os números. Ganhou uma bolsa de estudos, mas a perdeu algum tempo depois devido ao seu inglês ser considerado insuficiente. Continuou seus estudos de uma forma autodidata e após começou a frequentar a universidade local como ouvinte. Reconhecido pelos professores, o aconselharam a mandar seus trabalhos para um brilhante matemático inglês, Godfrey Hardy. Impressionado pelo seu trabalho, convidou Ramanujan para trabalharem juntos na Inglaterra. Ambos trouxeram diversas importantes contribuições para o meio matemático, sendo fundamentais para o desenvolvimento da Teoria das Partições.

Durante os trabalhos em Cambridge, visavam encontrar uma fórmula para calcular o número de partições de um inteiro n em partes menores do que ou iguais a ele, $p(n)$. Tentando comprovar alguns resultados obtidos durante suas pesquisas para tal fórmula, necessitaram de cálculos de $p(n)$ para alguns valores de n. Fazendo o uso de uma lista com os 200 primeiros valores de $p(n)$ calculada pelo matemático britânico Percy MacMahon, organizaram-nos em uma tabela em blocos de 5 números, conforme abaixo.

n	$p(n)$	n	$p(n)$	n	$p(n)$
0	1	10	42	20	627
1	1	11	56	21	792
2	2	12	77	22	1002
3	3	13	101	23	1255
4	5	14	135	24	1575
5	7	15	176	25	1958
6	11	16	231	26	2436
7	15	17	297	27	3010
8	22	18	385	28	3718
9	30	19	490	29	4565

Ramanujan então conjecturou uma propriedade expressa nas quintas linhas de cada bloco, que seus respectivos números de partições são múltiplos de 5, ou seja,

$$p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5.$$

Além de tal conjectura, ele começou a trabalhar com outros blocos, de tamanhos 7 e 11. Com estes, também foi possível conjecturar duas novas congruências:

$$p(7n+5) \equiv 0 \pmod 7,$$

$$p(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}.$$

Mais do que isso, outras congruências começaram a estabelecer algum padrão para blocos de tamanho $5^a 7^b 11^c$. Observando a tabela calculada por MacMahon, Ramanujan conjecturou a veracidade do seguinte teorema.

Teorema: *Sejam δ, λ inteiros tais que $\lambda = 5^a 7^b 11^c$ e $24 \cdot \lambda \equiv 1 \pmod \delta$. Então vale que*

$$p(\lambda),\ p(\lambda+\delta),\ p(\lambda+2\delta), \cdots \equiv 1 \pmod \delta.$$

No mesmo *paper* em que tal conjectura foi publicada, afirmou não estar apto ainda para a prova e acrescentou as demonstrações das congruências anteriormente descritas $p(5n+4)$ e $p(7n+5)$. Entretanto, em 1930, Sarvadaman Chowla, examinando uma extensão para a tabela, verificou que, mesmo tendo $24 \cdot 243 \equiv 1 \pmod{7^3}$,

$$p(243) = 133978259344888$$

o qual não é congruente a 0 módulo 7^3, invalidando assim tal conjectura.

A partir daí, modificações do enunciado do teorema foram provadas. Em 1938, George Watson mostrou a veracidade para potências de 5 e 7. Em 1967, 48 anos após a publicação da proposição de Ramanujan, Arthur Atkin provou a versão mais geral possível:

Teorema: *Sejam δ, λ inteiros tais que $\lambda = 5^a 7^b 11^c$ e $24 \cdot \lambda \equiv 0 \pmod{\delta}$. Então vale que*

$$p(\lambda) \equiv 0 \pmod{5^a 7^{\lceil \frac{b+2}{2} \rceil} 11^c},$$

sendo $\lceil \frac{b+2}{2} \rceil$ o menor valor inteiro que seja maior que ou igual a $\frac{b+2}{2}$.

Desde então, muitos outros tipos de partições começaram a ser estudados e assim outras congruências. Várias restrições às partes destas partições foram consideradas e muitos trabalhos foram desenvolvidos. Nesta dissertação, temos em vista apresentar alguns tipos de partições e consequentemente analisar algumas possíveis congruências recorrentes, já trabalhadas em alguns artigos. Serão três diferentes tipos de partições que serão considerados, cada um em um capítulo diferente.

Antes disso, no Capítulo 1, vários conceitos e resultados serão apresentados. Alguns deles serão provados, porém todos serão de extrema utilidade no decorrer deste texto. O capítulo está dividido em duas partes, a primeira contendo definições e resultados importantes na teoria de partições de inteiros, bem como alguns resultados aritméticos também úteis para o desenvolvimento teórico. Já na segunda, serão enunciados dois teoremas importantes: o Produto Triplo de Jacobi e a Fórmula ${}_1\psi_1$ de Ramanujan. Neste último, serão consideradas algumas observações referentes à convergência da série de Laurent envolvida no teorema.

No segundo capítulo, tomaremos o trabalho desenvolvido por Oystein Rodseth e James Sellers [11] para apresentar os resultados mostrados nos mesmo. Neste, o tipo de partição que será tomada é a de partições m-árias, ou seja, cujas partes são potências de um inteiro m. Na primeira seção serão enunciados diversos lemas necessários para demonstrar o teorema que garante uma congruência para o número de partições m-árias de n, que seguirá na seção seguinte.

No entanto, os teoremas do capítulo anterior nos fornecem congruências mais simples e em menor quantidade para o caso $m = 2$. Assim, os mesmos autores revisitaram o caso de partições binárias, ou seja, cujas partes são potências de 2 em [12], o qual será a fonte dos resultados que serão apresentados no Capítulo 3. Serão dois teoremas principais. O primeiro deles, o qual se encontra na primeira seção, conta com um aparato de lemas para que sua prova seja ali feita. Com ele, alguns corolários serão possíveis de serem concluídos. O segundo teorema, bem como sua demonstração, lemas necessários e seus corolários estão na segunda seção deste capítulo.

No último capítulo desta dissertação, trabalharemos com partições em que as partes pares são distintas, denominadas de *ped(n)*. Tais partições, conforme a definição, não fazem restrições referentes às partes ímpares. Da mesma forma que nos capítulos anteriores, serão apresentados lemas e teoremas que farão parte da Seção 1 e Seção 2, respectivamente. Estes serão úteis para concluir algumas congruências sobre as consideradas partições. Os resultados aqui analisados foram obtidos do artigo [4] escrito por George Andrews, Michael Hirschhorn e James Sellers.

Capítulo 1

Pré-requisitos

No primeiro capítulo desta dissertação serão introduzidos alguns conceitos, notações e resultados básicos para o andamento do trabalho. Tais tópicos serão tomados como conhecidos durante o texto.

1.1 Conceitos Básicos

O trabalho toma como assunto principal o conceito de partição de um número inteiro, conforme a definição a seguir:

Definição 1.1.1. *Uma partição de um inteiro n é uma decomposição de n como soma de outros inteiros positivos maiores do que ou iguais a 1, ou seja, uma maneira de escrever n como $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$, com $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 1$. Cada λ_i é chamado de parte da partição.*

No texto, vários tipos de partições serão apresentados, mais particularmente, um em cada capítulo. Por tipo de partição entende-se como alguma restrição às partes. Por exemplo, uma partição em partes ímpares é um tipo de partição em que as partes consideradas serão somente ímpares.

Usaremos também um conceito muito importante para o desenvolvimento da teoria, o de funções geradoras. Elas nos ajudam a identificar de quantas maneiras diferentes podemos particionar cada número inteiro, segundo a restricão dada. O início do seu uso foi dado por Leonhard Euler (1707-1783). Ele usou a mais fundamental ideia do produto de potências de mesma base para relacionar com partições:

$$q^r \cdot q^s = q^{r+s}.$$

A cada sequência $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, tomaremos sua respectiva série formal de potências da forma $\sum\limits_{n\geq 0} a_n q^n$, como função geradora. Desta forma, a_n será o número de partições de n, seguindo uma determinada restrição.

Para ilustrar tal conceito, seguem três exemplos clássicos de partições e suas respectivas funções geradoras:

Observação: Como convenção, adotaremos o número de partições do número 0 como 1.

Exemplo 1: Partições de inteiros sem repetição das partes. Tome $p_d(n)$ como o número de partições de n em partes distintas. Desta forma, podemos expressar sua função geradora como:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} p_d(n)q^n &= (1+q^1)\cdot(1+q^2)\cdot(1+q^3)\cdots \\
&= \prod_{n\geq 1}(1+q^n) \\
&= 1+q+q^2+2q^3+2q^4+\cdots
\end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que $p_d(1) = 1$, $p_d(2) = 1$, $p_d(3) = 2$, $p_d(4) = 2$ e assim por diante. É claro que $p_d(3) = 2$, $p_d(4) = 2$, por exemplo, pois podemos representar o número 3 de duas maneiras, como $2 + 1$ ou 3, e igualmente para 4, o qual pode ser representado como $1 + 3$ ou 4,

Exemplo 2: Partições irrestritas, ou seja, sem restrições às partes. Será denotada por $p(n)$ a quantidade de partições de n desta forma.

Podemos escrever sua função geradora como:

$$(1 + q + q^2 + \cdots)(1 + q^{2\cdot 1} + q^{2\cdot 2} + \cdots)(1 + q^{3\cdot 1} + q^{3\cdot 2} + \cdots),$$

sabendo que cada potência representa a quantidade de vezes que repete determinada parte, por exemplo, em $q^{2\cdot 3}$ aparecem três vezes a parte 2.

Fazendo uso da soma infinita de uma progressão geométrica, podemos reescrever a identidade acima como:

$$\frac{1}{(1-q)}\frac{1}{(1-q^2)}\frac{1}{(1-q^3)}\cdots = \prod_{n\geq 1}\frac{1}{1-q^n}.$$

Como ilustração, considerando a expansão dos primeiros termos da série, segue que

$$\sum_{n\geq 1} p(n)q^n = 1 + q^1 + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + \cdots,$$

assim nos permitindo concluir que $p(0) = 1$, $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$ e $p(4) = 5$. No caso de $n = 3$, por exemplo, temos $p(3) = 3$ visto que 3 pode ser escrito como 3, $2 + 1$ ou $1 + 1 + 1$. Já para $n = 4$, as partições possíveis são $1 + 1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 2$, $1 + 3$, $2 + 2$ e 4, comprovando então que $p(4) = 5$.

Exemplo 3: Partições em partes ímpares. Chamaremos de $p_o(n)$ o número de partições de n em partes ímpares.

Note que sua função geradora é

$$\sum_{n\geq 0} p_o(n)q^n = (1 + q + q^2 + \cdots)(1 + q^{3\cdot 1} + q^{3\cdot 2} + \cdots)(1 + q^{5\cdot 1} + q^{5\cdot 2} + \cdots)\cdots.$$

Usando a soma de uma progressão geométrica, segue

$$\sum_{n\geq 0} p_o(n)q^n = \frac{1}{1-q^1}\frac{1}{1-q^3}\frac{1}{1-q^5}\cdots = \prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-q^{2k-1}}.$$

Outra notação bastante utilizada no decorrer do trabalho é a seguinte:

Definição 1.1.2. $(a;q)_n = (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\cdots(1-aq^n) = \prod_{k=0}^{n}(1-aq^k)$.

Essa notação também pode ser estendida para o caso em que n tende a infinito, da forma

$$(a;q)_\infty = \lim_{n\to\infty}(a;q)_n = \prod_{n\geq 0}(1-aq^n).$$

Note que as funções geradoras para os três exemplos mostrados acima, conforme a nova notação, podem também ser expressas por:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} p_d(n) &= (-q;q)_\infty \\
\sum_{n\geq 0} p(n) &= \frac{1}{(q;q)_\infty} \\
\sum_{n\geq 0} p_o(n) &= \frac{1}{(q;q^2)_\infty}.
\end{aligned}$$

Consequências da definição:

1. $(a^{2k};q^{2n})_\infty = (a^k;q^n)_\infty(-a^k;q^n)_\infty$

2. Para todo $n \geq 1$, temos $(q;q)_\infty = (q;q^n)_\infty(q^2;q^n)_\infty\cdots(q^n;q^n)_\infty$.

3. $(1-a)(aq;q)_\infty = (a;q)_\infty$.

4. $(q^k;q^k)_\infty = (q^k;q^{rk})_\infty(q^{2k};q^{rk})_\infty\cdots(q^{rk};q^{rk})_\infty$.

Com base nas definições anteriores, estamos aptos a provar o seguinte teorema, devido a Euler, que estabelece uma relação entre o número de partições de um inteiro em partes distintas e em partes ímpares.

Teorema 1.1.3. (Teorema de Euler) *O número de partições de um inteiro n em partes distintas é igual ao número de partições em partes ímpares, ou seja, $p_d(n) = p_o(n)$. Em notação de funções geradoras, tal resultado equivale a*

$$(-q;q)_\infty = \frac{1}{(q;q^2)_\infty}.$$

Demonstração: Usando a Consequência 1, podemos escrever

$$(q^2; q^2)_\infty = (-q; q)_\infty (q; q)_\infty.$$

Multiplicando em cima e embaixo do lado esquerdo por $(q; q^2)_\infty$ segue

$$\frac{(q; q^2)_\infty (q^2; q^2)_\infty}{(q; q^2)_\infty} = (-q; q)_\infty (q; q)_\infty.$$

Pela Consequência 2, o lado esquerdo pode ser escrito como

$$\frac{(q; q)_\infty}{(q; q^2)_\infty} = (-q; q)_\infty (q; q)_\infty,$$

e dividindo ambos os lados por $(q; q)_\infty$, temos

$$(-q; q)_\infty = \frac{1}{(q; q^2)_\infty}.$$

■

Durante o trabalho, as propriedades aritméticas que almejamos revisitar estão relacionadas com o conceito de congruência, cuja definição é dada a seguir:

Definição 1.1.4. *Dizemos que um inteiro k é congruente a r módulo s se $k - r$ é divisível por s. Notação: $k \equiv r \pmod{s}$.*

Note que quando dizemos que um inteiro k é congruente a 0 módulo s significa que k é divisível por s.

Um conceito também utilizado na dissertação é o de *maior inteiro*, cuja definição formal está abaixo:

Definição 1.1.5. *A função maior inteiro é a que associa a cada número real x o maior inteiro menor do que ou igual a x. Sua notação é $\lfloor x \rfloor$.*

Proposição 1.1.6. *Para um número real x temos:*

a) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$, *para todo inteiro n.*

b) $\lfloor x \rfloor \leq x < x + 1$, $x - 1 < x \leq \lfloor x \rfloor$ *e* $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$.

As afirmações acima são consequências diretas da definição da função maior inteiro.

Analogamente, podemos definir a função *menor inteiro*, como segue:

Definição 1.1.7. *A função menor inteiro é a que associa a cada número real x o menor inteiro maior do que ou igual a x. Sua notação é $\lceil x \rceil$.*

Do Teorema Binomial, é possível extrair outra igualdade que será usada em algumas partes do texto. Esta segue como uma proposição.

Proposição 1.1.8. *Para $|q| < 1$ e para todo $n \geq 0$ vale que*

$$\frac{1}{(1-q)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} q^i.$$

1.2 Fórmula ${}_1\psi_1$ de Ramanujan e Produto Triplo de Jacobi

Nesta seção serão apresentadas duas famosas identidades: O produto triplo de Jabobi, devido a Jacobi (1804-1851) e a fórmula ${}_1\psi_1$ de Ramanujan (1887-1920). As demonstrações de tais teoremas não serão apresentadas. A prova do Produto Triplo pode ser encontrada em [9], onde é analisado sob aspectos combinatórios e analíticos. A prova da Fórmula ${}_1\psi_1$ pode ser encontrada em [5]. Além de enunciarmos tal Fórmula, tendo em vista que envolve uma série de potências, analisaremos algumas condições que garantam a convergência da mesma. Para tanto, será necessário o uso do Teorema do Teste da Razão para séries, o qual se encontra demonstrado em [8].

Teorema 1.2.1. (Produto Triplo de Jacobi) *Para $|q| < 1$ e $z \neq 0$, temos*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \prod_{n\geq 1}(1-q^n)(1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1}),$$

ou equivalentemente,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} = (q;q)_\infty(-zq;q)_\infty(-z^{-1};q)_\infty.$$

Antes de enunciarmos a fórmula ${}_1\psi_1$ de Ramanujan, é preciso dar um significado para a notação $(a;q)_n$, quando n é negativo. Por isso, podemos reescrever a definição de $(a;q)_\infty$ da forma

$$(a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty},$$

para $n > 0$. Assim, para valores negativos, suponhamos $n = -m$, vale

$$(a;q)_{-m} = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^{-m};q)_\infty} = \frac{1}{(aq^{-m};q)_m}.$$

A partir da extensão do conceito de $(a;q)_n$ para valores negativos, estamos aptos a enunciar uma famosa fórmula, devida a Ramanujan:

Teorema 1.2.2. (Fórmula ${}_1\psi_1$ de Ramanujan) *Para $|q| < 1$ e $|ba^{-1}| < |x| < 1$, temos*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(b;q)_n} x^n = \frac{(ax;q)_\infty(q/ax;q)_\infty(q;q)_\infty(b/a;q)_\infty}{(x;q)_\infty(b/ax;q)_\infty(b;q)_\infty(q/a;q)_\infty}.$$

Note que, tomando $b = q$, a Fórmula ${}_1\psi_1$ nos dá o Teorema q-binomial enunciado a seguir.

Teorema 1.2.3. *Para as variáveis q e z e para um número natural n, vale a identidade*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(aq;q)_n}{(q;q)_n} x^n = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}.$$

Alguns comentários são pertinentes com respeito ao enunciado da Fórmula ${}_1\psi_1$. As hipóteses do Teorema são muito importantes para garantir a convergência da série. Antes disso, é necessário relembrar um teorema referente à convergência de séries de potências:

Teorema 1.2.4. (Teste da Razão) *Se* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1$, *então a série* $\sum c_n$ *é convergente.*

Separaremos a soma $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(b;q)_n}x^n$ em duas partes: para $n \geq 0$ e $n < 0$.

Para $n \geq 0$, tome

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(b;q)_n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-a)\cdots(1-aq^{n-1})}{(1-b)\cdots(1-bq^{n-1})}x^n.$$

Pelo teste da razão, a série converge se tivermos que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{1-aq^n}{1-bq^n}x\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{1-aq^n}{1-bq^n}\right||x| < 1.$$

Além disso, é fácil ver que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{1-aq^n}{1-bq^n}\right| = 1,$$

pois $|q| < 1$ e, por isso, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|q^n| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$. Portanto a série converge se $|x| < 1$.

Para $n < 0$, tome $n = -m$ e

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(a;q)_{-m}}{(b;q)_{-m}}x^{-m} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-bq^{-m})\cdots(1-bq^{-1})}{(1-aq^{-m})\cdots(1-aq^{-1})}x^{-m}.$$

Novamente pelo teste da razão, a convergência da série é garantida se tivermos que

$$\begin{aligned}
\lim_{m\longrightarrow\infty}\left|\frac{c_{m+1}}{c_m}\right| &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{1-bq^{-m-1}}{1-aq^{-m-1}}\cdot\frac{1}{x}\right| \\
&= \lim_{m\longrightarrow\infty}\left|\frac{q^{m+1}-b}{q^{m+1}-a}\cdot\frac{1}{x}\right| \\
&= \lim_{m\longrightarrow\infty}\left|\frac{q^{m+1}-b}{q^{m+1}-a}\right|\cdot\left|\frac{1}{x}\right| < 1.
\end{aligned}$$

Da mesma forma em que foi calculado para o caso $n \geq 0$, é possível ver que $\lim_{m \longrightarrow \infty} \left| \frac{q^{m+1} - b}{q^{m+1} - a} \right| = \left| \frac{b}{a} \right|$. Assim,

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \left| \frac{c_{m+1}}{c_m} \right| = \left| \frac{b}{a} \right| \left| \frac{1}{x} \right| < 1,$$

implica na condição

$$|a^{-1}b| < |x|.$$

Com isso, a convergência da Série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(b;q)_n} x^n$ está garantida para $|a^{-1}b| < |x| < 1$.

Capítulo 2

Congruências acerca de partições m-árias

Em 1968, utilizando a mais alta tecnologia computacional existente na época, R. F. Churchhouse [7] descobriu alguns fatos envolvendo partições binárias $b(n)$ que é o número de maneiras de escrever n como $n = 2^{a_0} + 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots.$, com $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots$.

Os resultados obtidos foram: Para todo $k, n \geq 1$,

$$b(2^{2k+2}n) \equiv b(2^{2k}n) \pmod{2^{3k+2}}$$

e

$$b(2^{2k+1}n) \equiv b(2^{2k-1}n) \pmod{2^{3k}}.$$

Com o passar do tempo, várias extensões foram feitas a partir do resultado original. Rodseth [10], além de provar a descoberta de Churchhouse, provou que, para todo p primo e para todo $r, n \geq 1$,

$$b_p(p^{r+1}n) \equiv b_p(p^r n) \pmod{p^r},$$

sendo $b_p(n)$ o número de partições de n em potências de p.

Andrews [1] estendeu a descoberta de Churchhouse generalizando que, para todo $m \geq 2$ e todo $r, n \geq 1$, temos

$$b_m(m^{r+1}n) \equiv b_m(m^r n) \quad (\mathrm{mod}\ \frac{m^r}{c_r}), \tag{2.1}$$

com $c_r = 1$, se m é ímpar e $c_r = 2^{r-1}$ se m é par.

O intuito agora é mostrar uma extensão da versão de Andrews. Serão apresentados os teoremas que foram provados envolvendo partições m-árias, ou seja, partições em potências de m, que foram estudadas em [11] . Após, serão enunciados e provados os lemas necessários para então completarmos as demonstrações dos teoremas.

