

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**“Modelos Evolutivos de
Crescimento Econômico com Dependência Espacial”**

por

João Plínio Juchem Neto

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen
Orientador

Porto Alegre, fevereiro de 2013.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Juchem Neto, João Plínio

Modelos Evolutivos de Crescimento Econômico com Dependência Espacial / João Plínio Juchem Neto — Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2013.

67 p.: il.

Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2013.

Orientador: Claeysen, Julio Cesar Ruiz

Tese: Matemática Aplicada

Modelo de Crescimento Econômico Espacial, Modelo de Solow Espacial, Formação de Padrões Espaço-Temporais, Sistema de Reação-Difusão-Advecção, Sistemas Hiperbólicos, Recursos Naturais Não-Renováveis.

“Modelos Evolutivos de Crescimento Econômico com Dependência Espacial”

por

João Plínio Juchem Neto

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada
do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do
Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Vibrações, Controle e Sinais
Orientador: Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen
Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi
CMCC/UFABC

Prof. Dr. Luiz Alberto Díaz Rodrigues
Departamento de Matemática/UFMS

Prof. Dr. Jorge Paulo de Araújo
DECON/UFRGS

Tese apresentada e aprovada em
18 de fevereiro de 2013.

Prof^a Dr^a Maria Cristina Varriale
Coordenadora do PPGMAp

Ao meu pai Élcio (*in memoriam*)
e à minha mãe Eva.

Agradecimentos

Gostaria de deixar registrado meus agradecimentos:

À minha família e à minha namorada Adriana, pelo apoio e paciência em todas as horas.

Ao Prof. Julio Claeysen, pela sua orientação e por todo o seu apoio durante o desenvolvimento desta tese.

Ao PPGMAp e ao Instituto de Matemática da UFRGS, na figura de seus professores e alunos, pela oportunidade, apoio e contribuição inestimável à minha formação matemática.

Ao Departamento de Matemática da Universidade de Delaware, pela oportunidade e conhecimentos adquiridos durante os dois anos em que lá estive. Em especial, agradeço aos professores Gilberto Schleiniger e Louis Rossi.

À Petrobras, pelo apoio financeiro através do programa PFRH-PB 16.

Resumo

Neste trabalho consideramos casos especiais de uma versão modificada do Modelo de Isard-Liossatos para crescimento econômico espacial, levando em consideração a interação entre as distribuições de capital e mão-de-obra. Por um lado, consideramos que o capital se move de regiões com alta densidade de capital para regiões com baixa densidade de capital de uma forma difusiva, e, por outro lado, que ele se move para regiões com uma maior densidade de mão-de-obra (o que chamamos de movimento por taxia do capital). De forma similar, consideramos um movimento difusivo e por taxia para a mão-de-obra. No primeiro caso, consideramos um sistema de reação-difusão-taxia governando a evolução espaço-temporal das densidades de capital e trabalho, e encontramos quatro tipos de comportamentos para o sistema: (i) a economia converge para um estado estacionário homogêneo; (ii) a economia converge para um estado estacionário não-homogêneo; (iii) a economia desenvolve ciclos periódicos; e (iv) a economia desenvolve ciclos irregulares e aperiódicos. No segundo caso, consideramos um modelo dinâmico e hiperbólico, derivado a partir da Lei de Fourier Modificada proposta por Cattaneo (1948), a qual implica que a informação se propaga com velocidade finita através da economia. Finalmente, introduzimos um estoque de recursos naturais não-renovável no modelo de reação-difusão-taxia, e mostramos que, para o caso (ii) acima, a economia como um todo se beneficia.

Abstract

In this work we consider special cases of a modified version of the Isard-Liossatos Model for spatial economic growth, taking into account the interplay between the distributions of capital and labor. On one hand we consider that capital moves from regions with high density of capital to regions with low density of capital in a diffuse way, and, on the other hand, we consider that it moves into regions with a higher density of labor available (what we call the capital taxis motion). In the same fashion, we consider a diffusive and a taxis motion for the labor force. In the first case we consider a taxis-reaction-diffusion system governing the spatio-temporal evolution of capital and labor densities, and find four kinds of spatio-temporal behaviors for the system: (i) the economy converges to a homogeneous steady-state; (ii) the economy converges to a non-homogeneous steady-state; (iii) the economy develops periodic cycles; and (iv) the economy develops irregular and aperiodic cycles. In the second case we consider a dynamic and hiperbolic model, derived from the modified Fourier Law proposed by Cattaneo (1948), which implies that information propagates throughout the economy in a finite speed. Finally, we introduce a non-renewable natural resource in the taxis-reaction-diffusion model, and show that, in the case (ii) above, the economy as a whole benefits from it.

Sumário

1	Introdução	2
2	Revisão Bibliográfica	4
3	Modelo de Isard-Liossatos	7
3.1	Derivação do Modelo	7
3.1.1	Equação governando a acumulação de capital, $K(t, \mathbf{x})$	7
3.1.2	Equação governando a evolução da mão-de-obra, $L(t, \mathbf{x})$	8
3.1.3	Equação governando o fluxo de capital, \mathbf{u}	9
3.1.4	Equação governando o fluxo de mão-de-obra, \mathbf{v}	10
3.1.5	Condições Iniciais e de Contorno	10
3.2	Formulação Vetorial e de Componentes	11
3.3	Formulação Matricial	12
3.4	Caso Particular: Modelo de Reação-Difusão com Anti-Difusão Cruzada . .	13
3.5	Caso Particular: Modelo de Reação-Difusão-Taxia	15
3.6	Modelo de Isard-Liossatos Modificado	18
4	Modelo de Solow Espacial Generalizado	20
4.1	Adimensionalização do Modelo	21
4.2	Estabilidade Linear	22
4.3	Casos Especiais do MSEG em uma Dimensão Espacial	26
4.3.1	Economia apenas com Mão-de-Obra	26
4.3.2	Economia apenas com Capital	28
4.3.3	MSEG com Capital e Mão-de-Obra, mas sem Taxia	28
4.3.4	MSEG com taxia apenas para a mão-de-obra	33
5	Modelo de Solow Espacial Generalizado com Recursos Naturais Não-Renováveis	45
5.1	Modelo e Função de Produção	45
5.2	Simulações Numéricas em uma Dimensão Espacial	46
6	Modelos de Solow Espaciais Ondulatórios	52
6.1	Função de Produção Alternativa	52
6.2	Modelo de Solow Espacial Ondulatório I	53
6.2.1	MSEO-I numa economia apenas com Mão-de-Obra	55
6.2.2	MSEO-I numa economia apenas com Capital	55
6.3	Modelo de Solow Espacial Ondulatório II	57
7	Conclusões e Perspectivas	59
	Apêndice A - Esquema Numérico Explícito	61
	Referências Bibliográficas	63

1 Introdução

Na década de 90 houve um renascimento das ciências regionais com o advento da geografia econômica, também conhecida como economia espacial. Esta disciplina, grosso modo, estuda a relação entre variáveis econômicas tais como capital, trabalho e renda, com as variáveis espaço-temporais, e tem por objetivo descrever a dinâmica da formação de cidades, zonas rurais e centros industriais e comerciais no espaço. Para tanto, utiliza uma série de modelos matemáticos, os quais são derivados a partir da aplicação de conceitos e leis econômicas, como, por exemplo, lei da oferta e demanda, equilíbrio de comércio, retornos crescentes, constantes e decrescentes de escala [40, 29].

Embora tais modelos sejam bastante úteis para descrever a formação de núcleos urbanos, comerciais e industriais, eles possuem duas grandes limitações: o espaço é considerado como discreto e não há acumulação de capital. Apesar deste primeiro fator não ser tão restritivo, a segunda limitação é mais séria, pois a acumulação de capital é fator fundamental para explicar o crescimento econômico, e a ocorrência de migração de mão-de-obra [11]. Devido à estas limitações, recentemente há um novo interesse no desenvolvimento e aprimoramento de modelos de crescimento econômico espaciais que integrem crescimento econômico com geografia [11, 7, 12, 13, 14, 28]. Na verdade, estes modelos recentes, chamados de Modelo de Solow Espacial, são um caso especial – o caso reativo-difusivo – de um modelo bastante geral proposto na década de 70 por Isard e Liossatos [34, 35, 36], o qual foi motivado por uma analogia com o modelo de uma linha de transmissão elétrica.

Dada a extensão territorial brasileira e a necessidade de elaboração de políticas de desenvolvimento econômico visando o crescimento equilibrado de suas diversas regiões, a elaboração e análise de modelos de crescimento econômicos espaciais é de grande interesse. Além disto, como o Brasil é um país com grandes reservas de recursos naturais não-renováveis, tais como petróleo, gás natural e minérios, e um grande explorador de recursos naturais renováveis – agricultura, agropecuária e pesca –, a generalização destes modelos, no sentido de considerarem a existência destes recursos, se torna necessária.

Como a exploração do petróleo tende a ocorrer em regiões concentradas no espaço, e a trazer um choque de desenvolvimento e investimento para estas regiões por um tempo limitado – pois se trata de recurso não-renovável –, um problema decorrente é a determinação ótima de “royalties” e sua aplicação em projetos de investimentos diversificados [45], com o objetivo de criar uma estrutura econômica sólida o bastante para garantir a sustentabilidade da região quando seus poços se exaurirem.

Considerando este contexto, o objetivo principal desta tese será estender o estado atual dos modelos de crescimento econômicos espaciais, seguindo nas seguintes direções.

Em primeiro lugar, iremos modificar o Modelo de Isard-Liossatos com o intuito de evitar a existência de soluções negativas, e tratar de dois dos seus principais casos particulares: o modelo de difusão-reação-taxia (ou modelo reativo-difusivo-advectivo), que tem natureza parabólica e é uma generalização do Modelo de Solow Espacial atualmente encontrado na literatura; e os modelos ondulatório-dissipativos de natureza hiperbólica (até onde sabemos, Isard e Liossatos chegaram a considerar formas simples destes modelos

[34, 35, 36], mas desde então eles não aparecem mais na literatura). Um destes modelos ondulatório-dissipativos, em sua forma mais geral, será derivado a partir da Lei de Fourier Modificada proposta por Cattaneo no final da década de 40 [16, 17], como forma de resolver o paradoxo da propagação de informação com velocidade infinita advinda da Lei de Fourier para a condução do calor. A aplicação desta lei implica em equações diferenciais parciais hiperbólicas, que em alguns casos particulares se materializa sob a forma da equação do telégrafo. O outro é o caso particular sem atrito do Modelo de Isard-Liossatos Modificado.

Em segundo lugar, iremos considerar o fator de produção mão-de-obra nestes modelos, governada por um crescimento logístico exógeno; a migração espacial de trabalhadores dependente e independente da distribuição de capital; e que o capital se movimenta pelo espaço de forma dependente e independente da distribuição de mão-de-obra.

Por fim, vamos introduzir nestes modelos recursos naturais não-renováveis concentrados em determinadas regiões geográficas (tal como ocorre nas regiões onde são encontrados e explorados poços de petróleo, por exemplo), com o intuito de estudar sua influência na evolução das distribuições espaciais de capital e mão-de-obra, e no crescimento da economia como um todo.

Ao longo deste estudo nos utilizaremos de várias idéias e métodos usados na área de Biomatemática, o que demonstra que uma maior interação entre estas duas áreas de conhecimento pode gerar bons frutos. A única referência que encontramos do uso destes métodos na literatura econômica foi em [8], onde os autores estudam a formação de padrões espaciais em um modelo econômico-ecológico acoplado descrito por um sistema reativo-difusivo.

Esta tese está estruturada da seguinte forma: no Capítulo 2 fazemos uma rápida revisão bibliográfica sobre modelos de crescimento econômico espaciais e sobre modelos e fatos empíricos envolvendo a consideração de recursos naturais; no Capítulo 3 derivamos o modelo geral de Isard-Liossatos, MIL [34, 35, 36], assim como um de seus casos particulares, o caso reativo-difusivo-advectivo, e introduzimos uma modificação ao MIL com o intuito de evitar a existência de soluções negativas para este caso particular; no Capítulo 4 analisamos detalhadamente o Modelo de Solow Espacial Generalizado, modelo este que generaliza o Modelo de Solow Espacial atualmente encontrado na literatura [11, 7, 12, 13, 14, 28], ao considerar que a mão-de-obra migra para regiões com maior densidade de capital (mais fábricas instaladas) e que o capital migra para regiões com maior densidade de mão-de-obra disponível; no Capítulo 5 apresentamos algumas simulações do Modelo de Solow Espacial Generalizado envolvendo a existência de recursos naturais não-renováveis; no Capítulo 6 apresentamos os casos ondulatórios do Modelo de Isard-Liossatos Modificado (MILM), modelos estes dinâmicos, de segunda ordem no tempo, e portanto de natureza hiperbólica, e analisamos um caso simplificado que se reduz à equação do telégrafo num domínio infinito; e finalmente, no Capítulo 7, apresentamos as conclusões e perspectivas de pesquisa futura.

2 Revisão Bibliográfica

O modelo de crescimento econômico neoclássico, considerado padrão até os dias de hoje, foi proposto por Solow e Swan na década de 50 [61, 65]. Neste modelo, a taxa de poupança e o crescimento malthusiano (ou exponencial) da mão-de-obra são dados exogenamente, e como na grande maioria dos modelos de crescimento econômico encontrados na literatura, ele é espacialmente homogêneo, ou seja, não leva em consideração a migração de capital e trabalho no espaço. Portanto, tais modelos são utilizados principalmente para descrever a evolução da economia agregada, cuja medida pode ser feita através do produto interno bruto (PIB) de um país, por exemplo. Uma olhada nos dados empíricos, entretanto, mostra que a grande maioria das cidades com maior PIB estão concentradas nas regiões sul e sudeste do Brasil (Figura 1, coluna da direita), enquanto que as cidade de menor PIB estão concentradas nas regiões norte e nordeste (Figura 1, coluna da esquerda).

MAPA 1

Cidades com PIB per capita (muito) baixo e dinamismo muito alto



Fonte: IBGE, Censo 2000 e PIB Municipal. Elaboração própria.

MAPA 2

Cidades com PIB per capita muito alto e dinamismo muito alto



Fonte: IBGE, Censo 2000 e PIB Municipal. Elaboração própria.

MAPA 3

Cidades com um PIB per capita (muito) baixo, e com médio ou (muito) baixo dinamismo



Fonte: IBGE, Censo 2000 e PIB Municipal 2002-2006. Elaboração própria.

MAPA 4

Cidades com PIB per capita muito alto, e com taxas médias ou muito baixas de dinamismo



Fonte: IBGE, Censo 2000 e PIB Municipal. Elaboração própria.

Figura 1: Aglomeração da Economia Brasileira (Fonte: Rolnik e Klink, 2011 [56]).

É evidente, portanto, que a localização, ou variável espacial, desempenha algum papel no crescimento econômico. Nos anos 70, Isard e Liosatos, partindo de uma analogia com modelos de linhas de transmissão elétrica, propuseram um modelo de crescimento econômico levando em conta as variáveis espaço e tempo de forma contínua [34, 35, 36], e a movimentação de trabalhadores e do capital através do espaço. Então, nos anos 90, com

o advento da economia espacial [40, 29], o interesse por modelos de crescimento econômico espaciais foi renovado. A grande parte destes modelos, no entanto, considera o espaço discreto e não leva em conta a acumulação de capital.

No início dos anos 2000, Camacho e Zou [11] propuseram um modelo de Solow espacial em uma dimensão espacial, e em um domínio ilimitado, considerando apenas capital como fator de produção. De fato, o modelo apresentado é apenas o caso reativo-difusivo do Modelo de Isard-Liossatos, mas agora derivado diretamente utilizando como argumento a conservação de capital. Em seguida, Brito [7] introduziu o fator de produção mão-de-obra no modelo anterior, considerando-a exógena e seguindo um crescimento malthusiano (ou exponencial). Capasso *et al.* [13], por sua vez, consideraram este modelo em um domínio limitado e introduziram uma função de produção não clássica em formato de S (convexa-côncava), obtendo desta forma armadilhas de pobreza; e, mais recentemente, introduziram em seu modelo uma distribuição de mão-de-obra malthusiana exógena e espacialmente não-homogênea, ou seja, cuja taxa de crescimento depende da variável espacial [14].

Uma característica do modelo de Solow espacial é que nele predomina o caráter difusivo, o que implica que o capital tende a se mover de regiões mais densas para regiões menos densas, ou seja, o capital segue o princípio do ganho marginal decrescente dos fatores de produção, o que é uma característica desejável em um modelo de crescimento econômico neoclássico. O Modelo de Isard-Liossatos, entretanto, também tem entre seus casos particulares situações onde há inércia; em tais casos, ciclos econômicos podem se desenvolver.

Quanto ao impacto da existência de recursos naturais no crescimento econômico, uma breve revisão da literatura nos mostra que a evidência do impacto da abundância de recursos naturais não-renováveis no crescimento econômico não é conclusiva, embora fique claro que alguma influência de fato exista. Sachs e Warner [57, 58] mostraram que países com grandes reservas (medida pela taxa de exportação de recursos naturais não-renováveis em relação ao PIB) tendem a crescer mais lentamente que países que não as possuem, dando início a uma série de estudos empíricos tratando da assim chamada “maldição dos recursos naturais”. Uma das justificativas para este fenômeno é que instituições de má qualidade acabam afetando negativamente o aproveitamento eficiente dos recursos, desacelerando assim o crescimento econômico [15, 39, 47, 70]. Por exemplo, Torvik [67] apresenta um modelo com “rent seeking”¹ mostrando que uma maior abundância de recursos naturais aumenta o número de empreendedores engajados em “rent seeking”, reduzindo, assim, o número de empreendimentos produtivos.

Em contrapartida, Boyce e Emery [6], utilizando um modelo de dois setores com recursos naturais não-renováveis, mostram que a correlação entre a abundância de recursos naturais e o crescimento econômico pode ser negativa mesmo quando não há falhas institucionais e de mercado, e demonstram, empiricamente, que a existência de uma “maldição” ou “benção” dos recursos naturais só pode ser investigada através do estudo da correlação entre recursos naturais e nível de renda, concluindo que a abundância de recursos é nega-

¹Em Economia, “rent seeking” (ou busca de renda, em português) é uma tentativa de derivar renda econômica através da manipulação do ambiente social ou político onde a atividade econômica ocorre, ao invés de criar nova riqueza.

tivamente relacionada com o crescimento econômico, mas positivamente relacionada com o nível de renda. Stijns [64] admite que o efeito da existência de recursos naturais não-renováveis no crescimento econômico é complexo e sugere que a habilidade de um país explorar tais recursos depende, de forma crítica, da natureza do processo de aprendizado necessário. Por outro lado, Brunnschweiler [9] encontra uma relação empírica positiva entre recursos naturais não-renováveis e crescimento econômico, não encontrando efeito indireto negativo através do canal institucional; e Cavalcanti *et al* [18], mostram que a abundância de petróleo tem um efeito positivo tanto no nível de renda, quanto no crescimento econômico.

Do ponto de vista teórico, Stiglitz [62, 63] constrói um modelo considerando recursos naturais não-renováveis, e mostra que é possível obter-se um crescimento sustentável da renda per capita, derivando a taxa ótima de exploração dos recursos. Além disso, mostra que se a exploração dos recursos for muito intensa, a trajetória de crescimento ótimo apresenta taxas de crescimento de longo prazo menores do que se a extração é feita pela taxa ótima. Lafforgue [42] desenvolve um modelo de crescimento endógeno com recursos não-renováveis, no qual os choques de inovação tecnológica são governados por um processo de Poisson não-estacionário, derivando condições que garantem uma trajetória de crescimento sustentável. Gaitan e Roe [30], por sua vez, apresentam um modelo com dois países, mostrando que a inelasticidade da demanda por recursos não-renováveis, que aumenta a renda obtida com sua venda, induz o país com recursos abundantes a investir relativamente menos que o país que não possui recursos naturais.

Quanto à consideração de recursos naturais renováveis em modelos de crescimento e da derivação de regras ótimas de substituição entre recursos renováveis e não-renováveis, podemos citar os seguintes trabalhos: Tahvonen e Salo [66] estudam as transições entre formas de energia renováveis e não-renováveis em diferentes estágios de desenvolvimento de um economia; André e Cerdá [2] fazem o mesmo, mas considerando as consequências para a sustentabilidade; Di Vita [24] considera um modelo endógeno com recursos renováveis e não-renováveis, levando em conta a externalidade negativa gerada pelo impacto no meio-ambiente; e Krutilla e Reuveny [41] consideram o crescimento populacional endógeno em uma economia baseada em recursos renováveis, obtendo um sistema dinâmico complexo com possibilidade de múltiplos estados estacionários, de diferentes tipos.

3 Modelo de Isard-Liossatos

O modelo básico que utilizaremos neste trabalho foi proposto, em sua forma mais geral, por Isard e Liossatos na década de 70 [34, 36]. O modelo original foi derivado apenas para uma dimensão espacial, mas aqui o apresentaremos em duas. Embora este modelo seja bastante abrangente, capaz de gerar diferentes dinâmicas espaciais de crescimento econômico, até o momento ele não foi estudado exaustivamente.

Neste capítulo vamos apresentar este modelo, considerando um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, onde cada ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ é considerado uma unidade econômica local. O domínio Ω , portanto, constitui um continuum de economias locais representando a economia global. Além disso, inicialmente consideraremos que há apenas um bem agregado na economia, cuja produção utiliza dois insumos: capital e trabalho. Desta forma, cada ponto do espaço é caracterizado por um estoque de capital $K(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^+$ e de trabalho $L(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^+$, e um fluxo de trabalho e capital, $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2$, respectivamente. A seguir apresentamos as equações governando a evolução espaço-temporal destas quatro variáveis fundamentais.

3.1 Derivação do Modelo

3.1.1 Equação governando a acumulação de capital, $K(t, \mathbf{x})$

A equação garantindo a conservação de capital na economia é derivada a partir da seguinte lei de conservação:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D K \, d\mathbf{x} = \int_D (Y - C - \delta K) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial D} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad (1)$$

onde D é subdomínio arbitrário contido em Ω , ∂D é a curva constituindo sua fronteira, \mathbf{n} é o vetor normal unitário apontando para fora da região D , e:

$K = K(t, \mathbf{x})$ é a densidade de capital;

$Y = Y(K, L, \mathbf{x})$ é a densidade de produto (ou produção) por unidade de tempo;

$C = C(t, \mathbf{x})$ é a densidade de consumo por unidade de tempo;

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u^x, u^y)^\top$ é o fluxo de capital passando pela localidade \mathbf{x} no tempo t ;

$\delta \in [0, 1]$ é a taxa de depreciação do capital.

No lado esquerdo da equação (1) temos a taxa de variação do estoque de capital em uma subregião D da economia total Ω ; em seu lado direito $\int_D (Y - C - \delta K) \, d\mathbf{x}$ é a taxa de investimento líquido em D ; e $-\int_{\partial D} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds$ é a taxa líquida de capital entrando em D pela sua fronteira ∂D . Aplicando o Teorema da Divergência nesta última integral, temos que:

$$\int_{\partial D} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_D \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x},$$

e assim, também considerando K continuamente diferenciável em relação a t , (1) pode ser reescrita como:

$$\int_D \left(\frac{\partial K}{\partial t} - h + \nabla \cdot \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} = 0, \quad (2)$$

onde definimos $h = Y - C - \delta K$ como o investimento líquido local: que é igual à poupança $(Y - C)$ menos a depreciação do capital δK . Como D é arbitrário, temos que o integrando

(supondo-o contínuo) na equação anterior deve ser igual a zero em todo o domínio Ω , e assim obtemos a equação de continuidade para o capital:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = h, \quad (3)$$

que pode ser escrita como:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = h - \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (4)$$

A equação (4) nos diz que a taxa de variação total do estoque de capital em \mathbf{x} no tempo t , $\left(\frac{\partial K}{\partial t}\right)$, deve ser igual ao investimento líquido local h menos as exportações líquidas para outras localidades $(\nabla \cdot \mathbf{u})$.

Em Economia considera-se que o produto é função dos insumos capital e trabalho, e esta relação é dada por uma função de produção $f(K, L, \mathbf{x})$ – que será abordada detalhadamente mais adiante –, a qual, em princípio, pode ser distinta em cada ponto do espaço:

$$Y = f(K, L, \mathbf{x}). \quad (5)$$

Além disso, é usual considerar-se que a poupança é dada por uma fração do produto:

$$Y - C = s(\mathbf{x})f(K, L, \mathbf{x}), \quad s(\mathbf{x}) \in [0, 1]. \quad (6)$$

Aqui, $s(\mathbf{x})$ é a taxa de poupança na localidade \mathbf{x} . Assim, por (5) e (6) podemos reescrever (4) na seguinte forma, a qual será considerada daqui para frente:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = h(K, L, \mathbf{x}) - \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (7)$$

onde definimos a função $h(\cdot)$ como:

$$h(K, L, \mathbf{x}) = s(\mathbf{x})f(K, L, \mathbf{x}) - \delta K. \quad (8)$$

3.1.2 Equação governando a evolução da mão-de-obra, $L(t, \mathbf{x})$

Como no caso do capital, aqui também consideraremos um único tipo de mão-de-obra agregada, representativa da economia. Considerando que a conservação de trabalhadores em $D \subset \Omega$ é dada pela equação:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D L \, d\mathbf{x} = \int_D g \, d\mathbf{x} - \int_{\partial D} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad (9)$$

onde:

$L = L(t, \mathbf{x})$ é a densidade de mão-de-obra (ou trabalho);

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = (v^x, v^y)^\top$ é o fluxo de trabalhadores passando pela localidade \mathbf{x} no tempo t ;

$g(K, L, \mathbf{x})$ é a taxa de crescimento orgânico da mão-de-obra

e seguindo o mesmo argumento utilizado para o caso do capital, chegamos a seguinte equação de continuidade para a mão-de-obra:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = g(K, L, \mathbf{x}) - \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (10)$$

Assim, a taxa de variação da mão-de-obra em \mathbf{x} , no tempo t , é dada pela taxa de crescimento orgânico, $g(K, L, \mathbf{x})$, e por um termo representando a migração líquida de trabalhadores para outras localidades, $\nabla \cdot \mathbf{v}$: se $\nabla \cdot \mathbf{v} > 0$, temos emigração a partir de \mathbf{x} ; se $\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$, temos imigração para \mathbf{x} .

A forma usual encontrada na literatura para $g(K, L, \mathbf{x})$ em (10) é a que gera um crescimento orgânico – independente de K – exponencial (ou Malthusiano): $g(K, L, \mathbf{x}) = g(L, \mathbf{x}) = a(\mathbf{x})L$, [61, 5], onde $a(\mathbf{x})$ é a taxa de crescimento da mão-de-obra na localidade \mathbf{x} ; neste trabalho também consideraremos um crescimento logístico (ou de Verhulst)²: $g(K, L, \mathbf{x}) = g(L, \mathbf{x}) = L[a(\mathbf{x}) - b(\mathbf{x})L]$, onde $a(\mathbf{x})/b(\mathbf{x})$ é o limite de mão-de-obra suportado pela economia.

3.1.3 Equação governando o fluxo de capital, \mathbf{u}

A equação (7) descreve a dinâmica de investimento em cada economia local, considerando as exportações líquidas $\nabla \cdot \mathbf{u}$ como dadas. Para termos uma descrição dinâmica completa, ainda precisamos de uma equação para descrever a evolução temporal do fluxo de capital em cada localização, considerando a interação entre as economias locais. Se definirmos $\mathbf{w} = (K, L, u^x, u^y, v^x, v^y)^\top$, temos que, de forma geral, esta evolução será dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F} \left(\mathbf{w}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}}, \dots, t, \mathbf{x} \right), \quad (11)$$

onde $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} = (\nabla K, \nabla L, \nabla u^x, \nabla u^y, \nabla v^x, \nabla v^y)^\top$. Neste trabalho consideraremos a seguinte forma particular da equação anterior:

$$l \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\xi \nabla K + \tau \nabla L - \nu \mathbf{u}, \quad (12)$$

onde $l \geq 0$ é um coeficiente inercial; $\xi \geq 0$ o coeficiente de sensibilidade ao gradiente do capital; $\tau \geq 0$ de sensibilidade ao gradiente da mão-de-obra; e $\nu \geq 0$ de atrito. Observe que, se $\tau = 0$, (12) pode ser escrita como:

$$\mathbf{u} + \frac{l}{\nu} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\xi}{\nu} \nabla K,$$

onde o termo $\frac{l}{\nu} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ é uma força que modifica a difusão e que pode levar à propagação de ondas, como observado por Isard e Liossatos em [34, 36]. De fato, esta equação é a Lei de Fourier Modificada proposta por Cattaneo no final da década de 40 [16, 17], como forma de resolver o paradoxo da propagação de informação com velocidade infinita advinda da Lei de Fourier para a condução do calor (que é recuperada fazendo o coeficiente inercial, l , igual a zero). Esta equação constitutiva também é chamada de relação de Cattaneo-Maxwell, pois Maxwell chegou a ela, mas imediatamente descartou o termo envolvendo a derivada temporal do fluxo de calor, pois no problema com o qual estava trabalhando sua magnitude era muito pequena [46, 19, 1]. Este caso geral será considerado em maiores detalhes no Capítulo 6.

Assim, a dinâmica dada por (12) é da seguinte forma: o gradiente do capital intensifica o fluxo de capital para onde ele é mais escasso ($-\xi \nabla K$), seguindo o princípio

²Até onde vai nosso conhecimento, o crescimento logístico ainda não foi considerado na literatura de modelos de crescimento econômico espaciais (embora ele já tenha sido considerado em modelos não-espaciais, como em [25, 48, 31]); o padrão amplamente utilizado é o crescimento Malthusiano.

de retorno marginal decrescente do capital, conforme a escola neoclássica de pensamento econômico; o gradiente da mão-de-obra intensifica o fluxo de capital para onde há mais trabalhadores disponíveis ($\tau \nabla L$); finalmente, estes efeitos são diminuídos pela presença do termo $-\nu \mathbf{u}$, que representa diversas forças de atrito, consequências, por exemplo, de fricções sociais, políticas, econômicas e físicas (e.g. custo de transferência do capital).

3.1.4 Equação governando o fluxo de mão-de-obra, \mathbf{v}

Da mesma forma que fizemos para o capital, também precisamos especificar a equação descrevendo a evolução do fluxo de mão-de-obra. Assim, as equações análogas às consideradas em (11) e (12) são dadas por:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{G} \left(\mathbf{w}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}}, \dots, t, \mathbf{x} \right). \quad (13)$$

e:

$$\hat{l} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \hat{\xi} \nabla K - \hat{\tau} \nabla L - \hat{\nu} \mathbf{v}, \quad (14)$$

sendo que $\hat{l} \geq 0$ é um coeficiente inercial; $\hat{\xi} \geq 0$ de sensibilidade ao gradiente do capital; $\hat{\tau} \geq 0$ de sensibilidade ao gradiente da mão-de-obra; e $\hat{\nu} \geq 0$ de atrito. Aqui, novamente, (14) pode ser identificada com a Lei de Fourier Modificada.

Resta observar, em relação a (14), que neste caso o fluxo de mão-de-obra é intensificado na direção onde há mais capital (e.g. fábricas instaladas), e na direção contrária à maior densidade de trabalhadores (retorno marginal decrescente do trabalho).

3.1.5 Condições Iniciais e de Contorno

A fim de completar a descrição do modelo, ainda precisamos adicionar condições iniciais e de contorno às equações (7), (10), (12) e (14). Quanto às condições iniciais, elas serão dadas pelas seguintes distribuições iniciais:

$$\begin{aligned} K(0, \mathbf{x}) &= K_0(\mathbf{x}), \\ L(0, \mathbf{x}) &= L_0(\mathbf{x}), \\ \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \\ \mathbf{v}(0, \mathbf{x}) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (15)$$

onde $\mathbf{x} \in \Omega$.

Em relação às condições de contorno, vamos considerar dois casos: (i) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitado; e (ii) $\Omega = \mathbb{R}^2$. No caso (i) consideraremos condições de Neumann homogêneas (ou reflexivas) para o capital e a mão-de-obra na fronteira:

$$\frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ para } \mathbf{x} \in \partial\Omega, t \geq 0, \quad (16)$$

onde $\mathbf{n} = (n^x, n^y)^\top$ é o vetor normal unitário à curva $\partial\Omega$, com sentido para fora do interior do domínio. Quanto ao fluxo de capital, suporemos que economia como um todo é uma autarquia, isto é, que não há trocas de capital e mão-de-obra com o exterior, ou seja, os fluxos na fronteira devem ser nulos:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ para } \mathbf{x} \in \partial\Omega, t \geq 0. \quad (17)$$

Similarmente para o caso (ii), onde o domínio é todo o plano, teremos que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ para } \mathbf{x} \in \partial B_r, t \geq 0, \quad (18)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ para } \mathbf{x} \in \partial B_r, t \geq 0, \quad (19)$$

onde $B_r \subset \mathbb{R}^2$ é o disco de raio $r > 0$ centrado na origem.

Tanto no caso (i) quanto no caso (ii) temos que garantir que as condições de contorno sejam compatíveis com as condições iniciais.

3.2 Formulação Vetorial e de Componentes

Considerando as equações (7), (10), (12), (14); as condições iniciais dadas em (15); e as condições de contorno (16)-(17), o Modelo de Isard-Liossatos (MIL) em um domínio limitado pode ser escrito como o seguinte sistema de equações diferenciais parciais:

$$(MIL) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial K}{\partial t} = h(K, L, \mathbf{x}) - \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \frac{\partial L}{\partial t} = g(K, L, \mathbf{x}) - \nabla \cdot \mathbf{v} \\ l \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\xi \nabla K + \tau \nabla L - \nu \mathbf{u} \\ \hat{l} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \hat{\xi} \nabla K - \hat{\tau} \nabla L - \hat{\nu} \mathbf{v}, \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \Omega \\ K(0, \mathbf{x}) = K_0(\mathbf{x}), L(0, \mathbf{x}) = L_0(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = 0 \\ \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \partial \Omega \end{array} \right. \quad (20)$$

Em forma de componentes, (20) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
(\text{MIL-comp}) \quad & \left\{ \begin{aligned}
& \frac{\partial K}{\partial t} = h - \frac{\partial u^x}{\partial x} - \frac{\partial u^y}{\partial y} \\
& \frac{\partial L}{\partial t} = g - \frac{\partial v^x}{\partial x} - \frac{\partial v^y}{\partial y} \\
& l \frac{\partial u^x}{\partial t} = -\xi \frac{\partial K}{\partial x} + \tau \frac{\partial L}{\partial x} - \nu u^x \\
& l \frac{\partial u^y}{\partial t} = -\xi \frac{\partial K}{\partial y} + \tau \frac{\partial L}{\partial y} - \nu u^y \\
& \hat{l} \frac{\partial v^x}{\partial t} = \hat{\xi} \frac{\partial K}{\partial x} - \hat{\tau} \frac{\partial L}{\partial x} - \hat{\nu} v^x \\
& \hat{l} \frac{\partial v^y}{\partial t} = \hat{\xi} \frac{\partial K}{\partial y} - \hat{\tau} \frac{\partial L}{\partial y} - \hat{\nu} v^y, \text{ para } (t, x, y) \in (0, \infty) \times \Omega \\
& K = K_0(x, y), L = L_0(x, y) \\
& u^x = u_0^x(x, y), v^x = v_0^x(x, y) \\
& u^y = u_0^y(x, y), v^y = v_0^y(x, y), \text{ para } (t, x, y) \in \{0\} \times \Omega \\
& \frac{\partial K}{\partial x} n^x + \frac{\partial K}{\partial y} n^y = \frac{\partial L}{\partial x} n^x + \frac{\partial L}{\partial y} n^y = 0 \\
& u^x = v^x = 0 \\
& u^y = v^y = 0, \text{ para } (t, x, y) \in (0, \infty) \times \partial\Omega
\end{aligned} \right. \quad (21)
\end{aligned}$$

3.3 Formulação Matricial

Definindo o vetor $\mathbf{w} = (K, L, u^x, u^y, v^x, v^y)^\top$, o sistema (21) pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$(\text{MIL-mat}) \quad \left\{ \begin{aligned}
& \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + \mathbf{D} \mathbf{w} + \mathbf{F}(\mathbf{w}), \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \Omega \\
& \mathbf{w} = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}), \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in \{0\} \times \Omega \\
& \mathbf{B}_F \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{C}_F \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + \mathbf{D}_F \mathbf{w} = \mathbf{0}, \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \partial\Omega
\end{aligned} \right. \quad (22)$$

onde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{l} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\xi & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\xi} & -\hat{\tau} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\xi} & -\hat{\tau} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{\nu} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} h(K, L, \mathbf{x}) \\ g(K, L, \mathbf{x}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_0(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} K_0(\mathbf{x}) \\ L_0(\mathbf{x}) \\ u_0^x(\mathbf{x}) \\ u_0^y(\mathbf{x}) \\ v_0^x(\mathbf{x}) \\ v_0^y(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\mathbf{B}_F = \begin{pmatrix} n^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n^x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_F = \begin{pmatrix} n^y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n^y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

e:

$$\mathbf{D}_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

3.4 Caso Particular: Modelo de Reação-Difusão com Anti-Difusão Cruzada

Este modelo aparece como caso particular do modelo geral apresentado anteriormente. Se desconsiderarmos o parâmetro inercial no fluxo do capital, fazendo:

$$l = 0$$

em (12), obtemos que:

$$\mathbf{u} = -\frac{\xi}{\nu} \nabla K + \frac{\tau}{\nu} \nabla L,$$

desde que $\nu \neq 0$. Como observado anteriormente, esta equação pode ser identificada com a clássica Lei de Fourier se fizermos $\tau = 0$. Tomando a divergência desta equação, obtemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{\xi}{\nu} \Delta K + \frac{\tau}{\nu} \Delta L.$$

Substituindo esta expressão em (7), obtemos a seguinte equação para a evolução espaço-temporal do investimento:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = h + \frac{\xi}{\nu} \Delta K - \frac{\tau}{\nu} \Delta L. \quad (28)$$

Definindo $d_K = \frac{\xi}{\nu}$ como o coeficiente de difusão do capital e $\chi_K = \frac{\tau}{\nu}$ como o coeficiente de anti-difusão cruzada do capital (o qual dá a intensidade do movimento do capital na direção do gradiente da mão-de-obra), podemos reescrever (28) como:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = h + d_K \Delta K - \chi_K \Delta L. \quad (29)$$

Já para o fluxo da mão-de-obra, fazemos $\hat{l} = 0$ em (14), e obtemos:

$$\mathbf{v} = \frac{\hat{\xi}}{\hat{\nu}} \nabla K - \frac{\hat{\tau}}{\hat{\nu}} \nabla L,$$

desde que $\hat{\nu} > 0$. Tomando a divergência da expressão anterior, e substituindo o resultado em (10), obtemos a equação diferencial parcial referente à evolução do trabalho:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = g - \frac{\hat{\xi}}{\hat{\nu}} \Delta K + \frac{\hat{\tau}}{\hat{\nu}} \Delta L, \quad (30)$$

a qual também pode ser escrita como:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = g + d_L \Delta L - \chi_L \Delta K, \quad (31)$$

onde $d_L = \frac{\hat{\xi}}{\hat{\nu}}$ é o coeficiente de difusão da mão-de-obra e $\chi_L = \frac{\hat{\tau}}{\hat{\nu}}$ é o coeficiente de anti-difusão cruzada da mão-de-obra (o qual dá a intensidade da migração de trabalhadores na direção do gradiente de capital).

Então, considerando as condições iniciais e de contorno, para o caso de um domínio limitado, temos que o Modelo de Reação-Difusão com Anti-Difusão Cruzada é dado por:

$$\text{(MRDADC)} \quad \begin{cases} \frac{\partial K}{\partial t} = h + d_K \Delta K - \chi_K \Delta L \\ \frac{\partial L}{\partial t} = g + d_L \Delta L - \chi_L \Delta K, \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \Omega \\ K = K_0(\mathbf{x}), L = L_0(\mathbf{x}), \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in \{0\} \times \Omega \\ \frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (32)$$

Definindo $\mathbf{w} = (K, L)^\top$, o sistema (32) pode ser escrito em forma matricial:

$$\text{(MRDADC-mat)} \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{w} + \mathbf{F}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{w} = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}), \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in \{0\} \times \Omega \\ \mathbf{A}_\mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{B}_\mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in \partial(0, \infty) \times \Omega \end{cases} \quad (33)$$

onde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} d_K & -\chi_K \\ -\chi_L & d_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \quad (34)$$

e:

$$\mathbf{A}_\mathbf{F} = \begin{pmatrix} n^x & 0 \\ 0 & n^x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_\mathbf{F} = \begin{pmatrix} n^y & 0 \\ 0 & n^y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} K_0(\mathbf{x}) \\ L_0(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Um aspecto indesejado do MRDADC dado em (32), não considerado em [34, 36], é que: (i) o termo que aumenta o fluxo de capital na direção do gradiente de mão-de-obra ($\tau \nabla L$), e (ii) o que aumenta o fluxo de trabalho na direção do gradiente do capital ($\hat{\xi} \nabla K$) podem gerar densidades negativas como solução, mesmo para condições iniciais não-negativas. Uma forma de resolver este problema é fazer o termo (i) proporcional à densidade de capital K , isto é, reescrevendo-o como $\tau K \nabla L$; e o termo (ii) proporcional à densidade de mão-de-obra L , ou seja, substituindo-o por $\hat{\xi} L \nabla K$. Desta forma, chegamos ao Modelo de Reação-Difusão-Taxia apresentado a seguir.

3.5 Caso Particular: Modelo de Reação-Difusão-Taxia

$$(\text{MRDT}) \text{ ou } (\text{MSEG}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial K}{\partial t} = h + d_K \Delta K - \chi_K \nabla \cdot (K^\mu \nabla L) \\ \frac{\partial L}{\partial t} = g + d_L \Delta L - \chi_L \nabla \cdot (L^\mu \nabla K), \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \Omega \\ K = K_0(\mathbf{x}), L = L_0(\mathbf{x}), \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in \{0\} \times \Omega \\ \frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = 0, \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \partial\Omega \end{array} \right. \quad (36)$$

onde, se $\mu = 0$, temos o MRDADC (32), e se $\mu = 1$, o MRDT. Chamamos este modelo de reação-difusão-taxia devido à presença do termo $-\chi_K \nabla \cdot (K^\mu \nabla L)$ no lado direito da primeira equação em (36) e do termo $-\chi_L \nabla \cdot (L^\mu \nabla K)$ no lado direito da segunda equação em (36). Equações similares à esta, com o termo de taxia em apenas uma das equações, aparece em modelos de quimiotaxia na área de Biomatemática, quando células se movem na direção do gradiente de um dado nutriente [38, 44, 72, 50, 27]. Para fazer a conexão com a literatura econômica, vamos chamar o MRDT de Modelo de Solow Espacial Generalizado (MSEG).

Exemplo do MSEG em uma dimensão espacial - Em uma dimensão espacial, o modelo acima pode ser reescrito como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial K}{\partial t} = h + d_K \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \chi_K \frac{\partial}{\partial x} \left(K^\mu \frac{\partial L}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial L}{\partial t} = g + d_L \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \chi_L \frac{\partial}{\partial x} \left(L^\mu \frac{\partial K}{\partial x} \right) \text{ para } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, l) \\ K(t, x) = K_0(x), L(t, x) = L_0(x), \text{ para } (t, x) \in \{0\} \times [0, l] \\ \frac{\partial K}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \text{ para } (t, x) \in (0, \infty) \times \{0, l\} \end{array} \right. \quad (37)$$

Com o intuito de ilustrar o fato de que o MRDADC ($\mu = 0$) pode gerar densidades negativas, apresentamos na Figura 2 uma simulação numérica da evolução de densidades iniciais gaussianas geradas por (37), tanto para o capital quanto para a mão-de-obra, considerando $d_K = d_L = 1$, $\chi_K = 0$ e $\chi_L = 0.5$ (ou seja, há movimento de taxia apenas para a mão-de-obra). Os demais parâmetros, condições iniciais e o método numérico utilizado são os mesmos considerados na Seção 4.4.4. De fato, todas as simulações numéricas apresentadas neste trabalho utilizam o método explícito apresentado no **Apêndice A**, ou uma adaptação do mesmo. Validação dos resultados foram feitos usando o comando **pdepe** do MATLAB e comparação qualitativa com resultados da literatura. Note que inicialmente há uma grande densidade de capital concentrado à direita do domínio, região onde a densidade de trabalhadores é nula. Nesta situação, o termo $-\chi_L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial K}{\partial x} \right)$ na equação para a evolução da mão-de-obra gera uma taxa de variação positiva na região onde a densidade de capital é côncava ($K_{xx} < 0$), e uma taxa de variação negativa em sua vizinhança, onde a densidade de capital é convexa ($K_{xx} > 0$). Como nesta vizinhança a densidade de trabalhadores é zero, ela acaba se tornando negativa.

Na Figura 3 podemos ver a evolução das mesmas condições iniciais geradas pelo MSEG ($\mu = 1$), considerando todos os outros parâmetros constantes. Neste caso, o termo

de taxa corrigido $-\chi_L \frac{\partial}{\partial x} \left(L \frac{\partial K}{\partial x} \right)$ não permite que a taxa de variação da mão-de-obra na região com maior densidade de capital se torne positiva (pois nesta região $L = 0$), não gerando, portanto, densidades negativas de trabalhadores. Primeiro é necessário que a mão-de-obra chegue na região em questão, através de um movimento difusivo, para que daí sim os trabalhadores possam se mover na direção do gradiente da densidade de capital. Este modelo será estudado em maior detalhe na Seção 6.3. Nosso objetivo agora será mostrar que, dadas condições iniciais não-negativas, as soluções de (36) também serão não-negativas para todo $\mathbf{x} \in \Omega$ e $t > 0$.

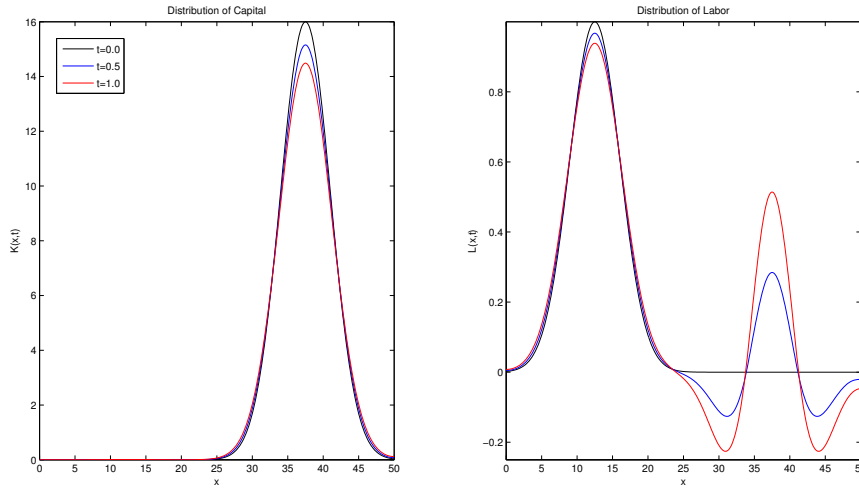


Figura 2: Densidades Negativas para o MRDADC apresentado em (32).

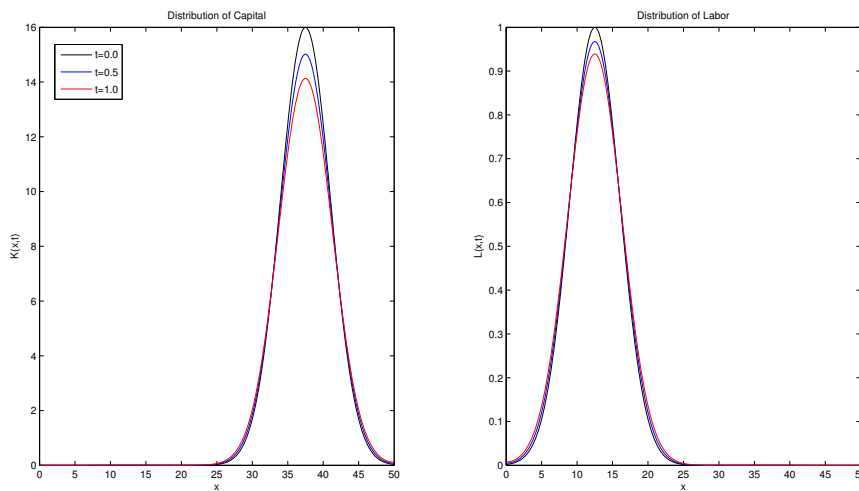


Figura 3: Soluções Não-Negativas do MSEG apresentado em (36).

Proposição 1 - Considere as condições iniciais não-negativas $K_0(\mathbf{x}) \geq 0$ e $L_0(\mathbf{x}) \geq 0$. Se $K(t, \mathbf{x})$ e $L(t, \mathbf{x})$ são \mathcal{C}^1 em relação à t e \mathcal{C}^2 em relação à \mathbf{x} , então as soluções do Modelo de Solow Espacial Generalizado (MSEG) são sempre não-negativas.

$$(MSEG) \begin{cases} \frac{\partial K}{\partial t} = h + d_K \Delta K - \chi_K \nabla \cdot (K \nabla L) \\ \frac{\partial L}{\partial t} = g + d_L \nabla \Delta L - \chi_L \nabla \cdot (L \nabla K), \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \Omega \\ K = K_0(\mathbf{x}), L = L_0(\mathbf{x}), \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in \{0\} \times \Omega \\ \frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = 0, \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \partial\Omega \end{cases}$$

Prova³: Primeiramente observe que a equação para a evolução do capital pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} &= h + d_K \Delta K - \chi_K \nabla \cdot (K \nabla L) \\ &= h + d_K \Delta K - \chi_K K \Delta L - \chi_K \nabla K \cdot \nabla L. \end{aligned}$$

Como K é contínua em relação ao tempo, e $K_0(\mathbf{x})$ é função não-negativa, deve existir um primeiro ponto $\mathbf{x}_0 \in \Omega + \partial\Omega$ onde $K = 0$ (para algum t_0), antes que este se torne negativo. Se isto ocorre em Ω , deve haver um mínimo local em \mathbf{x}_0 , e portanto:

$$K = 0, \nabla K = \mathbf{0} \text{ e } \Delta K > 0 \text{ em } (t_0, \mathbf{x}_0).$$

Substituindo estes resultados na equação anterior, e considerando que $h = 0$ quando $K = 0$, obtemos que:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \chi_K \Delta K \geq 0 \text{ em } (t_0, \mathbf{x}_0), \text{ pois } \chi_K \geq 0,$$

e assim K não pode se tornar negativo neste ponto, e desta forma não pode se tornar negativo em Ω . Se K assumisse valor negativo na fronteira $\partial\Omega$, K também deveria assumir valor negativo em algum ponto interior do domínio, pois K é contínua em relação à \mathbf{x} , mas isto não pode ocorrer pelo argumento anterior. De forma similar mostramos que $L(t, \mathbf{x})$ também não pode assumir valores negativos ■

³Esta prova é uma adaptação da demonstração encontrada em Edelstein [26].

3.6 Modelo de Isard-Liossatos Modificado

As considerações acima nos levaram a estender esta modificação para o Modelo de Isard-Liossatos, o qual, em sua forma vetorial, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 \text{(MILM)} \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & \frac{\partial K}{\partial t} = h(K, L, \mathbf{x}) - \nabla \cdot \mathbf{u} \\
 & \frac{\partial L}{\partial t} = g(K, L, \mathbf{x}) - \nabla \cdot \mathbf{v} \\
 & l \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\xi \nabla K + \tau K^\mu \nabla L - \nu \mathbf{u} \\
 & \hat{l} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\hat{\tau} \nabla L + \hat{\xi} L^\mu \nabla K - \hat{\nu} \mathbf{v}, \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \Omega \\
 & K(0, \mathbf{x}) = K_0(\mathbf{x}), L(0, \mathbf{x}) = L_0(\mathbf{x}) \\
 & \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega \\
 & \frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = 0 \\
 & \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \partial\Omega
 \end{aligned} \right. \quad (38)
 \end{aligned}$$

Observe que se fizermos $\mu = 0$, recuperamos o Modelo de Isard-Liossatos dado pelas equações em (20), e que, se fizermos $\mu = 1$, temos o Modelo de Isard-Liossatos Modificado (MILM).

Já em forma matricial, temos, equivalentemente:

$$\text{(MIL-mat)} \quad \left\{ \begin{aligned}
 & \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + \mathbf{D} \mathbf{w} + \mathbf{F} \left(\mathbf{w}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} \right), \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \Omega \\
 & \mathbf{w} = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}), \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in \{0\} \times \Omega \\
 & \mathbf{B}_F \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{C}_F \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + \mathbf{D}_F \mathbf{w} = \mathbf{0}, \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \partial\Omega
 \end{aligned} \right. \quad (39)$$

onde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{l} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{\tau} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{\tau} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{\nu} \end{pmatrix}, \quad (41)$$

$$\mathbf{F} \left(\mathbf{w}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} \right) = \begin{pmatrix} h(K, L) \\ h(L) \\ \tau K^\mu \frac{\partial L}{\partial x} \\ \tau K^\mu \frac{\partial L}{\partial y} \\ \hat{\xi} L^\mu \frac{\partial K}{\partial x} \\ \hat{\xi} L^\mu \frac{\partial K}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_0(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} K_0(\mathbf{x}) \\ L_0(\mathbf{x}) \\ u_0^x(\mathbf{x}) \\ u_0^y(\mathbf{x}) \\ v_0^x(\mathbf{x}) \\ v_0^y(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (42)$$

$$\mathbf{B}_F = \begin{pmatrix} n^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n^x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_F = \begin{pmatrix} n^y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n^y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

e:

$$\mathbf{D}_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Daqui para a frente, ao longo de todo este trabalho, iremos considerar apenas o Modelo de Isard-Liossatos Modificado e seus casos particulares.

4 Modelo de Solow Espacial Generalizado

Neste capítulo iremos analisar o Modelo de Solow Espacial Generalizado:

$$(\text{MSEG}) \quad \begin{cases} \frac{\partial K}{\partial t} = h + d_K \Delta K - \chi_K \nabla \cdot (K^\mu \nabla L) \\ \frac{\partial L}{\partial t} = g + d_L \Delta L - \chi_L \nabla \cdot (L^\mu \nabla K), \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \Omega \\ K = K_0(\mathbf{x}), L = L_0(\mathbf{x}), \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in \{0\} \times \Omega \\ \frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (45)$$

Novamente, consideramos $\mu \in \{0, 1\}$: se $\mu = 0$ temos o MRDADC, consequência do MIL e se $\mu = 1$ temos então o MSEG, consequência do MILM.

No caso em que não há taxia para o capital, i.e., quando $\chi_K = 0$ e $\chi_L \neq 0$, Senba e Suzuki [59] demonstraram, no capítulo 7 de seu livro, a existência local (no tempo) de soluções clássicas para o problema (45). Em [51], [52] e [32], a existência global de soluções foi estabelecida para alguns casos particulares. A existência de soluções para o modelo completo não foi abordada neste trabalho, porém, no caso em que $\mu = 0$ (MRDADC), foi considerada em [37], e no caso reativo-difusivo ($\chi_K = \chi_L = 0$), em [60, 71].

Se as distribuições iniciais para o capital e o trabalho forem não-negativas, as soluções de (45) também o serão para todo ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ e tempo $t > 0$ (ver Proposição 1 apresentada na Seção 3.5). Neste capítulo consideraremos uma função de produção de Cobb-Douglas, o que implica que h é dada por:

$$h(K, L) = sAK^\phi L^{1-\phi} - \delta K \quad (46)$$

e que o crescimento da mão-de-obra é dado pela função logística, isto é:

$$g(L) = aL - bL^2 = aL \left(1 - \frac{b}{a}L\right). \quad (47)$$

Aqui $\phi \in [0, 1]$ é a intensidade de utilização do fator capital no processo de produção, $s \in [0, 1]$ é a taxa de poupança, $A > 0$ é um fator tecnológico, $a \geq 0$ é a taxa de crescimento da mão-de-obra, e $\frac{a}{b}$ é a mão-de-obra máxima suportada pela economia ⁴.

Se considerarmos condições iniciais espacialmente homogêneas, não haverá migração de capital e mão-de-obra na economia, e a solução de (45) será a mesma que no modelo não-espacial considerado em [48]; se, além disso, fizermos $b = 0$ na função de crescimento logístico, teremos um crescimento malthusiano, e assim recuperamos o modelo clássico de Solow-Swan [61, 65]. Por outro lado, se considerarmos um domínio ilimitado $\Omega = \mathbb{R}$ e $a = b = \chi_K = \chi_L = d_L = 0$, recuperamos o Modelo de Solow Espacial considerado por Camacho em [11]; por fim, se $\Omega = \mathbb{R}$ e se $b = \chi_K = \chi_L = 0$, então obtemos o modelo considerado por Brito em [7].

⁴Observe que estamos considerando estes parâmetros como constantes, isto é, eles são independentes do local \mathbf{x} e do tempo t .

Escrevendo (45) na forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{U}) + \mathbf{D}\Delta \mathbf{U} + \mathbf{w}(\mathbf{U}), & \text{para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \Omega \\ \mathbf{U}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), & \text{para } (t, \mathbf{x}) \in \{0\} \times \Omega \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{0}, & \text{para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (48)$$

onde:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_K & 0 \\ 0 & d_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} h(K, L) \\ g(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sAK^\phi L^{1-\phi} - \delta K \\ aL - bL^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} -\chi_K \nabla \cdot (K^\mu \nabla L) \\ -\chi_L \nabla \cdot (L^\mu \nabla K) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} K_0(\mathbf{x}) \\ L_0(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

notamos que a equação (48) possui quatro pontos de equilíbrio espacialmente homogêneos⁵: $(0, 0)^\top$, $(0, \frac{a}{b})^\top$, $(\frac{a}{b} (\frac{sA}{\delta})^{\frac{1}{1-\phi}}, 0)^\top$, e $(\frac{a}{b} (\frac{sA}{\delta})^{\frac{1}{1-\phi}}, \frac{a}{b})^\top$. No momento estaremos interessados apenas no equilíbrio de coexistência do sistema, ou seja, naquele onde nenhuma das variáveis, L ou K , seja igual a zero:

$$(K_\infty, L_\infty)^\top = \left(\frac{a}{b} \left(\frac{sA}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\phi}}, \frac{a}{b} \right)^\top.$$

4.1 Adimensionalização do Modelo

Antes de continuarmos, é conveniente adimensionalizar o modelo. Para tanto, notamos que as dimensões das variáveis e parâmetros são os seguintes:

$$\begin{aligned} [K] &= [L] = QT^{-1} \\ [x] &= C \\ [t] &= T \\ [a] &= [s] = [\delta] = T^{-1} \\ [b] &= CQ^{-1}T^{-1} \\ [d_K] &= [d_L] = C^2T^{-1} \\ [\chi_K] &= [\chi_L] = Q^{-1}C^3T^{-1} \\ [A] &= [\phi] = 1 \end{aligned}$$

onde Q , C e T denotam, respectivamente, as seguintes dimensões fundamentais: quantidade física, comprimento e tempo. Assim, definindo as variáveis adimensionais:

$$K^* = \frac{K}{K_\infty}, \quad L^* = \frac{L}{L_\infty}$$

$$t^* = \gamma t, \quad x^* = \sqrt{\frac{\gamma}{d_K}} x$$

⁵Estes pontos são dados pelas condições $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \equiv \Delta \mathbf{U} \equiv \nabla K \equiv \nabla L \equiv \mathbf{0}$, ou seja, são soluções de $\mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$.

e desconsiderando os asteriscos daqui para frente, obtemos o modelo (48) em forma adimensionalizada:

$$\text{(MSEG-ad)} \quad \begin{cases} \frac{\partial K}{\partial t} = \beta h + \Delta K - \tilde{\chi} \nabla \cdot (K^\mu \nabla L) \\ \frac{\partial L}{\partial t} = \alpha g + d \Delta L - \chi \nabla \cdot (L^\mu \nabla K), \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \Omega \\ K = K_0(\mathbf{x}), L = L_0(\mathbf{x}), \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in \{0\} \times \Omega \\ \frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \partial \Omega \end{cases} \quad (49)$$

onde:

$$\alpha = \frac{a}{\gamma}, \quad \beta = \frac{\delta}{\gamma}, \quad d = \frac{d_L}{d_K}, \quad \chi = \frac{a \chi_L}{b d_K} \left(\frac{sA}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\phi}} \quad \text{e} \quad \tilde{\chi} = \frac{a \chi_K}{b d_K}. \quad (50)$$

são parâmetros adimensionais e:

$$\begin{aligned} h(K, L) &= K^\phi L^{1-\phi} - K \\ g(L) &= L(1 - L). \end{aligned}$$

Além disto, note que temos certa liberdade na escolha da escala γ , pois ela deve ter dimensão T^{-1} . Portanto, a princípio podemos escolher como γ : a taxa de crescimento da mão-de-obra a , a taxa de depreciação do capital δ ou a taxa de poupança s .

Na forma matricial, o modelo adimensional pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{U}) + \mathbf{D} \Delta \mathbf{U} + \mathbf{w}(\mathbf{U}), \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \Omega \\ \mathbf{U}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in \{0\} \times \Omega \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{0}, \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \partial \Omega \end{cases} \quad (51)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \beta h(K, L) \\ \alpha g(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta(K^\phi L^{1-\phi} - K) \\ \alpha L(1 - L) \end{pmatrix} \\ \mathbf{w}(\mathbf{U}) &= \begin{pmatrix} -\tilde{\chi} \nabla \cdot (K^\mu \nabla L) \\ -\chi \nabla \cdot (L^\mu \nabla K) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} K_0(\mathbf{x}) \\ L_0(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observe que o equilíbrio espacialmente homogêneo de coexistência do modelo adimensionalizado está normalizado, ou seja:

$$\mathbf{U}_\infty = (K_\infty, L_\infty)^\top = (1, 1)^\top = \mathbf{1}. \quad (52)$$

4.2 Estabilidade Linear

Seguindo [72], vamos fazer a análise de estabilidade linear da equação (51). Para tanto, iremos linearizar o sistema em torno do ponto de equilíbrio de coexistência (52). Definindo a perturbação espacialmente não-homogênea de pequena amplitude:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} - \mathbf{U}_\infty = (u^K, u^L)^\top$$

temos que a EDP em (48) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{U}_\infty + \mathbf{u}) + \mathbf{D}\Delta \mathbf{u} + \mathbf{w}(\mathbf{u})$$

onde:

$$\mathbf{w}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\tilde{\chi}\nabla \cdot (1 + u^K)^\mu \nabla u^L \\ -\chi\nabla \cdot (1 + u^L)^\mu \nabla u^K \end{pmatrix}.$$

Expandindo $\mathbf{f}(\mathbf{U}_\infty + \mathbf{u})$ pelo Teorema de Taylor, e retendo apenas os termos de primeira ordem, obtemos a versão linearizada de (51):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{D}_\chi \Delta \mathbf{u} \quad (53)$$

onde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_K h & \partial_L h \\ \partial_K g & \partial_L g \end{pmatrix} \Big|_{\mathbf{U}_\infty} = \mathbf{J}_f(\mathbf{U}_\infty)$$

é a matriz Jacobiana de \mathbf{f} aplicada no ponto estacionário \mathbf{U}_∞ , e:

$$\mathbf{D}_\chi = \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{\chi} \\ -\chi & d \end{pmatrix}.$$

Aplicando a transformada de Fourier espacial na equação (53), obtemos o seguinte sistema de primeira ordem dependente do tempo:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = (\mathbf{A} + \|\mathbf{k}\|^2 \mathbf{D}_\chi) \tilde{\mathbf{u}} \quad (54)$$

onde $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$ é a transformada de Fourier de $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e \mathbf{k} é o número de onda. Desta forma, a perturbação:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} \quad (55)$$

é representada como a soma de ondas harmônicas espaciais $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$, onde:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = e^{(\mathbf{A} + \|\mathbf{k}\|^2 \mathbf{D}_\chi)t} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, 0)$$

as quais podem ser obtidas para cada número de onda \mathbf{k} usando os autovalores σ da matriz $\mathbf{A} + \|\mathbf{k}\|^2 \mathbf{D}_\chi$. Assim, procurando soluções de (54) na forma exponencial $e^{\sigma t} \mathbf{v}$, obtemos que:

$$\mathbf{M}\mathbf{v} = (\sigma \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{D}_\chi q) = \mathbf{0} \quad (56)$$

ou, de forma equivalente:

$$\begin{pmatrix} (\sigma - a_{11} + q) & -(a_{12} + \tilde{\chi}q) \\ -(a_{21} + \chi q) & (\sigma - a_{22} + dq) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (57)$$

onde q é a norma do número de onda, \mathbf{k} , ao quadrado: $q = \|\mathbf{k}\|_2^2 > 0$ e $\sigma(q)$ é a taxa de crescimento do modo cujo número de onda é \mathbf{k} . Este sistema (57) admite soluções não-triviais se e somente se a matriz \mathbf{M} é singular, ou seja, se:

$$P(\sigma) = \det \mathbf{M} = (\sigma - a_{11} + q)(\sigma - a_{22} + dq) - (a_{21} + \chi q)(a_{12} + \tilde{\chi}q) = 0,$$

o que pode ser escrito mais convenientemente como:

$$P(\sigma) = \sigma^2 + z(q)\sigma + w(q) = 0 \quad (58a)$$

$$z(q) = (1 + d)q - \text{tr } \mathbf{A} \quad (58b)$$

$$w(q) = (d - \tilde{\chi}\chi)q^2 - (a_{11}d + a_{22} + a_{21}\tilde{\chi} + a_{12}\chi)q + \det \mathbf{A} \quad (58c)$$

Definição: O ponto de equilíbrio \mathbf{U}_∞ é dito linearmente estável se e somente se $\text{Re}\{\sigma\} < 0$, isto é, quando os modos vão para zero ao $t \rightarrow \infty$.

Proposição 2 - Condições para Estabilidade Linear

i. Se $d = 0$ e $\chi = \tilde{\chi} = 0$, então \mathbf{U}_∞ é linearmente estável se e somente se:

$$\text{tr } \mathbf{A} - q < 0 \text{ e } \det \mathbf{A} - a_{22}q > 0.$$

ii. Se $d \neq 0$ e $\chi = \tilde{\chi} = 0$, então \mathbf{U}_∞ é linearmente estável se e somente se:

$$(1 + d)q - \text{tr } \mathbf{A} > 0 \text{ e } dq^2 - (a_{11}d + a_{22})q + \det \mathbf{A} > 0.$$

iii. Se $d \neq 0$ e $\chi, \tilde{\chi} \neq 0$, então \mathbf{U}_∞ é linearmente estável se e somente se:

$$(1 + d)q - \text{tr } \mathbf{A} > 0 \text{ e } (d - \chi\tilde{\chi})q^2 - (a_{11}d + a_{22} + a_{21}\tilde{\chi} + a_{12}\chi)q + \det \mathbf{A} > 0.$$

Prova: Vamos mostrar o caso (iii), pois (i) e (ii) seguem de (iii) se fizermos: (i) os coeficientes de taxa e difusão iguais a zero; e (ii) apenas os coeficientes de taxa iguais a zero. De (58a) temos que:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left(-z + \sqrt{z^2 - 4w} \right) \text{ e } \sigma_2 = \frac{1}{2} \left(-z - \sqrt{z^2 - 4w} \right).$$

Agora observe que a parte real de ambas raízes σ_1 e σ_2 devem ser negativas para que \mathbf{U}_∞ seja linearmente estável, e isto é verdade se e somente se $z > 0$ e $w > 0$ ■

Então, considerando a função de produção de Cobb-Douglas e a função logística no jacobiano \mathbf{A} , obtemos que:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta(1 - \phi) & \beta(1 - \phi) \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad (59)$$

e portanto:

$$\text{tr } \mathbf{A} - q = -\alpha - \beta(1 - \phi) - q < 0$$

e

$$\det \mathbf{A} - a_{22}q = \alpha\beta(1 - \phi) + \alpha q > 0,$$

pois $\phi \in (0, 1)$ e $q, \alpha, \beta > 0$. Desta forma, o item (i) da Proposição 2 é sempre satisfeito. Além disto, (ii) também é sempre satisfeito, pois como $d, q \geq 0$:

$$\text{tr } \mathbf{A} < 0 \Rightarrow (1 + d)q - \text{tr } \mathbf{A} > 0 \quad (60)$$

e:

$$dq^2 - (a_{11}d + a_{22})q + \det \mathbf{A} = dq^2 + (\beta(1 - \phi)d + \alpha)q + \det \mathbf{A} > 0. \quad (61)$$

Observação - Dizemos que há instabilidade difusiva no sistema (49), segundo a definição de Turing [68], se as seguintes propriedades se verificam:

- a. o equilíbrio de coexistência espacialmente homogêneo for linearmente estável na ausência dos termos difusivos e de taxia;
- b. o equilíbrio de coexistência espacialmente homogêneo for linearmente instável quando se consideram apenas os termos reativos e difusivos em (49).

Podemos mostrar facilmente que a propriedade (a) se verifica em nosso caso, mas como as desigualdades no caso (ii) da Proposição 2 também sempre se verificam, a propriedade (b) não é válida. Assim, podemos concluir que não há instabilidade difusiva no sistema aqui considerado. Ou seja, pequenas perturbações do equilíbrio espacialmente homogêneo não podem se desenvolver em padrões espaciais, ou formarem aglomerados econômicos, na presença apenas de reação e difusão. Cabe observar que esta conclusão só é válida para os termos reativos h e g aqui considerados.

Proposição 3 - Se não há taxia para o trabalho, ou seja, se $\chi = 0$, então não pode haver formação de aglomerados econômicos.

Prova - Neste caso:

$$w(q) = dq^2 + (\beta(1 - \phi)d + \alpha)q + \det \mathbf{A}$$

é não-negativo, pois α , β , d , $\det \mathbf{A}$, $q = \|k\|_2^2 \geq 0$ e $0 \leq \phi \leq 1$ ■

Em outras palavras, a presença de taxia para o trabalho é condição necessária para a formação de aglomerados econômicos, embora não seja suficiente, como ficará claro nos resultados apresentados a seguir.

Proposição 4 - Poderá haver formação de aglomerados econômicos se a seguinte relação de dispersão for satisfeita:

$$w(q) = (d - \chi\tilde{\chi})q^2 + [\alpha + \beta(1 - \phi)(d - \chi)]q + \alpha\beta(1 - \phi) \leq 0. \quad (62)$$

Prova - Como (60) é sempre verdade, a única possibilidade do sistema apresentar instabilidade linear é se a segunda desigualdade em (iii) for violada, isto é, quando tivermos a seguinte relação de dispersão:

$$\begin{aligned} w(q) < 0 &\Leftrightarrow \\ (d - \chi\tilde{\chi})q^2 - (a_{11}d + a_{22} + a_{21}\tilde{\chi} + a_{12}\chi)q + \det \mathbf{A} &\leq 0. \end{aligned}$$

Agora basta considerar (59) que o resultado segue ■

Corolário 4 - Se $d - \chi\tilde{\chi} > 0$, poderá ocorrer a formação de aglomerados econômicos se a seguinte desigualdade for satisfeita:

$$\chi \geq \frac{\alpha}{\beta(1 - \phi)} + d + 2\sqrt{\frac{\alpha(d - \chi\tilde{\chi})}{\beta(1 - \phi)}}. \quad (63)$$

Prova - Se $d - \chi\tilde{\chi} > 0$, a parábola $w(q)$ dada por (62) possuirá mínimo global em:

$$q^* = -\frac{1}{2(d - \chi\tilde{\chi})}[\alpha + \beta(1 - \phi)(d - \chi)]$$

e então, para haver instabilidade, temos que ter $w(q^*) \leq 0$, o que implica (63) ■

4.3 Casos Especiais do MSEG em uma Dimensão Espacial

Nesta seção consideraremos casos especiais do Modelo de Solow Espacial Generalizado em uma dimensão espacial:

$$\begin{cases} \frac{\partial K}{\partial t} = \beta h + \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \tilde{\chi} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial L}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial L}{\partial t} = \alpha g + d \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \chi \frac{\partial}{\partial x} \left(L \frac{\partial K}{\partial x} \right) \text{ para } (t, x) \in (0, l) \times (0, \infty) \\ K(t, x) = K_0(x), L(t, x) = L_0(x), \text{ para } (t, x) \in [0, l] \times \{0\} \\ \frac{\partial K}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \text{ para } (t, x) \in \{0, l\} \times (0, \infty) \end{cases} \quad (64)$$

onde:

$$\alpha = \frac{a}{\gamma}, \beta = \frac{\delta}{\gamma}, d = \frac{d_L}{d_K}, \chi = \frac{a \chi_L}{b d_K} \left(\frac{sA}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\phi}}, \tilde{\chi} = \frac{a \chi_K}{b d_K}$$

e:

$$h(K, L) = K^\phi L^{1-\phi} - K \text{ e } g(L) = L(1 - L).$$

Lembramos que o parâmetro γ pode ser: a taxa de crescimento da mão-de-obra a , a taxa de depreciação do capital δ , ou a taxa de poupança da economia s .

4.3.1 Economia apenas com Mão-de-Obra

Se o capital não influencia a distribuição de mão-de-obra, temos que esta será governada pela Equação de Fisher [27, 49]:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial t} = g + \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \\ L(t, x) = L_0(x), \text{ para } (t, x) \in [0, l] \times \{0\} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \text{ para } (t, x) \in \{0, l\} \times (0, \infty) \end{cases} \quad (65)$$

onde $g(L) = L(1 - L)$ e onde consideramos $\gamma = a$ e $d = 1$. Esta equação apresenta os seguintes pontos de equilíbrio:

$$L_\infty^1 = 0 \text{ e } L_\infty^2 = 1.$$

Observe que L_∞^1 é ponto de equilíbrio instável, pois $g'(0) = 1 > 0$, e L_∞^2 é ponto de equilíbrio estável, pois $g'(1) = -1 < 0$. De fato, se considerarmos este problema em um domínio infinito (ou muito grande) esta equação apresenta soluções do tipo ondas viajantes (ver, por exemplo, Debnath [23], pag. 391). Na Figura 4 podemos ver uma solução numérica deste problema, considerando um domínio de tamanho $l = 1000$ e condição inicial gaussiana:

$$L_0(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{(x-500)^2}{2500}}.$$

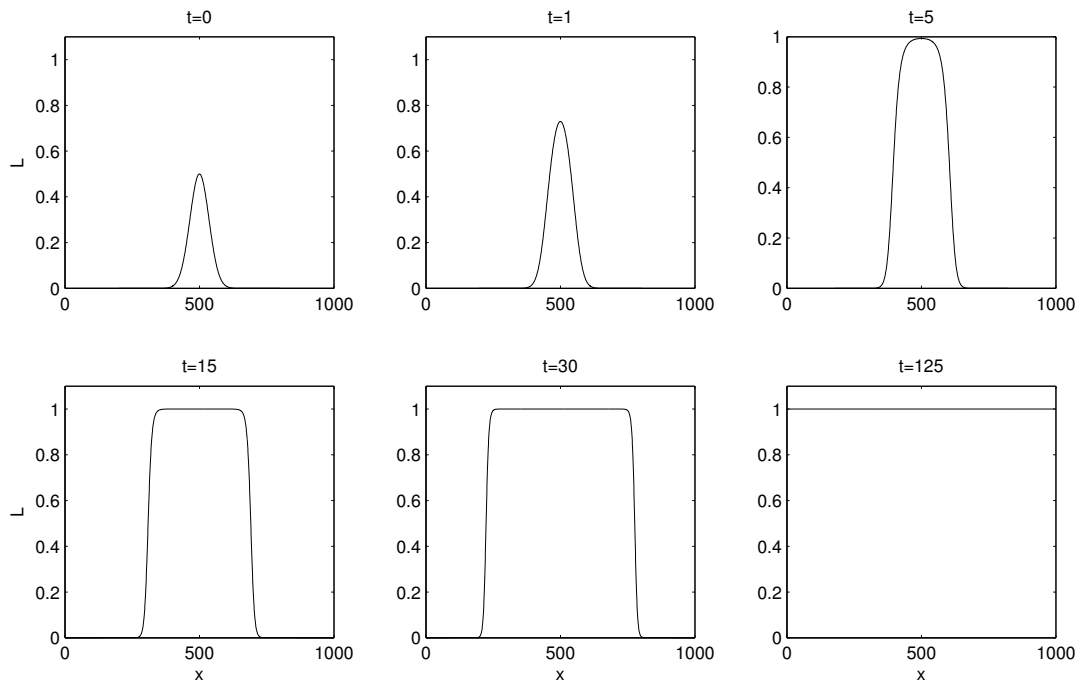


Figura 4: Evolução de uma economia apenas com mão-de-obra, dada pela equação (65).

Inicialmente a distribuição inicial cresce e se espalha até o topo atingir o equilíbrio não-trivial em $t = 5$; a partir de então a mão-de-obra se propaga como onda viajante em direção às extremidades do domínio, chegando ao estado homogêneo final em $t = 125$. Na Figura 5 apresentamos um outro gráfico mostrando esta evolução espaço-temporal até o equilíbrio homogêneo.

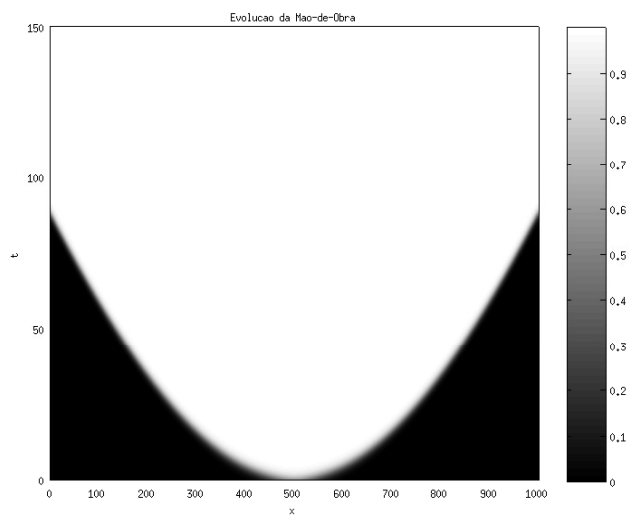


Figura 5: Evolução de uma economia apenas com mão-de-obra, dada pela equação (65).

4.3.2 Economia apenas com Capital

Se considerarmos que existe apenas capital na economia, e que sua reprodução independe do trabalho, temos que a função de produção será dada por:

$$h(K) = K^\phi - K, \quad \phi \in (0, 1)$$

e que o modelo (64) se simplificará para apenas uma equação de reação-difusão:

$$\begin{cases} \frac{\partial K}{\partial t} = h + \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \\ K(t, x) = K_0(x) \text{ para } (t, x) \in [0, l] \times \{0\} \\ \frac{\partial K}{\partial x} = 0 \text{ para } (t, x) \in \{0, l\} \times (0, \infty) \end{cases} \quad (66)$$

onde consideramos $\gamma = \delta$. Esta também é uma Equação de Fisher, mas onde a função de reação h não é continuamente diferenciável para $K \in [0, 1]$. Como a teoria da existência de ondas viajantes encontrada na literatura – por exemplo, em [3, 43] – geralmente considera $h \in \mathcal{C}^1[0, 1]$, a seguir apresentamos apenas a evidência numérica da existência destas ondas. Mas se considerarmos a função de produção proposta na **Seção 6.1**, equação (81), também podemos mostrar analiticamente sua existência. Na Figura 6 podemos ver uma solução numérica deste problema, considerando com domínio igual ao anterior, $\phi = 0.5$ e a distribuição inicial de capital gaussiana:

$$K_0(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{(x-500)^2}{2500}}.$$

Neste caso, podemos observar que o crescimento e espalhamento da distribuição inicial de capital se dá de forma bem mais rápida que no caso da mão-de-obra. Para o domínio considerado, não chegam a se desenvolver frentes de onda. Entretanto, se considerarmos um domínio maior, de tamanho $l = 10000$, e distribuição inicial:

$$K_0(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{(x-5000)^2}{2500}},$$

podemos ver o espalhamento por frentes de onda, conforme apresentado na Figura 7. Camacho e Zou [11] em seu trabalho de 2004 consideram este modelo, mas não chegam a observar este comportamento.

4.3.3 MSEG com Capital e Mão-de-Obra, mas sem Taxia

Se considerarmos que não há taxia no modelo (64), fazendo $\chi = \tilde{\chi} = 0$, obtemos o seguinte sistema de reação-difusão:

$$\begin{cases} \frac{\partial K}{\partial t} = h(K, L) + \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \\ \frac{\partial L}{\partial t} = \alpha g(L) + d \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \\ K(t, x) = K_0(x), \quad L(t, x) = L_0(x), \text{ para } (t, x) \in [0, l] \times \{0\} \\ \frac{\partial K}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \text{ para } (t, x) \in \{0, l\} \times (0, \infty) \end{cases} \quad (67)$$

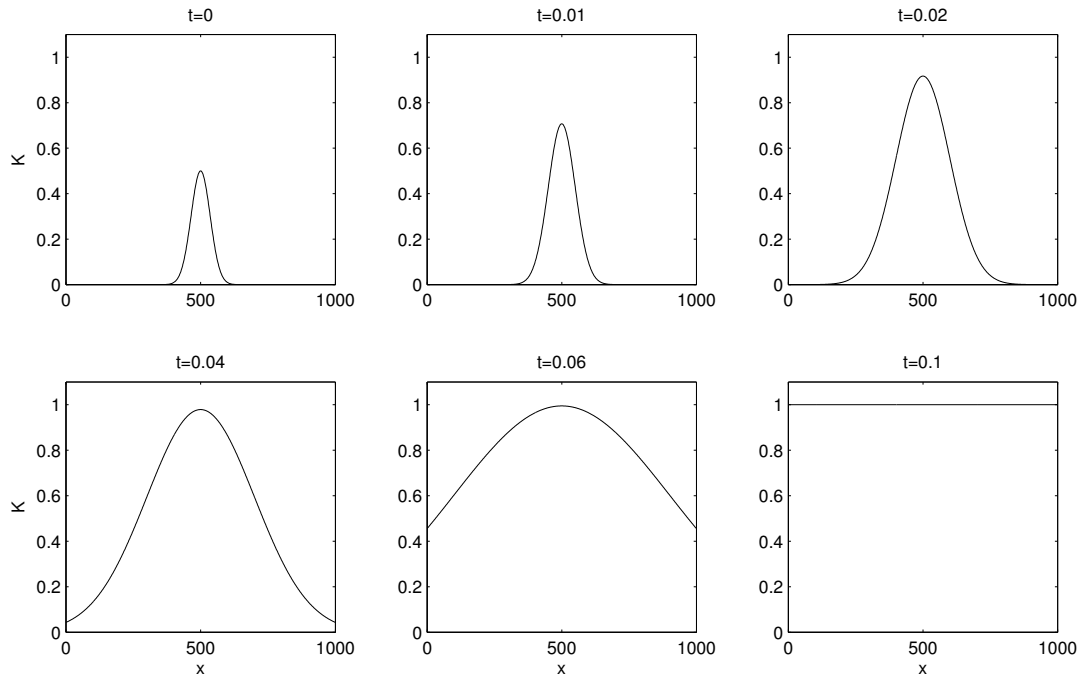


Figura 6: Evolução de uma economia apenas com capital, dada pela equação (66).

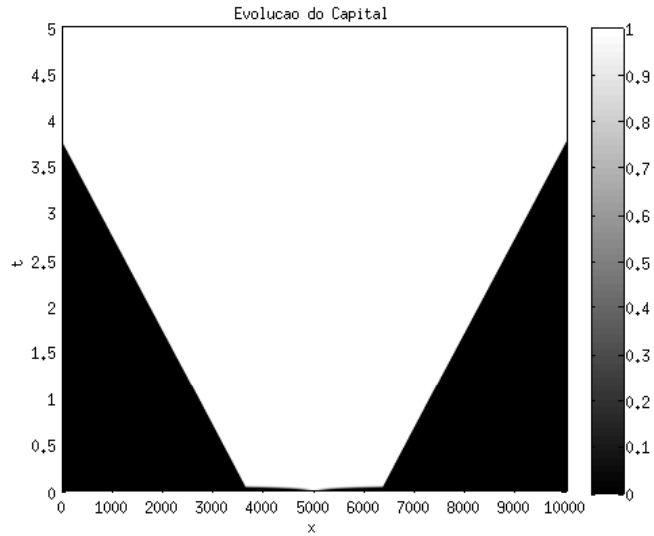


Figura 7: Evolução de uma economia apenas com capital, dada pela equação (66).

onde $\alpha = a/\delta$ (a é a taxa de crescimento orgânico da mão-de-obra, e δ a taxa de depreciação do capital) e:

$$h(K, L) = K^\phi L^{1-\phi} - K \text{ e } g(L) = L(1 - L), \phi \in [0, 1].$$

Pelo caso (ii) da Proposição 2, temos que o ponto de equilíbrio de coexistência:

$$(K_\infty, L_\infty) = (1, 1)$$

é linearmente estável para este modelo. Portanto, podemos esperar que a economia irá tender a este estado homogêneo. Na Figura 8 consideramos $l = 3000$, $\alpha = 1$, $\phi = 0.5$, que a mão-de-obra inicial está em seu estado de equilíbrio $L_\infty = 1$ e que a distribuição inicial de capital é dada por:

$$K_0(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{(x-1500)^2}{2500}}.$$

Como há mão-de-obra abundante ao longo de toda a economia, o capital cresce e se espalha até $t = 0.2$, e a partir deste momento se propaga como onda viajante rumo às extremidades do domínio, atingindo o ponto de equilíbrio homogêneo em $t = 5$.

Na Figura 9, onde consideramos ambas condições iniciais gaussianas, com maior abundância de mão-de-obra do que de capital:

$$K_0(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{(x-1500)^2}{2500}} \text{ e } L_0(x) = e^{-\frac{(x-1500)^2}{25000}},$$

podemos verificar que a partir de certo momento, $t = 0.2$, tanto o capital quanto a mão-de-obra se propagam como ondas viajantes, sendo que o capital segue atrás da mão-de-obra. De fato, podemos notar que a mão-de-obra está se propagando com velocidade ligeiramente maior do que o capital. Em $t = 3.2$ a mão-de-obra já atingiu o equilíbrio, enquanto que o capital ainda não.

Para analisar com mais detalhes uma economia onde o capital é mais abundante do que a mão-de-obra, vamos considerar o modelo (67) em sua forma dimensional:

$$\begin{cases} \frac{\partial K}{\partial t} = sAK^\phi L^{1-\phi} - \delta K + d_K \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \\ \frac{\partial L}{\partial t} = aL - bL^2 + d_L \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \\ K(t, x) = K_0(x), L(t, x) = L_0(x), \text{ para } (t, x) \in [0, l] \times \{0\} \\ \frac{\partial K}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \text{ para } (t, x) \in \{0, l\} \times (0, \infty) \end{cases} \quad (68)$$

com os parâmetros $s = 0.1$, $\delta = 0.05$, $d_K = d_L = a = b = 1$ e $l = 3000$. Desta forma, o equilíbrio de coexistência é dado por:

$$K_\infty = 4 \text{ e } L_\infty = 1.$$

Na Figura 10 consideramos que o capital começa em seu ponto de equilíbrio homogêneo $K_\infty = 4$ e que a mão-de-obra está concentrada no centro do domínio:

$$L_0(x) = e^{-\frac{(x-1500)^2}{2500}}.$$

Nesta figura podemos observar que, nas regiões onde não há mão-de-obra presente, o capital se deprecia à taxa δ , até o ponto onde só resta capital no centro do domínio, onde há mão-de-obra para reproduzi-lo ($t = 1$), pois para a reprodução do capital são necessários ambos os fatores: capital e trabalho. A partir de então, ambos capital e trabalho se propagam como ondas viajantes até chegar à uma economia homogênea. Comportamento similar podemos observar na Figura 11, mas aqui consideramos ambas condições iniciais gaussianas, com maior abundância de capital:

$$K_0(x) = e^{-\frac{(x-1500)^2}{25000}} \text{ e } L_0(x) = e^{-\frac{(x-1500)^2}{2500}}.$$

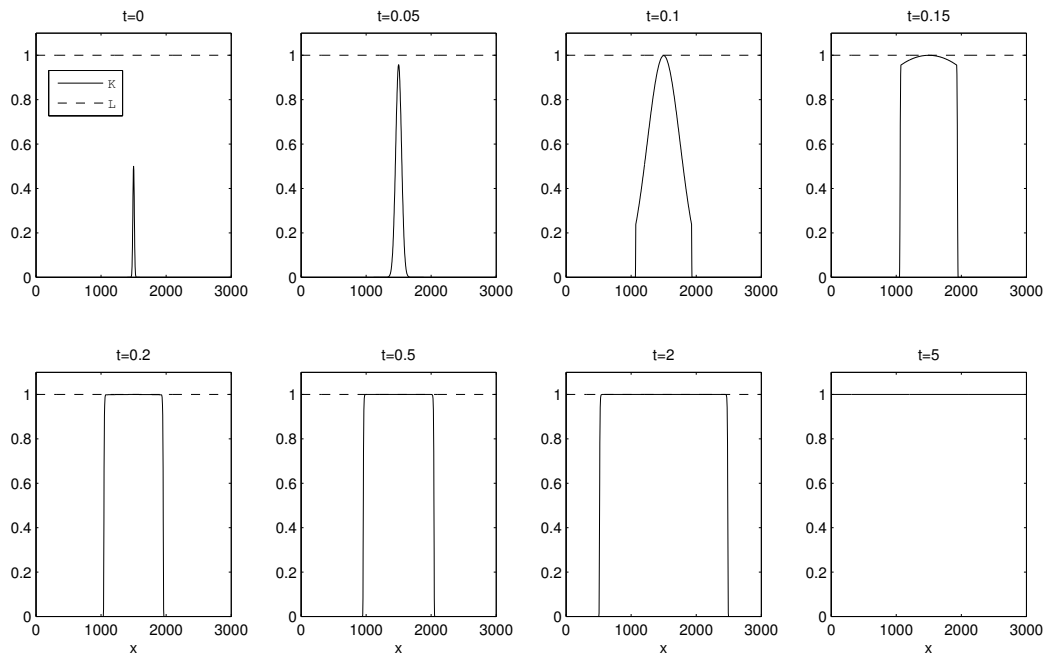


Figura 8: Evolução de uma economia com capital e trabalho, mas sem taxa (67).

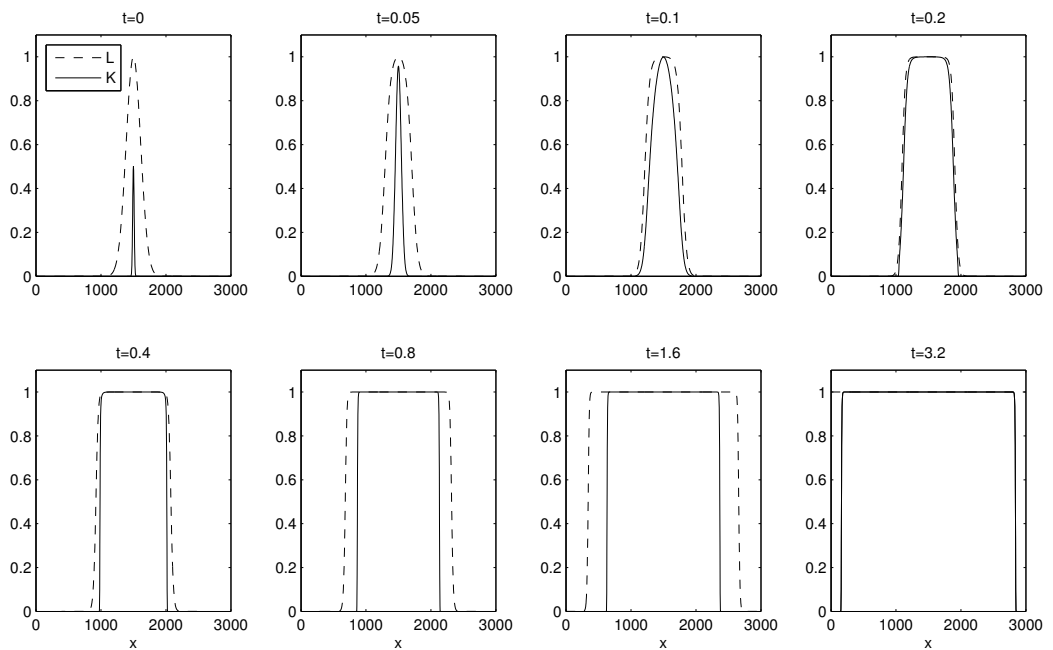


Figura 9: Evolução de uma economia com capital e trabalho, mas sem taxa (67).

Para finalizar a análise deste caso, na Figura 12 consideramos o cenário onde todo o capital está concentrado no centro da economia, e toda a mão-de-obra está concentrada

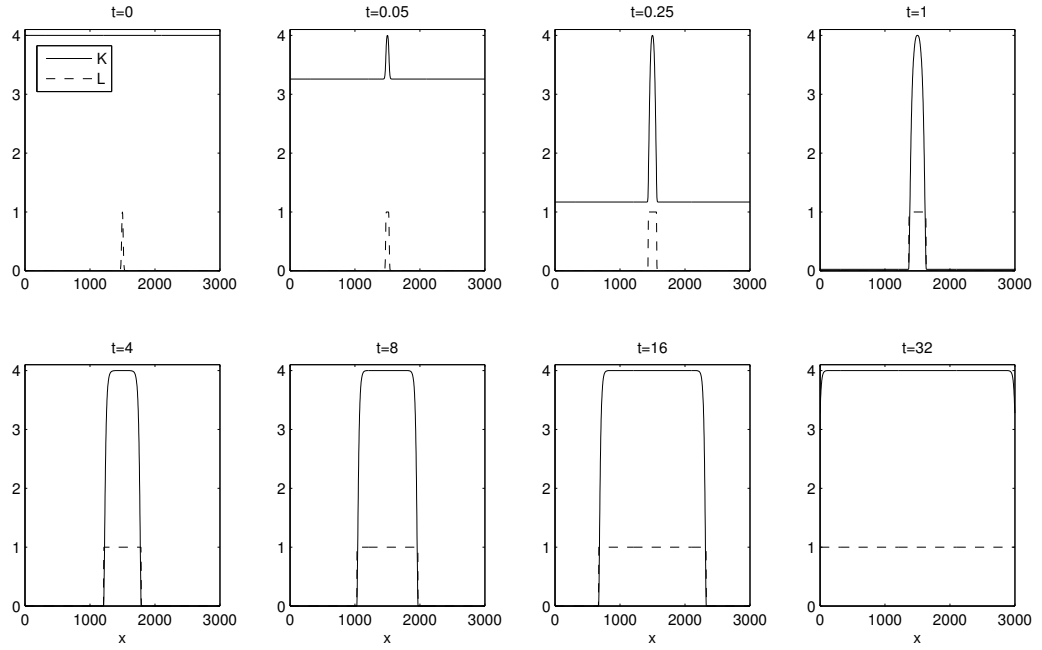


Figura 10: Evolução de uma economia com capital e trabalho, mas sem taxa (68).

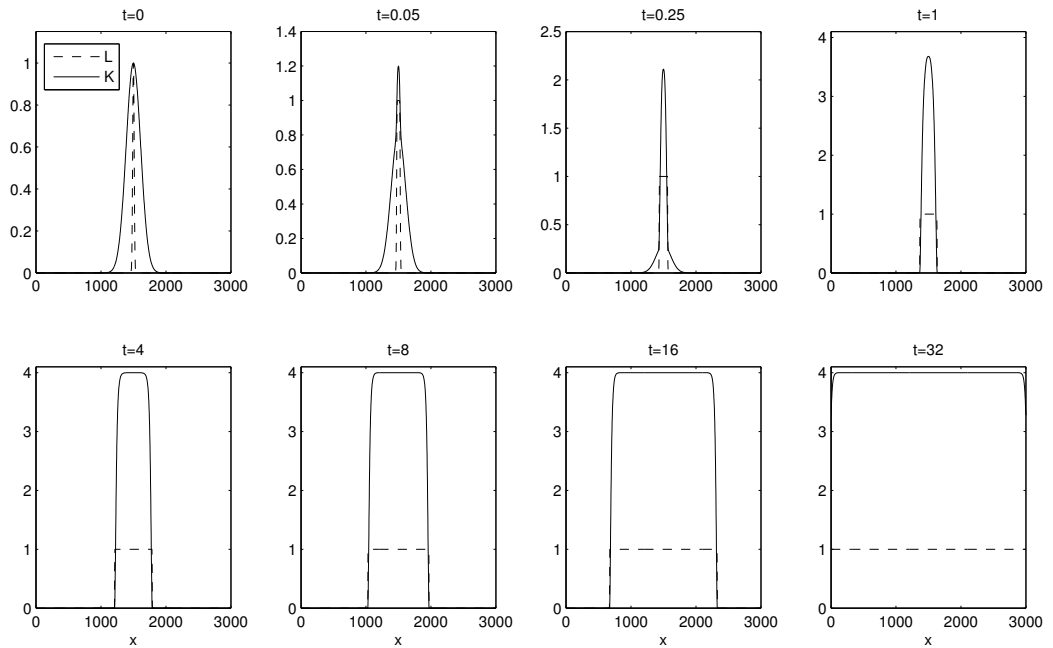


Figura 11: Evolução de uma economia com capital e trabalho, mas sem taxa (68).

no extremo esquerdo do domínio:

$$K_0(x) = e^{-\frac{(x-1500)^2}{25000}} \text{ e } L_0(x) = e^{-\frac{(x)^2}{2500}}, \quad x \in [0, 3000].$$

Neste caso, o capital presente no centro do domínio começa a se depreciar rapidamente, mas como se difunde pelo domínio, logo começa a aumentar em terreno propício à sua reprodução (onde há mão-de-obra disponível, no extremo esquerdo, em $t = 0.15$). A partir de então, $t = 1$, começa a se propagar para a direita, juntamente com a mão-de-obra.

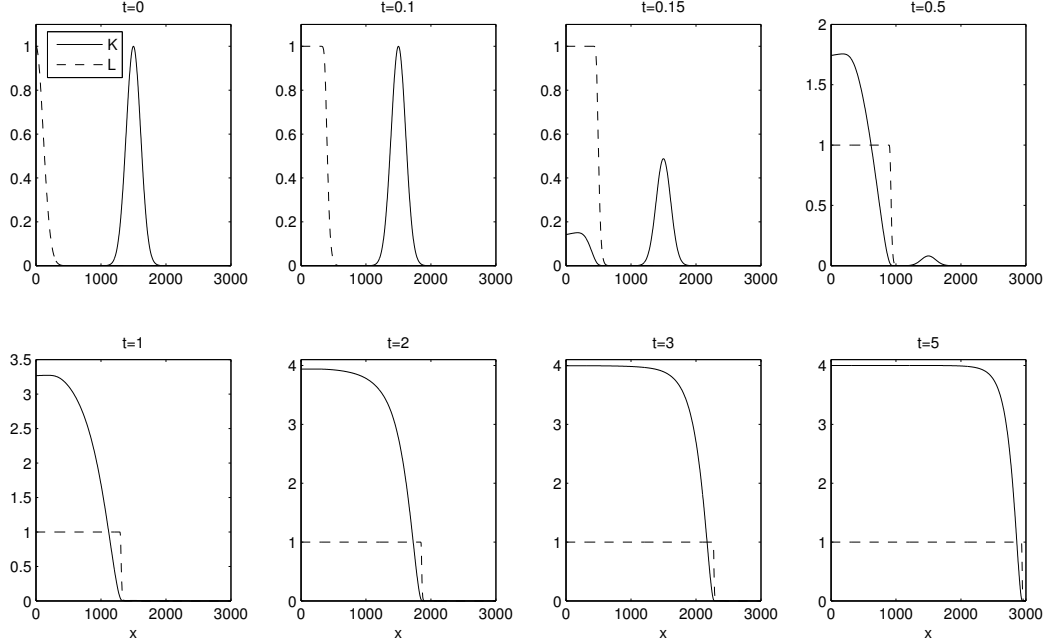


Figura 12: Evolução de uma economia com capital e trabalho, mas sem taxa (68).

4.3.4 MSEG com taxa apenas para a mão-de-obra

O caso mais simples do Modelo de Solow Espacial Generalizado que pode formar aglomerados econômicos é quando há apenas taxa para a mão-de-obra, ou seja, quando desconsideramos a taxa para o capital fazendo $\tilde{\chi} = 0$. Neste caso, a desigualdade (63) pode ser escrita como:

$$\chi \geq \frac{\alpha}{\beta(1-\phi)} + d + 2\sqrt{\frac{\alpha d}{\beta(1-\phi)}}. \quad (69)$$

Uma representação gráfica desta relação pode ser vista na Figura 13, considerando três contextos diferentes:

- no primeiro gráfico consideramos $\alpha = \beta$ e $\phi = 1/2$, e variamos o coeficiente de difusão: quanto maior a difusão, maior tem que ser o coeficiente de taxa para haver modos instáveis;
- no gráfico do meio consideramos $d = 1$ e $\phi = 1/2$, e variamos o quociente α/β : quanto maior este quociente, maior tem que ser o coeficiente de taxa para haver modos instáveis;

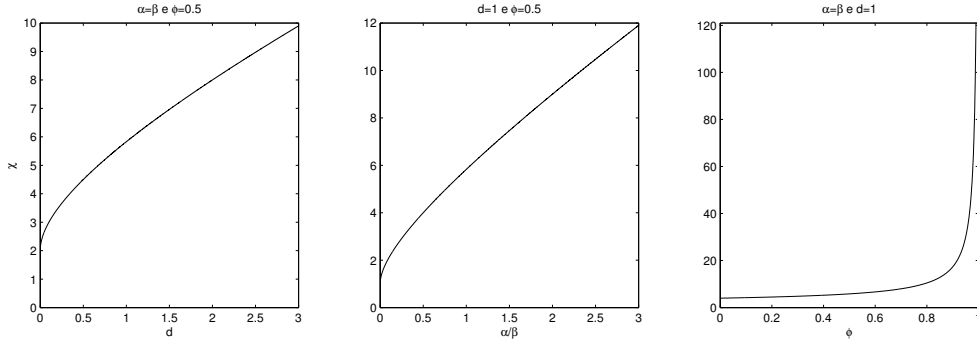


Figura 13: Relações de Dispersão para o caso $\tilde{\chi} = 0$.

- já no último gráfico, consideramos $\alpha = \beta$ e $d = 1$, e variamos a intensidade no uso do capital ϕ entre 0 e 1: entre 0 e 0.8 a curva é quase plana, crescendo rapidamente para ϕ entre 0.8 e 1. De fato, em $\phi = 1$, χ deveria ser infinito para haver instabilidade.

Em todos estes gráficos, a região abaixo da curva representa o espaço de parâmetros onde há estabilidade, enquanto que a região acima dela representa os valores de parâmetros para os quais há modos instáveis. Os pontos sobre a curva (que chamamos de relação de dispersão) representam pontos de bifurcação: ao atravessá-los, o comportamento dinâmico do sistema muda.

Em termos dos parâmetros originais, a desigualdade (69) pode ser reescrita como:

$$\chi_L \geq b \left(\frac{\delta}{sA} \right)^{\frac{1}{1-\phi}} \left[\frac{d_K}{\delta(1-\phi)} + \frac{d_L}{a} + 2\sqrt{\frac{d_L d_K}{a\delta(1-\phi)}} \right] = \chi_c. \quad (70)$$

Assim, podemos observar que:

- quanto maior d_K , d_L , b e A , maior χ_c , e portanto a taxa precisa ser mais intensa para que o sistema apresente modos instáveis;
- quanto maior a e s , menor χ_c , e desta forma, uma taxa menos intensa já é capaz de criar modos instáveis;
- quanto aos parâmetros ϕ e δ , seus efeitos são mistos em χ_c .

Simulações Numéricas em uma Dimensão Espacial

Nesta seção vamos considerar o MSEG (64) em uma dimensão espacial e no domínio $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, l]$, onde $l > 0$ é o tamanho do domínio. Além disto, consideraremos o seguinte conjunto de parâmetros:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi} &= 0, \\ d &= 1, \\ \phi &= 0.5, \\ \alpha &= 1, \\ \beta &= 2.5, \\ \mu &= 1, \end{aligned} \quad (71)$$

os quais implicam, por (69), que o modelo poderá gerar aglomerados econômicos se:

$$\chi \geq \frac{9}{5} + \frac{4}{\sqrt{5}} \approx 3.59 = \chi_c.$$

Na Figura 14 mostramos a evolução espaço-temporal para condições iniciais gaussianas para o capital e para o trabalho considerando o caso em que o coeficiente de taxa do trabalho ($\chi = 3$) é menor do que o valor crítico $\chi_c = 3.59$, e em que o tamanho do domínio é $l = 100$. Neste caso, o ponto de equilíbrio espacialmente homogêneo $(K_\infty, L_\infty)^\top = (1, 1)^\top$ é linearmente estável, e portanto as condições iniciais convergem para este ponto através da propagação de frentes de onda. Já na Figura 15 consideramos $\chi = 5 > \chi_c$, e todos os outros parâmetros iguais. Aqui, as condições iniciais convergem para um novo estado estacionário não-homogêneo, confirmando os resultados da análise de estabilidade linear. Além disto, podemos observar a formação de aglomerados de capital e trabalho nas mesmas localidades.

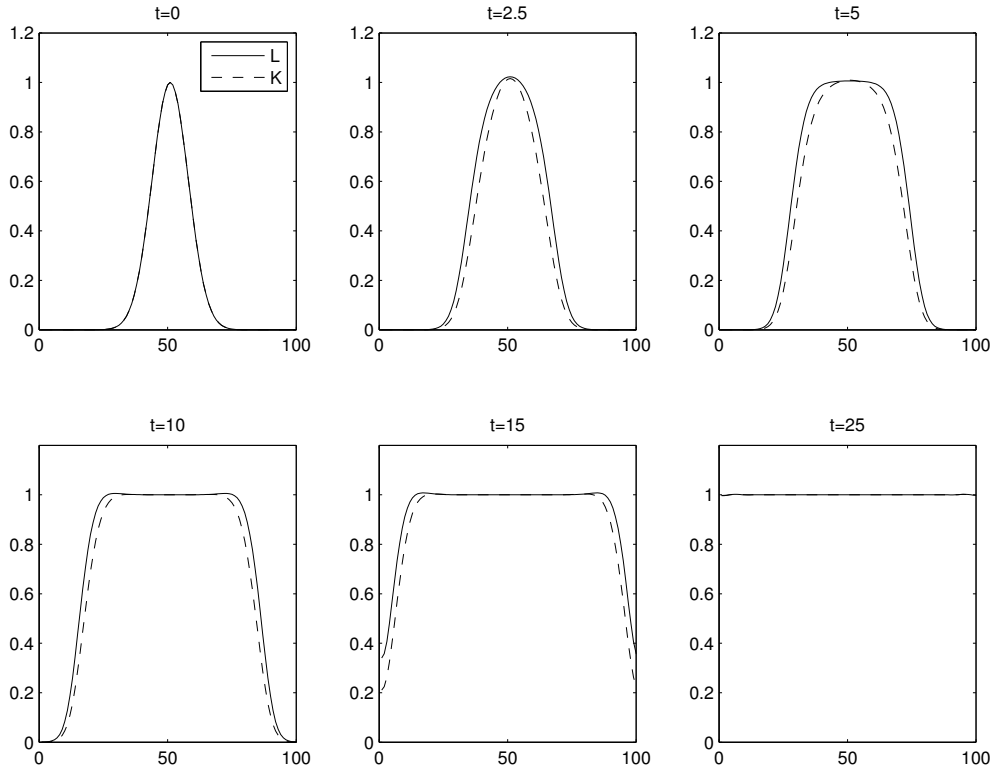


Figura 14: Estado estacionário homogêneo ($\chi = 3 < \chi_c$).

Observação - Ao considerarmos o modelo linearizado (53) em $\Omega = [0, l]$ sujeito à condições de contorno de Neumann homogêneas, obtemos que os seus autovalores – valores de k que geram soluções não-triviais – são números de onda discretos dados por:

$$k = \frac{n\pi}{l} \Rightarrow q = k^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (72)$$

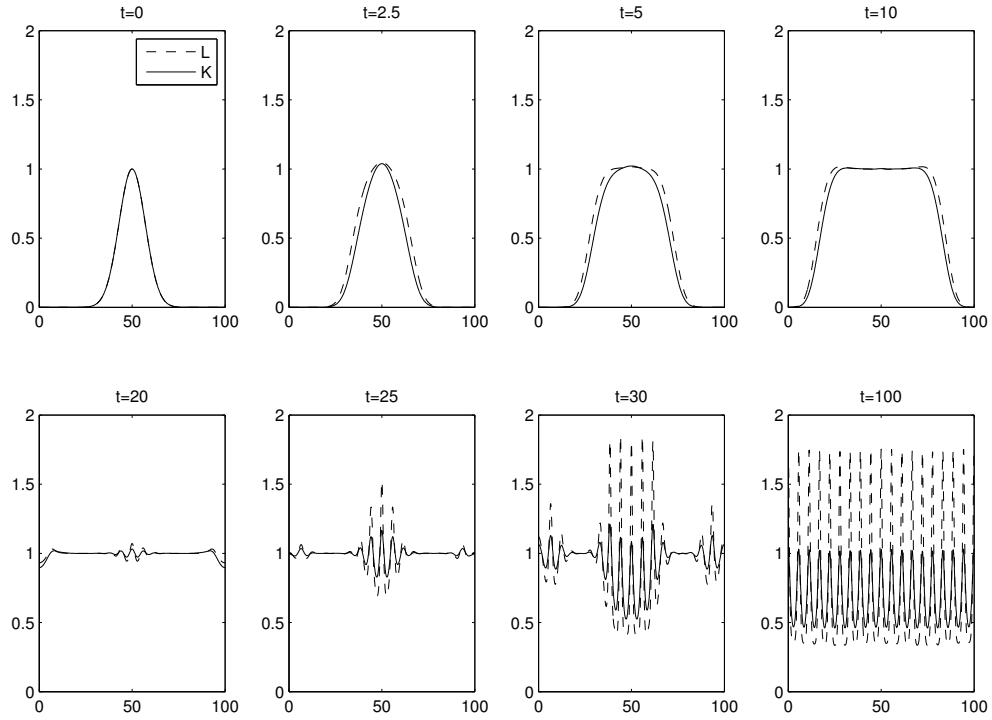


Figura 15: Estado estacionário não-homogêneo ($\chi = 5 > \chi_c$).

e portanto, a perturbação (55) pode ser representada como a série de Fourier em cossenos:

$$\mathbf{u}(t, x) = \sum \begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix} e^{\sigma(k^2)t} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \text{ for } x \in [0, l] \text{ and } t \in [0, t_0], \quad (73)$$

onde $\sigma(k^2)$ são as raízes positivas de (58a), e as constantes C_n e D_n são determinadas usando as condições iniciais. Como não há taxa para o capital, a parábola da relação de dispersão (62) pode ser escrita como:

$$w(q) = dq^2 + [\alpha + \beta(1 - \phi)(d - \chi)]q + \alpha\beta(1 - \phi) \leq 0.$$

Como $d > 0$, esta relação de dispersão implica em dois casos, que estão representados na Figura 16:

- i. Se a parábola $w(q)$ possui raízes complexas, $w(q)$ é sempre positivo, e portanto o ponto de equilíbrio espacialmente homogêneo será estável (isto ocorre quando $\chi < \chi_c$);
- ii. Se a parábola $w(q)$ possui duas raízes reais positivas, então haverá um intervalo de q em que $w(q)$ é negativa. Neste caso, os modos correspondentes aos números de onda relativos a estes valores de q serão instáveis, e uma perturbação do equilíbrio homogêneo poderá convergir para um novo equilíbrio não-homogêneo (isto ocorre quando $\chi > \chi_c$). Em outras palavras, neste caso os modos $k^2 = q \in (q_1, q_2) \Leftrightarrow k \in (k_1, k_2) = (\sqrt{q_1}, \sqrt{q_2})$ serão instáveis. Observe que, para haver modos instáveis, (72) implica que o tamanho do domínio, l , deve ser grande o suficiente para garantir a existência de números naturais n

tal que $n \in [n_1, n_2]$, onde⁶:

$$n_1 = \left\lceil \frac{k_1 l}{\pi} \right\rceil \text{ e } n_2 = \left\lfloor \frac{k_2 l}{\pi} \right\rfloor.$$

Desta forma, segue de (74) que a evolução da perturbação não-homogênea do equilíbrio pode ser aproximada por:

$$\mathbf{U}(t, x) \approx \mathbf{U}_\infty + \sum_{n=n_1}^{n_2} \begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix} e^{\sigma(k^2)t} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \text{ for } x \in [0, l] \text{ and } t \in [0, t_0] \quad (74)$$

desde que consideremos tempos pequenos a partir do início da perturbação.

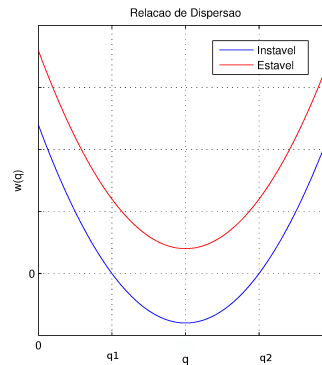


Figura 16: Relações de Dispersão para o caso $\tilde{\chi} = 0$.

Comportamento espaço-temporal como função da taxa na mão-de-obra

Considerando os parâmetros desta seção, na Figura 17 apresentamos a dependência do intervalo de modos instáveis como função do coeficiente de taxa para o trabalho χ . Como podemos ver, para χ maiores do que $\chi_c = 3.59$, o intervalo de modos instáveis aumenta com χ . Na mesma figura também apresentamos o intervalo de modos discretos (para $l = 12$), assim como o número de modos discretos instáveis, como função de χ . A seguir iremos mostrar que este modelo é capaz de gerar uma variedade bastante rica de comportamentos dinâmicos para a economia.

Na Figura 18 apresentamos a evolução de uma perturbação aleatória do equilíbrio homogêneo da mão-de-obra para vários valores representativos de χ , quando $l = 12$ (a evolução da distribuição de capital correspondente é qualitativamente similar). Nesta e nas próximas figuras o branco significa uma maior densidade, e o preto uma menor densidade. Como podemos observar, dependendo do valor de χ podemos ter a convergência da distribuição de mão-de-obra para um estado homogêneo ($\chi = 3$), para um estado não-homogêneo ($\chi = 5, 7$), um comportamento cíclico e periódico ($\chi = 10$) e um comportamento cíclico, mas aperiódico ($\chi = 17.5$). Via de regra, quanto maior χ , maior o número de modos instáveis, e portanto mais complexo o comportamento espaço-temporal do sistema.

⁶Aqui $\lfloor x \rfloor$ é o maior número inteiro não maior do que x e $\lceil x \rceil$ é o menor número inteiro não menor do que x

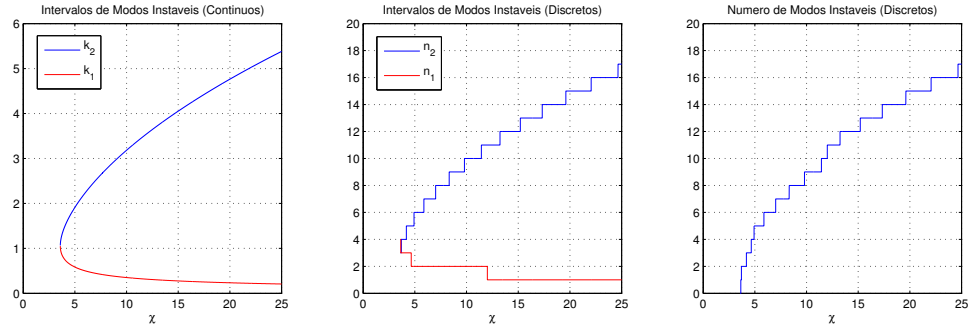


Figura 17: Intervalo de Modos Instáveis como função de χ .

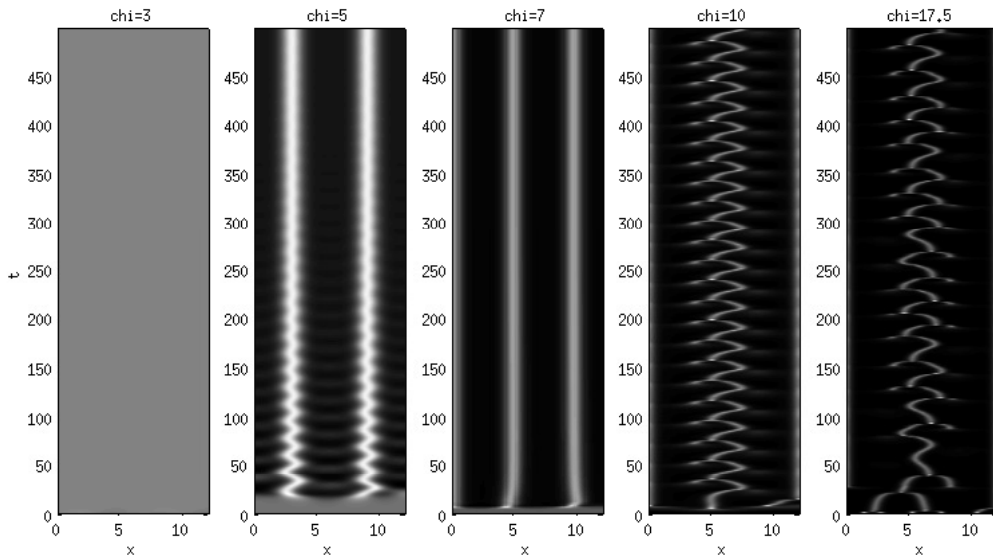


Figura 18: Comportamento Espaço-Temporal como função de χ ($l = 12$).

Comportamento espaço-temporal como função do tamanho do domínio

Na Figura 19 podemos verificar o crescimento do intervalo (e do número) de modos discretos instáveis, para $\chi = 5$ e $\chi = 10$, para domínios de tamanho crescentes (l).

Se $\chi < \chi_c$ não há muito o que esperar, pois neste caso o equilíbrio é estável, e a economia converge para um estado homogêneo independente de seu tamanho. Já para os casos em que o equilíbrio é instável, já vimos um exemplo em que a economia atinge um estado estacionário não-homogêneo, apresentando aglomerados de capital e mão-de-obra estáveis. Agora estaremos interessados em verificar o que acontece com a dinâmica espaço-temporal da economia quando o seu tamanho l aumenta. Como o número de modos instáveis aumenta com l , como verificamos na Figura 19, é de se esperar que a evolução do sistema também apresente mudanças quando l aumenta.

Na Figura 20 apresentamos a evolução de uma perturbação aleatória do equilíbrio homogêneo da mão-de-obra para vários valores representativos de l , quando $\chi = 5$. Quando $l = 1$ não há modos instáveis, e portanto a distribuição volta a convergir para o equilíbrio homogêneo. Na medida em que o tamanho da economia aumenta, o número

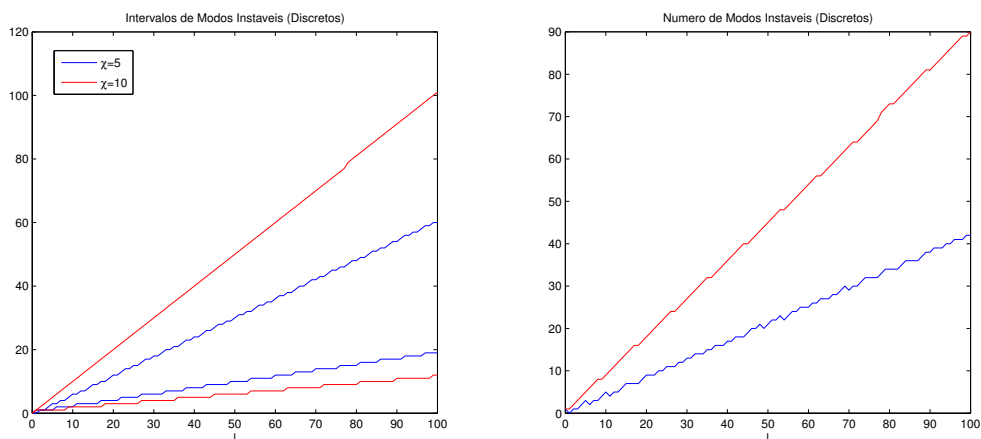


Figura 19: Intervalo de Modos Instáveis como função do tamanho do domínio, l .

de modos instáveis aumenta, fazendo com que o número de aglomerados também cresça, fato ilustrado na figura. Cabe salientar que para $\chi = 5$ encontramos apenas este tipo de comportamento para a economia, ou seja, a convergência para um novo estado estacionário.

Já na Figura 21 consideramos o caso em que $\chi = 10$, o que implica, *ceteris paribus*, um maior número de modos instáveis. Neste caso, verificamos uma gama mais rica de comportamentos espaço-temporais:

- i. convergência para um estado estacionário não-homogêneo estável, com formação de aglomerados econômicos ($l = 1, 2, 4, 10, 15$);
- ii. formação de ciclos econômicos periódicos ($l = 7, 9, 12$);
- iii. formação de ciclos econômicos não-periódicos ($l = 14, 19, 22, 24$).

Na Figura 22 ilustramos o caso (i), apresentando a evolução espaço-temporal das distribuições de capital e trabalho para $l = 15$, assim como o estado estacionário não-homogêneo atingido. Na Figura 23 mostramos a evolução temporal de algumas economias locais, assim como a do valor agregado do capital (K_T) e do trabalho (L_T), a qual é mostrada na última coluna. Na última linha da mesma figura apresentamos os respectivos diagramas de fase K vs. L , onde podemos verificar novamente o estado estacionário.

Na Figura 24 ilustramos o caso (ii) para $l = 9$, o qual gera ciclos periódicos. Na Figura 25 mostramos a evolução temporal de algumas economias locais, assim como a do valor agregado do capital (K_T) e do trabalho (L_T), a qual é mostrada na última coluna. Na última linha da mesma figura apresentamos os respectivos diagramas de fase K vs. L , onde podemos verificar novamente a existência de ciclos periódicos.

Na Figura 26 ilustramos o caso (iii) para $l = 23$, o qual gera ciclos não-periódicos. Na Figura 27 mostramos a evolução temporal de algumas economias locais, assim como a do valor agregado do capital (K_T) e do trabalho (L_T), a qual é mostrada na última coluna.

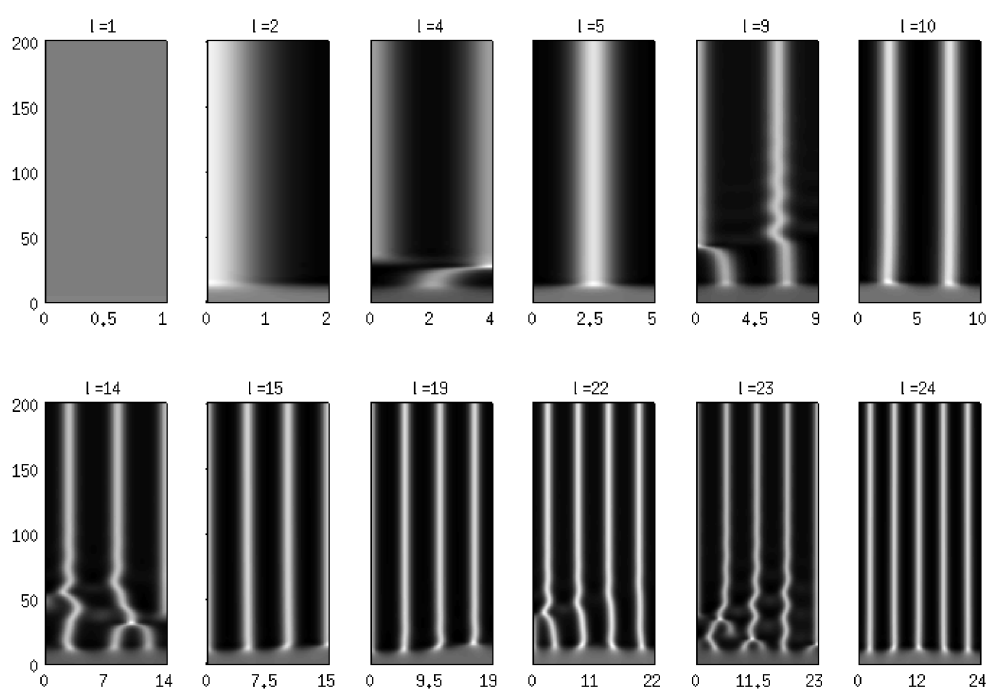


Figura 20: Formação de aglomerados estáveis de M-O como função de l ($\chi = 5$).

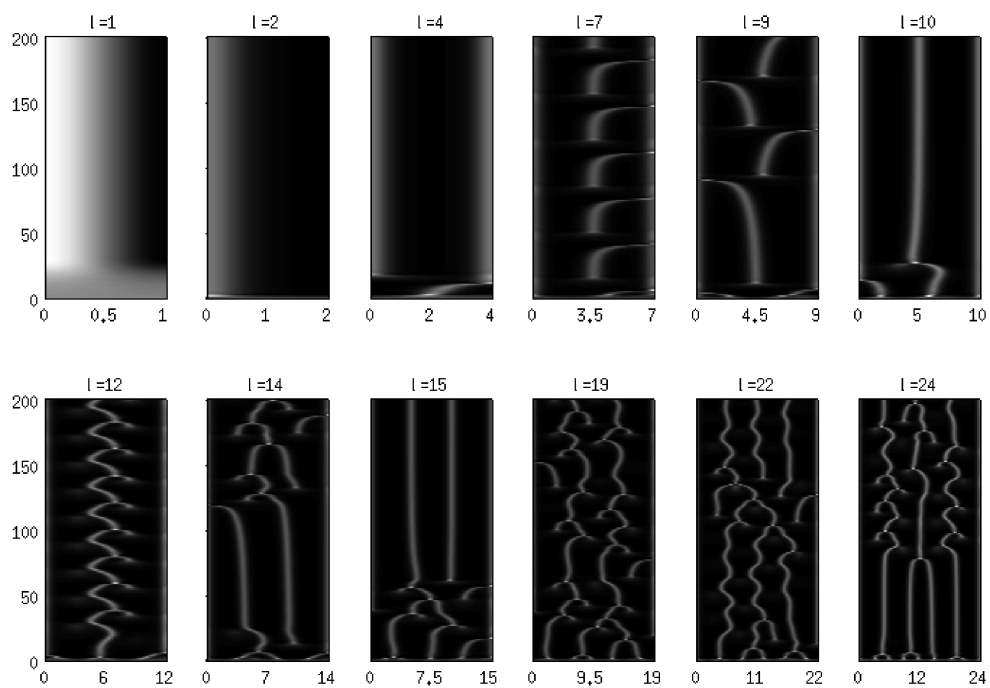


Figura 21: Comportamento Espaço-Temporal como função de l ($\chi = 10$).

Os diagramas de fase sugerem a existência de caos no sistema.

Comportamentos espaço-temporais similares aos apresentados aqui também já foram observados em modelos de quimiotaxia [54, 53, 4].

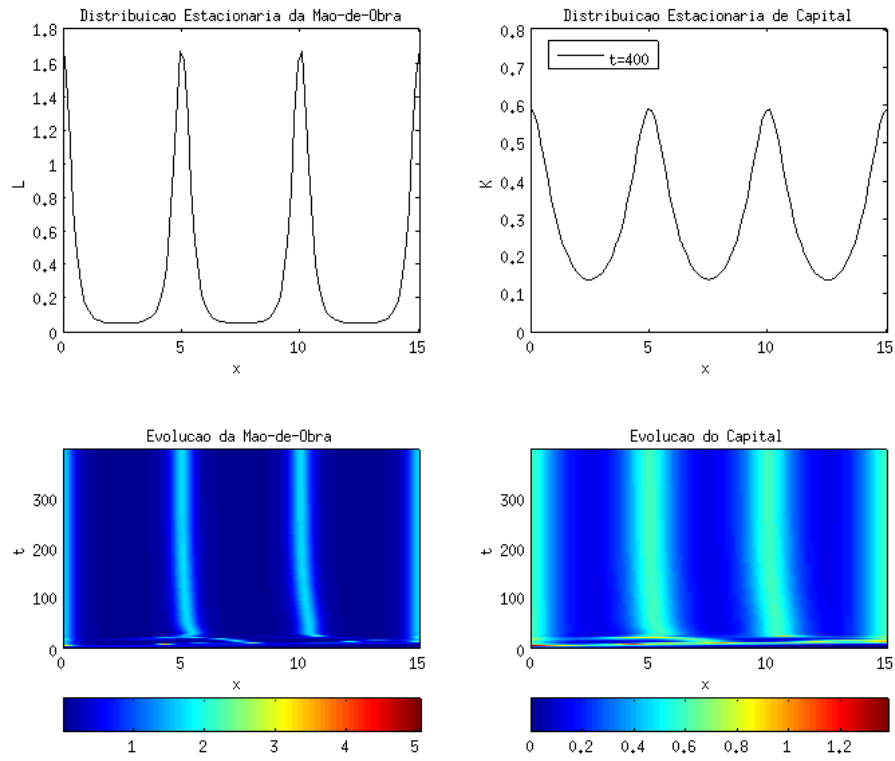


Figura 22: Evolução espaço-temporal para o caso (i): $l = 15$.

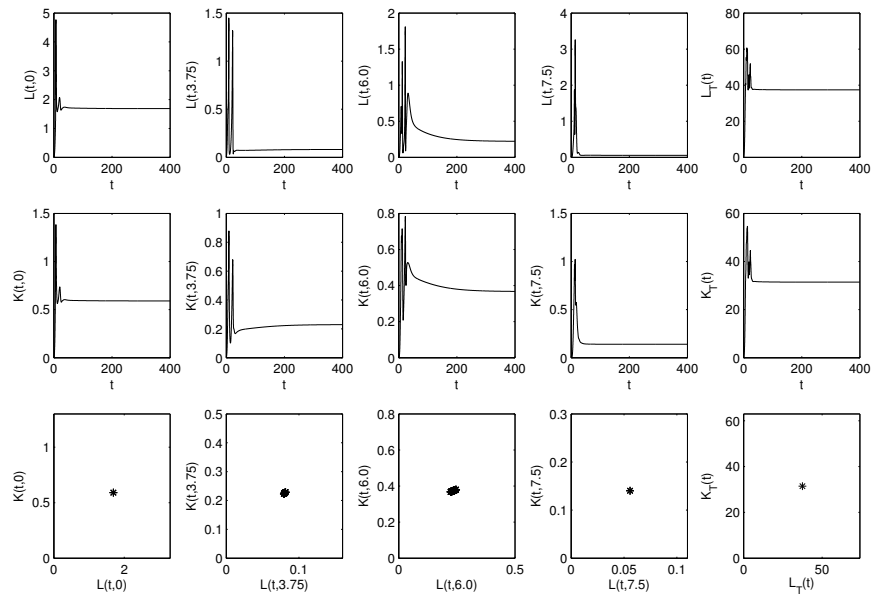


Figura 23: Perfis temporais de algumas economias locais e da economia agregada ($l = 15$).

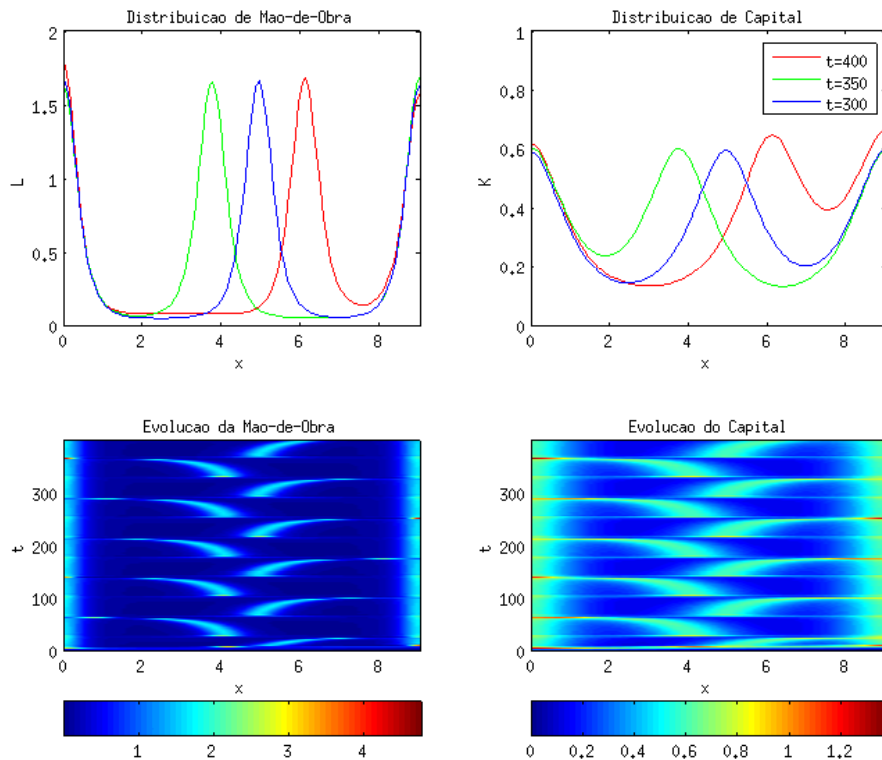


Figura 24: Evolução espaço-temporal para o caso (ii): $l = 9$.

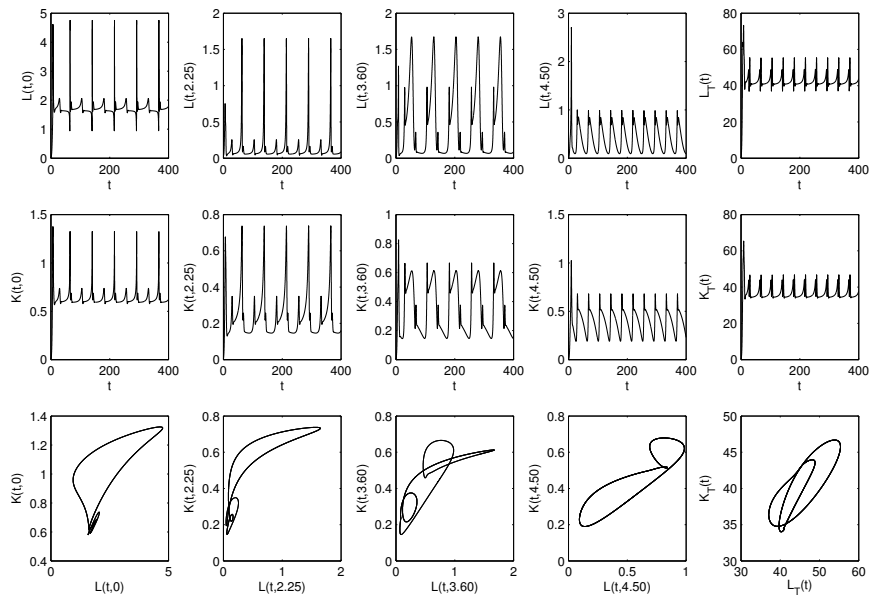


Figura 25: Perfis temporais de algumas economias locais e da economia agregada ($l = 9$).

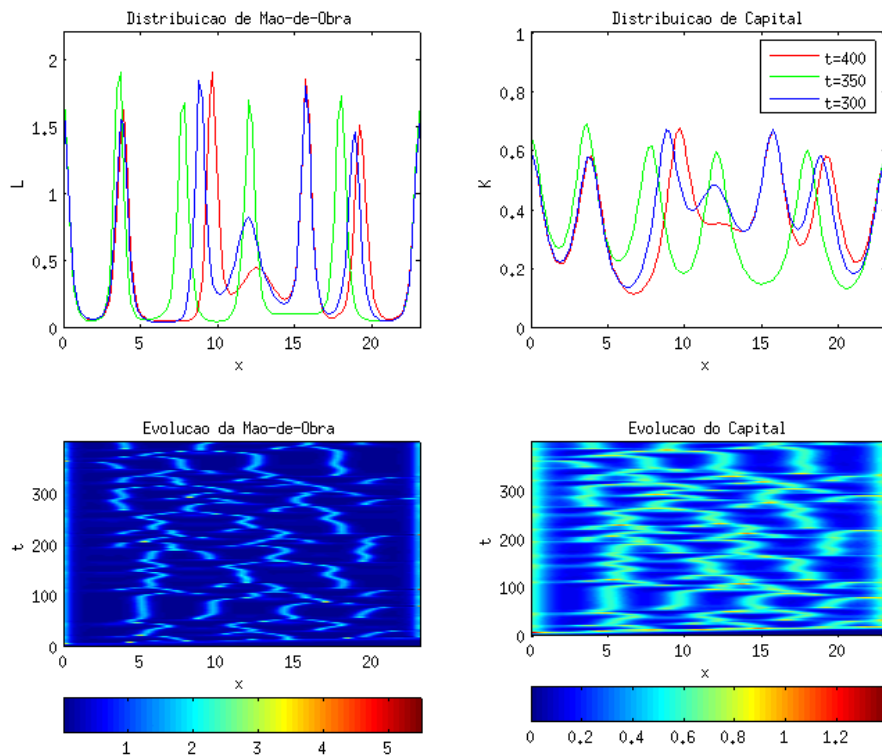


Figura 26: Evoluçao espaço-temporal para o caso (iii): $l = 23$.

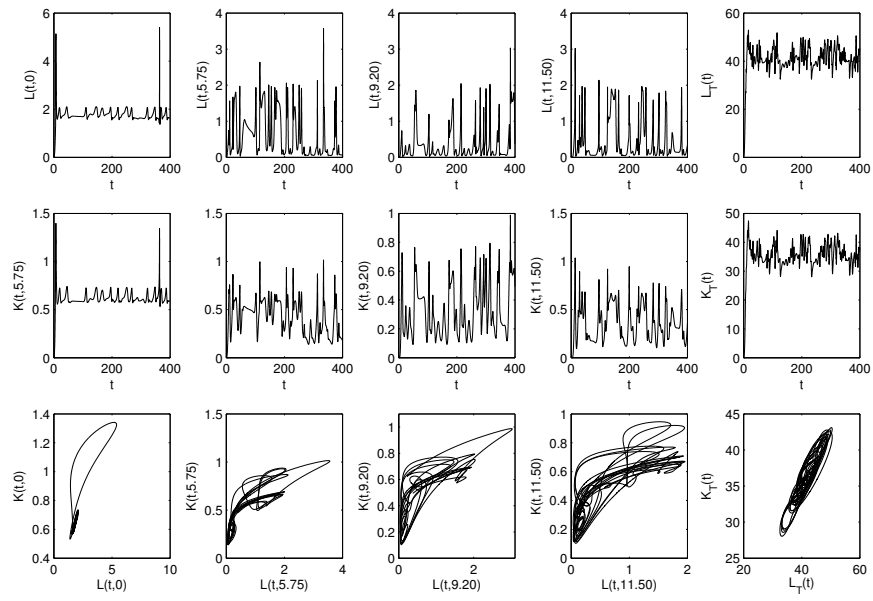


Figura 27: Perfis temporais de algumas economias locais e da economia agregada ($l = 23$).

5 Modelo de Solow Espacial Generalizado com Recursos Naturais Não-Renováveis

5.1 Modelo e Função de Produção

A fim de exemplificar a introdução de um recurso natural não-renovável na economia, iremos utilizar o MSEG em uma dimensão espacial (64):

$$\begin{cases} \frac{\partial K}{\partial t} = \beta h + \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \tilde{\chi} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial L}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial L}{\partial t} = \alpha g + d \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \chi \frac{\partial}{\partial x} \left(L \frac{\partial K}{\partial x} \right) \text{ para } (t, x) \in (0, l) \times (0, \infty) \\ K(t, x) = K_0(x), L(t, x) = L_0(x), \text{ para } (t, x) \in [0, l] \times \{0\} \\ \frac{\partial K}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \text{ para } (t, x) \in \{0, l\} \times (0, \infty) \end{cases} \quad (75)$$

onde:

$$h(K, L) = f(K, L, R) - K \text{ e } g(L) = L(1 - L).$$

A função de produção, incluindo o uso do recurso natural na produção, é dada por:

$$f(K, L, R) = K^\phi L^{1-\phi} (1 + r_0 R)^\eta, \quad \phi, \eta \in [0, 1] \quad (76)$$

onde $R = R(t, x)$ é o estoque de recurso natural não-renovável no tempo t e localidade x , r_0 é sua taxa de extração (que aqui consideraremos constante). Para cada x , R satisfaz a seguinte equação diferencial [55, 62, 63]:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -r_0 R, \quad (77)$$

cuja solução é dada por:

$$R(t, x) = R(0, x) e^{-r_0 t}, \quad x \in [0, l], \quad t > 0. \quad (78)$$

Aqui, $R(0, x)$ é a distribuição inicial do recurso natural não-renovável, e estaremos considerando a variável x em uma dimensão.

Observe que (76) não é homogênea de grau um⁷, mas a utilizaremos para melhor comparar as diferenças entre uma economia com recursos naturais e outra sem tais recursos. Para verificar essas diferenças de comportamento, nos utilizaremos do Modelo de Solow Espacial Generalizado (64) em uma dimensão espacial, e sem considerar taxa para o capital, isto é, fazendo $\tilde{\chi} = 0$. Note que a inclusão do recurso natural no modelo, com a respectiva modificação da função de produção, não altera os resultados de estabilidade já apresentados para o MSEG.

⁷Qualitativamente, para nossos propósitos, as soluções entre uma função de produção homogênea de grau um, e uma não-homogênea, não diferem substancialmente.

5.2 Simulações Numéricas em uma Dimensão Espacial

Para as simulações numéricas, consideraremos o seguinte conjunto de parâmetros:

$$\begin{aligned}\tilde{\chi} &= 0, \\ d &= 1, \\ \phi &= 0.5, \\ \eta &= 0.5, \\ \alpha &= 1, \\ \beta &= 2.5, \\ r_0 &= 0.1, \\ l &= 14,\end{aligned}$$

e as condições iniciais gaussianas apresentadas na Figura 28. O decaimento espaço-temporal do estoque do recurso natural não-renovável, $R(t, x)$, que está localizado no centro da economia, pode ser visto na Figura 29.

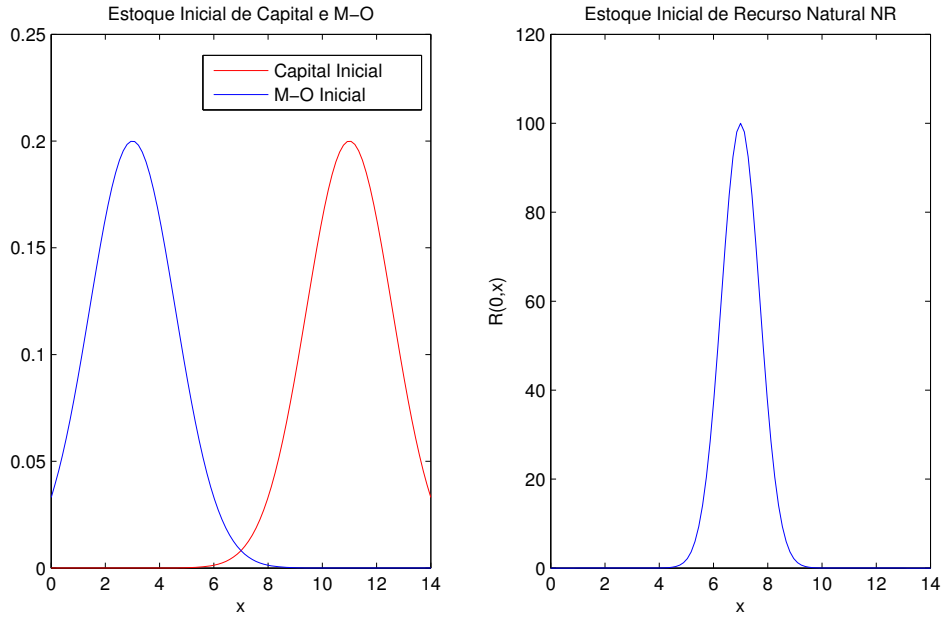


Figura 28: Condições Iniciais $K_0(x)$, $L_0(x)$ e $R(0, x)$.

Com o objetivo de medir o impacto de um recurso natural em um período de tempo $[0, t]$, vamos definir o excedente de mão-de-obra como a função:

$$E_L(t, x) = \int_0^t (L_{RN}(s, x) - L(s, x)) ds$$

e de forma similar, definiremos o excedente de capital como:

$$E_K(t, x) = \int_0^t (K_{RN}(s, x) - K(s, x)) ds.$$

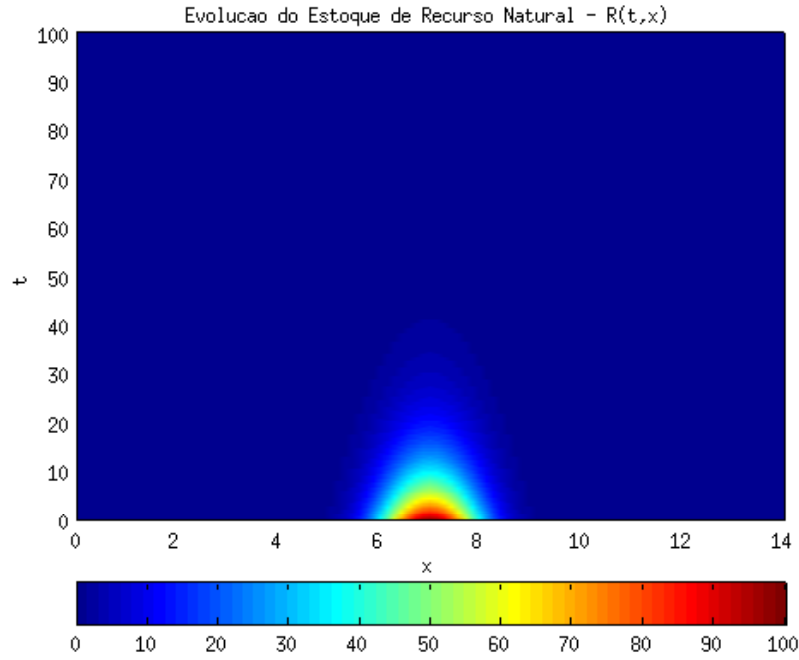


Figura 29: Evolução Espaço-Temporal de $R(t, x)$.

L_{RN}, K_{RN} são as distribuições de mão-de-obra e de capital numa economia com recursos naturais, e L, K representam as mesmas variáveis numa economia sem recursos naturais.

Na Figura 30 apresentamos a evolução destes excedentes para uma economia que converge para um estado estacionário homogêneo ($\chi = 3$). Como podemos ver, há a concentração destes excedentes na região central, onde está localizado o recurso natural. Na Figura 31, onde consideramos uma economia que atinge um estado estacionário não-homogêneo ($\chi = 5$), estes excedentes se concentram nas localidades onde, na economia sem o recurso natural, havia menor densidade de capital e trabalho, ou seja, há uma troca de fase espacial neste caso: onde antes havia uma região bem desenvolvida, agora há um região pouco desenvolvida, e vice-versa. Já para uma economia que apresenta um comportamento irregular ($\chi = 10$), podemos ver, na Figura 32, que os excedentes também se concentram na região central do domínio, embora neste caso ele não atinja um estado estacionário, como nos exemplos anteriores.

Na Figura 33 apresentamos os excedentes de capital e mão-de-obra para a economia agregada, calculados da seguinte forma:

$$E_L^{agreg}(t) = \int_0^t \int_0^l (L_{RN}(s, x) - L(s, x)) dx ds$$

$$E_K^{agreg}(t) = \int_0^t \int_0^l (K_{RN}(s, x) - K(s, x)) dx ds.$$

Como podemos ver, o único caso em que a economia como um todo se beneficia do recurso natural é o caso em que ela converge para um estado estacionário não-homogêneo ($\chi = 5$). Embora tanto os excedentes da mão-de-obra como o do capital sejam inicialmente negativos, logo eles se tornam persistentemente crescentes e positivos, até o tempo

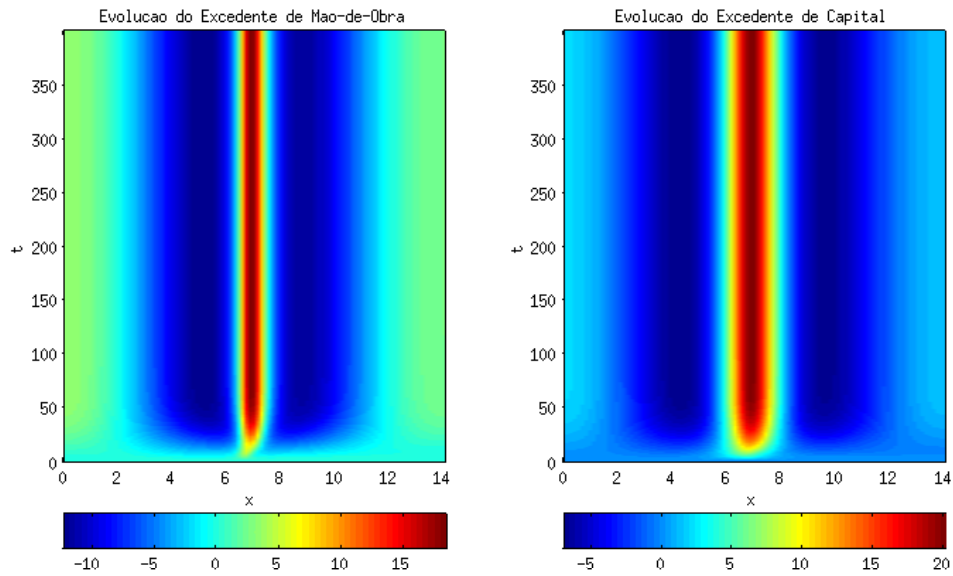


Figura 30: Evolução do Excedente de Mão-de-Obra e Capital ($\chi = 3$).

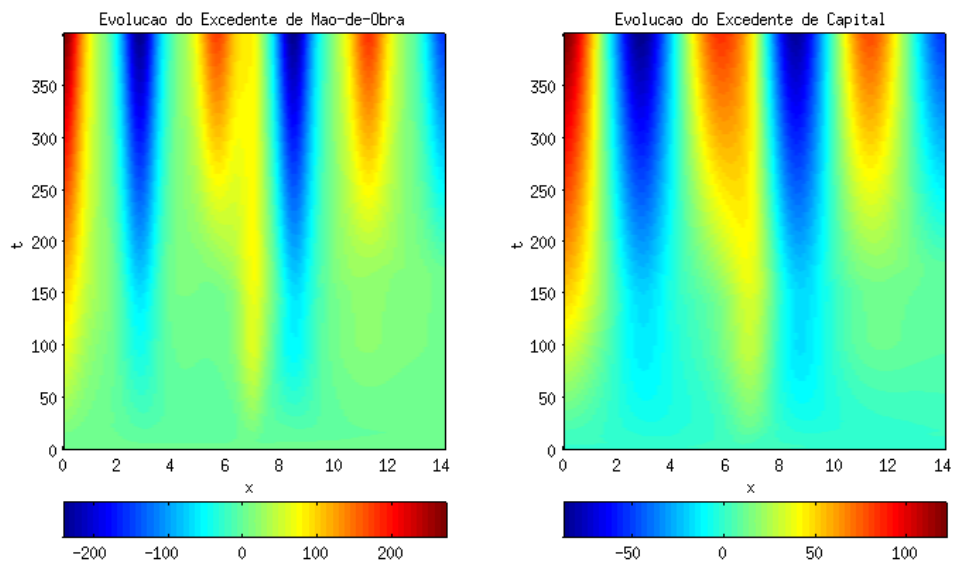


Figura 31: Evolução do Excedente de Mão-de-Obra e Capital ($\chi = 5$).

$t = 200$, aproximadamente. Vejam que este impacto positivo do recurso natural na economia agregada é bem mais duradouro do que a sua existência, pois seu estoque se acaba no tempo $t = 50$ (ver Figura 29). No caso em que $\chi = 3$, os excedentes ficam persistentemente negativos, mostrando que a economia como um todo (quando tem recurso natural) tem uma performance inferior do que quando não o tem, embora a região onde se concentre estes recursos se aproveite melhor deles (Figura 30). Já para o caso de comportamento irregular, $\chi = 10$, notamos um comportamento errático destes excedentes: para o capital, começa inicialmente negativo, mas posteriormente se torna positivo, e

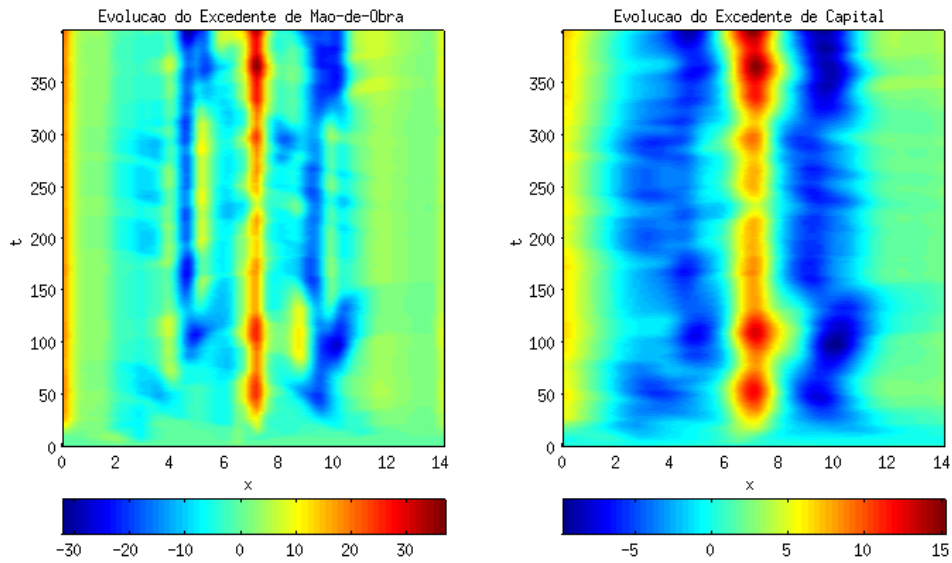


Figura 32: Evolução do Excedente de Mão-de-Obra e Capital ($\chi = 10$).

assim sucessivamente num movimento aperiódico; já o trabalho também apresenta um excedente errático, mas sempre negativo. Detalhando melhor o caso em que a economia

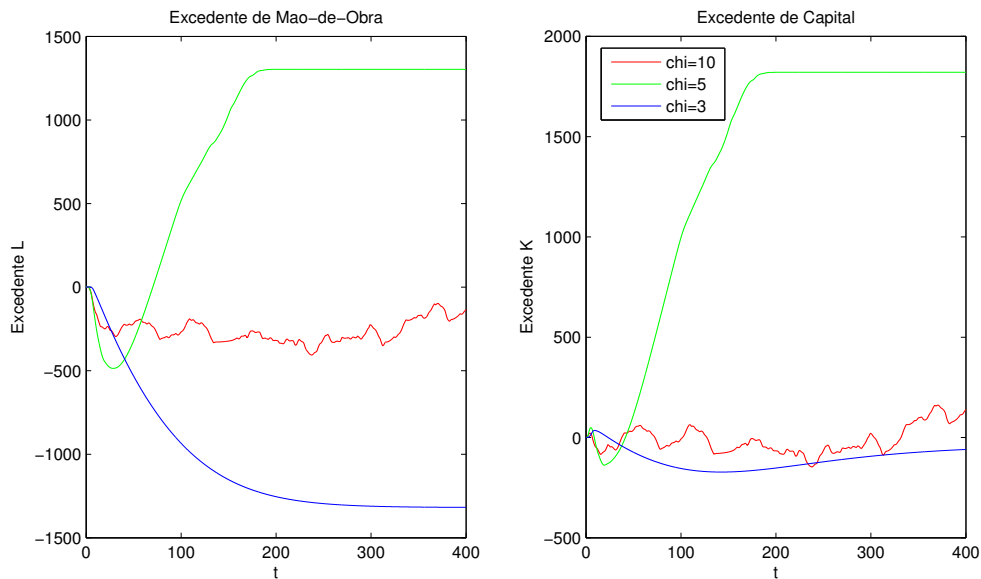


Figura 33: Excedentes de M-O e Capital para a Economia Agregada.

tem um melhor performance agregada na presença dos recursos naturais, na Figura 34 podemos ver a evolução temporal do estoque de recurso natural agregado, da mão-de-obra e do capital agregados, assim como de seus excedentes. Na Figura 35 apresentamos a evolução espaço-temporal da diferença entre as distribuições de trabalho e capital com e sem recursos naturais (RN), assim como os estados estacionários não-homogêneos com e sem RN, onde podemos novamente observar a troca de fase espacial.

Finalmente, na Figura 36 mostramos a dependência dos excedentes de capital e do trabalho em relação à taxa de extração do recurso natural r_0 . Quanto maior r_0 , menor é o tempo de impacto do recurso natural na economia e, de fato, menor é o impacto total, até se tornar negativo ($r_0 = 0.99$).

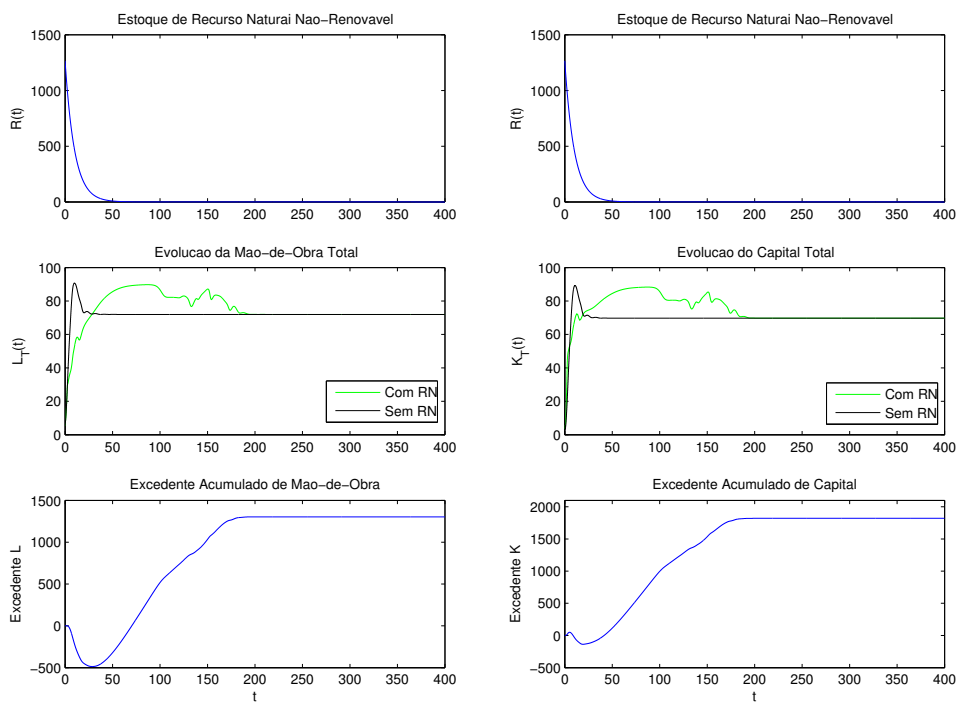


Figura 34: Performance Agregada da Economia ($\chi = 5$).

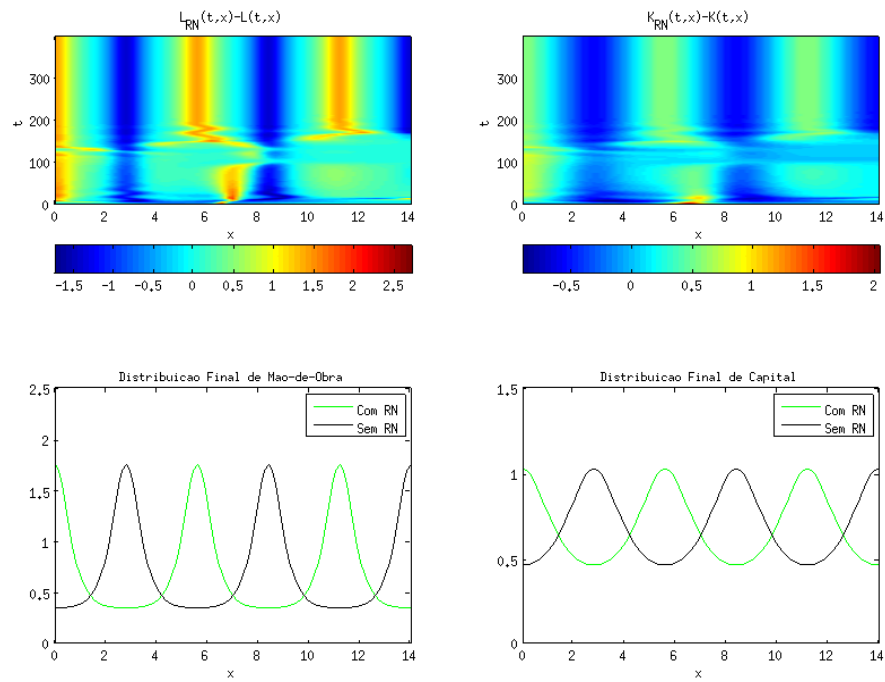


Figura 35: Evolução Espaço-Temporal do Efeito do RN e Estado Estacionário ($\chi = 5$).

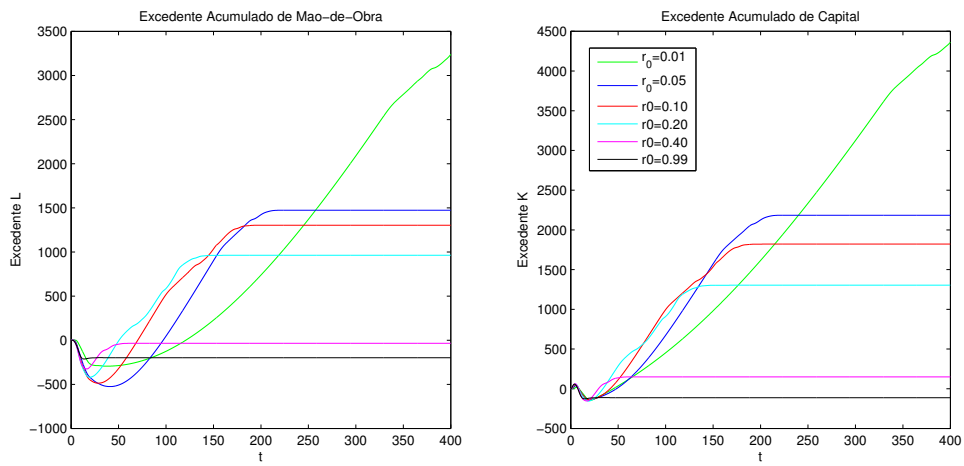


Figura 36: Impacto da Taxa de Extração r_0 na Economia Agregada ($\chi = 5$).

6 Modelos de Solow Espaciais Ondulatórios

Os dois modelos que consideraremos neste capítulo são de natureza dinâmica e obtidos do Modelo de Isard-Liossatos Modificado:

$$\begin{aligned}
 \text{(MILM)} \quad & \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial K}{\partial t} = h(K, L, \mathbf{x}) - \nabla \cdot \mathbf{u} \\
 \frac{\partial L}{\partial t} = g(K, L, \mathbf{x}) - \nabla \cdot \mathbf{v} \\
 l \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\xi \nabla K + \tau K \nabla L - \nu \mathbf{u} \\
 \hat{l} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\hat{\tau} \nabla L + \hat{\xi} L \nabla K - \hat{\nu} \mathbf{v}, \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \Omega \\
 \\
 K(0, \mathbf{x}) = K_0(\mathbf{x}), \quad L(0, \mathbf{x}) = L_0(\mathbf{x}) \\
 \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \\
 \\
 \frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = 0 \\
 \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \partial \Omega
 \end{array} \right. \quad (79)
 \end{aligned}$$

Para a derivação dos modelos dinâmicos de segunda ordem temporal, é conveniente que façamos algumas considerações sobre a função de produção $f(K, L)$.

6.1 Função de Produção Alternativa

Na literatura econômica geralmente se pede que uma função de produção $f(K, L)$ satisfaça as seguintes condições [5]:

- i. é não-negativa para $K, L \geq 0$;
- ii. é crescente em ambas variáveis;
- iii. é côncava;
- iv. é homogênea de grau um: $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L)$, $\forall K, L, \lambda > 0$;
- v. $\lim_{K \rightarrow \infty} f_K(K, L) = 0$ e $\lim_{L \rightarrow \infty} f_L(K, L) = 0$;
- vi. $\lim_{K \rightarrow 0} f_K(K, L) = +\infty$ e $\lim_{L \rightarrow 0} f_L(K, L) = +\infty$;
- vii. $f(0, L) = 0$ e $f(K, 0) = 0$.

A função de produção de Cobb-Douglas que utilizamos até o momento satisfaz a todas estas condições. As condições (v)-(vii) são conhecidas na literatura como condições de Inada. A condição (iii) garante retornos marginais decrescentes nos fatores de produção; (iv) garante ganhos constantes de escala; (v) garante que os retornos marginais dos fatores tendem a zero se estes forem utilizados em grande quantidade; (vi) nos diz que o retorno marginal do fator se torna infinito se não houver um dos fatores presentes; e $f(0, L) = 0$ diz que o capital é fator essencial à produção, assim como $f(K, 0) = 0$ diz o mesmo acerca do trabalho.

Como bem observado por Engbers e Capasso [28, 13], a condição (vi) é claramente irrealista, pois antes da economia poder apresentar retornos marginais decrescentes, é necessário um investimento inicial para criar uma estrutura básica para a produção, a

qual inicialmente gerará retornos pequenos, mas crescentes. Então, apenas a partir de uma certa massa crítica de capital é que se manifestam os retornos decrescentes. A fim de levar em conta tal comportamento, estes autores propõe o uso de uma função de produção do tipo:

$$f(K) = \frac{K^\phi}{1 + K^\phi}, \quad \phi > 1,$$

onde consideram apenas o fator de produção capital. Esta função é uma função convexo-côncava: para valores pequenos de K ela é convexa (apresentando retornos crescentes para pequenos volumes de capital); e a partir de uma certa quantidade de capital ela é côncava (gerando retornos decrescentes). O custo a se pagar por este maior realismo (e que os autores reconhecem) é que esta função de produção viola a condição (iv), i.e., ela não apresenta retornos constantes de escala.

Nos modelos oscilatórios que derivaremos a seguir, vamos nos deparar com as quantidades $\frac{\partial f}{\partial K}$ e $\frac{\partial f}{\partial L}$ nos coeficientes das EDP's. Se considerarmos a função de produção de Cobb-Douglas, estes coeficientes apresentarão singularidades em $K = 0$ e $L = 0$, devido à propriedade (vi). Para evitar este problema, consideraremos a seguinte função de produção alternativa:

$$f(K, L) = \frac{KL}{1 + KL}, \quad (80)$$

cujas derivadas parciais são dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial K} = \frac{L}{(1 + KL)^2} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial L} = \frac{K}{(1 + KL)^2}.$$

Claramente, estas derivadas parciais estão bem definidas em $K = 0$ e/ou $L = 0$. Assim como em [28, 13], esta função não é homogênea de grau um, mas a consideraremos mesmo assim, pois qualitativamente (dentro do contexto de nosso modelo) ela se comporta da mesma forma que a função de Cobb-Douglas. O fato de (80) apresentar uma assíntota horizontal não será problema, pois estamos considerando que a economia converge para um valor finito e não-nulo de capital, o que segue da hipótese de crescimento logístico da mão-de-obra.

Nos casos em que estivermos considerando uma economia apenas com capital, usaremos:

$$f(K) = \frac{K}{1 + K}. \quad (81)$$

6.2 Modelo de Solow Espacial Ondulatório I

Neste caso, consideramos a equação para o fluxo de capital e trabalho em sua forma mais geral, com todos os seus termos. A seguir vamos derivar a equação governante do capital, e observar que a do trabalho segue da mesma forma. Então, começamos relembando a equação que descreve o fluxo de capital na economia:

$$l \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\xi \nabla K + \tau K \nabla L - \nu \mathbf{u}$$

a qual pode ser escrita como:

$$\mathbf{u} + T_K \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -d_K \nabla K + \chi_K K \nabla L, \quad (82)$$

onde $T_K = \frac{l}{\nu}$, $d_K = \frac{\xi}{\nu}$ e $\chi_K = \frac{\tau}{\nu}$. Esta equação é idêntica à Lei de Fourier Modificada (ou relação de Cattaneo-Maxwell) para a condução de calor [16, 17, 19, 20, 10, 1], mas aqui utilizada para descrever o fluxo de capital pela economia. Observe que, para T_K pequeno, pelo teorema de Taylor temos que o lado esquerdo de (82) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{u} + T_K \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cong \mathbf{u}(t + T_K, \mathbf{x})$$

e então T_K pode ser visto como um tempo de atraso (ou relaxação). Neste caso, (82) pode ser escrita como:

$$\mathbf{u}(t + T_K, \mathbf{x}) \cong -d_K \nabla K(t, \mathbf{x}) + \chi_K K(t, \mathbf{x}) \nabla L(t, \mathbf{x})$$

Assim, podemos ver que neste modelo há um intervalo de tempo T_K para que mudanças nos gradientes de capital e trabalho, assim como no valor da densidade de capital, possam alterar o fluxo de capital pela economia, comportamento que é perfeitamente factível na realidade.

Tomando a divergência da equação (82):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + T_K \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial t} = -d_K \Delta K + \chi_K \nabla \cdot (K \nabla L)$$

e usando a equação de conservação de capital:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = h - \frac{\partial K}{\partial t},$$

obtemos a equação de segunda ordem no tempo, governando a evolução do capital:

$$T_K \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + \left(1 - T_K \frac{\partial h}{\partial K}\right) \frac{\partial K}{\partial t} - T_K \frac{\partial h}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial t} = h + d_K \Delta K - \chi_K \nabla \cdot (K \nabla L).$$

Esta é uma equação hiperbólica. Observe que se fizermos $T_K \rightarrow 0$ obtemos um modelo parabólico, o que significa que a informação se propaga instantaneamente pela economia, obtemos:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = h + d_K \Delta K - \chi_K \nabla \cdot (K \nabla L),$$

que é a equação governando a evolução do capital no Modelo de Solow Espacial Generalizado, dada em (45).

Procedendo da mesma forma em relação à mão-de-obra, obtemos o Modelo de Solow Espacial Ondulatório I (MSEO-I):

$$(MSEO-I) \left\{ \begin{array}{l} T_K \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + \left(1 - T_K \frac{\partial h}{\partial K}\right) \frac{\partial K}{\partial t} - T_K \frac{\partial h}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial t} = h + d_K \Delta K - \chi_K \nabla \cdot (K \nabla L) \\ T_L \frac{\partial^2 L}{\partial t^2} + \left(1 - T_L \frac{\partial g}{\partial L}\right) \frac{\partial L}{\partial t} = g + d_L \Delta L - \chi_L \nabla \cdot (L \nabla K) \\ K = K_0(\mathbf{x}), L = L_0(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial K}{\partial t} = \kappa_0(\mathbf{x}), \frac{\partial L}{\partial t} = \lambda_0(\mathbf{x}), \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in \{0\} \times \Omega \\ \frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0, \text{ para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \partial \Omega \end{array} \right. \quad (83)$$

Observe que se fizermos $T_K, T_L \rightarrow 0$ em (83), recuperamos o MSEG dado em (45), e que as funções h e g são dadas por:

$$\begin{aligned} h(K, L) &= sA \frac{KL}{1 + KL} - \delta K \\ g(L) &= aL - bL^2. \end{aligned}$$

Se considerarmos $s = A = \delta = a = b = 1$ temos que o equilíbrio espacialmente homogêneo deste modelo também será dado por:

$$K_\infty = L_\infty = 1.$$

6.2.1 MSEO-I numa economia apenas com Mão-de-Obra

Se desconsiderarmos completamente a distribuição de capital no modelo ondulatório (83), obtemos que a evolução da mão-de-obra é governada pela seguinte equação:

$$\begin{cases} T_L \frac{\partial^2 L}{\partial t^2} + \left(1 - T_L \frac{dg}{dL}\right) \frac{\partial L}{\partial t} = g + d_L \Delta L \\ L = L_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial L}{\partial t} = \lambda_0(\mathbf{x}), \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in \{0\} \times \Omega \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (84)$$

A equação diferencial em (84) é um caso especial da equação do telégrafo adicionada de um termo reativo g (podendo ser chamada, portanto, de equação do telégrafo com reação). Equação igual a esta – mas em uma dimensão espacial – foi derivada em [33], adotando um ponto de vista microscópico, para descrever a dispersão de animais sob a hipótese de que estes tendem a manter a direção de seu movimento (apresentam inércia); o autor compara então este modelo com um modelo reativo-difusivo.

Considerando $g(L) = L(1 - L)$, temos os pontos de equilíbrio $L = 0$ e $L = 1$. Como $g'(0) = 1 > 0$ e $g'(1) = -1 < 0$ temos que o ponto de equilíbrio $L = 0$ é instável e o $L = 1$ é estável. Desta forma, temos que a mão-de-obra vai tender a se tornar espacialmente homogênea com o tempo. De fato, esta equação apresenta soluções do tipo ondas viajantes, conforme mostrado em [33].

6.2.2 MSEO-I numa economia apenas com Capital

Se desconsiderarmos completamente a distribuição de mão-de-obra no modelo ondulatório (83), obtemos que a evolução do capital é governada pela seguinte equação do telégrafo com reação:

$$\begin{cases} T_K \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + \left(1 - T_K \frac{dh}{dK}\right) \frac{\partial K}{\partial t} = h + d_K \Delta K \\ K = K_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial K}{\partial t} = \kappa_0(\mathbf{x}), \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in \{0\} \times \Omega \\ \frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (85)$$

Considerando $h(K) = \frac{K}{1+K} - \delta K$, temos os pontos de equilíbrio $K = 0$ e $K = \frac{1}{\delta} - 1$. Como:

$$h'(K) = \frac{1}{(1+K)^2} - \delta,$$

$h'(0) = 1 - \delta > 0$ (para $\delta \in (0, 1)$) e $h'(\frac{1}{\delta} - 1) = \delta(\delta - 1) < 0$, temos que o ponto de equilíbrio $K = 0$ é instável, e o ponto de equilíbrio não-trivial $K = \frac{1}{\delta} - 1$ é estável. Portanto, também neste caso o capital vai tender a se tornar espacialmente homogêneo com o tempo.

Um Exemplo Simplificado

Vamos considerar (85) num domínio infinito na reta, e onde, por simplicidade, assumimos $d_K = 1$ e:

$$h(K) = sK - \delta K = (s - \delta)K$$

onde s é a taxa de poupança e δ é a taxa de depreciação do capital. Desta forma, (85) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{T_K} - (s - \delta) \right) \frac{\partial K}{\partial t} - \frac{1}{T_K} \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \left(\frac{s - \delta}{T_K} \right) K = f(t, x) \\ K = K_0(x), \quad \frac{\partial K}{\partial t} = \kappa_0(x), \quad \text{para } (t, x) \in \{0\} \times \Omega \end{cases} \quad (86)$$

onde introduzimos o forçante $f(t, x)$. Note que esta é uma equação do telégrafo não-homogênea [69]. Definindo:

$$d = \frac{1}{T_K} - (s - \delta), \quad c^2 = \frac{1}{T_K} \quad \text{e} \quad a = \frac{s - \delta}{T_K}$$

temos que:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + d \frac{\partial K}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - aK = f(t, x) \\ K = K_0(x), \quad \frac{\partial K}{\partial t} = \kappa_0(x), \quad \text{para } (t, x) \in \{0\} \times \Omega. \end{cases} \quad (87)$$

Seguindo [21, 22] e aplicando a seguinte troca de variáveis:

$$K(t, x) = e^{-\frac{1}{2}dt} u(t, x)$$

podemos transformar (87) na Equação de Klein-Gordon não-homogênea:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(a + \frac{1}{4}d^2 \right) u = e^{-\frac{1}{2}dt} f(t, x)$$

cuja solução fundamental é dada por $\Phi(t, x, \xi) = \mathbf{h}(t, x - \xi)$, onde:

$$\mathbf{h}(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2c} \mathcal{H}(ct - |x|) e^{-\frac{dt}{2}} I_0 \left(\sigma \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{c}} \right), & \text{se } a + \frac{d^2}{4} = \sigma^2 > 0 \\ \frac{1}{2c} \mathcal{H}(ct - |x|) e^{-\frac{dt}{2}} J_0 \left(\sigma \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{c}} \right), & \text{se } a + \frac{d^2}{4} = -\sigma^2 < 0 \end{cases} \quad (88)$$

sendo $\mathcal{H}(z)$ a função de Heaviside, $J_0(z)$ a função de Bessel e $I_0(z)$ a função de Bessel modificada. Desta forma, a solução de (87) pode ser escrita como:

$$K(t, x) = K_h(t, x) + K_p(t, x), \quad (89)$$

onde $K_h(t, x)$ é a solução da equação telegráfica homogênea (i.e., considerando $f=0$, porém considerando as condições iniciais não-homogêneas em (87)), que é dada por:

$$K_h(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, x, \xi) \right] K_0(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t, x, \xi) \kappa_0(\xi) d\xi$$

e onde $K_p(t, x)$ é a solução forçada de (87) (i.e., considerando a equação diferencial não-homogênea, mas as condições iniciais homogêneas), que é dada por:

$$K_p(t, x) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t - \tau, x, \xi) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Em termos dos parâmetros originais, a solução de (89) é dada por:

$$\begin{aligned} K(t, x) &= \frac{\sqrt{T_K}}{2} \int_{x - \frac{t}{\sqrt{T_K}}}^{x + \frac{t}{\sqrt{T_K}}} \frac{\partial}{\partial t} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_K} - (s - \delta) \right) t} I_0 \left(\sigma \sqrt{t^2 - (x - \xi)^2 \sqrt{T_K}} \right) \right] K_0(\xi) d\xi \\ &+ \frac{\sqrt{T_K}}{2} \int_{x - \frac{t}{\sqrt{T_K}}}^{x + \frac{t}{\sqrt{T_K}}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_K} - (s - \delta) \right) t} I_0 \left(\sigma \sqrt{t^2 - (x - \xi)^2 \sqrt{T_K}} \right) \kappa_0(\xi) d\xi \\ &+ \frac{\sqrt{T_K}}{2} \int_0^t \int_{x - \frac{t - \tau}{\sqrt{T_K}}}^{x + \frac{t - \tau}{\sqrt{T_K}}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_K} - (s - \delta) \right) (t - \tau)} I_0 \left(\sigma \sqrt{(t - \tau)^2 - (x - \xi)^2 \sqrt{T_K}} \right) f(\tau, \xi) d\xi d\tau, \end{aligned}$$

se $\frac{s - \delta}{T_K} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{T_K} - (s - \delta) \right)^2 = \sigma^2 > 0$,

e por:

$$\begin{aligned} K(t, x) &= \frac{\sqrt{T_K}}{2} \int_{x - \frac{t}{\sqrt{T_K}}}^{x + \frac{t}{\sqrt{T_K}}} \frac{\partial}{\partial t} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_K} - (s - \delta) \right) t} J_0 \left(\sigma \sqrt{t^2 - (x - \xi)^2 \sqrt{T_K}} \right) \right] K_0(\xi) d\xi \\ &+ \frac{\sqrt{T_K}}{2} \int_{x - \frac{t}{\sqrt{T_K}}}^{x + \frac{t}{\sqrt{T_K}}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_K} - (s - \delta) \right) t} J_0 \left(\sigma \sqrt{t^2 - (x - \xi)^2 \sqrt{T_K}} \right) \kappa_0(\xi) d\xi \\ &+ \frac{\sqrt{T_K}}{2} \int_0^t \int_{x - \frac{t - \tau}{\sqrt{T_K}}}^{x + \frac{t - \tau}{\sqrt{T_K}}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_K} - (s - \delta) \right) (t - \tau)} J_0 \left(\sigma \sqrt{(t - \tau)^2 - (x - \xi)^2 \sqrt{T_K}} \right) f(\tau, \xi) d\xi d\tau, \end{aligned}$$

se $\frac{s - \delta}{T_K} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{T_K} - (s - \delta) \right)^2 = -\sigma^2 < 0$.

Observe que nos limites da integral podemos identificar a velocidade de propagação da onda, que é igual a $\frac{1}{\sqrt{T_K}}$.

6.3 Modelo de Solow Espacial Ondulatório II

Neste modelo iremos considerar que não há dissipação ou atrito em (79), ou seja, que $\nu = 0$. Desta forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\xi}{l} \nabla K + \frac{\tau}{l} K \nabla L$$

desde que $l > 0$. Assim, tomando a divergência, temos que:

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial t} = -\frac{\xi}{l}\Delta K + \frac{\tau}{l}\nabla \cdot (K\nabla L).$$

Derivando a primeira equação em (79) em relação ao tempo, e usando a expressão anterior, obtemos a seguinte equação para a evolução do capital:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\xi}{l}\Delta K - \frac{\tau}{l}\nabla \cdot (K\nabla L), \quad (90)$$

a qual pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} = \frac{\partial h}{\partial t} + d_K\Delta K - \chi_K\nabla \cdot (K\nabla L) \quad (91)$$

onde $d_K = \frac{\xi}{l}$ e $\chi_K = \frac{\tau}{l}$.

Procedendo da mesma forma em relação ao trabalho (fazendo $\hat{\nu} = 0$ em (79), e considerando $\hat{l} > 0$), obtemos:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\hat{\xi}}{\hat{l}}\nabla \cdot (L\nabla K) + \frac{\hat{\tau}}{\hat{l}}\Delta L \quad (92)$$

ou, de forma equivalente:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = \frac{\partial g}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial t} - \chi_L\nabla \cdot (L\nabla K) + c_L\Delta L \quad (93)$$

sendo $d_L = \frac{\hat{\xi}}{\hat{l}}$ e $\chi_L = \frac{\hat{\tau}}{\hat{l}}$.

Finalmente, levando em consideração as condições iniciais e de contorno, temos que o Modelo de Solow Espacial Oscilatório II (MSEO-II) é dado por:

$$\text{(MSEO-II)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} = \frac{\partial h}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial t} + d_K\Delta K - \chi_K\nabla \cdot (K\nabla L) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = \frac{\partial g}{\partial L} + d_L\Delta L - \chi_L\nabla \cdot (L\nabla K) \\ K = K_0(\mathbf{x}), \quad L = L_0(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial K}{\partial t} = \kappa_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial L}{\partial t} = \lambda_0(\mathbf{x}), \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in \{0\} \times \Omega \\ \frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \text{para } (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \partial\Omega \end{array} \right. \quad (94)$$

Tanto o MSEO-I quanto o MSEO-II aqui apresentados não serão abordados em maior profundidade neste trabalho, mas constituirão tema de pesquisa futura.

7 Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho consideramos extensões dos modelos de crescimento econômico espaciais presentes na literatura, mostrando que a inter-relação entre capital e trabalho no modelo de Solow espacial, através de movimentos difusivos e por taxia, pode gerar aglomerados de atividade econômica e uma rica variedade de comportamentos espaço-temporais. Além disso, nos utilizamos amplamente de idéias e métodos utilizados na área de Biomatemática, o que sugere que uma maior interação entre esta área e a Economia – pelo menos no que toca a modelos de crescimento econômico – pode gerar bons resultados.

Após derivar o Modelo de Isard-Liossatos em duas dimensões espaciais e de introduzir uma modificação para garantir a não-negatividade de suas soluções para o caso reativo-difusivo-advectivo (modelo que chamamos de Modelo de Solow Espacial Generalizado - MSEG), apresentamos uma análise detalhada deste caso particular. Este modelo generaliza o Modelo de Solow Espacial até então considerado na literatura ao considerar, em adição ao movimento difusivo dos fatores de produção capital e trabalho, que os trabalhadores migram para regiões com maior densidade de capital (onde há mais fábricas instaladas) e que o capital, por sua vez, migra para regiões com maior densidade de trabalhadores disponíveis. Chamamos estes movimentos de taxia da mão-de-obra e do capital, respectivamente.

Considerando a função de produção de Cobb-Douglas e um crescimento logístico para a mão-de-obra, fizemos uma análise de estabilidade linear do único ponto de equilíbrio de coexistência espacialmente homogêneo do sistema, apresentando na Proposição 2 as condições para que este ponto de equilíbrio seja estável. Para que haja a possibilidade de formação de aglomerados de capital e mão-de-obra na economia, pelo menos uma das condições apresentadas nesta proposição deve ser violada. Em especial, mostramos que a presença de taxia para a mão-de-obra – movimento no sentido do gradiente do capital – é condição necessária para a formação de aglomerados econômicos, desde que a relação de dispersão apresentada na Proposição 4 seja satisfeita.

Em seguida apresentamos algumas simulações numéricas em uma dimensão espacial para os casos particulares – sem taxia – do MSEG, mostramos que o equilíbrio homogêneo é atingido através de ondas viajantes, quando consideradas condições iniciais gaussianas. No caso em que há taxia apenas para a mão-de-obra, obtivemos um valor crítico para o coeficiente de taxia χ_c : para $\chi < \chi_c$ o sistema é estável, convergindo para um equilíbrio espacial homogêneo, e para $\chi > \chi_c$ o sistema se torna instável para um certo intervalo de números de onda, podendo gerar aglomerados econômicos. De fato, quanto maior o coeficiente de taxia (e quanto maior o tamanho do domínio), maior será este intervalo, e mais rico o comportamento espaço-temporal observado. Através de simulações numéricas, mostramos que para um coeficiente de taxia moderado, $\chi = 5$, a economia sempre converge para um estado estacionário não-homogêneo, apresentando aglomerados econômicos. Além disso, quanto maior o tamanho da economia, maior o número de modos instáveis, e maior o número de aglomerados formados. Para um coeficiente de taxia um pouco maior, $\chi = 10$, o sistema apresentou três tipos de comportamento, dependendo do tamanho do domínio: um comportamento igual ao anterior, com a formação de aglomerados estáveis; um comportamento periódico, com a formação de ciclos econômicos diferenciados em cada ponto do domínio; e um comportamento cíclico, mas aperiódico,

sugerindo que neste regime o sistema possa apresentar um comportamento caótico.

Adicionalmente, introduzimos um estoque de recursos naturais no Modelo de Solow Espacial Generalizado, considerando a sua extração à uma taxa constante. Através de simulações numéricas, pudemos observar que a introdução de tais recursos tem um efeito benéfico para toda a economia no caso em que o sistema converge a um estado estacionário não-homogêneo, além de ficar evidente que tais benefícios – embora não sejam permanentes – se prolongam por um período de tempo maior do que a existência dos recursos naturais. Nos outros casos há um certo ganho nas localidades próximas ao estoque de recursos, mas com efeitos mistos na economia como um todo.

Finalmente, no último capítulo apresentamos outros casos especiais do Modelo de Isard-Lioassatos Modificado, modelos estes dinâmicos e de segunda ordem temporal, que chamamos de Modelos de Solow Espacial Oscilatórios – MSEO, além de propor uma função de produção modificada que evita alguns problemas técnicos, mas mantém as principais características da função de produção de Cobb-Douglas. Um destes modelos, o MSEO-I, foi derivado a partir da Lei de Fourier Modificada, proposta por Cattaneo na década de 40 para resolver o paradoxo da velocidade de propagação infinita apresentada pela Lei de Fourier Clássica. Desta forma, incorporamos no modelo o fato de que há um tempo de resposta da economia para que mudanças nos gradientes de capital e trabalho se façam sentir. Considerando o caso simplificado de uma economia de tamanho infinito apenas com capital, o MSEO-I se reduz à uma equação do telégrafo, da qual encontramos a solução em forma integral, explicitando a velocidade de propagação da onda.

Os seguintes tópicos deverão ser explorados em pesquisa futura: mostrar que os modelos aqui apresentados são bem postos; analisar mais profundamente os modelos oscilatórios; realizar simulações em duas dimensões espaciais, e utilizar estes modelos como base para problemas econômicos envolvendo otimização dinâmica.

Apêndice A - Esquema Numérico Explícito

Para obtermos uma aproximação numérica da solução do problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial K}{\partial t} = h + d_K \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \chi_K \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial L}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial L}{\partial t} = g + d_L \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \chi_L \frac{\partial}{\partial x} \left(L \frac{\partial K}{\partial x} \right) \text{ para } (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty) \\ K(x, t) = K_0(x), L(x, t) = L_0(x), \text{ para } (x, t) \in [0, l] \times \{0\} \\ \frac{\partial K}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \text{ para } (x, t) \in \{0, l\} \times (0, \infty) \end{cases} \quad (95)$$

vamos definir $v_j^m = K(x_j, t_m)$ e $u_j^m = L(x_j, t_m)$, onde $x_j = j\Delta x$, $t_m = m\Delta t$, $\Delta x = \frac{l}{N+1}$, $\Delta t = \frac{T}{M}$, e $j = 0 \dots N+1$, $m = 0 \dots M$. Além disso, vamos considerar as diferenças finitas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} &\approx \frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} \approx \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} &\approx \frac{v_{j-1}^m - 2v_j^m + v_{j+1}^m}{\Delta x^2}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \approx \frac{u_{j-1}^m - 2u_j^m + u_{j+1}^m}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial L}{\partial x} \right) &\approx \frac{H_{j+\frac{1}{2}}^m - H_{j-\frac{1}{2}}^m}{\Delta x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(L \frac{\partial K}{\partial x} \right) \approx \frac{G_{j+\frac{1}{2}}^m - G_{j-\frac{1}{2}}^m}{\Delta x} \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} H_{j+\frac{1}{2}}^m &= \left(\frac{v_{j+1}^m + v_j^m}{2} \right) \left(\frac{u_{j+1}^m - u_j^m}{\Delta x} \right), \quad H_{j-\frac{1}{2}}^m = \left(\frac{v_j^m + v_{j-1}^m}{2} \right) \left(\frac{u_j^m - u_{j-1}^m}{\Delta x} \right) \\ G_{j+\frac{1}{2}}^m &= \left(\frac{u_{j+1}^m + u_j^m}{2} \right) \left(\frac{v_{j+1}^m - v_j^m}{\Delta x} \right), \quad G_{j-\frac{1}{2}}^m = \left(\frac{u_j^m + u_{j-1}^m}{2} \right) \left(\frac{v_j^m - v_{j-1}^m}{\Delta x} \right). \end{aligned}$$

Substituindo estas aproximações nas equações originais, obtemos o seguinte esquema explícito:

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{m+1} = \mathbf{v}^m + \mathbf{h}^m \Delta t + \eta_1 \mathbf{A} \mathbf{v}^m - \frac{\eta_2}{2\Delta x} \left(\mathbf{B} \mathbf{v}^m \cdot * \mathbf{C} \mathbf{u}^m - \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{v}^m \cdot * \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{u}^m \right) \\ \mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{u}^m + \mathbf{g}^m \Delta t + \lambda_1 \mathbf{A} \mathbf{u}^m - \frac{\lambda_2}{2\Delta x} \left(\mathbf{B} \mathbf{u}^m \cdot * \mathbf{C} \mathbf{v}^m - \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}^m \cdot * \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{v}^m \right) \end{cases} \quad (96)$$

onde $\cdot *$ é a operação de multiplicar componente-a-componente,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= d_K \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad \eta_2 = \chi_K \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ \lambda_1 &= d_L \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad \lambda_2 = \chi_L \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

sendo as matrizes, todas $(N+2) \times (N+2)$, dadas por:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (97)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (98)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (99)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (100)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (101)$$

e os vetores $(N + 2) \times 1$ dados por:

$$\mathbf{h}^m = \begin{pmatrix} h(x_0, t_m) \\ h(x_1, t_m) \\ \vdots \\ h(x_N, t_m) \\ h(x_{N+1}, t_m) \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{g}^m = \begin{pmatrix} g(x_0, t_m) \\ g(x_1, t_m) \\ \vdots \\ g(x_N, t_m) \\ g(x_{N+1}, t_m) \end{pmatrix} \quad (102)$$

Aqui, h a função de produção de Cobb-Douglas menos a depreciação e g é a função logística.

Referências Bibliográficas

- [1] Amendola, G., Fabrizio, M., and Golden, J. M. *Thermodynamics of Materials with Memory - Theory and Applications*. Springer-Verlag, New York, US, 2012.
- [2] Andre, F. J. and Cerda, E. On natural resource substitution. *Resource Policy*, 30:233–246, 2006.
- [3] Aronson, D. G. and Weinberger, H. F. Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation. *Partial Differential Equations and Related Topics*, 446:5–49, 1975.
- [4] Banerjee, S., Misra, A. P., and Rondoni, L. Spatiotemporal evolution in a (2+1)-dimensional chemotaxis model. *Physica A*, 391:107–112, 2012.
- [5] Barro, R. J. and Sala-i-Martin, X. *Economic Growth*. MIT Press, 2 edition, 2004.
- [6] Boyce, J. R. and Emery, J. C. H. Is a negative correlation between resource abundance and growth sufficient evidence that there is a "resource curse?". *Resources Policy*, 36:1–13, 2011.
- [7] Brito, P. *Essays in Honour of Antonio Simoes Lopes*, chapter A Spatial Solow Model with Unbounded Growth, pages 277–298. ISEG/UTL, 2005.
- [8] Brock, W. and Xepapadeas, A. Pattern formation, spatial externalities and regulation in coupled economic-ecological systems. *Journal of Environmental Economics and Management*, 59:149–164, 2010.
- [9] Brunnschweiler, C. N. Cursing the blessings? natural resource abundance, institutions, and economic growth. *World Development*, 36(3):399–419, 2008.
- [10] Cabrera, J., Castro, M. A., Rodriguez, F., and Martin, J. A. Difference schemes for numerical solutions of lagging models of heat conduction. *Mathematical and Computer Modelling*, 2012.
- [11] Camacho, C. and Zou, B. The spatial solow model. *Economics Bulletin*, 18(2):1–11, 2004.
- [12] Camacho, C., Zou, B., and Briani, M. On the dynamics of capital accumulation across space. *European Journal of Operational Research*, (186):451–465, 2008.
- [13] Capasso, V., Engbers, R., and La Torre, D. On a spatial solow model with technological diffusion and nonconcave production function. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (11):3858–3876, 2010.
- [14] Capasso, V., Engbers, R., and La Torre, D. *Population dynamics in a spatial Solow model with a convex-concave production function*, pages 61–68. Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance. Springer-Verlag, Milano, Italy, 2012.
- [15] Caselli, F. and Michaels G. Resource abundance, development, and living standards: evidence from oil discoveries in brazil. *NBER Working Paper No. 15550*, 2009.

- [16] Cattaneo, C. Sulla conduzione del calore. *Atti del Semin. Mat. e Fis. Univ. Modena*, 3(3), 1948.
- [17] Cattaneo, C. Sur une forme de l'equation de la chaleur eliminat le paradoxe d'une propagation instantanee. *Comptes Rendus de Seances de L'Academie des Sciences*, 247:431–433, 1958.
- [18] Cavalcanti, T. V. V., Mohaddes, K., and Raissi, M. Growth, development and natural resources: New evidence using a heterogeneous panel analysis. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 51:305–318, 2011.
- [19] Chester, M. Second sound in solids. *Physical Review*, 131(5):2013–2015, September 1963.
- [20] Chiwiacowsky, L. D. Uso da função de transferência em problemas de condução do calor com a lei de fourier modificada. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Porto Alegre, 2002.
- [21] Claeysen, J. R. and Ferreira, I. F. *A Resposta Impulso em Modelos Evolutivos e Estacionários*. Editora UFSM, Santa Maria, RS, 2009.
- [22] Claeysen, J. R., Ferreira, I. M., and Copetti, R. D. Decomposition of forced responses in vibrating systems. *Applied Numerical Mathematics*, 47(1):391–405, 2003.
- [23] Debnath, L. *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Birkhäuser Boston, