Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Ideais Primos e Ideais Fechados em Anéis de Polinômios

Dissertação de Mestrado

Lisiane Zoch

Porto Alegre, 22 de agosto de 2005

Dissertação submetida por Lisiane Zoch [*], como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof. Dr. Miguel A. Ferrero

Banca examinadora:

Prof. Dr. Miguel A. Ferrero (IMAT-UFRGS)

Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana (IMAT-UFRGS)

Prof. Dr. Antônio Paques (IMAT-UFRGS)

Prof. Dr. Hidetoshi Marubayashi (Dept. of Math.-Naruto Univ. of Education)

[*]Bolsista do CNPq-Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

Ao meu amado filho Patrick,

meu marido Elismar

e a minha mãe Vilma (em memória).

Agradecimentos

Especial ao meu orientador Miguel, a quem muito admiro, pela atenção e paciência dispensada a mim, na realização deste trabalho. Ao meu filho Patrick, pela compreensão, carinho e força, à minha irmã Alana que tanto me incentivou e proporcionou que aqui eu estivesse, ao meu marido Elismar pelo amor, ajuda e paciência em todas as horas, ao meu pai por sempre querer que estudasse, às minhas irmãs e irmão pelo carinho.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo estudar os ideais primos do anel de polinômios $R[X]$, com R um anel primo, não necessariamente comutativo. Para tanto, introduzimos o conceito de ideais principais fechados em $R[X]$, que permite caracterizar os ideais primos como contração de ideais de $Q[X]$ sendo definidos por polinômios mônicos irredutíveis de $C[X]$, onde Q é o anel de quocientes à direita de Martindale de R e C é o centro de Q, que é um corpo.

Abstract

The purpose of this work is to study prime ideals of the polynomial ring $R[X]$, where R is not necessarily commutative prime ring. For this, we introduce the concept of principal closed ideals of $R[X]$. This gives a characterization of its prime ideals as contraction of ideals of $Q[X]$ defined by irreducible monic polynomials of $C[X]$, where Q is the Martindale's ring of right quotient of R and C is the center of Q, which is a field.

Índice

Introdução

Neste trabalho, nosso principal objetivo é estudar os ideais primos em anéis de polinômios sobre um anel primo, não necessariamente comutativo, R. Nossa principal referência é o trabalho de M. Ferrero [2], cuja motivação foi dar uma resposta à questão formulada pela Profa. A. M. Souza Doering ao autor, sobre a validade de alguns resultados conhecidos para ideais primos em anéis de polinômios sobre domínios comutativos, quando considerados para o caso não comutativo.

Um caso particularmente interessante é abordado no Capítulo 3 (Corolário 3.10), onde apresentamos uma versão não comutativa do Teorema 36, Pág. 25 de [8] (Veja Teorema 1.15).

Para responder esta questão, o autor de [2], introduziu o conceito fundamental de *ideal principal fechado* em anéis de polinômios, que permite obter resultados muito interessantes no estudo dos ideais primos em anéis de polinômios sobre um anel primo não necessariamente comutativo.

A maioria das demonstrações aqui apresentadas, segue a argumentação dada em [2], com algumas exceções relativas principalmente aos resultados do Capítulo 5, que segue [3].

No Capítulo 1, colocamos os pré-requisitos necessários ao desenvolvimento do texto. Ali aparecem as definições dos objetos abordados nos capítulos seguintes, bem como alguns resultados da teoria geral da álgebra não comutativa, dos quais fazemos uso.

No Capítulo 2, introduzimos a definição de *ideal principal fechado* em anéis de polinômios sobre anéis primos. O principal resultado obtido é o Teorema 2.5 afirmando que, em um anel primo R, todo ideal R-disjunto de $R[X]$, possui um menor ideal principal fechado de $R[X]$ que o contém. Em seguida, provamos algumas propriedades operacionais destes ideais e sua relação com os ideais primos de $R[X]$(Corolário 2.9). Finalmente, consideramos o caso em que R é simples, relacionando os ideais de $R[X]$ com os ideais de $C(R)[X]$ (Corolário 2.11).

O Capítulo 3 é certamente o principal deste trabalho. Nele consideraremos R um anel primo, C o centróide estendido e Q o anel de quocientes à direita de Martindale de R. Então, caracterizamos os ideais principais fechados através de extensão e contração de ideais entre $R[X]$, $Q[X]$ e $C[X]$. Mais precisamente o resultado crucial obtido neste trabalho é o Teorema 3.3, onde dados R um anel primo, T um anel de quocientes à direita(ou à esquerda) de R, há uma correspondência biunívoca via contração, entre o conjunto de todos os ideais principais fechados de $R[X]$, o conjunto de todos ideais principais fechados de $T[X]$ e também com o conjunto de todos os polinômios mônicos de $C[X]$. Fazendo uso deste teorema, obtemos o importante Corolário 3.6 que caracteriza os ideais primos T-disjuntos de $T[X]$ como sendo os ideais da forma $Q[X]f_0 \cap T[X]$, para algum polinômio mônico irredutível $f_0 \in C[X]$. Concluindo este capítulo, apresentamos Corolário 3.10 citado acima.

No Capítulo 4, abordamos uma propriedade de fatoração única de ideais principais fechados. Para tal, provamos o Teorema 4.3, mostrando que um ideal principal fechado I de $R[X]$ possui a propriedade de ser escrito como interseção finita de ideais principais fechados, associados à potências de ideais primos de $R[X]$, relacionados com o polinômio mônico de $C[X]$ associado a I pelo Teorema 3.3.

Finalizando nosso trabalho no Capítulo 5 mostramos algumas aplicações dos resultados obtidos nos capítulos iniciais.

Capítulo 1

Pré-requisitos

O objetivo deste capítulo é introduzir definições e resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Vamos supor conhecidas as noções básicas da Teoria de Anéis.

Consideraremos sempre R um anel associativo com unidade e $R[X]$ o anel de polinômios sobre R. Se $R \subseteq S$ é uma extensão de anéis, então R e S compartilham a unidade. O ideal gerado em R por um subconjunto A será denotado por $\langle A \rangle_R$.

Quando um ideal I de R for bilateral, diremos apenas que I é um ideal de R e denotaremos por $I \lhd R$. Um ideal não nulo P de $R[X]$ com $P \cap R = 0$ será chamado de ideal R-disjunto. Ao conjunto $C(R) = \{x \in R \mid xy = yx, \forall y \in R\}$ chamaremos de centro de R.

Se $f \in R[X]$, as notações ∂f e $lc(f)$ indicam grau de f e coeficiente líder de f, respectivamente. Definimos, para um ideal qualquer I de $R[X]$, $Min(I) = Min\{\partial f \mid 0 \neq f \in I\}$.

Algumas demonstrações deste capítulo serão omitidas por serem imediatas ou encontrarem-se na bibliografia deste trabalho.

1.1 Conceitos Básicos

Definição 1.1. *Um ideal P de um anel R é primo se, para quaisquer ideais I e J de R, $IJ \subseteq P$ implica $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$.*

Proposição 1.2. *([9], Proposição 10.2) Seja P um ideal do anel R. As seguintes condições são equivalentes:*

i) *P é um ideal primo;*

ii) *Se $a, b \in R$ com $\langle a\rangle_R \langle b\rangle_R \subseteq P$, então $a \in P$ ou $b \in P$;*

iii) *Se $a, b \in R$ com $aRb \subseteq P$, então $a \in P$ ou $b \in P$;*

iv) *Se I e J são ideais à esquerda (à direita) de R, então $IJ \subseteq P$ implica $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$;*

v) *Dados ideais I e J de R tais que $I \supseteq P$ e $J \supseteq P$. Se $IJ \subseteq P$, então $I = P$ ou $J = P$.*

Adotaremos a seguinte notação, $P \lhd' R$ para denotar que P é um ideal primo de R.

Definição 1.3. *Um anel R é dito primo se $(0)_R$ é um ideal primo.*

Seja P um ideal primo não nulo do anel de polinômios $R[X]$. Sempre podemos supor que $P \cap R = 0$, caso contrário, podemos fatorar R como $\tilde{R} = R/(P \cap R)$ e P como $\tilde{P} = P/(P \cap R)[X]$, então $\tilde{R}$ será um anel primo e $\tilde{P}$ será um ideal primo de $\tilde{R}[X]$ com $\tilde{P} \cap \tilde{R} = 0$. Por esta razão o estudo de ideais primos P, de $R[X]$ sempre pode ser reduzido ao caso em que R é primo e $P \cap R = 0$.

Se I é um ideal R-disjunto de $R[X]$, denotaremos por $\tau(I)$ o subconjunto de R consistindo do elemento nulo e todos os coeficientes líderes dos polinômios de grau mínimo em I. É fácil ver que $\tau(I)$ é um ideal de R.

Proposição 1.4. *Seja R um anel primo. Então qualquer ideal $0 \neq I \lhd R$ tem anulador à direita (à esquerda) igual a zero, isto é, o ideal $Ann_r(I) = \{x \in R \mid Ix = 0\} = 0$.*

Demonstração: Seja R um anel primo e I ideal não nulo de R. Suponhamos, por contradição, que $Ann_r(I) \neq 0$. Como $I \cdot Ann_r(I) = 0$, $I = 0$ ou $Ann_r(I) = 0$, pois R é primo, o que é uma contradição. □

Definição 1.5. *Um anel R é regular (Von Neumann) se para todo $a \in R$, existe $r \in R$, tal que $ara = a$.*

Esta condição equivale ao fato de que cada ideal à esquerda (à direita), finitamente gerado, é um ideal principal gerado por um elemento idempotente.

Definição 1.6. *Um anel R é dito fortemente primo à direita, se todo ideal não nulo de R contém um conjunto finito cujo anulador à direita é igual a zero.*

Este conjunto é chamado de isolador. Um anel fortemente primo à esquerda é definido analogamente.

Definição 1.7. *Um ideal I de um anel R é dito fortemente primo à direita (à esquerda) se o anel R/I é fortemente primo à direita (à esquerda).*

Definição 1.8. *Um anel R é simples se seus únicos ideais são os triviais, isto é, 0* e *R.*

Definição 1.9. *Dizemos que um ideal à direita Jde R é um ideal à direita essencial de R se, para todo ideal à direita $0 \neq K$ de R, temos $J \cap K \neq 0$.*

Seja R um anel primo. Então um ideal de R é essencial se, e somente se, este ideal é não nulo. De fato, seja $0 \neq J$ um ideal de R. Dado $K \neq 0$ é fácil ver que $0 \neq JK \subseteq J \cap K$. Logo J é um ideal essencial. A recíproca é imediata.

Seja $x \in R$. Definimos o anulador à direita (à esquerda) do elemento x por $Ann_r(x) = \{b \in R \mid xb = 0\}$.

Proposição 1.10. *O conjunto $Z_r(R) = \{x \in R \mid Ann_r(x)$ é um ideal à direita essencial de R $\}$ é um ideal de R chamado de ideal singular à direita de R.*

O anel R é dito não singular à direita se $Z_r(R) = 0$.

Definição 1.11. *Seja R um anel e P um ideal de R. P é dito um ideal primitivo à direita (à esquerda) em R, se existe um ideal maximal à direita (à esquerda) M com $P = \{x \in R \mid Rx \subseteq M\}$($P = \{x \in R \mid xR \subseteq M\}$).*

O conjunto $\{x \in R \mid Rx \subseteq M\}$ ($\{x \in R \mid xR \subseteq M\}$) será denotado por $(M : R)$. Pode-se provar facilmente que $(M : R)$ é o maior ideal contido em M.

Definição 1.12. *Um anel é dito primitivo à direita (à esquerda) quando 0 é um ideal primitivo à direita (à esquerda).*

Pelo visto acima, P é um ideal primitivo à direita (à esquerda) se, e somente se, R/P é um anel primitivo à direita (à esquerda).

1.2 Anel de Quocientes de Martindale

Faremos a construção do anel de quocientes à direita de Martindale de R, para R um anel primo, que denotaremos por Q. Seja $J \lhd R$ diremos que $f : J \to R$ é um R-homomorfismo à direita se f é aditiva e $f(ar) = f(a)r$, $\forall\, a \in J$, $r \in R$. Se f é também um R-homomorfismo à esquerda, isto é, $f(ra) = rf(a)$, $\forall\, a \in J$, $r \in R$, então f será dito um R-homomorfismo bilateral. O conjunto de todos os ideais não nulos de R será denotado por $\mathcal{I}$.

Considere o conjunto:

$$\mathcal{H} = \{(J; f) \mid J \in \mathcal{I},\ f : J \to R \text{ é um R-homomorfismo à direita } \}$$

Dizemos que $(J; f) \sim (K; g)$ se existe $L \subseteq J \cap K$, tal que, $L \in \mathcal{I}$ e $f = g$ em L. Temos que $\sim$ é uma relação de equivalência. A simetria e a reflexividade são trivialmente obtidas. Finalmente, dados $(J; f) \sim (K; g)$ e $(K; g) \sim (M; h)$ existem $L' \subseteq J \cap K$, tal que, $L' \in \mathcal{I}$, $f = g$ em L' e $L'' \subseteq K \cap M$, tal que, $L'' \in \mathcal{I}$, $g = h$ em L''. Tome $L = L' \cap L''$ donde vem que $(J; f) \sim (M; h)$, isto é, a relação é transitiva. Denotamos por Q o conjunto quociente $\mathcal{H}/\sim$, onde $[J; f]$ é a classe de equivalência de $(J; f) \in \mathcal{H}$. As operações de adição e multiplicação em Q são definidas, por $[J; f] + [K; g] = [J \cap K; f + g]$ e $[J; f] \cdot [K; g] = [KJ; f \circ g]$. É fácil ver que as operações estão bem definidas, e que, com elas, Q é um anel com unidade. Além disso, $[R; 0] = 0_Q$ e $[R; Id_R] = 1_Q$.

Proposição 1.13.

(i) $R \subseteq Q$;

(ii) *Se* $J \in \mathcal{I}$ *e* $f : J \to R$ *é um R-homomorfismo à direita, então existe* $q \in Q$*, tal que,* $f(r) = qr, \forall r \in J$;

(iii) *Para quaisquer* $q_1, q_2, ..., q_n \in Q$ *existe* $J \in \mathcal{I}$*, tal que,* $q_iJ \subseteq R$ *para* $i = 1, ..., n$;

(iv) *Se* $qJ = 0$ *para algum* $q \in Q$ *onde* $J \in \mathcal{I}$*, então* $q = 0$.

Demonstração: Daremos a seguir uma idéia da demonstração.

(i) Defina, para cada $a \in R$, a multiplicação à esquerda, $a_l : R \to R$ dada por $a_l(x) = ax, \forall x \in R$. É claro que $[R; a_l] \in Q$, então é possível mostrar que $\psi : R \to Q$ definida por $\psi(a) = [R; a_l]$ é um monomorfismo. Logo, podemos considerar $R \subseteq Q$ identificando R com $\psi(R)$.

(ii) Basta tomar $q = [J; f] \in Q$, então $f(x) = qx, \forall x \in J$.

(iii) Para cada $q_i = [J_i; f_i] \in Q$, $i = 1, ..., n$, temos $q_i J_i \subseteq R$, por (ii). Então o ideal procurado é $J = \bigcap_{i=1}^{n} J_i \in \mathcal{I}$.

(iv) Se $qJ = 0$ para algum $q = [I; f] \in Q$ temos por (ii) $f \equiv 0$, tomando $I \cap J \in \mathcal{I}$ temos $f\,|_{I\cap J} \equiv 0$ e segue que $q = 0$. □

Um anel de quocientes de R é um subanel de Q contendo R. O conjunto $C = \{c \in Q \mid cq = qc, \forall\, q \in Q\}$ é chamado centróide estendido de R. O subanel gerado por R e C, é o fecho central de R que denotaremos por RC.

Proposição 1.14.

(i) Se R é primo então todo anel de quocientes de R é também primo;

(ii) $q \in C$ se, e somente se, existe um ideal $0 \neq I$ de R e um R-homomorfismo bilateral $f : I \to R$, tais que, $f(r) = qr$, $\forall r \in I$;

(iii) $C \subseteq Q$ é um corpo.

Demonstração:

(i) Seja T um anel de quocientes à direita de R. Se $0 \neq q \in T$, $0 \neq p \in T$ temos pela Proposição 1.13 (iii) e (iv), que existe um ideal $I \in \mathcal{I}$, tal que, $0 \neq qI \subseteq R$ e $0 \neq pI \subseteq R$. Tome $a, b \in I$, tais que, $qa \neq 0$ e $pb \neq 0$. Assim, como R é primo, $qaRpb \neq 0$, mas $qTpb \supseteq qaRpb$ e, consequentemente, $qTp \neq 0$. Logo, T é primo.

(ii) Sejam $q = [I; f] \in C$ e $0 \neq a \in I$. Então, é possível provar que $f(a) = qa$. Para r em R temos que $rf(a) = rqa = qra = f(ra)$. Portanto, existe $0 \neq I \lhd R$ e um R-homomorfismo bilateral $f : I \to R$, tal que, $f(r) = qr$, $\forall r \in I$.

Reciprocamente, seja $q = [I; f]$ com $f : I \to R$ um R-homomorfismo bilateral, tal que, $f(r) = qr$, $\forall r \in I$. Note que, dado qualquer $p = [J; g] \in Q$, temos $qp = [JI; f \circ g]$ e $pq = [IJ; g \circ f]$. Seja $A = JI \cap IJ \in \mathcal{I}$ e $a = ji \in A$ com $j \in J$ e $i \in I$. Assim, $f \circ g(a) = f(g(ji)) = f(g(j)i) = g(j)f(i) = g(jf(i)) = g \circ f(ji) = g \circ f(a)$. Segue que $f \circ g|_A = g \circ f|_A$, donde $qp = pq$. Assim, $q \in C$.

(iii) Seja $0 \neq c \in C$. Vamos mostrar que existe $d \in C$, tal que, $cd = dc = 1$. Suponhamos que $c = [I; f]$. Então, $I \in \mathcal{I}$ e $0 \neq cI \subseteq R$ e, além disso, cI é um ideal de R. Assim, $cI \in \mathcal{I}$. Se $i \in I$ e $ci = 0$, segue que $cQi = Qci = 0$ e como Q é primo temos que $i = 0$. Portanto a aplicação $g : cI \to R$ definida por $g(ci) = i$, $\forall i \in I$, é uma aplicação bem definida. É claro que g é um R-homomorfismo bilateral e consequentemente $d = [cI; g] \in C \subseteq Q$. Além disso, as aplicações $f \circ g$ e $g \circ f$ são as identidades sobre os correspondentes domínios. Logo $cd = dc = 1$. □

1.3 Resultados

O seguinte teorema está provado em [8], Teorema 36, Pág. 25. A motivação principal de [2] foi estender este teorema para anéis não comutativos. Aqui daremos uma prova diferente da de [8], seguindo os métodos desenvolvidos em [2].

Teorema 1.15. *Seja R um domínio integral com corpo de frações K. Então,* *existe uma correspondência biunívoca entre os ideais primos P de $R[X]$ que contraem para 0 em R ($P \cap R = 0$) e os ideais primos de $K[X]$.*

Demonstração: Inicialmente, mostraremos que todo P ideal primo R-disjunto de $R[X]$ é da forma $P = K[X]f_0 \cap R[X]$ onde, $f_0 \in K[X]$ é um polinômio mônico, unicamente determinado.

De fato, tome $f' = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_iX^i \in P$, com $\partial(f') = Min(P) = n \geq 1$ e $lc(f') = a$. Então $f' = a(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a}X^i + X^n)$. Tome $f_0 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a}X^i + X^n \in K[X]$. Note que, para todo f em P, com $\partial(f) = n$, teremos $f = lc(f)f_0$, pois $\partial(flc(f') - lc(f)f') < n$ donde, $flc(f') = lc(f)f'$ e portanto, $f = \frac{lc(f)}{lc(f')}f' = lc(f)f_0$.

Defina o ideal de $K[X]$ dado por $P^* = K[X]f_0$ e considere a contração $I = K[X]f_0 \cap R[X]$. É fácil ver que $P = I$. Para ver a unicidade de f_0, suponha que $P = K[X]g_0 \cap R[X]$ onde, $g_0 \in K[X]$ é um polinômio mônico. Tome $b \in R$, tal que, $bg_0 \in R[X]$. Como bg_0 é um polinômio de grau mínimo em P, temos que $bg_0 = lc(bg_0)f_0 = bf_0$, donde $g_0 = f_0$.

Agora, observemos que P é primo se, e somente se, o polinômio f_0 associado é irredutível em $K[X]$. De fato, se P é primo, suponha, por absurdo, que $f_0 = g_1g_2$ com $g_1, g_2 \in K[X]$, não triviais. Então, $P \subseteq K[X]g_1 \cap R[X] = P_1$, $P \subseteq K[X]g_2 \cap R[X] = P_2$ e $P_1P_2 \subseteq P$. Portanto, $P = P_1$ ou $P = P_2$, contradição.

Reciprocamente, seja $P = K[X]f_0 \cap R[X]$ onde, $f_0 \in K[X]$ é um polinômio mônico irredutível. Sabemos que $P^* = K[X]f_0$ é ideal primo de $K[X]$. Afirmamos que $P = P^* \cap R[X]$ é um ideal primo R-disjunto de $R[X]$.

Para ver isto, tome $f, g \in R[X]$ com $fR[X]g \subseteq P$, então $fK[X]g \subseteq P^*$. De fato, dado $h \in K[X]$ tome $d \in R$, tal que, $dh \in R[X]$, então $fhg =$

$\frac{1}{d}fdhg \in P^*$, pois $fdhg \in P$. Como P^* é primo temos que $f \in P^*$ ou $g \in P^*$. Portanto, $f \in P$ ou $g \in P$.

Para concluir, basta observar que os ideais primos de $K[X]$ são os ideais da forma $P^* = K[X]f_0$ onde, $f_0 \in K[X]$ é um polinômio mônico irredutível. Associando, via contração, $P = P^* \cap R[X]$, obtemos uma correspondência biunívoca, pelo visto acima. □

Proposição 1.16. *Seja R um anel primo, então o anel de polinômios $R[X]$ também é primo.*

Demonstração: Sejam $f, g \in R[X]$ não nulos. Podemos escrever $f = f' + aX^n$ e $g = g' + bX^m$ com $\partial f' < n$, $\partial g' < m$ e $a, b \in R\backslash\{0\}$. Sendo R primo, pela Proposição 1.2, existe $r \in R$, tal que, $arb \neq 0$. Como $frg = f'rg' + f'rbX^m + aX^n rg' + arbX^{n+m}$ e $\partial(f'rg' + f'rbX^m + aX^n rg') < n+m$, concluímos que $frg \neq 0$, ou seja, $fR[X]g \neq 0$. Portanto $R[X]$ é primo pela Proposição 1.2. □

As demonstrações da Proposição 1.17 e do Lema 1.18 seguem uma argumentação semelhante a [12], Lema 2.11 e Lema 2.12.

Proposição 1.17. *Sejam R um anel e $0 \neq I \lhd R[X]$. Dados $f \in I$, com $\partial(f) = Min(I) = n$ e $lc(f) = a$, $g \in I$, com $\partial(g) = m$ e $lc(g) = b$ e $r_1, ..., r_{m-n} \in R$, então existe $k \in R[X]$, com $\partial(k) \leq m-n$, tal que, para qualquer $r_0 \in R$*

$$kr_0f = gr_{m-n}a...ar_1ar_0a.$$

Demonstração: Vamos raciocinar por indução em relação ao grau de g. Para $\partial(g) = n$ basta tomar $k_0 = b$ então $\partial(k_0r_0f - gr_0a) < n$, $\forall r_0 \in R$, logo $k_0r_0f = gr_0a$.

Agora para $\partial(g) = n+1$ e $r_1 \in R$, considere o polinômio $gr_1a - br_1Xf \in I$. Se $gr_1a - br_1Xf = 0$ então, multiplicando à direita por r_0a e usando o fato de que $fr_0a = ar_0f$, $\forall r_0 \in R$ temos $br_1aXr_0f = gr_1ar_0a$, donde $k_1 = br_1aX$.

Por outro lado, se $gr_1a - br_1Xf \neq 0$, então $n \leq \partial(gr_1a - br_1Xf) \leq (n+1) - 1 = n$. Usando a base de indução temos $k_0r_0f = (gr_1a - br_1Xf)r_0a$, ou seja, $(k_0 + br_1aX)r_0f = gr_1ar_0a$, então escolhemos $k_1 = k_0 + br_1aX$.

Prosseguindo este argumento, considerando em cada etapa m, o polinômio $gr_{m-n}a - br_{m-n}X^{m-n}f \in I$, obtemos o resultado. □

Lema 1.18. *Seja R um anel primo e P um ideal primo R-disjunto de $R[X]$. Se I é um ideal R-disjunto de $R[X]$ com $P \subseteq I$, então $P = I$.*

Demonstração: Considere $g \in P$, com $\partial(g) = Min(P) = m$, $lc(g) = b$ e $f \in I$, com $\partial(f) = Min(I) = n \leq m$ e $lc(f) = a$. Nessa situação $f \in P$. De fato, pela Proposição 1.17 existe $k \in R[X]$, com $\partial(k) \leq m - n$, tal que, para qualquer $r_0 \in R$, $kr_0f = gr_{m-n}a...ar_1ar_0a \in P$. Logo $kR[X]f \in P$. Como P é um ideal primo temos que $k \in P$ ou $f \in P$. Entretanto $\partial(k) \leq m - n < m$, ou seja $k \notin P$. Portanto $f \in P$.

Agora tome qualquer $h \in I$ com $\partial(h) = l$ e $lc(h) = c$. Afirmamos que $h \in P$. Suponhamos, por absurdo, que $h \notin P$. Aplicando a Proposição 1.17 a h com $s_1, ..., s_{l-n} \in R$ obtemos $k \in R[X]$, com $\partial(k) \leq l - n$, tal que, para qualquer $s_0 \in R$, $ks_0f = hs_{l-n}a...as_1as_0a$. Como $f \in P$ temos que $hs_{l-n}a...as_1as_0a \in P$, $\forall s_1, ..., s_{l-n} \in R$, donde $hR[X](as_{l-n-1}...as_1as_0a) \in P$. Logo, $as_{l-n-1}...as_1as_0a \in P$ pois P é primo e $h \notin P$. Usando o fato de que R é primo, podemos escolher $s_1, ..., s_{l-n-1} \in R$, tais que, $as_{l-n-1}...as_1as_0a \neq 0$, contradizendo $P \cap R = 0$. □

Teorema 1.19. *Seja R um anel primo e P um ideal R-disjunto de $R[X]$. Então P é primo se, e somente se, P é maximal no conjunto dos ideais R-*

disjuntos de $R[X]$.

Demonstração: Se P é um ideal primo então o Lema 1.18 afirma que P é maximal no conjunto dos ideais R-disjuntos de $R[X]$.

Reciprocamente, seja P maximal no conjunto dos ideais R-disjuntos de $R[X]$. Sejam A, B ideais de $R[X]$ tais que $A \supseteq P$, $B \supseteq P$ e $AB \subseteq P$. Então, $(A \cap R)(B \cap R) \subseteq P \cap R = 0$, logo $A \cap R = 0$ ou $B \cap R = 0$. Pela maximalidade de P temos que, $A = P$ ou $B = P$, donde P é primo pela Proposição 1.1. $\square$

Proposição 1.20. *Se R é um anel fortemente primo à direita (à esquerda) então R é um anel primo.*

Demonstração: Seja R um anel fortemente primo à direita e suponhamos, por absurdo, que R não seja um anel primo. Então existem ideais I, J de R tais que $IJ = 0$, $I \neq 0$ e $J \neq 0$. Como R é fortemente primo à direita, existe $F = \{n_1, n_2, ..., n_k\} \subseteq I$ com $Ann_r(F) = \{x \in R \mid Fx = 0\} = \{0\}$. Logo $FJ = 0$, donde $J = 0$, contradição. $\square$

Teorema 1.21. *Seja R um anel primo e Q o anel de quocientes à direita de Martindale de R. Então $Z(R) = 0$ se, e somente se, Q é Von Neumann regular.*

Para uma demonstração ver [1], Teorema 2.1.15, tomando Q o anel de quocientes à direita de Martindale.

Proposição 1.22. *Um anel fortemente primo e regular R é simples.*

Demonstração: Vamos supor, por contradição, que R não seja simples. Então existe $J \lhd R$, um ideal próprio de R. Como R é fortemente primo existe um isolador $F \subseteq J$. Note que sendo R regular, temos que qualquer I ideal à esquerda de R, finitamente gerado, é da forma Re, onde $e \in I$ é idempotente. Considere $I = RF = \sum_{a_i \in F} Ra_i \subseteq J$, então $I = Re$, onde $e \in I$ e $e^2 = e$. Como $F \subseteq I$ temos que o anulador à direita de Re é zero. Já que e

é idempotente temos que $e(e-1)=0$, ou seja, $e-1 \in Ann_r(Re)=0$. Logo $1 \in I$, daí $I=R$. $\square$

Proposição 1.23. *Se R é um anel fortemente primo à direita (à esquerda), então $R[X]$ também é um anel fortemente primo à direita (à esquerda).*

Demonstração: Seja $0 \neq I \lhd R[X]$. Sabemos que $0 \neq \tau(I) \lhd R$ logo, existe $F=\{a_1, a_2, ..., a_k\} \subseteq \tau(I)$ cujo anulador à direita em R é igual a zero. Tome $a_j \in F$, como $F \subseteq \tau(I)$ temos que existe $f_j \in I$, tal que, $lc(f_j)=a_j$. Definimos $G=\{f_1, f_2, ..., f_k\}$ onde cada f_j é dado por $f_j = \sum_{i=0}^{n-1} c_{ij}X^i + a_jX^n$ onde $c_{ij} \in R$ e $n = Min(I)$. Tome $g = \sum_{l=0}^{m} b_lX^l \in R[X]$, tal que, $Gg=0$. Em particular, $a_jb_m=0$, $j=1,2,...k$, o que implica $b_m=0$, logo $g=0$. $\square$

Capítulo 2

Ideais principais fechados

Neste capítulo introduziremos a definição de ideais principais fechados em anéis de polinômios sobre anéis primos. O principal resultado obtido é o Teorema 2.5 afirmando que, para qualquer ideal I R-disjunto de $R[X]$, com R primo, existe um menor *ideal principal fechado* de $R[X]$ que o contém.

Seja R um anel primo, I um ideal do anel de polinômios $R[X]$ e $f \in I$ com $f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i + aX^n$, onde $n \geq 1$ e $\partial f = Min(I)$. Note que, para qualquer $r \in R$, $arf - fra \in I$ e tem grau menor que n, então necessariamente $arf - fra = 0$. Assim, é natural para nossos propósitos tomarmos o seguinte conjunto:

$$\Gamma_R = \{f \in R[X] \mid arf = fra, \forall r \in R, \text{ onde } a = lc(f)\}.$$

Para $f \in \Gamma_R$ com $a = lc(f)$ definimos o fecho de f em R por:

$$[f]_R = \{g \in R[X] \mid \exists\, 0 \neq H \lhd R, \text{ tal que, } gHa \subseteq R[X]f\}.$$

Note que em geral $\Gamma_R \subsetneq R[X]$, pois um polinômio cujo coeficiente líder seja divisor de zero pode não estar em Γ_R.

Lema 2.1. *Seja R um anel primo, $f \in \Gamma_R$, $\partial f \geq 1$. Então $[f]_R$ é um ideal R-disjunto de $R[X]$ que contém f como um polinômio de grau mínimo.*

Demonstração: Primeiramente mostremos que $[f]_R$ é um ideal. Dados $g \in [f]_R$ e $l \in R[X]$, note que $lg \in [f]_R$ pois, existe $0 \neq H \lhd R$, tal que, $gHa \subseteq R[X]f$ onde, $a = lc(f)$. Então, $lgHa \subseteq R[X]f$ e portanto $lg \in [f]_R$. Também $gl \in [f]_R$, pois se $l = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i$, então, para $h \in H$, $glha = g(\sum_{i=0}^{n} c_i X^i)ha = \sum_{i=0}^{n} gc_i X^i ha = \sum_{i=0}^{n} X^i gc_i ha = \sum_{i=0}^{n} X^i gh_i a = \sum_{i=0}^{n} X^i (k_i f) = (\sum_{i=0}^{n} X^i k_i) f$, onde $h_i = c_i h$ e $k_i \in R[X]$. Logo, $glha \in R[X]f$ e daí, $glHa \subseteq R[X]f$. Portanto, $gl \in [f]$.

Resta mostrar que dados g_1 e $g_2 \in [f]_R$ temos $g_1 - g_2 \in [f]_R$. Sabemos que existem ideais de R, $H_1 \neq 0$ e $H_2 \neq 0$ tais que $g_i\, H_i\, a \subseteq R[X]f$, $i = 1, 2$. Tome $H = H_1 \cap H_2$. Note que, $H_1.H_2 \subseteq H_1 \cap H_2$ e como $H_1.H_2 \neq 0$, já que R é um anel primo temos que $H \neq 0$. Então, para $h \in H$ vem $(g_1 - g_2)ha = g_1 ha - g_2 ha \in R[X]f$. Assim, $(g_1 - g_2)Ha \in R[X]f$ e portanto $g_1 - g_2 \in [f]_R$.

Sendo $f \in \Gamma_R$, temos que $fra = arf$, $\forall r \in R$. Tomando $H = R \neq 0$, $fHa \subseteq R[X]f$ então, $f \in [f]_R$. Afirmamos que $Min([f]_R) = \partial f$. De fato, suponha $g \in [f]_R$ com $\partial g = l < n = \partial f$, sendo $g = \sum_{i=0}^{l} c_i X^i$ e $f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i + aX^n$. Como $g \in [f]_R$, existe $0 \neq H \lhd R$, tal que, para todo $h \in H$, existe $k = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i \in R[X]$ onde $gha = kf$. Comparando os graus de gha e kf vem $b_m a = 0$. Então, $ghara = kfra = karf$, $\forall r \in R$. Segue que, pelo menos, os últimos $m+1$ coeficientes de $karf$ são iguais a zero, pois $\partial f > \partial g$, isto é:

$$(1)\begin{cases} b_m ara = 0 \\ b_{m-1}ara + b_m ara_{n-1} = 0 \\ b_{m-2}ara + b_{m-1}ara_{n-1} + b_m ara_{n-2} = 0 \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_2 ara + b_3 ara_{n-1} + \dots + b_m ara_{n-m+2} = 0 \\ b_1 ara + b_2 ara_{n-1} + \dots + b_m ara_{n-m+1} = 0 \\ b_0 ara + b_1 ara_{n-1} + \dots + b_m ara_{n-m} = 0 \end{cases}$$

Afirmamos que $b_{m-i}a = 0$, $i = 0, ..., m$. Para $i = 0$, temos que, $b_m a = 0$ e, portanto vale a afirmação. Suponha, válido para $0 \leq i \leq s-1$. Vamos mostrar que $b_{m-s}a = 0$.

Observe que por (1), $b_{m-s}ara + b_{m-s+1}ara_{n-1} + \dots + b_{m-1}ara_{n-s+1} + b_m ara_{n-s} = 0$. Pela hipótese de indução, vem que, $b_{m-s+1}a = 0$,...,$b_{m-1}a = 0$, $b_m a = 0$, então, $b_{m-s}ara = 0$. Logo, $b_{m-s}a = 0$, pois R é primo. Portanto, $ka = 0$. Como $ghara = karf$, vem que $ghara = 0$, $\forall h \in H$, $\forall r \in R$. Sendo $R[X]$ primo, temos que $g = 0$. Assim, $\partial f = Min([f]_R)$, e já que $\partial f \geq 1$, temos que $[f]_R$ é R-disjunto. $\square$

Lema 2.2. *Assuma que f e f' estão em Γ_R. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $[f]_R \subseteq [f']_R$;

(ii) $f \in [[f']_R]_R$.

Demonstração:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Suponhamos que vale $[f]_R \subseteq [f']_R$. Pelo Lema 2.1, vimos que $f \in [f]_R$. Assim, $f \in [f]_R \subseteq [f']_R$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponhamos que $f \in [f']_R$. Tome $g \in [f]_R$, então existem $0 \neq H' \lhd R$, tal que, $gH'a \subseteq R[X]f$, onde $a = lc(f)$ e $0 \neq H \lhd R$, tal que, $fHa' \subseteq R[X]f'$, onde $a' = lc(f')$. Temos que $gH'aHa' \subseteq R[X]fHa' \subseteq$

$R[X]f'$. Portanto, $g \in [f']_R$, já que $0 \neq H'aH \lhd R$. Logo, $[f]_R \subseteq [f']_R$. $\square$

Corolário 2.3. *Assuma que f e f' estão em Γ_R. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $[f]_R = [f']_R$*;*

(ii) $f \in [f']_R$ *e* $f' \in [f]_R$*;*

(iii) $fra' = arf'$, $\forall r \in R$ *onde* $a = lc(f)$ *e* $a' = lc(f')$.

Demonstração:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Vale pelo Lema 2.2.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponhamos que vale (ii), como $f' \in [f]_R$ temos que $\partial f \leq \partial f'$. Já que $f \in [f']_R$ temos $\partial f' \leq \partial f$, então, $\partial f = \partial f'$. Seja $\partial f = n = \partial f'$. Sabemos que $fra' - arf' \in [f]_R$ e $\partial(fra' - arf') < n$, entretanto, pelo Lema 2.1, n é o grau mínimo de $[f]_R$, portanto, $fra' - arf' = 0$. Logo, $fra' = arf'$, $\forall r \in R$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Suponhamos que vale (iii). Tome $g \in [f]_R$, então existe $0 \neq H \lhd R$, tal que, para qualquer $h \in H$ existe $k \in R[X]$ com $gha = kf$, onde $a = lc(f)$. Além disso, para todo $r \in R$, $ghara' = kfra'$, com $a' = lc(f')$. Como $fra' = arf'$, vem que $ghara' = karf'$, $\forall r \in R$. Considere o ideal de R, $HaR \neq 0$ então $g(HaR)a' \subseteq R[X]f'$, portanto $g \in [f']_R$. Logo, $[f]_R \subseteq [f']_R$. Analogamente, $[f']_R \subseteq [f]_R$. $\square$

Definição 2.4. Um ideal I de $R[X]$, com R um anel primo, é dito ideal principal fechado se existe $f \in \Gamma_R$, tal que, $[f]_R = I$.

Teorema 2.5. *Seja R um anel primo e I um ideal R-disjunto de $R[X]$. Então, existe um menor ideal principal fechado $[I]$ de $R[X]$ que contém I. Além disso, $[I] = [f]_R$ para qualquer polinômio f de grau mínimo em I.*

Demonstração: Tome $f \in I$ com $\partial f = n = Min(I)$. Nessas condições $f \in \Gamma_R$, pois dado $r \in R$ e sendo $a = lc(f)$ temos $arf - fra = 0$. Assim,

$arf = fra$. Consideremos $[I] = [f]_R$, portanto, um ideal principal fechado.

Primeiramente, notemos que $[I]$ não depende da escolha de um f de grau mínimo em particular. De fato, se tomarmos $g = \sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i + bX^n \in I$, temos que o coeficiente de grau n de $gra - brf$ é zero, para todo r em R. Portanto $gra - brf = 0$, pois está em I e tem grau menor que n. Como g também tem grau mínimo temos que $g \in \Gamma_R$, logo $[g]_R = [f]_R$ pelo Corolário 2.3. Assim, $[I]$ está bem definido e é dado por $[f]_R$, para qualquer f de grau mínimo em I.

Afirmamos que $I \subseteq [I] = [f]_R$. Para provar isto vamos usar indução em relação ao grau. Para qualquer $g \in I$, com $\partial g = n$ vimos que $gra = brf$, $\forall r \in R$. Logo, $gH_0a \subseteq R[X]f$, onde $H_0 = R \neq 0$. Agora, suponha que, para qualquer $g \in I$ com $n \leq \partial g \leq m-1$ tenhamos $gH_{m-n-1}a \subseteq R[X]f$, onde $H_{m-n-1} = (Ra)^{m-n-1}R \neq 0$.

Tome qualquer $g \in I$ com $n \leq \partial g \leq m$, devemos mostrar que $gH_{m-n}a \subseteq R[X]f$ onde $H_{m-n} = (Ra)^{m-n}R$. Para ver isto, note que, se $n \leq \partial g \leq m-1$ então já temos que $gH_{m-n-1}a \subseteq R[X]f$, multiplicando à direita por Ra e usando o fato de que $f \in \Gamma_R$ temos $gH_{m-n-1}aRa \subseteq R[X]fRa$ e segue que $gH_{m-n}a \subseteq R[X]aRf \subseteq R[X]f$. Logo, $gH_{m-n}a \subseteq R[X]f$. Resta examinar o caso $\partial g = m$. Para tal, fixe $r \in R$ e defina $g_r \in I$ dado por $g_r = gra - X^{m-n}brf$, donde $gra = g_r + X^{m-n}brf$. Multiplicando a igualdade anterior, à direita, por ha com $h \in H_{m-n-1}$, obtemos $grha = g_rha + X^{m-n}brfha$. Como o coeficiente de grau m de g_r é zero, temos $n \leq \partial g_r \leq m-1$, que pela hipótese de indução implica $g_rH_{m-n-1}a \subseteq R[X]f$, ou seja, para qualquer $h \in H_{m-n-1}$ existe $k \in R[X]$, tal que, $g_rha = kf$. Logo, substituindo na igualdade acima, vem que $graha = kf + X^{m-n}brfha = (k + X^{m-n}brah)f$, para quaisquer $r \in R$ e $h \in H_{m-n-1}$. Logo, $gH_{m-n}a \subseteq R[X]f$ pois, $RaH_{m-n-1} = H_{m-n}$.

Fica assim demonstrado que $I \subseteq [I]$.

Resta verificar que $[I]$ é o menor ideal principal fechado que contém I. Suponha $I \subseteq J \subseteq [I] = [f]_R$, onde $J = [f']_R$ e $f' \in \Gamma_R$. Como $f \in I \subseteq J$ temos $f \in [f']_R$. Pelo Lema 2.2, $[f]_R \subseteq [f']_R$, isto é, $[I] \subseteq J$. Portanto $[I] = J$, provando a minimalidade de $[I]$. $\square$

Definição 2.6. Para um ideal R-disjunto I de $R[X]$, o ideal $[I]$ definido no Teorema 2.5 será chamado de ideal principal fechado associado com I.

Do Teorema 2.5, um ideal I, R-disjunto de $R[X]$ é principal fechado se, e somente se, $I = [I]$.

Corolário 2.7. *Seja I um ideal R-disjunto de $R[X]$. Então $[I]$ é o maior ideal J de $R[X]$ que contém I e satisfaz $Min(J) = Min(I)$. Em particular, $[I]$ é o único ideal principal fechado de $R[X]$ que contém I e satisfaz $Min([I]) = Min(I)$.*

Demonstração: Do Teorema 2.5, $I \subseteq [I]$ e $[I] = [f]_R$, onde $\partial f = Min(I)$. Por outro lado, $\partial f \geq 1$ pois I é R-disjunto, então pelo Lema 2.1 $f \in [f]_R$, $\partial f = Min([f]_R) = Min([I])$ portanto, $Min([I]) = Min(I)$.