2.1 Teoremas a serem provados

Nesta seção serão apresentados os dois principais teoremas deste capítulo, juntamente com algumas propriedades, observações e uma proposição. Ambos os teoremas serão demonstrados em seções seguintes.

Definição 2.1.1. *Seja $b_m(n)$ o número de partições de n em potências de m, ou seja, o número de maneiras de escrever n na forma*

$$n = m^{a_0} + m^{a_1} + m^{a_2} + \cdots,$$

com $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots$.

Com isso, sua função geradora é $B_m(q) = \sum_{n=0}^{\infty} b_m(n)q^n = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1-q^{m^i}}$ e, desta forma,

$$B_m(q) = \frac{1}{1-q}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{m^i}} = \frac{1}{1-q}\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1-(q^m)^{m^i}} = \frac{1}{1-q}B_m(q^m).$$

Portanto,

$$(1-q)B_m(q) = B_m(q^m). \tag{2.2}$$

Olhando para a expansão em série de potências em ambos os lados, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(b_m(n) - b_m(n-1))q^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_m(n)q^{mn},$$

convencionando que $b_m(-1) = 0$. Comparando os coeficientes, podemos concluir que $b_m(mn) - b_m(mn-1) = b_m(n)$, ou seja,

$$b_m(mn) - b_m(n) = b_m(mn-1). \tag{2.3}$$

Também, expandindo em série de potências, é possível ver que todo elemento de $(1-q)B_m(q)$ cuja potência seja diferente de q^{mn}, deve ser igual a zero, ou seja,

$$\begin{aligned}
b_m(nm-1) &= b_m(nm-2)\\
b_m(nm-2) &= b_m(nm-3)\\
&\vdots\\
b_m(nm-m+1) &= b_m(nm-m).
\end{aligned}$$

Desta forma, procede que

$$b_m(nm-1) = b_m(nm-2) = \cdots = b_m(nm-m+1) = b_m(nm-m). \tag{2.4}$$

Conforme o resultado de Andrews, dado em (2.1), se tomarmos n por $m^r n$, temos

$$\begin{aligned}
b_m(m^{r+1}n) &\equiv b(m^r n) \pmod{\frac{m^r}{c_r}} \\
b_m(m(m^r n)) - b_m(m^r n) &\equiv 0 \pmod{\frac{m^r}{c_r}} \\
b_m(m(m^r n) - 1) &\equiv 0 \pmod{\frac{m^r}{c_r}}, \text{ por (2.3).}
\end{aligned}$$

Usando (2.4), a fórmula em (2.1) pode ser reescrita com uma congruência a 0, da forma

$$b_m(m^{r+1}n - m) \equiv 0 \pmod{\frac{m^r}{c_r}}.$$

O principal objetivo é mostrar o seguinte teorema, que é uma extensão do resultado anterior:

Teorema 2.1.2. *Tome $r \geq 2$ e defina $\sigma_r = \xi_2 m^2 + \xi_3 m^3 + ... + \xi_r m^r$ com $\xi_i = 0$ ou 1. Tome $c_r = 1$ se m é ímpar e $c_r = 2^{r-1}$ se m é par. Então*

$$b_m(m^{r+1}n - \sigma_r - m) \equiv 0 \pmod{\frac{m^r}{c_r}}.$$

OBS: O resultado de Andrews é um caso particular para $\sigma_r = 0$ e pode ser tomado como um corolário. Além disso, com a variação de ξ_i podemos obter 2^{r-1} diferentes congruências.

OBS: Conforme a definição dada acerca de c_r no enunciado do Teorema 2.1.2, note que, dados c_l e c_s, temos

$$c_l \cdot c_s = c_{l+s-1}. \tag{2.5}$$

Definição 2.1.3. *Seja $b_{m,k}(n)$ o número de partições de n em potências de m com expoentes menores do que k, ou seja, o número de maneiras de escrever n na forma*

$$n = m^{a_0} + m^{a_1} + ... + m^{a_j},$$

com $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_j < k$. *Sendo assim, a função geradora para este tipo de partição é* $B_{m,k}(q) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{1-q^{m_i}}$.

Levando em conta a função geradora da partição $b_{m,k}$, segue

$$\begin{aligned} B_{m,k}(q) &= \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{1-q^{m^i}} \\ &= \frac{1}{1-q} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{1-q^{m^i}} \\ &= \frac{1}{1-q} \prod_{i=0}^{k-2} \frac{1}{1-(q^m)^{m^i}} \end{aligned}$$

concluindo que

$$B_{m,k}(q) = \frac{1}{1-q} B_{m,k-1}(q^m). \qquad (2.6)$$

Considere agora o seguinte teorema:

Teorema 2.1.4. *Tome* $r \geq 2$, $k \geq 2$ *e* $s = min(r, k-1)$. *Com isso defina* $\sigma_s = \xi_2 m^2 + \xi_3 m^3 + ... + \xi_s m^s$, *com* ξ_i*=0 ou 1. Tome* $c_r = 1$ *se* m *é ímpar e* $c_r = 2^{r-1}$ *se* m *é par. Então*

$$b_{m,k}(m^{r+1}n - \sigma_s - m) \equiv 0 \pmod{\frac{m^r}{c_s}}.$$

OBS: Se provarmos o Teorema 2.1.4, o Teorema 2.1.2 segue como corolário no caso em que k tende ao infinito.

Como curiosidade, segue uma propriedade acerca de $b_{m,k}(n)$:

Proposição 2.1.5. *O número de partições de* n *em potências de* m, *com expoente menor do que* k *é igual ao número de maneiras de se escrever* n *na forma* $n = c_0 m^0 + c_1 m^1 + c_2 m^2 + \cdots$, *com* $0 \leq c_i < m^k$.

OBS: Primeiramente será feita a prova de forma bijetiva desta proposição, ou seja, criando uma bijeção entre os dois conjuntos de partições. Como prova alternativa, será apresentada uma fazendo uso da teoria de funções geradoras.

Prova Bijetiva: Tome uma partição de n em potências de m com expoentes menores do que k, ou seja,

$$n = m^{a_0} + m^{a_1} + \cdots + m^{a_r}, \text{ com } a_i < k, \forall i \geq 0.$$

Junte as partes iguais e escreva n como

$$n = b_0 m^0 + b_1 m^1 + \cdots + b_{k-1} m^{k-1}.$$

A partir disto, escreva cada coeficiente na base m^k. Distribua as somas e junte termos de mesma potência. Tal partição será conforme descrição do segundo tipo, tendo em vista que, em base m^k, os coeficientes serão menores do que a mesma. Para ilustrar a ideia acima, segue um exemplo:

Tome $n = 6128$, $m = 2$, $k = 4$ e a seguinte partição:

$$n = 20 \cdot 2^0 + 30 \cdot 2^1 + 350 \cdot 2^2 + 581 \cdot 2^3.$$

Escrevendo cada coeficiente em base 2^4, temos

$$n = (2^4 + 4) \cdot 2^0 + (2^4 + 14) \cdot 2^1 + (2^8 + 6 \cdot 2^4 + 8) \cdot 2^2 + (2 \cdot 2^8 + 4 \cdot 2^4 + 5) \cdot 2^3$$

e, reorganizando os dados, segue

$$n = 4 + 14 \cdot 2 + 8 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + 2^4 + 2^5 + 6 \cdot 2^6 + 4 \cdot 2^7 + 2^{10} + 2 \cdot 2^{11}.$$

Claramente é do segundo tipo citado. Tal correspondência está bem definida e é injetiva, devido à unicidade da decomposição em base m^k.

De forma inversa, tome n escrito da forma

$$n = c_0 m^0 + c_1 m^1 + c_2 m^2 + \cdots, \text{ com } 0 \leq c_i < m^k.$$

A cada potência de m maior do que ou igual a m^k reescreva-a como $m^{r\cdot k+s}$, com $0 \leq s < k$, ou melhor, como $m^{r\cdot k} \cdot m^s$. Tomando com referência o resto da divisão do expoente por k, junte os iguais. Desta forma, obteremos partições de n em potências de m menores do que m^k, já que os expoentes são restos da divisão por k.

Voltando ao exemplo iniciado anteriormente, temos que

$$n = 4 + 14 \cdot 2 + 8 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 2^4 + 2^5 + 6 \cdot 2^6 + 4 \cdot 2^7 + 2^{10} + 2 \cdot 2^{11}.$$

Expressando conforme foi explicado acima (dividindo os expoentes das potências de 2 por $k = 4$ e separando os restos da divisão),

$$n = 4 + 14 \cdot 2 + 8 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + 2^4 + 2^4 \cdot 2^1 + 6 \cdot 2^4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^4 \cdot 2^3 + 2^8 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^8 \cdot 2^3.$$

e juntando os coeficientes dos termos iguais, segue que

$$\begin{aligned} n &= (4 + 2^4) + (2^4 + 14) \cdot 2 + (2^8 + 6 \cdot 2^4 + 8) \cdot 2^2 + (2 \cdot 2^8 + 4 \cdot 2^4 + 5) \cdot 2^3 \\ &= 20 \cdot 2^0 + 30 \cdot 2^1 + 350 \cdot 2^2 + 581 \cdot 2^3. \end{aligned}$$

Note que esta aplicação está bem definida e é injetiva e, claramente, é a inversa da anterior. Sendo assim, uma bijeção. ■

Prova por funções geradoras: Conforme visto anteriormente, sabemos que a função geradora das partições de n em potências de m menores do que m^k é

$$\prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{1 - q^{m^i}}.$$

Tentando comparar ambas funções geradoras, resta agora calcular a das partições de n do tipo $n = c_0 m^0 + c_1 m^1 + c_2 m^2 + \cdots$, com $0 \leq c_i < m^k$. Como $c_i < m^k$ e usando a soma de uma P.G. finita, a função geradora é

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{\infty}(1+q^{m^i}+q^{2m^i}+\cdots+q^{(m^k-1)m^i}) &= \prod_{i=0}^{\infty}\frac{1-q^{m^k\cdot m^i}}{1-q^{m^i}}\\
&= \prod_{i=0}^{\infty}\frac{1-q^{m^{k+i}}}{1-q^{m^i}}\\
&= \prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{1-q^{m^i}}.
\end{aligned}$$

Comparando as funções geradoras, o resultado segue. ■

2.2 Os lemas

Nessa seção vários lemas serão apresentados e demonstrados, os quais serão necessários para provar o Teorema 2.1.4.

Definição 2.2.1. *Seja $\mathbb{Z}[[q]]$ o anel das séries formais de potências em q com coeficientes em $\mathbb{Z}$, m um número inteiro tal que $m \geq 2$ e tome*

$$\begin{aligned}
U : \mathbb{Z}[[q]] &\longrightarrow \mathbb{Z}[[q]]\\
U\left(\sum_n a(n)q^n\right) &= \sum_n a(nm)q^n.
\end{aligned}$$

Note que U é um operador linear.

Desta forma, podemos concluir que

$$U\left(\sum_n a(n)q^{n+1}\right) = U\left(\sum_n a(n-1)q^n\right) = \sum_n a(nm-1)q^n. \tag{2.7}$$

Lema 2.2.2. *Sejam $f(q)$ e $g(q) \in \mathbb{Z}[[q]]$, m inteiro com $m \geq 2$. temos*

$$U(f(q)\cdot g(q^m)) = U(f(q))\cdot g(q). \tag{2.8}$$

Demonstração: Iniciaremos a demonstração para um caso particular $g(q) = q^l$. Tome $f(q) \in \mathbb{Z}[[q]]$, ou seja, $f(q) = \sum_n a(n)q^n$. Assim,

$$U(f(q)g(q^m)) = U(\sum_n a(n)q^n \cdot q^{ml}).$$

Assim, tome $k = n + ml$, ou seja, $n = k - ml$.

$$\begin{aligned} U(\sum_n a(n)q^{n+ml}) &= U(\sum_k a(k-ml)q^k) \\ &= \sum_k a(mk-ml)q^k \\ &= \sum_k a(m(k-l))q^k \\ &= \sum_k a(mk)q^{k+l} \\ &= (\sum_k a(mk)q^k)q^l = U(f(q)) \cdot g(q). \end{aligned}$$

Tome agora $g(q)$ da forma $g(q) = \sum_{l=1}^{r} b(l)q^l$. Assim,

$$\begin{aligned} U(f(q)g(q^m)) &= U(\sum_n a(n)q^n \sum_{l=1}^{r} b(l)q^{ml}) \\ &= U(\sum_{l=1}^{r} b(l) \sum_n a(n)q^{n+ml}). \end{aligned}$$

Como U é linear e pelo cálculo feito anteriormente para o caso $g(q) = q^l$, temos

$$\begin{aligned} U(f(q)g(q^m)) &= \sum_{l=1}^{r} b(l)U\left(\sum_n a(n)q^{n+ml}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{r} b(l)U\left(\sum_n a(n)q^n\right)q^l \\ &= \sum_{l=1}^{r} b(l)q^l U\left(\sum_n a(n)q^n\right) = U(f(q))g(q). \end{aligned}$$

Resta agora provar o caso em que $g(q)$ é uma soma infinita. Seja $g(q) =$

$\sum_{k} b(k)q^k$. Escreva $g(q)$ como

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{r} b(k)q^k}_{g_r(q)} + \sum_{k=r+1}^{\infty} b(k)q^k = g_r(q) + q^{r+1}h(q),$$

com $h(q) \in \mathbb{Z}[[q]]$. Assim, pela linearidade de U,

$$\begin{aligned}
U(f(q)g(q^m)) &= U(f(q)g_r(q^m)) + U(f(q)q^{m(r+1)}h(q^m)) \\
&= U(f(q))g_r(q) + U(\sum_{k=mr+m}^{\infty} d(k)q^k) \\
&= U(f(q))g_r(q) + \sum_{k=mr+m}^{\infty} d(mk)q^k \\
&= U(f(q))g_r(q) + q^{mr+m}p(q).
\end{aligned}$$

Seja $r_0 > 0$ e defina a aplicação:

$$[q^{r_0}] : \mathbb{Z}[[q]] \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$[q^{r_0}] \left(\sum_{n} a(n)q^n \right) = a(r_0).$$

Observe que tal aplicação toma séries formais de potências e leva no coeficiente do termo q^{r_0}.

Se provarmos que os coeficientes de $U(f(q)g(q^m))$ e $U(f(q))g(q)$ são iguais, a prova estará concluida.

Tome $r_0 \in \mathbb{N}$ e $r > r_0$. Assim,

$$\begin{aligned}
[q^{r_0}] \left(U(f(q)g(q^m)) \right) &= [q^{r_0}] \left(U(f(q)g_r(q^m)) \right) \\
&= [q^{r_0}] \left(U(f(q))g_r(q) \right) \\
&= [q^{r_0}] \left(U(f(q))g(q) \right).
\end{aligned}$$

Logo, o lema está provado. $\blacksquare$

Definição 2.2.3. *Sejam* $f(q) = \sum_n a(n)q^n$ *e* $g(q) = \sum_n c(n)q^n \in \mathbb{Z}[[q]]$ *e* M *um inteiro positivo. Dizemos que dois elementos de* $\mathbb{Z}[[q]]$ *são congruentes módulo* M *se, e somente se, coeficientes correspondentes a cada termo* q^n *são congruentes módulo* M *para todo* n*, ou seja,*

$$f(q) \equiv g(q) \pmod M \Longleftrightarrow a(n) \equiv c(n) \pmod M, \forall n.$$

Lema 2.2.4. *Se* $gm, r \geq 1$ *então existem* $\alpha_r(i) \in \mathbb{Z}$*, para* $0 \leq i \leq r$*, tais que*

$$\binom{mn+r-1}{r} = \sum_{i=0}^{r} \alpha_r(i)\binom{n+i-1}{i}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Sabemos que existem $\alpha_r(i) \in \mathbb{Q}$ tais que $\binom{mn+r-1}{r} = \sum_{i=0}^{r} \alpha_r(i)\binom{n+i-1}{i}$, já que o lado esquerdo pode ser visto como um polinômio na variável n e, no lado direito, cada termo $\binom{n+i-1}{i}$ pode ser visto como um polinômio de grau i em n, para $i = 1, 2, ..., r$.

Note que, se $n = 0$ temos que $\alpha_r(0) = 0$.

Tome $n = -j$. Então,

$$\begin{aligned}
\binom{-mj+r-1}{r} &= \frac{(-mj+r-1)!}{(-mj-1)!r!} \\
&= \frac{(-mj+r-1)(-mj+r-2)\cdots(-mj+r-1-(r-1))(-mj-1)!}{(-mj-1)!r!} \\
&= \frac{(-mj+r-1)(-mj+r-2)\cdots(-mj+r-1-(r-1))}{r!} \\
&= (-1)^r\frac{(mj)(mj-1)\cdots(mj-r+1)}{r!} \\
&= (-1)^r\binom{mj}{r}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$(-1)^r\binom{mj}{r} = \sum_{i=0}^{j} \alpha_r(i)\binom{-j+i-1}{i} = \sum_{i=0}^{j}(-1)^i\alpha_r(i)\binom{j}{i}$$

e, portanto, passando o termo referente a $i = j$ da soma do lado direito para o lado esquerdo, segue que

$$(-1)^j \alpha_r(j) = (-1)^r \binom{mj}{r} - \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^i \alpha_r(i) \binom{j}{i}.$$

Tendo em vista que $\alpha_r(0) = 0$, de forma indutiva, conclui-se que $\alpha_r(i) \in \mathbb{Z}$, $\forall i \geq 0$.

■

Pelo Lema 2.2.4, expandindo o lado esquerdo e analisando o termo referente a n^r, na igualdade

$$\binom{mn + r - 1}{r} = \sum_{i=0}^{r} \alpha_r(i) \binom{n + i - 1}{i},$$

temos $\dfrac{m^r n^r}{r!}$. Igualmente, do lado direito obtemos $\dfrac{\alpha_r(r) \cdot n^r}{r!}$. Assim,

$$\alpha_r(r) = m^r. \tag{2.9}$$

Agora, compararemos os coeficientes do termo n^{r-1} em ambos os lados para chegarmos a uma fórmula para $\alpha_r(r-1)$:

Pelo lado esquerdo, expandindo $\dfrac{(mn + r - 1)(mn + r - 2) \cdots (mn)}{r!}$, temos o termo referente a n^{r-1} como

$$\frac{(m^{r-1}(r-1) + m^{r-1}(r-2) + \cdots + m^{r-1} \cdot 1)n^{r-1}}{r!} = m^{r-1} \frac{r(r-1)}{2} \cdot \frac{1}{r!}.$$

Pelo lado direito, temos que considerar duas partes:

1) $\alpha_r(r) \binom{n + r - 1}{r}$: Sua expansão é $\dfrac{\alpha_r(r)(n + r - 1)(n + r - 2) \cdots (n - 1)}{r!}$.
Observando apenas o coeficiente do termo referente a n^{r-1}, temos $\dfrac{(r-1) + (r-2) + \cdots + 1}{r!} \alpha_r(r)$. Como $\alpha_r(r) = m^r$, segue que tal coeficiente é $m^r \cdot \dfrac{r(r-1)}{r!}$.

2) $\alpha_r(r-1)\binom{n+r-2}{r-1}$: Da mesma forma, é fácil ver que o coeficiente é $\dfrac{\alpha_r(r-1)}{(r-1)!}$.

Comparando ambos os lados, temos

$$\begin{aligned}
m^{r-1}\cdot\frac{r(r-1)}{2}\cdot\frac{1}{r!} &= m^r\cdot\frac{r(r-1)}{2}\cdot\frac{1}{r!}+\frac{\alpha_r(r-1)}{(r-1)!}\\
m^{r-1}\cdot\frac{r(r-1)}{2} &= m^r\cdot\frac{r(r-1)}{2}+\alpha_r(r-1)\cdot r\\
\alpha_r(r-1)\cdot r &= (1-m)\frac{r(r-1)}{2}\cdot m^{r-1}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\alpha_r(r-1) = -\frac{1}{2}(m-1)(r-1)\cdot m^{r-1}. \tag{2.10}$$

Definição 2.2.5. *Para $i \geq 0$, defina $h_i(q)=\dfrac{q}{(1-q)^{i+1}}$.*

Note que, usando a série binomial, temos

$$\begin{aligned}
h_i(q) &= \frac{q}{(1-q)^{i+1}}\\
&= q\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+i}{i}q^n
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$h_i(q)=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+i-1}{i}q^n. \tag{2.11}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
U(h_r(q)) &= U\left(\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}q^n\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\binom{mn+r-1}{r}q^n\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\alpha_r(i)\binom{n+i-1}{i}q^n, \text{ pelo Lema 2.2.4}\\
&= \sum_{i=1}^{r}\alpha_r(i)\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+i-1}{i}q^n\\
U(h_r(q)) &= \sum_{i=1}^{r}\alpha_r(i)h_i.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Definição 2.2.6. *Seja* $H_0 = h_0 = \dfrac{q}{1-q}$ *e defina recursivamente* $H_{i+1} = U\left(\dfrac{1}{1-q}H_i\right)$.

Exemplos: A seguir, serão calculados $H_1(q)$ e $H_2(q)$.

$\star$ $H_1 = H_{0+1} = U\left(\dfrac{1}{1-q}h_0\right) = U\left(\dfrac{1}{1-q}\cdot\dfrac{q}{1-q}\right) = U\left(\dfrac{q}{(1-q)^2}\right) =$
$U\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n}{1}q^n\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{mn}{1}q^n = m\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n}{1}q^n = mh_1.$

Assim,

$$H_1 = mh_1. \tag{2.13}$$

$\star$ $H_2 = U\left(\dfrac{1}{1-q}H_1\right) = U\left(\dfrac{1}{1-q}mh_1\right) = U(mh_2) \overset{(2.12)}{=} m\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\alpha_2(i)h_i =$
$m(\alpha_2(1)h_1 + \alpha_2(2)h_2) \overset{(2.9)\text{ e }(2.10)}{=} m^3h_2 - \dbinom{m}{2}h_1.$

Assim,

$$H_2 = m^3h_2 - \binom{m}{2}h_1. \tag{2.14}$$

Lema 2.2.7. *Seja* $c_2 = 1$ *se* m *é ímpar ou igual a* 2 *se* m *é par. Para* $r \geq 1$, *existem* $\beta_r(i) \in \mathbb{Z}$ *tais que*

$$H_r = m^{\frac{1}{2}r(r+1)}h_r - \sum_{i=1}^{r-1}\beta_r(i)H_i, \textit{ com } \beta_r(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r-i}}{c_2}}.$$

Demonstração: Na prova será utilizado o método de indução sobre r. Antes disso, tomemos $\beta_r(r) = 1$ e $\beta_r(0) = 0$ para todo $r \geq 1$.

