

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Interação onda-partícula em plasmas magnetizados
com propagação da onda em ângulos arbitrários: uma
abordagem via mapas***

Thales Marques Corrêa da Silva

Dissertação elaborada sob orientação do Prof. Dr. Renato Pakter, co-orientação do Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento do requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre
Novembro de 2012

* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Resumo

Neste trabalho investigamos a interação onda-partícula de uma onda eletrostática estacionária que perturba o sistema com impulsos periódicos, representados pela função delta de Dirac, e partículas relativísticas em um plasma magnetizado, com vetor de onda formando um ângulo arbitrário em relação ao campo magnético. Os impulsos periódicos permitem colocar a solução das equações de Hamilton na forma de um mapa. Nosso interesse principal está na possibilidade de energização de partículas inicialmente pouco energéticas. Para esse fim, o ângulo entre o vetor de onda e o campo magnético mostra-se como um parâmetro importante e explicamos o comportamento das partículas de baixa energia como função desse ângulo.

Palavras-chave: Interação onda-partícula, Mapa, Energização de partículas.

Abstract

In this work we investigate the wave-particle interaction of a stationary electrostatic wave that perturbs periodically the system with impulses, represented by the Dirac delta function, and relativistic particles in a magnetized plasma with wavevector in an arbitrary direction. The periodic impulses allow us to place the solution of Hamilton's equations in the form of a map. Our main interest lies in the possibility of energize particles initially with low energy. To this end, the angle between the wave vector and the magnetic field is an important parameter and we explain the behavior of the low energy particles as function of this angle.

Keywords: Wave-particle interaction, Map, Energize particles.

Conteúdo

1. Introdução	5
2. Do Sistema ao Mapa	7
2.1 Descrição do sistema	7
2.2 O Hamiltoniano	8
2.3 Soluções das equações de movimento e o mapa	9
3. Propriedades e Simulação do Mapa	12
3.1 Propriedades	12
3.2 Simulação	12
4. Formas normais e Resultados	16
4.1 Expansão do Hamiltoniano	16
4.2 Soluções numérica do Hamiltoniano aproximado	20
4.3 Cálculo de φ_{crit}	23
5. Conclusões	34

Capítulo 1

Introdução

A interação onda-partícula sempre atraiu atenção como uma forma eficaz nos processos de aceleração e aquecimento de partículas. Dessa interação, surgem aplicações em diversos contextos, tais como em aceleradores de partículas [1, 2], *free electron lasers* [1], plasmas astrofísicos [1, 3], aquecimento em dispositivos de fusão [4], produção de corrente toroidal em um tokamak [5], entre outras.

A interação onda-partícula é basicamente um processo não-linear [1, 6], o que implica que podemos esperar regiões regulares e caóticas no espaço de fase [7]. A predominância de um tipo de comportamento depende diretamente da amplitude das perturbações que influenciam o movimento da partícula.

Regiões regulares são ideais para aceleração de partículas, pois, nessas circunstâncias, a onda pode ceder energia continuamente para a partícula. Já no caso caótico, a onda cede e ganha energia da partícula a todo instante, aumentando consideravelmente a dispersão na velocidade da partícula $\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2$, quantidade que está relacionada com a temperatura.

Como mostrado ao longo dos anos, a interação entre ondas eletrostáticas e partículas é um modo eficiente para acelerar [4, 8, 9] e aquecer partículas [3].

A literatura evidencia que a investigação da interação onda-partícula é facilitada se for possível a construção de um mapa que preserve o volume ocupado no espaço de fase para o sistema em estudo. Tais mapas são úteis por levarem a uma série de resultados analíticos [7, 10].

Dentro da vasta variedade de mapas que preservam o volume, um dos mais estudados é o mapa padrão de um grau de liberdade e seus variantes [11, 12]. O mapa padrão descreve uma grande quantidade de sistemas, como por exemplo, a interação onda-partícula não-linear sob ação de uma onda eletrostática.

Uma generalização do mapa padrão para o caso relativístico foi introduzida na referência [13]. Mais recentemente, generalizou-se o mapa padrão relativístico para o caso de um plasma magnetizado com propagação da onda perpendicularmente ao campo magnético, no contexto de aceleração de partículas inicialmente pouco energéticas [14] e de controle de caos no espaço de fase [15].

O objetivo desta dissertação é estudar a dinâmica relativística de partículas inicialmente pouco energéticas em um plasma magnetizado, assim como na referência [14], porém com propagação da onda em ângulos arbitrários. Para tal, organizamos o trabalho da seguinte maneira: no capítulo 2, descrevemos detalhadamente o sistema em estudo, derivamos o Hamiltoniano que descreve a interação onda-partícula para esse caso e calculamos o mapa que é solução da dinâmica; no capítulo 3, analisamos o mapa calculado no capítulo anterior,

apontando algumas propriedades e resultados de simulação, de onde surgirá um fenômeno interessante cuja explicação será o foco do capítulo 4; por último, no capítulo 5, apresentamos nossas conclusões.

Capítulo 2

Do Sistema ao Mapa

2.1 Descrição do sistema

Analisaremos o caso de partículas interagindo com uma onda eletrostática e um campo magnético externo. Para tal, consideramos uma baixa densidade de partículas, pois nesse regime a interação entre partículas pode ser considerada desprezível. O efeito em estudo é, de fato, a interação entre uma partícula teste e a onda.

As ondas eletrostáticas são oscilações do campo elétrico que se propagam na direção de oscilação, ou seja, são ondas longitudinais e precisam de um meio para se propagar como, por exemplo, um plasma ou um feixe de partículas carregadas.

Como discutido na literatura [13, 14, 16, 17], os efeitos relativísticos podem ser importantes e modificam significativamente a dinâmica do sistema. Por isso, serão considerados neste trabalho.

Uma situação bastante comum na interação onda-partícula é a presença de um campo magnético externo, tanto em uma situação controlada em laboratório quanto em problemas astrofísicos. Por simplicidade, consideramos que o campo é uniforme na direção e sentido do eixo \hat{z} positivo.

A figura 2.1 mostra de forma esquemática o modelo em estudo.

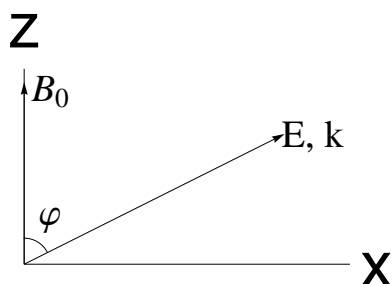


Fig. 2.1: *Esquema do modelo em estudo.*

Estudaremos o caso de uma onda eletrostática estacionária que perturba o sistema com impulsos periódicos [13, 14, 15, 17]. Esse tipo de aproximação impulsiva surge quando supomos o pacote de ondas eletrostáticas

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \cos(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} - \omega_n t) \frac{\mathbf{k}_n}{|\mathbf{k}_n|}, \quad (2.1.1)$$

onde \mathbf{E} é o campo elétrico, e fazemos as seguintes hipóteses, $E_n \approx E_0$, $\mathbf{k}_n = \mathbf{k} + n\Delta\mathbf{k}$ e $\omega_n = \omega_0 + n\Delta\omega$, com $|\Delta\mathbf{k}|/|\mathbf{k}| \ll 1$ e $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$. Se a velocidade de grupo $v_{gr} = \Delta\omega/\Delta k$ for suficientemente grande, precisamos levar em consideração apenas a mudança em frequência e podemos aproximar $|\Delta\mathbf{k}| \approx 0$. Por fim, consideramos que $\omega_0/\Delta\omega \in \mathbb{Z}$, desse jeito o problema é equivalente a considerarmos $\omega_0 = 0$ [13]. Essas aproximações são relevantes, pois maximizam o ganho de energia das partículas [9, 18, 19]. Inserindo essas aproximações na equação (2.1.1) e calculando o potencial eletrostático ϕ , obtemos

$$\phi(x, z, t) = \frac{E_0}{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(kx \sin \varphi + kz \cos \varphi - n\Delta\omega t), \quad (2.1.2)$$

onde φ é o ângulo entre o campo magnético e o vetor de onda, e, por simplicidade, escolhemos a componente transversal de \mathbf{k} ao longo do eixo x .

Podemos colocar esse potencial (2.1.2) numa forma mais conveniente. Para tanto, valemos da relação do cosseno da diferença de arcos e também do seno ser uma função ímpar, chegando no seguinte formato

$$\phi(x, z, t) = \frac{E_0}{k} \cos(kx \sin \varphi + kz \cos \varphi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n\Delta\omega t). \quad (2.1.3)$$

Por fim, a soma de cossenos está relacionada com a série de Fourier da função *Dirac Comb*, que é uma série de infinitas funções delta de Dirac igualmente espaçadas. A forma final do potencial é

$$\phi(x, z, t) = \frac{\varepsilon}{2} \cos(kx \sin \varphi + kz \cos \varphi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (2.1.4)$$

onde $T = 2\pi/\Delta\omega$ e $\varepsilon = 2TE_0/k$. Para fins comparativos, optamos por manter a convenção utilizada na referência [14], a qual usa o fator 1/2 na forma final do potencial.

2.2 O Hamiltoniano

O Hamiltoniano de uma partícula de carga q e massa m sob ação de um campo magnético e um campo elétrico é dado por

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sqrt{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 c^2 + m^2 c^4} + q\phi(\mathbf{r}, t), \quad (2.2.1)$$

onde \mathbf{p} é o momento canônico, \mathbf{A} o potencial vetor e c a velocidade da luz no vácuo. Uma maneira simples de escrever o potencial vetor para o caso de um campo magnético uniforme ao longo do eixo \hat{z} é

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = B_0 x \hat{y}. \quad (2.2.2)$$

Substituindo as equações (2.1.4) e (2.2.2) na equação (2.2.1), obtemos

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sqrt{[p_x^2 + p_z^2 + (p_y - qB_0x)^2] c^2 + m^2 c^4} + q \frac{\varepsilon}{2} \cos(kx \sin \varphi + kz \cos \varphi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (2.2.3)$$

Como o Hamiltoniano não depende de y , p_y é uma quantidade conservada. Portanto, escolhemos, sem perda de generalidade, $p_y = 0$. É importante notar que dy/dt é diferente de zero e o movimento transversal não é unidimensional.

É conveniente introduzir variáveis adimensionais para simplificar o Hamiltoniano. Usando $H/mc^2 \rightarrow H$, $\mathbf{p}/mc \rightarrow \mathbf{p}$, $(qB_0/mc)\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}$, $(qB_0/m)t \rightarrow t$ e $(q/mc^2)(qB_0/m)\varepsilon \rightarrow \varepsilon$, a versão adimensional do Hamiltoniano fica

$$H = \sqrt{1 + x^2 + p_x^2 + p_z^2} + \frac{\varepsilon}{2} \cos(kx \sin \varphi + kz \cos \varphi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (2.2.4)$$

O Hamiltoniano (2.2.4) é conveniente para calcular a variação sofrida pelas variáveis dinâmicas num intervalo ($t = nT - \tau$, $t = nT + \tau$), com $\tau \rightarrow 0$, pois a ausência de p_x e p_z no termo de acoplamento implica na conservação de x e z durante esse intervalo.

Para tempos entre dois múltiplos consecutivos de T , a ausência de z e t no Hamiltoniano implica na conservação de p_z e H nesse intervalo. Portanto, a dinâmica é integrável e representável em termos das variáveis ângulo-ação $p_x = \sqrt{2I} \cos \theta$, $x = \sqrt{2I} \sin \theta$. O Hamiltoniano escrito em termo dessas variáveis é

$$H = \sqrt{1 + 2I + p_z^2} + \frac{\varepsilon}{2} \cos(k\sqrt{2I} \sin \theta \sin \varphi + kz \cos \varphi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (2.2.5)$$

onde a conservação de I e p_z fica clara quando o termo de acoplamento está ausente.

2.3 Soluções das equações de movimento e o mapa

Para integrar a dinâmica gerada pelos Hamiltonianos (2.2.4) e (2.2.5), começamos fazendo algumas observações.

Ao atravessar uma das deltas de Dirac,

- (i) x e z se conservam;
- (ii) p_x , p_z , I e θ não se conservam e sofrem uma descontinuidade finita.

Entre duas deltas de Dirac consecutivas,

- (i) I e p_z se conservam;
- (ii) x , z , p_x e θ não se conservam;

(iii) z e θ variam linearmente com o tempo, enquanto x e p_x são funções muito mais complicadas do tempo.

A descontinuidade finita, sofrida por algumas variáveis dinâmicas, indica a possibilidade de colocar a resposta final em formato de um mapa $X_{n+1} = f(X_n)$, onde, por exemplo, X_n é o valor dessas variáveis logo antes do sistema chegar à n -ésima delta do *Dirac Comb*. O fato da ação ser conservada na ausência da perturbação e da maior simplicidade do par (θ, I) frente a (x, p_x) , sugere que é melhor colocar o mapa em termos de θ, z, I e p_z .