Tome J um ideal de $R[X]$ contendo I e satisfazendo $Min(J) = Min(I)$. Suponha $[I] \subseteq J$. Como $Min(J) = Min(I) = \partial f$ e J é R-disjunto, temos pela demonstração do Teorema 2.5 que $J \subseteq [J] = [f]_R = [I]$. Então, $J = [I]$. Portanto $[I]$ é o maior ideal de $R[X]$ que contém I satisfazendo $Min([I]) = Min(I)$ e, além disso, é único. $\square$

Se $0 \neq r \in R$ então $r \in \Gamma_R$ e daí $[r]_R = R[X]$. Portanto se I é um ideal de $R[X]$, tal que, $I \cap R \neq 0$ temos $[I] = R[X]$. Por convenção adotamos $[0]_R = 0$.

Corolário 2.8. *Sejam I e J ideais de $R[X]$. Então:*

(i) $[[I]] = [I]$*;*

(ii) Se $I \subseteq J$ *então* $[I] \subseteq [J]$*;*

(iii) $[[I] + [J]] = [I + J]$.

Demonstração:

(i) Pelo Teorema 2.5, $I \subseteq [I] \subseteq [[I]]$. Do Corolário 2.7, $Min(I) = Min([I]) = Min[[I]]$ então, $[[I]] = [I]$.

(ii) Sabemos que $[I] = [f]_R$, onde f é um polinômio de grau mínimo em I, logo $f \in J$, já que $I \subseteq J$. Seja $[J] = [g]_R$, onde g é um polinômio de grau mínimo em J. Como $J \subseteq [J]$, vem que $f \in [J] = [g]_R$. Pelo Lema 2.2, $[f]_R \subseteq [g]_R$ consequentemente $[I] \subseteq [J]$.

(iii) $I \subseteq I + J$ logo por (ii) $[I] \subseteq [I + J]$ e da mesma forma, $[J] \subseteq [I + J]$. Então, $[I] + [J] \subseteq [I + J]$. Novamente por (ii) vem que $[[I] + [J]] \subseteq [[I + J]] = [I + J]$. Por outro lado, $I \subset [I]$ e $J \subset [J]$, daí $I + J \subseteq [I] + [J]$. Por (ii), vem que $[I + J] \subseteq [[I] + [J]]$. □

Corolário 2.9.

(i) Todo ideal primo R-disjunto de $R[X]$, com R um anel primo, é principal fechado;

(ii) Um ideal principal fechado é primo se, e somente se, é maximal no conjunto de todos os ideais principais fechados de $R[X]$, com R um anel primo.

Demonstração:

(i) Seja P um ideal primo R-disjunto de $R[X]$, pelo Teorema 2.5 temos $P \subseteq [P]$ e $[P]$ é R-disjunto. Além disso, pelo Teorema 1.19, P é maximal R-disjunto, então $P = [P]$. Logo, P é um ideal principal fechado.

(ii) Seja I um ideal principal fechado e primo, então I é R-disjunto pois se $I \cap R \neq 0$ temos $I = [I] = R[X]$. Pelo Teorema 1.19, I é maximal no conjunto dos ideais R-disjuntos. Logo, temos que I é maximal nos ideais principais fechados.

Reciprocamente, suponha I um ideal maximal no conjunto de ideais principais fechados. Afirmamos que I é maximal R-disjunto. De fato, se $I \subseteq J \subsetneq R[X]$, sendo J um ideal R-disjunto, então, $I \subseteq [J] \neq R[X]$. Pela maximalidade de I no conjunto de ideais principais fechados, temos $I = J$. Logo, I é maximal R-disjunto. Pelo Teorema 1.19, I é primo. $\square$

Teorema 2.10. *Seja R um anel simples. Então todo ideal de $R[X]$ é principal fechado. Além disso, se $I \neq 0$ é um ideal de $R[X]$, então $I = R[X]f$ para algum polinômio mônico $f \in C(R)[X]$, onde $C(R)$ é o centro de R.*

Demonstração: Seja I um ideal de $R[X]$. Se $I = R[X]$ então, $I = [1]_R$, logo é principal fechado e $I = R[X] \cdot 1$ com $f = 1 \in C(R)[X]$ polinômio de grau mínimo em I.

Vamos assumir $I \neq R[X]$. Note que $I \cap R \lhd R$. Como R é simples, $I \cap R = 0$, ou seja, I é R-disjunto. Se $I \neq 0$ temos $\tau(I) \neq 0$ logo $\tau(I) = R$ pois $\tau(I) \lhd R$ e R é simples. Assim, existe um polinômio mônico de grau mínimo f em I e portanto em Γ_R, isto é, $1rf = fr1$, $\forall r \in R$. Então, se $f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i + X^n$ temos que $ra_i = a_i r$, $\forall i = 0, ..., n-1$. Portanto, $f \in C(R)[X]$. Sendo I um ideal R-disjunto e $\partial f = Min(I)$ vem que $I \subseteq [f]_R$. Agora, dado $g \in [f]_R$, temos $gH1 \subseteq R[X]f$, com $H \lhd R$ e $H \neq 0$. Então $H = R$, pois R é um anel simples, logo $gR \subseteq R[X]f$, isto é, $g \in R[X]f$, daí $[f]_R \subseteq R[X]f$. Como $f \in I$, $R[X]f \subseteq I$. Portanto, $I = R[X]f = [I]$ o que completa a prova. $\square$

Corolário 2.11. *Seja R um anel simples. Então, existe uma correspondência biunívoca, via contração, entre o conjunto de todos os ideais (resp. ideais primos) de $R[X]$ e o conjunto de todos ideais (resp. maximais) de $C(R)[X]$.*

Demonstração: Seja a aplicação ψ dos ideais de $R[X]$ nos ideais de $C(R)[X]$, dada por $\psi(I) = I \cap C(R)[X]$. Note que esta aplicação está bem definida, pois $\psi(I) = I \cap C(R)[X] \lhd C(R)[X]$.

Além disso, ψ é injetiva, pois dados $I, J \lhd R[X]$, pelo Teorema 2.10, podemos escrever $I = R[X]f = [f]_R$ para $f \in C(R)[X]$, $lc(f) = 1$ e $\partial f = Min(I)$. Também, $J = R[X]f' = [f']_R$ para $f' \in C(R)[X]$, $lc(f') = 1$ e $\partial f' = Min(J)$. Se $\psi(I) = \psi(J)$, $I \cap C(R)[X] = J \cap C(R)[X]$. Assim, $f \in J \cap C(R)[X]$ daí, $f \in J$. Logo, $[f]_R \subseteq [f']_R$. Com o mesmo argumento, temos que $[f']_R \subseteq [f]_R$. Portanto, $I = [f]_R = [f']_R = J$.

Mostremos que ψ é sobrejetiva. Tome $I \lhd C(R)[X]$ então $I = C(R)[X]f$ com $f \in C(R)[X]$ mônico de grau mínimo em I, pois $C(R)[X]$ é domínio de ideais principais. Note que $f \in \Gamma_R$, logo podemos considerar $J = R[X]f$, ideal de $R[X]$, afirmamos que $\psi(J) = I$. De fato, $\psi(J) = [f]_R \cap C(R)[X]$. Como f é mônico de grau mínimo em $\psi(J)$ temos $\psi(J) = C(R)[X]f = I$.

Para estabelecer a correspondência entre os ideais primos de $R[X]$ e os ideais maximais de $C(R)[X]$, basta considerar a restrição ψ ao conjunto de todos ideais primos de $R[X]$ e observar que os ideais primos são, em ambos os casos, maximais disjuntos. Além disso, os ideais primos de $C(R)[X]$ são ideais maximais de $C(R)[X]$. $\square$

Observação 2.12. No Teorema 2.10 vimos que, sendo R um anel simples todo ideal principal fechado é um ideal principal no sentido usual e reciprocamente. Entretanto, há ideais principais que não são principais fechados, veja o exemplo, abaixo:

Seja o ideal $I = 2X\mathbb{Z}[X]$ de $\mathbb{Z}[X]$, onde $\mathbb{Z}$ é o anel dos inteiros. I é principal, já que $I = \langle 2X \rangle$. Tome $f = X$, então $\partial f = Min(I)$ e $I \subseteq [f]_{\mathbb{Z}}$ logo $[I] = [f]_{\mathbb{Z}}$ pelo Corolário 2.7. Afirmamos que $[f] = X\mathbb{Z}[X]$. É claro que

$X\mathbb{Z}[X] \subseteq [f]_{\mathbb{Z}}$. Por outro lado, sendo $g \in [f]_{\mathbb{Z}}$, então existe $0 \neq H \lhd \mathbb{Z}$, tal que, $gH \subseteq \mathbb{Z}[X]X$. Para $h \in H$, existe $k \in \mathbb{Z}[X]$ com $gh = kX$. Um cálculo simples mostra que $g \in X\mathbb{Z}[X]$. Portanto, $[I] = [X] = X\mathbb{Z}[X] \neq 2X\mathbb{Z}[X] = I$, isto mostra que I não é um ideal principal fechado.

Observação 2.13. Pelo Teorema 2.10, se R é simples então todo ideal R-disjunto de $R[X]$ é principal fechado. A recíproca também é verdadeira, isto é, se todo ideal R-disjunto de $R[X]$ é principal fechado então R é simples. De fato, suponha, por contradição, que R não seja simples, então, existe um ideal próprio J de R. Considere $I = XJ[X]$ um ideal R-disjunto de $R[X]$ portanto um ideal principal fechado. Por outro lado $XR[X]$ também é um ideal principal fechado que contém I. Pelo fato de que $Min(XR[X]) = Min(XJ[X])$ temos $XJ[X] = XR[X]$ (Corolário 2.7), contradizendo o fato de J ser ideal próprio.

Capítulo 3

Extensão e contração de ideais principais fechados

No que segue consideraremos R um anel primo, C o centróide estendido e Q o anel de quocientes à direita de Martindale de R.

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados envolvendo extensão e contração de ideais principais fechados. O mais importante é o Teorema 3.3 afirmando que, dados um anel primo R e T um anel de quocientes à direita de R, existe uma correspondência biunívoca, via contração, entre o conjunto de todos os ideais principais fechados de $R[X]$, o conjunto de todos ideais principais fechados de $T[X]$ e o conjunto de todos os polinômios mônicos de $C[X]$.

Lema 3.1. *Assuma que $f \in \Gamma_T$. Então, existe um único polinômio mônico $f_0 \in C[X]$, tal que, $[f]_T = Q[X]f_0 \cap T[X]$.*

Demonstração: Consideremos o ideal I de $R[X]$ dado por $I = [f]_T \cap R[X]$ e seja $n = Min(I)$. Note que $Min([f]_T) = n$, pois, por um lado, $Min([f]_T) \leq Min(I)$, já que $I \subseteq [f]_T$. Por outro lado, dado $g \in [f]_T$ com $\partial g = Min([f]_T)$

pela Proposição 1.13 (iii), existe um ideal $J \neq 0$ de R, tal que, $gJ \subseteq R[X]$. Logo, $gJ \subseteq I$, daí $Min([f]_T) = \partial g \geq Min(I)$.

Seja $b \in \tau(I)$, então existe um único polinômio $h = b_0 + b_1X + ... + bX^n \in I$, pois dado $h' = b'_0 + b'_1X + ... + bX^n \in I$, temos $h - h' \in I$ e $\partial(h - h') < n$. Logo, $h - h' = 0$, isto é, $h = h'$.

Pela unicidade do polinômio associado a cada coeficiente líder, podemos definir aplicações dadas por α_i: $\tau(I) \to R$ onde, $\alpha_i(b) = b_i$ e b_i é o coeficiente de grau i do polinômio associado. Estas aplicações são R-homomorfismos bilaterais. Logo, pela Proposição 1.14 (ii), existe $c_i \in C$, tal que, $b_i = \alpha_i(b) = c_ib = bc_i$, $i = 0, 1..., n-1$.

Tome um polinômio $f_1 \in I$ de grau mínimo, dado por $f_1 = \sum_{i=0}^{n-1} a_iX^i + aX^n$. Então, $\sum_{i=0}^{n-1} ac_iX^i + aX^n = f_1 = \sum_{i=0}^{n-1} c_iaX^i + aX^n$. Portanto, $f_1 = af_0 = f_0a$ onde $f_0 = \sum_{i=0}^{n} c_iX^i + X^n$ é um polinômio mônico em $C[X]$. Já que f_0 é mônico, temos $Min(Q[X]f_0 \cap T[X]) = n = Min([f]_T)$, para ver isto basta tomar $0 \neq J \lhd R$, tal que, $f_0J \subseteq R[X]$, então dado $0 \neq j \in J$ temos $f_0j \in Q[X]f_0 \cap T[X]$, com grau n. Se $g \in [f]_T = [f_1]_T$, existe $0 \neq H \lhd T$ com $gHa \subseteq T[X]f_1 \subseteq Q[X]f_0$, pois $f_1 = af_0$. Sejam $p, r \in Q[X]$, tais que, $g = pf_0 + r$ com $r = 0$ ou $\partial r < n$. Para $h \in H$, $gha = (pf_0 + r)ha$ segue que $rha = gha - phaf_0 \in Q[X]f_0$, logo, $rHa = 0$ e portanto $r = 0$, pois T é primo. Concluímos daí que $g \in Q[X]f_0 \cap T[X]$, então $[f]_T \subseteq Q[X]f_0 \cap T[X]$. Como $Min(Q[X]f_0 \cap T[X]) = n$ temos $Q[X]f_0 \cap T[X] = [f]_T$ pelo Corolário 2.7.

Resta mostrar a unicidade de f_0. Sabemos que $[f]_T = Q[X]f_0 \cap T[X]$ o que implica que $\partial f_0 = Min[f]_T$. Se $[f]_T = Q[X]g_0 \cap T[X]$ com $g_0 \in C[X]$ mônico, teremos $\partial g_0 = n = Min[f]_T = \partial f_0$. Note que existe K um ideal de R, não nulo, tal que, $g_0K \subseteq R[X]$. Fixe $k \in K$, então $g_0k = kg_0 \in$

$[f]_T = Q[X]f_0 \cap T[X]$. Portanto, $kg_0 = qf_0$, $q \in Q$, segue que $q = k$ e assim, $(f_0 - g_0)K = 0$, donde $g_0 = f_0$. □

Corolário 3.2. *Seja I um ideal T-disjunto de $T[X]$. Então I é um ideal principal fechado se, e somente se, $I = Q[X]f_0 \cap T[X]$, para algum polinômio mônico $f_0 \in C[X]$.*

Demonstração: Suponhamos que I é um ideal principal fechado T-disjunto de $T[X]$. Então, $I = [f]_T$ com $f \in \Gamma_T$. Pelo Lema 3.1, existe um único polinômio mônico $f_0 \in C[X]$, tal que, $Q[X]f_0 \cap T[X] = [f]_T$.