Para o caso $r = 1$, temos $H_1 = m^{\frac{1}{2}1(1+1)}h_1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{0}\beta_1(i)H_i = mh_1$, o que vale conforme foi calculado anteriormente em (2.13).

Suponhamos agora que, para algum $r > 1$, vale que, para todo $0 < j < r$

$$H_j = m^{\frac{1}{2}j(j+1)}h_j - \sum_{i=1}^{j-1}\beta_j(i)H_i \text{ , com } \beta_j(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{j-i}}{c_2}}.$$

Pela hipótese de indução, sabemos que

$$
\begin{aligned}
H_r &= U\left(\frac{1}{1-q}H_{r-1}\right)\\
&= U\left(\frac{m^{\frac{1}{2}(r-1)r}}{1-q}h_{r-1} - \sum_{i=1}^{r-2}\beta_{r-1}(i)\frac{1}{1-q}H_i\right)\\
&= m^{\frac{1}{2}r(r-1)}U\left(\frac{1}{1-q}h_{r-1}\right) - \sum_{i=1}^{r-2}\beta_{r-1}(i)\underbrace{U\left(\frac{1}{1-q}H_i\right)}_{H_{i+1}}\\
&= m^{\frac{1}{2}r(r-1)}U(h_r) - \sum_{i=1}^{r-2}\beta_{r-1}(i)H_{i+1}\\
&= m^{\frac{1}{2}r(r-1)}\sum_{j=1}^{r}\alpha_r(j)h_j - \sum_{i=2}^{r-1}\beta_{r-1}(i-1)H_i, \text{ por } (2.12)\\
&= m^{\frac{1}{2}r(r-1)}\alpha_r(r)h_r + m^{\frac{1}{2}r(r-1)}\sum_{j=1}^{r-1}\alpha_r(j)h_j - \sum_{i=2}^{r-1}\beta_{r-1}(i-1)H_i.
\end{aligned}
$$

Além disso, também pela hipótese de indução, temos $H_j = m^{\frac{1}{2}j(j+1)}h_j - \sum_{i=1}^{j-1}\beta_j(i)H_i$. Isolando h_j,

$$h_j = \left(H_j + \sum_{i=1}^{j-1}\beta_j(i)H_i\right)m^{-\frac{1}{2}j(j+1)},$$

ou seja,

$$h_j = m^{-\frac{1}{2}j(j+1)}\sum_{i=1}^{j}\beta_j(i)H_i. \tag{2.15}$$

Desta forma, como $\alpha_r(r) = m^r$, segue que

$$
\begin{aligned}
H_r &= m^{\frac{1}{2}r(r-1)}m^r h_r + \sum_{j=1}^{r-1} m^{\frac{1}{2}r(r-1)}\alpha_r(j)\cdot m^{-\frac{1}{2}j(j+1)}\left(\sum_{i=1}^{j}\beta_j(i)H_i\right) - \sum_{i=2}^{r-1}\beta_{r-1}(i-1)H_i\\
&= m^{\frac{1}{2}r(r+1)}h_r + \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=i}^{r-1} m^{\frac{1}{2}r(r-1)-\frac{1}{2}j(j+1)}\alpha_r(j)\cdot\beta_j(i)H_i - \sum_{i=1}^{r-1}\beta_{r-1}(i-1)H_i\\
&= m^{\frac{1}{2}r(r+1)}h_r - \sum_{i=1}^{r-1}\underbrace{\left(-\sum_{j=i}^{r-1} m^{\frac{1}{2}r(r-1)-\frac{1}{2}j(j+1)}\alpha_r(j)\cdot\beta_j(i) + \beta_{r-1}(i-1)\right)}_{\beta_r(i)}H_i
\end{aligned}
$$

Por isso, tome

$$\beta_r(i) = -\sum_{j=i}^{r-1} m^{\frac{1}{2}r(r-1)-\frac{1}{2}j(j+1)}\alpha_r(j)\cdot\beta_j(i) + \beta_{r-1}(i-1)$$

e note que $\beta_r(i) \in \mathbb{Z}$.

Como $\dfrac{1}{2}(r-1)r - \dfrac{1}{2}j(j+1) \geq r-1$, se $0 \leq j \leq r-2$, as únicas possíveis parcelas de $\beta_r(i)$ que podem não ser divisíveis por m^{r-1} são $\beta_{r-1}(i-1)$ e $\alpha_r(r-1)\cdot\beta_{r-1}(i)$. Assim,

$$\beta_r(i) \equiv \beta_{r-1}(i-1) + \alpha_r(r-1)\beta_{r-1}(i) \pmod{m^{r-1}}.$$

Por (2.10), sabemos que $\alpha_r(r-1) = -\dfrac{1}{2}(r-1)(m-1)m^{r-1}$, assim, como consequência, $\alpha_r(r-1)\beta_{r-1}(i) \equiv 0 \pmod{m^{r-1}}$. Desta forma

$$\beta_r(i) \equiv \beta_{r-1}(i-1) \pmod{m^{r-1}}.$$

Como $i \geq 1$, temos $m^{r-1} \geq \dfrac{m^{r-i}}{c_2}$ e consequentemente

$$\beta_r(i) \equiv \beta_{r-1}(i-1) \pmod{\frac{m^{r-i}}{c_2}}.$$

Ainda, por hipótese, $\beta_{r-1}(i-1) \equiv 0 \pmod{\dfrac{m^{r-i}}{c_2}}$. Desta forma, conclui-se que

$$\beta_r(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r-i}}{c_2}}.$$

■

Corolário 2.2.8. *Nas mesmas hipóteses do Lema 2.2.7, vale que*

$$H_r(q) \equiv 0 \pmod{\frac{m^r}{c_r}}.$$

Demonstracão: Será feita por indução sobre r.

Como base de indução, fazendo uso de (2.13), temos $H_1 = mh_1 \equiv 0 \pmod{m}$. Sabendo que $c_1 = 1$, segue $H_1 \equiv 0 \pmod{\frac{m}{c_1}}$.

Suponhamos agora que para algum $r > 1$ e para todo $j < r$ tal afirmação seja válida, ou seja, $H_j(q) \equiv 0 \pmod{\frac{m^j}{c_j}}$.

Pelo Lema 2.2.7, $H_r = m^{\frac{1}{2}r(r+1)}h_r - \sum_{i=1}^{r-1} \beta_r(i)H_i$. Como $\beta_r(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r-i}}{c_2}}$ e, pela hipótese de indução, $H_i \equiv 0 \pmod{\frac{m^i}{c_i}}$, segue que

$$\beta_r(i)H_i \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r-i+i}}{c_i c_2}},$$

que por (2.5) implica

$$\beta_r(i)H_i \equiv 0 \pmod{\frac{m^r}{c_{i+1}}}.$$

Como $i \leq r-1$ e consequentemente $\frac{m^r}{c_{i+1}} \geq \frac{m^r}{c_r}$, conclui-se que

$$\beta_r(i)H_i \equiv 0 \pmod{\frac{m^r}{c_r}}, \text{ para todo } i.$$

Logo $H_r \equiv m^{\frac{1}{2}r(r+1)}h_r \pmod{\frac{m^r}{c_r}}$.

No entanto, note que $\frac{m^{\frac{1}{2}r(r+1)}}{\frac{m^r}{c_r}} = c_r m^{\frac{1}{2}r(r+1)-r} = c_r m^{\frac{r(r-1)}{2}} \in \mathbb{Z}$, por conseguinte, $m^{\frac{1}{2}r(r+1)} \equiv 0 \pmod{\frac{m^r}{c_r}}$. Isto é suficiente para concluir a prova, ou seja, mostrar que

$$H_r(q) \equiv 0 \pmod{\frac{m^r}{c_r}}.$$

■

Lema 2.2.9. *Seja $c_r = 1$ se m é ímpar e $c_r = 2^{r-1}$ se m é par. Para $r \geq 1$, existem $\gamma_r(i) \in \mathbb{Z}$ tais que $U(H_r) = \sum_{i=1}^{r} \gamma_r(i)H_i$ com $\gamma_r(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r+1-i}}{c_{r+1-i}}}$ para $i = 1, 2, ..., r$.*

Demonstração: A prova será feita por indução sobre r.

Na base de indução, por (2.13), temos

$$U(H_1) = U(mh_1) = mU\left(\frac{1}{1-q}\frac{q}{1-q}\right) = mU\left(\frac{1}{1-q}H_0\right) = mH_1,$$

tendo assim, $\gamma_1(1) = m \equiv 0 \pmod{\frac{m^{1+1-1}}{c_{1+1-1}}}$, ou seja, $\gamma_1(1) \equiv 0 \pmod{\frac{m^1}{c_1}}$.

Suponha agora que, para algum $r > 1$ e para todo $j < r$ vale que

$$U(H_j) = \sum_{i=1}^{j} \gamma_j(i)H_i, \text{ com } \gamma_j(i) \in \mathbb{Z} \text{ e } \gamma_j(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{j+1-i}}{c_{j+1-i}}}.$$

Fazendo uso do Lema 2.2.7,

$$\begin{aligned} U(H_r) &= U\left(m^{\frac{1}{2}r(r+1)}h_r - \sum_{j=1}^{r-1}\beta_r(j)H_j\right) \\ &= m^{\frac{1}{2}r(r+1)}U(h_r) - \sum_{j=1}^{r-1}\beta_r(j)U(H_j). \end{aligned}$$

Por (2.12) e pela hipótese de indução, temos

$$U(H_r) = m^{\frac{1}{2}r(r+1)}\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_r(j)h_j\right) - \sum_{j=1}^{r-1}\beta_r(j)\left(\sum_{i=1}^{j}\gamma_j(i)H_i\right).$$

Ainda, fazendo uso de (2.15), segue que

$$\begin{aligned} U(H_r) &= \sum_{j=1}^{r} m^{\frac{1}{2}r(r+1)}m^{-\frac{1}{2}j(j+1)}\alpha_r(j)\sum_{i=1}^{j}\beta_j(i)H_i - \sum_{j=1}^{r-1}\sum_{i=j}^{r-1}\beta_r(j)\gamma_j(i)H_i \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=i}^{r} m^{\frac{1}{2}r(r+1)}m^{-\frac{1}{2}j(j+1)}\alpha_r(j)\beta_j(i)H_i - \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=i}^{r-1}\beta_r(j)\gamma_j(i)H_i \\ &= \sum_{i=1}^{r}\underbrace{\left(\sum_{j=i}^{r} m^{\frac{1}{2}r(r+1)}m^{-\frac{1}{2}j(j+1)}\alpha_r(j)\beta_j(i) - \sum_{j=i}^{r-1}\beta_r(j)\gamma_j(i)\right)}_{\gamma_r(i)}H_i. \end{aligned}$$

Por isso tome $\gamma_r(i) = \sum_{j=i}^{r} m^{\frac{1}{2}r(r+1)}m^{-\frac{1}{2}j(j+1)}\alpha_r(j)\beta_j(i) - \sum_{j=i}^{r-1}\beta_r(j)\gamma_j(i)$ e note que $\gamma_r(i) \in \mathbb{Z}$.

Resta agora verificar as condições de congruência de $\gamma_r(i)$.

Para $j \leq r-1$, vale $\frac{1}{2}r(r+1) - \frac{1}{2}j(j+1) \geq r$. Isso garante a divisão por m^r, exceto nos casos $\alpha_r(r)\beta_r(r)$ e $\sum_{j=i}^{r-1} \beta_r(j)\gamma_j(i)$. Assim,

$$\gamma_r(i) \equiv \alpha_r(r)\beta_r(r) - \sum_{j=i}^{r-1} \beta_r(j)\gamma_j(i) \pmod{m^r}.$$

Como $\alpha_r(r) = m^r$, temos $\gamma_r(i) \equiv -\sum_{j=i}^{r-1} \beta_r(j)\gamma_j(i) \pmod{m^r}$.

Além disso, pelo Lema 2.2.7, como $\beta_r(j) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r-j}}{c_2}}$ e, pela hipótese de indução, mediante $\gamma_j(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{j+1-i}}{c_{j+1-i}}}$ para $j = 1, 2, ..., r-1$, temos:

$$\begin{aligned} \beta_r(j)\gamma_j(i) &\equiv 0 \pmod{\frac{m^{r-j+j+1-i}}{c_2 c_{j+1-i}}} \\ &\equiv 0 \pmod{\frac{m^{r+1-i}}{c_{j-i+2}}}, \text{ por (2.5).} \end{aligned}$$

Visto que $j \leq r-1$, a congruência segue como $\beta_r(j)\gamma_j(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r+1-i}}{c_{r-i+1}}}$. Portanto

$$\sum_{j=i}^{r-1} \beta_r(j)\gamma_j(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r+1-i}}{c_{r+1-i}}}.$$

Desta forma, isto é suficiente para concluir que $\gamma_j(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r+1-i}}{c_{r+1-i}}}$. ■

Lema 2.2.10. *Para $r \geq 1$ e $t \geq 0$, existem $\gamma_{r,t}(i) \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$U^t(H_r) = \sum_{i=1}^{r} \gamma_{r,t}(i) H_i,$$

com $\gamma_{r,t}(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r+t-i}}{c_{r+1-i}}}$, para $i = 1, 2, ..., r$.

Demonstração: A prova será feita por indução em t.

Para o caso $t = 0$, temos que $H_r = H_r$, ou seja, tome $\gamma_{r,0}(r) = 1$ e $\gamma_{r,0}(i) = 0$ para $1 \leq i \leq r - 1$.

Suponha agora que para algum $t > 0$, o lema valha para $t - 1$, ou seja, podemos escrever $U^{t-1}(H_r) = \sum_{i=1}^{r} \gamma_{r,t-1}(i) H_i$, com $\gamma_{r,t-1}(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r+t-1-i}}{c_{r+1-i}}}$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
U^t(H_r) &= U(U^{t-1}(H_r)) \\
&= U\left(\sum_{j=1}^{r} \gamma_{r,t-1}(j) H_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \gamma_{r,t-1}(j) U(H_j) \\
&\overset{\text{Lema 2.2.9}}{=} \sum_{j=1}^{r} \gamma_{r,t-1}(j) \sum_{i=1}^{j} \gamma_j(i) H_i \\
&= \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\left(\sum_{j=i}^{r} \gamma_{r,t-1}(j)\gamma_j(i)\right)}_{\gamma_{r,t}(i)} H_i.
\end{aligned}
$$

Por isso, tome $\gamma_{r,t}(i) = \sum_{j=i}^{r} \gamma_{r,t-1}(j)\gamma_j(i)$ e note que $\gamma_{r,t}(i) \in \mathbb{Z}$.

Analisando então as congruências, e sabendo que $\gamma_{r,t-1}(j) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r+t-1-j}}{c_{r+1-j}}}$ e $\gamma_j(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{j+1-i}}{c_{j+1-i}}}$, temos

$$
\begin{aligned}
\gamma_{r,t-1}(j) \cdot \gamma_j(i) &\equiv 0 \pmod{\frac{m^{r+t-1-j}}{c_{r+1-j}} \cdot \frac{m^{j+1-i}}{c_{j+1-i}}} \\
&\equiv 0 \pmod{\frac{m^{r+t-i}}{c_{r+2-i-1}}}, \text{ por (2.5)} \\
&\equiv 0 \pmod{\frac{m^{r+t-i}}{c_{r+1-i}}}.
\end{aligned}
$$

■

Definição 2.2.11. *Tome $K_1 = H_1$. Defina recursivamente $K_i = U\left(\frac{q^{\xi_i}}{1-q} K_{i-1}\right)$, sendo $\xi_i = 1$ ou $\xi_i = 0$.*

Lema 2.2.12. *Para $r \geq 1$, existem $k_r(i) \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$K_r = \sum_{i=1}^{r} k_r(i) H_i,$$

com $k_r(r) = 1$ e $k_r(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r-i}}{c_{r-i}}}$, para $i \leq r-1$.

Demonstração: A prova será feita por indução sobre r.

Para $r = 1$ temos $K_1 = k_1(1)H_1 = 1 \cdot H_1 = H_1$. Então, $k_1(1) = 1$.

Suponhamos agora que, para certo $r > 1$, vale o lema para $r-1$, ou seja,

$$K_{r-1} = \sum_{i=1}^{r-1} k_{r-1}(i) H_i$$

com $k_{r-1}(r-1) = 1$ e $k_{r-1}(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r-1-i}}{c_{r-1-i}}}$, para $i \leq r-2$.

Note que

$$K_r = U\left(\frac{q^{\xi_r}}{1-q} K_{r-1}\right)$$

e como $\xi_r = 0$ ou $\xi_r = 1$, podemos reescrever como

$$\begin{aligned} K_r &= U\left(\frac{1}{1-q} K_{r-1} - \xi_r \cdot K_{r-1}\right) \\ &= U\left(\frac{1}{1-q} K_{r-1}\right) - \xi_r U(K_{r-1}). \end{aligned}$$

Vamos agora calcular separadamente $U\left(\frac{1}{1-q} K_{r-1}\right)$ e $U(K_{r-1})$.

Para $U\left(\frac{1}{1-q} K_{r-1}\right)$, temos:

$$\begin{aligned} \star\ U\left(\frac{1}{1-q} K_{r-1}\right) &= U\left(\frac{1}{1-q} \sum_{i=1}^{r-1} k_{r-1}(i) H_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} k_{r-1}(i) U\left(\frac{1}{1-q} H_i\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
U\left(\frac{1}{1-q}K_{r-1}\right) &= \sum_{i=1}^{r-1} k_{r-1}(i)H_{i+1} \\
&= \sum_{i=2}^{r} k_{r-1}(i-1)H_i = \sum_{i=1}^{r} k_{r-1}(i-1)H_i,
\end{aligned}
$$

pondo $k_{r-1}(0) = 0$.

Agora, calculando para $U(K_{r-1})$, segue:

$$
\begin{aligned}
\star\, U(K_{r-1}) &= U\left(\sum_{j=1}^{r-1} k_{r-1}(j)H_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} k_{r-1}(j)U(H_j) \\
&= \sum_{j=1}^{r-1} k_{r-1}(j) \sum_{i=1}^{j} \gamma_j(i)H_i \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i}^{r-1} k_{r-1}(j)\gamma_j(i)H_i.
\end{aligned}
$$

Voltando ao cálculo de K_r, temos

$$
\begin{aligned}
K_r &= U\left(\frac{1}{1-q}K_{r-1}\right) - \xi_r U(K_{r-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{r} k_{r-1}(i-1)H_i - \xi_r \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=i}^{r-1} k_{r-1}(j)\gamma_j(i)H_i \\
&= \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\left(k_{r-1}(i-1) - \xi_r \sum_{j=i}^{r-1} k_{r-1}(j)\gamma_j(i)\right)}_{k_r(i)} H_i
\end{aligned}
$$

Assim, tome $k_r(i) = k_{r-1}(i-1) - \xi_r \sum_{j=i}^{r-1} k_{r-1}(j)\gamma_j(i)$ e observe que $k_r(i) \in \mathbb{Z}$. Note que $k_r(r) = k_{r-1}(r-1) = 1$, por hipótese.

Sabendo que, $\gamma_j(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{j+1-i}}{c_{j+1-i}}}$, pelo Lema 2.2.9, $k_{r-1}(j) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r-1-j}}{c_{r-1-j}}}$, pela hipótese de indução, e com o auxílio de (2.5), segue

$$
k_{r-1}(j)\gamma_j(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r-1-j+j+1-i}}{c_{r-1-j+j+1-i-1}}},
$$

ou seja,

$$k_{r-1}(j)\gamma_j(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r-i}}{c_{r-i-1}}}.$$

Como $r-i-1 < r-i$, então $\sum_{j=i}^{r-1} k_{r-1}(j)\gamma_j(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r-i}}{c_{r-i}}}$.

Também, pela hipótese de indução, temos $k_{r-1}(i-1) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r-i}}{c_{r-i}}}$.

Com as informações acima, conclui-se que $k_r(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{r-i}}{c_{r-i}}}$.

■

Lema 2.2.13. *Para $r = 1, 2, ..., k-1$, temos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m^{r+1}n - \sigma_r - m)q^n = K_r(q)B_{m,k-r-1}(q).$$

Demonstração: Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(n)q^n = B_{m,k}(q)$.

Por (2.6), vemos que $\sum_{n=0}^{\infty} b_{m,k}(n)q^n = \frac{1}{1-q}B_{m,k-1}(q^m)$. Multiplicando por q e aplicando U em ambos os lados, temos

$$U\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_{m,k}(n)q^{n+1}\right) = U\left(\frac{q}{1-q}B_{m,k-1}(q^m)\right),$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} b_{m,k}(mn)q^{n+1} &= U\left(\frac{q}{1-q}B_{m,k-1}(q^m)\right) \\
&\overset{(2.8)}{=} \underbrace{U\left(\frac{q}{1-q}\right)}_{H_0} B_{m,k-1}(q).
\end{aligned}$$

Como $U(H_0) = H_0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{m,k}(mn)q^{n+1} = H_0 B_{m,k-1}(q).$$

Portanto, por (2.6),

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{m,k}(mn)q^{n+1} = \frac{1}{1-q}H_0 B_{m,k-2}(q^m),$$

isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m(n-1))q^{n} = \frac{1}{1-q}H_0 B_{m,k-2}(q^m).$$

Aplicando U novamente, e usando (2.8)

$$U\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(mn-m)q^{n}\right) = U\left(\frac{1}{1-q}H_0 B_{m,k-2}(q^m)\right),$$

de onde segue que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m^2n-m)q^{n} = U\left(\frac{1}{1-q}H_0\right) B_{m,k-2}(q).$$

Como $U\left(\frac{1}{1-q}H_0\right) = H_1 = K_1$, vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m^2n-m)q^{n} = K_1(q)B_{m,k-2}(q).$$

Logo o lema é válido para $r = 1$, sendo esta a base de indução.

A prova seguirá de forma indutiva, agora supondo válido para $r-1$, para algum r, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m^rn-\sigma_{r-1}-m)q^{n} = K_{r-1}(q)B_{m,k-r}(q),$$

que é equivalente a

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m^rn-\sigma_{r-1}-m)q^{n} = \left(\frac{1}{1-q}\right) K_{r-1}(q)B_{m,k-r-1}(q^m).$$

Multiplicando por q^{ξ_r} em ambos os lados, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m^rn-\sigma_{r-1}-m)q^{n+\xi_r} = \left(\frac{q^{\xi_r}}{1-q}\right) K_{r-1}(q)B_{m,k-r-1}(q^m).$$

Aplicaremos U considerando os dois casos de ξ_r, ou seja, para $\xi_r = 0$ e $\xi_r = 1$. Temos que,

$\star$ Para $\xi_r = 0$: Utilizando (2.8), segue que

$$\begin{aligned}
U\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m^r n - \sigma_{r-1} - m)q^n\right) &= U\left(\frac{1}{1-q}K_{r-1}(q)B_{m,k-r-1}(q^m)\right) \\
\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m^{r+1} n - \sigma_{r-1} - m)q^n &= \underbrace{U\left(\frac{1}{1-q}K_{r-1}(q)\right)}_{K_r(q)} B_{m,k-r-1}(q).
\end{aligned}$$

Como $\xi_r = 0$, podemos acrescentar o termo $-\xi_r m^r$, obtendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m^{r+1} n - \sigma_{r-1} - \xi_r m^r - m)q^n = K_r(q)B_{m,k-r-1}(q),$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m^{r+1} n - \sigma_r - m)q^n = K_r(q)B_{m,k-r-1}(q).$$

$\star$ Para $\xi_r = 1$: Sabemos que

$$U\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m^r n - \sigma_{r-1} - m)q^{n+1}\right) = U\left(\frac{q}{1-q}K_{r-1}(q)B_{m,k-r-1}(q^m)\right),$$

que, por (2.7) e (2.8), nos dá

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m^r(mn-1) - \sigma_{r-1} - m)q^n &= U\left(\frac{q}{1-q}K_{r-1}(q)\right) B_{m,k-r-1}(q) \\
\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m^{r+1} n - \underbrace{(\sigma_{r-1} + m^r)}_{\sigma_r} - m)q^n &= K_r(q)B_{m,k-r-1}(q) \\
\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m^{r+1} n - \sigma_r - m)q^n &= K_r(q)B_{m,k-r-1}(q).
\end{aligned}$$

Assim o lema está provado. ■

2.3 Demonstração do Teorema 2.1.4

Com os lemas anteriores, seguiremos a prova do Teorema 2.1.4, tendo em vista que, o Teorema 2.1.2 segue como consequência imediata deste, fazendo $k \longrightarrow \infty$.

Demonstração do Teorema 2.1.4: Pelo Lema 2.2.12, como

$$K_r(q) = \sum_{i=1}^{r} k_r(i) H_i,$$

com $k_r(i) \equiv 0 \pmod{\dfrac{m^{r-i}}{c_{r-i}}}$ e, pelo Corolário 2.2.8, temos

$$H_i \equiv 0 \quad (\text{mod } \frac{m^i}{c_i}),$$

para $i = 1, 2, ..., r.$, segue, como consequência imediata de (2.5), que

$$K_r(q) \equiv 0 \quad (\text{mod } \frac{m^r}{c_{r-1}}).$$

Como $\dfrac{m^r}{c_{r-1}} \geq \dfrac{m^r}{c_r}$, tal congruência segue como

$$K_r(q) \equiv 0 \quad (\text{mod } \frac{m^r}{c_r}).$$

Conforme foi provado no Lema 2.2.13, este teorema está demonstrado para o caso de $r \leq k-1$.

Passaremos ao caso $r \geq k-1$. Tome então $r = k - 1 + t$, com $t \geq 0$.

Pelo Lema 2.2.13, vale que, com $r = k - 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m^k n - \sigma_{k-1} - m) q^n = K_{k-1}(q) B_{m,0}(q) = K_{k-1}(q)$$

Pelo Lema 2.2.12, como $K_{k-1}(q) = \sum_{j=1}^{k-1} k_{k-1}(j) H_j(q)$, temos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m^k n - \sigma_{k-1} - m) q^n = \sum_{j=1}^{k-1} k_{k-1}(j) H_j(q).$$

Aplicando U^t em ambos os lados,

$$\begin{aligned} U^t \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m^k n - \sigma_{k-1} - m) q^n \right) &= U^t \left(\sum_{j=1}^{k-1} k_{k-1}(j) H_j(q) \right) \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m^k (m^t n) - \sigma_{k-1} - m) q^n &= \sum_{j=1}^{k-1} k_{k-1}(j) U^t(H_j(q)). \end{aligned}$$

Além disso, como $k+t=r+1$ e pelo Lema 2.2.10, a igualdade pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b_{m,k}(m^{r+1}n-\sigma_{k-1}-m)q^n &= \sum_{j=1}^{k-1} k_{k-1}(j)\sum_{i=1}^{j}\gamma_{j,t}(i)H_i\\ &= \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i}^{k-1} k_{k-1}(j)\gamma_{j,t}(i)H_i.\end{aligned}$$

Com o auxílio do Lema 2.2.10, que nos fornece $\gamma_{j,t}(i) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{j+t-i}}{c_{j+1-i}}}$, do Lema 2.2.12, cujo resultado é a congruência $k_{k-1}(j) \equiv 0 \pmod{\frac{m^{k-1-j}}{c_{k-1-j}}}$, do Corolário 2.2.8, nos dando $H_i \equiv 0 \pmod{\frac{m^i}{c_i}}$ e juntamente com (2.5), o resultado segue da forma

$$\begin{aligned}k_{k-1}(j)\gamma_{j,t}(i)H_i &\equiv 0 \pmod{\frac{m^{j+t-i+k-1-i+i}}{c_{(j+1-i+k-1-i+i)-1}}}\\ &\equiv 0 \pmod{\frac{m^{k-1+t}}{c_{k-1}}}.\end{aligned}$$

Como $k-1+t=r$,

$$k_{k-1}(j)\gamma_{j,t}(i)H_i \equiv 0 \pmod{\frac{m^r}{c_{k-1}}}.$$

O que prova o Teorema. ■

Capítulo 3

Um caso especial: Partições binárias

Chamando de $b(n)$ o número de partições de n em potências de 2, ou seja, número de maneiras de escrever n da forma

$$n = 2^{a_0} + 2^{a_1} + \cdots, \text{ com } a_i \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots,$$

Churchhouse [7] conjecturou que $b(2^{r+2}n) - b(2^r n) \equiv 0 \pmod{2^{\lfloor \frac{3r}{2} \rfloor + 2}}$. Além dessa congruência, conjecturou que nenhuma potência de 2 maior que $\lfloor \frac{3r}{2} \rfloor + 2$ dividiria $b(2^{r+2}n) - b(2^r n)$. Tal conjectura foi primeiramente provada por Rodseth [10] em 1970. A partir daí, diversas provas diferentes apareceram.

O principal objetivo deste capítulo é apresentar algumas congruências acerca do número de partições de um inteiro n em partições binárias, um caso especial do tipo de partições trabalhado no capítulo anterior, com $m = 2$. Tais congruências serão extensões do que foi conjecturado por Churchhouse, este seguindo então como corolário. Os resultados deste capítulo foram provados no artigo de Oystein Rodseth e James Sellers [11].

Como principais teoremas, consideraremos agora uma restrição acerca dos expoentes da partição. Para tanto, será considerado $b_k(n)$, o número de partições de n em potências de 2, com expoentes menores que k, ou seja, maneiras de escrever n da forma

$$n = 2^{a_0} + 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_j}, \text{ com } a_i \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq a_0 \leq \cdots \leq a_j < k,$$

e então provadas duas novas congruências, enunciadas nos Teoremas abaixo:

Teorema 3.0.1. *Para $1 \leq r \leq k-2$ temos que*

$$b_k(2^{r+2}n) - b_{k-2}(2^r n) \equiv 0 \pmod{2^{\lfloor 3r/2 \rfloor + 2}}.$$

Teorema 3.0.2. *Para $k \geq 3$ e $t \geq 1$, vale que*

$$b_k(2^{k+t}n) - b_{k-2}(2^{k+t-2}n) \equiv 0 \pmod{2^{\lfloor 3k/2+2 \rfloor + t - 2}}.$$

Note que a congruência deduzida por Churchhouse é o caso em que k tende a infinito no primeiro teorema.

A seguir, o capítulo será dividido em duas partes. A primeira com o intuito de provar o Teorema 3.0.1 e a segunda o Teorema 3.0.2. Em cada parte, serão apresentados os lemas necessários para então seguir para a respectiva demonstração.

3.1 Demonstração do Teorema 3.0.1

Nesta seção, o objetivo principal é demonstrar o Teorema 3.0.1. No entanto, serão necessários vários lemas para tal prova. Estes serão enunciados e provados para depois seguir com o objetivo principal.

3.1.1 Lemas Necessários

Definição 3.1.1. *Tome $b_k(n)$ como o número de maneiras de escrever $n = 2^{a_0} + 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_j}$ com $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_j < k$, ou seja, número de partições de n em potências de 2 com expoente menor do que k.*

Proposição 3.1.2. *Seja $\pi(a)$ o expoente da maior potência de 2 que divide a. Desta forma, valem*

$$\textit{Se } \pi(a) < \pi(c), \quad \textit{então} \quad \pi(\pm a \pm c) = \pi(a) \tag{3.1}$$

$$\textit{Se } \pi(a) = \pi(c), \quad \textit{então} \quad \pi(\pm a \pm c) > \pi(a). \tag{3.2}$$

Demonstração: Para provar a afirmação (3.1), note que a e c podem ser escritos como $a = 2^{\pi(a)}a'$, com 2 não dividindo a' e $c = 2^{\pi(c)}c'$, com 2 também não dividindo c'. Sendo assim, podemos escrever

$$(\pm a \pm c) = 2^{\pi(a)}(\pm a' \pm 2^{\pi(c)-\pi(a)}c'),$$

com $(\pm a' \pm 2^{\pi(c)-\pi(a)}c')$ sendo ímpar. Desta forma, vale a afirmação.

Agora, para a prova de (3.2), escrevemos a e c da forma $a = 2^{\pi(a)}a'$ e $c = 2^{\pi(c)}c'$ com a' e c' ímpares. Então

$$(\pm a \pm c) = 2^{\pi(a)}(\pm a' \pm c'),$$

e $(\pm a' \pm c')$ sendo par. Portanto a afirmação é válida. ∎

Definição 3.1.3. *Seja $\mathbb{Z}[[q]]$ o anel das séries formais de potências em q com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Tome*

$$U : \mathbb{Z}[[q]] \longrightarrow \mathbb{Z}[[q]]$$
$$U\left(\sum_n a(n)q^n\right) = \sum_n a(2n)q^n.$$

OBS: Note que esta aplicação é a mesma dada pela Definição 2.2.1 do capítulo anterior, para o caso $m = 2$. Da mesma forma, continua válida a propriedade (2.8), a qual pode ser reescrita como

$$U(f(q)g(q^2)) = U(f(q))g(q), \tag{3.3}$$

para $f(q)$ e $g(q) \in \mathbb{Z}[[q]]$.

Lema 3.1.4. *Para $n, r \geq 0$, temos*

$$\binom{2n+r-1}{r} = \sum_{i=\lceil \frac{r}{2} \rceil}^{r} (-1)^{r-i} 2^{2i-r} \binom{n+i-1}{i} \binom{i}{r-i}.$$

Demonstração: Considere a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{(1-q)^{2n}} = \frac{1}{(1-2q+q^2)^n} = \frac{1}{(1-q(2-q))^n}. \tag{3.4}$$

Expandindo em série de potências o extremo da direita da igualdade (3.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-q(2-q))^n} &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} q^i (2-q)^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} q^i \sum_{j=0}^{i} 2^j (-1)^{i-j} q^{i-j} \binom{i}{j} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} 2^j \binom{n+i-1}{i} \binom{i}{j} q^{2i-j}
\end{aligned}$$

Agora, tomando $k = 2i - j$, ou seja, $j = 2i - k$, então vale

$$\frac{1}{(1-q(2-q))^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=\lceil \frac{k}{2} \rceil}^{k} (-1)^{k-i} 2^{2i-k} \binom{n+i-1}{i} \binom{i}{2i-k} q^k.$$

Pela propriedade complementar dos números binomiais $\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$, temos:

$$\frac{1}{(1-q(2-q))^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=\lceil \frac{k}{2} \rceil}^{k} (-1)^{k-i} 2^{2i-k} \binom{n+i-1}{i} \binom{i}{k-i} q^k.$$

Expandindo o extremo da esquerda da igualdade (3.4), obtemos

$$\frac{1}{(1-q)^{2n}} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2n+i-1}{i} q^i.$$

Comparando o coeficiente do termo q^r em ambas equações, o lema está provado, ou seja

$$\binom{2n+r-1}{i} = \sum_{i=\lceil \frac{r}{2} \rceil}^{r} (-1)^{r-i} 2^{2i-r} \binom{n+i-1}{i} \binom{i}{r-i}.$$

■

Definição 3.1.5. *Seja $h_i \in \mathbb{Z}[[q]]$ definido por $h_i(q) = \frac{q}{(1-q)^{i+1}}$, cuja expansão em série de potências é $h_i(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} q^n$.*

Conforme tal expansão, obtemos que

$$U(h_r) = U\left(\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} q^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n+i-1}{i} q^n.$$

Pela igualdade acima e pelo Lema 3.1.4, temos

$$\begin{aligned} U(h_r) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=\lceil \frac{r}{2} \rceil}^{r} (-1)^{r-i} 2^{2i-r} \binom{n+i-1}{i} \binom{i}{r-i} \right) q^n \\ &= \sum_{i=\lceil \frac{r}{2} \rceil}^{r} \left((-1)^{r-i} 2^{2i-r} \binom{i}{r-i} \right) \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} q^n}_{h_i}, \end{aligned}$$

assim,

$$U(h_r) = \sum_{i=\lceil \frac{r}{2} \rceil}^{r} (-1)^{r-i} 2^{2i-r} \binom{i}{r-i} h_i. \tag{3.5}$$

Definição 3.1.6. *Seja $K_2 = 2^3 h_2$. Defina K_{i+1} recursivamente por $K_{i+1} = U\left(\frac{1}{1-q} K_i\right)$, para $i > 2$.*

Lema 3.1.7. *Para $1 \leq i \leq r-1$, existem $\gamma_r(i) \in \mathbb{Z}$ tais que $K_r = \sum_{i=1}^{r-1} \gamma_r(i) h_{i+1}$. Além disso, $\pi(\gamma_r(i)) \geq \left\lfloor \frac{3r+i^2}{2} \right\rfloor$ e a igualdade vale se, e somente se, $i = 1$ ou $r+i$ é ímpar.*

Demonstração: Vamos dividir a prova em duas partes: A existência e a condição sobre $\gamma_r(i)$.

♦ *Existência:* Será feita por indução sobre r.

Como base de indução $r = 2$, temos que $K_2 = 2^3 h_2$ e, além disso, $\pi(\gamma_r(1)) = \pi(2^3) \geq \left\lfloor \dfrac{6+1}{2} \right\rfloor = 3$, ou seja, vale a igualdade, pois $i = 1$.

Suponhamos agora que tal lema vale para $r-1$, para algum r, ou seja, K_{r-1} pode ser escrito como

$$\sum_{i=1}^{r-2} \gamma_{r-1}(i) h_{i+1},$$

com $\pi(\gamma_{r-1}(i)) \geq \left\lfloor \dfrac{3(r-1)+i^2}{2} \right\rfloor$, e tal igualdade ocorrendo se, e somente se, $i = 1$ ou $(r-1)+i$ é ímpar, ou seja, $r+i$ sendo par.

Note que, pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} K_r = U\left(\frac{1}{1-q} K_{r-1}\right) &= U\left(\frac{1}{1-q} \sum_{j=1}^{r-2} \gamma_{r-1}(j) h_{j+1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{r-2} \gamma_{r-1}(j) U\left(\frac{1}{1-q} h_{j+1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{r-2} \gamma_{r-1}(i) U(h_{j+2}). \end{aligned}$$

Por (3.5), temos

$$\begin{aligned} K_r &= \sum_{j=1}^{r-2} \gamma_{r-1}(j) \sum_{i=\lceil \frac{j+2}{2} \rceil}^{j+2} (-1)^{j+2-i} 2^{2i-j-2} \binom{i}{j+2-i} h_i \\ &= \sum_{j=1}^{r-2} \sum_{i=\lceil \frac{j+2}{2} \rceil}^{j+2} (-1)^{j-i} 2^{2i-j-2} \binom{i}{j+2-i} \gamma_{r-1}(j) h_i. \end{aligned}$$

Note que usando $\left\lceil \frac{j}{2} + 1 \right\rceil \leq i \leq j+2$ e $1 \leq j \leq r-2$ implicam em $2 \leq i \leq r$.

E, além disso, $\left\lceil \frac{j}{2} + 1 \right\rceil \leq i \leq j+2$, o que implica que $i-2 \leq j$. Também, da desigualdade $\left\lceil \frac{j}{2} + 1 \right\rceil \leq i$, segue que $j \leq 2i-2$. Portanto, $i-2 \leq j \leq 2i-2$.

Como $i-2 \le j \le 2i-2$ e $1 \le j \le r-2$ conclui-se que $\max\{i-2,1\} \le j \le \min\{r-2, 2i-2\}$. Assim,

$$\begin{aligned} K_r &= \sum_{i=2}^{r} \sum_{j=\max\{i-2,1\}}^{\min\{r-2,2i-2\}} (-1)^{j+i} 2^{2i-j-2} \binom{i}{j+2-i} \gamma_{r-1}(j) h_i \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} \left(\sum_{j=\max\{1,i-1\}}^{\min\{r-2,2i\}} (-1)^{j+i+1} 2^{2i-j} \binom{i+1}{j+1-i} \gamma_{r-1}(j) \right) h_{i+1}. \end{aligned}$$

Desta forma, considere $\gamma_r(i)$ definido por

$$\gamma_r(i) = \sum_{j=\max\{1,i-1\}}^{\min\{r-2,2i\}} (-1)^{j+i+1} 2^{2i-j} \binom{i+1}{j+1-i} \gamma_{r-1}(j), \tag{3.6}$$

e garantindo então a existência de $\gamma_r(i)$ e, é claro, que $\gamma_r(i) \in \mathbb{Z}, \forall i$.

♦ *Relações de $\pi(\gamma_r(i))$:* A verificação será feita primeiro por dois casos especiais: $i = 1$ e $i = 2$, para então seguir para o caso $i \ge 3$. Aqui também será utilizado o método de indução.

⋆ *Caso $i = 1$* : Por (3.6) e pela hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned} \gamma_r(1) &= \sum_{j=\max\{1,0\}}^{\min\{r-2,2\}} (-1)^{j+1+1} 2^{2-j} \binom{1+1}{j+1-1} \gamma_{r-1}(j) \\ &= \sum_{j=1}^{2} (-1)^{j+2} 2^{2-j} \binom{2}{j} \gamma_{r-1}(j) \\ &= -2^2 \gamma_{r-1}(1) + \gamma_{r-1}(2). \end{aligned}$$

Note que $\pi(2^2\gamma_{r-1}(1)) = 2 + \pi(\gamma_{r-1}(1)) \overset{i=1}{=} 2 + \left\lfloor \frac{3(r-1)+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3r+2}{2} \right\rfloor$. Portanto

$$\pi(2^2\gamma_{r-1}(1)) = \left\lfloor \frac{3r+2}{2} \right\rfloor.$$

Agora vamos dividir o estudo para dois casos: r par e r ímpar, para então verificar os valores de $\pi(2^2\gamma_{r-1}(1))$ e $\pi(\gamma_{r-1}(2))$.

⋆ *Se r ímpar:*

$$\pi(2^2\gamma_{r-1}(1)) = \left\lfloor \frac{3r+2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3r+1}{2} \right\rfloor,$$

já que $3r+2$ é ímpar. Sendo $r+2$ ímpar, vale a desigualdade abaixo:

$$\pi(\gamma_{r-1}(2)) > \left\lfloor \frac{3(r-1)+2^2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3r+1}{2} \right\rfloor.$$

Como $\pi(\gamma_{r-1}(2)) > \pi(2^2\gamma_{r-1}(1))$, por (3.1), temos que $\pi(\gamma_r(1)) = \left\lfloor \frac{3r+1}{2} \right\rfloor$.

⋆ *Se r par:* Como $3r$ é par, segue

$$\pi(2^2\gamma_{r-1}(1)) = \left\lfloor \frac{3r+2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3r}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{3r+1}{2} \right\rfloor + 1 > \left\lfloor \frac{3r+1}{2} \right\rfloor.$$

Além disso, usando que $r+2$ é par, temos

$$\pi(\gamma_{r-1}(2)) = \left\lfloor \frac{3(r-1)+2^2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3r+1}{2} \right\rfloor.$$

Como $\pi(2^2\gamma_{r-1}(1)) > \pi(\gamma_{r-1}(2))$, por (3.1), temos que $\pi(\gamma_r(1)) = \left\lfloor \frac{3r+1}{2} \right\rfloor$, valendo assim a afirmação para $i=1$.

Antes de passarmos para o caso $i=2$, façamos uma observação para o caso geral $2 \le i \le r-1$. Expandindo (3.6) em seus dois primeiros termos na soma, temos

$$\gamma_r(i) = 2^{i+1}\gamma_{r-1}(i-1) - 2^i(i+1)\gamma_{r-1}(i) + \underbrace{\sum_{j=i+1}^{\min\{r-2,2i\}} (-1)^{j+i+1} 2^{2i-j} \binom{i+1}{j+1-i} \gamma_{r-1}(j)}_{\Delta_1}$$

sendo

$$\begin{aligned}
\pi(\Delta_1) &\ge \min_{j\ge i+1}\left(2i - j + \left\lfloor \frac{3(r-1)+j^2}{2} \right\rfloor\right) \\
&\ge \min_{j\ge i+1}\left(2i - j + \left\lfloor \frac{3(r-1)+(i+1)^2}{2} \right\rfloor\right), \text{ já que } j \ge i+1, \\
&\overset{j\le 2i}{\ge} 2i - 2i + \left\lfloor \frac{3r+i^2+2i-2}{2} \right\rfloor, \text{ pois } j \le 2i, \\
&\ge \left\lfloor \frac{3r+i^2+2}{2} \right\rfloor, \text{ sabendo que } i \ge 2 \\
&= \left\lfloor \frac{3r+i^2}{2} \right\rfloor + 1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\pi(\Delta_1) > \left\lfloor \frac{3r+i^2}{2} \right\rfloor. \tag{3.7}$$

$\star$ *Caso* $i = 2$: Utilizando a expressão

$$\gamma_r(2) = 2^3\gamma_{r-1}(1) - 2^2 3\gamma_{r-1}(2) + \Delta_1$$

e, conforme foi calculado anteriormente, sabemos que $\pi(\Delta_1) > \left\lfloor \frac{3r+i^2}{2} \right\rfloor$ independente de i. Resta calcular $\pi(2^3\gamma_{r-1}(1))$ e $\pi(2^2 3\gamma_{r-1}(2))$. Então, pela hipótese de indução,

$$\pi(2^3\gamma_{r-1}(1)) = 3 + \left\lfloor \frac{3(r-1)+1^2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3r+4}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3r+2^2}{2} \right\rfloor, \text{ ou seja,}$$

$$\pi(2^3\gamma_{r-1}(1)) = \left\lfloor \frac{3r+2^2}{2} \right\rfloor \tag{3.8}$$

Para o cálculo de $\pi(2^2 3\gamma_{r-1}(2))$, serão considerados os casos de r par e r ímpar:

$\star$ r *par:* Como $r+2$ é par, pela hipótese de indução, vale a igualdade

$$\pi(2^2 3\gamma_{r-1}(2)) = 2 + \left\lfloor \frac{3(r-1)+2^2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3r+2^2+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3r+2^2}{2} \right\rfloor,$$

sendo que a última igualdade vale pois $3r+5$ é ímpar.

Assim, combinando $\pi(2^2 3\gamma_{r-1}(2)) = \left\lfloor \frac{3r+2^2}{2} \right\rfloor$, (3.8), (3.7) e (3.1), vale que

$$\pi(\gamma_r(2)) > \left\lfloor \frac{3r+2^2}{2} \right\rfloor.$$

$\star$ r *ímpar:* Como $r+2$ é ímpar, pela hipótese de indução, vale

$$\pi(2^2 3\gamma_{r-1}(2)) > 2 + \left\lfloor \frac{3(r-1)+2^2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3r+1+2^2}{2} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{3r+2^2}{2} \right\rfloor.$$

Assim, como $\pi(2^2 3\gamma_{r-1}(2)) > \left\lfloor \frac{3r+2^2}{2} \right\rfloor$ e por (3.8), (3.7) e (3.1), vale que

$$\pi(\gamma_r(2)) = \left\lfloor \frac{3r+2^2}{2} \right\rfloor.$$

Assim, o lema vale para $i = 2$.

$\star$ *Caso* $3 \leq i \leq r-1$*:* Conforme cálculo anterior, temos

$$\gamma_r(i) = 2^{i+1}\gamma_{r-1}(i-1) - 2^i(i+1)\gamma_{r-1}(i) + \Delta_1,$$

e, além disso, temos que

$$\pi(\Delta_1) > \left\lfloor \frac{3r+i^2}{2} \right\rfloor.$$

Basta agora calcular o valor de $\pi(2^i(i+1)\gamma_{r-1}(i))$ e $\pi(2^{i+1}\gamma_{r-1}(i-1))$. Primeiramente, segue

$$\pi(2^{i+1}\gamma_{r-1}(i-1)) \geq i+1+\left\lfloor \frac{3(r-1)+(i-1)^2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3r+i^2}{2} \right\rfloor,$$

ou seja,

$$\pi(2^{i+1}\gamma_{r-1}(i-1)) \quad \geq \quad \left\lfloor \frac{3r+i^2}{2} \right\rfloor, \tag{3.9}$$

sendo que, pela hipótese de indução, a igualdade torna-se válida se, e somente se, $(r-1)+(i-1)$ é ímpar, ou seja, $r+i$ é ímpar.

$$\begin{aligned}
\pi(2^i(i+1)\gamma_{r-1}(i)) &\geq i+\left\lfloor \frac{3(r-1)+i^2}{2} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{3r+i^2+2i-3}{2} \right\rfloor \\
&\geq \left\lfloor \frac{3r+i^2+3}{2} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\pi(2^i(i+1)\gamma_{r-1}(i)) \quad > \quad \left\lfloor \frac{3r+i^2}{2} \right\rfloor. \tag{3.10}$$

Combinando (3.7), (3.9) e (3.10) com a propriedade (3.1) acerca de π, temos que

$$\pi(\gamma_r(i)) = \pi(2^{i+1}\gamma_{r-1}(i-1) - 2^i(i+1)\gamma_{r-1}(i) + \Delta_1) \geq \left\lfloor \frac{3r+i^2}{2} \right\rfloor,$$

com tal igualdade valendo se, e somente se, vale a igualdade em $\pi(2^{i+1}\gamma_{r-1}(i-1))$, ou seja, quando $r+i$ é ímpar. ■

3.1.2 Demonstração do Teorema 3.0.1

A função geradora para as partições $b_k(n)$ é

$$B_k(q) = \sum_{n=0}^{\infty} b_k(n)q^n = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{1-q^{2^i}}.$$

Em particular, $B_0(q) = 1$. Note que, da mesma forma que em (2.6)

$$B_k(q) = \frac{1}{1-q} B_{k-1}(q^2) \tag{3.11}$$

e, além disso,

$$U\left(\frac{1}{1-q}\right) = U\left(\sum_{i=0}^{\infty} q^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}. \tag{3.12}$$

Aplicando U em ambos os lados de (3.11)

$$\begin{aligned}
U(B_k(q)) &= U\left(\frac{1}{1-q} B_{k-1}(q^2)\right) \\
&= U\left(\frac{1}{1-q}\right) B_{k-1}(q), \text{ por (3.3)} \\
&= \frac{1}{1-q} B_{k-1}(q), \text{ usando (3.12)} \\
&= \frac{1}{(1-q)^2} B_{k-2}(q^2) \\
&= (1+q+q^2+\cdots)(1+q+q^2+\cdots)B_{k-2}(q^2),
\end{aligned}$$

portanto

$$U(B_k(q)) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n\right) B_{k-2}(q^2). \tag{3.13}$$

Aplicando U em ambos os lados de (3.13), temos

$$\begin{aligned}
U^2(B_k(q)) &= U\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n\right) B_{k-2}(q^2)\right) \\
&= U\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n\right) B_{k-2}(q), \text{ por (3.3)} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)q^n\right) B_{k-2}(q).
\end{aligned}$$

Passando a parte referente a $n = 0$ para o lado esquerdo da igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} U^2(B_k(q)) - B_{k-2}(q) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)q^n\right) B_{k-2}(q) \\ &= \left(2\sum_{n=1}^{\infty} nq^n + \sum_{n=1}^{\infty} q^n\right) B_{k-2}(q) \\ &= \left(\frac{2q}{(1-q)^2} + \frac{q}{1-q}\right) B_{k-2}(q) \\ &= (2h_1 + h_0)B_{k-2}(q). \end{aligned}$$

Assim,

$$U^2(B_k(q)) - B_{k-2}(q) = (2h_2 + h_1)B_{k-3}(q^2).$$

Novamente aplicando U e utilizando (3.3),

$$\begin{aligned} U^3(B_k(q)) - U(B_{k-2}(q)) &= U((2h_2 + h_1)B_{k-3}(q^2)). \\ &= (2U(h_2) + U(h_1))B_{k-3}(q) \end{aligned}$$

Calculando $U(h_2)$ e $U(h_1)$, utilizando (3.5):

$$U(h_2) = \sum_{i=\lfloor \frac{2}{2} \rfloor}^{2} (-1)^{2-i} 2^{2i-2} \binom{i}{2-i} h_i = -h_1 + 2^2 h_2.$$

$$U(h_1) = \sum_{i=\lfloor \frac{1}{2} \rfloor}^{1} (-1)^{1-i} 2^{2i-1} \binom{i}{1-i} h_i = 2h_1.$$

Assim,

$$U^3(B_k(q)) - U(B_{k-2}(q)) = 2^3 h_2 B_{k-3}(q) = K_2 B_{k-3}(q),$$

pela definição 3.1.6.

Sabendo que, por (3.11) e por (3.3),

$$U(K_i B_{k-i-1}(q)) = U\left(\frac{1}{1-q} K_i B_{k-i-2}(q^2)\right) = U\left(\frac{1}{1-q} K_i\right) B_{k-i-2}(q) = K_{i+1} B_{k-i-2}(q),$$

por um processo indutivo, tem-se

$$U^{r+2}(B_k(q)) - U^r(B_{k-2}(q)) = K_{r+1}B_{k-r-2}(q),$$

podendo assim concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_k(2^{r+2}n) - b_{k-2}(2^r n))q^n = K_{r+1}B_{k-r-2}(q). \tag{3.14}$$

Pelo Lema 3.1.7, foi provado que $K_{r+1} = \sum_{i=1}^{r+1}\gamma_{r+1}(i)h_{i+1}$, com

$$\pi(\gamma_{r+1}(i)) \geq \left\lfloor \frac{3(r+1)+i^2}{2} \right\rfloor \overset{i\geq 1}{\geq} \left\lfloor \frac{3r+4}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3r}{2} \right\rfloor + 2.$$

Assim $2^{\lfloor 3r/2 \rfloor + 2}$ divide $\gamma_{r+1}(i), \forall i$.

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_k(2^{r+2}n) - b_{k-2}(2^r n))q^n \equiv K_{r+1}B_{k-r-2}(q) \equiv 0 \pmod{2^{\lfloor 3r/2 \rfloor + 2}},$$

implicando em

$$b_k(2^{r+2}n) - b_{k-2}(2^r n) \equiv 0 \pmod{2^{\lfloor 3r/2 \rfloor + 2}}.$$

$\blacksquare$

Corolário 3.1.8. *Para* $1 \leq r \leq k-3$ *e se* $n \equiv 1 \pmod{2^{k-r-1}}$, *nenhuma potência de* 2 *maior do que* $\left\lfloor \frac{3r}{2} \right\rfloor + 2$ *divide* $b_k(2^{r+2}n) - b_{k-2}(2^r n)$.

Demonstração: Tome $\sum_{n=1}^{\infty} d_r(n)q^n = h_2(q)B_{k-r-2}(q)$.

Note que $\frac{1}{1-q^2} \equiv \frac{1}{(1-q)^2} \pmod 2$, já que

$$\underbrace{1 + q^2 + q^4 + q^6 + q^8 + \cdots}_{\frac{1}{1-q^2}} \equiv \underbrace{1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots}_{\frac{1}{(1-q)^2}} \pmod 2.$$

Tomando o fato acima, por um processo indutivo, vê-se que

$$\begin{aligned}
B_k(q) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{1-q^{2^i}} &\equiv \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(1-q)^{2^i}} \\
&\equiv \frac{1}{(1-q)} \frac{1}{(1-q)^2} \cdots \frac{1}{(1-q)^{2^{k-1}}} \\
&\equiv \frac{1}{(1-q)^{1+2+\cdots+2^{k-1}}} \\
B_k(q) &\equiv \frac{1}{(1-q)^{2^k-1}} \pmod 2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} d_r(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_r(n+1)q^{n+1} &= h_2(q)B_{k-r-2}(q) \\
&= \frac{q}{(1-q)^3} B_{k-r-2}(q) \\
&\equiv \frac{q}{(1-q)^3} \frac{1}{(1-q)^{2^{k-r-2}-1}} \pmod 2 \\
&\equiv \frac{q}{(1-q)^{2^{k-r-2}+2}} \pmod 2. \\
&\equiv \frac{q}{(1-q^2)^{2^{k-r-3}+1}} \pmod 2.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_r(n+1)q^n \equiv \frac{1}{(1-q^2)^{2^{k-r-3}+1}} \pmod 2.$$

Aplicando U em ambos os lados, temos

$$\begin{aligned}
U\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_r(n+1)q^n\right) &\equiv U\left(\frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{(1-q^2)^{2^{k-r-3}}}\right) \pmod 2 \\
\sum_{n=0}^{\infty} d_r(2n+1)q^n &\equiv U\left(\frac{1}{1-q}\right) \cdot \frac{1}{(1-q)^{2^{k-r-3}}} \pmod 2, \text{ por (3.3)} \\
\sum_{n=0}^{\infty} d_r(2n+1)q^n &\equiv \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{(1-q)^{2^{k-r-3}}} \pmod 2, \text{ por (3.12)}.
\end{aligned}$$

Aplicando $(k-r-3)$ vezes U, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} d_r(2^{k-r-2}n+1)q^n &\equiv \frac{1}{(1-q)^2} \pmod 2 \\
&\equiv \frac{1}{(1-q^2)} \pmod 2 \\
&\equiv 1+q^2+q^4+q^6+\cdots \pmod 2,
\end{aligned}$$

logo, para n par, vale que

$$d_r(2^{k-r-2}n+1) \equiv 1 \pmod 2.$$

Com n par, podemos substituir n por $2n$, com $n \in \mathbb{Z}$ e assim, para $1 \leq r \leq k-3$, temos

$$d_r(2^{k-r-1}n+1) \equiv 1 \pmod 2, \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{3.15}$$

Pelo Lema 3.1.7, como $K_{r+1}(q) = \sum_{i=1}^{r} \gamma_{r+1}(i)h_{i+1}$, com $\pi(\gamma_{r+1}(i)) \geq \left\lfloor \frac{3(r+1)+i^2}{2} \right\rfloor$ e para $i \geq 2$, temos

$$\pi(\gamma_{r+1}(i)) \geq \left\lfloor \frac{3r+7}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{3r}{2} \right\rfloor + 3.$$

Isso nos possibilita concluir que, para $i \geq 2$

$$\gamma_{r+1}(i) \equiv 0 \pmod{2^{\lfloor \frac{3r}{2} \rfloor + 3}}.$$

Já para o caso $i = 1$, podemos apenas dizer que $\pi(\gamma_{r-1}(1)) \geq \left\lfloor \frac{3r}{2} \right\rfloor + 2$. Por isso, podemos escrever $\gamma_{r-1}(1) = 2^{\lfloor \frac{3r}{2} \rfloor + 2}a$, com $a \in \mathbb{Z}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
K_{r+1}(i) &= 2^{\lfloor 3r/2 \rfloor + 2}ah_2(q) + \sum_{i=2}^{r} \gamma_{r+1}(i)h_{i+1} \\
&\equiv 2^{\lfloor 3r/2 \rfloor + 2}ah_2(q) \pmod{2^{\lfloor 3r/2 \rfloor + 3}}.
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(b_k(2^{r+2}n)-b_{k-2}(2^rn))q^n &= K_{r+1}B_{k-r-2}(q)\\ &\equiv 2^{\lfloor 3r/2\rfloor+2}ah_2(q)B_{k-r-2} \pmod{2^{\lfloor 3r/2\rfloor+3}}\\ &\equiv 2^{\lfloor 3r/2\rfloor+2}a\sum_{n=1}^{\infty}d_r(n)q^n \pmod{2^{\lfloor 3r/2\rfloor+3}}\end{aligned}$$

Agora, se $n \equiv 1 \pmod{2^{k-r-1}}$, podemos escrevê-lo como $n = 2^{k-r-1}l+1$, para algum l inteiro. Pela congruência anterior, temos

$$\begin{aligned}b_k(2^{r+2}n)-b_{k-2}(2^rn) &\equiv 2^{\lfloor 3r/2\rfloor+2}\cdot d_r(2^{k-r-1}l+1) \pmod{2^{\lfloor 3r/2\rfloor+3}}\\ &\equiv 2^{\lfloor 3r/2\rfloor+2}\cdot 1 \pmod{2^{\lfloor 3r/2\rfloor+3}},\end{aligned}$$

já que, por (3.15), $d_r(2^{k-r-1}n+1) \equiv 1 \pmod 2, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Consequentemente, se $n \equiv 1 \pmod{2^{k-r-1}}$, nenhuma potência de 2 com expoente maior que $\left\lfloor \frac{3r}{2} \right\rfloor + 2$ divide $b_k(2^{r+2}n)-b_{k-2}(2^rn)$.

■

Corolário 3.1.9. *Para $k \geq 1$, temos que*

$$b_k(2^kn)-b_{k-2}(2^{k-2}n) \equiv 2^{\lfloor 3k/2\rfloor-1}\frac{n\cdot(n+1)}{2} \pmod{2^{\lfloor 3k/2\rfloor}}.$$

Demonstração: Pela demonstração do Teorema 3.0.1, sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_k(2^{r+2}n)-b_{k-2}(2^rn))q^n = K_{r+1}B_{k-r-2}(q)$$

e tomando $r = k-2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_k(2^kn)-b_{k-2}(2^{k-2}n))q^n = K_{k-1}(q).$$

Pelo Lema 3.1.7, podemos escrever $K_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-2} \gamma_{k-1}(i) h_{i+1}$ com

$$\pi(\gamma_{k-1}(i)) \geq \left\lfloor \frac{3(k-1)+i^2}{2} \right\rfloor.$$

Para $i \geq 2$, a desigualdade pode ser escrita por

$$\pi(\gamma_{k-1}(i)) \geq \left\lfloor \frac{3k+1}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{3k}{2} \right\rfloor.$$

Assim, a única possível parte não divisível por $2^{\left\lfloor \frac{3k}{2} \right\rfloor}$ é parcela referente à $i = 1$. Sendo assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_k(2^k n) - b_{k-2}(2^{k-2} n)) q^n \equiv \gamma_{k-1}(1) h_2 \pmod{2^{\lfloor 3k/2 \rfloor}}.$$

Além disso, temos

$$\pi(\gamma_{k-1}(1)) = \left\lfloor \frac{3(k-1)+1^2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3k}{2} \right\rfloor - 1$$

e

$$h_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+2-1}{2} q^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} q^n.$$

Desta forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_k(2^k n) - b_{k-2}(2^{k-2} n)) q^n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{k-1}(1) \frac{n(n+1)}{2} \pmod{2^{\lfloor 3k/2 \rfloor}},$$

portanto

$$b_k(2^k n) - b_{k-2}(2^{k-2} n) \equiv \gamma_{k-1}(1) \frac{n(n+1)}{2} \pmod{2^{\lfloor 3k/2 \rfloor}}.$$

Como $\pi(\gamma_{k-1}(1)) = \lfloor 3k/2 \rfloor - 1$, podemos escrever $\gamma_{k-1}(1) = 2^{\lfloor 3k/2 \rfloor - 1} \cdot l$, para algum $l > 1$ e não divisível por 2.

Por consequência, temos que

$$\begin{aligned} b_k(2^k n) - b_{k-2}(2^{k-2}n) &\equiv 2^{\lfloor 3k/2 \rfloor - 1} \cdot l \cdot \frac{n(n+1)}{2} \pmod{2^{\lfloor 3k/2 \rfloor}} \\ &\equiv 2^{\lfloor 3k/2 \rfloor - 1} \frac{n(n+1)}{2} \pmod{2^{\lfloor 3k/2 \rfloor}}, \end{aligned}$$

já que se $l \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ é par, então $\frac{n(n+1)}{2}$ também é par. Assim $2^{\lfloor 3k/2 \rfloor - 1} \cdot l \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ e $2^{\lfloor 3k/2 \rfloor - 1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$, são divisíveis por $2^{\lfloor 3k/2 \rfloor}$.

Agora, se $l \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ é ímpar, então $\frac{n(n+1)}{2}$ também o é. Então podemos escrevê-los como $(2m+1)$ e $(2s+1)$, respectivamente, para certos m e $s \in \mathbb{Z}$. Portanto

$$2^{\lfloor 3k/2 \rfloor - 1} \cdot (2m+1) \equiv 2^{\lfloor 3k/2 \rfloor - 1} \cdot (2s+1) \equiv 2^{\lfloor 3k/2 \rfloor - 1} \pmod{2^{\lfloor 3k/2 \rfloor}}.$$

■

3.2 Pré-requisitos e Demonstração do Teorema 3.0.2

Nesta seção serão apresentados os pré-requisitos e os lemas necessários para a demonstração do Teorema 3.0.2. Os lemas e a demonstração estão separados em duas subseções, sendo a primeira para os lemas e a segunda para a demonstração.

3.2.1 Lemas

Lema 3.2.1. *Para $r \geq 2$, existem $\delta_{r,1}(i) \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$U(K_r) = \sum_{i=1}^{r} \delta_{r,1}(i) h_i$$

com $\pi(\delta_{r,1}(1)) = \left\lfloor \frac{3r+1}{2} \right\rfloor$ e $\pi(\delta_{r,1}(i)) \geq \left\lfloor \frac{3r+i^2+1}{2} \right\rfloor$ para $i \geq 2$. Além disso, tal igualdade vale se, e somente se, $i = 2$ ou $r+i$ é par.

Demonstração: Dividiremos a prova mostrando primeiramente a existência e após verificando as condições acerca dos $\delta_{r,1}(i)$.

♦ *Existência:* Já sabemos que, pelo Lema 3.1.7,

$$K_r = \sum_{j=1}^{r-1} \gamma_r(j) h_{j+1}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} U(K_r) &= U\left(\sum_{j=1}^{r-1} \gamma_r(j) h_{j+1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{r-1} \gamma_r(j) U(h_{j+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{r-1} \gamma_r(j) \sum_{i=\lceil \frac{j+1}{2} \rceil}^{j+1} (-1)^{j+1-i} 2^{2i-j-1} \binom{i}{j+1-i} h_i, \text{ por (3.5).} \end{aligned}$$

Como $\lceil \frac{j+1}{2} \rceil \leq i \leq j+1$, temos $i-1 \leq j \leq 2i-1$. Além disso, sabendo que $i-1 \leq j \leq 2i-1$ e $1 \leq j \leq r-1$, podemos concluir que

$$\max\{i-1, 1\} \leq j \leq \min\{2i-1, r-1\}.$$

Da mesma forma, $\lceil \frac{j+1}{2} \rceil \leq i \leq j+1$ e, sabendo que $1 \leq j \leq r-1$, segue $1 \leq i \leq r$.

Como consequência:

$$U(K_r) = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\left(\sum_{j=\max\{1,i-1\}}^{\min\{r-1,2i-1\}} (-1)^{j+1-i} 2^{2i-j-1} \binom{i}{j+1-i} \gamma_r(j) \right)}_{\delta_{r,1}(i)} h_i.$$

Por isso, tome

$$\delta_{r,1}(i) = \sum_{j=\max\{1,i-1\}}^{\min\{r-1,2i-1\}} (-1)^{j+1-i} 2^{2i-j-1} \binom{i}{j+1-i} \gamma_r(j) \in \mathbb{Z}. \tag{3.16}$$

♦ *Relações de* $\pi(\delta_{r,1}(i))$*:* Vamos calcular primeiramente para o caso $i = 1$ e depois passaremos para o caso $2 \leq i \leq r$.

⋆ *Para* $i = 1$*:* Por (3.16), temos

$$\delta_{r,1}(1) = \sum_{j=\max\{1,0\}=1}^{\min\{r-1,1\}=1} (-1)^j 2^{1-j} \binom{1}{j} \gamma_r(j) = -\gamma_r(1).$$

Assim, $\pi(\delta_{r,1}(1)) = \pi(-\gamma_r(1)) = \left\lfloor \frac{3r+1}{2} \right\rfloor$, pelo Lema 3.1.7.

Logo, está provado o lema para o caso $i = 1$.

⋆ *Para* $2 \leq i \leq r$*:* Por (3.16), expandimos tal soma destacando os dois primeiros termos:

$$\begin{aligned} \delta_{r,1}(i) &= 2^i \gamma_r(i-1) + (-1)^{2i-1} 2^{i-1} \binom{i}{i+1-i} \gamma_r(i) \\ &+ \underbrace{\sum_{j=i+1}^{\min\{r-1,2i-1\}} (-1)^{j+1-i} 2^{2i-j-1} \binom{i}{j+1-i} \gamma_r(j)}_{\Delta_2} \\ &= 2^i \gamma_r(i-1) + -2^{i-1} i \gamma_r(i) + \Delta_2 \end{aligned}$$

Calcularemos separadamente π de cada um dos três termos anteriores:

⋆ *Caso* $\pi(\Delta_2)$*:*

$$\begin{aligned} \pi(\Delta_2) &\geq \min_{j \geq i+1} (2i - j - 1 + \pi(\gamma_r(j))) \\ &= \min_{j \geq i+1} \left(2i - j - 1 + \left\lfloor \frac{3r + j^2}{2} \right\rfloor \right) \\ &\geq \min_{j \geq i+1} \left(\left\lfloor \frac{3r + (j^2 - 2j + 1) + 4i - 2 - 1}{2} \right\rfloor \right) \\ &\geq \left\lfloor \frac{3r + i^2 + 4i - 3}{2} \right\rfloor, \text{ já que } j - 1 \geq i \\ &\geq \left\lfloor \frac{3r + i^2 + 1 + 4}{2} \right\rfloor, \text{ pois } i \geq 2 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\pi(\Delta_2 &\geq \left\lfloor \frac{3r+i^2+1}{2} \right\rfloor + 2\\ &> \left\lfloor \frac{3r+i^2+1}{2} \right\rfloor.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\pi(\Delta_2) > \left\lfloor \frac{3r+i^2+1}{2} \right\rfloor. \tag{3.17}$$

$\star$ *Caso* $\pi(2^i\gamma_r(i-1))$:

$$\begin{aligned}\pi(2^i\gamma_r(i-1)) &\geq i + \left\lfloor \frac{3r+(i-1)^2}{2} \right\rfloor\\ &= \left\lfloor \frac{3r+i^2+1}{2} \right\rfloor\end{aligned}$$

Assim,

$$\pi(2^i\gamma_r(i-1)) \geq \left\lfloor \frac{3r+i^2+1}{2} \right\rfloor. \tag{3.18}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, conforme o Lema 3.1.7, $r+(i-1)$ é ímpar, ou seja, $r+i$ é par ou $(i-1)=1$, ou seja, $i=2$.

$\star$ *Caso* $\pi(2^{i-1}i\gamma_r(i))$*:*

$$\begin{aligned}\pi(2^{i-1}i\gamma_r(i)) &\geq i-1+\pi(i) + \left\lfloor \frac{3r+i^2}{2} \right\rfloor\\ &= \left\lfloor \frac{3r+i^2+2i-2+2\pi(i)}{2} \right\rfloor\end{aligned}$$

Se $i=2$ e $\pi(2)=1$:

$$\pi(2^1 i\gamma_r(2)) \geq \left\lfloor \frac{3r+i^2+4}{2} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{3r+i^2+1}{2} \right\rfloor.$$

Se $i \geq 3$, como $\pi(i) \geq 0$:

$$\pi(2^{i-1}i\gamma_r(i)) \geq \left\lfloor \frac{3r+i^2+6-1}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{3r+i^2+5}{2} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{3r+i^2+1}{2} \right\rfloor.$$

Pelos cálculos acima, podemos concluir que:

$$\pi(2^{i-1} i \gamma_r(i)) > \left\lfloor \frac{3r + i^2 + 1}{2} \right\rfloor. \tag{3.19}$$

Combinando (3.17), (3.18), (3.19) e a propriedade (3.1) de π, obtemos que

$$\pi(\delta_{r,1}(i)) \geq \left\lfloor \frac{3r + i^2 + 1}{2} \right\rfloor,$$

sendo a igualdade válida somente quando $\pi(2^i \gamma_r(i-1)) = \left\lfloor \frac{3r + i^2 + 1}{2} \right\rfloor$, ou seja, quando $i = 2$ ou $r + i$ é par. ■

Lema 3.2.2. *Para $r \geq 2$ e $t \geq 1$, existem $\delta_{r,t}(i) \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$U^t(K_r) = \sum_{i=1}^{r} \delta_{r,t}(i) h_i,$$

com $\pi(\delta_{r,t}(1)) = \left\lfloor \frac{3r + 1}{2} \right\rfloor + t - 1$ *e* $\pi(\delta_{r,t}(i)) \geq \left\lfloor \frac{3r + i^2 + 1}{2} \right\rfloor + i(t-1)$, *para* $2 \leq i \leq r$. *Além disso, a igualdade vale se, e somente se, $i = 2$ ou $r + i$ é par.*

Demonstração: Tal lema será provado considerando-se duas etapas: a existência e as condições acerca dos $\pi(\delta_{r,t}(i))$.

♦ *Existência:* A prova será feita por indução sobre t. Note que, como a base de indução é $t = 1$, tal resultado vale usando o lema anterior.

Agora suponha que tal resultado valha para $t - 1$, para algum t maior ou igual a 2, ou seja, podemos escrever

$$U^{t-1}(K_r) = \sum_{i=1}^{r} \delta_{r,t-1}(i) h_i$$

e tais propriedades acerca dos $\pi(\delta_{r,t-1}(i))$ sejam válidas para $t-1$, conforme descrito no enunciado do lema.

Pela hipótese de indução, segue

$$\begin{aligned}
U^t(K_r) &= U(U^{t-1}(K_r)) \\
&= U\left(\sum_{j=1}^{r} \delta_{r,t-1}(j) h_j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \delta_{r,t-1}(j) U(h_j) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \delta_{r,t-1}(j) \sum_{i=\lceil \frac{j}{2} \rceil}^{j} (-1)^{j-i} 2^{2i-j} \binom{i}{j-i} h_i, \text{ por (3.5).}
\end{aligned}$$

Como $\lceil \frac{j}{2} \rceil \leq i \leq j$, então $i \leq j \leq 2i$. Assim, usando $i \leq j \leq 2i$ e $1 \leq j \leq r$, segue que

$$\max\{i, 1\} \leq j \leq \min\{2i, r\},$$

ou também,

$$i \leq j \leq \min\{2i, r\}.$$

Da mesma forma, como $\left\lceil \dfrac{j}{2} \right\rceil \leq i \leq j$ e $1 \leq j \leq r$, temos $1 \leq i \leq r$. Assim, podemos escrever

$$U(K_r) = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\left(\sum_{j=i}^{\min\{r,2i\}} (-1)^{j+i} 2^{2i-j} \binom{i}{j-i} \delta_{r,t-1}(j) \right)}_{\delta_{r,t}(i)} h_i.$$

Tome então

$$\delta_{r,t}(i) = \sum_{j=i}^{\min\{r,2i\}} (-1)^{j+i} 2^{2i-j} \binom{i}{j-i} \delta_{r,t-1}(j) \tag{3.20}$$

e note que $\delta_{r,t}(i) \in \mathbb{Z}$.

♦ *Relações de $\pi(\delta_{r,t}(i))$:* Para a prova será usada a hipótese de indução da prova da existência de $\delta_{r,t}(i)$.

$\star$ *Caso* $i = 1$*:* Por (3.20), temos:

$$\begin{aligned}\delta_{r,t}(1) &= \sum_{j=1}^{min\{r,2\}=2} (-1)^{j+1} 2^{2-j} \binom{1}{j-1} \delta_{r,t-1}(j) \\ &= 2\delta_{r,t-1}(1) - \delta_{r,t-1}(2).\end{aligned}$$

Calculando $\pi(2\delta_{r,t-1}(1))$, obtemos

$$\begin{aligned}\pi(2\delta_{r,t-1}(1)) &= 1 + \left\lfloor \frac{3r+1}{2} \right\rfloor + (t-1) - 1 \\ &= \left\lfloor \frac{3r+1}{2} \right\rfloor + t - 1.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\pi(\delta_{r,t-1}(2)) &= \left\lfloor \frac{3r+4+1}{2} \right\rfloor + 2((t-1)-1) \\ &= \left\lfloor \frac{3r+1}{2} \right\rfloor + 2 + 2t - 4 \\ &= \left\lfloor \frac{3r+1}{2} \right\rfloor + 2(t-1).\end{aligned}$$

Já que $t > 1$, temos

$$\pi(\delta_{r,t-1}(2)) > \left\lfloor \frac{3r+1}{2} \right\rfloor + (t-1).$$

Assim, combinando os dois resultados anteriores com (3.1), obtemos que:

$$\pi(\delta_{r,t}(1)) = \left\lfloor \frac{3r+1}{2} \right\rfloor + (t-1).$$

$\star$ *Caso* $2 \leq i \leq r$*:* Considerando a definição (3.20) e expandindo apenas o primeiro termo, temos:

$$\begin{aligned}\delta_{r,t}(i) &= (-1)^{2i} 2^{2i-i} \binom{i}{i-i} \delta_{r,t-1}(i) + \underbrace{\sum_{j=i+1}^{\min\{r,2i\}} (-1)^{j+i} 2^{2i-j} \binom{i}{j-i} \delta_{r,t-1}(j)}_{\Delta_3} \\ &= 2^i \delta_{r,t-1}(i) + \Delta_3.\end{aligned}$$

Calculando $\pi(2^i\delta_{r,t-1}(i))$ obtemos

$$\begin{aligned}\pi(2^i\delta_{r,t-1}(i)) &= i+\pi(\delta_{r,t-1}(i))\\ &\geq i+\left\lfloor\frac{3r+i^2+1}{2}\right\rfloor + i((t-1)-1), \text{ pela hipótese de indução}\\ &= \left\lfloor\frac{3r+i^2+1}{2}\right\rfloor + i(t-1).\end{aligned}$$

Tal igualdade vale, pela hipótese de indução, se, e somente se, $i = 2$ ou $r + i$ é par.

Calculando $\pi(\Delta_3)$ obtemos:

$$\pi(\Delta_3) \geq \min_{j\geq i+1}\left(2i-j+\left\lfloor\frac{3r+j^2+1}{2}\right\rfloor + j((t-1)-1)\right)$$

Como $j \leq 2i$ temos $-j \geq -2i$. Além disso, como $j \geq i + 1$, consequentemente temos $j > i$. Portanto,

$$\begin{aligned}\pi(\Delta_3) &> \left(2i-2i+\left\lfloor\frac{3r+(i+1)^2+1}{2}\right\rfloor + i(t-2)\right)\\ &= \left\lfloor\frac{3r+i^2+2i+1+1}{2}\right\rfloor + i(t-1)-i\\ &\geq \left\lfloor\frac{3r+i^2+2}{2}\right\rfloor + i + i(t-1)-i\\ &\geq \left\lfloor\frac{3r+i^2+1}{2}\right\rfloor + i(t-1).\end{aligned}$$

Logo

$$\pi(\Delta_3) \geq \left\lfloor\frac{3r+i^2+1}{2}\right\rfloor + i(t-1).$$

Pela propriedade (3.1) de π e pelos cálculos acima de $\pi(2^i\delta_{r,t-1}(i))$ e $\pi(\Delta_3)$ concluímos que

$$\pi(\delta_{r,t}(i)) \geq \left\lfloor\frac{3r+i^2+1}{2}\right\rfloor + i(t-1),$$

e a igualdade ocorre somente se vale a igualdade em $\pi(2^i\delta_{r,t-1}(i))$, ou seja, quando $i = 2$ ou $r + i$ é par.

■

3.2.2 Demonstração do Teorema 3.0.2

Por (3.14), temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big(b_k(2^{r+2}n)-b_{k-2}(2^rn)\big)\,q^n = K_{r+1}B_{k-r-2}(q).$$

Tomando $r=k-2$, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big(b_k(2^{k}n)-b_{k-2}(2^{k-2}n)\big)\,q^n = K_{k-1}(q).$$

Aplicando U t vezes

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big(b_k(2^{k+t}n)-b_{k-2}(2^{k+t-2}n)\big)\,q^n = U^t(K_{k-1}(q)). \tag{3.21}$$

Pelo Lema 3.2.2, $U^t(K_{k-1})=\sum_{i=1}^{k-1}\delta_{k-1,t}(i)h_i$ e ainda,

$$\begin{aligned}\pi(\delta_{k-1,t}(i)) &\geq \left\lfloor\frac{3(k-1)+i^2+1}{2}\right\rfloor + i(t-1)\\ &= \left\lfloor\frac{3k+i^2-2}{2}\right\rfloor + i(t-1).\end{aligned}$$

O que, para $i\geq 2$, temos

$$\begin{aligned}\pi(\delta_{k-1,t}(i)) &\geq \left\lfloor\frac{3k}{2}\right\rfloor + 2t-1\\ &\geq \left\lfloor\frac{3k}{2}\right\rfloor + t-1.\end{aligned}$$

Logo, $\delta_{k-1,t}(i)\equiv 0 \pmod{2^{\lfloor\frac{3k}{2}\rfloor+t-1}}$, para todo $i\geq 2$. Como consequência,

$$\begin{aligned}U^t(K_{k-1}) &\equiv \delta_{k-1,t}(1)h_1\\ &\equiv \delta_{k-1,t}(1)\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+1-1}{1}q^n\\ &\equiv \delta_{k-1,t}(1)\sum_{n=1}^{\infty}nq^n \pmod{2^{\lfloor 3k/2\rfloor+t-1}}.\end{aligned}$$

Como $\pi(\delta_{k-1,t}(1)) = \left\lfloor \dfrac{3(k-1)+1}{2} \right\rfloor + t - 1 = \left\lfloor \dfrac{3k}{2} \right\rfloor + t - 2$, podemos escrever

$$\delta_{k-1,t}(1) = 2^{\lfloor 3k/2 \rfloor + t - 2} \cdot a,$$

com $a \in \mathbb{Z}$. Por (3.21) conclui-se que:

$$b_k(2^{k+t}n) - b_{k-2}(2^{k+t-2}n) \equiv 2^{\lfloor 3k/2 \rfloor + t - 2} \cdot a \cdot n \pmod{2^{\lfloor 3k/2 \rfloor + t - 1}}.$$

Logo,

$$b_k(2^{k+t}n) - b_{k-2}(2^{k+t-2}n) \equiv 2^{\lfloor 3k/2 \rfloor + t - 2} \cdot a \cdot n \equiv 0 \pmod{2^{\lfloor 3k/2 \rfloor + t - 2}}.$$

o que prova o teorema. ■

Capítulo 4

Partições com partes pares distintas

Este capítulo será uma releitura do trabalho desenvolvido em [1]. Serão enunciadas e provadas algumas congruências acerca do número de partições de um inteiro n que consistem somente de partes pares distintas, as quais serão denominadas por $ped(n)$. Primeiramente, vários lemas serão apresentados e demonstrados para então passarmos aos dois principais teoremas do capítulo, que nos deixarão aptos a provar tais congruências. Elas estão apresentadas em forma de corolário, conforme segue abaixo

Corolário: *Para todo $n \geq 0$, temos*

$$ped(3n+2) \equiv 0 \pmod 2,$$

$$ped(9n+4) \equiv 0 \pmod 4$$

e

$$ped(9n+7) \equiv 0 \pmod{12}.$$

4.1 Lemas

Uma sequência de lemas é apresentada nesta seção, sendo preliminares para a prova dos teoremas que serão a seguir enunciados e provados.

Definição 4.1.1. *Seja $ped(n)$ o número de partições de um inteiro n, cujas partes pares são distintas. Referente às partes ímpares, não há restrição.*

Definição 4.1.2. *Sejam $\phi(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$ e $\psi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n^2+n)/2}$ funções introduzidas por Ramanujan e definidas para $|q| < 1$.*

Note que

$$\begin{aligned}
\psi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n^2+n)/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n(2n-1)/2} + q^{2n(2n+1)/2} - 1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n(2n-1)/2} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n(2n+1)/2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} q^{n(2n-1)} + \sum_{n=-\infty}^{0} q^{n(2n-1)}
\end{aligned}$$

e, portanto

$$\psi(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2-n}.$$

Com base nas definições acima, consideraremos agora os seguintes lemas que servirão para provar o teorema principal deste capítulo.

Lema 4.1.3. *Para todo q tal que $|q| < 1$, vale*

$$\phi(-q) = \frac{(q;q)_\infty^2}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

Demonstração: Temos que

$$\phi(-q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-q^{-1})^n (q^2)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Assim, pelo Produto Triplo de Jacobi, temos

$$\begin{aligned}\phi(-q) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{-1}q^{2n})(1-q^{1}q^{2n-2}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})(1-q^{2n-1}) \\ &= (q;q^2)_\infty^2(q^2;q^2)_\infty.\end{aligned}$$

Como $(q;q)_\infty = (q;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty$, então

$$\begin{aligned}\phi(-q) &= (q;q)_\infty(q;q^2)_\infty \\ &= \frac{(q;q)_\infty^2}{(q^2;q^2)_\infty}.\end{aligned}$$

■

Lema 4.1.4. *Para todo q tal que $|q|<1$, vale*

$$\psi(-q) = \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(-q;q^2)_\infty}.$$

Demonstração: Conforme calculado anteriormente, vimos que

$$\psi(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2-n}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\psi(-q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{2n^2-n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{2n^2+2n}q^{-3n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-q^{-3})^n(q^4)^{n(n+1)/2}.\end{aligned}$$

Pelo produto triplo de Jacobi, temos

$$\begin{aligned}\psi(-q) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n})(1-q^{-3}q^{4n})(1-q^{3}q^{4n-4}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n-3})(1-q^{4n-1})(1-q^{4n}) \\ &= (q,q^4)_\infty(q^3,q^4)_\infty(q^4,q^4)_\infty.\end{aligned}$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\psi(-q) &= \frac{\overbrace{(q;q^4)_\infty(q^2;q^4)_\infty(q^3;q^4)_\infty(q^4;q^4)_\infty}^{(q;q)_\infty}}{(q^2;q^4)_\infty} \\
&= \frac{(q;q)_\infty}{(q^2;q^4)_\infty} \\
&= \frac{(q^2;q^2)_\infty(q;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty(-q;q^2)_\infty} \\
&= \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(-q;q^2)_\infty}.
\end{aligned}
$$

■

Lema 4.1.5. *Para todo q tal que $|q| < 1$, vale*

$$\phi(-q)\psi(-q) = \frac{(q;q)_\infty(q^2;q^2)_\infty}{(-q;q)_\infty(-q;q^2)_\infty}.$$

Demonstração: Pelos Lemas 4.1.3 e 4.1.4, temos

$$
\begin{aligned}
\phi(-q)\psi(-q) &= \frac{(q;q)_\infty^2}{(q^2;q^2)_\infty} \cdot \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(-q;q^2)_\infty} \\
&= \frac{(q;q)_\infty(q;q)_\infty}{(q;q)_\infty(-q;q)_\infty} \cdot \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(-q;q^2)_\infty} \\
&= \frac{(q;q)_\infty(q^2;q^2)_\infty}{(-q;q)_\infty(-q;q^2)_\infty}.
\end{aligned}
$$

■

Lema 4.1.6. *Para todo q tal que $|q| < 1$, vale*

$$\frac{\phi(-q)}{\psi(-q)} = \frac{(q;q^2)_\infty}{(-q^2;q^2)_\infty}.$$

Demonstracão: Pelos Lemas 4.1.3 e 4.1.4, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\phi(-q)}{\psi(-q)} &= \frac{(q;q)_\infty^2(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty} \\
&= \frac{(q;q)_\infty^2(-q;q^2)_\infty}{(-q;q)_\infty(q;q)_\infty(-q;q)_\infty(q;q)_\infty} \\
&= \frac{(-q;q^2)_\infty}{(-q;q)_\infty \quad \underbrace{(-q;q)_\infty}_{(-q;q^2)_\infty(-q^2;q^2)_\infty}} \\
&= \frac{(-q;q^2)_\infty}{(-q;q)_\infty(-q;q^2)_\infty(-q^2;q^2)_\infty} \\
&= \frac{1}{(-q;q)_\infty(-q^2;q^2)_\infty} \\
&= \frac{(q;q)_\infty}{\underbrace{(-q;q)_\infty(q;q)_\infty}_{(q^2;q^2)_\infty}(-q^2;q^2)_\infty}, \\
&= \frac{(q;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty(-q^2;q^2)_\infty} \\
&= \frac{(q;q^2)_\infty}{(-q^2;q^2)_\infty}.
\end{aligned}
$$

■

Lema 4.1.7. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{x^n}{1-aq^n} = \frac{(q;q)_\infty^2(ax;q)_\infty(q/ax;q)_\infty}{(a;q)_\infty(q/a;q)_\infty(x;q)_\infty(q/x;q)_\infty}.$

Demonstração: Antes de iniciarmos a demonstração, vamos relembrar a fórmula ${}_1\psi_1$ de Ramanujan dada no Teorema 1.2.2:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(b;q)_n}x^n = \frac{(ax;q)_\infty(q/ax;q)_\infty(q;q)_\infty(b/a;q)_\infty}{(x;q)_\infty(b/ax;q)_\infty(b;q)_\infty(q/a;q)_\infty}.$$

Tome, neste caso $b = aq$. Então

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(aq;q)_n}x^n &= \frac{(ax;q)_\infty(q/ax;q)_\infty(q;q)_\infty(aq/a;q)_\infty}{(x;q)_\infty(aq/ax;q)_\infty(aq;q)_\infty(q/a;q)_\infty} \\
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})}{(1-aq)(1-aq^2)\cdots(1-aq^n)}x^n &= \frac{(ax;q)_\infty(q/ax;q)_\infty(q;q)_\infty(q;q)_\infty}{(x;q)_\infty(q/x;q)_\infty(aq;q)_\infty(q/a;q)_\infty} \\
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(1-a)}{(1-aq^n)}x^n &= \frac{(ax;q)_\infty(q/ax;q)_\infty(q;q)_\infty^2}{(x;q)_\infty(q/x;q)_\infty(aq;q)_\infty(q/a;q)_\infty}.
\end{aligned}
$$

Dividindo ambos os lados por $(1-a)$, temos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{(1-aq^n)} = \frac{(ax;q)_\infty (q/ax;q)_\infty (q;q)_\infty^2}{(1-a)(aq;q)_\infty (x;q)_\infty (q/x;q)_\infty (q/a;q)_\infty},$$

e, como $(1-a)(aq;q)_\infty = (a;q)_\infty$, segue

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{(1-aq^n)} = \frac{(ax;q)_\infty (q/ax;q)_\infty (q;q)_\infty^2}{(a;q)_\infty (x;q)_\infty (q/x;q)_\infty (q/a;q)_\infty}.$$

■

Lema 4.1.8. *$\phi(-q) = a(q^3) - 2qb(q^3)$, com $a(q) = \phi(-q^3)$ e $b(q) = \dfrac{(q;q)_\infty (q^6;q^6)_\infty^2}{(q^2;q^2)_\infty (q^3;q^3)_\infty}$.*

Demonstração: Pela definição, sabemos que $\phi(-q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\phi(-q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{3n} q^{(3n)^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{3n-1} q^{(3n-1)^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{3n+1} q^{(3n+1)^2} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n} q^{9n^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} q^{9n^2-6n+1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} q^{9n^2+6n+1} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\imath/nfty} (-1)^{n} q^{9n^2} - q \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n} q^{9n^2-6n} - q \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n} q^{9n^2-6n} \\
&= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n} q^{9n^2}}_{a(q^3)} - 2q \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n} q^{9n^2-6n}}_{b(q^3)}.
\end{aligned}$$

Assim, tome

$$a(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (q)^{3n^2} = \phi(-q^3)$$

e

$$b(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{3n^2-2n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-q^{-5})^n (q^6)^{\frac{n^2+n}{2}}.$$

Pelo Produto Triplo de Jacobi, podemos escrever $b(q)$ como

$$
\begin{aligned}
b(q) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{6n})(1-q^{-5}q^{6n})(1-q^{5}q^{6n-6}) \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{6n})(1-q^{6n-5})(1-q^{6n-1}) \\
&= (q^6;q^6)_\infty(q;q^6)_\infty(q^5;q^6)_\infty \\
&= \frac{(q;q)_\infty(q^6;q^6)_\infty^2}{(q^2;q^2)_\infty(q^3;q^3)_\infty},
\end{aligned}
$$

já que $(q;q^6)_\infty(q^5;q^6)_\infty = \dfrac{\overbrace{(q;q^6)_\infty(q^2;q^6)_\infty(q^3;q^6)_\infty(q^4;q^6)_\infty(q^5;q^6)_\infty(q^6;q^6)_\infty}^{(q;q)_\infty}}{\underbrace{(q^2;q^6)_\infty(q^4;q^6)_\infty(q^6;q^6)_\infty}_{(q^2;q^2)_\infty}\underbrace{(q^3;q^6)_\infty}_{\frac{(q^3;q^3)_\infty}{(q^6;q^6)_\infty}}}$. ■

Lema 4.1.9. $a(q)^3 - 8qb(q)^3 = \dfrac{\phi(-q)^4}{\phi(-q^3)}$

Demonstração: Primeiramente, tome 1, w, w^2 as raízes cúbicas da unidade e notemos que

$$(q;q)_\infty(wq;wq)_\infty(w^2q;w^2q)_\infty = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-w^nq^n)(1-w^{2n}q^n).$$

Se 3 divide n, temos que $w^n = 1$ e $w^{2n} = 1$, pois são raízes cúbicas da unidade. Logo,

$$(q;q)_\infty(wq;wq)_\infty(w^2q;w^2q)_\infty = \prod_{3|n}(1-q^n)^3\prod_{3\nmid n}(1-q^n)(1-w^nq^n)(1-w^{2n}q^n)$$

$$= \prod_{3|n}(1-q^n)^3\prod_{3\nmid n}(1-(1+w^n+w^{2n})q^n+(1+w^n+w^{2n})q^{2n}-w^{3n}q^{3n})$$

Como $1+w^n+w^{2n}=0$, se $3\nmid n$, temos

$$
\begin{aligned}
(q;q)_\infty(wq;wq)_\infty(w^2q;w^2q)_\infty &= \prod_{3|n}(1-q^n)^3\prod_{3\nmid n}(1-q^{3n})\\
&= \prod_{n\geq 1}(1-q^{3n})^3\prod_{3\nmid n}(1-q^{3n})\\
&= \prod_{n\geq 1}(1-q^{3n})^3\frac{\prod_{n\geq 1}(1-q^{3n})}{\prod_{3|n}(1-q^{3n})}\\
&= \frac{\prod_{n\geq 1}(1-q^{3n})^4}{\prod_{n\geq 1}(1-q^{9n})}\\
&= \frac{(q^3;q^3)_\infty^4}{(q^9;q^9)_\infty}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
(q;q)_\infty(wq;wq)_\infty(w^2q;w^2q)_\infty = \frac{(q^3;q^3)_\infty^4}{(q^9;q^9)_\infty}. \tag{4.1}
$$

Agora, temos, pelo Lema 4.1.3,

$$
\begin{aligned}
\phi(-q)\phi(-wq)\phi(-w^2q) &= \frac{(q;q)_\infty^2(wq;wq)_\infty^2(w^2q;w^2q)_\infty^2}{(q^2;q^2)_\infty(w^2q^2;w^2q^2)_\infty(wq^2;wq^2)_\infty}\\
&= \frac{((q;q)_\infty(wq;wq)_\infty(w^2q;w^2q)_\infty)^2}{(q^2;q^2)_\infty(w^2q^2;w^2q^2)_\infty(wq^2;wq^2)_\infty}
\end{aligned}
$$

Por (4.1), a igualdade segue como

$$
\begin{aligned}
\phi(-q)\phi(-wq)\phi(-w^2q) &= \frac{\left(\frac{(q^3;q^3)_\infty^4}{(q^9;q^9)_\infty}\right)^2}{\frac{((q^2)^3;(q^2)^3)_\infty^4}{((q^2)^9;(q^2)^9)_\infty}}\\
&= \left(\frac{(q^3;q^3)_\infty^4}{(q^9;q^9)_\infty}\right)^2\cdot\frac{(q^{18};q^{18})_\infty}{(q^6;q^6)_\infty^4}\\
&= \underbrace{\left(\frac{(q^3;q^3)_\infty^2}{(q^6;q^6)_\infty}\right)^4}_{\phi(-q^3)^4}\cdot\underbrace{\frac{(q^{18};q^{18})_\infty}{(q^9;q^9)_\infty^2}}_{1/\phi(-q^9)}.
\end{aligned}
$$

Para finalizar a prova, note que

$$a(q^3)^3 - 8q^3b(q^3)^3 = (a(q^3) - 2qb(q^3)) \cdot (a(q^3) - 2wqb(q^3)) \cdot (a(q^3) - 2w^2qb(q^3)).$$

Pelo Lema 4.1.8, segue que

$$\begin{aligned} a(q^3)^3 - 8q^3b(q^3)^3 &= \phi(-q)\phi(-wq)\phi(-w^2q) \\ &= \frac{\phi(-q^3)^4}{\phi(-q^9)}. \end{aligned}$$

Se trocarmos q^3 por q, temos $a(q)^3 - 8qb(q)^3 = \dfrac{\phi(-q)^4}{\phi(-q^3)}$.

■

Lema 4.1.10. $\dfrac{1}{(a-2qb)^2} = \dfrac{a^4 + 4qa^3b + 12q^2a^2b^2 + 16q^3ab^3 + 16q^4b^4}{(a^3 - 8q^3b^3)^2}$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a-2qb)^2} &= \left(\frac{(a-2wqb)(a-2w^2qb)}{(a-2qb)(a-2wqb)(a-2w^2qb)}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a^2 - 2awqb - 2aw^2qb + 4q^2b^2}{(a^3 - 8q^3b^3)}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a^2 - (w+w^2)2aqb + 4q^2b^2}{(a^3 - 8q^3b^3)}\right)^2, \end{aligned}$$

e, como $w + w^2 = -1$, vale que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a-2qb)^2} &= \frac{(a^2 + 2aqb + 4q^2b^2)^2}{(a^3 - 8q^3b^3)^2}, \\ &= \frac{a^4 + 4qa^3b + 12q^2a^2b^2 + 16q^3ab^3 + 16q^4b^4}{(a^3 - 8q^3b^3)^2}. \end{aligned}$$

■

4.2 Resultados Principais

Tendo como base os diversos lemas apresentados na seção anterior, estamos aptos a provar os principais teoremas deste capítulo, aqueles que se referem às partições de inteiros cujas partes pares são distintas. Considere então:

Teorema 4.2.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que*

$$\sum_{n\geq 0} ped(3n)q^n = \frac{(q^4;q^4)_\infty (q^6;q^6)_\infty^4}{(q;q)_\infty^3 (q^{12};q^{12})_\infty^2},$$

$$\sum_{n\geq 0} ped(3n+1)q^n = \frac{\phi(-q^3)\psi(-q^3)}{\phi(-q)^2}, \ \ e$$

$$\sum_{n\geq 0} ped(3n+2)q^n = 2\frac{(q^2;q^2)_\infty (q^6;q^6)_\infty (q^{12};q^{12})_\infty}{(q;q)_\infty^3}.$$

Demonstração: Primeiramente, vamos trabalhar com a função geradora de $ped(n)$ para depois observar os casos particulares descritos no teorema. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} ped(n)q^n &= \prod_{n\geq 1} \frac{(1+q^{2n})}{(1-q^{2n-1})} = \frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty} \\
&= \frac{(-q^2;q^6)_\infty(-q^4;q^6)_\infty(-q^6;q^6)_\infty}{(q;q^6)_\infty(q^3;q^6)_\infty(q^5;q^6)_\infty} \\
&= \frac{(-q^2;q^6)_\infty(-q^4;q^6)_\infty(-q^6;q^6)_\infty(q^6;q^6)_\infty^2(-q^3;q^6)_\infty^2}{(q;q^6)_\infty(q^3;q^6)_\infty(q^5;q^6)_\infty(q^6;q^6)_\infty^2(-q^3;q^6)_\infty^2} \\
&= \frac{(-q^3;q^6)_\infty^2(-q^6;q^6)_\infty}{(q^3;q^6)_\infty(q^6;q^6)_\infty^2}\left(\frac{(q^6;q^6)_\infty^2(-q^2;q^6)_\infty(-q^4;q^6)_\infty}{(-q^3;q^6)_\infty^2(q;q^6)_\infty(q^5;q^6)_\infty}\right)
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.1.7, tome q por q^6, x por q e a por $-q^3$. Com isso, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} ped(n)q^n &= \frac{(-q^3;q^6)_\infty^2(-q^6;q^6)_\infty}{(q^3;q^6)_\infty(q^6;q^6)_\infty^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{1-(-q^3)q^{6n}} \\
&= \frac{\overbrace{(-q^3;q^6)_\infty(-q^6;q^6)_\infty}^{(-q^3;q^3)_\infty}(-q^3;q^6)_\infty}{\underbrace{(q^3;q^6)_\infty(q^6;q^6)_\infty}_{(q^3;q^3)_\infty}(q^6;q^6)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{6n+3}} \\
&= \frac{(-q^3;q^3)_\infty(-q^3;q^6)_\infty}{(q^3;q^3)_\infty(q^6;q^6)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{6n+3}}.
\end{aligned}$$

Agora, fazendo uso do Lema 4.1.5, podemos reescrever a igualdade acima como

$$\sum_{n\geq 0} ped(n)q^n = \frac{1}{\phi(-q^3)\psi(-q^3)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{6n+3}}. \tag{4.2}$$

Desta forma, podemos partir para os casos particulares descritos no enunciado do Teorema.

Para o caso $\sum_{n\geq 0} ped(3n)q^n$, tomando em (4.2) somente os termos em que o expoente de q é um múltiplo de 3, podemos escrever da forma

$$\sum_{n\geq 0} ped(3n)q^{3n} = \frac{1}{\phi(-q^3)\psi(-q^3)} \sum_{n\infty}^{\infty} \frac{(q^3)^n}{1+(q^3)^{6n+1}}$$

e trocando q^3 por q, temos

$$\sum_{n\geq 0} ped(3n)q^{n} = \frac{1}{\phi(-q)\psi(-q)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{6n+1}}.$$

Pelo Lema 4.1.7, com q^6 em lugar de q, $x = q$ e $a = -q$ segue

$$\sum_{n\geq 0} ped(3n)q^{n} = \frac{1}{\phi(-q)\psi(-q)} \cdot \frac{(q^6;q^6)_\infty^2(-q^2;q^6)_\infty(-q^4;q^6)_\infty}{(-q;q^6)_\infty(-q^5;q^6)_\infty(q;q^6)_\infty(q^5;q^6)_\infty},$$

além disso, pelo Lema 4.1.5, vemos que

$$\sum_{n\geq 0} ped(3n)q^{n} = \frac{(-q;q)_\infty(-q;q^2)_\infty}{(q;q)_\infty(q^2;q^2)_\infty} \cdot \frac{(q^6;q^6)_\infty^2(-q^2;q^6)_\infty(-q^4;q^6)_\infty}{(-q;q^6)_\infty(-q^5;q^6)_\infty(q;q^6)_\infty(q^5;q^6)_\infty}.$$

Como consequência de $(-q;q^6)_\infty(-q^5;q^6)_\infty = \dfrac{(-q;q^2)_\infty}{(-q^3;q^6)_\infty}$ e $(q;q^6)_\infty(q^5;q^6)_\infty = \dfrac{(q;q^2)_\infty}{(q^3;q^6)_\infty}$ temos,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} ped(3n)q^{n} &= \frac{(-q;q)_\infty(-q;q^2)_\infty(q^6;q^6)_\infty^2(-q^2;q^6)_\infty(-q^4;q^6)_\infty \overbrace{(-q^3;q^6)_\infty(q^3;q^6)_\infty}^{(q^6;q^{12})_\infty}}{(q;q)_\infty(q^2;q^2)_\infty \underbrace{(-q;q^2)_\infty(q;q^2)_\infty}_{(q^2;q^4)}} \\
&= \frac{(-q;q)_\infty(-q;q^2)_\infty(q^6;q^6)_\infty^2(-q^2;q^6)_\infty(-q^4;q^6)_\infty(q^6;q^{12})_\infty}{(q;q)_\infty(q^2;q^2)_\infty(q^2;q^4)_\infty}
\end{aligned}$$

Usando o fato de que $(-q^2;q^6)_\infty(-q^4;q^6)_\infty = \dfrac{(-q^2;q^2)_\infty}{(-q^6;q^6)_\infty}$ e $(-q;q)_\infty = \dfrac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q)_\infty}$, o lado direito da igualdade acima pode ser escrito como

$$\frac{(q^2;q^2)_\infty(-q;q^2)_\infty(q^6;q^6)_\infty^2(-q^2;q^2)_\infty(q^6;q^{12})_\infty}{(q;q)_\infty(q;q)_\infty(q^2;q^2)_\infty(-q^6;q^6)_\infty(q^2;q^4)_\infty}.$$

Como $(-q;q^2)_\infty = \dfrac{(q^2;q^4)_\infty}{(q;q^2)_\infty}$ e $(q;q^2)_\infty = \dfrac{(q;q)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}$, é possível ver que $(-q;q^2)_\infty = \dfrac{(q^2;q^2)_\infty(q^2;q^4)_\infty}{(q;q)_\infty}$. Sabendo também que $(q^2;q^2)_\infty(-q^2;q^2)_\infty = (q^4;q^4)_\infty$ e, multiplicando o numerador e o denominador por $(q^{12};q^{12})_\infty$, concluimos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} ped(3n)q^n &= \frac{(q^4;q^4)_\infty(q^2;q^2)_\infty(q^2;q^4)_\infty(q^6;q^6)^2_\infty(q^6;q^{12})_\infty}{(q;q)^3_\infty(q^2;q^2)_\infty(-q^6;q^6)_\infty(q^2;q^4)_\infty}\cdot\frac{(q^{12};q^{12})_\infty}{(q^{12};q^{12})_\infty}\\
&= \frac{(q^4;q^4)_\infty(q^6;q^6)^2_\infty(q^6;q^{12})_\infty(q^{12};q^{12})_\infty}{(q;q)^3_\infty(-q^6;q^6)_\infty(q^{12};q^{12})_\infty}\\
&= \frac{(q^4;q^4)_\infty(q^6;q^6)^3_\infty}{(q;q)^3_\infty(-q^6;q^6)_\infty(q^{12};q^{12})_\infty}\\
&= \frac{(q^4;q^4)_\infty(q^6;q^6)^4_\infty}{(q;q)^3_\infty(q^{12};q^{12})^2_\infty}.
\end{aligned}$$

Sendo a terceira igualdade válida pois $(q^6;q^{12})_\infty(q^{12};q^{12})_\infty = (q^6;q^6)_\infty$ e a última devido ao fato de $(-q^6;q^{12})_\infty = \dfrac{(q^{12};q^{12})_\infty}{(q^6;q^6)_\infty}$.

Agora passaremos para a segunda igualdade enunciada no Teorema. Por (4.2), podemos concluir que

$$\sum_{n\geq 0} ped(3n+2)q^{3n+2} = \frac{1}{\phi(-q^3)\psi(-q^3)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{3n+2}}{1+q^{6(3n+2)+3}}.$$

Dividindo ambos os lados por q^2 e trocando q^3 por q, segue

$$\sum_{n\geq 0} ped(3n+2)q^n = \frac{1}{\phi(-q)\psi(-q)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{6n+5}}.$$

Pelo Lema 4.1.7, podemos reescrever como

$$\sum_{n\geq 0} ped(3n+2)q^n = \frac{1}{\phi(-q)\psi(-q)}\left(\frac{(q^6;q^6)^2_\infty(-q^6;q^6)_\infty(-1;q^6)_\infty}{(-q;q^6)_\infty(-q^5;q^6)_\infty(q;q^6)_\infty(q^5;q^6)_\infty}\right).$$

Usando temos

$$\sum_{n\geq 0} ped(3n+2)q^n = \frac{2}{\phi(-q)\psi(-q)}\left(\frac{(q^6;q^6)^2_\infty(-q^6;q^6)_\infty(-q^6;q^6)_\infty}{(-q;q^6)_\infty(-q^5;q^6)_\infty(q;q^6)_\infty(q^5;q^6)_\infty}\right),$$

e ainda, pelo Lema 4.1.5,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} ped(3n+2)q^n &= 2\frac{(-q;q)_\infty(-q;q^2)_\infty((q^6;q^6)_\infty(-q^6;q^6)_\infty)^2}{(q;q)_\infty(q^2;q^2)_\infty\frac{(-q;q^2)_\infty}{(-q^3;q^6)_\infty}\cdot\frac{(q;q^2)_\infty}{(q^3;q^6)_\infty}} \\
&= 2\frac{(-q;q)_\infty(-q;q^2)_\infty(q^{12};q^{12})_\infty^2(-q^3;q^6)_\infty(q^3;q^6)_\infty}{(q;q)_\infty(q^2;q^2)_\infty(-q;q^2)_\infty(q;q^2)_\infty} \\
&= 2\frac{(-q;q)_\infty(q^{12};q^{12})_\infty\overbrace{(q^6;q^6)_\infty(q^6;q^{12})_\infty}^{(q^{12};q^{12})_\infty}}{(q;q)_\infty(q^2;q^2)_\infty(q;q^2)_\infty} \\
&= 2\frac{(-q;q)_\infty(q^{12};q^{12})_\infty(q^6;q^6)_\infty}{(q;q)_\infty(-q;q)_\infty(q;q)_\infty(q;q^2)_\infty} \\
&= 2\frac{(q^{12};q^{12})_\infty(q^6;q^6)_\infty}{(q;q)_\infty^2(q;q^2)_\infty} \\
&= 2\frac{(q^{12};q^{12})_\infty(q^6;q^6)_\infty}{(q;q)_\infty^2\frac{(q;q)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}} \\
&= 2\frac{(q^{12};q^{12})_\infty(q^6;q^6)_\infty(q^2;q^2)_\infty}{(q;q)_\infty^3}.
\end{aligned}
$$

Assim, a terceira igualdade está provada. Para finalizar a demonstração do Teorema, passamos à segunda prosposta. Ainda utilizando (4.2), obtemos

$$\sum_{n\geq 0} ped(3n+1)q^{3n+1} = \frac{1}{\phi(-q^3)\psi(-q^3)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{3n+1}}{1+q^{6(3n+1)+3}},$$

que, dividindo ambos os lados por q e trocando q^3 por q segue

$$\sum_{n\geq 0} ped(3n+1)q^n = \frac{1}{\phi(-q)\psi(-q)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{6n+3}}.$$

Conforme calculado no início da demonstração em (4.2), temos que

$$\frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty} = \sum_{n\geq 0} ped(n)q^n = \frac{1}{\phi(-q^3)\psi(-q^3)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{6n+3}},$$

ou seja,

$$\sum_{n\geq 0} ped(n)q^n = \frac{\phi(-q^3)\psi(-q^3)(-q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}.$$

Isto nos permite afirmar

$$\sum_{n\geq 0} ped(3n+1)q^n = \frac{1}{\phi(-q)\psi(-q)}\cdot\frac{\phi(-q^3)\psi(-q^3)(-q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}$$

e, portanto

$$\sum_{n\geq 0} ped(3n+1)q^n = \frac{\phi(-q^3)\psi(-q^3)}{\phi(-q)\psi(-q)} \cdot \frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}.$$

Pelo Lema 4.1.6, segue que

$$\sum_{n\geq 0} ped(3n+1)q^n = \frac{\phi(-q^3)\psi(-q^3)}{\phi(-q)^2}.$$

■

Teorema 4.2.2.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} ped(9n+1)q^n &= \frac{(q^2;q^2)_\infty^2(q^3;q^3)_\infty^4(q^4;q^4)_\infty}{(q;q)_\infty^5(q^6;q^6)_\infty^2} + 24q\frac{(q^2;q^2)_\infty^3(q^3;q^3)_\infty^3(q^4;q^4)_\infty(q^6;q^6)_\infty^3}{(q;q)^{10}} \\
\sum_{n\geq 0} ped(9n+4)q^n &= 4\frac{(q^2;q^2)_\infty(q^3;q^3)_\infty(q^4;q^4)_\infty(q^6;q^6)_\infty}{(q;q)_\infty^4} + 48q\frac{(q^2;q^2)_\infty^2(q^4;q^4)_\infty(q^6;q^6)_\infty^6}{(q;q)_\infty^9} \\
\sum_{n\geq 0} ped(9n+7)q^n &= 12\frac{(q^2;q^2)_\infty^4(q^3;q^3)_\infty^6(q^4;q^4)_\infty}{(q;q)_\infty^{11}}.
\end{aligned}$$

Demonstração: A demonstração será feita conforme a ordem das igualdades apresentadas no enunciado.

Primeiramente, pelo Teorema 4.2.1, foi provado que $\sum_{n\geq 0} ped(3n+1)q^n = \frac{\phi(-q^3)\psi(-q^3)}{\phi(-q)^2}$ e, pelo Lema 4.1.8, que $\phi(-q) = a(q^3) - 2qb(q^3)$. Com isso,

$$\sum_{n\geq 0} ped(3n+1)q^n = \frac{\phi(-q^3)\psi(-q^3)}{(a(q^3)-2qb(q^3))^2}.$$

Pelo Lema 4.1.10, temos

$$\sum_{n\geq 0} ped(3n+1)q^n = \phi(-q^3)\psi(-q^3)\times \tag{4.3}$$

$$\frac{a(q^3)^4 + 4qa(q^3)^3b(q^3) + 12q^2a(q^3)^2b(q^3)^2 + 16q^3a(q^3)b(q^3)^3 + 16q^4b(q^3)^4}{(a(q^3)^3 - 8q^3b(q^3)^3)^2}.$$

Segue que, trocando n por $3n$ no lado esquerdo e assim considerando apenas os termos em que aparecem potências de q com expoentes múltiplos de 3, temos

$$\sum_{n\geq 0} ped(9n+1)q^{3n} = \phi(-q^3)\psi(-q^3)\frac{a(q^3)^4 + 16q^3a(q^3)b(q^3)^3}{(a(q^3)^3 - 8q^3b(q^3)^3)^2}.$$

Agora, trocando q^3 por q,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} ped(9n+1)q^n &= \phi(-q)\psi(-q)\cdot\frac{a(q)^4+16qa(q)b(q)^3}{(a(q)^3-8qb(q)^3)^2} \\
&= \phi(-q)\psi(-q)\cdot\frac{a(q)(a(q)^3+16qb(q)^3)}{(a(q)^3-8qb(q)^3)^2} \\
&= \phi(-q)\psi(-q)\cdot\frac{\phi(-q^3)(a(q)^3+16qb(q)^3)}{\left(\frac{\phi(-q)^4}{\phi(-q^3)}\right)^2}, \text{ pelo Lema 4.1.9} \\
&= (a(q)^3+16qb(q)^3)\cdot\frac{\phi(-q^3)^3\psi(-q)}{\phi(-q)^7} \\
&= (\underbrace{(a(q)^3-8qb(q)^3)}_{\frac{\phi(-q)^4}{\phi(-q^3)}}+24qb(q)^3)\cdot\frac{\phi(-q^3)^3\psi(-q)}{\phi(-q)^7} \\
&= \left(\frac{\phi(-q)^4}{\phi(-q^3)}+24q\left(\frac{(q;q)_\infty(q^6;q^6)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty(q^3;q^3)_\infty}\right)^3\right)\cdot\frac{\phi(-q^3)^3\psi(-q)}{\phi(-q)^7} \\
&= \frac{\phi(-q^3)^2\psi(-q)}{\phi(-q)^3}+24q\frac{(q;q)^3_\infty(q^6;q^6)^3_\infty}{(q^2;q^2)^3_\infty(q^3;q^3)^3_\infty}\cdot\frac{\phi(-q^3)^3\psi(-q)}{\phi(-q)^7},
\end{aligned}$$

sendo a penúltima igualdade válida pelo Lema 4.1.9.

Como $\phi(-q) = \dfrac{(q;q)^2_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}$ e $\psi(-q) = \dfrac{(q^2;q^2)_\infty}{(-q;q^2)_\infty}$, a igualdade segue como

$$\begin{aligned}
&= \frac{(q^2;q^2)_\infty(q^3;q^3)^4_\infty(q^2;q^2)^3_\infty}{\underbrace{(-q;q^2)_\infty}_{\frac{(q^2;q^4)_\infty}{(q;q^2)_\infty}}(q^6;q^6)^2_\infty(q;q)^6_\infty}+24q\frac{(q;q)^3_\infty(q^6;q^6)^6_\infty(q^2;q^2)_\infty(q^3;q^3)^6_\infty(q^2;q^2)^7_\infty}{(q^2;q^2)^3_\infty(q^3;q^3)^3_\infty\underbrace{(-q;q^2)_\infty}_{\frac{(q^2;q^4)_\infty}{(q;q^2)_\infty}}(q^6;q^6)^3_\infty(q;q)^{14}_\infty} \\
&= \frac{\overbrace{(q^2;q^2)_\infty(q;q^2)_\infty}^{(q;q)_\infty}(q^3;q^3)^4_\infty(q^2;q^2)^3_\infty}{(q^2;q^4)_\infty(q^6;q^6)^2_\infty(q;q)^6_\infty}+24q\frac{(q^2;q^2)^5_\infty(q;q^2)_\infty(q^6;q^6)^3_\infty(q^3;q^3)^3_\infty}{(q^2;q^4)_\infty(q;q)^{11}_\infty}.
\end{aligned}$$

Como $(q^2;q^2)_\infty = (q^2;q^4)_\infty(q^4;q^4)_\infty$, implica em

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} ped(9n+1)q^n &= \frac{(q;q)_\infty (q^3;q^3)_\infty^4 (q^2;q^2)_\infty^2 (q^2;q^4)_\infty (q^4;q^4)_\infty}{(q^2;q^4)_\infty (q^6;q^6)_\infty^2 (q;q)_\infty^6} \\
&+ 24q\frac{(q^2;q^4)_\infty (q^4;q^4)_\infty (q^2;q^2)_\infty^4 (q;q^2)_\infty (q^6;q^6)_\infty^3 (q^3;q^3)_\infty^3}{(q^2;q^4)_\infty (q;q)_\infty^{11}} \\
\sum_{n\geq 0} ped(9n+1)q^n &= \frac{(q^3;q^3)_\infty^4 (q^2;q^2)_\infty^2 (q^4;q^4)_\infty}{(q^6;q^6)_\infty^2 (q;q)_\infty^5} \\
&+ 24q\frac{(q^4;q^4)_\infty (q^2;q^2)_\infty^3 \overbrace{(q^2;q^2)_\infty (q;q^2)_\infty}^{(q;q)_\infty} (q^6;q^6)_\infty^3 (q^3;q^3)_\infty^3}{(q;q)_\infty^{11}} \\
\sum_{n\geq 0} ped(9n+1)q^n &= \frac{(q^3;q^3)_\infty^4 (q^2;q^2)_\infty^2 (q^4;q^4)_\infty}{(q^6;q^6)_\infty^2 (q;q)_\infty^5} \\
&+ 24q\frac{(q^4;q^4)_\infty (q^2;q^2)_\infty^3 (q^6;q^6)_\infty^3 (q^3;q^3)_\infty^3}{(q;q)_\infty^{10}}.
\end{aligned}
$$

Para a segunda igualdade, usaremos (4.3), considerando apenas os termos em que aparecem potências de q com expoente da forma $3n+1$, para algum n inteiro. Portanto,

$$\sum_{n\geq 0} ped(9n+4)q^{3n+1} = \phi(-q^3)\psi(-q^3)\cdot\frac{4qa(q^3)^3b(q^3)+16q^4b(q^3)^4}{(a(q^3)^3-8q^3b(q^3)^3)^2}.$$

a qual dividindo por q e trocando q^3 por q,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} ped(9n+4)q^n &= \phi(-q)\psi(-q)\cdot\frac{4a(q)^3b(q)+16qb(q)^4}{(a(q)^3-8qb(q)^3)^2} \\
&= \phi(-q)\psi(-q)\cdot\frac{4a(q)^3b(q)+16qb(q)^4}{\left(\frac{\phi(-q)^4}{\phi(-q^3)}\right)^2},\ \text{pelo Lema 4.1.9,} \\
&= \frac{\phi(-q)\psi(-q)\phi(-q^3)^2}{\phi(-q)^8}\cdot 4b(q)(a(q)^3+4qb(q)^3) \\
&= \frac{\psi(-q)\phi(-q^3)^2}{\phi(-q)^7}\cdot 4b(q)((a(q)^3-8qb(q)^3)+12qb(q)^3).
\end{aligned}
$$

Pelos Lemas 4.1.8 e 4.1.9, o lado direito da igualdade acima é

$$
\begin{aligned}
&= 4\frac{\psi(-q)\phi(-q^3)^2}{\phi(-q)^7}\cdot\left(\frac{(q;q)_\infty(q^6;q^6)_\infty^2}{(q^2;q^2)_\infty(q^3;q^3)_\infty}\right)\left(\frac{\phi(-q)^4}{\phi(-q^3)}+12q\left(\frac{(q;q)_\infty(q^6;q^6)_\infty^2}{(q^2;q^2)_\infty(q^3;q^3)_\infty}\right)^3\right)\\
&= 4\frac{\psi(-q)\phi(-q^3)}{\phi(-q)^3}\cdot\frac{(q;q)_\infty(q^6;q^6)_\infty^2}{(q^2;q^2)_\infty(q^3;q^3)_\infty}+48q\frac{\psi(-q)\phi(-q^3)^2}{\phi(-q)^7}\cdot\frac{(q;q)_\infty^4(q^6;q^6)_\infty^8}{(q^2;q^2)_\infty^4(q^3;q^3)_\infty^4}.
\end{aligned}
$$

Olharemos cada uma das parcelas acima separadamente:

1) Na primeira parcela, pelos Lemas 4.1.3 e 4.1.4, temos

$$
\begin{aligned}
&4\frac{(q^2;q^2)_\infty(q^3;q^3)_\infty^2(q^2;q^2)_\infty^3}{(-q;q^2)_\infty(q^6;q^6)_\infty(q;q)_\infty^6}\cdot\frac{(q;q)_\infty(q^6;q^6)_\infty^2}{(q^2;q^2)_\infty(q^3;q^3)_\infty}\\
&= 4\frac{(q^3;q^3)_\infty(q^2;q^2)_\infty^3(q^6;q^6)_\infty}{\underbrace{(-q;q^2)_\infty}_{\frac{(q^2;q^4)_\infty}{(q;q^2)_\infty}}(q;q)_\infty^5},
\end{aligned}
$$

e, como $(q^2;q^2)_\infty=(q^2;q^4)_\infty(q^4;q^4)_\infty$, a igualdade segue como

$$
\begin{aligned}
&= 4\frac{\overbrace{(q;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty}^{(q;q)_\infty}(q^2;q^4)_\infty(q^4;q^4)_\infty(q^2;q^2)_\infty(q^3;q^3)_\infty(q^6;q^6)_\infty}{(q^2;q^4)_\infty(q;q)_\infty^5}\\
&= 4\frac{(q^4;q^4)_\infty(q^2;q^2)_\infty(q^3;q^3)_\infty(q^6;q^6)_\infty}{(q;q)_\infty^4}. \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

2) Já na segunda parcela, obtemos

$$
\begin{aligned}
&= 48q\frac{(q^2;q^2)_\infty(q^3;q^3)_\infty^4(q^2;q^2)_\infty^7}{\underbrace{(-q;q^2)_\infty}_{\frac{(q^2;q^4)_\infty}{(q;q^2)_\infty}}(q^6;q^6)_\infty^2(q;q)_\infty^{14}}\cdot\frac{(q;q)_\infty^4(q^6;q^6)_\infty^8}{(q^2;q^2)_\infty^4(q^3;q^3)_\infty^4}\\
&= 48q\frac{\overbrace{(q;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty}^{(q;q)_\infty}\ \overbrace{(q^2;q^2)_\infty}^{(q^2;q^4)_\infty(q^4;q^4)_\infty}\ (q^2;q^2)_\infty^2(q^6;q^6)_\infty^6}{(q^2;q^4)_\infty(q;q)_\infty^{10}}\\
&= 48q\frac{(q^2;q^2)_\infty^2(q^4;q^4)_\infty(q^6;q^6)_\infty^6}{(q;q)_\infty^9} \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

Assim, juntando (4.4) e (4.5), temos

$$
\sum_{n\geq 0} ped(9n+4)q^n =
$$

$$
4\frac{(q^2;q^2)_\infty(q^3;q^3)_\infty(q^4;q^4)_\infty(q^6;q^6)_\infty}{(q;q)_\infty^4}+48q\frac{(q^2;q^2)_\infty^2(q^4;q^4)_\infty(q^6;q^6)_\infty^6}{(q;q)_\infty^9}.
$$

Agora, para a terceira e última igualdade do enunciado do teorema, utilizando (4.3) e consideraremos somente os termos cujos expoentes de q sejam congruentes a 2 módulo 3. Com isso,

$$\sum_{n\geq 0} ped(9n+7)q^{3n+2} = \phi(-q^3)\psi(-q^3)\cdot\frac{12q^2a(q^3)^2b(q^3)^2}{(a(q^3)^3-8q^3b(q^3)^3)^2},$$

o qual, dividindo por q^2 e trocando q^3 por q, segue como

$$\sum_{n\geq 0} ped(9n+7)q^{n} = \phi(-q)\psi(-q)\cdot\frac{12a(q)^2b(q)^2}{(a(q)^3-8qb(q)^3)^2}.$$

Pelo Lema 4.1.9, temos

$$\sum_{n\geq 0} ped(9n+7)q^{n} = 12\frac{\phi(-q^3)^2\psi(-q)}{\phi(-q)^7}\cdot a(q)^2b(q)^2$$

Pelo Lema 4.1.8, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} ped(9n+7)q^{n} &= 12\frac{\phi(-q^3)^2\psi(-q)}{\phi(-q)^7}\cdot\phi(-q^3)^2\left(\frac{(q;q)_\infty^2(q^6;q^6)_\infty^4}{(q^2;q^2)_\infty^2(q^3;q^3)_\infty^2}\right)\\
&= 12\frac{\phi(-q^3)^4\psi(-q)}{\phi(-q)^7}\cdot\left(\frac{(q;q)_\infty^2(q^6;q^6)_\infty^4}{(q^2;q^2)_\infty^2(q^3;q^3)_\infty^2}\right)\\
&= 12\frac{(q^3;q^3)_\infty^8(q^2;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty^7(q;q)_\infty^2(q^6;q^6)_\infty^4}{(q^6;q^6)_\infty^4\underbrace{(-q;q^2)_\infty}_{\frac{(q^2;q^4)_\infty}{(q;q^2)_\infty}}(q;q)_\infty^{14}(q^2;q^2)_\infty^2(q^3;q^3)_\infty^2}\\
&= 12\frac{(q;q^2)_\infty(q^3;q^3)_\infty^6(q^2;q^2)_\infty^6}{(q^2;q^4)_\infty(q;q)_\infty^{12}}\\
&= 12\frac{(q^3;q^3)_\infty^6\overbrace{(q;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty}^{(q;q)_\infty}(q^2;q^4)_\infty(q^4;q^4)_\infty(q^2;q^2)_\infty^4}{(q^2;q^4)_\infty(q;q)_\infty^{12}}\\
&= 12\frac{(q^3;q^3)_\infty^6(q^4;q^4)_\infty(q^2;q^2)_\infty^4}{(q;q)_\infty^{11}}.
\end{aligned}$$

■

Corolário 4.2.3. *Para todo $n\geq 0$, temos*

$$ped(3n+2)\equiv 0 \pmod 2,$$

$$ped(9n+4) \equiv 0 \pmod 4$$

e

$$ped(9n+7) \equiv 0 \pmod{12}.$$

Demonstração: Tais congruências seguem facilmente dos teoremas anteriores. Especificamente, a primeira provém do Teorema 4.2.1 e as outras duas do 4.2.2, observando apenas as funções geradoras das partições apresentadas. ■

Referências Bibliográficas

[1] Andrews, G. E., *Congruence properties of the m-ary partition function*, J. Number Theory **3** (1971), 104-110.

[2] Andrews, G. E., *The Theory of Partitions*, Cambridge University Press, Cambridge (1984).

[3] Andrews, G. E.; Eriksson, K., *Integer Partitions*, Cambridge University Press, Cambridge (2004).

[4] Andrews, G. E.; Hirschhorn, M. D.; Sellers, J. A., *Arithmetic Properties of Partitions with Even Parts Distinct*, The Ramanujan Journal **23** (2008), 169-181.

[5] Andrews, G. E.; Askey, R.; Roy, R., *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge (1999).

[6] Chaves, D. R. C., *Um estudo combinatório e comparativo de Identidades Teta Parciais de Andrews e Ramanujan*, Dissertação de Mestrado IM-UFRGS (2011).

[7] Churchhouse, R.F., *Congruence properties of the binary partition function*, Proc. Camb. Phil. Soc. **66** (1969), 371-376.

[8] Lima, E. L., *Curso de Análise*, Projeto Euclides, 12 ed. Rio de Janeiro : IMPA (2009).

[9] Oliveira, S. R., *O Produto Triplo de Jacobi: Aspectos Analítico e Combinatório*, Dissertação de Mestrado IMMEC-UNICAMP (2001).

[10] Rodseth, O. J., *Some arithmetical properties of m-ary partitions*, Proc. Camb. Phil. Soc. **68** (1970), 447-453.

[11] Rodseth, O. J.; Sellers, J. A., *On m-ary Partition Function Congruences: A Fresh Look at a Past Problem*, J. Number Theory **87** (2001), 270-281.

[12] Rodseth, O. J.; Sellers, J. A., *Binary Partitions Revisited* , J. Combinatorial Theory, Series A 98 (2002), 33?45.

[13] Santos, J. P. de O.; *Introdução à Teoria dos Números*, 3 ed. Rio de Janeiro : IMPA (2011).