Entretanto, se usarmos somente o Hamiltoniano na forma da equação (2.2.5), teremos problemas para calcular a variação de θ e I para $t = nT$. Como citado anteriormente, o Hamiltoniano na forma da equação (2.2.4) é conveniente para essa situação. Isso nos sugere a seguinte abordagem:

- (i) para $t = nT - \tau$, com $\tau \rightarrow 0$, temos θ_n, I_n, z_n e p_{z_n} ;
- (ii) transformamos as variáveis ângulo-ação na sua forma cartesiana
 $(x_n, p_{x_n}) = (\sqrt{2I_n} \sin \theta_n, \sqrt{2I_n} \cos \theta_n)$;
- (iii) calculamos a variação nas variáveis cartesianas causadas pela delta de Dirac. Já sabemos que $\Delta x = 0$ e $\Delta z = 0$, resta-nos calcular Δp_x e Δp_z ;
- (iv) para $t = nT + \tau$, com $\tau \rightarrow 0$, escrevemos $p_{x_n}^+ = p_{x_n} + \Delta p_x$ e $p_{z_n}^+ = p_{z_n} + \Delta p_z$;
- (v) voltamos para as variáveis ângulo-ação usando $I_n^+ = (p_{x_n}^+{}^2 + p_{z_n}^+{}^2)/2$ e
 $\theta_n^+ = \arctan(x_n/p_{x_n}^+)$;
- (vi) por fim, propagamos o mapa até logo antes de $t = (n+1)T$ usando $I_{n+1} = I_n^+$,
 $p_{z_{n+1}} = p_{z_n}^+$, $\theta_{n+1} = \theta_n^+ + \Delta\theta$ e $z_{n+1} = z_n + \Delta z$ com $\Delta\theta$ e Δz a ser calculados.

O cálculo de Δp_x pode ser feito recorrendo a uma das equações de Hamilton $dp/dt = -\partial H/\partial q$, a qual no nosso caso resulta em

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2+p_x^2}} + \frac{\varepsilon}{2} k \sin \varphi \sin(kx \sin \varphi + kz \cos \varphi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) . \quad (2.3.1)$$

Integrando a equação (2.3.1) entre $t = nT - \tau$ e $t = nT + \tau$, com $\tau \rightarrow 0$, obtemos

$$\Delta p_x = -\int_{nT-\tau}^{nT+\tau} \frac{x dt}{\sqrt{1+x^2+p_x^2}} + \frac{\varepsilon}{2} k \sin \varphi \sin(kx \sin \varphi + kz \cos \varphi) \int_{nT-\tau}^{nT+\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) dt . \quad (2.3.2)$$

Apesar de p_x ser descontínuo no intervalo de integração, essa descontinuidade é finita e a integral de uma função de p_x é contínua. Então, no limite de $\tau \rightarrow 0$, o primeiro termo

é nulo. Já na segunda integral, apenas uma delta está no intervalo de integração. Então ficamos com

$$\Delta p_x = \frac{\varepsilon}{2} k \sin \varphi \sin (kx \sin \varphi + kz \cos \varphi). \quad (2.3.3)$$

Analogamente, para Δp_z temos

$$\Delta p_z = \frac{\varepsilon}{2} k \cos \varphi \sin (kx \sin \varphi + kz \cos \varphi). \quad (2.3.4)$$

Já $\Delta \theta$ e Δz podem ser facilmente calculados também usando uma das equações de Hamilton $dq/dt = \partial H/\partial p$, lembrando que essas variações são calculadas entre duas deltas de Dirac, logo, o termo de acoplamento está ausente. Então

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2I + p_z^2}}. \quad (2.3.5)$$

Como I e p_z são constantes nesse intervalo, obtemos

$$\Delta \theta = \frac{T}{\sqrt{1 + 2I + p_z^2}}, \quad (2.3.6)$$

e, analogamente,

$$\Delta z = \frac{p_z T}{\sqrt{1 + 2I + p_z^2}}. \quad (2.3.7)$$

Finalmente, obtemos o mapa que é a solução para a dinâmica gerada pelo Hamiltoniano (2.2.5)

$$I_{n+1} = I_n \sin^2 \theta_n + \frac{1}{2} \left[\sqrt{2I_n} \cos \theta_n + \frac{1}{2} \varepsilon k \sin \varphi f(I_n, \theta_n, z_n) \right]^2, \quad (2.3.8a)$$

$$\theta_{n+1} = \arctan \left[\frac{2\sqrt{2I_n} \sin \theta_n}{2\sqrt{2I_n} \cos \theta_n + \varepsilon k \sin \varphi f(I_n, \theta_n, z_n)} \right] + g(I_{n+1}, p_{z_{n+1}}), \quad (2.3.8b)$$

$$p_{z_{n+1}} = p_{z_n} + \frac{1}{2} \varepsilon k \cos \varphi f(I_n, \theta_n, z_n), \quad (2.3.8c)$$

$$z_{n+1} = z_n + g(I_{n+1}, p_{z_{n+1}}) p_{z_{n+1}}, \quad (2.3.8d)$$

onde

$$f(I_n, \theta_n, z_n) = \sin \left(k\sqrt{2I_n} \sin \theta_n \sin \varphi + kz_n \cos \varphi \right),$$

$$g(I_n, p_{z_n}) = \frac{T}{\sqrt{1 + 2I_n + p_{z_n}^2}}.$$

Vale ressaltar que esse mapa é exato, sendo válido para qualquer valor de amplitude da onda. No próximo capítulo investigaremos a dinâmica gerada por esse mapa.

Capítulo 3

Propriedades e Simulação do Mapa

3.1 Propriedades

Antes de partir para a simulação do mapa (2.3.8), é interessante analisar algumas de suas propriedades. Primeiramente, notamos que colocando $\varphi = \pi/2$ no mapa, obtemos o mesmo mapa deduzido na referência [14], em que o sistema analisado é o mesmo, mas com onda perpendicular ao campo magnético.

Outra propriedade é que o mapa pode ser colocado numa forma totalmente explícita, no sentido de que podemos determinar todas as variáveis dinâmicas no instante $n + 1$ com base apenas no valor dessas variáveis no instante n . Para tal, basta substituir nas equações (2.3.8b) e (2.3.8d) as equações (2.3.8a) e (2.3.8c). O mapeamento (2.3.8) também preserva o volume ocupado no espaço de fase, ou seja, a matriz Jacobiana tem norma unitária.

Outra propriedade é que o mapeamento não apresenta pontos fixos hiperbólicos, impossibilitando técnicas de análise linear em torno desses pontos, como feito na referência [14]. O fato que o sistema tem 2 graus de liberdade espaciais pode sugerir o uso do mapa de Poincaré para análise do sistema. Contudo, como o Hamiltoniano (2.2.5) depende explicitamente do tempo, H não se conserva, assim o cenário não é apropriado para o emprego dessa técnica.

3.2 Simulação

A simulação consiste em iterar o mapa a partir de uma condição inicial e obter o valor das quantidades relevantes a cada passo.

Um ponto importante é que estamos interessados em partículas que começam com baixa energia. A relevância vem da possibilidade de aceleração ou aquecimento dessas partículas inicialmente pouco energéticas. Para tal, consideramos $I_0 \approx 0$ e $p_{z_0} = 0$ na simulação.

Da análise dessas partículas, surge um fenômeno que será descrito a seguir. A fig. 3.1 mostra a máxima energia que uma partícula alcança durante sua trajetória, ($E_{max} = H_{0max}$ com $H_0 = \sqrt{1 + 2I + p_z^2}$), em função do ângulo que o vetor de onda faz com o campo magnético φ . Como condição inicial, usamos $I_0 = 10^{-6}$, $\theta_0 = 0$, $p_{z_0} = 0$ e $z_0 = 0,75\pi/k_z$ e como parâmetros $\varepsilon = 0,05$, $T = 2\pi$ e $k = 1$ com $k_z = k \cos \varphi$. Inicialmente, quando o vetor de onda é quase paralelo ao campo magnético, o ganho de energia é pouco significativo. À medida que aumentamos φ , E_{max} aumenta lenta e continuamente até um certo ângulo crítico φ_{crit} , quando ocorre uma variação brusca - nesse ângulo a onda passa a ceder uma grande quantidade de energia para as partículas.

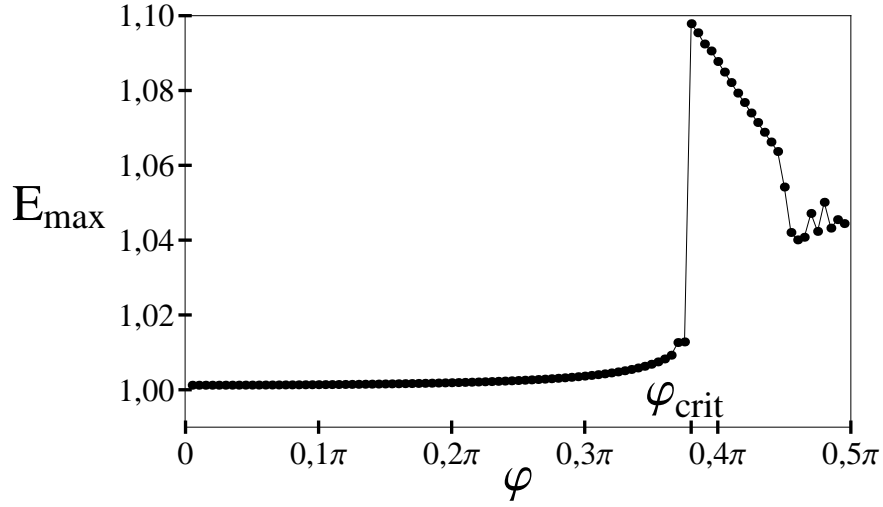


Fig. 3.1: $E_{max} \times \varphi$ para $I_0 = 10^{-6}$, $\theta_0 = 0$, $p_{z_0} = 0$, $z_0 = 0,75\pi/k_z$, $\varepsilon = 0,05$, $T = 2\pi$ e $k = 1$.

É pertinente avaliar como as condições iniciais e os parâmetros afetam esse fenômeno. Como citado anteriormente, estamos interessados em partículas que têm pouca energia inicialmente, então I_0 e p_{z_0} devem ter valores muito próximos a zero. Já o valor de θ_0 parece não ter importância, uma vez que o resultado foi o mesmo para qualquer valor usado. Para diferentes valores de z_0 , o fenômeno continua existindo, entretanto acontecendo para valores diferentes de φ_{crit} e E_{max} . É importante notar que utilizamos π/k_z como referência para z_0 . Como k_z depende de φ , para cada ângulo na figura 3.1 temos z_0 diferente - no próximo capítulo mostraremos por que essa é a maneira adequada de definir a condição inicial.

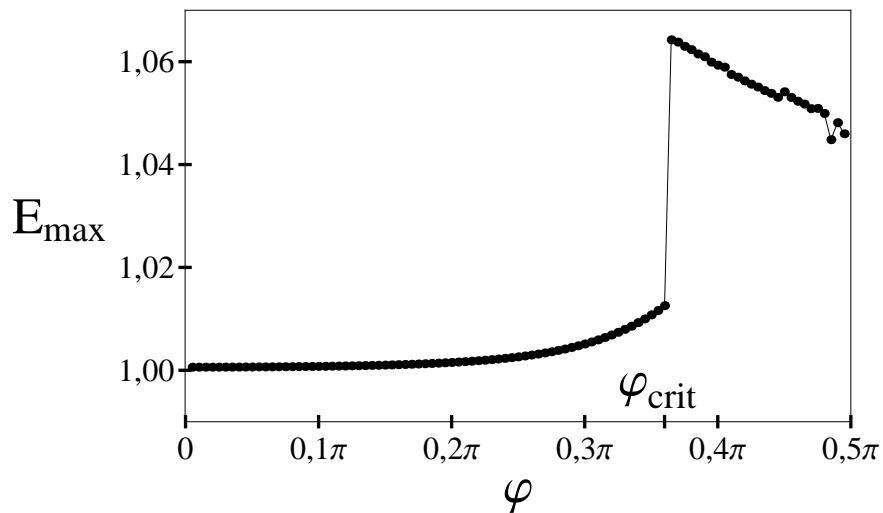


Fig. 3.2: $E_{max} \times \varphi$ para $I_0 = 10^{-7}$, $\theta_0 = 0$, $p_{z_0} = 0$, $z_0 = 0,85\pi/k_z$, $\varepsilon = 0,07$, $T = 2\pi(1 + 1/100)$ e $k = 0,5$.

Quanto aos parâmetros, para esse fenômeno acontecer, o período T precisa estar em torno

de um múltiplo do período de cíclotron ($T \approx 2\pi n$). Por hora, focamos no caso $T = 2\pi$. O valor de ε deve ser compatível com o fato de que consideramos a onda uma perturbação. Adicionalmente, a teoria que desenvolveremos no próximo capítulo requer que k seja um valor relativamente pequeno ($k \leq 1$), como será mostrado. Em todo o caso, para $T \approx 2\pi n$ e ε pequeno, teremos o mesmo tipo de comportamento, mas para valores diferentes de φ_{crit} e E_{max} , ou seja, nessas condições acontecerá a variação abrupta da energia como função do ângulo. Na figura 3.2 mostramos novamente E_{max} em função de φ para um diferente conjunto de parâmetros e condições iniciais. Notamos que, de forma geral, o comportamento é o mesmo.

Um ponto importante é que essa variação abrupta também ocorre para I_{max} e p_{zmax}^2 . A figura 3.3 mostra I_{max} e p_{zmax}^2 em função de φ para os mesmos parâmetros e condições iniciais usadas na figura 3.1. A partir de agora, focaremos no comportamento de I_{max} , pois é o mais útil para efeitos comparativos com nossas teorias a ser desenvolvidas.

O objetivo desse trabalho é explicar o mecanismo que leva a essa variação abrupta na energia como função do ângulo φ , o que será feito no próximo capítulo.

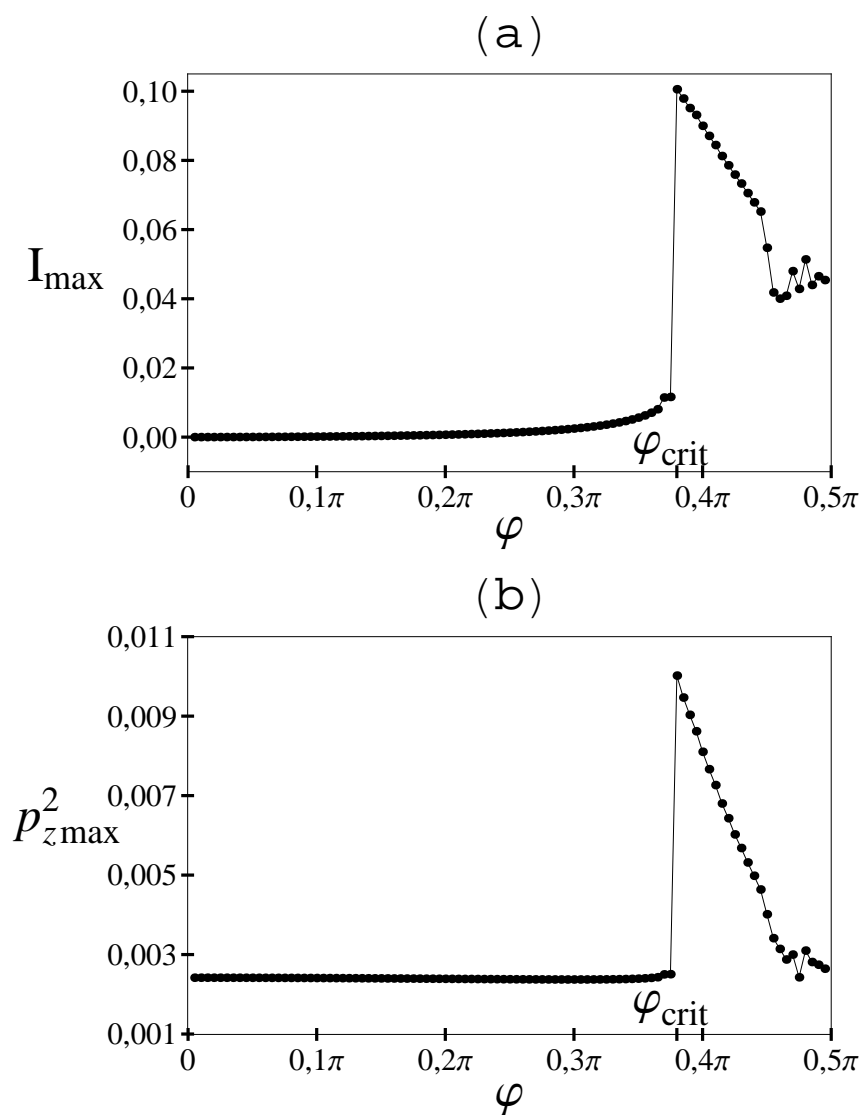


Fig. 3.3: Em (a) temos $I_{\max} \times \varphi$ e em (b) $p_{z\max}^2 \times \varphi$ para $I_0 = 10^{-6}$, $\theta_0 = 0$, $p_{z_0} = 0$, $z_0 = 0,75\pi/k_z$, $\varepsilon = 0,05$, $T = 2\pi$ e $k = 1$.

Capítulo 4

Formas normais e Resultados

4.1 Expansão do Hamiltoniano

Como dito no capítulo anterior, um dos grandes problemas do Hamiltoniano (2.2.5) é ele depender do tempo. Por isso, faremos a decomposição do Hamiltoniano em sua forma normal na esperança que o Hamiltoniano nessa forma seja apropriado para descrever o sistema e não seja função do tempo.

Começamos reconhecendo a seguinte identidade

$$\cos(a \sin \theta + b) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(a) \cos(l\theta + b) , \quad (4.1.1)$$

onde J_l é a função de Bessel de primeira espécie. Também usamos o processo inverso ao realizado da equação (2.1.3) para a equação (2.1.4), ou seja, transformamos as deltas de Dirac em cossenos como segue

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) . \quad (4.1.2)$$

O Hamiltoniano (2.2.5) escrito utilizando as expansões (4.1.1) e (4.1.2) é

$$H = \sqrt{1 + 2I + p_z^2} + \frac{\varepsilon}{2T} \sum_{l,n} J_l(k_x \sqrt{2I}) \cos(l\theta + k_z z) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) , \quad (4.1.3)$$

onde usamos a notação $k_x = k \sin \varphi$ e $k_z = k \cos \varphi$.

Podemos colocar a equação (4.1.3) em uma forma mais conveniente usando a relação do cosseno da soma de arcos e o fato de que a função seno é ímpar. Obtemos

$$H = \sqrt{1 + 2I + p_z^2} + \frac{\varepsilon}{2T} \sum_{l,n} J_l(k_x \sqrt{2I}) \cos\left(l\theta + k_z z + \frac{2\pi nt}{T}\right) . \quad (4.1.4)$$

Até agora, o Hamiltoniano está exato. Falta-nos investigar quais pares de harmônicos (l, n) são os mais relevantes para a expansão, podendo assim finalmente aproximar o Hamiltoniano. Também, se considerarmos um regime em que $k_x \sqrt{2I} \ll 1$, apenas os menores valores de $|l|$ precisam ser levados em conta.

Vamos investigar independentemente as dinâmicas transversal e longitudinal. Começamos procurando quais harmônicos são importantes para descrever o movimento $z \times p_z$ no espaço de fase. Para tal, partimos do seguinte Hamiltoniano,

$$H_{l,n} = \sqrt{1 + 2I + p_z^2} + \frac{\varepsilon}{2T} J_l \left(k_x \sqrt{2I} \right) \cos \left[k_z \left(z + \frac{l\theta}{k_z} + \frac{2\pi nt}{Tk_z} \right) \right], \quad (4.1.5)$$

que é a equação (4.1.4) sem a soma, pois vamos testar individualmente quais harmônicos são relevantes, e escrevemos a seguinte função geratriz

$$F(z, \bar{p}_z, \theta, \bar{I}, t) = \left(z + \frac{l\theta}{k_z} + \frac{2\pi nt}{Tk_z} \right) \bar{p}_z + \theta \bar{I}. \quad (4.1.6)$$

Essa função produz a seguinte transformação canônica

$$p_z = \bar{p}_z, \quad (4.1.7a)$$

$$I = \frac{l}{k_z} \bar{p}_z + \bar{I}, \quad (4.1.7b)$$

$$\bar{z} = \left(z + \frac{l\theta}{k_z} + \frac{2\pi nt}{Tk_z} \right), \quad (4.1.7c)$$

$$\bar{\theta} = \theta, \quad (4.1.7d)$$

$$\bar{H} = H + \frac{2\pi n \bar{p}_z}{Tk_z}, \quad (4.1.7e)$$

onde as variáveis com barra são as “novas”. O novo Hamiltoniano fica

$$\bar{H}_{l,n} = \sqrt{1 + 2 \left(\frac{l}{k_z} \bar{p}_z + \bar{I} \right) + \bar{p}_z^2} + \frac{2\pi n \bar{p}_z}{Tk_z} + \frac{\varepsilon}{2T} J_l \left(k_x \sqrt{2 \left(\frac{l}{k_z} \bar{p}_z + \bar{I} \right)} \right) \cos(k_z \bar{z}). \quad (4.1.8)$$

Como o Hamiltoniano (4.1.8) não depende de $\bar{\theta}$ e t , \bar{I} e \bar{H} são quantidades conservadas. A figura 4.1 mostra o espaço de fase $\bar{z} \times \bar{p}_z$ gerado por esse Hamiltoniano para alguns valores de l e n .

Observando a fig. 4.1, fica claro que desses harmônicos o único ressonante é o da figura 4.1(a), ou seja, $l = n = 0$. Também foi testada uma ampla variedade de harmônicos, além dos presentes na figura, e, de fato, esse é o único ressonante. Podemos descrever a maior parte do movimento no plano $\bar{z} \times \bar{p}_z$ com apenas o termo $l = 0$ e $n = 0$ no Hamiltoniano (4.1.4).

Outro fato a ser notado é a forma do espaço de fase na fig. 4.1(a), que é muito similar a de um pêndulo com ponto fixo situado em $(\bar{z}^*, \bar{p}_z^*) = (\pi/k_z, 0)$. Essa é razão por que colocamos as condições iniciais em termos de π/k_z ao simular o mapa. Assim sabemos que estamos proporcionalmente afastados desse ponto fixo. Por exemplo, se $k = 1$ e escolhermos $z_0 = 3$ como condição inicial, para um valor de $\varphi \approx 0$, teremos a condição inicial muito próxima ao ponto fixo. Enquanto que para o caso da fig. 4.1(a), com $\varphi = 0, 4\pi$, essa condição inicial está próxima da separatriz.

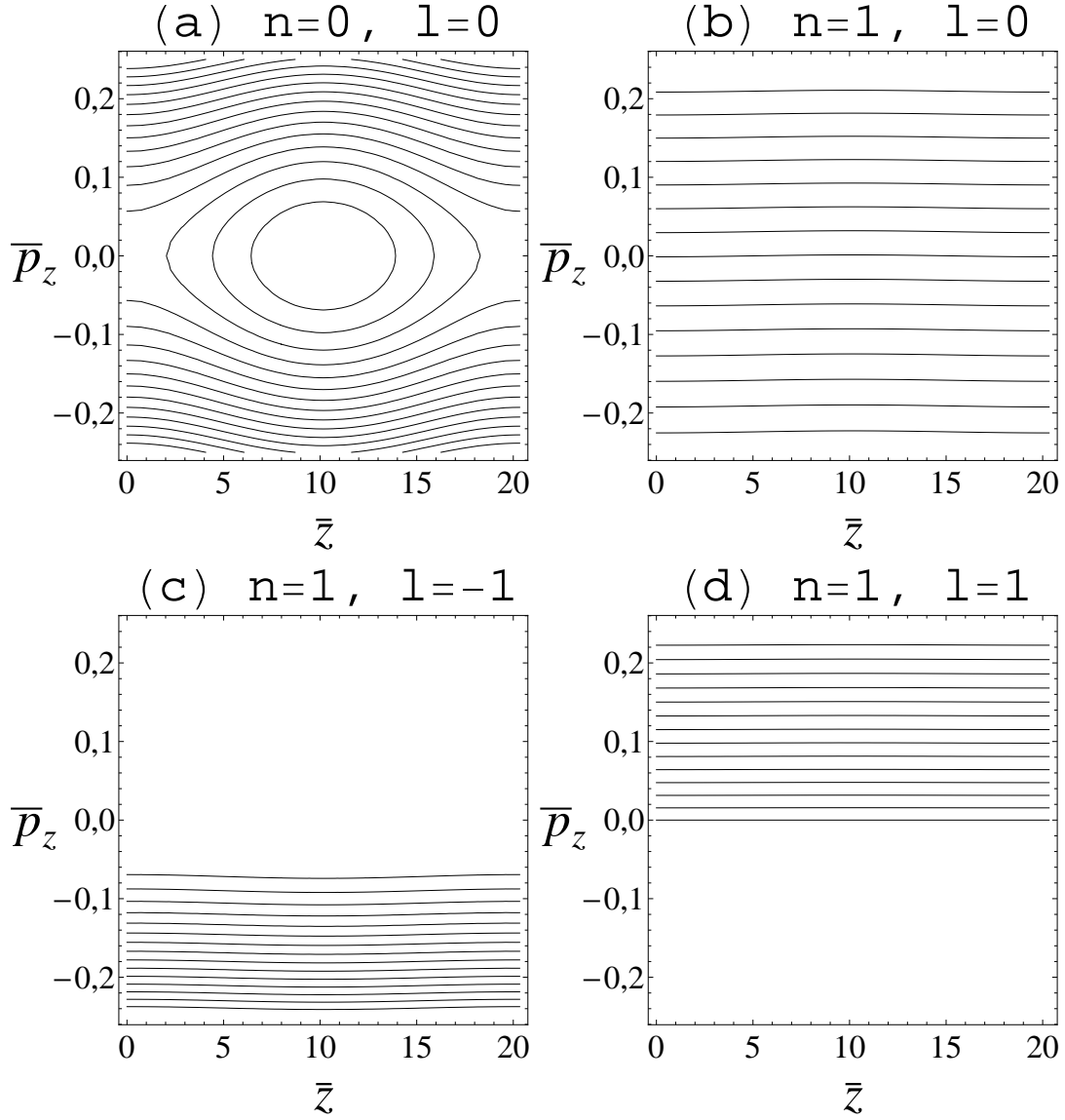


Fig. 4.1: Espaço de fase do Hamiltoniano (4.1.8). Usamos $\bar{I} = 10^{-6}$, $k = 1$, $\varepsilon = 0,05$, $T=2\pi$ e $\varphi = 0,4\pi$.

Agora precisamos descobrir quais pares de harmônicos são importantes para descrever o movimento no plano $\theta \times I$ do espaço de fase. Para tal, usaremos a mesma técnica. Começamos escrevendo o Hamiltoniano (4.1.5) como

$$H_{l,n} = \sqrt{1 + 2I + p_z^2} + \frac{\varepsilon}{2T} J_l \left(k_x \sqrt{2I} \right) \cos \left[l \left(\theta + \frac{k_z z}{l} + \frac{2\pi n t}{lT} \right) \right]. \quad (4.1.9)$$

A função geratriz conveniente nesse caso é

$$F(z, \bar{p}_z, \theta, \bar{I}, t) = \left(\theta + \frac{k_z z}{l} + \frac{2\pi n t}{lT} \right) \bar{I} + z \bar{p}_z, \quad (4.1.10)$$

e essa função gera a seguinte transformação canônica

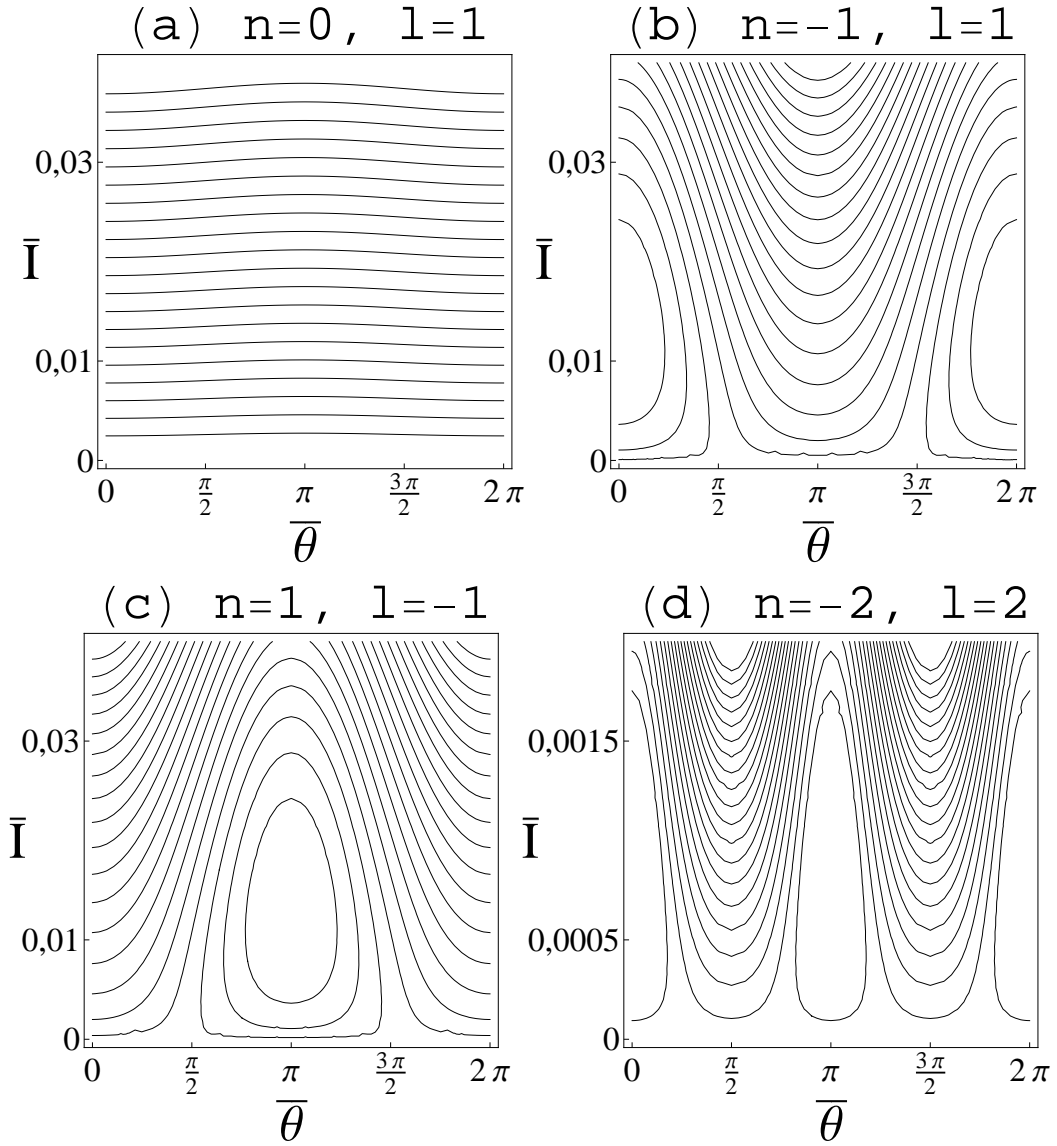


Fig. 4.2: Espaço de fase do Hamiltoniano (4.1.12). Usamos $k = 1$, $\varepsilon = 0,05$, $T=2\pi$, $\varphi = 0, 4\pi$ e $\bar{p}_z = -10^{-6}k_z/l$.

$$I = \bar{I}, \quad (4.1.11a)$$

$$p_z = \bar{p}_z + \frac{k_z \bar{I}}{l}, \quad (4.1.11b)$$

$$\bar{\theta} = \left(\theta + \frac{k_z z}{l} + \frac{2\pi n t}{lT} \right), \quad (4.1.11c)$$

$$\bar{z} = z, \quad (4.1.11d)$$

$$\bar{H} = H + \frac{2\pi n \bar{I}}{lT}. \quad (4.1.11e)$$

O novo Hamiltoniano fica

$$\bar{H}_{l,n} = \sqrt{1 + 2\bar{I} + \left(\bar{p}_z + \frac{k_z \bar{I}}{l}\right)^2} + \frac{2\pi n \bar{I}}{lT} + \frac{\varepsilon}{2T} J_l \left(k_x \sqrt{2\bar{I}}\right) \cos(l\bar{\theta}) . \quad (4.1.12)$$

Esse Hamiltoniano não depende de t e \bar{z} , então \bar{H} e \bar{p}_z são conservados. A fig. 4.2 mostra o espaço de fase $\bar{\theta} \times \bar{I}$ para alguns valores de l e n .

Nesse caso, temos pelo menos dois pares de harmônicos importantes, como mostra a fig. 4.2, $n = -1, l = 1$ e $n = 1, l = -1$, em contraste com o caso $\bar{z} \times \bar{p}_z$ em que apenas para $n = 0, l = 0$ temos ressonância. De fato, sempre que $l = -n$, o espaço de fase apresenta uma ou mais ressonância(s). Entretanto, precisamos levar em conta apenas os menores valores de $|l|$, pois, como vemos, comparando as figuras 4.2(c) e 4.2(d), a região ressonante passa a ser cada vez menor. Considerando apenas $|l| = 1$, os resultados já são muito bons, mas levando em conta $|l| = 2$ temos resultados ainda mais precisos. Novamente, apesar de termos mostrado apenas quatro pares de harmônicos na fig. 4.2, testamos para uma ampla variedade e constatamos que $l = -n$ são os casos importantes. Por fim, o Hamiltoniano levando em conta os termos mais importantes fica

$$\begin{aligned} H = \sqrt{1 + 2I + p_z^2} + \frac{\varepsilon}{2T} \left\{ J_0 \left(k_x \sqrt{2I}\right) \cos(k_z z) \right. \\ + J_1 \left(k_x \sqrt{2I}\right) \left[\cos \left(k_z z + \theta - \frac{2\pi t}{T}\right) - \cos \left(k_z z - \theta + \frac{2\pi t}{T}\right) \right] \\ \left. + J_2 \left(k_x \sqrt{2I}\right) \left[\cos \left(k_z z + 2\theta - \frac{4\pi t}{T}\right) + \cos \left(k_z z - 2\theta + \frac{4\pi t}{T}\right) \right] \right\} . \quad (4.1.13) \end{aligned}$$

O Hamiltoniano (4.1.13) é a forma normal mais simples possível para estudar a variação abrupta da energia com o ângulo φ . Entretanto, esse Hamiltoniano não é integrável e mantém a interação longitudinal-transversal, por isso investigaremos soluções numéricas na próxima seção.

4.2 Soluções numérica do Hamiltoniano aproximado

Depois de todo o esforço para achar uma expressão aproximada para o Hamiltoniano, resta-nos mostrar por que o Hamiltoniano (4.1.13) é mais conveniente que o (2.2.5). Começamos escrevendo a seguinte função geratriz

$$F(\theta, \bar{I}, z, \bar{p}_z, t) = \left(\theta - \frac{2\pi t}{T}\right) \bar{I} + z \bar{p}_z , \quad (4.2.1)$$

que produz a seguinte transformação canônica

$$I = \bar{I} , \quad (4.2.2a)$$

$$p_z = \bar{p}_z, \quad (4.2.2b)$$

$$\bar{\theta} = \left(\theta - \frac{2\pi t}{T} \right), \quad (4.2.2c)$$

$$\bar{z} = z, \quad (4.2.2d)$$

$$\bar{H} = H - \frac{2\pi \bar{I}}{T}, \quad (4.2.2e)$$

e coloca o novo Hamiltoniano na seguinte forma

$$\begin{aligned} H = \sqrt{1 + 2I + p_z^2} - \frac{2\pi I}{T} + \frac{\varepsilon}{2T} \left\{ J_0 \left(k_x \sqrt{2I} \right) \cos(k_z z) \right. \\ \left. + J_1 \left(k_x \sqrt{2I} \right) [\cos(k_z z + \theta) - \cos(k_z z - \theta)] \right. \\ \left. + J_2 \left(k_x \sqrt{2I} \right) [\cos(k_z z + 2\theta) + \cos(k_z z - 2\theta)] \right\}, \quad (4.2.3) \end{aligned}$$

onde omitimos as barras nas variáveis transformadas para simplificar a notação. O Hamiltoniano (4.2.3) é independente do tempo, portanto, conservado. Tomando apenas esses termos as equações de movimento geradas não estarão mais na forma de um mapa. De fato, as equações de Hamilton a serem resolvidas são

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2I + p_z^2}} - \frac{2\pi}{T} - \frac{\varepsilon k_x}{2\sqrt{2IT}} \left\{ J_1 \left(k_x \sqrt{2I} \right) \cos(k_z z) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[J_0 \left(k_x \sqrt{2I} \right) - J_2 \left(k_x \sqrt{2I} \right) \right] [\cos(k_z z + \theta) - \cos(k_z z - \theta)] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[J_1 \left(k_x \sqrt{2I} \right) - J_3 \left(k_x \sqrt{2I} \right) \right] [\cos(k_z z + 2\theta) + \cos(k_z z - 2\theta)] \right\}, \quad (4.2.4a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I} = \frac{\varepsilon}{2T} \left\{ J_1 \left(k_x \sqrt{2I} \right) [\sin(k_z z + \theta) + \sin(k_z z - \theta)] \right. \\ \left. + 2J_2 \left(k_x \sqrt{2I} \right) [\sin(k_z z + 2\theta) - \sin(k_z z - 2\theta)] \right\}, \quad (4.2.4b) \end{aligned}$$

$$\dot{z} = \frac{p_z}{\sqrt{1 + 2I + p_z^2}}, \quad (4.2.4c)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_z = \frac{\varepsilon k_z}{2T} \left\{ J_0 \left(k_x \sqrt{2I} \right) \sin(k_z z) \right. \\ \left. + J_1 \left(k_x \sqrt{2I} \right) [\sin(k_z z + \theta) - \sin(k_z z - \theta)] \right. \\ \left. + J_2 \left(k_x \sqrt{2I} \right) [\sin(k_z z + 2\theta) + \sin(k_z z - 2\theta)] \right\}. \quad (4.2.4d) \end{aligned}$$

Usamos o método de Runge-Kutta-Verner de 5ª e 6ª ordem com passo variável para integrar essas equações diferenciais acopladas. Para realizar a integração, seguimos os seguintes passos

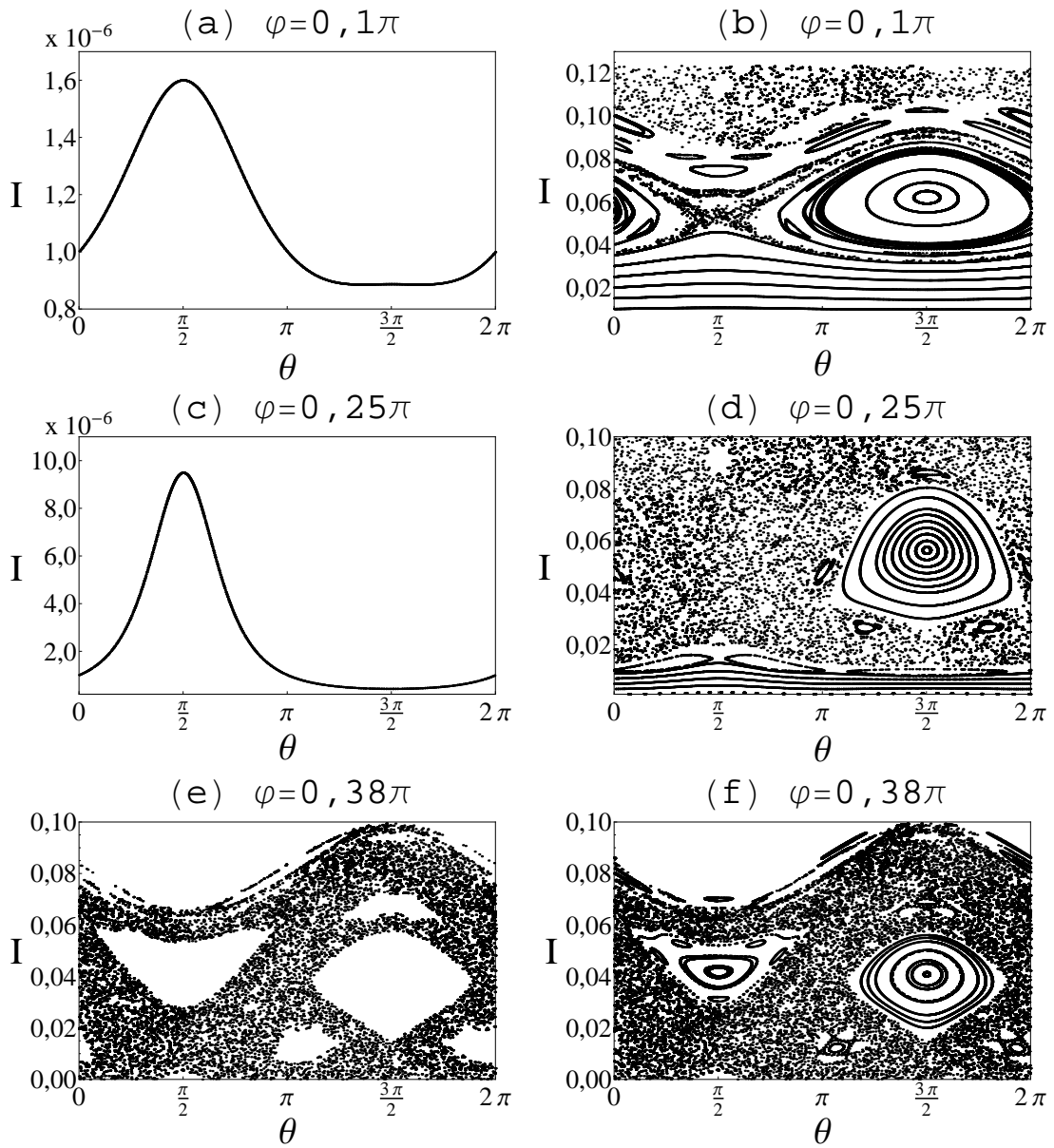


Fig. 4.3: Mapa de Poincaré para vários valores de φ com parâmetros $\varepsilon = 0,05$, $T = 2\pi$ e $k = 1$. Na coluna da esquerda temos apenas uma condição inicial $I_0 = 10^{-6}$, $\theta_0 = 0$, $p_{z_0} = 0$, $z_0 = 0,75\pi/k_z$. Notem que a escala é diferente das figuras (a) e (c) para a (e). À direita, temos um retrato mais completo do mapa de Poincaré para cada caso.

- (i) escolhemos os parâmetros ε , T , k e φ ;
- (ii) escolhemos valores de I , θ , p_z e z tais que a energia inicial seja baixa, por exemplo, $I_0 = 10^{-6}$, $\theta_0 = 0$, $p_{z_0} = 0$, $z_0 = 0,75\pi/k_z$, como usado na fig. 3.1, e calculamos o valor de H , que será conservado;
- (iii) olhando a fig. 4.1(a), notamos que o movimento de p_z é oscilatório em torno de $p_z = 0$,

por isso escolhemos o plano $p_z = 0$ como seção de Poincaré;

- (iv) todas condições iniciais que utilizamos para gerar o mapa de Poincaré devem ter o mesmo valor de H calculado anteriormente. Para garantir isso, escolhemos $p_{z_0} = 0$ sempre (assim o sistema começa na seção de Poincaré) e, para cada par de θ_0 e I_0 escolhidos, calculamos z_0 usando a equação (4.2.3);
- (v) evoluímos o sistema até o tempo desejado. Construimos o mapa de Poincaré com os pontos em que o sistema cruza a seção de Poincaré com $\dot{p}_z > 0$ (ou, alternativamente, $\dot{p}_z < 0$).

Na fig. 4.3, temos o mapa de Poincaré para três valores de φ usando os mesmos parâmetros da fig. 3.1, ou seja, $\varepsilon = 0,05$, $T = 2\pi$ e $k = 1$. Na coluna da esquerda, integramos apenas uma condição inicial, novamente a mesma usada na fig. 3.1, enquanto, na direita, temos uma visão mais geral da seção de Poincaré.

A fig. 4.3(a) mostra como uma partícula pouco energética, para $\varphi = 0,1\pi$, permanece numa região com valores baixos de I . Na fig. 4.3(b), notamos que para valores de ação até $I \approx 0,035$ o sistema é regular. Para valores maiores de ação, o espaço de fase passa a ficar mais interessante com a presença de uma ilha ressonante bastante significativa, centrada em $\theta = 3\pi/2$ e $I \approx 0,062$, e caos em torno dessa ilha e na região com $I \approx 0,11$.

A fig. 4.3(c) mostra novamente que as partículas inicialmente pouco energéticas ganham pouca energia da onda para $\varphi = 0,25\pi$. Ainda assim, o valor é maior que para $\varphi = 0,1\pi$, concordando com o resultado da simulação do mapa (2.3.8) na fig. 3.1. Na fig. 4.3(d), mostramos um retrato mais completo do mapa de Poincaré. Notamos que o caos, que na fig. 4.3(b) estava na região de $I \approx 0,11$, se espalhou por quase todo espaço de fase. Notamos que ainda há uma região regular para valores até $I \approx 0,015$. A ressonância principal continua presente, mas seu centro foi para um valor menor de ação, a saber $\theta = 3\pi/2$ e $I \approx 0,056$.

Já na fig. 4.3(e), para $\varphi = 0,38\pi > \varphi_{crit}$, observamos que a região caótica, que estava se espalhando pelo espaço de fase, finalmente chegou à região de $I \approx 0$, e as partículas que começam com pouca energia percorrem uma região muito maior do espaço de fase. O máximo valor de I alcançado é de $I \approx 0,0994$, enquanto no sistema completo, como visto na fig. 3.3, é de $I \approx 0,1006$, apresentando um erro pouco significativo. Por fim, na fig. 4.3(f), completamos no mapa de Poincaré as partes em que as partículas de baixa energia não alcançam. Notemos que a ressonância principal continua presente e está centrada em $\theta = 3\pi/2$ e $I \approx 0,041$.

Conseguimos obter uma ideia do comportamento do sistema, achar o valor correto para I_{max} e, de fato, notamos que para $\varphi < \varphi_{crit}$ a onda cede pouca energia para as partículas, enquanto para $\varphi \geq \varphi_{crit}$ há um grande ganho de energia. Entretanto, ainda não temos uma explicação convincente sobre o que acontece quando $\varphi = \varphi_{crit}$ e um jeito de calcular φ_{crit} . Na próxima seção, focaremos nesses problemas.

4.3 Cálculo de φ_{crit}

Para calcular φ_{crit} , precisamos achar a ressonância principal mostrada na fig. 4.3 a partir do Hamiltoniano (4.2.3). Para tanto, notamos que, de acordo com a fig. 3.3, $I \sim |p_z|$, portanto aproximaremos

$$\sqrt{1 + 2I + p_z^2} \approx 1 + I + \frac{p_z^2}{2} - \frac{I^2}{2} . \quad (4.3.1)$$

Também vamos considerar que $k_x \sqrt{2I} \ll 1$, então,

$$J_0(k_x \sqrt{2I}) \approx 1 , \quad (4.3.2a)$$

$$J_1(k_x \sqrt{2I}) \approx \frac{k_x \sqrt{2I}}{2} , \quad (4.3.2b)$$

$$J_2(k_x \sqrt{2I}) \approx 0 . \quad (4.3.2c)$$

Substituindo as aproximações (4.3.1) e (4.3.2) no Hamiltoniano (4.2.3), obtemos

$$H = 1 + \frac{p_z^2}{2} - \frac{I^2}{2} + \left(1 - \frac{2\pi}{T}\right) I + \frac{\varepsilon}{2T} \cos(k_z z) + \frac{\varepsilon k_x \sqrt{2I}}{4T} [\cos(k_z z + \theta) - \cos(k_z z - \theta)] . \quad (4.3.3)$$

Como estamos focados no caso $T = 2\pi$, o termo em I desaparece. Continuaremos usando T como se fosse genérico, mas está subentendido que as próximas equações só valem rigorosamente quando $T = 2\pi$. Entretanto, a generalização para o caso em que $T \neq 2\pi$ é fácil e será comentada quando apropriado. Notamos também que a constante aditiva não faz diferença para gerar as equações de movimento. Então, o Hamiltoniano (4.3.3) fica

$$H = \frac{p_z^2}{2} + \frac{\varepsilon}{2T} \cos(k_z z) - \frac{I^2}{2} + \frac{\varepsilon k_x \sqrt{2I}}{4T} [\cos(k_z z + \theta) - \cos(k_z z - \theta)] . \quad (4.3.4)$$

Agora, dividiremos esse Hamiltoniano em duas partes

$$H = H_\theta + H_z , \quad (4.3.5)$$

onde

$$H_\theta = -\frac{I^2}{2} + \frac{\varepsilon k_x \sqrt{2I}}{4T} [\cos(k_z z + \theta) - \cos(k_z z - \theta)] , \quad (4.3.6a)$$

$$H_z = \frac{p_z^2}{2} + \frac{\varepsilon}{2T} \cos(k_z z) . \quad (4.3.6b)$$

Resolveremos, então, a dinâmica gerada pelo Hamiltoniano (4.3.6b), na esperança de descobrir uma forma aproximada para $z(t)$ e substituí-la na equação (4.3.6a). Basicamente estamos supondo que o movimento no plano $z \times p_z$ do espaço de fase é independente do movimento no plano $\theta \times I$ e, quanto melhor a validade dessa aproximação, melhor será o resultado para localizar a ressonância.

Afim de obter uma solução analítica para o movimento $z \times p_z$, vamos fazer uma aproximação válida para $z - \pi/k_z \approx 0$ no Hamiltoniano (4.3.6b), a saber

$$H_z = \frac{p_z^2}{2} + \frac{\varepsilon k_z^2}{4T} \left(z - \frac{\pi}{k_z} \right)^2 . \quad (4.3.7)$$

As equações de Hamilton são

$$\dot{z} = \frac{\partial H_z}{\partial p_z} = p_z , \quad (4.3.8a)$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H_z}{\partial z} = -\frac{\varepsilon k_z^2}{2T} \left(z - \frac{\pi}{k_z} \right) . \quad (4.3.8b)$$

Derivando uma vez no tempo a equação (4.3.8a) e substituindo o lado direito pela equação (4.3.8b), obtemos

$$\ddot{z} + \frac{\varepsilon k_z^2}{2T} \left(z - \frac{\pi}{k_z} \right) = 0 . \quad (4.3.9)$$

Para sermos coerentes com a simulação do mapa, precisamos resolver essa equação com as seguintes condições iniciais, $p_z = 0$ e $z = \pi/k_z - a$, onde a indica quão afastado do ponto fixo o sistema está inicialmente. No caso da fig. 4.3, que tem $z_0 = 0,75\pi/k_z$, $a = 0,25\pi/k_z$. A solução que satisfaz a equação (4.3.9) e essas condições iniciais é

$$z = \frac{\pi}{k_z} - a \cos(\omega_z t) , \quad (4.3.10)$$

onde

$$\omega_z = \sqrt{\frac{\varepsilon k_z^2}{2T}} . \quad (4.3.11)$$

Substituindo a forma aproximada de z (4.3.10), no Hamiltoniano (4.3.6a), obtemos

$$H_\theta = -\frac{I^2}{2} - \frac{\varepsilon k_x \sqrt{2I}}{4T} \{ \cos [ak_z \cos(\omega_z t) - \theta] - \cos [ak_z \cos(\omega_z t) + \theta] \} . \quad (4.3.12)$$

Vamos agora tentar simplificar o termo em ε da equação (4.3.12), usando a seguinte expansão

$$e^{-ib \cos \alpha} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m(b) e^{im\alpha} . \quad (4.3.13)$$

Partimos de

$$\cos [ak_z \cos(\omega_z t) \mp \theta] = \cos [ak_z \cos(\omega_z t)] \cos \theta \pm \sin [ak_z \cos(\omega_z t)] \sin \theta . \quad (4.3.14)$$

A parte real e a imaginária da equação (4.3.13), já adaptadas para o nosso caso, são respectivamente

$$\cos [ak_z \cos (\omega_z t)] = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m (ak_z) e^{im\omega_z t} \right\} , \quad (4.3.15a)$$

$$\sin [ak_z \cos (\omega_z t)] = -\operatorname{Im} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m (ak_z) e^{im\omega_z t} \right\} . \quad (4.3.15b)$$

Vamos considerar que $ak_z \ll 1$, para justificar o uso de termos somente até $|m| = 1$ na equação (4.3.15). Essa condição implica que estamos próximos ao ponto fixo no plano $z \times p_z$, mesma condição utilizada para chegar na equação (4.3.7). Notamos que se $m = 0$,

$$\begin{aligned} \cos [ak_z \cos (\omega_z t)] &= J_0 (ak_z) , \\ \sin [ak_z \cos (\omega_z t)] &= 0 , \end{aligned}$$

então a equação (4.3.14) para os dois sinais é

$$\cos [ak_z \cos (\omega_z t) \mp \theta] = J_0 (ak_z) \cos \theta ,$$

e, substituindo esse resultado no Hamiltoniano (4.3.12), obtemos

$$H_\theta = -\frac{I^2}{2} ,$$

logo $m = 0$ não é o termo que gera a ressonância.

Substituindo na equação (4.3.14) a equação (4.3.15) para $m = \pm 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \cos [ak_z \cos (\omega_z t) \mp \theta] &= J_1 (ak_z) \sin (\omega_z t) \cos \theta + J_{-1} (ak_z) \sin (\omega_z t) \cos \theta \\ &\pm J_1 (ak_z) \cos (\omega_z t) \sin \theta \mp J_{-1} (ak_z) \cos (\omega_z t) \sin \theta . \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Por fim, podemos colocar a equação (4.3.17) na seguinte forma

$$\cos [ak_z \cos (\omega_z t) \mp \theta] = J_1 (ak_z) [\sin (\omega_z t \pm \theta) - \sin (\omega_z t \mp \theta)] , \quad (4.3.18)$$

então,

$$\begin{aligned} \cos [ak_z \cos (\omega_z t) - \theta] - \cos [ak_z \cos (\omega_z t) + \theta] &= \\ &= 2J_1 (ak_z) [\sin (\theta + \omega_z t) + \sin (\theta - \omega_z t)] . \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

Substituindo esse resultado no Hamiltoniano (4.3.12), obtemos

$$H_\theta = -\frac{I^2}{2} - \frac{\varepsilon k_x \sqrt{2I}}{2T} J_1 (ak_z) [\sin (\theta + \omega_z t) + \sin (\theta - \omega_z t)] . \quad (4.3.20)$$

Resta-nos determinar se o termo $\sin (\theta + \omega_z t)$ ou $\sin (\theta - \omega_z t)$ ou, ambos, são ressonantes. Para tanto, lembramos que a teoria de perturbação para o caso ressonante nos mostra que a ressonância ocorre quando a derivada temporal total do argumento da função oscilatória, aqui no nosso caso o seno, é nula. Ou seja,

$$\dot{\theta} \pm \omega_z = 0 , \quad (4.3.21)$$

onde podemos aproximar $\dot{\theta} = \partial H_0 / \partial I$, com $H_0 = -I^2/2$. Assim, temos

$$I = \pm \omega_z . \quad (4.3.22)$$

Como I precisa ser positivo, apenas o sinal positivo é importante para a ressonância, e essa está centrada num valor de $I \approx \omega_z$. Portanto, o Hamiltoniano com apenas o termo ressonante fica

$$H_\theta = -\frac{I^2}{2} - \frac{\varepsilon k_x \sqrt{2I}}{2T} J_1(ak_z) \sin(\theta + \omega_z t) . \quad (4.3.23)$$

A função geratriz

$$F(\theta, \bar{I}, t) = (\theta + \omega_z t) \bar{I} , \quad (4.3.24)$$

gera a seguinte transformação canônica

$$I = \bar{I} , \quad (4.3.25a)$$

$$\bar{\theta} = \theta + \omega_z t , \quad (4.3.25b)$$

$$\bar{H}_\theta = H_\theta + \omega_z \bar{I} , \quad (4.3.25c)$$

que, quando usada no Hamiltoniano (4.3.23), deixa o novo Hamiltoniano na seguinte forma

$$H_\theta = \omega_z I - \frac{I^2}{2} - \frac{\varepsilon k_x \sqrt{2I}}{2T} J_1(ak_z) \sin \theta , \quad (4.3.26)$$

onde, por simplicidade na notação, omitimos as barras, mas está implícito que as variáveis são as novas.

Podemos generalizar o Hamiltoniano (4.3.26) para $T \approx 2\pi$, notando que a ressonância (4.3.22) vai ser deslocada para

$$I = \omega_z + \left(1 - \frac{2\pi}{T}\right) ,$$

e o novo Hamiltoniano fica

$$H_\theta = \left[\omega_z + \left(1 - \frac{2\pi}{T}\right) \right] I - \frac{I^2}{2} - \frac{\varepsilon k_x \sqrt{2I}}{2T} J_1(ak_z) \sin \theta . \quad (4.3.27)$$

Se o período T for muito diferente do período de ciclotron, como dito no capítulo 3, o fenômeno não acontece mais. Continuaremos focando em $T = 2\pi$, pois esse parece ser o caso mais relevante.

Na fig. 4.4, desenhamos o espaço de fase da dinâmica gerada pelo Hamiltoniano (4.3.26) para $\varepsilon = 0,05$, $k = 1$, $\varphi = 0,1\pi$, $T = 2\pi$ e $a = 0,25\pi/k_z$, valores equivalentes aos usados para construir a fig. 4.3(b). Comparando as duas figuras, notamos que a ressonância principal está centrada aproximadamente na mesma posição, $I \approx 0,062$ para a fig. 4.3(b), e $I \approx 0,060$ para a fig. 4.4. Isso mostra que escolhemos corretamente o termo que causa essa ressonância.

Já na fig. 4.5, o único parâmetro diferente em relação a fig. 4.4 é o valor de φ , que agora é $\varphi = 0,25\pi$, para podermos comparar com a fig. 4.3(d). Notamos que, dessa vez, o centro

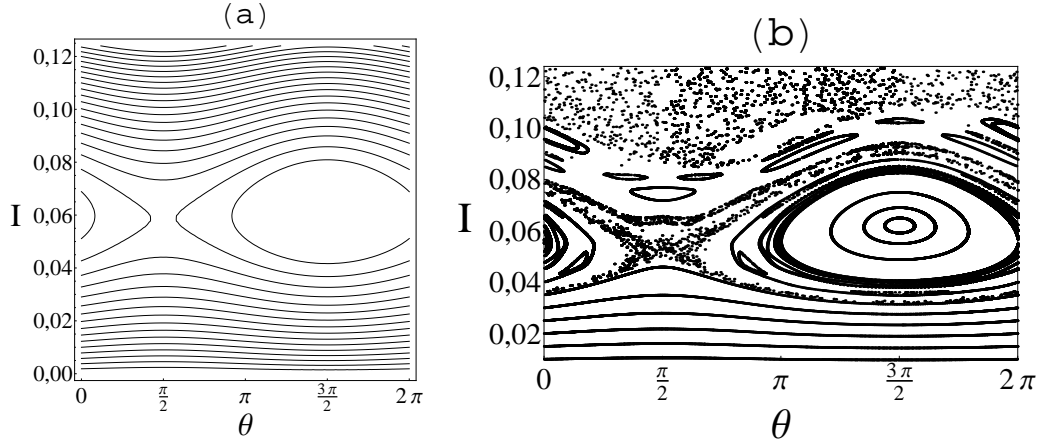


Fig. 4.4: Em (a) temos o espaço de fase gerado pelo Hamiltoniano (4.3.26) para parâmetros $\varepsilon = 0,05$, $k = 1$, $\varphi = 0,1\pi$, $T = 2\pi$ e $a = 0,25\pi/k_z$. Em (b) temos a figura 4.3(b) para fins comparativos.

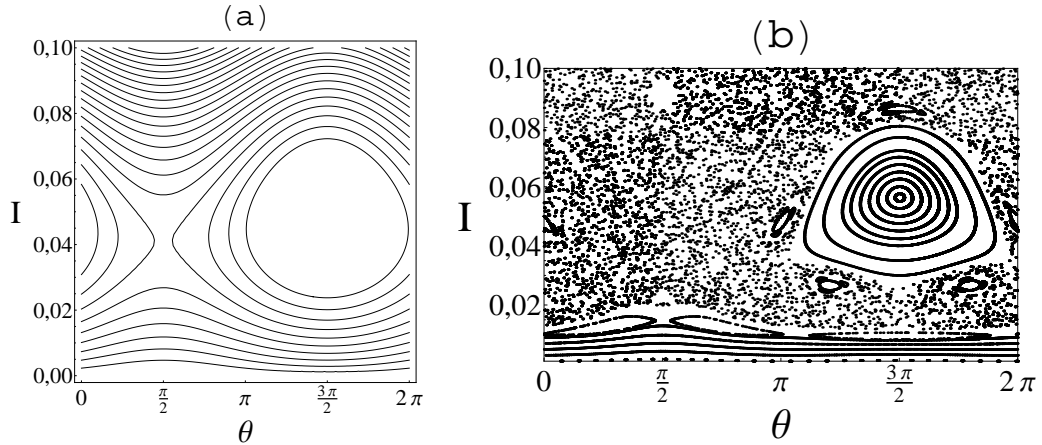


Fig. 4.5: Em (a) temos o espaço de fase gerado pelo Hamiltoniano (4.3.26) para parâmetros $\varepsilon = 0,05$, $k = 1$, $\varphi = 0,25\pi$, $T = 2\pi$ e $a = 0,25\pi/k_z$. Em (b) temos a figura 4.3(d) para fins comparativos.

da ressonância das fig. 4.3(d) e fig. 4.5 estão, respectivamente, em $I \approx 0,056$ e $I \approx 0,047$, ou seja, tem uma diferença bastante apreciável. Isso ocorre pois $a \propto 1/k_z$, então quanto maior o valor de φ , maior o valor de a e a aproximação de pequenas amplitude, usada para aproximar a equação (4.3.6b) na (4.3.7), deixa de ser boa.

Na fig. 4.6, comparamos a equação (4.3.10), que é a forma aproximada de z , com o valor exato de z gerado pelo mapeamento (2.3.8d) para $\varphi = 0,1\pi$ e $\varphi = 0,25\pi$. Em ambos os casos, as soluções saem de sincronia após algum tempo, pois a aproximação de pequena amplitude é apenas razoável para os parâmetros que usamos. Entretanto, é notável que, para $\varphi = 0,1\pi$, a aproximação é melhor que para $\varphi = 0,25\pi$. Enquanto no primeiro caso leva cerca de três períodos para as soluções começarem a ficar significativamente afastadas, no segundo, o mesmo ocorre para dois períodos.