Reciprocamente, suponhamos $I = Q[X]f_0 \cap T[X]$ para algum polinômio mônico $f_0 \in C[X]$. Como $[I]_T$ é um ideal principal fechado temos pelo Lema 3.1 que $[I]_T = Q[X]g_0 \cap T[X]$, onde $g_0 \in C[X]$. Então $\partial f_0 = \partial g_0$ pois, $Min(I) = Min([I]_T)$. Usando o fato de $I \subseteq [I]_T$, podemos concluir que existe um ideal não nulo J de R, tal que, $(f_0 - g_0)J = 0$. Logo $f_0 = g_0$, ou seja $I = [I]_T$. □

Teorema 3.3. *Seja R um anel primo e T um anel de quocientes à direita de R. Então, existe uma correspondência biunívoca entre:*

(i) O conjunto de todos os ideais principais fechados de $R[X]$;

(ii) O conjunto de todos os ideais principais fechados de $T[X]$;

(iii) O conjunto de todos os polinômios mônicos de $C[X]$.

Além disso, a correspondência associa $[f]_R$ com $[f']_T$ e $f_0 \in C[X]$ se $[f']_T \cap R[X] = [f]_R$ e $Q[X]f_0 \cap T[X] = [f']_T$.

Demonstração: Inicialmente, vamos estabelecer uma correspondência ψ entre o conjunto de todos os ideais principais fechados de $T[X]$ e o conjunto de todos os polinômios mônicos de $C[X]$, do seguinte modo: a cada $J = [f]_T$, associamos, usando o Lema 3.1, o único $f_0 \in C[X]$ mônico, tal que, $J = Q[X]f_0 \cap T[X]$, ou seja, $\psi(J) = f_0$. Note que ψ independe de f. De fato, suponha que $[f]_T = J = [f']_T$ então, pelo Lema 3.1, $Q[X]f_0 \cap T[X] = [f]_T =$

$[f']_T = Q[X]f'_0 \cap T[X]$ donde $f_0 = f'_0$.

A injetividade de ψ segue simplesmente da observação de que, se temos J_1 e J_2 ideais principais fechados de $T[X]$ com $\psi(J_1) = \psi(J_2) = f_0$ então $J_1 = Q[X]f_0 \cap T[X] = J_2$. Além disso, ψ é sobrejetiva, pois dado f_0 polinômio mônico de $C[X]$ temos pelo Corolário 3.2 que $J = Q[X]f_0 \cap T[X]$, é um ideal principal fechado de $T[X]$, portanto $\psi(J) = f_0$.

A correspondência entre o conjunto de todos os ideais principais fechados de $R[X]$ e o conjunto de todos os polinômios mônicos de $C[X]$, é um caso particular do visto acima, tomando $T = R$.

Podemos especificar a correspondência entre o conjunto de todos os ideais principais fechados de $R[X]$ e o conjunto de todos os ideais principais fechados de $T[X]$. Para cada $[f]_R$ corresponde um único $[f]_T$, tal que, $[f]_T \cap R[X] = [f]_R$, onde $[f]_T = Q[X]f_0 \cap T[X]$ e $[f]_R = Q[X]f_0 \cap R[X]$. □

Observação 3.4. Suponha que T contém o fecho central RC de R e $f_0 \in C[X]$ é mônico. Afirmamos que $Q[X]f_0 \cap T[X] = T[X]f_0$. De fato, dado $g = \sum_{l=0}^{s} a_l X^l \in Q[X]f_0 \cap T[X]$ teremos $g = qf_0$ com $q = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i \in Q[X]$. Sendo $f_0 = \sum_{j=0}^{n-1} c_j X^j + X^n$ e igualando os coeficientes, concluímos que $q \in T[X]$, pois $RC \subseteq T$. Logo, $g = qf_0 = f_0 q \in f_0 T[X]$. Reciprocamente, se $g \in T[X]f_0$ então $g \in Q[X]f_0$, ainda $g \in T[X]$ pois $C[X] \subseteq T[X]$. Portanto, $g \in Q[X]f_0 \cap T[X]$.

Assim, o Corolário 3.2 permite concluir que os ideais principais fechados de $T[X]$ são os ideais do tipo $T[X]f$, onde $f \in C[X]$ satisfaz $T[X]f = fT[X]$, quando $RC \subseteq T$.

Observação 3.5. Seja R um domínio de fatoração única comutativo e $f \in R[X]$, então $f \in \Gamma_R$ e $[f]_R = R[X]f_1$ para algum $f_1 \in R[X]$. De fato, seja F o corpo de frações de R e tome $f_0 \in F[X]$ mônico, tal que, $[f]_R = F[X]f_0 \cap R[X]$. Sendo $f_0 = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{b_j} X^j + X^n$, escolha $d = mmc(b_0, ..., b_{n-1})$, e seja $f_1 = df_0 \in R[X]$. Afirmamos que $[f]_R = R[X]f_1$. Para ver isto tome $g \in [f]_R$ então $g = kf_0$ com $k \in F[X]$. Podemos escrever $g = \frac{1}{d}kdf_0 = \frac{1}{d}kf_1$, daí $\frac{1}{d}k \in R[X]$ pois $g \in R[X]$, ou seja, $g \in R[X]f_1$. Reciprocamente, dado $g = rf_1 \in R[X]f_1$ temos $g = rdf_0 \in F[X]f_0 \cap R[X] = [f]_R$.

Corolário 3.6. *Seja R um anel primo e T um anel de quocientes à direita de R. Um ideal T-disjunto P de $T[X]$ é primo se, e somente se, $P = Q[X]f_0 \cap T[X]$, para algum polinômio mônico irredutível $f_0 \in C[X]$.*

Demonstração: Sendo P primo T-disjunto, pelo Corolário 2.9 (i), P é principal fechado e, pelo Corolário 3.2, existe $f_0 \in C[X]$ mônico, tal que, $P = Q[X]f_0 \cap T[X]$. Por absurdo, suponhamos f_0 não irredutível. Então, existem g_1 e $g_2 \in C[X]$ mônicos não triviais, tais que, $f_0 = g_1 g_2$. Tomando $I_1 = Q[X]g_1 \cap T[X]$ e $I_2 = Q[X]g_2 \cap T[X]$, temos $P = I_1 \cdot I_2$, ou seja, $P = I_1$ ou $P = I_2$, contradição.

Reciprocamente, se $P = Q[X]f_0 \cap T[X]$ com $f_0 \in C[X]$, mônico irredutível, temos que P é um ideal principal fechado. Para ver que P é primo vamos usar o Corolário 2.9 (ii), isto é, basta mostrar que P é maximal no conjunto dos ideais principais fechados de $T[X]$.

Seja $I \lhd T[X]$ principal fechado, tal que, $P \subseteq I \neq T[X]$. Então $I = Q[X]g_0 \cap T[X]$, com $g_0 \in C[X]$ mônico. Tome q, $r \in Q[X]$, tais que $f_0 = qg_0 + r$ com $r = 0$ ou $\partial r < \partial g_0$ e considere J um ideal não nulo de R, tal que, $f_0 J \subseteq R[X]$ e $qg_0 J \subseteq R[X]$, então $rJ = f_0 J - qg_0 J \subseteq I$. Como $Min(I) = \partial g_0$ temos $rJ = 0$, logo $r = 0$. Assim, $f_0 = qg_0$, com $q \in Q[X]$. Igualando os coeficientes obtemos que $q \in C[X]$, portanto $q = 1$ pela irredutibilidade de f_0. Donde $P = I$. □

Corolário 3.7. *Seja R um anel primo e T um anel de quocientes à direita de R. Então existe uma correspondência biunívoca entre:*
(i) O conjunto de todos ideais primos R-disjuntos de $R[X]$;
(ii) O conjunto de todos ideais primos T-disjuntos de $T[X]$;
(iii) O conjunto de todos ideais maximais de $C[X]$.
Além disso, a correspondência associa o ideal primo P de $R[X]$ com o ideal primo P' de $T[X]$ e o ideal maximal M de $C[X]$, tal que, $P' \cap R[X] = P$ e $P' = Q[X]M \cap T[X]$.

Demonstração: Para ver isto, basta considerar as correspondências do Teorema 3.3. Em primeiro lugar, usamos o fato de que todo ideal primo R-disjunto ou T-disjunto é ideal principal fechado, associado com um polinômio mônico irredutível em $C[X]$. A outra correspondência segue do simples fato de que os polinômios de $C[X]$, associados pelo Teorema 3.3 aos ideais primos T-disjuntos de $T[X]$, são irredutíveis (Corolário 3.6). Além disso, os polinômios irredutíveis de $C[X]$ estão em correspondência biunívoca com ideais maximais de $C[X]$. □

Corolário 3.8. *Seja K o fecho algébrico de C e considere $Q_1 = Q \otimes_C K$. Assuma que P é um ideal primo R-disjunto de $R[X]$. Então*
(i) Existe $c \in K$, tal que, $P = Q_1[X](X - c) \cap R[X]$;
(ii) Existe somente um número finito de ideais Q_1-disjuntos de $Q_1[X]$ contraindo à P.

Demonstração:

(i) Sabemos que P é um ideal primo R-disjunto de R[X]. Assim, $P = Q[X]f_0 \cap R[X]$, onde $f_0 \in C[X]$ é um polinômio mônico irredutível (Corolário 3.6). Considere $P^* = Q[X]f_0$ um ideal primo de $Q[X]$ e portanto, maximal nos ideais Q-disjuntos de $Q[X]$ (Teorema 1.19). Seja $c \in K$ uma raíz de f_0. Como $X - c$ é um polinômio mônico irredutível em $Q_1[X]$, temos que $P_1 = Q_1[X](X-c)$ é um ideal primo Q_1-disjunto de $Q_1[X]$. Note que $P^* \subseteq P_1 \cap Q[X]$. De fato, se $g \in P^*$, então $g = hf_0$, $h \in Q[X]$. Sendo c raiz de f_0, vem que $f_0 = f(X-c)$, $f \in Q_1[X]$. Assim, $g = hf(X-c) \in P_1$. Logo, $g \in P_1 \cap Q[X]$, pois $g \in Q[X]$.

Como $P_1 \cap Q[X]$ é um ideal de $Q[X]$ e $P_1 \cap Q[X] \neq Q[X]$, temos $P^* = P_1 \cap Q[X]$, pela maximalidade de P^*. Assim, $P = P^* \cap R[X] = (P_1 \cap Q[X]) \cap R[X] = Q_1[X](X-c) \cap R[X]$.

(ii) Suponha P' um ideal primo Q_1-disjunto de $Q_1[X]$. Então, $P' = Q_1[X](X-d)$, para algum $d \in K$. Se P' contrai a P, vem que $P = P' \cap R[X]$. Tomando $\tilde{P} = P' \cap Q[X]$ teremos $P = \tilde{P} \cap R[X]$. Por outro lado, se $P^* = Q[X]f_0$ como em (i), teremos $P = P^* \cap R[X]$. Pelo Teorema 3.3 temos $P^* = \tilde{P}$, donde $Q[X]f_0 = Q_1[X](X-d) \cap Q[X]$. Assim, concluímos que d é uma raíz de f_0 em K. Como f_0 tem somente um número finito de raízes, a quantidade dos P' contraindo à P é finita. $\square$

Corolário 3.9. *Seja R um anel fortemente primo (à direita). Então a correspondência do Teorema 3.3 é biunívoca entre o conjunto de todos os ideais principais fechados (respectivamente primos R-disjuntos) de $R[X]$ e o conjunto de todos os ideais (respectivamente maximais) de $Q[X]$. Onde Q é o anel de quocientes à direita de Martindale de R.*

Demonstração: Vamos assumir por um momento que Q seja simples. Pelo Teorema 2.10 todo ideal de $Q[X]$ é principal fechado. Tomando $T = Q$ no Teorema 3.3, o conjunto de todos os ideais principais fechados de $R[X]$ está em correspondência biunívoca com o conjunto de todos os ideais de $Q[X]$. Em particular, se nos restringimos aos ideais primos R-disjuntos de $R[X]$, então o Corolário 3.7 estabelece correspondência biunívoca com os maximais de $Q[X]$. Sendo assim, basta provar que Q é simples.

Inicialmente temos que R é não singular, pois se o ideal $Z(R) \neq 0$, como R é fortemente primo, existe um isolador $F = \{a_1, ..., a_n\} \subseteq Z(R)$. Logo, $\bigcap_{i=1}^{n} Ann_r(a_i) \neq 0$, entretanto $F \cdot \bigcap_{i=1}^{n} Ann_r(a_i) = 0$, então $\bigcap_{i=1}^{n} Ann_r(a_i) = 0$, contradição, pois $Ann_r(a_i)$ é essencial para todo i. Além disso, pelo Teorema 1.21, $Z(R) = 0$ implica que o anel de quocientes à direita de Martindale Q é regular.

Sendo R um anel fortemente primo podemos concluir que Q é fortemente primo. De fato, se I é um ideal à direita de Q não nulo, então $I' = I \cap R \neq 0$. Como R é fortemente primo, existe um isolador $G = \{b_1, ..., b_n\} \subseteq I'$. Afirmamos que $G \subseteq I$ é também um isolador para I. Para ver isto, tome $q \in Q$, tal que, $Gq = 0$. Pela Proposição 1.13, existe J um ideal não nulo de R, tal que, $qJ \subseteq R$. Logo $GqJ = 0$, donde $qJ = 0$ e portanto, $q = 0$.

Finalmente, sabendo que Q é fortemente primo e regular temos que Q é simples, pela Proposição 1.22. $\square$

Corolário 3.10. *Seja R um anel qualquer e P_0 um ideal primo de R. Então existe um corpo F que depende somente de P_0, tal que, existe uma correspondência biunívoca entre todos os ideais primos $P \neq P_0[X]$ de $R[X]$ com $P \cap R = P_0$ e o conjunto de todos os polinômios mônicos irredutíveis de $F[X]$.*

Demonstração: Dos resultados anteriores é fácil verificar que basta tomar F o centróide do anel primo R/P_0 e ver que os ideais primos $P \neq P_0[X]$ de $R[X]$ tais que $P \cap R = P_0$, correspondem aos ideais R/P_0-disjuntos de $R/P_0[X]$. $\square$

Capítulo 4

Uma propriedade de fatoração única

No que segue consideraremos R um anel primo, C o centróide estendido e Q o anel de quocientes à direita de Martindale de R.

Nosso principal propósito é provar o Teorema 4.3, mostrando que um ideal principal fechado I de $R[X]$ possui a propriedade de ser escrito como interseção finita de ideais principais fechados associados à potências de certos ideais primos de $R[X]$, que estão fortemente relacionados com o polinômio mônico de $C[X]$ associado a I pelo Teorema 3.3. Este resultado lembra o Teorema da decomposição primária de um ideal em anéis comutativos Noetherianos.

