

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

## Dois Resultados em Análise Clássica

por

Lucas da Silva Oliveira

Tese submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. José Afonso Barrionuevo  
Orientador

Porto Alegre, Janeiro de 2013.

**CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO**

da Silva Oliveira, Lucas

Dois Resultados em Análise Clássica / Lucas da Silva Oliveira.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2013.

67 p.: il.

Tese (doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2013.

Orientador: Barrionuevo, José Afonso

Tese: Análise Aplicada

Equações Parabólicas, Estimativas de Energia, Métodos Iterativos, Operadores Multilineares, Funções Quadráticas, Medidas de Carleson, Para-produtos, Teoremas T1 e Tb.

# Dois Resultados em Análise Clássica

por

Lucas da Silva Oliveira

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Análise Aplicada

Orientador: Prof. Dr. José Afonso Barrionuevo

Banca examinadora:

Dr. Emanuel Carneiro  
IMPA

Dr. Janaína Zingano  
UFRGS

Dr. Jean Carlos Pech de Moraes  
UFRGS

Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira  
UNICAMP

Tese apresentada  
11/01/2013.

Maria Cristina Varriale  
Coordenador

## Sumário

|  |     |
|--|-----|
| RESUMO . . . . .   | vi  |
| ABSTRACT . . . . .   | vii |
| 1 INTRODUÇÃO . . . . .   | 1   |
| 1.1 Comportamento Assintótico de Equações Evolutivas . . . . .                                       | 1   |
| 1.2 Funções Quadráticas Multilineares . . . . .  | 5   |
| 2 SOBRE O COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE EQUAÇÕES<br>DISSIPATIVAS COM COEFICIENTES VARIÁVEIS . . . . . | 10  |
| 2.1 Estimativas <i>a priori</i> . . . . .  | 11  |
| 2.2 Estimativas para tempos longos . . . . .   | 19  |
| 2.3 Comentários Finais . . . . .   | 23  |
| 3 FUNÇÕES QUADRÁTICAS MULTILINEARES E MEDIDAS<br>DE CARLESON . . . . .                               | 25  |
| 3.1 Notação e Resultados Preliminares . . . . .  | 31  |
| 3.2 Prova do teorema 3.1 . . . . .   | 35  |
| 3.3 Prova do teorema $T(1)$ . . . . .  | 40  |
| 3.4 Prova do teorema $T(b)$ . . . . .  | 49  |
| 3.5 Comentários Finais . . . . .   | 53  |
| 4 CONCLUSÃO . . . . .  | 56  |

|                                      |   |    |
|--------------------------------------|---|----|
| APÊNDICE A                           | DESIGUALDADES DE GAGLIARDO-NASH-NIRENBERG | 57 |
| APÊNDICE B                           | ESTIMATIVAS UTILIZADAS NO TEOREMA         |    |
|                                      | $T(1)$ . . . . .                          | 60 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . . |   | 62 |

## RESUMO

O trabalho consiste em duas partes distintas. Na primeira, analisamos o comportamento assintótico de um modelo geral de equação de advecção-difusão não linear utilizando um novo método que combina estimativas de energia com uma análise apurada das oscilações da solução do problema. Na segunda, temos um resultado que responde a uma pergunta da teoria de Análise Harmônica Multilinear: dada uma família de operadores integrais multilineares podemos gerar medidas de Carleson *a partir* da ação desses operadores sobre funções em  $BMO$ ? A resposta em geral é negativa, mas impondo uma condição de cancelamento suficientemente forte o resultado é verdadeiro. Como uma aplicação desse resultado provamos um teorema  $T(b)$  quadrático associado a operadores integrais multilineares com núcleo não convolutivo.

## ABSTRACT

This work is concerned with two different results. The first one consists in analyzing the long time behavior of a general model of nonlinear advection diffusion equation by a novel method that combines energy estimates with a careful analysis of the oscillation of the solution. The second one answers a question on multilinear Harmonic Analysis: given a family of multilinear integral operators, is it possible to generate Carleson measures from these operators when they are acting on *BMO* functions? We have found that, in general, the answer is no, but when a strong cancellation condition is verified the answer is yes. As an application of this result we have a quadratic  $T(b)$  theorem for square functions associated to multilinear integral operators of non-convolution type.

# 1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho está dividido em duas partes de naturezas distintas: uma em Equações Diferenciais Parciais e outra em Análise Harmônica.

A primeira parte trata de questões assintóticas relacionadas a uma classe de equações de evolução (equações dissipativas) por um novo método, que combina estimativas de energia a uma análise da troca de sinal das soluções, para quantificar o decaimento da solução na norma do  $L^\infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Essa parte do trabalho é fruto de uma colaboração com os professores José Afonso Barrionuevo e Paulo Ricardo de Ávila Zingano.

A segunda parte do trabalho, que consiste em uma colaboração com o Prof. Loukas Grafakos, trata de algumas questões no campo da Análise Harmônica Multilinear.

Abaixo, em linhas gerais, a descrição dos problemas que discutiremos.

## 1.1 Comportamento Assintótico de Equações Evolutivas

No presente trabalho, nos concentraremos em problemas envolvendo equações parabólicas (para uma classificação dos diferentes tipos de equações diferenciais consultar, por exemplo, [20]) da forma

$$u_t + \partial_x (b(x, t, u)u) = \partial_x (a(x, t, u)\partial_x u) \quad (1.1)$$

em uma dimensão espacial, onde desde já assumimos que existe uma função  $\mu(t)$  tal que  $a(x, t, v) \geq \mu(t) > 0$  para todo  $x, v \in \mathbb{R}$ .

A teoria de existência local (e em alguns casos global), unicidade e regularidade desse tipo de problema é clássica. Demonstrações desses fatos para versões mais simples de (1.1) podem ser encontradas nos livros de Evans [20] e Lieberman [37], enquanto que o problema em sua forma mais geral está presente



nos trabalhos de Oleinik [43] e [44] e Ladyženskaja [36]. Aqui nos concentraremos apenas no que acontece com a solução  $u(x, t)$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Em geral, pode-se dizer muito pouco, mesmo para equações relativamente simples, como veremos abaixo, já que não existe um método geral que possa resolver essa questão quando as equações diferenciais envolvidas são não lineares.

O tipo de resultado que obtemos envolve estimativas sobre o comportamento assintótico da norma do sup (ou seja, a norma  $L^\infty$ ) das soluções, que de certa forma é a informação mais importante (visto que nos diz como a solução *crece ou decresce*). Especificamente, se  $u(\cdot, t)$  é a solução da equação diferencial parabólica

$$\begin{cases} u_t + \partial_x(b(x, t)u) = \partial_x^2 u & , \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) & , \quad 1 \leq p_0 < \infty, \end{cases} \quad (1.2)$$

para campos de advecção continuamente diferenciáveis  $b \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , estamos interessados em saber o que acontece com  $|u(x, t)|$  para quase todo ponto  $x \in \mathbb{R}$  quando o tempo  $t$  cresce. Considerando as hipóteses bastante fracas que impomos ao nosso problema, os resultados que obtemos são até surpreendentes.

Aqui e no que segue, por *uma solução* para (1.1) em algum intervalo de tempo não trivial  $[0, T_*)$ , onde  $0 < T_* \leq \infty$ , nos referimos a uma função  $u : \mathbb{R} \times [0, T_*) \rightarrow \mathbb{R}$  que é limitada em cada faixa  $S_T := \mathbb{R} \times [0, T]$ , com  $0 < T < T_*$ , resolve a equação (1.2) no sentido clássico para  $0 < t < T_*$ , e satisfaz  $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$  em  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  quando  $t \rightarrow 0$ . Utilizando as estimativas *a priori* dadas no Capítulo 2, segue que todas as soluções de (1.2) são de fato definidas globalmente (isto é,  $T_* = \infty$ ), com  $u(\cdot, t) \in C^0([0, \infty), L^p(\mathbb{R}))$  para cada  $p \geq p_0$  finito.

Quando  $\partial b / \partial x \geq 0$  para todo  $x, t$  (por exemplo, se  $b = b(t)$  não depende sobre  $x$ ), é um fato conhecido que, para cada  $p_0 \leq p \leq \infty$ , a norma  $\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}$  é monotonicamente decrescente em  $t$ , com

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K(p_0) t^{-\frac{1}{2p_0}} \|u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{R})} \quad \forall t > 0 \quad (1.3)$$

para uma constante  $K(p_0) > 0$  dependendo sobre  $p_0$ , mas não sobre  $b$ ,  $u_0$  ou  $u$ . Este tipo de resultado pode ser encontrado, por exemplo, nos trabalhos [7, 19, 47, 46].

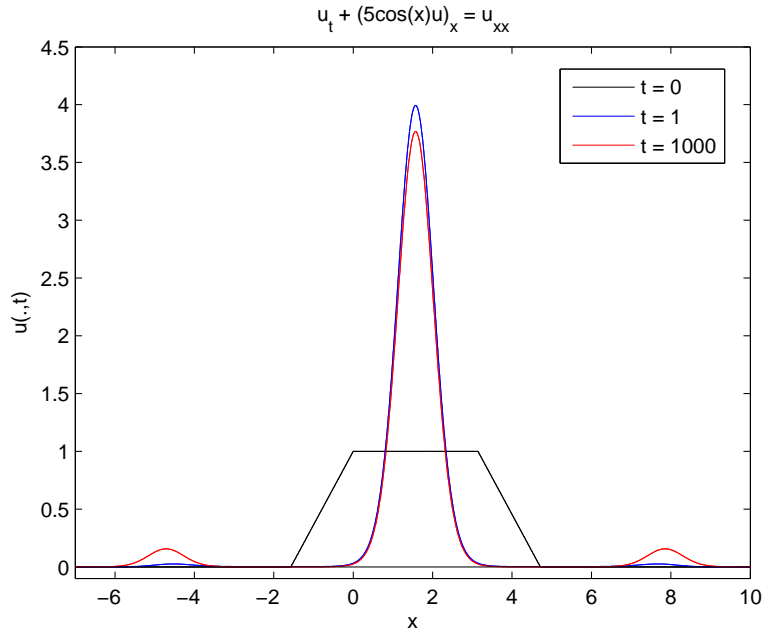
Para  $b(x, t)$  geral, por outro lado, estimar  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$  não é tão simples assim. Considere o caso  $p_0 = 1$ . Nessa situação,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \forall t > 0, \quad (1.4)$$

como vai ser reobtido no Capítulo 2 (teorema 2.3). Escrevendo a equação diferencial em (1.2) como

$$u_t + b(x, t)\partial_x u = \partial_x^2 u - \partial_x b_x(x, t)u, \quad (1.5)$$

observamos que o lado direito de (1.5) está forçando  $|u(x, t)|$  a crescer nos pontos  $(x, t)$  onde  $b_x(x, t) < 0$ . Se essa condição persistir por um longo tempo,  $|u(x, t)|$  pode assumir valores realmente altos, principalmente nas regiões onde  $-b_x(x, t) \gg 1$ . Agora, por conta de (1.4), qualquer crescimento no perfil do tamanho da solução terá que ser controlado e eventualmente terá que desaparecer, desde que a norma  $L^1$  da solução é finita. Observe a figura abaixo:



**Figura. 1.** Perfis da solução mostrando o comportamento esperado em regiões onde  $b_x < 0$ , para  $b = 5 \cos x$ . Depois de alcançar uma altura máxima, a solução começa a decair vagarosamente, devido ao termo viscoso e a conservação de massa dada por (1.4) (Atualmente, a taxa de decaimento ótima é desconhecida)

Dessa forma, são criadas estruturas muito finas e longas, como mostradas na Figura 1, as quais tendem a ser efetivamente dissipadas pelo termo viscoso  $\partial_x^2 u$ . O comportamento final que resulta dessa competição entre crescimento, dissipação e conservação de massa (dada pela desigualdade (1.4)) ainda não está totalmente claro.

Como fica evidente pelos comentários que sucedem (1.5), não é a *magnitude* de  $b(x, t)$ , mas sim a sua *oscilação* que se torna relevante para entendermos o comportamento de  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$  quando o tempo  $t \gg 1$ . Assim, se torna natural que a quantidade  $B(t)$ , definida por

$$B(t) = \frac{1}{2} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} b(x, t) - \inf_{x \in \mathbb{R}} b(x, t) \right), \quad t \geq 0, \quad (1.6)$$

tenha um papel fundamental na nossa análise. O principal resultado (no que diz respeito ao comportamento assintótico de EDPs de evolução lineares) pode ser enunciado da seguinte forma: *para cada  $p \geq p_0$ , temos*<sup>1</sup>

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left( \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \mathcal{B}^{\frac{1}{p}} \cdot \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad (1.7)$$

onde  $\mathcal{B} = \limsup_{t \rightarrow \infty} B(t)$ .

Em particular, usando a relação (1.4), obtemos no caso  $p_0 = 1$  acima

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left( \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \right) \cdot \mathcal{B} \cdot \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad (1.8)$$

de onde segue que a solução  $u(\cdot, t)$  permanece uniformemente limitada para todo tempo  $t$ .<sup>2</sup>

O conteúdo dessa parte do trabalho, que será apresentado no Capítulo 2, está organizado da seguinte forma: Na primeira seção, obtemos estimativas de energia e provamos algumas desigualdades integrais que nos serão úteis. Na segunda

---

<sup>1</sup>Em (1.6), (1.10) abaixo, e em outras expressões similares durante o texto, assumimos que  $0 \cdot \infty = \infty$ .

<sup>2</sup>As constantes  $(3\sqrt{3}p/(2\pi))^{1/p}$  em (1.6), (1.7) não são ótimas; os valores extremais para essas desigualdades são desconhecidos.

seção, introduzimos o método iterativo que nos permitirá obter o resultado (1.7) enunciado acima. Na terceira e última seção, discutimos alguns problemas em andamento. Esses resultados aparecem em forma resumida no artigo submetido para publicação [2].

Cabe ainda ressaltar que o nosso trabalho segue de perto, em alguns pontos, os trabalhos de Zingano [7]-[35], Carlen & Loss [9] e Wiegner [56], e que extensões dos resultados apresentados aqui (envolvendo equações não lineares mais gerais) são alvos da pesquisa corrente desenvolvida pelo autor e pelos professores José Afonso Barrionuevo e Paulo Ricardo de Ávila Zingano [3].

## 1.2 Funções Quadráticas Multilineares

Em Análise Harmônica Multilinear estamos interessados em obter estimativas do tipo

$$\|T(f_1, \dots, f_m)\|_X \leq C(X, X_1, \dots, X_m) \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{X_i}$$

onde espaços  $X, X_1, \dots, X_m$  são Banach ou são quasi-Banach, e onde o operador  $T$  é um operador multilinear definido *a priori* para algum subespaço denso de  $\prod_{i=1}^m X_i$ . Aqui trataremos o caso em que os espaços  $X_i = L^{p_i}$  e  $X = L^p$  são espaços de Lebesgue satisfazendo a relação de Hölder

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m},$$

tendo a possibilidade de que o expoente  $p$  possa ser menor que 1 (tornando assim  $L^p$  um espaço quasi-Banach).

Nesse trabalho, concentraremos nossa atenção em *Funções Quadráticas Multilineares*<sup>3</sup> (multilinear square functions) associadas a operadores não convolu-

---

<sup>3</sup>Observe que, de fato, esses operadores não são multilineares; a notação acima é apenas um abuso de linguagem que provém do fato de que podemos *olhar* para a família de operadores  $\{\Theta_t\}$  como sendo um único operador (multi)linear à valores vetoriais

tivos, isto é, operadores da forma

$$S(f_1, \dots, f_m) = \left( \int_0^\infty |\Theta_t(f_1, \dots, f_m)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}, \quad (1.9)$$

onde  $\{\Theta\}_{t>0}$  é uma família de operadores integrais multilineares dados por

$$\Theta_t(f_1, \dots, f_m) = \int_{\mathbb{R}^{nm}} \theta_t(x, y_1, \dots, y_m) \prod_{i=1}^m f_i(y_i) dy_1 \cdots dy_m. \quad (1.10)$$

Em sua versão linear, esses operadores desempenham um papel fundamental em Análise Harmônica desde a sua introdução por Littlewood e Paley (confira [52]). Após os trabalhos de Stein et al [53, 41], e Rubio de Francia [18, 45], foi consolidada a sua grande utilidade no que tange o estudo de multiplicadores de Fourier. Todavia, o uso de funções quadráticas vai muito além, e as caracterizações dos espaços de Hardy  $H^p$  em várias variáveis [22] e as funções maximais [55] podem ser citados como dois grandes exemplos que se beneficiaram com a introdução dessa ferramenta, sendo hoje o uso de funções quadráticas parte fundamental do ferramental utilizado nesses tópicos. Entretanto, acreditamos que as aplicações mais surpreendentes envolvendo esses operadores nasceram da relação entre funções quadráticas, continuidade de certos operadores e medidas de Carleson [10]. Em um artigo fundamental, Fefferman e Stein [22] provaram a existência de uma relação intrínseca entre medidas de Carleson, funções em  $BMO$  e funções quadráticas. Para enunciarmos o resultado precisaremos de um pouco de notação.

Uma medida positiva  $d\mu(x, t)$  sobre  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  é chamada uma medida de Carleson se

$$\|d\mu\|_C = \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_0^{l(Q)} d\mu(x, t) < \infty, \quad (1.11)$$

onde  $|Q|$  denota a medida de Lebesgue do cubo  $Q$  e  $l(Q)$  é o comprimento do lado  $Q$ . Considere agora uma família de operadores integrais  $\{R_t\}_{t>0}$ , dados por

$$R_t(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x, y) f(y) dy \quad (1.12)$$

cujos núcleos  $K_t$  satisfazem

$$|K_t(x, y)| \leq \frac{At^{-n}}{(1 + t^{-1}|x - y|)^{n+\delta}} \quad (1.13)$$

para alguma constante  $\delta > 0$ . Suponha que  $R_t(1)(x) = 0$  para todo  $t > 0$  e que existe uma constante positiva  $B$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |R_t(f)(x)|^2 \frac{dx dt}{t} \leq B^2 \|f\|_2^2 \quad (1.14)$$

para toda  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .

**Teorema** (Fefferman-Stein [21]). *Suponha que  $\{R_t\}$  satisfaz todas as hipóteses descritas acima. Então, dada uma função  $b \in BMO$ , a medida*

$$d\mu(x, t) := |R_t(b)(x)|^2 \frac{dx dt}{t}$$

é Carleson com norma (ou constante de Carleson, como às vezes é referenciado na literatura)

$$\|d\mu\|_C \leq C_{n,\delta}(A^2 + B^2) \|b\|_{BMO}^2.$$

Aqui a constante depende apenas sobre a dimensão e sobre a constante  $\delta^4$ .

Abaixo um dos principais resultados demonstrados no Capítulo 3. Dada uma família de operadores integrais multilineares  $\{\Theta_t\}(f_1, \dots, f_m)$ , dados por

$$\Theta_t(f_1, \dots, f_m)(x) := \int_{\mathbb{R}^{mn}} \theta_t(x, y_1, \dots, y_m) \prod_{i=1}^m f_i(y_i) dy_1 \cdots dy_m$$

satisfazendo

$$|\theta_t(x, y_1, \dots, y_m)| \lesssim t^{-nm} \prod_{i=1}^m \frac{1}{(1 + t^{-1}|x - y_i|)^{n+\delta}}.$$

Se tivermos

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\Theta_t(f_1, \dots, f_m)(x)|^2 dx \frac{dt}{t} \lesssim \|f_i\|_{L^{p_i}}^2$$

para  $1 < p_i < \infty$  satisfazendo  $\frac{1}{2} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}$ , então a medida positiva

$$d\mu(x, t) = |\Theta_t(b_1, \dots, b_m)(x)|^2 dx dt / t, \quad (1.15)$$

é uma medida de Carleson se todas as funções  $b_i \in L^\infty$ . Observe que esse resultado não necessita de nenhuma hipótese de cancelamento (e é obtido de forma

---

<sup>4</sup>O resultado recíproco também é verdadeiro, como foi demonstrado por Chirst e Journé [13]

inteiramente análoga com o caso linear). As diferenças começam ao tentar obter um resultado análogo ao teorema de Fefferman e Stein, isto é, quando na expressão (1.15) assumimos apenas que as funções estão em  $BMO$ . Nesse caso, se manifesta um resultado, no mínimo, inesperado: se as condições de cancelamento

$$\int_{\mathbb{R}^n} \theta_t(x, y_1, \dots, y_j, \dots, y_m) dy_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$$

forem satisfeitas, então a medida dada pela expressão (1.15) é uma medida de Carleson quando  $b_i \in BMO$ ; por outro lado, se apenas a condição

$$\int_{\mathbb{R}^{mn}} \theta_t(x, y_1, \dots, y_j, \dots, y_m) dy_1 \dots dy_m = 0$$

for satisfeita, então a medida dada por (1.15) não precisa ser Carleson, e construímos um contra-exemplo relativamente simples para mostrarmos tal propriedade (de fato, vale um resultado um pouco mais forte, mas por hora isso é mais do que o necessário para evidenciar as diferenças entre os tipos de cancelamento). Esse resultado é bastante interessante pois evidencia as diferenças entre a teoria linear e a teoria multilinear: por um lado, temos uma forma de *gerar* medidas de Carleson através de operadores multilineares; por outro lado, esse mecanismo nos mostra que o tipo de cancelamento que o núcleo satisfaz é a peça chave para tudo funcionar.

Como uma aplicação do resultado acima, ou simplesmente como um resultado paralelo, provamos que caso a família de operadores definidos acima satisfaça

$$\Theta_t(b_1, \dots, b_m) = 0$$

para alguma coleção de funções acretivas  $b_1, \dots, b_m$ , juntamente com algumas condições de regularidade do núcleo, então vale a estimativa

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\Theta_t(f_1, \dots, f_m)(x)|^2 dx \frac{dt}{t} \lesssim \|f_i\|_{L^{p_i}}^2.$$

Esse resultado foi originalmente demonstrado por Semmes no caso linear [50]. Um passo importante na obtenção do resultado acima, é a validade de um teorema  $T(1)$  quadrático multilinear [15]; a demonstração desse resultado é interessante por si só e pode ser visto como uma extensão dos resultados obtidos por Maldonado [39] e Maldonado e Naibo [38].

Por fim, o Capítulo 3 está organizado da seguinte forma: na primeira seção, colecionamos uma série de definições e resultados que serão utilizados nas seções subsequentes. Na segunda seção, provamos o resultado que relaciona operadores multilineares e medidas de Carleson. Na terceira seção, provamos a versão multilinear do teorema  $T(1)$  quadrático e na quarta, temos a demonstração do teorema  $T(b)$  quadrático multilinear. Na quinta e última seção, indicamos alguns problemas da pesquisa corrente sobre esse tópico. Os resultados referentes a essa parte do trabalho foram publicados recentemente em [28].



## 2 SOBRE O COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE EQUAÇÕES DISSIPATIVAS COM COEFICIENTES VARIÁVEIS

Neste capítulo, provamos que o comportamento de  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty}$  pode ser controlado por  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^p}$ , onde  $u(x, t)$  é a solução do PVI

$$\begin{cases} u_t(x, t) + \partial_x(b(x, t)u) - \partial_x^2 u = 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0 \in L^{p_0} \cap L^\infty(\mathbb{R}) \end{cases}, \quad (2.1)$$

onde  $1 \leq p_0 < \infty$  e

- $|b(x, t)| \leq B(t) = \frac{1}{2} (\sup_x b(x, t) - \inf_x b(x, t))$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $t \geq 0$ ;
- $\limsup_{t \rightarrow \infty} B(t) < \infty$ .

Conforme exposto anteriormente, entendemos por *solução* de (2.1), em algum intervalo de tempo não trivial  $[0, T_*)$ , uma função  $u(\cdot, t) \in L_{loc}^\infty([0, T_*), L^\infty(\mathbb{R}))$  que é suave ( $C^2$  in  $x$ ,  $C^1$  in  $t$ ) em  $\mathbb{R} \times (0, T_*)$  e resolve a equação diferencial em (2.1), satisfazendo a condição inicial no sentido de  $L_{loc}^1(\mathbb{R})$ , isto é,

$$\|u(\cdot, t) - u_0(\cdot)\|_{L^1(K)} \rightarrow 0$$

para cada compacto  $K \subset \mathbb{R}$ , quando  $t \rightarrow 0$ .

Utilizando uma combinação de métodos de energia com uma análise de sinal da solução (que leva em conta a oscilação do termo advectivo), obtemos o seguinte resultado sobre o comportamento assintótico (da norma do sup) das soluções do problema acima.

**Teorema 2.1.** *Sob as hipóteses impostas acima, para cada  $p \geq p_0$ , temos*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left( \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \mathcal{B}^{\frac{1}{p}} \cdot \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad (2.2)$$

onde  $\mathcal{B} = \limsup_{t \rightarrow \infty} B(t)$

A demonstração do teorema 2.1 se dará em duas etapas, que correspondem exatamente às seções 1 e 2. Na seção 1, utilizaremos o lema de Gronwall de forma conjunta com estimativas de energia para deduzir uma série de estimativas que em particular nos permitem mostrar que qualquer solução local do problema acima é de fato uma solução global. Na seção 2, mostramos como essas estimativas podem ser convertidas em um controle de várias normas  $L^p$  para tempo longo, culminando com a demonstração do teorema acima. Na terceira e última seção, indicamos brevemente alguns problemas da pesquisa corrente e problemas relacionados.

O conteúdo desse capítulo foi inspirado por resultados semelhantes obtidos por Braz e Silva, Zingano e Schütz [4, 5, 6]) e por Braz e Silva e Zingano [7]. Além disso, esses resultados também podem ser vistos como uma extensão ou um trabalho paralelo aos resultados obtidos por Kreiss et al [35], Carlen e Loss [9] e Wiegner [56, 57].

## 2.1 Estimativas *a priori*

Essa seção contém alguns resultados preliminares sobre as soluções de problemas do tipo (2.1) que serão necessárias na Seção 3, onde obtemos a estimativa (2.2). A teoria de existência local para equações desse tipo pode ser encontrada, por exemplo, nos livros de Serre [51] e Friedman [24]. Começamos aqui, com uma estimativa de Gronwall para  $\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R})}$ , onde  $p_0 \leq q < \infty$ . O resultado correspondente ao caso  $q = \infty$  é um pouco mais complicado, e será dado ao fim da Seção 2.

**Teorema 2.2.** *Se  $u(\cdot, t) \in L_{loc}^\infty([0, T_*], L^\infty(\mathbb{R}))$  é solução de (2.1), então  $u(\cdot, t) \in C^0([0, T_*], L^q(\mathbb{R}))$  para cada  $p_0 \leq q < \infty$ , e*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^q(\mathbb{R})} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2} (q-1) \int_0^t B(\tau)^2 d\tau \right\} \quad (2.3)$$

para todo  $0 < t < T_*$ .

*Demonstração.* A prova é *standard* e por isso daremos apenas um esboço dos passos básicos. Considere  $S \in C^1(\mathbb{R})$  tal que  $S'(v) \geq 0$  para todo  $v \in \mathbb{R}$ ,  $S(0) = 0$  e  $S(v) = \text{sgn}(v)$  para todo  $|v| \geq 1$ .

Para  $\delta > 0$  dado, defina

$$L_\delta(u) = \int_0^u S(v/\delta) dv,$$

de tal forma que  $L_\delta(u) \rightarrow |u|$  quando  $\delta \rightarrow 0$ , uniformemente  $u$ . Seja ainda

$$\Phi_\delta(u) = L_\delta(u)^q.$$

Dados  $R > 0$  e  $0 < \epsilon \leq 1$ , seja  $\zeta_R(\cdot)$  uma função de corte:

- $\zeta_R(x) = 0$  para  $|x| \geq R$ ;
- $\zeta_R(x) = \exp\{-\epsilon\sqrt{1+x^2}\} - \exp\{-\epsilon\sqrt{1+R^2}\}$  para  $|x| < R$ .

Multiplicando (2.1) por  $\Phi'_\delta(u(x,t)) \cdot \zeta_R(x)$  se  $q \neq 2$ , ou por  $u(x,t) \cdot \zeta_R(x)$  se  $q = 2$ , e integrando sobre  $\mathbb{R} \times [0, t]$ , obtemos (ao fazer  $\delta \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  e observando que  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, t])$ )

$$U_\epsilon(t) + V_\epsilon(t) \leq U_\epsilon(0) + \int_0^t G_\epsilon(\tau) U_\epsilon(\tau) d\tau, \quad (2.4)$$

onde

$$U_\epsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^q w_\epsilon(x) dx. \quad (2.5)$$

Nas equações acima,

$$w_\epsilon(x) = \exp\{-\epsilon\sqrt{1+x^2}\},$$

$$G_\epsilon(t) = \frac{1}{2}q(q-1)B(t)^2 + \epsilon 2q \cdot \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \epsilon,$$

e

$$V_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}q(q-1) \int_0^t \int_{u \neq 0} |u(x, \tau)|^{q-2} |\partial_x u(x, \tau)|^2 w_\epsilon(x) dx d\tau, & \text{if } q \neq 2, \\ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(x, \tau)|^2 w_\epsilon(x) dx d\tau, & \text{if } q = 2. \end{cases}$$

Pelo lema de Gronwall, (2.4) nos dá

$$U_\epsilon(t) \leq U_\epsilon(0) \cdot \exp \left\{ \int_0^t G_\epsilon(\tau) d\tau \right\},$$

de onde segue (2.3) simplesmente fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$ . Em particular, isso mostra que  $u(\cdot, t) \in L_{loc}^\infty([0, T_*), L^q(\mathbb{R}))$  se  $p_0 \leq q < \infty$ . Agora, para obtermos  $u(\cdot, t) \in C^0([0, T_*), L^q(\mathbb{R}))$ , é suficiente mostrar que dados  $\epsilon > 0$  e  $0 < T < T_*$ , podemos encontrar  $R = R(\epsilon, T) \gg 1$  suficientemente grande tal que  $\|u(\cdot, t)\|_{L^q(|x|>R)} < \epsilon$  para qualquer  $0 \leq t \leq T$ . Tomando  $\psi \in C^2(\mathbb{R})$  com  $0 \leq \psi \leq 1$  e  $\psi(x) = 0$  para todo  $x \leq 0$ , e  $\psi(x) = 1$  para todo  $x \geq 1$ , considere  $\Psi_{R,M} \in C^2(\mathbb{R})$  uma função de corte dada por  $\Psi_{R,M}(x) = 0$  se  $|x| \leq R-1$ ,  $\Psi_{R,M}(x) = \psi(|x| - R + 1)$  se  $R-1 < |x| < R$ ,  $\Psi_{R,M}(x) = 1$  se  $R \leq |x| \leq R+M$ ,  $\Psi_{R,M}(x) = \psi(R+M+1 - |x|)$  se  $R+M < |x| < R+M+1$ , e  $\Psi_{R,M}(x) = 0$  se  $|x| \geq R+M+1$ , onde  $R > 1$  e  $M > 0$  são números dados. Multiplicando (2.1) por  $\Phi'_\delta(u(x, t)) \cdot \Psi_{R,M}(x)$  se  $q \neq 2$ , ou por  $u(x, t) \cdot \Psi_{R,M}(x)$  se  $q = 2$ , e integrando sobre  $\mathbb{R} \times [0, t]$ , obtemos (como em (2.4), ao tomarmos  $\delta \rightarrow 0$  e  $M \rightarrow \infty$ )

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(|x|>R)} < \frac{\epsilon}{2} + \|u(\cdot, 0)\|_{L^q(|x|>R-1)}$$

para todo  $0 \leq t \leq T$ , desde que possamos escolher  $R > 1$  suficientemente grande. Como este é o caso, isso nos garante a continuidade desejada, encerrando a demonstração.

**Observação 1.** *Um fato fundamental que decorre do teorema 2.3 é que a solução permanece limitada em qualquer intervalo de tempo finito. Porém, como o crescimento pode ser exponencial, o resultado anterior nada nos diz sobre o (possível) decaimento da solução.*

Uma importante consequência da demonstração acima (fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  em (2.4) e usando (2.3)) é que, para cada  $0 < T < T_*$  e  $q \geq \max\{p_0, 2\}$ , vale

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |u(x, \tau)|^{q-2} |\partial_x u(x, \tau)|^2 dx d\tau < \infty. \quad (2.6)$$

Dessa forma, se repetirmos os passos que nos levaram a (2.4), obtemos (fazendo  $\delta \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  e  $\epsilon \rightarrow 0$ , nessa ordem, e levando (2.3) e (2.6) em conta) a identidade

$$\begin{aligned} & \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R})}^q + q(q-1) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |u(x, \tau)|^{q-2} |\partial_x u(x, \tau)|^2 dx d\tau \\ &= \|u(\cdot, 0)\|_{L^q(\mathbb{R})}^q + \left( q(q-1) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (b(x, \tau) - \beta(\tau)) \right. \\ & \quad \left. \times |u(x, \tau)|^{q-2} u(x, \tau) \partial_x u(x, \tau) dx d\tau \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

para todo  $0 < t < T_*$  e  $\max\{p_0, 2\} \leq q < \infty$ , onde

$$\beta(t) = \frac{1}{2} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} b(x, t) + \inf_{x \in \mathbb{R}} b(x, t) \right) \quad t \geq 0. \quad (2.8)$$

A principal fonte de dificuldade da análise de (2.1) fica agora aparente: impondo somente que a função  $b$  é limitada, não fica claro como o último termo em (2.7) deve ser estimado, em ordem de obtermos algo melhor que a estimativa (2.3) acima. Observe que não temos *a priori* nenhuma informação extra sobre o coeficiente  $b(x, t)$  que nos permita deduzir algum tipo de estimativa de decaimento.

Para que nosso argumento fique mais claro, é conveniente considerar (2.8) em sua forma diferencial (que é equivalente a forma integral acima), isto é,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R})}^q + q(q-1) \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^{q-2} |\partial_x u(x, t)|^2 dx \\ &= q(q-1) \int_{\mathbb{R}} (b(x, t) - \beta(t)) |u(x, t)|^{q-2} u(x, t) \partial_x u(x, t) dx \end{aligned} \quad (2.9)$$

para todo  $t \in [0, T_*) \setminus E_q$ , onde  $E_q \subset [0, T_*)$  possui medida zero. Então, usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg [20]

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_\infty \|v\|_{L^1(\mathbb{R})}^{1/3} \|\partial_x v\|_{L^2(\mathbb{R})}^{2/3}, \quad (2.10)$$

e a desigualdade de Nash [42]

$$\|v\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_2 \|v\|_{L^1(\mathbb{R})}^{2/3} \|\partial_x v\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/3} \quad (2.11)$$

onde  $C_2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^{1/3}$  é o valor ótimo da desigualdade (como podemos verificar em [8]); a demonstração das duas desigualdades acima será dada em um apêndice no

final do texto), o seguinte resultado segue facilmente:

**Teorema 2.3.** *Seja  $q \geq 2p_0$ . se  $\hat{t} \in [0, T_*) \setminus E_q$  é tal que  $\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R})}^q|_{t=\hat{t}} \geq 0$ , então*

$$\|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{q}{2} C_2^3\right)^{1/q} B(\hat{t})^{1/q} \|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^{q/2}(\mathbb{R})} \quad (2.12)$$

e

$$\|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{q}{2} C_2 C_\infty\right)^{2/q} B(\hat{t})^{2/q} \|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^{q/2}(\mathbb{R})} \quad (2.13)$$

*Demonstração.* Consideremos (2.12) primeiramente. Das definições de  $B(t)$  e  $\beta(t)$ , e pela identidade (diferencial) (2.9), temos que

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x, \hat{t})|^{q-2} |\partial_x u(x, \hat{t})|^2 dx \leq B(\hat{t}) \int_{\mathbb{R}} |u(x, \hat{t})|^{q-1} |\partial_x u(x, \hat{t})| dx.$$

Aplicando Cauchy-Scharwz temos

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x, \hat{t})|^{q-1} |\partial_x u(x, \hat{t})| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x, \hat{t})|^q dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x, \hat{t})|^{q-2} |\partial_x u(x, \hat{t})|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Isso nos dá

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x, \hat{t})|^{q-2} |\partial_x u(x, \hat{t})|^2 dx \leq B(\hat{t})^2 \|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R})}^q$$

ou, em termos de  $\hat{v} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ , que é definida por  $\hat{v}(x) = |u(x, \hat{t})|^{q/2}$  se  $q > 2$  e por  $\hat{v}(x) = u(x, \hat{t})$  se  $q = 2$ ,

$$\|\partial_x \hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{q}{2} B(\hat{t}) \|\hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Usando a desigualdade de Nash (2.11), obtemos  $\|\hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{q}{2} C_2^3 B(\hat{t}) \|\hat{v}\|_{L^1(\mathbb{R})}^2$  que é equivalente (2.12). Similarmente (2.13) usando (2.10).

Podemos usar os resultados do Teorema 2.4 quando  $\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R})}$  é não decrescente. Se a norma é decrescente, a relação (2.9) se torna *menos* útil, mas ainda assim sabemos que nesse caso  $\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R})}$  não cresce, o que pode ser de alguma forma útil também (já que isso nos indica que essa norma está no mínimo controlada nesses casos). Para cada  $q$ , temos diferentes *cenários*, cada valor contribuindo

com uma informação diferente. Nossa missão é, de alguma forma, reunir toda essa informação de alguma forma que nos permita controlar melhor a contribuição do segundo termo na equação (2.9).

O próximo resultado nos diz como fazer isso, mas para simplificar o trabalho e melhorar a *exposição*, é interessante introduzir alguma notação. No que segue, dados  $p \geq p_0$  e  $0 \leq t_0 \leq t < T_*$  arbitrários, considere as quantidades

$$\mathbb{B}(t_0; t) = \sup \{ B(\tau) : t_0 \leq \tau \leq t \}, \quad (2.14)$$

$$\mathbb{U}_p(t_0; t) = \sup \{ \| u(\cdot, \tau) \|_{L^p(\mathbb{R})} : t_0 \leq \tau \leq t \}. \quad (2.15)$$

**Teorema 2.4.** *Seja  $q \geq 2p_0$ . Para cada  $0 \leq t_0 < T_*$ , segue que*

$$\mathbb{U}_q(t_0; t) \leq \max \left\{ \| u(\cdot, t_0) \|_{L^q(\mathbb{R})}; \left( \frac{q}{2} C_2^3 \right)^{\frac{1}{q}} \mathbb{B}(t_0; t)^{\frac{1}{q}} \mathbb{U}_{\frac{q}{2}}(t_0; t) \right\} \quad (2.16)$$

para todo  $t_0 \leq t < T_*$ .

*Demonstração.* Nossa análise se baseia em entender como a norma  $L^q$  da função  $u$  cresce como função de  $t$ , tomando como referência a quantidade

$$\lambda_q(t) = \left( \frac{q}{2} C_2^3 \right)^{\frac{1}{q}} \mathbb{B}(t_0; t)^{\frac{1}{q}} \mathbb{U}_{\frac{q}{2}}(t_0; t).$$

Existem três casos a analisar:

- **Caso I** -  $\| u(\cdot, \tau) \|_{L^q(\mathbb{R})} > \lambda_q(t)$  para  $t_0 \leq \tau \leq t$ .

Por (2.12), do teorema 2.3, temos que  $\frac{d}{d\tau} \| u(\cdot, \tau) \|_{L^q(\mathbb{R})}^q < 0$  para todo  $\tau \in [t_0, t] \setminus E_q$ , de onde segue que  $\| u(\cdot, \tau) \|_{L^q(\mathbb{R})}$  é monotonicamente decrescente em  $[t_0, t]$ . Em particular,  $\mathbb{U}_q(t_0; t) = \| u(\cdot, t_0) \|_{L^q(\mathbb{R})}$ , e o resultado segue nesse caso.

- **Caso II** -  $\| u(\cdot, t_0) \|_{L^q(\mathbb{R})} > \lambda_q(t)$  e  $\| u(\cdot, t_1) \|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \lambda_q(t)$  para algum  $t_1 \in (t_0, t]$ .

Nesse caso, seja  $t_2 \in (t_0, t]$  tal que  $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R})} > \lambda_q(t)$  para todo  $t_0 \leq \tau < t_2$ , com  $\|u(\cdot, t_2)\|_{L^q(\mathbb{R})} = \lambda_q(t)$ . Afirmamos que  $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \lambda_q(t)$  para todo  $t_2 \leq \tau \leq t$ : se esse não é o caso, podemos encontrar  $t_3, t_4$  com  $t_2 \leq t_3 < t_4 \leq t$ , tal que  $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R})} > \lambda_q(t)$  para todo  $t_3 < \tau \leq t_4$  e tal que  $\|u(\cdot, t_3)\|_{L^q(\mathbb{R})} = \lambda_q(t)$ . Por (2.12), deduzimos que  $\frac{d}{d\tau}\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R})}^q < 0$  para todo  $\tau \in (t_3, t_4] \setminus E_q$ . Dessa forma  $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R})}$  não pode crescer em nenhum ponto sobre o intervalo  $[t_3, t_4]$ . Isso contradiz o fato de que  $\|u(\cdot, t_3)\|_{L^q(\mathbb{R})} < \|u(\cdot, t_4)\|_{L^q(\mathbb{R})}$ , de onde segue que  $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \lambda_q(t)$  para todo  $t_2 \leq \tau \leq t$ , como afirmamos anteriormente. Por outro lado, usando novamente (2.12), concluímos que  $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R})}$  precisa ser monotonicamente decrescente sobre  $[t_0, t_2]$ , exatamente como no **Caso I**. Então, temos  $\mathbb{U}_q(t_0; t) = \|u(\cdot, t_0)\|_{L^q(\mathbb{R})}$  novamente, o que conclui a prova.

- **Caso III** -  $\|u(\cdot, t_0)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \lambda_q(t)$ .

A hipótese nos dá  $\|u(\cdot, \tau)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \lambda_q(t)$  para todo  $t_0 \leq \tau \leq t$ , simplesmente repetindo o argumento utilizado sobre o intervalo  $[t_2, t]$  no **Caso II**. Segue que  $\mathbb{U}_q(t_0; t) \leq \lambda_q(t)$  nesse caso, e isso conclui a prova do teorema 2.5

Como antecipamos no início dessa Seção, o teorema 2.5 nos permite controlar a norma do sup da solução do nosso PVI. Assim, podemos dizer que o seguinte resultado é um dos mais importantes desse capítulo.

**Teorema 2.5.** *Seja  $p_0 \leq p < \infty$ ,  $0 \leq t_0 < T_*$ . Então*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq (2p)^{\frac{1}{p}} \cdot \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}; \mathbb{B}(t_0; t)^{\frac{1}{p}} \mathbb{U}_p(t_0; t) \right\} \quad (2.17)$$

para qualquer  $t_0 \leq t < T_*$ .



*Demonstração.* Tome  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \geq 2$ . Aplicando (2.16) sucessivamente com  $q = 2p, 4p, \dots, 2^k p$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_{2p}(t_0; t) &\leq \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}; \left(\frac{2p}{2} C_2^3\right)^{\frac{1}{2p}} \mathbb{B}(t_0; t)^{\frac{1}{2p}} \mathbb{U}_p(t_0; t) \right\}; \\
\mathbb{U}_{4p}(t_0; t) &\leq \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{4p}(\mathbb{R})}; \left(\frac{4p}{2} C_2^3\right)^{\frac{1}{4p}} \mathbb{B}(t_0; t)^{\frac{1}{4p}} \mathbb{U}_{2p}(t_0; t) \right\} \\
&= \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{4p}(\mathbb{R})}; \left(\frac{4p}{2} C_2^3\right)^{\frac{1}{4p}} \mathbb{B}(t_0; t)^{\frac{1}{4p}} \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}; \right. \\
&\quad \left. \mathbb{B}(t_0; t)^{\frac{1}{4p} + \frac{1}{2p}} \left(\frac{2p}{2} C_2^3\right)^{\frac{1}{2p}} \mathbb{U}_p(t_0; t) \right\} \\
&\quad \vdots \\
\mathbb{U}_{2^k p}(t_0; t) &\leq \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{2^k p}(\mathbb{R})}; K(k, 0)^{\frac{1}{p}} \mathbb{B}(t_0; t)^{\frac{1}{p}(1-2^{-k})} \mathbb{U}_p(t_0; t); \right. \\
&\quad \left. K(k, l)^{\frac{1}{p}} \mathbb{B}(t_0; t)^{\frac{1}{p}(2^{-l}-2^{-k})} \|u(\cdot, t)\|_{L^{2^l p}(\mathbb{R})} \text{ para } 1 \leq l \leq k-1 \right\} \quad (2.18)
\end{aligned}$$

onde

$$K(k, l) = \prod_{j=l+1}^k (2^{j-1} p C_2^3)^{2^{-j}} \quad 0 \leq l \leq k-1. \quad (2.19)$$

Agora, para  $1 \leq l \leq k-1$ , usando a desigualdade de Young ([20], p. 622); segue que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{B}(t_0; t)^{\frac{1}{p}(2^{-l}-2^{-k})} \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{2^l p}(\mathbb{R})} \\
&\leq \mathbb{B}(t_0; t)^{\frac{1}{p}(2^{-l}-2^{-k})} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{2^{-l}-2^{-k}}{1-2^{-k}}} \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{2^k p}(\mathbb{R})}^{\frac{1-2^{-l}}{1-2^{-k}}} \\
&\leq \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{2^k p}(\mathbb{R})}; \mathbb{B}(t_0; t)^{\frac{1}{p}(1-2^{-k})} \cdot \|u(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \right\} \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Em particular, usando (2.18)-(2.19), obtemos

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^{2^k p}(\mathbb{R})} \leq (2p)^{\frac{1}{p}} \cdot \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^{2^k p}(\mathbb{R})}; \mathbb{B}(t_0; t)^{\frac{1}{p}(1-2^{-k})} \cdot \mathbb{U}_p(t_0; t) \right\}$$

desde que  $K(k, l) \leq 2p$  para todo  $0 \leq l \leq k-1$ . Fazendo  $k \rightarrow \infty$ , obtemos (2.17).

Dos teoremas 2.3 e 2.5, segue que  $u(\cdot, t)$  é definida globalmente (isto é,  $T_* = \infty$ ). Agora, a partir de (2.17), obtemos imediatamente (fazendo  $t \rightarrow \infty$ )

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq (2p)^{\frac{1}{p}} \cdot \max \left\{ \|u(\cdot, t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}; \mathbb{B}(t_0)^{\frac{1}{p}} \mathbb{U}_p(t_0) \right\} \quad (2.21)$$

para qualquer  $t_0 \geq 0$ , onde  $\mathbb{B}(t_0)$ , e  $\mathbb{U}_p(t_0)$  são dados por

$$\mathbb{B}(t_0) = \sup \left\{ B(t) : t \geq t_0 \right\}, \quad (2.22)$$

$$\mathbb{U}_p(t_0) = \sup \left\{ \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} : t \geq t_0 \right\}. \quad (2.23)$$

Tomando  $(t_0^{(n)})_n$  tal que  $t_0^{(n)} \rightarrow \infty$  e  $\|u(\cdot, t_0^{(n)})\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \rightarrow \liminf_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ , e aplicando (2.21) com  $t_0 = t_0^{(n)}$  para cada  $n$ , obtemos

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq (2p)^{\frac{1}{p}} \\ &\times \max \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}; \mathcal{B}^{\frac{1}{p}} \cdot \mathcal{U}_p \right\}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde as constantes  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{U}_p$  são dadas por

$$\mathcal{B} = \limsup_{t \rightarrow \infty} B(t), \quad \mathcal{U}_p = \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}. \quad (2.25)$$

## 2.2 Estimativas para tempos longos

Aqui, usaremos os resultados obtidos anteriormente para deduzirmos dois resultados para a solução  $u(\cdot, t)$  do problema (2.1), para o regime de tempo  $t \gg 1$  (dados nos teoremas 2.7 and 2.8 abaixo) que representam passos intermediários importantes na prova do resultado principal (teorema 2.9) que será obtido ao final dessa seção. No que segue, para simplificarmos as expressões vamos assumir a seguinte notação (que em parte já foi introduzida no fim da última seção)

**Teorema 2.6.** *Sejam  $q \geq 2p_0$  e  $\mathcal{B} \geq 0$  definidos como em (2.25). Então*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{q}{2} C_2^3\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \mathcal{B}^{\frac{1}{q}} \cdot \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^{q/2}(\mathbb{R})} \quad (2.26)$$

onde  $C_2$  é a constante da desigualdade de Nash (2.11).

*Demonstração.* Defina  $p = q/2$  e assuma que  $\mathcal{U}_p$  é finito. Como na demonstração do teorema 2.4, considere  $v \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  dada por  $v(x, t) = |u(x, t)|^p$  se  $p > 1$

e  $v(x, t) = u(x, t)$  se  $p = 1$ . segue que

$$\begin{aligned} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \|u(\cdot, t)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}^{2p} \\ \|v_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= p^2 \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^{2p-2} |\partial_x u(x, t)|^2 dx \end{aligned}$$

Então, a partir de (2.6), temos que existe um conjunto de medida nulo  $E_{2p} \subset [0, \infty)$ , tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 4 \left(1 - \frac{1}{2p}\right) \|\partial_x v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ \leq 4p \left(1 - \frac{1}{2p}\right) B(t) \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\partial_x v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, \infty) \setminus E_{2p}$ . Logo, por (2.7)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 4 \left(1 - \frac{1}{2p}\right) \|\partial_x v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ \leq 4pC_2 \left(1 - \frac{1}{2p}\right) B(t) \|v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{2/3} \|\partial_x v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{4/3} \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young ([20], p. 622), obtemos que para todo  $t \in [0, \infty) \setminus E_{2p}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{2p}\right) \|\partial_x v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ \leq \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{2p}\right) (pC_2)^3 \left(1 - \frac{1}{2p}\right) B(t)^3 \|v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Definindo

$$\lambda_p = \limsup_{t \rightarrow \infty} g(t), \quad g(t) = (pC_2^3)^{1/2} B(t)^{1/2} \|v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

afirmamos que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \lambda_p. \quad (2.28)$$

Provamos isso por absurdo. Se (2.28) é falso, podemos tomar  $0 < \eta \ll 1$  e uma sequência  $(t_j)_{j \geq 0}$  satisfazendo  $t_j \rightarrow \infty$ , tal que  $\|v(\cdot, t_j)\|_{L^2(\mathbb{R})} > \lambda_p + \eta$  (para todo  $j \geq 0$ ) e  $g(t) \leq \lambda_p + \eta/2$  para todo  $t \geq t_0$ . Agora, usando (2.12), teorema 2.4, segue que

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} > \lambda_p + \eta, \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.29)$$

Supondo que (2.29) é falso, temos que  $\|v(\cdot, \tilde{t})\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \lambda_p + \eta$  para algum  $\tilde{t} > t_0$ . Tomando  $j \gg 1$  com  $t_j > \tilde{t}$ , podemos encontrar  $\hat{t} \in [\tilde{t}, t_j)$  tal que  $\|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} > \lambda_p + \eta$  para todo  $t \in (\hat{t}, t_j]$ , com  $\|v(\cdot, \hat{t})\|_{L^2(\mathbb{R})} = \lambda_p + \eta$ , de onde segue que deve existir  $t_* \in [\hat{t}, t_j] \setminus E_{2p}$  com  $\frac{d}{dt} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$  positivo em  $t = t_*$ . Por (2.12), deveríamos ter  $\|v(\cdot, t_*)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \lambda_p$ , mas isto contradiz o fato de que  $\|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq \lambda_p + \eta$  sobre  $[\hat{t}, t_j]$ . Dessa forma, concluímos que (2.29) não pode ser falso. Agora, usando (2.11), (2.27), (2.29) obtemos

$$\begin{aligned} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^6 &\leq C_2^6 \|v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^4 \|\partial_x v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq g(t)^6 + \frac{2p}{2p-1} \|v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^4 \left( -\frac{d}{dt} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right) \end{aligned}$$

para todo  $t \in [t_0, \infty) \setminus E_{2p}$ . Como  $\|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} > \lambda_p + \eta$  e  $g(t) \leq \lambda_p + \eta/2$  para todo  $t \geq t_0$ , concluímos que

$$-\frac{d}{dt} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \geq K(\eta), \quad \forall t \in [t_0, \infty) \setminus E_{2p}$$

para alguma constante  $K(\eta) > 0$  independente de  $t$ , o que é impossível, visto que isso implica

$$\|v(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \geq K(\eta) \cdot (t - t_0) \quad \forall t > t_0.$$

A última contradição mostra que (2.28) é verdade. Como (2.28) é equivalente a (2.26), isso encerra a demonstração do teorema.

Aplicando (2.26) sucessivamente com  $q = 2p, 4p, \dots, 2^k p$ , obtemos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^{2^k p}(\mathbb{R})} \leq \left[ \prod_{j=1}^k (2^{j-1} p C_2^3)^{2^{-j}} \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \mathcal{B}^{\frac{1}{p}}(1-2^{-k}) \cdot \mathcal{U}_p \quad (2.30)$$

para  $k \geq 1$  arbitrário e onde  $\mathcal{U}_p$  é o mesmo que em (2.25). Fazendo  $k \rightarrow \infty$ , a estimativa acima nos sugere que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K(p) \cdot \mathcal{B}^{\frac{1}{p}} \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad (2.31)$$

onde

$$K(p) = \left[ \prod_{j=1}^{\infty} (2^{j-1} p C_2^3)^{2^{-j}} \right]^{\frac{1}{p}} = \left( \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.32)$$

desde que possamos trocar a ordem dos processos limites  $k \rightarrow \infty$  e  $t \rightarrow \infty$ . Que este é de fato o caso, é uma consequência de (2.17) e do seguinte resultado.

**Teorema 2.7.** *Seja  $p \geq p_0$ . Então*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq (p C_2 C_\infty)^{\frac{1}{p}} \cdot \mathcal{B}^{\frac{1}{p}} \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad (2.33)$$

onde  $C_\infty$  e  $C_2$  são as constantes que aparecem em (2.10) e (2.11).

*Demonstração.* Mais uma vez, assumindo que  $\mathcal{U}_p$  é finita (considerando que de outra forma (2.33) é óbvia, confira a nota de rodapé 1), introduzimos (como na prova anterior) a função  $v \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  dada por  $v(x, t) = |u(x, t)|^p$  se  $p > 1$ , e por  $v(x, t) = u(x, t)$  se  $p = 1$ . Então, (2.27) é válida, e denotando novamente  $\lambda_p \in \mathbb{R}$ , e  $g \in L^\infty([0, \infty))$  por

$$\lambda_p = \limsup_{t \rightarrow \infty} g(t), \quad g(t) = p C_2 B(t) \|v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

a desigualdade (2.33) é equivalente à

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_\infty \cdot \lambda_p. \quad (2.34)$$

Provamos o resultado acima por contradição. Assuma que (2.34) é falsa. Então, tomando  $0 < \eta \ll 1$  e  $t_0 \gg 1$  de tal forma que  $\|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq C_\infty \cdot (\lambda_p + \eta)$  e  $g(t) \leq \lambda_p + \eta/2$  para todo  $t \geq t_0$ , obtemos por (2.10) e (2.27) que

$$\begin{aligned} \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^3 &\leq C_\infty^3 \|v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\partial_x v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq C_\infty^3 g(t)^3 + C_\infty^3 \frac{2p}{2p-1} \|v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \left( -\frac{d}{dt} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right) \end{aligned}$$

para todo  $t \in [t_0, \infty) \setminus E_{2p}$ . Como  $\|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq C_\infty \cdot (\lambda_p + \eta)$  e  $g(t) \leq \lambda_p + \eta/2$ , a última desigualdade nos diz que

$$-\frac{d}{dt} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \geq K(\eta), \quad \forall t \in [t_0, \infty) \setminus E_{2p}$$

para alguma constante positiva  $K(\eta)$  independente de  $t$ .

Exatamente como no teorema anterior, isso implica  $\|v(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \geq K(\eta) \cdot (t - t_0)$  para todo  $t \geq t_0$ , o que é impossível já que  $\|v(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})}$  é finita. Logo, (2.34) é verdadeira, completando assim a prova do Teorema 2.7.

Finalmente, temos todas as peças necessárias para provarmos (2.2), (2.31). Combinando (2.24) e (2.33) acima, obtemos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq (2p^2)^{\frac{1}{p}} \cdot \mathcal{B}^{\frac{1}{p}} \cdot \mathcal{U}_p \quad (2.35)$$

para cada  $p \geq p_0$ , de onde segue (em particular) que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq (2^{2k+1} p^2)^{\frac{1}{2k_p}} \cdot \mathcal{B}^{\frac{1}{2k_p}} \cdot \mathcal{U}_{2k_p} \quad (2.36)$$

para cada  $k \geq 0$ . Por (2.30), segue que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left\{ (2^{2k+1} p^2)^{2^{-k}} \cdot \prod_{j=1}^k (2^{j-1} p C_2^3)^{2^{-j}} \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \mathcal{B}^{\frac{1}{p}} \cdot \mathcal{U}_p \quad (2.37)$$

para todo  $k$ . Completamos o argumento fazendo  $k \rightarrow \infty$ . O resultado obtido pode ser resumido no seguinte teorema.

**Teorema 2.8.** *Seja  $p \geq p_0$ . Assuma que  $b \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ . Então, as desigualdades (2.2) e (2.31) são verdadeiras.*

## 2.3 Comentários Finais

Acredita-se que estimativas similares à (2.1) continuam sendo válidas para o caso  $n$ -dimensional

$$u_t + \nabla(b(x, t)u) = \Delta u, \quad u(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (2.38)$$

mas uma prova rigorosa desse fato continua em aberto para dimensão  $n > 1$ .

A estimativa de energia (2.3) para uma versão não linear da (2.1) foi obtida por Schütz [48] em sua tese de doutorado, o que nos deixa apenas com a *missão* de obter uma estimativa análoga à (2.9) para o caso não linear. Não é difícil mostrar que esse é de fato o caso. Optamos por não apresentar essa demonstração

aqui simplesmente para manter o argumento a um nível acessível a um maior número de pessoas (já que o argumento para o caso mais complexo segue exatamente as mesmas linhas do caso linear). Atualmente, estamos analisando o caso *superlinear*

$$u_t + \partial_x(b(x, t)|u|^k u) = \partial_x(a(x, t, u)\partial_x u).$$

Apesar de termos alguns resultados parciais, preferimos não apresentá-los aqui, pois estão ainda em uma versão muito crua e longe da otimalidade.

Outro ponto interessante a destacar, é que a técnica desenvolvida aqui se estende de forma natural para outros problemas, em particular problemas envolvendo equações parabólicas degeneradas. Esses casos são o tema da tese de doutorado dos colegas Lucineia Fabris e Nicolau Diehl.

Os métodos desenvolvidos aqui deixam algumas questões em aberto. Em particular, quando a equação diferencial parcial em questão não possui soluções estacionárias, especulamos  $\|u(\cdot, t)\| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , mas isso ainda é apenas uma conjectura (apesar de que em alguns casos particulares ela pode ser verificada).

Outro problema interessante (que foi indicado pelo Prof. Lucas Catão de Freitas Ferreira) consiste em determinar a necessidade da limitação imposta na condição inicial. A teoria de regularidade clássica para Equações Diferenciais Parabólicas nos permite determinar, entre outras coisas, a limitação da solução  $u(x, t)$  para  $t > 0$  (mesmo quando a condição inicial é uma *medida!*) mas para tanto é necessário impor condições de limitação e regularidade dos coeficientes da equação diferencial em questão; em nosso caso não impomos nenhuma condição de limitação sobre os coeficientes, o que torna difícil conciliar a teoria clássica com os nossos resultados. Além disso, pelo menos no argumento desenvolvido nas seções 2.1 e 2.2 desse capítulo, é necessário utilizar o fato de que a condição inicial é limitada *a priori*; eliminar tal dependência também seria de grande interesse e um passo importante para tornar o método aqui apresentado mais robusto e versátil.

### 3 FUNÇÕES QUADRÁTICAS MULTILINEARES E MEDIDAS DE CARLESON

Como vimos na introdução, uma medida positiva  $d\mu(x, t)$  sobre  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  é chamada uma medida de Carleson se

$$\|d\mu\|_c = \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_0^{l(Q)} d\mu(x, t) < \infty, \quad (3.1)$$

onde  $|Q|$  denota a medida de Lebesgue do cubo  $Q$  e  $l(Q)$  é o comprimento do lado  $Q$ . Essas medidas foram introduzidas por Carleson [10], [11] e rapidamente se tornaram ferramentas de fundamental importância em Análise Harmônica; podemos citar o estudo de Integrais de Cauchy sobre curvas Lipschitz [14], o teorema  $T(1)$  [15, 17] e o estudo do Problema de Kato sobre Raízes de Operadores [1], como alguns exemplos onde a noção de Medidas de Carleson foi utilizada de forma crucial. A conexão natural entre medidas de Carleson, a continuidade de famílias de operadores lineares sobre  $L^2$ , e funções em  $BMO$  também foi discutida na introdução. Apenas por completude e referência futura, reenunciaremos esses resultados.

De forma precisa, considere  $\{R_t\}_{t>0}$  uma família de operadores integrais não convolutivos

$$R_t(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x, y) f(y) dy \quad (3.2)$$

cujos núcleos  $K_t$  satisfazem

$$|K_t(x, y)| \leq \frac{At^{-n}}{(1 + t^{-1}|x - y|)^{n+\delta}} \quad (3.3)$$

para alguma constante  $\delta > 0$ . Suponha que  $R_t(1)(x) = 0$  para todo  $t > 0$  e que exista uma constante positiva  $B$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |R_t(f)(x)|^2 \frac{dx dt}{t} \leq B^2 \|f\|_2^2 \quad (3.4)$$

para toda  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Então, dada uma função  $b \in BMO$ , a medida

$$d\mu(x, t) := |R_t(b)(x)|^2 \frac{dx dt}{t}$$



é Carleson com norma

$$\|d\mu\|_c \leq C_{n,\delta}(A^2 + B^2)\|b\|_{BMO}^2.$$

Aqui, a constante depende apenas sobre a dimensão e sobre a constante  $\delta$ . O primeiro resultado do tipo acima (um caso especial envolvendo operadores convolutivos) foi obtido por Fefferman e Stein [22]. Existe ainda o resultado recíproco, que foi obtido por Christ e Journé [13] e que garante que dada uma família de operadores  $R_t$  cujos núcleos  $K_t$  satisfazem a condição de crescimento (3.3) e a condição de regularidade

$$|K_t(x, y) - K_t(x, y')| \leq At^{-n}(t^{-1}|y - y'|)^\gamma, \quad (3.5)$$

se a estimativa de Carleson (note que a estimativa abaixo garante um tipo de controle no mesmo sentido da definição de medida de Carleson)

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_0^{l(Q)} |R_t(1)(x)|^2 \frac{dx dt}{t} < \infty \quad (3.6)$$

vale, então a estimativa (3.4) também vale. O resultado de Semmes pode ser aplicado (em conjunto com as técnicas de paraproductos introduzidas por Coifman-Meyer [15]) na obtenção de uma demonstração alternativa do teorema  $T(b)$  para integrais singulares (obtido originalmente por David, Journé e Semmes [17]) que também vale para integrais singulares sobre superfícies [49]

No presente trabalho, investigamos quando construções como as feitas acima podem ser transportadas para o mundo *multilinear*, isto é, se podemos construir medidas de Carleson a partir de famílias  $R_t$  de operadores multilineares e se existem teoremas  $T(1)$  e  $T(b)$  para *funções quadráticas multilineares*. A questão chave é: qual o análogo (natural) da condição de cancelamento  $R_t(1) = 0$  no caso multilinear? Examinamos dois tipos de cancelamento, a condição  $T(1)$  multilinear forte e a condição  $T(1)$  multilinear. O que é mais surpreendente é que em um desses casos (o caso que seria mais natural possível) funções em  $BMO$  não geram medidas de Carleson a partir do processo acima, enquanto que no outro caso (que é muito mais restritivo) continuamos tendo essa importante relação.

Para sermos mais precisos, é necessário a introdução de algumas definições, conceitos e notações.

Definimos a família de operadores multilineares  $\{\Theta_t\}_{t>0}$  por

$$\Theta_t(f_1, \dots, f_m)(x) = \int_{\mathbb{R}^{nm}} \theta_t(x, y_1, \dots, y_m) \prod_{i=1}^m f_i(y_i) dy_1 \cdots dy_m, \quad (3.7)$$

onde  $f_1, \dots, f_m$  são inicialmente definidas em  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  (isto é, suaves com suporte compacto). Para todo  $t > 0$ , assumimos que os núcleos  $\theta_t(x, y_1, \dots, y_m)$  satisfazem a condição de crescimento

$$|\theta_t(x, y_1, \dots, y_m)| \leq A \left( \prod_{i=1}^m \frac{t^{-n}}{\left(1 + \frac{|x-y_i|}{t}\right)^{n+\delta}} \right) \quad (3.8)$$

e as condições de regularidade

$$\begin{aligned} & |\theta_t(x, y_1, \dots, y_i, \dots, y_m) - \theta_t(x, y_1, \dots, y'_i, \dots, y_m)| \\ & \leq A |y_i - y'_i|^\gamma t^{-\gamma} \times \left( \prod_{j=1}^m \frac{t^{-n}}{\left(1 + \frac{|x-y_j|}{t}\right)^{n+\delta}} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

para todo  $i = 1, \dots, m$  e para todo  $x, y_i, y'_i \in \mathbb{R}^n$ . No caso em que dispomos da condição de cancelamento  $T(1)$  multilinear forte basta a condição

$$\begin{aligned} & |\theta_t(x, y_1, \dots, y_i, \dots, y_m) - \theta_t(x, y_1, \dots, y'_i, \dots, y_m)| \\ & \leq A |y_i - y'_i|^\gamma t^{-(\gamma+n)} \times \left( \prod_{j=2}^m \frac{t^{-n}}{\left(1 + \frac{|x-y_j|}{t}\right)^{n+\delta}} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

**Definição 1.** Dizemos que a família de operadores (ou simplesmente que os operadores satisfazem)  $\{\Theta_t\}_{t>0}$  com núcleos  $\theta_t$  satisfaz a condição de cancelamento  $T(1)$  multilinear forte se para todo  $x, y_i \in \mathbb{R}^n$  e  $t > 0$  temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \theta_t(x, y_1, \dots, y_m) dy_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (3.11)$$

Dizemos que  $\{\Theta_t\}$  satisfaz a condição de cancelamento  $T(1)$  multilinear se para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t > 0$  temos

$$\int_{\mathbb{R}^{mn}} \theta_t(x, y_1, \dots, y_m) dy_1 \cdots dy_m = 0. \quad (3.12)$$

Agora estamos em condição de enunciar um de nossos resultados principais:

**Teorema 3.1.** *Considere o operador*

$$R_t(f_1, \dots, f_m)(x) = \int_{\mathbb{R}^{mn}} r_t(x, y_1, \dots, y_m) \prod_{i=1}^m f_i(y_i) dy_1 \cdots dy_m$$

cujo núcleo  $r_t(x, y_1, \dots, y_m)$  satisfaz a condição de crescimento (3.8) para alguma constante  $\delta > 0$ . Assuma também que para  $p_i$  fixos ( $i = 1, \dots, m$ ) satisfazendo  $2 \leq p_i \leq \infty$  e

$$\frac{1}{2} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i},$$

existe uma constante  $B$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |R_t(f_1, \dots, f_m)(x)|^2 \frac{dx dt}{t} \leq B^2 \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i}^2, \quad (3.13)$$

para toda  $f_i \in L^{p_i}$ .

(i) Se  $\{r_t\}$  satisfaz a condição de cancelamento  $T(1)$  multilinear forte, então existe uma constante  $C_{n,\delta}$  tal que para quaisquer funções  $b_1, \dots, b_m \in BMO(\mathbb{R}^n)$  a medida

$$d\mu(x, t) := |R_t(b_1, \dots, b_m)(x)|^2 \frac{dx dt}{t} \quad (3.14)$$

é Carleson com constante de Carleson

$$\|d\mu\|_C \leq C_{n,\delta}(A^2 + B^2) \|b_1\|_{BMO}^2 \cdots \|b_m\|_{BMO}^2. \quad (3.15)$$

(ii) Existe uma constante  $C_{n,\delta}$  tal que para quaisquer funções  $b_1, \dots, b_m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , a medida  $d\mu(x, t)$  em (3.14) é Carleson com constante

$$\|d\mu\|_C \leq C_{n,\delta}(A^2 + B^2) \|b_1\|_\infty^2 \cdots \|b_m\|_\infty^2.$$

Em particular, o resultado vale se  $\{R_t\}$  satisfaz a condição de cancelamento  $T(1)$  multilinear.

(iii) Sob a condição  $T(1)$  multilinear, a medida em (3.14) não precisa ser Carleson se pelo menos um dos  $b_i$  é uma função ilimitada em  $BMO$ .

O segundo resultado importante relaciona a continuidade do operador

$$S(f_1, \dots, f_m) = \left( \int_0^\infty |R_t(f_1, \dots, f_m)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2},$$

onde a família  $\{R_t\}$  é composta por operadores multilineares do tipo acima, com uma condição de cancelamento menos restrita. O primeiro resultado desse tipo, o teorema  $T(b)$  para integrais singulares, foi obtido por David, Journé e Semmes [17] (de fato, uma versão mais simples desse resultado apareceu pela primeira vez no artigo de McIntosh e Meyer [40], todavia a versão geral se deve aos autores supracitados), e basicamente caracteriza a continuidade desses operadores em  $L^2$  impondo condições muito fracas sobre regularidade e decaimento do núcleo (*weak bounded property*), e supondo que exista uma função acretiva  $b$  onde o operador se anula (uma hipótese semelhante precisa ser imposta para o operador transposto, mas não entraremos em detalhes). Um argumento de Coifman-Meyer [15] permitiu uma prova consideravelmente mais simples do resultado supracitado: utilizando a fórmula de representação de Calderón [23] (ou seja, aplicando operadores de Littlewood-Paley para decompor o operador em *peças mais simples*), eles reduziram o problema a um tipo de teorema  $T(1)$  para funções quadráticas. A mesma ideia foi explorada para outros operadores por Christ-Journé [13]. O primeiro resultado envolvendo um cancelamento do tipo  $T(b)$  para funções quadráticas foi obtido por Semmes no início dos anos 1990. Para provar o seu resultado, Semmes empregou medidas de Carleson e um teorema  $T(1)$  quadrático (que pode ser visto como uma versão contínua do lema de quasi-ortogonalidade de Cotlar-Stein). Uma vez que um teorema  $T(1)$  quadrático vale no caso multilinear (como veremos adiante) e considerando que a relação necessária envolvendo medidas de Carleson e operadores multilineares também é válida, ficamos inclinados a conjecturar que o teorema  $T(b)$  quadrático também é válido no caso multilinear. De fato, esse é o caso, e a seguir descrevemos as ideias envolvidas.

Para começar, reenunciaremos o teorema  $T(b)$  quadrático de Semmes em [50]: Seja  $\{R_t\}_{t>0}$  uma família de operadores lineares como em (3.2) cujos núcleos

satisfazem (3.3). Suponha que para todo  $t > 0$  temos a condição de cancelamento

$$R_t(b)(x) = 0$$

para alguma função complexa limitada  $b$  sobre  $\mathbb{R}^n$ , com  $\operatorname{Re} b(x) \geq c_0 > 0$  para quase todo  $x \in \mathbb{R}^n$  (tais funções são chamadas *acretivas*). Então, a desigualdade (3.4) é satisfeita.

O resultado que segue estende para o caso multilinear o teorema de Semmes. Podemos ver também esse resultado como uma aplicação parcial do Teorema 3.1.

**Teorema 3.2.** *Seja  $A, \delta, \gamma > 0$  e suponha que  $\theta_t(x, y_1, \dots, y_m)$  satisfaz a condição de crescimento (3.8) e as condições de regularidade (3.9). Assuma que existam funções acretivas  $b_1, \dots, b_m$  sobre  $\mathbb{R}^n$  tal que a condição de cancelamento*

$$\Theta_t(b_1, \dots, b_m) = 0 \tag{3.16}$$

*é satisfeita. Então para todo  $2 < p_i < \infty$  ( $i = 1, \dots, m$ ) satisfazendo  $\frac{1}{2} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}$ , existe uma constante positiva  $C = C_{n, \delta, \gamma, p_i}$  tal que para toda  $f_i \in L^{p_i}(\mathbb{R}^n)$  temos*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |\Theta_t(f_1, \dots, f_m)(x)|^2 \frac{dx dt}{t} \leq C^2 A^2 \left(1 + \prod_{i=1}^m \|b_i\|_\infty^2\right) \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i}^2. \tag{3.17}$$

Exatamente como no caso linear, a prova do teorema acima combina um teorema quadrático  $T(1)$  multilinear aplicado à família de operadores multilineares  $\Theta_t$  (que pode ser visto como uma versão multilinear contínua do lema de Cotlar-Stein [34], [16]), com estimativas envolvendo medidas de Carleson, baseadas no trabalho de Coifman, McIntosh e Meyer [14] a respeito de Integrais de Cauchy sobre curvas Lipschitz.

Como indicado, um passo importante na prova do teorema 3.2 é a versão multilinear do teorema quadrático  $T(1)$ . A versão de que necessitamos para a prova do teorema é enunciada abaixo (teorema 3.3). Em particular, este teorema pode ser visto como uma extensão direta dos resultados obtidos por Maldonado [39] e por Maldonado e Naibo [38].

**Teorema 3.3.** *Suponha que o núcleo  $\theta_t(x, y_1, \dots, y_m)$  satisfaz a condição de crescimento (3.8) e as condições de regularidade (3.9) ou (3.10) (dependendo do tipo de cancelamento), para um par de constantes  $\gamma$  e  $\delta$ . Considere a função quadrática “multilinear”:*

$$S(f_1, \dots, f_m) = \left( \int_0^\infty |\Theta_t(f_1, \dots, f_m)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}.$$

*Suponha que  $\Theta_t$  satisfaz a condição de cancelamento  $T(1)$  multilinear ou a condição  $T(1)$  multilinear forte. Então*

$$S : L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times \dots \times L^{p_m}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$$

*para todos  $1 < p_1, \dots, p_m, p < \infty$  satisfazendo  $1/p = 1/p_1 + \dots + 1/p_m$ , com norma de operador limitada por*

$$\|S\|_{op} \leq C_{n,\delta,\gamma} A. \quad (3.18)$$

*Além disso, estimativas extremas onde alguns (mas não todos)  $p_j$  são infinitos, também são válidas.*

Esse capítulo é organizado da seguinte forma: Na próxima seção, colecionamos alguns resultados clássicos (ou que seguem de resultados clássicos sem nenhuma dificuldade) que serão úteis adiante. A segunda seção contém a demonstração do teorema 3.1. Na terceira seção, provamos o teorema quadrático  $T(1)$  multilinear (teorema 3.3) e na quarta, provamos o teorema 3.2. Na quinta e última seção indicamos alguns resultados de pesquisa corrente.

Esse capítulo contém os resultados do artigo [28], que foi escrito durante o período de doutorado sanduíche no Departamento de Matemática da Universidade do Missouri.

### 3.1 Notação e Resultados Preliminares

No decorrer das demonstrações desse capítulo, trabalharemos sempre com funções suaves e com suporte compacto (isto é,  $C_0^\infty$ ). Porém, como as conclusões

não dependerão da regularidade ou do suporte dessas funções, o resultado vale (por densidade) para funções em  $L^{p_j}$  em geral.

Em algumas partes, onde as constantes em uso não forem importantes, usaremos a notação  $A \lesssim B$  para indicar a existência de uma constante  $C$  tal que  $A \leq C.B$ . Essas constantes podem depender da dimensão  $n$ , dos números  $\delta$  e  $\epsilon$ , das constantes introduzidas em (3.8) e (3.9), e sobre a norma de operador de algumas funções maximais de Hardy-Littlewood que vão aparecer em nossas demonstrações.

Iniciamos introduzindo a noção de operadores Littlewood-Paley contínuos. Consideramos uma função suave  $\Psi$  cuja transformada de Fourier é suportada na região anular  $\{\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\}$ . Denotamos por  $\Psi_s(x) = \frac{1}{s^n} \Psi\left(\frac{x}{s}\right)$  a dilatação  $L^1$  de  $\Psi$ . O operador  $Q_s(h) = h \star \Psi_s$  é chamado de *operador de Littlewood-Paley* associado com  $\Psi$ . Além disso, suponha que  $\Psi$  é normalizada de tal forma que a seguinte condição é satisfeita:

$$\int_0^\infty |\widehat{\Psi}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} = 1. \quad (3.19)$$

Então, um resultado clássico (cuja demonstração pode ser encontrada em [23]) nos diz que

$$\int_0^\infty Q_s^2 f \frac{ds}{s} := \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \int_\epsilon^N Q_s^2 f \frac{ds}{s} = f \quad (3.20)$$

em  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Essa expressão, conhecida como *fórmula de Calderón*, desempenha um papel fundamental em Análise Harmônica e na Teoria de Wavelets [1, 14, 15].

**Definição 2.** A função  $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  é chamada função acretiva se existe uma constante positiva  $c_b$  tal que  $\text{Re}(b(x)) \geq c_b$  para quase todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

O lema abaixo, cuja demonstração para o caso  $\delta = 1$  pode ser encontrada no livro de Stein [54] p.160, será utilizado para controlar alguns termos durante a demonstração do teorema 3.1.

**Lema 3.1.1.** Sejam  $\Phi_t(x, y)$  uma função suave que satisfaz para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|\Phi_t(x - y)| \lesssim \frac{t^{-n}}{(1 + t^{-1}|x - y|)^{n+\delta}}$$

para algum  $\delta > 0$ , e  $Q$  é uma bola qualquer em  $\mathbb{R}^n$ . Se denotarmos por  $Q^* = 2Q$  e por  $(Q^*)^c$  o complementar, segue que para toda função  $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$  vale a desigualdade

$$|(\Phi_t \star (b - Avg_Q b)\chi_{(Q^*)^c})(x)| \lesssim \left(\frac{t}{l(Q)}\right)^\delta \|b\|_{BMO}$$

sempre que  $(x, t) \in Q \times [0, l(Q)]$ .

**Prova.** A ideia é de fato bastante simples. Quando  $(x, t) \in Q \times [0, l(Q)]$  e  $y \in (B_Q^*)^c$ , se denotarmos o centro do cubo  $Q$  por  $c_Q$ , segue que  $\frac{1}{2}|c_Q - y| \leq |x - y| \leq 2|c_Q - y|$ , de onde deduzimos

$$|\Phi_t \star (b - Avg_Q b)\chi_{(Q^*)^c}(x)| \lesssim t^\delta \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(b - Avg_Q b)\chi_{(B_Q^*)^c}(y)}{(t + |c_Q - y|)^{n+\delta}} dy. \quad (3.21)$$

Agora, observe que  $\frac{t}{(t+|c_Q-y|)^{n+\delta}} \lesssim \frac{t}{(l(Q)+|c_Q-y|)^{n+\delta}}$  para  $0 < t < l(Q)$ . Usando a desigualdade

$$r^\delta \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y) - Avg_Q f|}{(r + |c_Q - y|)^{n+\delta}} dy \lesssim \|f\|_{BMO}, \quad (3.22)$$

e a observação precedente, obtemos

$$|\Phi_t \star (b - Avg_Q b)\chi_{(Q^*)^c}(x)| \lesssim \left(\frac{t}{l(Q)}\right)^\delta \|f\|_{BMO}.$$

O leitor interessado pode consultar [26], pág. 121, para uma demonstração de (3.22).

Durante a demonstração do teorema  $T(1)$ , usaremos os resultados a seguir. Nosso primeiro resultado é uma coleção de estimativas simples envolvendo funções do tipo  $w(t, s) = \min\left(\frac{t}{s}, \frac{s}{t}\right)^\epsilon$ , onde  $\epsilon$ ,  $s$  e  $t$  são números reais positivos.

**Lema 3.1.2.** *Considere a função  $w(t, s) = \min\left(\frac{t}{s}, \frac{s}{t}\right)^\epsilon$ , onde  $\epsilon$ ,  $s$  e  $t$  são números reais positivos. Então*

$$I = \sup_{t>0} \int_0^\infty w(t, s) \frac{ds}{s} = \sup_{s>0} \int_0^\infty w(t, s) \frac{dt}{t} < \infty, \quad (3.23)$$

**Prova.** Note que

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty w(t, s) \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \min\left(\frac{t}{s}, \frac{s}{t}\right)^\epsilon \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^s \left(\frac{t}{s}\right)^\epsilon \frac{dt}{t} + \int_s^\infty \left(\frac{s}{t}\right)^\epsilon \frac{dt}{t} \\ &= \frac{2}{\epsilon} < \infty \end{aligned}$$



Como as funções  $w(t, s)$  são simétricas, isso encerra a demonstração do lema.

Nosso segundo resultado, nos mostra como limitar certas integrais envolvendo funções radiais com um certo grau de decaimento (em particular, tal controle se dará em termos de funções do tipo  $w(t, s_i)$ ). O segundo resultado teve sua demonstração adaptada a partir do resultado apresentado em [26].

**Lema 3.1.3.** *Dados  $N \in \mathbb{N}$  e  $\gamma, \delta > 0$ , temos que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{s^{-N} \min(2, (t^{-1}|u|)^\gamma)}{(1 + s^{-1}|u|)^{N+\delta}} du \leq C_{N,\delta,\gamma} \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{2} \min(\gamma,\delta)} \quad \text{se } s \leq t \quad (3.24)$$

**Prova.** A ideia é simples: decompos a integral sobre  $\mathbb{R}^N$  em duas regiões, uma onde  $\frac{s}{t}|u| \leq 2$  e outra onde  $\frac{s}{t}|u| \geq 2$ . Dessa forma

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{s^{-N} \min(2, (t^{-1}|u|)^\gamma)}{(1 + s^{-1}|u|)^{N+\delta}} du = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\min(2, (s t^{-1}|u|)^\gamma)}{(1 + |u|)^{N+\delta}} du \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\min\left(2, \left(\frac{s}{t}|u|\right)^{\frac{1}{2} \min(\gamma,\delta)}\right)}{(1 + |u|)^{N+\delta}} du \\ &\leq C_{\delta,\gamma} \int_{|u| \leq 2\frac{t}{s}} \frac{\left(\frac{s}{t}|u|\right)^{\frac{1}{2} \min(\gamma,\delta)}}{(1 + |u|)^{N+\delta}} du + \int_{|u| \geq 2\frac{t}{s}} \frac{2}{(1 + |u|)^{N+\delta}} du \\ &\leq C_{N,\delta,\gamma} \left[ \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{2} \min(\delta,\gamma)} + \left(\frac{s}{t}\right)^\delta \right] \\ &\leq C_{N,\delta,\gamma} \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{2} \min(\delta,\gamma)} \end{aligned}$$

Na demonstração teorema  $T(b)$ , vamos precisar relacionar a continuidade em  $L^p(\mathbb{R}^n)$  de certos operadores multilineares com estimativas envolvendo medidas de Carleson. É com o seguinte resultado (que em sua versão linear é conhecido como *lema de Carleson*) que exploramos as medidas de Carleson no contexto multilinear.

**Lema 3.1.4.** *Seja  $P_s(f)(x) = (P_s \star f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_s(x-y)f(y)ds$ , onde  $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  satisfaz*

$$|\Phi(y)| \lesssim \frac{1}{(1 + |y|)^{n+1}} \quad (3.25)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) dy = 1. \quad (3.26)$$

Suponha também que  $1 \leq p_1, \dots, p_m \leq \infty$  e que  $0 < r < \infty$ . Então, para todas as medidas de Carleson  $d\mu(x, t)$ , o operador  $m$ -linear

$$\mathbb{P}_s(f_1, \dots, f_m)(x) = \prod_{i=1}^m P_s(f_i)(x) \quad (3.27)$$

satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |\mathbb{P}_t(f_1, \dots, f_m)(x)|^r d\mu(x, t) \lesssim \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i}^r \quad (3.28)$$

para quaisquer funções suaves  $f_i \in L^{p_i}(\mathbb{R}^n)$ , onde

$$\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}.$$

**Prova.** Basta empregarmos a desigualdade de Hölder e o resultado linear que pode ser encontrado em [26, 54]:

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |\mathbb{P}_t(f_1, \dots, f_m)(x)|^r d\mu(x, t) \right)^{1/r} &\leq \prod_{i=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |P_t(f_i)(x)|^{p_i} d\mu(x, t) \right)^{1/p_i} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^{p_i}}. \end{aligned}$$

### 3.2 Prova do teorema 3.1

Fixe um cubo  $Q$ . Para provarmos a parte (i) precisamos mostrar que para todas funções  $b_1, \dots, b_m$  em  $BMO(\mathbb{R}^n)$

$$\left( \int_Q \int_0^{l(Q)} |R_t(b_1, \dots, b_m)(x)|^2 \frac{dx dt}{t} \right)^{1/2} \lesssim |Q|^{1/2} \prod_{i=1}^m \|b_i\|_{BMO}. \quad (3.29)$$

Fixando a notação  $b_{j,1} = (b_j - Avg_Q b_j) \chi_{Q^*}$ ,  $b_{j,2} = (b_j - Avg_Q b_j) \chi_{(Q^*)^c}$  e  $b_{j,0} = Avg_Q b_j$ , onde  $Q^* = 2Q$ , introduzimos as decomposições

$$b_j = b_{j,0} + b_{j,1} + b_{j,2} \quad (3.30)$$

para todo  $j = 1, \dots, m$ . Usando a desigualdade de Minkowski em (3.29), é suficiente mostrar que

$$\int_Q \int_0^{l(Q)} |R_t(b_{1,k_1}, \dots, b_{m,k_m})(x)|^2 \frac{dx dt}{t} \lesssim \prod_{i=1}^m \|b_i\|_{BMO}^2 |Q|, \quad (3.31)$$

onde  $k_i \in \{0, 1, 2\}$ . Como  $r_t$  satisfaz a condição  $T(1)$  multilinear forte, cada termo da forma (3.31) que contém  $b_{i,0}$  se anula. Dessa forma, podemos fixar nossa atenção na situação onde temos  $m_1$  entradas contendo  $b_{j,1}$  e  $m_2$  entradas contendo  $b_{j,2}$ , onde  $m = m_1 + m_2$  e  $0 \leq m_1 \leq m$ . Permutando as variáveis se necessário, podemos assumir sem perda de generalidade que as primeiras  $m_1$  variáveis de  $\theta_t$  correspondem a  $b_{j,1}$  e as variáveis restantes de  $\theta_t$  estão associadas a  $b_{j,2}$ .

Começamos com o caso em que  $m_2 = 0$ . Então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |R_t(b_{1,1}, \dots, b_{m,1})|^2 \frac{dxdt}{t} &\leq B^2 \prod_{i=1}^m \|(b_i - \text{Avg}_Q b_i) \chi_{Q^*}\|_{p_i}^2 \\ &\lesssim B^2 \prod_{i=1}^m \|b_i\|_{BMO}^2 |Q|, \end{aligned} \quad (3.32)$$

simplesmente usando a hipótese (3.13) e a caracterização de  $BMO$  em termos da oscilação média da norma  $L^p$  (ver [26], Capítulo 7).

Agora, consideramos o caso em que  $m_2 > 0$ . Nesse caso, simplesmente estimamos  $R_t(b_1, \dots, b_m)(x)$  usando a condição de crescimento (3.8)

$$\begin{aligned} &|R_t(b_{1,1}, \dots, b_{m_1,1}, b_{m_1+1,2}, \dots, b_{m,2})(x)| \\ &\lesssim A \prod_{i=1}^{m_1} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(b_i - \text{Avg}_Q b_i) \chi_{Q^*}(y_i)|}{t^n (1 + t^{-1}|x - y_i|)^{n+\delta}} dy_i \right) \\ &\quad \times \prod_{i=m_1+1}^{m_2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(b_i - \text{Avg}_Q b_i) \chi_{(Q^*)^c}(y_i)|}{t^n (1 + t^{-1}|x - y_i|)^{n+\delta}} dy_i \right) \\ &=: A \left( \prod_{i=1}^{m_1} |P_{1,t}(b_i)(x)| \right) \left( \prod_{i=m_1+1}^m |P_{2,t}(b_i)(x)| \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Para os termos envolvendo  $P_{2,t}(b_i)$  usamos simplesmente

$$|P_{2,t}(b_i)(x)| \lesssim \left( \frac{t}{l(Q)} \right)^\delta \|b_i\|_{BMO}, \quad (3.34)$$

que nada mais é do que o lema 3.1.1 aplicado a cada função  $b_i$ .

Para os termos envolvendo  $P_{1,t}(b_i)(x)$ , usamos que a função maximal de Hardy-Littlewood domina  $P_{1,t}$  para quase todo  $x$ :

$$|P_{1,t}(b_i)(x)| \lesssim M((b_i - \text{Avg}_Q b_i) \chi_{Q^*}(x)). \quad (3.35)$$

Combinando esses dois tipos de estimativa, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_Q \int_0^{l(Q)} |R_t(b_{1,1}, \dots, b_{m_1,1}, b_{m_1+1,2}, \dots, b_{m,2})(x)|^2 \frac{dxdt}{t} \\
& \lesssim A^2 \int_Q \int_0^{l(Q)} \left( \prod_{i=1}^{m_1} M((b_i - \text{Avg}_Q b_i) \chi_{Q^*})(x) \right)^2 \\
& \quad \times \left( \frac{t}{l(Q)} \right)^{2m_2\delta} \prod_{i=m_1+1}^m \|b_i\|_{BMO}^2 \frac{dxdt}{t} \\
& \lesssim A^2 \left\| \prod_{i=1}^{m_1} M((b_i - \text{Avg}_Q b_i) \chi_{Q^*}) \right\|_{L^2(Q)}^2 \prod_{i=m_1+1}^m \|b_i\|_{BMO}^2 \\
& \lesssim A^2 \prod_{i=1}^{m_1} \|M((b_i - \text{Avg}_Q b_i) \chi_{Q^*})\|_{L^{p_i}(\mathbb{R}^n)}^2 \prod_{i=m_1+1}^m \|b_i\|_{BMO}^2 \\
& \lesssim A^2 \prod_{i=1}^{m_1} \|(b_i - \text{Avg}_Q b_i) \chi_{Q^*}\|_{L^{p_i}(\mathbb{R}^n)}^2 \prod_{i=m_1+1}^m \|b_i\|_{BMO}^2 \\
& \lesssim A^2 \prod_{i=1}^{m_1} \|b_i\|_{BMO}^2 \left( |Q|^{\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_{m_1}}} \right)^2 \prod_{i=m_1+1}^m \|b_i\|_{BMO}^2 \\
& = C A^2 |Q| \prod_{i=1}^m \|b_i\|_{BMO}^2,
\end{aligned}$$

onde  $p_i \geq 2$  satisfazem  $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_{m_1}} = \frac{1}{2}$ . Na última parte da prova usamos a caracterização de  $BMO$  em termos da oscilação média da norma  $L^p$ . Isso prova o primeiro item do teorema.

Agora, segue a prova do item (ii). Já que estamos trabalhando apenas com funções limitadas, introduziremos uma decomposição um pouco diferente da aplicada no item acima, à saber

$$b_j = \chi_{Q^*} b_j + \chi_{(Q^*)^c} b_j = b_{j,0} + b_{j,1} \quad (3.36)$$

onde,  $Q^* = 2Q$ . Para estimarmos

$$\int_0^{l(Q)} \int_Q |R_t(b_{1,0}, \dots, b_{m,0})(x)|^2 \frac{dxdt}{t} \quad (3.37)$$

usamos (3.13). Isso nos permite deduzir que (3.37) é no máximo limitada por

$$B^2 \|b_{1,0}\|_{L^{p_1}}^2 \cdots \|b_{m,0}\|_{L^{p_m}}^2 \leq B^2 \left( |Q^*|^{\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m}} \right)^2 \prod_{i=1}^m \|b_i\|_{L^\infty}^2 \leq c B^2 \prod_{i=1}^m \|b_i\|_{L^\infty}^2 |Q|$$

e isso nos dá a estimativa desejada para esse termo. Se pelo menos um dos termos  $b_{j,0}$  é substituído por  $b_{j,1}$  em (3.37), então usamos a estimativa

$$|R_t(b_{1,r_1}, \dots, b_{m,r_m})|^2 \leq A \left[ \prod_{i,r_i=0} M(b_{i,r_i}) \right] \left[ \prod_{i,r_i=1} P_{2,t}(b_{i,r_i}) \right], \quad (3.38)$$

onde o operador  $P_{2,t}$  foi definido acima e onde o segundo produto em (3.38) possui pelo menos um termo, o que nos permite estimar (3.34) simplesmente usando o fato de que o termo  $t^\delta$  faz a integral em  $\mathbb{R}^+$  ser convergente. Isso prova o segundo item.

Finalizamos com o terceiro item do teorema. Seleccionamos uma função suave com decaimento polinomial  $\psi(y, z)$  sobre  $\mathbb{R}^2$  com as seguintes propriedades <sup>1</sup>

(a)  $\psi(-y, z) = -\psi(y, z)$ .

(b) Seja  $\psi^0(y) = \int_{\mathbb{R}} \psi(y, z) dz$ . Então  $\int_0^1 |\widehat{\psi^0}(\xi)|^2 d\xi > 0$ .

A condição (a) implica que  $\psi(y, z)$  possui valor médio nulo com respeito a variável  $y$  (e por consequência sobre todo  $\mathbb{R}^2$ ). A condição (b) implica, em particular, que  $\psi^0$  não é a função identicamente zero; logo  $\int_{\mathbb{R}} \psi(y, z) dz = \psi^0(y) \neq 0$  para algum  $y \in \mathbb{R}$ . Dessa maneira, o núcleo  $\theta_t(x, y_1, y_2) = \frac{1}{t^2} \psi\left(\frac{x-y_1}{t}, \frac{x-y_2}{t}\right)$  satisfaz a condição  $T(1)$  multilinear e também satisfaz a condição  $T(1)$  multilinear forte com respeito a variável  $y_1$ , mas não com respeito a variável  $y_2$ .

Agora, considere o operador integral bilinear dado por

$$R_t(f, g)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{t^2} \psi\left(\frac{x-y}{t}, \frac{x-z}{t}\right) f(y)g(z) dydz.$$

Dado  $0 < \epsilon < 1/100$  tome

$$b_1^\epsilon(y) = e^{2\pi iy/\epsilon} - e^{-2\pi iy/\epsilon},$$

$$b_2(y) = \log |y|,$$

e  $I_\epsilon = [-\epsilon, \epsilon]$ . Então  $b_2$  é uma função em  $BMO$  cuja média sobre  $I_\epsilon$  é  $a_\epsilon \approx \log \epsilon^{-1}$  e  $b_1$  é uma função ímpar limitada por 2. Escreva

$$b_2 = b_{2,0} + b_{2,1} + b_{2,2},$$

---

<sup>1</sup>A função  $\psi(y, z) = y(1 + |y|^2 + |z|^2)^{-5/2}$  possui as propriedades especificadas.

onde  $b_{2,2} = a_\epsilon$ ,

$$b_{2,0}(y) = (\log |y| - a_\epsilon)\chi_{2I_\epsilon},$$

e onde

$$b_{2,1}(y) = (\log |y| - a_\epsilon)\chi_{(2I_\epsilon)^c}.$$

Temos então que

$$R_t(b_1^\epsilon, b_2) = R_t(b_1^\epsilon, b_{2,0}) + R_t(b_1^\epsilon, b_{2,1}) + R_t(b_1^\epsilon, b_{2,2}).$$

Decompomos  $b_1^\epsilon = b_1^\epsilon\chi_{2I_\epsilon} + b_1^\epsilon\chi_{(2I_\epsilon)^c}$ , e usamos as estimativas da prova do teorema 3.1 que implicam (sem usar qualquer tipo de condição de cancelamento em  $\psi$ )

$$\frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \int_0^{\epsilon} |R_t(b_1^\epsilon, b_{2,0})(x)|^2 \frac{dxdt}{t} + \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \int_0^{\epsilon} |R_t(b_1^\epsilon, b_{2,1})(x)|^2 \frac{dxdt}{t} \leq C',$$

onde  $C' \geq C_n(A+B)^2 \|b_1^\epsilon\|_{BMO}^2 \|b_2\|_{BMO}^2$  e  $C'$  é independente de  $\epsilon$ . O cancelamento de  $\psi$  é usado somente para *aniquilar* os termos contendo, pelo menos, uma média. Note que nenhuma média aparece na estimativa precedente. Usando essas observações, para provarmos que a medida  $|R_t(b_1^\epsilon, b_2)|^2 dxdt/t$  não é Carleson, é suficiente mostrar que

$$\frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \int_0^{\epsilon} |R_t(b_1^\epsilon, b_{2,2})(x)|^2 \frac{dxdt}{t} \geq c |\log \epsilon^{-1}|^2 \uparrow \infty \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0+,$$

que, por sua vez, é equivalente a mostrar que (desde que  $b_{2,2} = a_\epsilon$ )

$$\frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \int_0^{\epsilon} |R_t(b_1^\epsilon, 1)(x)|^2 \frac{dxdt}{t} \geq c. \quad (3.39)$$

Um cálculo simples nos mostra que

$$R_t(b_1^\epsilon, 1)(x) = e^{2\pi ix/\epsilon} \widehat{\psi^0}(t/\epsilon) - e^{-2\pi ix/\epsilon} \widehat{\psi^0}(-t/\epsilon) = 2 \cos(2\pi x/\epsilon) \widehat{\psi^0}(t/\epsilon),$$

onde a última igualdade segue do fato de que  $\widehat{\psi^0}$  é ímpar, que por sua vez é consequência do fato de que  $\psi$  é ímpar na primeira variável. Usando essa última identidade em  $R_t(b_1^\epsilon, 1)(x)$ , obtemos que a expressão no lado esquerdo em (3.39) precisa ser no mínimo maior que

$$\frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \int_0^{\epsilon} 4 \cos^2(2\pi x/\epsilon) |\widehat{\psi^0}(t/\epsilon)|^2 \frac{dxdt}{t},$$

e uma mudança de variáveis nos permite verificar que a quantidade acima é limitada (por baixo) por uma constante independente de  $\epsilon$  desde que  $\int_0^1 |\widehat{\psi^0}(\xi)|^2 d\xi > 0$ . Isso encerra a demonstração do item (iii) e do teorema.

### 3.3 Prova do teorema $T(1)$

Nessa seção provaremos o teorema 3.3. Esse teorema aparece como peça fundamental na prova do teorema 3.2. A prova se dará em duas partes: na primeira provamos o caso em que  $T(1, \dots) = \dots = T(\dots, 1) = 0$  e na segunda o caso geral.

*Demonstração.* Utilizando os operadores de Littlewood-Paley  $Q_s$  introduzidos na seção anterior, reescrevemos o operador  $\Theta_t$  de forma mais conveniente:

$$\begin{aligned}
& \Theta_t(f_1, \dots, f_m)(x) \\
&= \Theta_t \left( \int_0^\infty Q_s^2 f_1 \frac{ds}{s}, \dots, f_m \right) (x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{mn}} \left( \int_0^\infty (Q_s^2 f_1)(y_1) \frac{ds}{s} \right) \prod_{i=2}^m f_i(y_i) \theta_t(x, y_1, \dots, y_m) dy_1 \cdots dy_m \\
&= \int_0^\infty \left( \int_{\mathbb{R}^{mn}} (Q_s^2 f_1)(y) \prod_{i=2}^m f_i(z) \theta_t(x, y_1, \dots, y_m) dy_1 \cdots dy_m \right) \frac{ds}{s} \\
&= \int_0^\infty \Theta_t(Q_s^2 f_1, \dots, f_m)(x) \frac{ds}{s}. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Analisaremos a continuidade do operador utilizando dualidade. Para tal, introduzimos funções  $h(x, t) \in L^{p'}(dx, L^2(\frac{dt}{t}))$  com

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty |h(x, t)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{p'/2} dx \right)^{1/p'} = \|h\|_{p', 2} \leq 1.$$

Usando essas funções, temos que

$$\begin{aligned}
\|S(f_1, \dots, f_m)\|_p &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^\infty |\Theta_t(f_1, \dots, f_m)(x)|^2 \frac{dt}{t} \right|^{p/2} dx \right)^{1/p} \\
&= \sup_{\|h\|_{p', 2} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \Theta_t(f_1, \dots, f_m)(x) h(x, t) \frac{dt}{t} dx \right|. \tag{3.41}
\end{aligned}$$

Agora, para  $h$  fixa satisfazendo  $\|h\|_{p',2} \leq 1$  temos (usando (3.40))

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \Theta_t(f_1, \dots, f_m)(x) h(x, t) \frac{dt}{t} dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \Theta_t(f_1, \dots, f_m)(x) h(x, t) \frac{dt}{t} dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \left( \int_0^\infty [\Theta_t(Q_s^2 f_1, \dots, f_m)(x)] \frac{ds}{s} \right) h(x, t) \frac{dt}{t} dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \Theta_t(Q_s^2 f_1, \dots, f_m)(x) h(x, t) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} dx \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty \int_0^\infty |\Theta_t(Q_s^2 f_1, \dots, f_m)(x)|^2 w(t, s)^{-1} \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right. \\
&\quad \left. \times \left( \int_0^\infty \int_0^\infty |h(x, t)|^2 w(t, s) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right)^{1/2} dx \right|, \tag{3.42}
\end{aligned}$$

onde  $w(t, s)$  é uma função simétrica e positiva que satisfaz

$$A_w := \sup_{t>0} \int_0^\infty w(t, s) \frac{ds}{s} = \sup_{s>0} \int_0^\infty w(t, s) \frac{dt}{t} < \infty, \tag{3.43}$$

a ser definida adiante. Combinando (3.41)-(3.43), obtemos

$$\begin{aligned}
& \|S(f_1, \dots, f_m)\|_p \\
&\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty \int_0^\infty |\Theta_t(Q_s^2 f_1, \dots, f_m)|^2 w(t, s)^{-1} \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right)^{p/2} dx \right)^{1/p} \\
&\quad \times \sup_h \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty \int_0^\infty |h(x, t)|^2 w(t, s) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right)^{p'/2} dx \right)^{1/p'} \\
&\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty \int_0^\infty |\Theta_t(Q_s^2 f_1, \dots, f_m)(x)|^2 w(t, s)^{-1} \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right)^{p/2} dx \right)^{1/p} \\
&\quad \times \sup_h \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty |h(x, t)|^2 \left( \sup_{t>0} \int_0^\infty w(t, s) \frac{ds}{s} \right) \frac{dt}{t} \right)^{p'/2} dx \right)^{1/p'} \\
&\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty \int_0^\infty |\Theta_t(Q_s^2 f_1, \dots, f_m)(x)|^2 w(t, s)^{-1} \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right)^{p/2} dx \right)^{1/p} \\
&\quad \times \sup_h A_w^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty |h(x, t)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{p'/2} dx \right)^{1/p'} \\
&\leq A_w^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty \int_0^\infty \Theta_t(Q_s^2 f_1, \dots, f_m)|^2 w(t, s)^{-1} \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right)^{p/2} dx \right)^{1/p},
\end{aligned}$$



onde utilizamos a desigualdade de Hölder, e onde o supremo é tomado sobre todas as funções  $h$  satisfazendo  $\|h\|_{p',2} \leq 1$ .

Seja  $M$  a função maximal de Hardy-Littlewood. Suponha que exista uma função  $w(t, s)$  satisfazendo (3.43) tal que

$$|\Theta_t(Q_s f_1, \dots, f_m)(x)| \lesssim A w(t, s) \prod_{i=1}^m M(f_i)(x). \quad (3.44)$$

Assuma por um momento que (3.44) de fato é satisfeita. Definindo  $p^*$  por

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m},$$

segue que

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p^*}.$$

Usando (3.44) obtemos:

$$\begin{aligned} & \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty \int_0^\infty |\Theta_t(Q_s^2 f_1, \dots, f_m)(x)|^2 w(t, s)^{-1} \frac{ds dt}{s t} \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \lesssim A \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty \int_0^\infty |M(Q_s f_1)(x)|^2 \prod_{i=2}^m |M(f_i)(x)|^2 w(t, s) \frac{ds dt}{s t} \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = A \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| \prod_{i=2}^m M(f_i)(x) \right|^p \left( \int_0^\infty \int_0^\infty |M(Q_s f_1)(x)|^2 w(t, s) \frac{ds dt}{s t} \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left\| \prod_{i=2}^m M(f_i) \right\|_{p^*} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty \int_0^\infty |M(Q_s f_1)(x)|^2 w(t, s) \frac{ds dt}{s t} \right)^{\frac{p_1}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ & \lesssim A \prod_{i=2}^m \|f_i\|_{p_i} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_0^\infty |M(Q_s f_1)(x)|^2 \left( \sup_s \int_0^\infty w(t, s) \frac{dt}{t} \right) \frac{ds}{s} \right\}^{\frac{p_1}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ & \lesssim A A_w^{1/2} \prod_{i=2}^m \|f_i\|_{p_i} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty |M(Q_s f_1)(x)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{p_1}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ & \lesssim A A_w^{1/2} \prod_{i=2}^m \|f_i\|_{p_i} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty |(Q_s f_1)(x)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{p_1}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ & \lesssim A A_w^{1/2} \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i}, \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade maximal vetorial de Fefferman-Stein [21] e o teorema de Littlewood-Paley [25], ambos em sua forma contínua. Dessa forma, concluímos a validade da desigualdade

$$\|S(f_1, \dots, f_m)\|_p \lesssim A \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i} \quad (3.45)$$

sempre que  $1 < p_i < \infty$  e

$$\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}.$$

Porém, (3.45) nada mais é do que (3.18), que por sua vez é o resultado que queremos provar, encerrando assim a demonstração *módulo* o resultado em (3.44), que discutiremos como obter.

Para começar, introduzimos alguma notação extra para simplificar a exposição. Temos que

$$\begin{aligned} & \Theta_t(Q_s f_1, \dots, f_m)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{mn}} \theta_t(x, y_1, \dots, y_m) (Q_s f_1)(y_1) \prod_{i=2}^m f_i(y_i) dy_1 \cdots dy_m \\ &= \int_{\mathbb{R}^{mn}} \theta_t(x, y_1, \dots, y_m) \left( \int_{\mathbb{R}^n} \psi_s(y_i - u) f_1(u) du \right) \prod_{i=2}^m f_i(y_i) dy_1 \cdots dy_m \\ &= \int_{\mathbb{R}^{mn}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \theta_t(x, y_1, \dots, y_m) \psi_s(y_1 - u) dy_1 \right\} f_1(u) \prod_{i=2}^m f_i(y_i) du dy_2 \cdots dy_m \\ &= \int_{\mathbb{R}^{mn}} L_{t,s}(x, u, y_2, \dots, y_m) f_1(u) \prod_{i=2}^m f_i(y_i) du dy_2 \cdots dy_m. \end{aligned}$$

O resultado segue a partir de uma estimativa pontual para  $L_{t,s}(x, u, y_2, \dots, y_m)$ .

De início, considere o caso  $s \leq t$ . Usando o fato de que  $Q_s(1) = 0$  para todo  $s > 0$ , e que  $\psi_s(y)$  satisfaz o mesmo tipo de estimativas de crescimento que

$\theta_t(x, y_1, \dots, y_m)$  com  $\gamma = \delta = 1$ , obtemos

$$\begin{aligned}
& |L_{s,t}(x, u, \dots, y_m)| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \theta_t(x, y_1, \dots, y_m) \psi_s(y_1 - u) dy_1 \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} [\theta_t(x, y_1, \dots, y_m) - \theta_t(x, u, \dots, y_m)] \psi_s(y_1 - u) dy_1 \right. \\
&\quad \left. + \theta_t(x, u, \dots, y_m) \int_{\mathbb{R}^n} \psi_s(y_1 - u) dy_1 \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} [\theta_t(x, y_1, \dots, y_m) - \theta_t(x, u, \dots, y_m)] \psi_s(y_1 - u) dy_1 \right| \\
&\leq C A \left( \prod_{i=2}^m \frac{t^{-n}}{(1 + t^{-1}|x - y_i|)^{n+\delta}} \right) \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\min(2, (t^{-1}|y_1 - u|)^\gamma)}{t^n} \frac{s^{-n}}{(1 + s^{-1}|y_1 - u|)^{n+1}} dy_1 \\
&\leq C_n A \frac{1}{t^n} \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{2} \min(\gamma, 1)} \left( \prod_{i=2}^m \frac{t^{-n}}{(1 + t^{-1}|x - y_i|)^{n+\delta}} \right) \\
&\leq C_n A \min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right)^n \min\left(\frac{t}{s}, \frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{2} \min(\gamma, \delta, 1)} \\
&\quad \times \left( \prod_{i=2}^m \frac{t^{-n}}{(1 + t^{-1}|x - y_i|)^{n+\delta}} \right). \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Agora, para  $t \leq s$  temos que

$$\begin{aligned}
& |L_{s,t}(x, u, \dots, y_m)| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \theta_t(x, y_1, \dots, y_m) \psi_s(y_1 - u) dy_1 \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \theta_t(x, y_1, \dots, y_m) [\psi_s(y_1 - u) - \psi(x - u)] dy_1 \right| \\
&\leq C A t^{-(m-1)n} \left( \prod_{i=2}^m \frac{1}{(1 + t^{-1}|x - y_i|)^{n+\delta}} \right) \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t^{-n}}{(1 + t^{-1}|x - y_1|)^{n+\delta}} \frac{\min(2, s^{-1}|x - y_1|)}{s^n} dy_1 \\
&\leq C_n A \min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right)^n \min\left(\frac{t}{s}, \frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{2} \min(\gamma, \delta, 1)} \\
&\quad \times \left( \prod_{i=2}^m \frac{t^{-n}}{(1 + t^{-1}|x - y_i|)^{n+\delta}} \right). \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Assuma a seguinte desigualdade (confira o apêndice B)

$$\begin{aligned}
& |L_{s,t}(x, u, \dots, y_m)| \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\theta_t(x, y_1, \dots, y_m) \psi_s(y_1 - u)| dy_1 \\
& \leq \frac{CA \min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right)^n}{(1 + \min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right) |x - u|)^{n+\min(\delta, 1)}} \left( \prod_{i=2}^m \frac{1}{(1 + t^{-1} |x - y_i|)^{n+\delta}} \right). \quad (3.48)
\end{aligned}$$

Combinando as estimativas (3.46), (3.47) e (3.48), obtemos

$$\begin{aligned}
|L_{s,t}(x, u, \dots, y_m)| & \lesssim \frac{\min\left(\frac{s}{t}, \frac{t}{s}\right)^{\frac{1}{2} \min(\delta, \gamma, 1)(1-\beta)} A \min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right)^n}{\left((1 + \min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right) |x - u|)^{n+\min(\delta, 1)}\right)^\beta} \\
& \quad \times \left( \prod_{i=2}^m \frac{1}{(1 + t^{-1} |x - y_i|)^{n+\delta}} \right) \quad (3.49)
\end{aligned}$$

para todo  $0 < \beta < 1$ . Escolhendo  $\beta = (n + \frac{1}{2} \min(\delta, 1))(n + \min(\delta, 1))^{-1}$ , a estimativa (3.49) implica

$$\begin{aligned}
& |\Theta_t(Q_s f_1, \dots, f_m)(x)| \\
& \lesssim A \min\left(\frac{s}{t}, \frac{t}{s}\right)^{\frac{1}{4} \min(\delta, \gamma, 1) \frac{\min(\delta, 1)}{n + \min(\delta, 1)}} \\
& \quad \times \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right)^n}{\left((1 + \min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right) |x - u|\right)^{n+\min(\delta, 1)}\right)^\beta} |f_1(u)| du \right) \\
& \quad \times \prod_{i=2}^m \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t^{-n}}{(1 + t^{-1} |x - y_i|)^{n+\delta}} |f_i(y_i)| dy_i \right) \\
& \lesssim \min\left(\frac{t}{s}, \frac{s}{t}\right)^\epsilon \prod_{i=1}^m M(f_i)(x), \quad (3.50)
\end{aligned}$$

onde  $\epsilon = \frac{1}{4} \min(\delta, \gamma, 1) \frac{\min(\delta, 1)}{n + \min(\delta, 1)}$ , e onde usamos a desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(w)| \frac{a^{-n}}{(1 + a^{-1} |x - w|)^{n+\delta}} dw \lesssim M(h)(x). \quad (3.51)$$

Como a função  $w(t, s) = \min\left(\frac{t}{s}, \frac{s}{t}\right)^\epsilon$  satisfaz (3.43), a estimativa (3.44) segue facilmente.

**Observação 2.** Fixando  $1 < p_1 = p < \infty$ , os cálculos feitos acima implicam a estimativa extremal

$$L^p \times L^\infty \times \dots \times L^\infty \rightarrow L^p$$

para o teorema 3.3 sob a condição de cancelamento  $T(1)$  multilinear forte. A limitação do operador nos pontos extremais restantes afirmada no teorema segue facilmente por simetria e o resultado ótimo por interpolação multilinear (confira [27]).

Resta apenas provar as estimativas para o caso da condição de cancelamento  $T(1)$  multilinear. Essa demonstração é um pouco diferente do caso anterior, pois temos que usar o cancelamento em todas as variáveis  $y_i$  ao mesmo tempo, porém a ideia geral é a mesma. Por conta disso, vamos apenas indicar em linhas gerais o argumento.

A ideia é explorar uma construção em paraproductos *no espírito* de Coifman-Meyer e uma observação envolvendo a classe de operadores integrais multilineares que estamos utilizando. Para começar, todos operadores integrais multilineares descritos nesse trabalho podem ser *realizados* como o traço na diagonal  $(x, \dots, x)$  de um operador integral linear  $\widetilde{\Theta}_t$  em  $\mathbb{R}^{mn}$  aplicado ao produto tensorial  $f_1 \otimes \dots \otimes f_m$ :

$$\Theta_t(f_1, \dots, f_m)(x) = \widetilde{\Theta}_t(f_1 \otimes \dots \otimes f_m)(x, \dots, x),$$

onde

$$\widetilde{\Theta}_t F(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^{nm}} \theta_t(\vec{x}, \vec{y}) F(\vec{y}) d\vec{y} \quad (F \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{mn})).$$

**Observação.** Apesar da observação ser profunda, ainda não foi possível explorar a natureza de traço dos operadores multilineares em ordem de obter resultados positivos na teoria multilinear a partir da teoria linear. Resultados nessa direção seriam interessantes e criariam uma conexão extra entre a teoria linear e multilinear.

Agora, utilizando a fórmula de reprodução de Calderón e o teorema fundamental do cálculo, o procedimento empregado por Grafakos em [26], pág. 199,

pode ser repetido para o caso de produtos tensoriais, isto é, vale a relação

$$\begin{aligned}
f_1 \otimes \cdots \otimes f_m &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_\epsilon^2 f_1 \otimes \cdots \otimes P_\epsilon^2 f_m - P_{1/\epsilon}^2 f_1 \otimes \cdots \otimes P_{1/\epsilon}^2 f_m \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^{1/\epsilon} s \frac{d}{ds} (P_s^2 f_1 \otimes \cdots \otimes P_s^2 f_m) \frac{ds}{s} \\
&= \int_0^\infty s \frac{d}{ds} (P_s^2 f_1 \otimes \cdots \otimes P_s^2 f_m) \frac{ds}{s} \\
&= \sum_{j=1}^m \int_0^\infty \Pi_{j,s}(f_1, \dots, f_m) \frac{ds}{s},
\end{aligned}$$

onde

$$\Pi_{j,s}(f_1, \dots, f_m) = P_s^2 f_1 \otimes \left( s \frac{d}{ds} P_s^2 f_j \right) \cdots \otimes P_s^2 f_m$$

e onde  $P_s^2$  são operadores convolutivos que satisfazem  $P_s^2 f \rightarrow f$  quando  $s \rightarrow 0$  e  $P_s^2 f \rightarrow 0$  quando  $s \rightarrow \infty$  (onde a convergência se dá na norma  $L^p$  ou no sentido das distribuições), e onde  $s \frac{d}{ds} P_s^2$  são operadores do tipo  $Q_s^2$  discutidos na seção 1 desse capítulo.

O operador  $s \frac{d}{ds} P_s^2$  possui uma representação explícita (que foi obtida originalmente por Coifman-Meyer no caso unidimensional [15] e no caso geral pode ser encontrada em Grafakos [26]), dada por

$$s \frac{d}{ds} Q_s^2 = \sum_{k=1}^n Q_s^{k,1} Q_s^{k,2}$$

De posse dessa decomposição, e usando o fato de que o nosso operador pode ser representado como o traço de um operador limitado em  $\mathbb{R}^{nm}$  (note que das propriedades do núcleo  $\theta_t$  o operador linear  $\widetilde{\Theta}_t$  é limitado por um operador de Hardy-Littlewood e, portanto, é um operador limitado em  $L^p(\mathbb{R}^{nm})$  para  $1 < p \leq \infty$ ), temos

que

$$\begin{aligned}
\Theta_t(f_1, \dots, f_m) &= \widetilde{\Theta}_t(f_1 \otimes \dots \otimes f_m) = \widetilde{\Theta}_t \left( \int_0^\infty s \frac{d}{ds} (Q_s^2 f_1 \otimes \dots \otimes Q_s^2 f_m) \frac{ds}{s} \right) \\
&= \widetilde{\Theta}_t \left( \sum_{j=1}^m \int_0^\infty \Pi_{j,s}(f_1, \dots, f_m) \frac{ds}{s} \right) \\
&= \sum_{j=1}^m \int_0^\infty \Theta_t(\Pi_{j,s}(f_1, \dots, f_m)) \frac{ds}{s} \\
&= \sum_{j=1}^m \int_0^\infty \Theta_t \Pi_{j,s}(f_1, \dots, f_m) \frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

Assim, considerando essa decomposição, a ideia é análoga ao caso anterior, e por conta disso vamos indicar apenas os passos principais que devemos adotar.

Exatamente como no caso anterior começamos usando dualidade:

$$\|S(f_1, \dots, f_m)\|_p = \sup_{\|h\|_{p',2} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \Theta_t(f_1, \dots, f_m)(x) h(x, t) \frac{dt}{t} dx \right|. \quad (3.52)$$

Utilizando a expressão anterior temos que

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \Theta_t(f_1, \dots, f_m)(x) h(x, t) \frac{dt}{t} dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \left( \sum_{j=1}^m \int_0^\infty \Theta_t \Pi_{j,s}(f_1, \dots, f_m)(x) \frac{ds}{s} \right) h(x, t) \frac{dt}{t} dx \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \Theta_t \Pi_{j,s}(f_1, \dots, f_m)(x) h(x, t) \frac{dt}{t} \frac{ds}{s} dx \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^m \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \Theta_t \Pi_{j,s}(f_1, \dots, f_m)(x) h(x, t) \frac{dt}{t} \frac{ds}{s} dx \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^m \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty \int_0^\infty |\Theta_t \Pi_{j,s}(f_1, \dots, f_m)(x)|^2 w(t, s)^{-1} \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. \times \left( \int_0^\infty \int_0^\infty |h(x, t)|^2 w(t, s) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} dx \right|, \quad (3.53)
\end{aligned}$$

onde

$$w(t, s) = \min \left( \frac{t}{s}, \frac{s}{t} \right)^\epsilon$$

para algum  $\epsilon > 0$ . Usando as propriedades da função  $w(t, s)$  observadas anteriormente, a desigualdade de Hölder na variável  $x$  com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  nos permite deduzir

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty \int_0^\infty |h(x, t)|^2 w(t, s) \frac{ds dt}{s t} \right)^{\frac{1}{2}} dx \right)^{1/2} \lesssim \|h\|_{p', 2}$$

Procedendo exatamente como no caso anterior, reduzimos nosso problema a mostrar a validade da seguinte desigualdade pontual

$$|\Theta_t \Pi_{j,s}(f_1, \dots, f_m)(x)| \lesssim w(t, s) \prod_{i \neq j} M(f_i)(x) \sum_{k=1}^n M(Q_s^{2,k} f_j)(x) \quad (3.54)$$

Para verificarmos que a desigualdade acima implica o resultado, note que inserindo a estimativa em (3.54), obtemos

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty \int_0^\infty |\Theta_t \Pi_{j,s}(f_1, \dots, f_m)(x)|^2 w(t, s)^{-1} \frac{dt ds}{t s} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty \int_0^\infty \left( M Q_s^{2,k} f_j \prod_{i \neq j} M f_i \right)^2 w(t, s) \frac{dt ds}{t s} \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i \neq j} |M(f_i)(x)|^p \left( \int_0^\infty (M Q_s^{2,k} f_j)^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^{p_i}}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde utilizamos a desigualdade maximal vetorial de Fefferman-Stein e a continuidade da função maximal de Hardy-Littlewood. Como a demonstração da desigualdade (3.54) é inteiramente análoga a da desigualdade (3.44), os detalhes são deixados para o leitor interessado.

### 3.4 Prova do teorema $T(b)$

Nessa seção, apresentaremos a demonstração do teorema 3.2. Para o leitor interessado, as ideias utilizadas seguem a mesma linha de argumento introduzido por Coifman-Meyer em [15] que simplificou (e muito) a demonstração do



teorema  $T(b)$  para integrais singulares que foi demonstrado originalmente por David, Journé e Semmes [17]. A ideia consiste em usar uma decomposição do operador em um tipo de paraproduto contínuo, e explorar o teorema  $T(1)$  obtido anteriormente de forma conjunta com a versão multilinear do lema de Carleson (lema 3.1.4).

Apenas para relembrar, estamos interessados na estimativa

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |\Theta_t(f_1, \dots, f_m)(x)|^2 \frac{dx dt}{t} \lesssim \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i}^2 \quad (3.56)$$

para operadores  $\{\Theta_t\}_{t>0}$  satisfazendo a condição de cancelamento

$$\Theta_t(b_1, \dots, b_m) = 0$$

para uma coleção fixa de funções acretivas  $b_1, \dots, b_m$ . No que segue, vamos fazer uso da família de operadores  $\{\mathbb{P}_t\}_{t>0}$  definida em (3.27); para conveniência do leitor, vamos relembrar a definição de tais operadores. Fixamos uma função não negativa, suave e com suporte compacto  $\Phi$ , com integral 1, e definimos  $\Phi_t(x) = t^{-n}\Phi(x/t)$  e a família de operadores  $\{\mathbb{P}_t\}_{t>0}$  por

$$\mathbb{P}_t(f_1, \dots, f_m)(x) := \prod_{i=1}^m (\Phi_t \star f_i)(x).$$

Observe que esses operadores satisfazem o mesmo tipo de condições de crescimento que os operadores  $\Theta_t$ . Introduzimos ainda o operador

$$\Xi_t(f_1, \dots, f_m) = \Theta_t(\Phi_t \star f_1, \dots, \Phi_t \star f_m), \quad (3.57)$$

É fácil notar que

$$\Xi_t(1, \dots, 1) = \Theta_t(\Phi_t \star 1, \dots, \Phi_t \star 1) = \Theta_t(1, \dots, 1). \quad (3.58)$$

A ideia chave para entendermos  $\Theta_t(f_1, \dots, f_m)$  é decompô-lo como a soma

$$(\Theta_t - \Theta_t(1, \dots, 1)\mathbb{P}_t)(f_1, \dots, f_m) + \Theta_t(1, \dots, 1)\mathbb{P}_t(f_1, \dots, f_m). \quad (3.59)$$

O primeiro termo em (3.59) satisfaz

$$\begin{aligned} & (\Theta_t - \Theta_t(1, \dots, 1)\mathbb{P}_t)(1, \dots, 1) \\ &= \Theta_t(1, \dots, 1) - \Theta_t(1, \dots, 1)\mathbb{P}_t(1, \dots, 1) = 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Desde que o núcleo do operador satisfaz o mesmo tipo de estimativas que o núcleo de  $\Theta_t$ , podemos aplicar o teorema 3.3 e concluir que esta parte do operador contribui da forma esperada, isto é, satisfaz (3.56), com norma de operador limitada por  $(C_{n,\delta,\gamma}A)^2$ .

Para obter as estimativas desejadas para o termo  $\Theta_t(1, \dots, 1)\mathbb{P}_t(f_1, \dots, f_m)(x)$  usamos estimativas envolvendo medidas de Carleson. De fato, em vista do lema 3.1.4, o problema se reduz a mostrar que

$$|\Theta_t(1, \dots, 1)|^2 \frac{dxdt}{t} \quad (3.61)$$

é uma medida de Carleson. Desde  $\Theta_t(b_1, \dots, b_m) = 0$ , temos que

$$\begin{aligned} & \Theta_t(1, \dots, 1)\mathbb{P}_t(b_1, \dots, b_m) \\ &= (\mathbb{P}_t(b_1, \dots, b_m)\Theta_t(1, \dots, 1) - \Xi_t(b_1, \dots, b_m)) \\ & \quad + (\Xi_t(b_1, \dots, b_m) - \Theta_t(b_1, \dots, b_m)). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Se pudermos mostrar que

$$|\Theta_t(b_1, \dots, b_m)(x) - \Xi_t(b_1, \dots, b_m)(x)|^2 \frac{dxdt}{t} \quad (3.63)$$

e que

$$|\Xi_t(b_1, \dots, b_m)(x) - \mathbb{P}_t(b_1, \dots, b_m)(x)\Theta_t(1, \dots, 1)(x)|^2 \frac{dxdt}{t} \quad (3.64)$$

são medidas de Carleson, então a medida

$$|\mathbb{P}_t(b_1, \dots, b_m)\Theta_t(1, \dots, 1)|^2 \frac{dxdt}{t} \quad (3.65)$$

também será uma medida de Carleson. Usando o fato de que cada termo que compõe  $\mathbb{P}_t$  é um operador positivo e que as funções  $b_1, \dots, b_m$  são acretivas, deduzimos

$$|\mathbb{P}_t(b_1, \dots, b_m)| \geq \mathbb{P}_t(\operatorname{Re}(b_1), \dots, \operatorname{Re}(b_m)) \geq \mathbb{P}_t(c_1, \dots, c_m) = \prod_{i=1}^m c_i, \quad (3.66)$$

que por sua vez implica a estimativa

$$|\Theta_t(1, \dots, 1)|^2 \leq \frac{1}{\prod_{i=1}^m c_i^2} |\mathbb{P}_t(b_1, \dots, b_m)\Theta_t(1, \dots, 1)|^2. \quad (3.67)$$

Por fim, (3.67) implica que  $|\Theta_t(1, \dots, 1)|^2 \frac{dxdt}{t}$  é uma medida Carleson, desde que possamos assumir o mesmo para as medidas dadas por (3.63) e (3.64).

Visto que  $b_1, \dots, b_m$  são funções limitadas, podemos concluir que (3.63) e (3.64) são medidas de Carleson se mostrarmos que os operadores

$$\Pi_t^1(f_1, \dots, f_m) := (\Theta_t - \Xi_t)(f_1, \dots, f_m)(x) \quad (3.68)$$

$$\Pi_t^2(f_1, \dots, f_m) := (\Xi_t - \Theta_t(1, \dots, 1)\mathbb{P}_t)(f_1, \dots, f_m)(x) \quad (3.69)$$

satisfazem as hipóteses do teorema 3.1.

**Caso 1:** O operador  $\Pi_t^1(f_1, \dots, f_m)$ .

Observe que

$$\Xi_t(f_1, \dots, f_m) = \int_{\mathbb{R}^{mn}} \xi_t(x, y_1, \dots, y_m) \prod_{i=1}^m f_i(y_i) dy_1 \cdots dy_m \quad (3.70)$$

possui um núcleo

$$\xi_t(x, y_1, \dots, y_m) = \int_{\mathbb{R}^{mn}} \theta_t(x, u_1, \dots, u_m) \prod_{i=1}^m \Phi_t(u_i - y_i) du_1 \cdots du_m, \quad (3.71)$$

que satisfaz as condições de crescimento necessárias (isso é facilmente obtido usando as estimativas existentes para  $\theta_t$  e para  $\Phi_t$ ). Então, concluímos que

$$\Pi_t^1 = \Theta_t - \Xi_t$$

satisfaz as estimativas de crescimento necessárias e que

$$\Pi_t^1(1, \dots, 1) = \Theta_t(1, \dots, 1) - \Xi_t(1, \dots, 1) = 0$$

em vista de (3.58). Aplicando o Teorema 3.3, deduzimos que  $\Pi_t^1$  é limitado de

$$L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^{p_m}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n, L^2(\mathbb{R}^+))$$

com norma de operador controlada por  $C_{n,\delta,\gamma}A$ ; acima, os expoentes  $p_i$  satisfazem  $1/p_1 + \cdots + 1/p_m = 1/2$ . Então, aplicando o teorema 3.1, concluímos que

$$|\Pi_t^1(b_1, \dots, b_m)(x)|^2 \frac{dxdt}{t} \quad (3.72)$$

é uma medida de Carleson, com constante controlada por  $C_{n,\delta,\gamma}A^2 \prod_{i=1}^m \|b_i\|_\infty^2$ .

**Caso 2:** O operador  $\Pi_t^2(f_1, \dots, f_m)$ .

O núcleo de  $\Pi_t^2$  é dado por

$$\pi_t^2(x, y_1, \dots, y_m) := \xi_t(x, y_1, \dots, y_m) - \Theta_t(1, \dots, 1)(x) \prod_{i=1}^m \Phi_t(x - y_i) \quad (3.73)$$

e novamente, podemos verificar, sem dificuldades, que ele satisfaz as condições de crescimento necessárias (simplesmente usando o fato de que  $\xi_t(x, y_1, \dots, y_m)$  e  $\prod_{i=1}^m \Phi_t(x - y_i)$  satisfazem essas estimativas, e que  $\Theta_t(1, \dots, 1)(x)$  é uma função limitada para cada  $t > 0$ ). Além disso, usando (3.58), temos que

$$\begin{aligned} & \Pi_t^2(1, \dots, 1)(x) \\ &= \Xi_t(1, \dots, 1)(x) - \Theta_t(1, \dots, 1)(x)\mathbb{P}_t(1, \dots, 1)(x) = 0 \end{aligned} \quad (3.74)$$

e outra aplicação do Teorema 3.3 nos permite concluir que  $\Pi_t^2$  leva

$$L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times \dots \times L^{p_m}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n, L^2(\mathbb{R}^+))$$

continuamente com a mesma estimativa para a norma de operador. Usando mais uma vez o Teorema 3.1 obtemos o resultado desejado, isto é, a medida definida em (3.72) é Carleson com constante controlada por  $C_{n,\delta,\gamma}A^2 \prod_{i=1}^m \|b_i\|_\infty^2$ .

Combinando os resultados acima obtemos (3.56), com a estimativa para a norma de operador

$$C_{n,\delta,\gamma}^2 A^2 \left( 1 + \prod_{i=1}^m \|b_i\|_\infty^2 \right).$$

Isso conclui a prova do Teorema 3.2.

### 3.5 Comentários Finais

Resultados semelhantes aos apresentados aqui foram obtidos de forma independente pelo acadêmico Jarod Hart (da Universidade do Kansas, em Lawrence) no caso bilinear discreto [30]. Os argumentos utilizados por Jarod tem pontos em

comum com os utilizados aqui, apesar de o argumento utilizado por ele ser em geral diferente (ele utilizou principalmente uma adaptação da fórmula de Calderón com pesos em  $BMO$  desenvolvida por Han e Sawyer [29]).

Em colaboração com o acadêmico Jarod Hart e com a Dra. Ana Grau de la Herran (atualmente em um pós-doutorado na Universidade de Helsinki) provamos um teorema  $T(b)$  local para funções quadráticas multilineares, estendendo assim o resultado linear originalmente obtido por Hofmann [33]. Os resultados dessa parceria estão contidos em [32] que foi aceito para publicação recentemente. Atualmente, estamos trabalhando na possibilidade de substituímos as condições de regularidade e decaimento dos núcleos por versões mais fracas, envolvendo um controle em termos de normas  $L^p$  dos operadores integrais associados. Esse tipo de resultado foi demonstrado por Herran [31] no caso linear, o que nos deixa esperançosos quanto a uma possível extensão multilinear.

Em colaboração com os acadêmicos Jarod Hart e Lucas Chaffee (também da Universidade do Kansas, em Lawrence) provamos um novo tipo de caracterização da continuidade de funções quadráticas (lineares e multilineares) em termos de um novo tipo de condição de Carleson (que chamamos de *condição de Carleson forte*). Em particular, esse novo resultado nos possibilita deduzir que certas funções quadráticas são limitadas em  $L^p(\mathbb{R}^n)$  para todo  $1 < p < \infty$  sem a necessidade de empregar a teoria vetorial de operadores de Calderón-Zygmund (o que, em particular, nos permite trabalhar com funções quadráticas sem a necessidade de impor estimativas de regularidade na variável  $x$  <sup>2</sup>). Esses resultados estão contidos no artigo [12] que será submetido em dentro em pouco. Atualmente, estamos trabalhando em condições de Carleson envolvendo normas mistas (*mixed  $L^p$  norms*).

Um outro ponto de pesquisa corrente é a possibilidade de aplicar funções quadráticas multilineares no estudo de funções maximais multilineares. Essa pesquisa, em colaboração com o Prof. Loukas Grafakos, está em fase inicial mas demonstra

---

<sup>2</sup>Note que para aplicarmos a teoria de Calderón-Zygmund também precisamos de uma hipótese de regularidade do tipo  $|\Theta_t(x, y) - \Theta_t(x', y)| \lesssim (t^{-1}|x - x'|)^\gamma$

ser promissora (ela não é facilmente estendível do caso linear para o caso multilinear, desde que o estudo dessa classe de funções quadráticas no caso linear faz uso crucial do Lema de Plancherel, que no caso multilinear não é de grande valia).

## 4 CONCLUSÃO

Com relação ao problema envolvendo o comportamento assintótico de equações parabólicas, como pode ser observado na seção anterior, as perguntas relativas ao comportamento assintótico de equações parabólicas não lineares são sofisticadas e teriam uma importância considerável dentro do campo das Equações Diferenciais. Novas estimativas de decaimento para as soluções, bem como um melhor entendimento sobre o mecanismo de dissipação-concentração-conservação, teriam ainda um grande impacto em problemas da Física Matemática. Acreditamos ainda que a obstrução dimensional (desde que todos resultados aqui obtidos são unidimensionais) apresentada aqui pode ser superada com um pouco mais de trabalho. Note que uma complicação real está relacionada à falta de certas Desigualdades de Nash e Gagliardo-Nirenberg com os expoentes adequados no caso de dimensões maiores que um.

No que diz respeito às funções quadráticas multilineares, esperamos que os resultados aqui apresentados sirvam de pilar para construções futuras envolvendo medidas de Carleson e operadores multilineares. Os trabalhos de Hart [30] e Grau, Hart e Oliveira [32] (bem como os resultados da presente tese), mostram que a teoria envolvendo esses operadores tem uma passagem relativamente *suave* do caso clássico para o caso multilinear, apesar de haver diferenças consideráveis entre eles (como podemos constatar no teorema 3.1 ou nos resultados em [32]). Por outro lado, a aplicabilidade desse tipo de operador no caso multilinear atualmente está restrita a certas questões envolvendo operadores integrais singulares multilineares. Todas as aplicações clássicas (que relacionam multiplicadores de Fourier e funções maximais) ficam fragilizadas, desde que o teorema de Plancherel (peça fundamental no caso linear) perde consideravelmente a sua força no caso multilinear. Entender melhor funções quadráticas associadas a multiplicadores é um dos pontos centrais da pesquisa recente, e um melhor entendimento desses operadores resultaria em um grande impacto na teoria de operadores maximais multilineares.

## Apêndice A    DESIGUALDADES DE GAGLIARDO-NASH-NIRENBERG

Nessa seção provamos as desigualdades de Gagliardo-Nash-Nirenberg em uma dimensão que foram utilizadas no texto. Observe que as constantes que obtemos não são as constantes otimizadas (para esse tipo de resultado, consultar [8])

**Proposição A.1.** *Existem constantes positivas  $C_2, C_\infty$  tal que para toda função suave  $v$  valem as seguintes desigualdades:*

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_\infty \|w\|_{L^1(\mathbb{R})}^{1/3} \|\partial_x w\|_{L^2(\mathbb{R})}^{2/3} \quad (\text{Gagliardo-Nirenberg}) \quad (\text{A.1})$$

$$\|v\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_2 \|v\|_{L^1(\mathbb{R})}^{2/3} \|\partial_x v\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/3} \quad (\text{Nash}) \quad (\text{A.2})$$

**Prova.** Começaremos demonstrando a desigualdade de Nash. No que segue, decomponemos  $\mathbb{R} = \{|\xi| \leq \rho\} \cup \{|\xi| > \rho\}$  para algum número positivo  $\rho$ . Usando o teorema de Plancherel, temos que

$$\|v\|_{L^2}^2 = \|\widehat{v}\|_{L^2}^2 = \int_{|\xi| \leq \rho} |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > \rho} |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi = I_\rho + II_\rho \quad (\text{A.3})$$

Para dominarmos  $I_\rho$ , basta observarmos que  $|\widehat{v}| \leq \|v\|_{L^1}$  (que segue diretamente da definição da transformada de Fourier) e integrarmos sobre  $\{|\xi| < \rho\}$ :

$$I_\rho = \int_{|\xi| \leq \rho} |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi \leq 2\rho \|v\|_{L^1}^2$$

Para  $II_\rho$  temos

$$II_\rho = \int_{|\xi| > \rho} |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{|\xi| > \rho} \frac{\xi^2}{\rho^2} |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi = \rho^{-2} \int_{\mathbb{R}} |\xi \widehat{v}(\xi)|^2 d\xi = \rho^{-2} \int_{\mathbb{R}} |\partial_x v(x)|^2 dx = \rho^{-2} \|\partial_x v\|_{L^2}^2$$

onde na última linha utilizamos o teorema de Plancherel novamente. Considere a função  $f(\rho)$  dada por

$$f(\rho) = 2\rho \|v\|_{L^1}^2 + \frac{1}{\rho^2} \|\partial_x v\|_{L^2}^2.$$

Não é difícil verificar que a função  $f$  possui um ponto crítico em  $\rho = \left(\frac{\|\partial_x v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{L^1}^2}\right)^{1/3}$ , e que esse ponto crítico é um ponto de mínimo. Substituindo na desigualdade (A.3),



temos que

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2}^2 &= 2 \left( \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{L^1}^2} \right)^{1/3} \|v\|_{L^1} + \left( \frac{\|v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{L^1}^2} \right)^{-2/3} \|\partial_x v\|_{L^2}^2 \\ &= 3 \|v\|_{L^1}^{4/3} \|\partial_x v\|_{L^2}^{4/3} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

que demonstra a desigualdade (A.1) com a constante não otimal  $\sqrt{3}$ .

Agora, demonstraremos a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg. Como no Capítulo 2, considere  $S \in C^1(\mathbb{R})$  tal que  $S'(v) \geq 0$  para todo  $v \in \mathbb{R}$ ,  $S(0) = 0$  e  $S(v) = \text{sgn}(v)$  para todo  $|v| \geq 1$  e defina para  $\delta > 0$  dado

$$L_\delta(u) = \int_0^u S(v/\delta) dv,$$

de tal forma que  $L_\delta(u) \rightarrow |u|$  quando  $\delta \rightarrow 0$ , uniformemente  $u$ . Então, para  $s > 0$  a ser definido depois temos que

$$\begin{aligned} L_\delta(w(\hat{x}))^s &= \int_{-\infty}^{\hat{x}} \frac{d}{dx} L_\delta(w(x))^s dx = s \int_{-\infty}^{\hat{x}} L_\delta(w(x))^{s-1} L'_\delta(w(x)) \partial_x w(x) dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\hat{x}} L_\delta(w(x))^{s-1} |L_\delta(w(x))| |w_x(x)| dx \end{aligned}$$

e, de forma similar, temos

$$L_\delta(w(\hat{x}))^s \leq \int_{\hat{x}}^{\infty} L_\delta(w(x))^{s-1} |L_\delta(w(x))| |w_x(x)| dx$$

Fazendo  $\delta \rightarrow 0$  e usando as propriedades de  $\frac{L}{\delta}$ , obtemos

$$\begin{aligned} |w(\hat{x})|^s &\leq \int_{-\infty}^{\hat{x}} |w(x)|^{s-1} |\partial_x w(x)| dx \\ |w(\hat{x})|^s &\leq \int_{-\infty}^{\hat{x}} |w(x)|^{s-1} |\partial_x w(x)| dx \end{aligned}$$

Somando as duas desigualdades segue que

$$|w(\hat{x})|^s \frac{s}{2} \leq \int_{\mathbb{R}} |w(x)|^{s-1} |\partial_x w(x)| dx$$

Agora, usando a Cauchy-Schwarz, segue que

$$\int_{\mathbb{R}} |w(x)|^{s-1} |\partial_x w(x)| dx \leq \|w\|_{L^{2(s-1)}}^{s-1} \|\partial_x w\|_{L^2} \quad (\text{A.5})$$

Dessa forma temos

$$\|w\|_{L^\infty} \leq \left(\frac{s}{2}\right)^{1/s} \|w\|_{L^{2(s-1)}}^{1-1/s} \|\partial_x w\|_{L^2}^{1/s} \quad (\text{A.6})$$

Escolhendo  $s = 3/2$ , o resultado segue com  $C_\infty = \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}$ .

**Observação.** *Como não utilizamos toda a regularidade de que dispunhamos (utilizamos apenas o fato das funções serem diferenciáveis uma vez) o resultado acima pode ser estendido por densidade para  $v \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ .*

## Apêndice B ESTIMATIVAS UTILIZADAS NO TEOREMA $T(1)$

O resultado a seguir, desempenhou um papel crucial na demonstração do teorema  $T(1)$ , e apenas para tornar o material auto-contido, o demonstraremos aqui. A demonstração que segue é baseada nos resultados do apêndice K em Grafakos [25].

**Proposição B.1.** *Considere  $x_\mu, x_\nu \in \mathbb{R}^n$ ,  $M, N > n$  e funções suaves  $\phi_\mu, \phi_\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  que satisfazem*

$$|\phi_\mu(x)| \leq \frac{2^{\mu n}}{(1 + 2^\mu |x - x_\mu|)^M}, \quad (\text{B.1})$$

$$|\phi_\nu(x)| \leq \frac{2^{\nu n}}{(1 + 2^\nu |x - x_\nu|)^N}. \quad (\text{B.2})$$

Então

$$I(x_\mu, \mu, M; x_\nu, \nu, N) = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_\mu(x)| |\phi_\nu(x)| dx$$

satisfaz

$$I(x_\mu, \mu, M; x_\nu, \nu, N) \leq C_{n,M,N} \frac{2^{\min(\mu,\nu)n}}{(1 + 2^{\min(\mu,\nu)} |x_\mu - x_\nu|)^{\min(M,N)}} \quad (\text{B.3})$$

Antes de demonstrarmos o resultado acima, veremos como utilizá-lo para obtermos as estimativas dos núcleos  $L_{t,s}$  dadas em (3.48). Note que

$$\begin{aligned} & |L_{t,s}(x, y_1, \dots, u_i, \dots, y_m)| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\theta_t(x, y_1, \dots, y_m)| |\psi_{s_i}(y_i - u_i)| dy_1 \cdots dy_m \\ & \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \left( \prod_{j=1}^m \frac{t^{-n}}{(1 + t^{-1}|x - y_j|)^{n+\delta}} \right) \frac{s^{-n}}{(1 + s^{-1}|y_i - u_i|)^{n+1}} dy_1 \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} |L_{t,s}(x, y_1, \dots, u_i, \dots, y_m)| & \lesssim \frac{CA \min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right)^n}{\left(1 + \min\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right) |x - u_i|\right)^{n+\min(\delta,1)}} \\ & \quad \times \left( \prod_{j \neq i} \frac{1}{(1 + t^{-1}|x - y_j|)^{n+\delta}} \right) \end{aligned}$$

Utilizando a proposição para cada termo do produtório (com  $2^\mu = t^{-1}$ ,  $2^\nu = s^{-1}$ ,  $x_\mu = x$  e  $x_\nu = u_i$ ), o resultado segue diretamente. Agora, demonstraremos a proposição B.1.

**Prova.** Começamos observando que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |x|)^M} dx \leq C_{n,M}. \quad (\text{B.4})$$

Sem perda de generalidade, suponha que  $\nu \leq \mu$ . Consideremos os casos  $2^\nu |x_\nu - x_\mu| \leq 1$  e  $2^\nu |x_\nu - x_\mu| \geq 1$ . No primeiro caso, usamos a estimativa trivial

$$\frac{2^{\nu n}}{(1 + 2^\nu |x - x_\nu|)^N} \leq 2^{\nu n} \leq \frac{2^{\nu n} 2^{\min(M,N)}}{(1 + 2^\nu |x_\mu - x_\nu|)^{\min(M,N)}}. \quad (\text{B.5})$$

Aplicando essa desigualdade, temos que

$$I(x_\mu, \mu, M; x_\nu, \nu, N) \leq \frac{2^{\nu n} 2^{\min(M,N)}}{(1 + 2^\nu |x_\mu - x_\nu|)^{\min(M,N)}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{\mu n}}{(1 + 2^\nu |x - x_\mu|)^M} dx, \quad (\text{B.6})$$

e o resultado segue utilizando a observação (B.4). Quando  $2^\nu |x_\nu - x_\mu| \geq 1$  sejam  $H_\mu$  e  $H_\nu$  os dois hiperplanos que contém  $x_\mu$  e  $x_\nu$ , respectivamente, e que são perpendiculares ao segmento de reta que passa por  $[x_\mu, x_\nu]$  no seu ponto médio. Não é difícil mostrar que se  $x \in H_a$  então  $|x - a| \geq \frac{1}{2}|a - b|$  e uma desigualdade similar para  $x \in H_b$ . Usando essas estimativas em conjunto com  $2^\nu |x_\nu - x_\mu| \geq 1$ , obtemos

$$\frac{2^{\nu n}}{(1 + 2^\nu |x - x_\mu|)^M} \leq \frac{2^{\mu n}}{(2^{\mu \frac{1}{2}} |a - b|)^M} \leq 4^M \frac{2^{(\nu - \mu)(M - N)} 2^{\nu n}}{(1 + 2^\nu |x_\nu - x_\mu|)^M} \quad (\text{B.7})$$

e o resultado segue novamente aplicando (B.4)

## Referências Bibliográficas

- [1] AUSCHER, P., HOFMANN, S., LACEY, M., MCINTOSH, A., AND TCHAMITCHIAN, P. The solution of the Kato square root problem for second order elliptic operators on  $\mathbb{R}^n$ . *Ann. of Math. (2)* 156, 2 (2002), 633–654.
- [2] BARRIONUEVO, J. A., OLIVEIRA, L., AND ZINGANO, P. R. D. A. General asymptotic supnorm estimates for solutions of one-dimensional advection-diffusion equations in heterogeneous media i. *Submitted* (2012).
- [3] BARRIONUEVO, J. A., OLIVEIRA, L., AND ZINGANO, P. R. D. A. General asymptotic supnorm estimates for solutions of one-dimensional advection-diffusion equations in heterogeneous media ii. *Work in progress* (2013).
- [4] BRAZ E SILVA, P., SCHÜTZ, L., AND ZINGANO, P. R. On solution boundedness for parabolic equations. *Far East J. Math. Sci. (FJMS)* 33, 3 (2009), 379–385.
- [5] BRAZ E SILVA, P., SCHÜTZ, L., AND ZINGANO, P. R. Some results and problems on advection-diffusion equations. *Mat. Contemp.* 36 (2009), 67–78.
- [6] BRAZ E SILVA, P., SCHÜTZ, L., AND ZINGANO, P. R. Decay estimates for solutions of quasilinear parabolic equations in heterogeneous media. *Adv. Differ. Equ. Control Process.* 6, 2 (2010), 101–112.
- [7] BRAZ E SILVA, P., AND ZINGANO, P. R. Some asymptotic properties for solutions of one-dimensional advection-diffusion equations with Cauchy data in  $L^p(\mathbb{R})$ . *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 342, 7 (2006), 465–467.
- [8] CARLEN, E. A., AND LOSS, M. Sharp constant in Nash’s inequality. *Internat. Math. Res. Notices*, 7 (1993), 213–215.

- [9] CARLEN, E. A., AND LOSS, M. Optimal smoothing and decay estimates for viscously damped conservation laws, with applications to the 2-d Navier-Stokes equation. *Duke Math. J.* 81, 1 (1995), 135–157 (1996). A celebration of John F. Nash, Jr.
- [10] CARLESON, L. An interpolation problem for bounded analytic functions. *Amer. J. Math.* 80 (1958), 921–930.
- [11] CARLESON, L. Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem. *Ann. of Math. (2)* 76 (1962), 547–559.
- [12] CHAFFEE, L., HART, J., AND OLIVEIRA, L. Weighted multilinear square functions bounds. *Work in progress* (2013).
- [13] CHRIST, M., AND JOURNÉ, J.-L. Polynomial growth estimates for multilinear singular integral operators. *Acta Math.* 159, 1-2 (1987), 51–80.
- [14] COIFMAN, R. R., MCINTOSH, A., AND MEYER, Y. L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur  $L^2$  pour les courbes lipschitziennes. *Ann. of Math. (2)* 116, 2 (1982), 361–387.
- [15] COIFMAN, R. R., AND MEYER, Y. F. A simple proof of a theorem by G. David and J.-L. Journé on singular integral operators. In *Probability theory and harmonic analysis (Cleveland, Ohio, 1983)*, vol. 98 of *Monogr. Textbooks Pure Appl. Math.* Dekker, New York, 1986, pp. 61–65.
- [16] COTLAR, M. A combinatorial inequality and its applications to  $L^2$ -spaces. *Rev. Mat. Cuyana* 1 (1955), 41–55 (1956).
- [17] DAVID, G., JOURNÉ, J.-L., AND SEMMES, S. Opérateurs de Calderón-Zygmund, fonctions para-accrétives et interpolation. *Rev. Mat. Iberoamericana* 1, 4 (1985), 1–56.
- [18] DUOANDIKOETXEA, J., AND RUBIO DE FRANCIA, J. L. Maximal and singular integral operators via Fourier transform estimates. *Invent. Math.* 84, 3 (1986), 541–561.

- [19] ESCOBEDO, M., AND ZUAZUA, E. Large time behavior for convection-diffusion equations in  $\mathbf{R}^N$ . *J. Funct. Anal.* 100, 1 (1991), 119–161.
- [20] EVANS, L. C. *Partial differential equations*, second ed., vol. 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [21] FEFFERMAN, C., AND STEIN, E. M. Some maximal inequalities. *Amer. J. Math.* 93 (1971), 107–115.
- [22] FEFFERMAN, C., AND STEIN, E. M.  $H^p$  spaces of several variables. *Acta Math.* 129, 3-4 (1972), 137–193.
- [23] FRAZIER, M., JAWERTH, B., AND WEISS, G. *Littlewood-Paley theory and the study of function spaces*, vol. 79 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1991.
- [24] FRIEDMAN, A. *Partial differential equations of parabolic type*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.
- [25] GRAFAKOS, L. *Classical Fourier analysis*, second ed., vol. 249 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008.
- [26] GRAFAKOS, L. *Modern Fourier analysis*, second ed., vol. 250 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2009.
- [27] GRAFAKOS, L., LIU, L., PÉREZ, C., AND TORRES, R. H. The multilinear strong maximal function. *J. Geom. Anal.* 21, 1 (2011), 118–149.
- [28] GRAFAKOS, L., AND OLIVEIRA, L. Carleson measures associated with families of multilinear operators. *Studia Math.* 211, 1 (2012), 74–91.
- [29] HAN, Y.-S., AND SAWYER, E. T. Para-accretive functions, the weak boundedness property and the  $Tb$  theorem. *Rev. Mat. Iberoamericana* 6, 1-2 (1990), 17–41.

- [30] HART, J. Bilinear square functions and vector-valued Calderón-Zygmund operators. *to appear in J. Fourier Anal. Appl.* (2012).
- [31] HERRAN, A. G. D. L. Generalized local  $Tb$  theorem and applications. *PhD Thesis, University of Missouri* (2012).
- [32] HERRAN, A. G. D. L., HART, J., AND OLIVEIRA, L. Multilinear local  $T(b)$  theorem for square functions. *Accepted at Ann. Fen. Math.* (2013).
- [33] HOFMANN, S. A local  $Tb$  theorem for square functions. In *Perspectives in partial differential equations, harmonic analysis and applications*, vol. 79 of *Proc. Sympos. Pure Math.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 175–185.
- [34] KNAPP, A. W., AND STEIN, E. M. Intertwining operators for semisimple groups. *Ann. of Math. (2)* 93 (1971), 489–578.
- [35] KREISS, H.-O., HAGSTROM, T., LORENZ, J., AND ZINGANO, P. Decay in time of incompressible flows. *J. Math. Fluid Mech.* 5, 3 (2003), 231–244.
- [36] LADYŽENSKAJA, O. A., SOLONNIKOV, V. A., AND URAL'CEVA, N. N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.
- [37] LIEBERMAN, G. M. *Second order parabolic differential equations*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996.
- [38] MALDONADO, D., AND NAIBO, V. On the boundedness of bilinear operators on products of Besov and Lebesgue spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 352, 2 (2009), 591–603.
- [39] MALDONADO, D. M. *Multilinear singular integrals and quadratic estimates*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2005. Thesis (Ph.D.)—University of Kansas.



- [40] MCINTOSH, A., AND MEYER, Y. Algèbres d'opérateurs définis par des intégrales singulières. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 301, 8 (1985), 395–397.
- [41] NAGEL, A., STEIN, E. M., AND WAINGER, S. Differentiation in lacunary directions. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 75, 3 (1978), 1060–1062.
- [42] NASH, J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. *Amer. J. Math.* 80 (1958), 931–954.
- [43] OLEĬNIK, O. A., AND VENTCEL', T. D. Cauchy's problem and the first boundary problem for a quasilinear equation of parabolic type. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)* 97 (1954), 605–608.
- [44] OLEĬNIK, O. A., AND VENTCEL', T. D. The first boundary problem and the Cauchy problem for quasi-linear equations of parabolic type. *Mat. Sb. N.S.* 41(83) (1957), 105–128.
- [45] RUBIO DE FRANCIA, J. L. Estimates for some square functions of Littlewood-Paley type. *Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona* 27, 2 (1983), 81–108.
- [46] RUDNICKI, R. Asymptotical stability in  $L^1$  of parabolic equations. *J. Differential Equations* 102, 2 (1993), 391–401.
- [47] SCHONBEK, M. E. Large time behaviour of solutions to the Navier-Stokes equations in  $H^m$  spaces. *Comm. Partial Differential Equations* 20, 1-2 (1995), 103–117.
- [48] SCHÜTZ, L. Equações de advecção- difusão com aplicações às equações de navier-stokes. *Tese de doutorado, UFRGS* (2008).
- [49] SEMMES, S. Nonlinear Fourier analysis. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 20, 1 (1989), 1–18.

- [50] SEMMES, S. Square function estimates and the  $T(b)$  theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.* 110, 3 (1990), 721–726.
- [51] SERRE, D. *Systems of conservation laws. 1*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Hyperbolicity, entropies, shock waves, Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.
- [52] STEIN, E. M. *Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory*. Annals of Mathematics Studies, No. 63. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [53] STEIN, E. M. Maximal functions. I. Spherical means. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 73, 7 (1976), 2174–2175.
- [54] STEIN, E. M. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, vol. 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.
- [55] STEIN, E. M., AND WEISS, G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. Princeton Mathematical Series, No. 32.
- [56] WIEGNER, M. On the asymptotic behaviour of solutions of nonlinear parabolic equations. *Math. Z.* 188, 1 (1984), 3–22.
- [57] WIEGNER, M. Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on  $\mathbf{R}^n$ . *J. London Math. Soc. (2)* 35, 2 (1987), 303–313.