Agora usaremos essas aproximações focando no caso de baixas energias, para entender

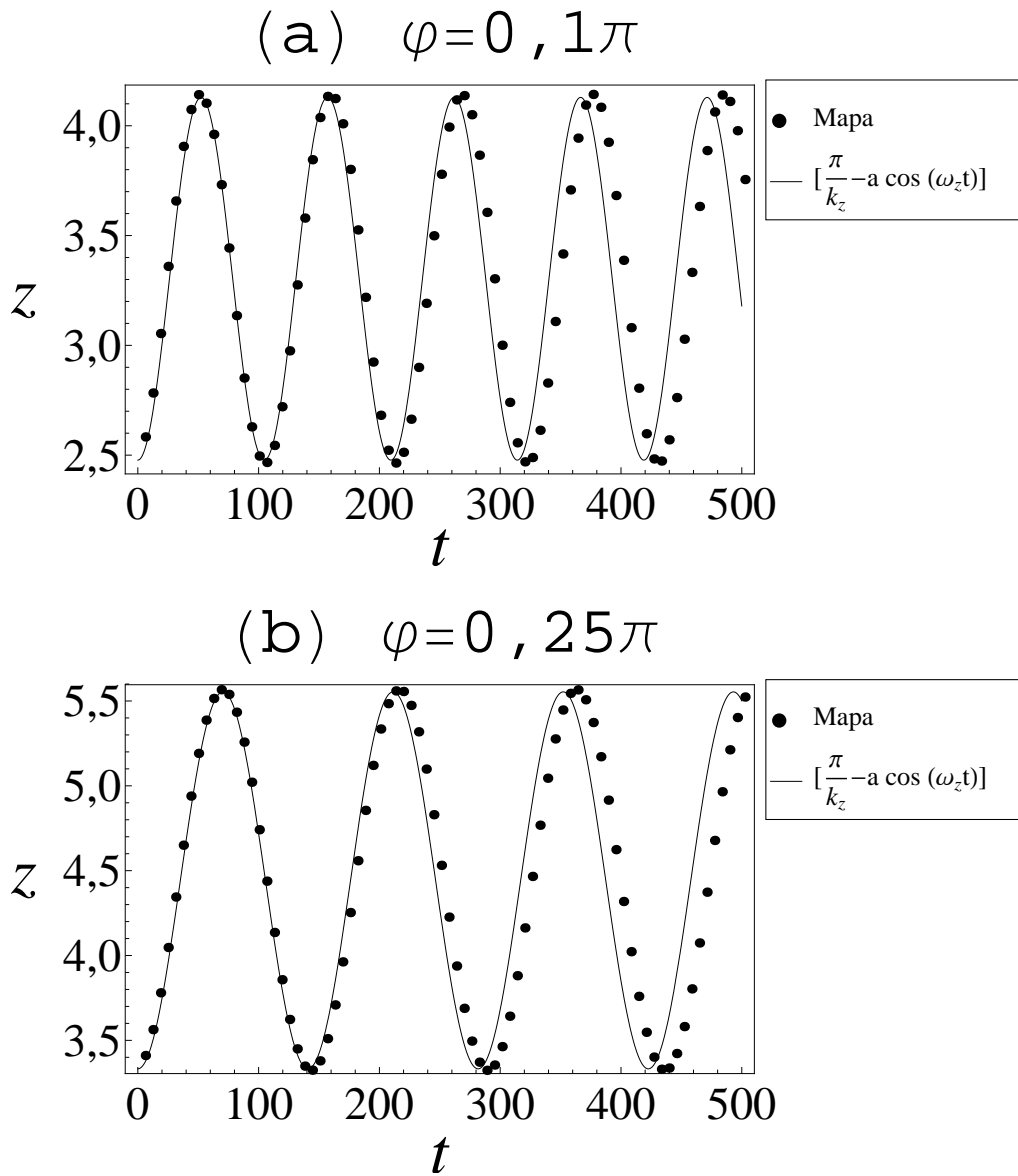


Fig. 4.6: Aproximação de pequena amplitude comparada com o mapa completo. Em (a) temos a comparação para $\varphi = 0, 1\pi$ e em (b) para $\varphi = 0, 25\pi$.

a existência de φ_{crit} e calculá-lo. Ao longo das transformações canônicas (4.2.2) e (4.3.25), a ação I permaneceu a mesma, então usamos como referência para baixas energias $I_0 \rightarrow 0$. Substituindo isso no Hamiltoniano (4.3.26), obtemos que $H_0 \rightarrow 0$, então, como o Hamiltoniano se conserva, passaremos a procurar soluções da equação (4.3.26) com $H = 0$.

Na fig. 4.7, temos as soluções da equação (4.3.26) com $H = 0$ para φ próximo a φ_{crit} . Inicialmente, como vemos na fig. 4.7(a) temos dois ramos que são soluções. Entretanto, as partículas que começam com $I \approx 0$ ficam presas na solução pontilhada. Quando chegamos próximo de φ_{crit} , como vemos na fig. 4.7(b), as duas soluções se aproximam até que em $\varphi = \varphi_{crit}$, como vemos na fig. 4.7(c), elas se tocam. Quando isso acontece, ocorre uma

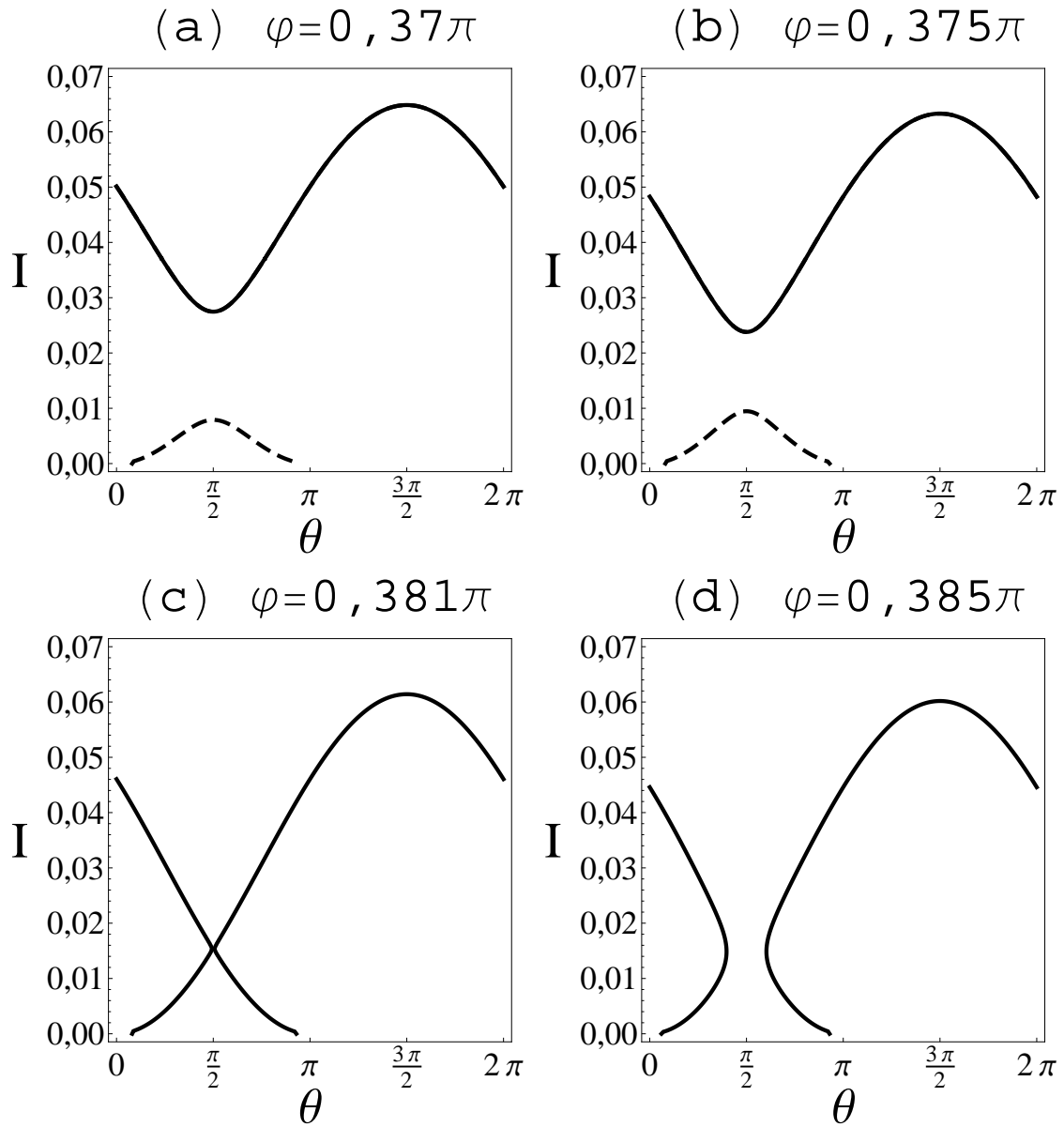


Fig. 4.7: Equação (4.3.26) com $H = 0$ para quatro valores de φ . Em (a) e (b) o valor de φ é menor que φ_{crit} , em (c) $\varphi = \varphi_{crit}$ e em (d) $\varphi > \varphi_{crit}$.

reconexão e os dois ramos se unem e passam a formar a separatriz da ilha ressonante, como vemos na fig. 4.7(d). A partir desse ponto, as partículas que começam com $I \rightarrow 0$ percorrem uma longa excursão no espaço de fase ao longo dessa separatriz.

Agora que explicamos a existência de φ_{crit} , vamos calculá-lo. Olhando a fig. 4.7, notamos que até φ_{crit} a equação (4.3.26) com $H = 0$ e $\theta = \pi/2$ apresenta duas raízes reais e, após, nenhuma. Isso indica que para calcular φ_{crit} , basta descobrir para qual valor de φ a equação

$$\omega_z I - \frac{I^2}{2} - \frac{\varepsilon k_x \sqrt{2I}}{2T} J_1(ak_z) = 0, \quad (4.3.28)$$

deixa de ter raízes reais.

Definindo $y = \sqrt{I}$ e supondo que $I \neq 0$, podemos escrever a equação (4.3.28) como

$$y^3 - 2\omega_z y + \frac{\sqrt{2}\varepsilon k \sin \varphi J_1(ak_z)}{T} = 0. \quad (4.3.29)$$

Lembramos que, ω_z depende de φ e, do jeito que a foi definido, o produto ak_z é independente de φ . A equação (4.3.29) possui três soluções, uma delas é sempre para y negativo, então não existe I real que a satisfaça. Para as outras duas serem iguais, é preciso que o discriminante seja igual a zero, o que implica

$$\left(\frac{\varepsilon k \sin \varphi_{crit} J_1(ak_z)}{\sqrt{2}T} \right)^2 - \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{\varepsilon k^2}{2T}} \cos \varphi_{crit} \right)^3 = 0. \quad (4.3.30)$$

Usando $\varepsilon = 0,05$, $k = 1$, $T = 2\pi$ e $a = 0,25\pi/k_z$, a equação (4.3.30) prevê $\varphi_{crit} = 0,3810\pi$, enquanto a simulação do mapa (2.3.8) nos mostra que $\varphi_{crit} = 0,3755\pi$, ou seja, nossa teoria se mostrou eficiente para calcular o valor de φ_{crit} com uma boa precisão.

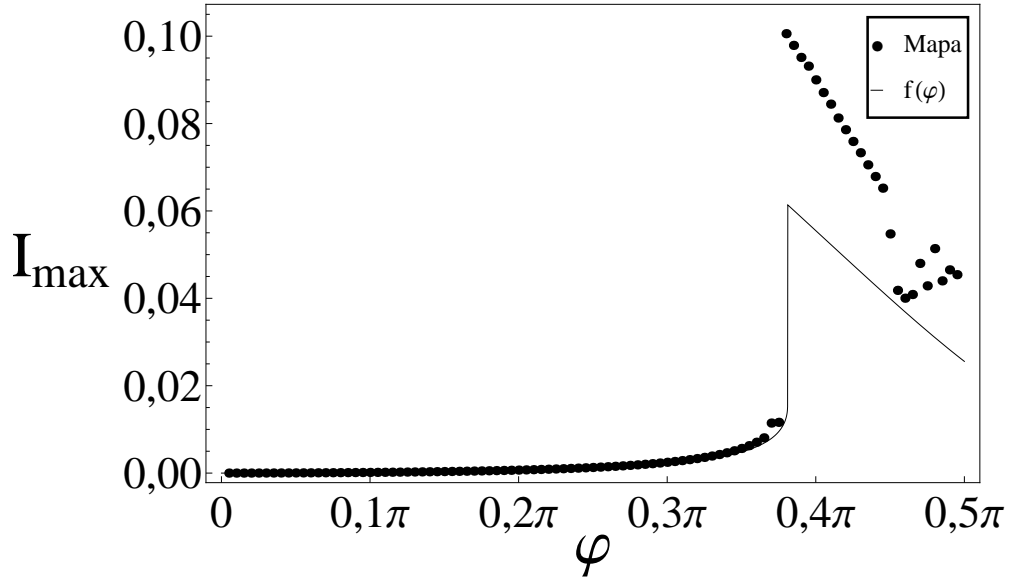


Fig. 4.8: Comparação entre o previsto pelo mapa (2.3.8) e a função $f(\varphi)$.