Lema 4.1. *Seja I um ideal principal fechado de $Q[X]$. Então existe um conjunto finito de ideais primos Q-disjuntos P_1, ..., P_t de $Q[X]$ e inteiros positivos e_1,..., e_t tais que, $I = \bigcap_{i=1}^{t} P_i^{e_i}$. Esta representação é única a menos da ordem dos fatores.*

Demonstração: Primeiramente note que, se p_1 e p_2 são polinômios relativamente primos de $C[X]$ então $Q[X]p_1p_2 = Q[X]p_1 \cap Q[X]p_2$. De fato, seja $g \in Q[X]p_1p_2$ temos que $g = qp_1p_2 = qp_2p_1 = (qp_1)p_2 = (qp_2)p_1$, com $q \in Q[X]$. Logo $g \in Q[X]p_1 \cap Q[X]p_2$. Por outro lado, se $g \in Q[X]p_1 \cap Q[X]p_2$, temos $g = q_1p_1$ e $g = q_2p_2$, com $q_1, q_2 \in Q[X]$. Então $q_1p_1 = q_2p_2$. Como $p_1 \mid q_2p_2$, segue que $p_1 \mid q_2$ pelo fato de m.d.c.$(p_1, p_2) = 1$. Daí, $q_2 = qp_1$, $q \in Q[X]$. Portanto, $g = qp_1p_2 \in Q[X]p_1p_2$.

Seja $I \lhd Q[X]$ principal fechado. Pelo Corolário 3.2, existe $f_0 \in C[X]$, mônico, tal que, $I = Q[X]f_0$. Como $C[X]$ é um domínio de fatoração única, podemos decompor $f_0 = p_1^{e_1}...p_t^{e_t}$, como produto de fatores mônicos irredutíveis em $C[X]$. Então, $I = Q[X]p_1^{e_1}...p_t^{e_t}$. Indutivamente pelo demonstrado acima, $I = \bigcap_{i=1}^{t} Q[X]p_i^{e_i}$. Ainda, é fácil ver que $Q[X]p_i^{e_i} = (Q[X]p_i)^{e_i}$. Portanto, $I = \bigcap_{i=1}^{t}(Q[X]p_i)^{e_i} = \bigcap_{i=1}^{t} P_i^{e_i}$ onde $P_i = Q[X]p_i$ e P_i é primo pelo Corolário 3.6.

Resta mostrar a unicidade. Suponhamos que existe outra representação para I, isto é, $I = \bigcap_{j=1}^{s}(P_j')^{e_j'}$, com $e_1', ..., e_s'$ inteiros positivos e $P_j' \lhd Q[X]$ primo. Note que, pelo Corolário 3.6, $P_j' = Q[X]q_j$ onde $q_j \in C[X]$ é um polinômio mônico mônico irredutível. Portanto $I = \bigcap_{j=1}^{s}(Q[X]q_j)^{e_j'}$. Lembrando que $f_0 \in I$, vem que $f_0 = qq_1^{e_1'}...q_s^{e_s'}$. Por fatoração única temos que para cada j existe um i, tal que, $q_j = p_i$ e $e_j' \leq e_i$, portanto $s \leq t$. Assim, $I = \bigcap_{i=1}^{s}(Q[X]p_i)^{e_i'}$, $e_i' \leq e_i$, $s \leq t$.

Considere agora $g_0 = p_1^{e_1'}...p_s^{e_s'} \in \bigcap_{i=1}^{s}(Q[X]p_i)^{e_i'}$. Como $\bigcap_{i=1}^{s}(Q[X]p_i)^{e_i'} = I = \bigcap_{i=1}^{t}(Q[X]p_i)^{e_i}$, o mesmo raciocínio acima mostra que $s = t$ e $e_i' = e_i$, $i = 0, ..., t$. Logo, a representação é única a menos da ordem dos fatores. $\square$

Lema 4.2. *Seja P um ideal primo R-disjunto de $R[X]$ e $p \in C[X]$ um polinômio mônico irredutível, tal que, $P = Q[X]p \cap R[X]$. Então, o ideal principal fechado associado com P^e é $[P^e] = Q[X]p^e \cap R[X]$, para qualquer inteiro $e \geq 1$.*

Demonstração: Note que nessas condições $\partial(p) = Min(P)$. Afirmamos que $Min(P^e) = \partial(p^e)$, pois dado qualquer $g \in P^e$ temos $\partial(g) \geq \partial(p^e)$. Além disso, dado $f_i \in P$ com grau mínimo, temos $f_i = a_i p$, com $a_i = lc(f_i)$. Logo $f_1 f_2 ... f_e = a_1 p a_2 p ... a_e p = a_1 a_2 ... a_e p^e \in P^e$ e tem grau igual a $\partial(p^e)$ se $a_1 a_2 ... a_e \neq 0$. Todavia, se $a_1 a_2 ... a_e = 0$ para quaisquer $f_1, f_2, ... f_e \in P$ com grau mínimo, então $(\tau(P))^e = 0$, isto é absurdo pois, $\tau(P) \lhd R$ e R é primo.

Considere o ideal principal fechado $I = Q[X]p^e \cap R[X]$, como $P^e \subseteq I$ e $Min(P^e) = \partial(p^e) = Min(Q[X]p^e \cap R[X])$ temos $[P^e] = Q[X]p^e \cap R[X]$, pelo Corolário 2.7. $\square$

Teorema 4.3. *Seja R um anel primo e I um ideal principal fechado de $R[X]$. Então existe um conjunto finito de ideais primos R-disjuntos P_1,..., P_t de $R[X]$ e inteiros positivos e_1,..., e_t tais que $I = \bigcap_{i=1}^{t} [P_i^{e_i}]$, onde $[P_i^{e_i}]$ é o ideal principal fechado associado com $P_i^{e_i}$. Além disso, esta representação é única a menos da ordem dos fatores.*

Demonstração: Sendo I um ideal principal fechado de $R[X]$, existe um único $f_0 \in C[X]$ mônico, tal que, $Min(I) = \partial f_0$ e $I = Q[X]f_0 \cap R[X]$ (Lema 3.1). Considere $J = Q[X]f_0$, logo J é um ideal principal fechado de $Q[X]$. Pelo Lema 4.1, $J = \bigcap_{i=1}^{t} (Q[X]p_i)^{e_i}$ onde $f_0 = p_1^{e_1} ... p_t^{e_t}$ é a decomposição de f_0 em fatores mônicos irredutíveis de $C[X]$ e, e_1,..., e_t são inteiros positivos. Defina $P_i = Q[X]p_i \cap R[X]$, um ideal primo R-disjunto de $R[X]$. Então, pelo Lema 4.2 vem $[P_i^{e_i}] = Q[X]p_i^{e_i} \cap R[X]$. Usando a representação de J temos que $I = Q[X]f_0 \cap R[X] = J \cap R[X] = (\bigcap_{i=1}^{t} (Q[X]p_i)^{e_i}) \cap R[X] =$

$\bigcap_{i=1}^{t}(Q[X]p_i^{e_i} \cap R[X]) = \bigcap_{i=1}^{t}[P_i^{e_i}]$.

Resta mostrar a unicidade. Suponhamos que I tem outra representação, isto é, $I = \bigcap_{j=1}^{s}[L_j^{e'_j}]$, onde L_1, ..., L_s são ideais primos R-disjuntos de $R[X]$ e e'_1,..., e'_s são inteiros positivos.

Pelo Lema 4.2, $[L_j^{e'_j}] = Q[X]q_j^{e'_j} \cap R[X]$ onde $L_j = Q[X]q_j \cap R[X]$ e $q_j \in C[X]$ é um polinômio mônico irredutível, $\forall j$. Logo $I = \bigcap_{j=1}^{s}(Q[X]q_j^{e'_j} \cap R[X]) = (\bigcap_{j=1}^{s}(Q[X]q_j)^{e'_j}) \cap R[X]$. Tome $J' = \bigcap_{j=1}^{s}(Q[X]q_j)^{e'_j}$, um ideal principal fechado de $Q[X]$. Pela bijeção do Teorema 3.3, $J \cap R[X] = I = J' \cap R[X]$ implica que, $\bigcap_{j=1}^{s}(Q[X]q_j)^{e'_j} = \bigcap_{i=1}^{t}(Q[X]p_i)^{e_i}$. Assim, pela unicidade do Lema 4.1 a escrita é única, a menos da ordem dos fatores. □

Corolário 4.4. *Seja I um ideal R-disjunto de $R[X]$.*

(i) Existe um número finito de ideais primos R-disjuntos P_1, ..., P_t e inteiros e_1, ..., e_t unicamente determinados, tais que $[I] = \bigcap_{i=1}^{t}[P_i^{e_i}]$;

(ii) I é um ideal principal fechado se, e somente se, I é uma interseção finita de ideais, cada um dos quais é um ideal principal fechado associado com uma potência de um primo.

Demonstração:

(i) $[I]$ é um ideal principal fechado logo, pelo Teorema 4.3, $[I] = \bigcap_{i=1}^{t}[P_i^{e_i}]$, onde cada P_i é um ideal primo R-disjunto de $R[X]$ e $e_i \geq 1$, $\forall i$, são unicamente determinados.

(ii) Suponha $I = \bigcap_{i=1}^{t}[P_i^{e_i}]$ com P_i primo e $e_i \geq 1$, $\forall i$. Então, pelo Lema 4.2 temos $I = Q[X](p_1^{e_1}...p_t^{e_t}) \cap R[X]$ onde $P_i = Q[X]p_i \cap R[X]$, $p_i \in C[X]$ é um polinômio mônico irredutível, $\forall i$. Portanto I é um ideal principal fechado. A recíproca vale por (i). □

Corolário 4.5. *Uma interseção de ideais primos distintos R-disjuntos de $R[X]$ é não nula se, e somente se, for uma interseção finita.*

Demonstração: Seja $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de ideais primos R-disjuntos distintos. Assim cada $P_\lambda = Q[X]p_\lambda \cap R[X]$ onde $p_\lambda \in C[X]$ são polinômios mônicos irredutíveis e distintos, com $\partial p_\lambda \geq 1, \forall \lambda \in L$. Suponhamos $Card(L) = \infty$. Se $\bigcap\limits_\lambda P_\lambda \neq 0$, então existe $0 \neq f \in \bigcap\limits_\lambda P_\lambda$. Seja $n = \partial f$, como $f \in \bigcap\limits_\lambda P_\lambda$ temos que $p_\lambda \mid f$, $\forall \lambda$. Já que os p_λ são distintos, vem que ∂f é arbitrariamente grande contradizendo o fato de $\partial f = n$. Assim se $Card(L) = \infty$ temos $\bigcap\limits_\lambda P_\lambda = 0$, ou seja, $\bigcap\limits_\lambda P_\lambda \neq 0$ implica $Card(L) < \infty$.

Reciprocamente, suponhamos $I = \bigcap\limits_{i=1}^{t} P_i$ onde P_i é primo R-disjunto $\forall i$. Então pelo Corolário 3.6 temos $P_i = Q[X]p_i \cap R[X]$ com $p_i \in C[X]$ um polinômio mônico irredutível. Logo $I = \bigcap\limits_{i=1}^{t}(Q[X]p_i \cap R[X]) = Q[X](p_1 ... p_t) \cap R[X] \neq 0$. $\square$

Exemplo 4.6. Note que se P é um ideal primo Q-disjunto de $Q[X]$ (portanto principal fechado), então o Corolário 3.6 diz que P é da forma $P = Q[X]p$ onde $p \in C[X]$ é um polinômio mônico irredutível. Nesse caso vimos que $P^e = Q[X]p^e, \forall e \in \mathbb{N}$, que também é principal fechado pelo Corolário 3.2. Todavia esta situação nem sempre ocorre, como mostra o seguinte exemplo em $F[X]$, onde F é o corpo de frações do domínio das séries formais de potências, com coeficientes em $\mathbb{Q}$.

Seja $\mathbb{Q}$ o corpo dos números racionais. Vamos denotar por D o domínio de integridade definido por

$$D = \{\sum_{i=0}^{\infty} q_i Y^i \in \mathbb{Q}[[Y]] \mid q_1 = 0\}.$$

O corpo de frações de D é dado por

$$F = \{\sum_{i=-k}^{\infty} q_i Y^i \ \mid \ q_i \in \mathbb{Q}, \ \forall i, \ \forall k \ \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}[[Y, Y^{-1}]].$$

Vamos considerar $p = X - Y \in F[X]$ um polinômio mônico irredutível, e o ideal primo de $F[X]$ dado por $P^* = F[X]p = (X - Y)F[X]$. Então $P = P^* \cap D[X]$ é um ideal primo de $D[X]$. Observe que $Min(P) = 1$. Afirmamos que se $f \in P$ com $\partial(f) = 1$ então f é da forma

$$f = (X - Y)\sum_{i=2}^{\infty} q_i Y^i, \qquad q_i \in \mathbb{Q}.$$

De fato, se $\partial(f) = 1$ então $f = (X-Y)g, \ g \in F[X]$, com $\partial(g) = 0$, ou seja, $g = \sum_{i=-k}^{\infty} q_i Y^i \in F$, logo $f = (X-Y)\sum_{i=-k}^{\infty} q_i Y^i \ = \ (\sum_{i=-k}^{\infty} q_i Y^i)X - (\sum_{i=-k}^{\infty} q_i Y^{i+1})$. Como $P \subseteq D[X]$ teremos que $\sum_{i=-k}^{\infty} q_i Y^i, \ \sum_{i=-k}^{\infty} q_i Y^{i+1} \in D$. Conclui-se daí que $q_i = 0$ para $i \leq 1$. Basta notar que $\sum_{i=-k}^{\infty} q_i Y^i \in D \ \Rightarrow \ q_i = 0, i = -k ... -1$ e $q_1 = 0$. Por outro lado $\sum_{i=-k}^{\infty} q_i Y^{i+1} = \sum_{i=-k+1}^{\infty} q_{i-1} Y^i \in D$ daí $q_i = 0$, $i = -k ... -2$ e $q_0 = 0$.

Portanto, se $g \in P^2$, com $\partial(g) = 2$ então

$$g = (X^2 - 2XY + Y^2)\sum_{i=4}^{\infty} q_i' Y^i, \qquad q_i' \in \mathbb{Q}. \ (1)$$

Pelo Lema 4.2, $[P^2] = (X - Y)^2 F[X] \cap D[X]$, assim $g_0 = (X^2 - 2XY + Y^2)Y^2 \in [P^2]$. Entretanto $g_0 \notin P^2$ por (1), portanto $P^2 \subsetneq [P^2]$.

O próximo corolário mostra que uma condição para que a potência de um ideal primo R-disjunto de $R[X]$ seja um ideal principal fechado é que ele seja maximal.

Corolário 4.7. *Seja M um ideal maximal R-disjunto de $R[X]$ então:*

(i) Se T é um anel de quocientes de R que contém o fecho central RC de R,

então T é simples;

(ii) M^i é um ideal principal fechado para todo $i \geq 1$.

Demonstração:

(i) Como M é um ideal maximal R-disjunto temos que M é um ideal principal fechado de $R[X]$ (Corolário 2.9 (i)). Logo pelo Teorema 3.3, existe um único ideal principal fechado de $T[X]$ que denominaremos por M^*, tal que, $M^* \cap R[X] = M$. Por outro lado $M^* = Q[X]f_0 \cap T[X]$, com $f_0 = \sum_{i=0}^{n-1} c_i X^i + X^n \in C[X]$ um polinômio mônico (Corolário 3.2). Pela Observação 3.4, $M^* = T[X]f_0$ já que $RC \subseteq T$. Afirmamos que M^* é maximal em $T[X]$. De fato, suponhamos $M^* \subseteq J \lhd T[X]$ então teremos $M \subseteq M^* \subseteq J \subseteq [J]$. Vamos analisar $J \cap R[X]$. Como $M \subseteq J \cap R[X]$ temos duas possibilidades:

Se $M \subsetneq J \cap R[X]$ vem que $J \cap R[X] = R[X]$, pela maximalidade de M. Logo $1 \in J$ e daí $J = T[X]$.

Então $M = J \cap R[X] \subseteq [J] \cap R[X]$. Note que não é possível ter $M \subsetneq [J] \cap R[X]$ pois pela maximalidade de M, $[J] \cap R[X] = R[X]$, portanto J não é T-disjunto e daí existe $0 \neq t_0 \in T$, tal que, $t_0 \in J$. Podemos tomar H, um ideal não nulo de R, tal que, $0 \neq t_0 H \subseteq R$, ou seja, $t_0 H \subseteq J \cap R[X] = M$, absurdo pois M é R-disjunto. Assim $M = [J] \cap R[X]$ e a unicidade de M^* implica que $[J] = M^*$ portanto $J = M^*$.

Concluimos que se $M^* \subseteq J$, $J = T[X]$ ou $J = M^*$, ou seja, M^* é maximal em $T[X]$.

Considere um ideal próprio $I \lhd T$. Pela maximalidade de M^*, $M^* + I[X] = T[X]$ e portanto existem $g = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i \in T[X]$, $h = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i \in I[X]$ tais que $gf_0 + h = 1$. Se $g = 0$, então $1 \in I$ donde $I = T$, contradição, logo podemos assumir $g \neq 0$. Usando a igualdade e o fato que $\partial f_0 \geq 1$ temos que $k = \partial(h) = \partial(g) + \partial(f_0) = m + n$, assim

$$\begin{cases} b_m 1 + a_{m+n} = 0 \\ b_m c_{n-1} + b_{m-1} 1 + a_{m+n-1} = 0 \\ b_m c_{n-2} + b_{m-1} c_{n-1} + b_{m-2} 1 + a_{m+n-2} = 0 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1 c_0 + b_0 c_1 + a_1 = 0 \\ b_0 c_0 + a_0 = 1 \end{cases}$$

Podemos escrever os coeficientes de g como combinação dos coeficientes de f_0 e h de forma a concluir que $g \in I[X]$. De fato,
$b_m = -a_{m+n} \in I$
$b_{m-1} = -a_{m+n-1} - b_m c_{n-1} \in I$
e assim sucessivamente. Isto implica que $1 \in I[X]$, logo $1 \in I$ donde $I = T$, contradizendo $I[X] \neq T[X]$. Portanto T é simples.

(ii) Provaremos por indução. Para $i = 1$ é evidente. Agora, suponhamos que M^{i-1} é um ideal principal fechado para $i \geq 2$. Mostremos que M^i é um ideal principal fechado. Primeiramente note que $M^i \subseteq M^{i-1}$, logo $[M^i] \subseteq M^{i-1}$. Tome $f \in M^i$ com $a = lc(f)$ e $\partial f = Min(M^i)$. Então, $[M^i] = [f]_R$. Seja $g \in [f]_R$, então existe $0 \neq H' \lhd R$, tal que, $gH'a \subseteq R[X]f$. Daí $gH'aR \subseteq R[X]fR \subseteq M^i$, pois $f \in M^i$. Tome $H = H'aR$. Pela maximalidade de M temos que $H[X] + M = R[X]$, logo $1 = k_1 + k_2$ com $k_1 \in H[X]$ e $k_2 \in M$. Multiplicando à esquerda por g, vem que $g = gk_1 + gk_2$. Como $gk_1 \in gH[X] \subseteq M^i$ e $gk_2 \in M^{i-1} \cdot M = M^i$ temos que $g \in M^i$. Portanto, M^i é um ideal principal fechado. $\square$

Capítulo 5

Aplicações

Neste capítulo temos como referência [3]. Denotaremos por $\mathcal{A}$ uma classe de anéis primos. Diremos que um ideal P de R é um $\mathcal{A}$-*ideal* se $R/P \in \mathcal{A}$. Um anel R é dito *anel* $\mathcal{A}$-*Jacobson* quando todo ideal primo de R é uma interseção de $\mathcal{A}$-ideais. Finalmente, usaremos a notação (A) para a seguinte condição:

(A) Se $R \in \mathcal{A}$, então $R[X]/P \in \mathcal{A}$ para todo ideal primo R-disjunto P de $R[X]$.

Nossa finalidade aqui, é mostrar algumas aplicações dos resultados obtidos anteriormente. Inicialmente estabeleceremos nosso resultado principal que é o Teorema 5.3, mostrando que para uma classe $\mathcal{A}$, de anéis primos satisfazendo a condição (A), se R é $\mathcal{A}$-Jacobson, então $R[X]$ também é. Em seguida apresentamos quatro importantes classes de anéis primos, dentre várias outras, que satisfazem a condição (A) e portanto onde o Teorema 5.3 se aplica.

Lema 5.1. *Seja P um ideal primo R-disjunto de $R[X]$ e $0 \neq I$ um ideal satisfazendo uma das seguintes condições:*
(i) I é um ideal primo de R;

(ii) I é um ideal maximal à direita de R.

Se $\tau(P) \nsubseteq I$, então $(P + I[X]) \cap R = I$.

Demonstração:

(i) Primeiramente vamos observar que $I \subseteq P + I[X]$, logo $I \subseteq (P + I[X]) \cap R$. Suponha, por contradição, que $I \subsetneq (P + I[X]) \cap R$. Então existe $r = h_1 + h_2 \in (P + I[X]) \cap R$, onde $h_1 = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i \in P$ e $h_2 = \sum_{i=0}^{l} b_i X^i \in I[X]$ são tais que $r \notin I$.

Note que $h_1 = r - h_2 = (r - b_0) - \sum_{i=1}^{l} b_i X^i$, logo $a_i \in I,\ i = 1, ..., k$ e $a_0 \notin I$, pois do contrário $r = a_0 + b_0 \in I$ contradizendo $r \notin I$. Isto nos permite escolher $g = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \in P$, tal que, $a_i \in I,\ i = 1, ..., m$ e $a_0 \notin I$, de grau mínimo entre os polinômios em P com esta propriedade.

Por hipótese $\tau(P) \nsubseteq I$, portanto existe um polinômio $f = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j \in P$, com $n = Min(P)$, tal que, $b_n \notin I$. Assim, $a_0 R b_n \nsubseteq I$ pois I é primo e $a_0, b_n \notin I$. Tome $c \in R$, tal que, $a_0 c b_n \notin I$ e considere $g' = g c b_n - X^{m-n} a_m c f \in P$, ou seja,

$$g' \quad = \quad \sum_{i=0}^{m} a_i c b_n X^i - \sum_{j=0}^{n} a_m c b_j X^{j+(m-n)} \quad =$$

$$\sum_{i=0}^{(m-n)-1} a_i c b_n X^i + \left(\sum_{i=m-n}^{m-1} (a_i c b_n - a_m c b_{i-(m-n)}) X^i \right) + (a_m c b_n - a_m c b_n) X^m.$$

Então $\partial(g') < \partial(g)$ e todos os coeficientes de g' estão em I com exceção do coeficiente de grau zero, contradizendo a minimalidade de $\partial(g)$ com relação a esta propriedade.

(ii) Como em (i) podemos escolher $g = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \in P$, tal que, $a_i \in I,\ i = 1, ..., m$ e $a_0 \notin I$, de grau mínimo entre os polinômios em P com esta propriedade.

Por hipótese $\tau(P) \nsubseteq I$, portanto existe um polinômio $f = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j \in P$, com $n = Min(P)$, tal que, $b_n \notin I$.

Afirmamos que existe $y \in R$, tal que, $a_0 y b_n \notin I$. De fato, $I \subsetneq I + a_0 R$ donde, $I + a_0 R = R$ pela maximalidade de I no conjunto dos ideais à direita. Logo, existem $x \in I$ e $y \in R$ tais que $x + a_0 y = 1$. Multiplicando à direita por b_n, temos $x b_n + a_0 y b_n = b_n$. Portanto, $a_0 y b_n \notin I$.

Considere $g' = g y b_n - X^{m-n} a_m y f \in P$, ou seja,

$$g' = \sum_{i=0}^{m} a_i y b_n X^i - \sum_{j=0}^{n} a_m y b_j X^{j+(m-n)} =$$

$$\sum_{i=0}^{(m-n)-1} a_i y b_n X^i + (\sum_{i=m-n}^{m-1} (a_i y b_n - a_m y b_{i-(m-n)}) X^i) + (a_m y b_n - a_m y b_n) X^m.$$

Então, $\partial(g') < \partial(g)$ e todos os coeficientes de g' estão em I, com exceção do coeficiente de grau zero, contradizendo a minimalidade de $\partial(g)$, em relação a esta propriedade. $\square$

No próximo lema denotaremos por $\mathcal{A}(R)$ a interseção de todos ideais primos P de R tais que $R/P \in \mathcal{A}$.

Lema 5.2. *Suponhamos que $\mathcal{A}$ satisfaz a condição (A) e $R \in \mathcal{A}$. Então $\mathcal{A}(R[X]) = 0$.*

Demonstração: Sejam Q o anel de quocientes à direita de Martindale de R e C o centro de Q. Defina o conjunto, necessariamente infinito,

$$\mathcal{F}_C = \{f_0 \in C[X] \mid \text{mônico irredutível, com } \partial(f_0) \geq 1\}.$$

Para cada $f_0 \in \mathcal{F}_C$ associamos o ideal $P^*_{f_0} = Q[X] f_0$, que pelo Corolário 3.6 é um ideal primo Q-disjunto de $Q[X]$. Assim $P_{f_0} = P^*_{f_0} \cap R[X]$ é um ideal primo R-disjunto, de $R[X]$. Como $\mathcal{A}$ satisfaz a condição (A), temos que $R[X]/P_{f_0} \in \mathcal{A}$, $\forall f_0 \in \mathcal{F}_C$.

Então, sendo que $\mathcal{A}(R[X]) = \{\bigcap_{i\in\Lambda} I_i \mid I_i \lhd R[X]$, primo e $\mathcal{A}$-ideal$\}$, temos $\mathcal{A}(R[X]) \subseteq \bigcap_{f_0\in\mathcal{F}_C} P_{f_0} = 0$, pois, $Card(\mathcal{F}_C) = \infty$. $\square$

Teorema 5.3. *Assuma que $\mathcal{A}$ é uma classe de anéis primos satisfazendo a condição (A). Se R é $\mathcal{A}$-Jacobson, então $R[X]$ também é $\mathcal{A}$-Jacobson.*

Demonstração: Seja P um ideal primo qualquer de $R[X]$. Vamos supor $P \cap R = 0$, conforme observação após a Definição 1.3. Assim, R é um anel primo (pois 0 é um ideal primo de R) e $0 = P \cap R = \bigcap_{i\in\Lambda} N_i$, onde Λ é um conjunto de índices e N_i é $\mathcal{A}$-ideal de R, $\forall i \in \Lambda$, pois R é $\mathcal{A}$-Jacobson.

Fixado $i \in \Lambda$ temos $R/N_i \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ satisfaz a condição (A) temos, pelo Lema 5.2, que $\mathcal{A}((R/N_i)[X]) = 0$. Por definição $\mathcal{A}((R/N_i)[X]) = \bigcap_{j\in\Lambda_i} K^i_j$, onde Λ_i é um conjunto de índices e K^i_j é um ideal primo e $\mathcal{A}$-ideal, de $(R/N_i)[X]$, $\forall j \in \Lambda_i$. Usando o isomorfismo $(R/N_i)[X] \cong R[X]/N_i[X]$ podemos escrever cada K^i_j como $K^i_j = \tilde{K}^i_j/N_i[X]$, onde $\tilde{K}^i_j$ é um ideal primo de $R[X]$. Substituindo vem $0 = \bigcap_{j\in\Lambda_i} \tilde{K}^i_j/N_i[X]$. Note que, por um lado $N_i[X] \subseteq \tilde{K}^i_j$, $\forall j \in \Lambda_i$. Por outro lado $\bigcap_{j\in\Lambda_i} \tilde{K}^i_j/N_i[X] = 0$ implica que $\bigcap_{j\in\Lambda_i} \tilde{K}^i_j \subseteq N_i[X]$. Portanto $N_i[X] = \bigcap_{j\in\Lambda_i} \tilde{K}^i_j$. Afirmamos que cada $\tilde{K}^i_j$ é um $\mathcal{A}$-ideal de $R[X]$. Para ver isto, basta observar que $R[X]/\tilde{K}^i_j \cong (R[X]/N_i[X])/(\tilde{K}^i_j/N_i[X]) \cong (R/N_i)[X]/K^i_j \in \mathcal{A}$, pois K^i_j é um $\mathcal{A}$-ideal de $(R/N_i)[X]$.

Agora, podemos escrever

$$0 = \bigcap_{i\in\Lambda} N_i[X] = \bigcap_{i\in\Lambda}\bigcap_{j\in\Lambda_i} \tilde{K}^i_j$$

portanto $\mathcal{A}(R[X]) \subseteq \bigcap_{i\in\Lambda}\bigcap_{j\in\Lambda_i} \tilde{K}^i_j = 0$, pois cada $\tilde{K}^i_j$ é um $\mathcal{A}$-ideal de $R[X]$.

Note que isto mostra o caso em que $P = 0$, isto é, o ideal primo 0 de $R[X]$ é a interseção de $\mathcal{A}$-ideais de $R[X]$ obtida acima, restando analisar o caso em que $P \neq 0$. Sendo assim, podemos assumir daqui em diante que $P \neq 0$.

Defina os seguintes subconjuntos de Λ:

$$I = \{i \in \Lambda \mid (P + N_i[X]) \cap R = N_i\} \text{ e } J = \Lambda - I.$$

Note que $\tau(P) \subseteq N_j$, $\forall j \in J$, já que se $\tau(P) \nsubseteq N_j$ então pelo Lema 5.1, $(P + N_j[X]) \cap R = N_j$, ou seja, $j \in I$, o que é absurdo. Assim, $0 \neq \tau(P) \subseteq \bigcap\limits_{j \in J} N_j$.

Como $0 = (\bigcap\limits_{i \in I} N_i) \cap (\bigcap\limits_{j \in J} N_j) \supseteq (\bigcap\limits_{i \in I} N_i) \cdot (\bigcap\limits_{j \in J} N_j)$, temos que $\bigcap\limits_{i \in I} N_i = 0$, pois R é primo.

Escolha para cada $i \in I$, um ideal P_i de $R[X]$ maximal para a propriedade de que $P_i \supseteq P + N_i[X]$ e $P_i \cap R = N_i$. Nessas condições, $P_i/N_i[X]$ é um ideal de $(R/N_i)[X]$.

Afirmamos que $P_i/N_i[X]$ é um ideal primo R/N_i-disjunto. De fato, $P_i/N_i[X]$ é R/N_i-disjunto pois, $P_i/N_i[X] \cap R/N_i = (P_i \cap R)/N_i = N_i/N_i = 0$. Para ver que $P_i/N_i[X]$ é um ideal primo, basta notar que se $P_i/N_i[X] \subseteq L/N_i[X]$ com $L/N_i[X] \lhd (R/N_i)[X]$, R/N_i-disjunto, então $L \supseteq P_i \supseteq P + N_i[X]$ e $L \cap R = N_i$. A maximalidade de P_i em relação à propriedade acima, implica que $L = P_i$ ou $L = R[X]$. Portanto, $P_i/N_i[X]$ é maximal no conjunto dos ideais R/N_i-disjuntos de $(R/N_i)[X]$, então $P_i/N_i[X]$ é um ideal primo, pelo Teorema 1.19.

Usando o fato de que $R/N_i \in \mathcal{A}$ e que $P_i/N_i[X]$ é um ideal é primo R/N_i-disjunto de $(R/N_i)[X]$, temos pela condição (A) que

$$R[X]/P_i = (R/N_i)[X]/(P_i/N_i[X]) \in \mathcal{A},$$

isto é, P_i é $\mathcal{A}$-ideal de $R[X]$, $\forall i \in I$.

Defina $\tilde{P} = \bigcap_{i \in I} P_i$, um ideal de $R[X]$. Note que, $\tilde{P} \cap R = \bigcap_{i \in I} (P_i \cap R) = \bigcap_{i \in I} N_i = 0$. Pelo Teorema 1.19, sendo P primo R-disjunto, temos que P é maximal nos ideais R-disjuntos de $R[X]$. Como $P \subseteq \tilde{P}$ temos $P = \tilde{P}$. $\square$

Lema 5.4. *Sejam J um ideal à direita de um anel com unidade qualquer R, $g \in J[X]$ e $f \in R[X]$ mônico. Se $h, r \in R[X]$ são tais que $g = hf + r$ com $r = 0$ ou $\partial(r) < \partial(f)$ então $h, r \in J[X]$.*

Demonstração: Primeiramente, note que basta aplicar indução em relação ao grau de g supondo $\partial(g) \geq \partial(f)$, pois se $\partial(g) < \partial(f)$ a afirmação se verifica trivialmente. De fato, sendo f mônico a igualdade $g = hf + r$ implica que $h = 0$ se $\partial(g) < \partial(f)$. Portanto $h = 0, r = g \in J[X]$.

Assim consideremos a indução começando com $\partial(g) = \partial(f)$. Neste caso igualdade $g = hf + r$ implica que $\partial(h) = 0$ pois f é mônico, portanto $h = h_0 \in R$. Como $r = 0$ ou $\partial(r) < \partial(f)$ temos $h_0 = lc(g) \in J$. Daí podemos escrever $r = g - h_0 f \in J[X]$.

Agora suponha a afirmação válida para todo $g \in J[X]$, tal que, $n \leq \partial(g) \leq m - 1$, com $n = \partial(f)$ e $m > n$. Tome $g \in J[X]$, tal que, $\partial(g) = m$ e $lc(g) = b_m \in J$. Defina $g' = g - b_m X^{m-n} f \in J[X]$, então $\partial(g') \leq m - 1$ e $g' = (h - b_m X^{m-n}) f + r$, já que $g = hf + r$. Pela hipótese de indução aplicada à g' temos que $h - b_m X^{m-n}, r \in J[X]$, logo $h, r \in J[X]$. $\square$

Proposição 5.5. *As seguintes classes de anéis primos satisfazem a condição (A):*

(i) Anéis primos não singulares à direita;

(ii) Anéis fortemente primos à direita.

Demonstração:

(i) Sejam R um anel na classe de anéis primos não singulares à direita e P um ideal primo R-disjunto de $R[X]$. Afirmamos que $R[X]/P$ também é primo não singular à direita.

De fato, suponha por absurdo que $Z(R[X]/P) \neq 0$. Temos que existe um ideal I de $R[X]$ com $I \supsetneq P$, tal que, $Z(R[X]/P) = I/P$. Pela maximalidade de P no conjunto dos ideais R-disjuntos de $R[X]$, $I \cap R \neq 0$. Tome $0 \neq b \in I \cap R$ então, $\bar{b} = b + P \in Z(R[X]/P)$ donde, existe L um ideal à direita de $R[X]$, tal que, $0 \neq Ann_r(\bar{b}) = L/P$. Portanto, $bL \subseteq P$ e $P \subsetneq L$.

Note que existe um ideal à direita $J \neq 0$ de R, tal que, $J \cap Ann_r(b) = 0$ do contrário, se $J \cap Ann_r(b) \neq 0$, para todo ideal não nulo à direita J de R, então $Ann_r(b)$ é à direita essencial em R, ou seja, $b \in Z(R) = 0$, contradição com $b \neq 0$.

Além disso, $L \cap J[X] \nsubseteq P$, pois sendo P um ideal primo $L \cap J[X] \subseteq P$ implica $J[X] \subseteq P$ já que $P \subsetneq L$. Isto contradiz $P \cap R = 0$. Assim, podemos escolher $g \in L \cap J[X]$, tal que, $bg \in P$ e $g \notin P$.

Pelo Corolário 3.6, $P = Q[X]f \cap R[X]$, onde $f \in C[X]$ é um polinômio mônico irredutível e $P^* = Q[X]f$ é a extensão de P a $Q[X]$. Como f é mônico, temos que existem $h, r \in Q[X]$ tais que $g = hf + r$ com $r = 0$ ou $\partial(r) < \partial(f)$. Denotando $J' = JQ$ um ideal à direita de Q temos $g \in J'[X]$. Usando o Lema 5.4, para g e f, temos que $h, r \in J'[X]$. Note que os coeficientes de r estão em $J' = JQ$, portanto $r = \sum_{i=0}^{n} d_i X^i$, com $d_i = \sum_{j=0}^{m_i} a_j^i b_j^i$, onde $a_j^i \in J$ e $b_j^i \in Q$, $\forall i$, $\forall j$. Pela Proposição 1.13 (iii) temos que existe H um ideal não nulo de R, tal que, $b_j^i H \subseteq R$, $\forall i$, $\forall j$. Logo $rH \subseteq J[X]$. Fixado $c \in H$, a igualdade $g = hf + r$ nos dá

$$brc = bgc - bhfc \in P^*$$

Como $brc \in P^*$ e $\partial(brc) < \partial(f) = Min(P^*)$ temos $brc = 0$, $\forall c \in H$, ou seja, $brH = 0$. Portanto, $rH = 0$, já que $rH \subseteq J[X]$ e $J \cap Ann_r(b) = 0$. Sendo H um ideal não nulo de R temos $r = 0$, pela Proposição 1.13 (iv).

Assim, concluimos que $g = hf \in P^*$. Como $g \in R[X]$ temos que $g \in P^* \cap R[X] = P$, contradição.

(ii) Sejam R um anel primo fortemente primo à direita e P um ideal primo R-disjunto de $R[X]$. Afirmamos que $R[X]/P$ também é fortemente primo à direita.

De fato, sendo P um ideal primo R-disjunto de $R[X]$, podemos considerar a extensão de P à $Q[X]$ dada por $P^* = Q[X]f$, onde $P = P^* \cap R[X]$ e $f \in C[X]$ é um polinômio mônico irredutível. Suponhamos qualquer I ideal de $R[X]$, tal que, $P \subsetneq I$. Vamos mostrar que existe um isolador para I. Pela maximalidade de P no conjunto dos ideais R-disjuntos de $R[X]$, $I \cap R \neq 0$. Portanto $0 \neq I \cap R \lhd R$. Já que R é fortemente primo à direita, existe $F \subseteq I \cap R$ um isolador para $I \cap R$ em R. Vamos provar que F é também um isolador para I em $R[X]$.

De fato, seja $g \in R[X]$ com $Fg \subseteq P$. Afirmamos que $g \in P$. De fato, sendo f mônico, existem $h, r \in Q[X]$ tais que $g = hf + r$ com $r = 0$ ou $\partial r < \partial f$. Tome $a \in F$, então $ag = ahf + ar$ ou ainda, $ar = ag - ahf = a(g - hf) \in P^*$. Logo, $ar = 0$ pois $\partial r < \partial f$. Vamos escolher um ideal não nulo J de R, tal que, $rJ \subseteq R[X]$ pois $r \in Q[X]$. Donde $arJ = 0$, $\forall a \in F$, ou seja, $FrJ = 0$. Em consequência disso $rJ = 0$, usando o isolador F em cada coordenada de r, portanto $r = 0$. Então $g = hf \in P^* \cap R[X] = P$. $\square$

Proposição 5.6. *A classe dos anéis primitivos à direita satisfaz a condição (A).*

Demonstração: Sejam R um anel primitivo à direita e P um ideal primo R-disjunto de $R[X]$. Afirmamos que $R[X]/P$ também é primitivo à direita.

De fato, $R \in \mathcal{A}$ implica que 0 é um ideal primitivo de R, portanto existe um ideal maximal à direita M de R, tal que, $0 = \{x \in R \mid Rx \subseteq M\} = (M : R)$. Note que $\tau(P) \nsubseteq M$ pois $\tau(P) \neq 0$. De fato, basta observar que se $\tau(P) \subseteq M$ então $R\tau(P) \subseteq \tau(P) \subseteq M$ portanto, $\tau(P) \subseteq (M : R) = 0$. Assim $(P + M[X]) \cap R = M$, pelo Lema 5.1.

Tome um ideal à direita M^* de $R[X]$ maximal em relação à propriedade de que $M^* \supseteq P + M[X]$ e $M^* \cap R = M$. Com esta condição M^* é um ideal à direita maximal de $R[X]$.

De fato, suponhamos que $M^* \subseteq M' \neq R[X]$, para algum ideal à direita M' de $R[X]$. Note, em primeiro lugar, que $M' \supseteq P + M[X]$ e, em segundo lugar, que $M' \cap R \supseteq M^* \cap R = M$ e pela maximalidade de M em R temos $M' \cap R = M$. Logo $M^* = M'$ pela maximalidade de M^* em relação à condição acima.

Por construção $P \subseteq (M^* : R[X])$ já que $M^* \supseteq P + M[X]$. Além disso, $(M^* : R[X]) \cap R = 0$, pois dado $b \in (M^* : R[X]) \cap R$ vem que $Rb \subseteq M^*$ isto implica que $Rb \subseteq M^* \cap R = M$, logo $b \in (M : R) = 0$. Sabemos que P é maximal no conjunto dos ideais R-disjuntos de $R[X]$, portanto temos $(M^* : R[X]) = P$, isto é, P é um ideal primitivo de $R[X]$. Assim, concluimos que $R[X]/P$ é primitivo à direita. $\square$

Proposição 5.7. *A classe dos anéis simples satisfaz a condição (A).*

Demonstração: Sejam R um anel simples e P um ideal primo R-disjunto de $R[X]$. Afirmamos que $R[X]/P$ também é simples.

De fato, suponha o contrário, isto é, que exista um ideal próprio J/P de $R[X]/P$ então $0 \neq P \subsetneq J \subsetneq R[X]$. Sendo P primo, a maximalidade de P no conjunto dos ideais R-disjuntos implica que $J \cap R \neq 0$. Como R é simples temos que $J \cap R = R$, logo $1 \in J$. Portanto $J = R[X]$, contradição. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Beidar, K.I., Martindale, W.S. and Mikhalev, A.V. *"Rings with Generalized Identities"*, Marcel Dekker Inc., New York, 1996.

[2] Ferrero, M., *"Prime and Principal Closed Ideals in Polynomial Rings"*, Journal of Algebra 134 (1990), 45-49.

[3] Ferrero, M. and Parmenter, M. M., *"A Note on Jacobson Rings and Polynomial Rings"*, Proc. Amer. Math. Soc. 105 (1989), 281-286.

[4] Ferrero, M., *"Teoremas de Estrutura para Álgebras Semi-Simples"*, Atas da XVI Escola de Álgebra- Parte III, Universidade de Brasília, Instituto de Ciências Exatas-Departamento de Matemática, 23 a 29 de julho de 2000.

[5] Ferrero, M., *" The Strongly Prime Radical of an Ore Extension"*, Comm. In Algebra 17, $N^{\underline{o}}$ 2, (1989), 351-376.

[6] Goodearl, K.R., *"Ring Theory-Nonsingular Rings and Modules"*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, 1976.

[7] Handelman, D. and Lawrence, J., *"Strongly Prime Rings"*, Trans. Amer. Math. Soc. 211 (1975), 209-223.

[8] Kaplansky, I. *"Commutative Rings"*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1974.

[9] Lam, T.Y., *"A First Course in Noncommutative Rings"*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991.

[10] Lambek, J., *"Lectures on Rings and Modules"*, Mcgill University, Chelsea Publishing Company, 2nd Edition, New York, 1976.

[11] McConnell, J. C. e Robson, J. C. *"Non-commutative Noetherian Rings"*, Wiley-Intercience, New York, 1987.

[12] Pearson, K.R., Stephenson, W., and Stewart, P.N. *"Skew Polynomials and Jacobson Rings"*, Proc. London Math. Soc. 42 (1981), 559-576.

[13] Stenström, Bo, *"Rings of Quotients"*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York, 1975.