Para fins comparativos, vamos criar uma função, $f(\varphi)$, que é o máximo valor alcançado pelas partículas de baixa energia. A função é construída como sendo o máximo valor que a curva pontilhada na fig. 4.7 atinge para $\varphi < \varphi_{crit}$, e o máximo valor alcançado pela separatriz mostrada na fig. 4.7(d) para $\varphi > \varphi_{crit}$. Para $\varphi < \varphi_{crit}$, basta calcular as raízes da equação (4.3.29) e ficar com o menor valor positivo. Para $\varphi > \varphi_{crit}$, calculamos as raízes da equação (4.3.26) com $H = 0$ e $\theta = 3\pi/2$, apenas uma delas é real, então ficamos com essa.

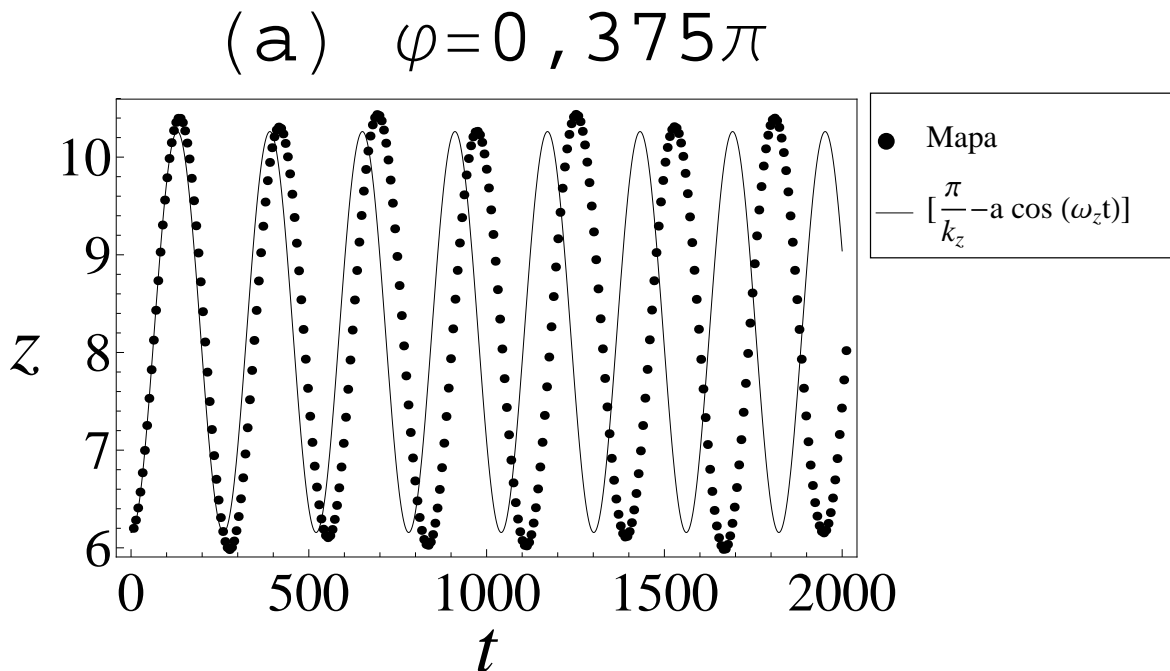
Analisando a fig. 4.8, notamos que até φ_{crit} o mapa e a função $f(\varphi)$ concordam bem. Entretanto, para $\varphi > \varphi_{crit}$, nosso modelo não consegue obter a amplitude correta para I_{max} .

A explicação para essa discrepância pode ser entendida pela análise da fig. 4.9. Notamos que na fig. 4.9(a), desenhada para φ logo antes de φ_{crit} , a aproximação (4.3.5) continua sendo razoável para descrever o movimento em z , pois as frequências do mapa e da aproximação continuam relativamente semelhantes e as amplitudes também.

Já na fig. 4.9(b), para φ ligeiramente maior que φ_{crit} , há uma variação significativa na amplitude máxima e mínima de z com tempo no sistema real. Esse tipo de comportamento não é previsto pela nossa aproximação, pois consideramos que o movimento no plano $z \times p_z$ é independente do movimento em $\theta \times I$, o que resultou num Hamiltoniano similar ao do pêndulo para $z \times p_z$. As soluções confinadas desse Hamiltoniano têm sempre a mesma amplitude máxima e mínima. Como a aproximação (4.3.5) não funciona, isso nos indica que para $\varphi > \varphi_{crit}$ os graus de liberdade interagem fortemente entre si, enquanto para $\varphi < \varphi_{crit}$ essa interação é bem mais fraca.

Outra fonte de erro é a ausência de caos nesse modelo integrável. No sistema completo a presença de caos permite que as partículas alcancem regiões do espaço de fase que não estão previstas nesse modelo simplificado.

Ainda que a aproximação não seja apropriada, ela qualitativamente descreve o que acontece com a máxima amplitude para $\varphi > \varphi_{crit}$, ou seja, que I_{max} vai decrescer com o aumento de φ .



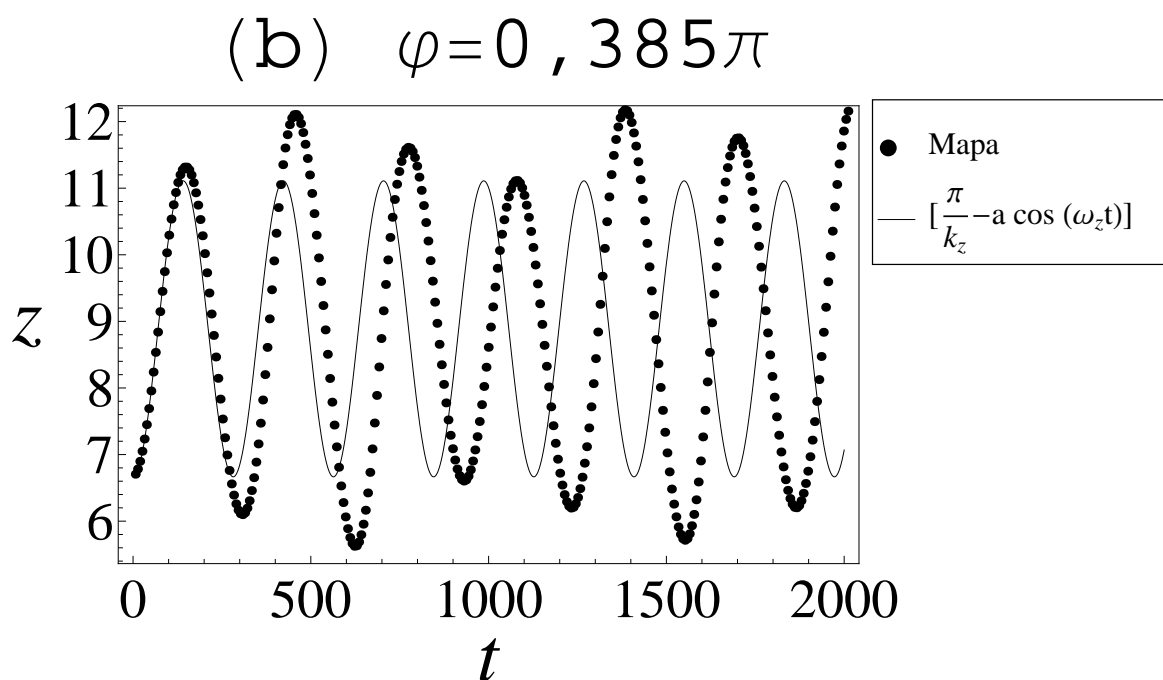


Fig. 4.9: Aproximação de pequena amplitude comparada com o mapa completo. Em (a) temos $\varphi = 0,375\pi$, logo antes de φ_{crit} e em (b) para $\varphi = 0,385\pi$, logo depois de φ_{crit} .

Capítulo 5

Conclusões

Investigamos a interação onda-partícula de um pacote de ondas eletrostáticas com vetor de onda em uma direção arbitrária com as partículas em um plasma magnetizado. Assim como na referência [14], em que a única diferença no modelo para este trabalho é que a onda está perpendicular ao campo magnético, o nosso foco foi nas partículas inicialmente pouco energéticas.

A investigação do mapa nos mostrou que o ângulo que o vetor de onda faz com o campo magnético é essencial para energização das partículas - a escolha adequada do ângulo pode levar a um grande ganho de energia. A variação da energia máxima que o sistema ganha como função de φ apresenta uma descontinuidade, o que foi objeto de estudo desse trabalho. Tal energização acontece mesmo para $T = 2\pi$, enquanto, na referência [14], é necessário que $T > 2\pi$.

Para investigar esse fenômeno, foi necessário aproximar o Hamiltoniano numa forma independente do tempo, pois, como o nosso sistema é de alta dimensionalidade, é necessário a conservação do Hamiltoniano para obtermos a seção de Poincaré em duas dimensões. A análise da seção de Poincaré mostra que o sistema apresenta uma ressonância principal e que o ganho de energia é caótico, então ideal para o aquecimento de partículas.

Para calcular o valor de φ_{crit} , investigamos essa ressonância principal. Para $\varphi < \varphi_{crit}$, foi mostrado que a solução que interessa para as partículas pouco energéticas apresenta dois ramos e as partículas que começam com baixo valor de ação estão presas em um ramo pouco energético. Isso foi comprovado comparando o valor de I_{max} da simulação do mapa com o I_{max} desse ramo. Quando $\varphi = \varphi_{crit}$, ocorre uma reconexão entre esses ramos, que passam a formar a separatriz da ilha ressonante, permitindo assim uma excursão das partículas para outras regiões do espaço de fase.

Bibliografia

- [1] P.K. Shukla, N.N. Rao, M.Y. Yu, and N.L. Tsintsadze. Relativistic nonlinear effects in plasmas. *Physics Reports*, 138(1-2):1 – 149, 1986.
- [2] T. Tajima and J. M. Dawson. Laser electron accelerator. *Phys. Rev. Lett.*, 43:267–270, Jul 1979.
- [3] C. B. Wang, C. S. Wu, and P. H. Yoon. Heating of ions by Alfvén waves via nonresonant interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 96:125001, Mar 2006.
- [4] C. F. F. Karney. Stochastic ion heating by a lower hybrid wave. *Physics of Fluids*, 21(9):1584–1599, 1978.
- [5] Nathaniel J. Fisch. Theory of current drive in plasmas. *Rev. Mod. Phys.*, 59:175–234, Jan 1987.
- [6] J.T. Mendonça. *Theory of Photon Acceleration*. Series in Plasma Physics. Taylor & Francis, 2000.
- [7] A.J. Lichtenberg and A. Leiberman. *Regular and Chaotic Dynamics*. Applied Mathematical Sciences. Springer, 2010.
- [8] G. Corso and F. B. Rizzato. Stochastic cyclotron dynamics in the interaction of waves and low-energy particles. *Journal of Plasma Physics*, 49(03):425–443, 1993.
- [9] R. Spektor and E. Y. Choueiri. Ion acceleration by beating electrostatic waves: Domain of allowed acceleration. *Phys. Rev. E*, 69:046402, Apr 2004.
- [10] J. D. Szezech Jr., I. L. Caldas, S. R. Lopes, R. L. Viana, and P. J. Morrison. Transport properties in nontwist area-preserving maps. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 19(4):043108, 2009.
- [11] S.D. Prado and G. Corso. Manifold reconnection and diffusion in strong chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 142(3-4):217 – 230, 2000.
- [12] G. Corso and F. B. Rizzato. Manifold reconnection in chaotic regimes. *Phys. Rev. E*, 58:8013–8016, Dec 1998.
- [13] A. A. Chernikov, T. Tél, G. Vattay, and G. M. Zaslavsky. Chaos in the relativistic generalization of the standard map. *Phys. Rev. A*, 40:4072–4076, Oct 1989.

-
- [14] M. C. de Sousa, F. M. Steffens, R. Pakter, and F. B. Rizzato. Standard map in magnetized relativistic systems: Fixed points and regular acceleration. *Phys. Rev. E*, 82:026402, Aug 2010.
- [15] M. C. de Sousa, I. L. Caldas, F. B. Rizzato, R. Pakter, and F. M. Steffens. Controlling chaos in wave-particle interactions. *Phys. Rev. E*, 86:016217, Jul 2012.
- [16] Jung-Hoon Kim and Hai-Woong Lee. Chaos in the relativistic cyclotron motion of a charged particle. *Phys. Rev. E*, 54:3461–3467, Oct 1996.
- [17] Y. Nomura, Y. H. Ichikawa, and W. Horton. Nonlinear dynamics of the relativistic standard map. *Phys. Rev. A*, 45:1103–1115, Jan 1992.
- [18] D. Benisti, A. K. Ram, and A. Bers. Ion dynamics in multiple electrostatic waves in a magnetized plasma. I. coherent acceleration. *Physics of Plasmas*, 5(9):3224–3232, 1998.
- [19] D. Benisti, A. K. Ram, and A. Bers. Ion dynamics in multiple electrostatic waves in a magnetized plasma. II. enhancement of the acceleration. *Physics of Plasmas*, 5(9):3233–3241, 1998.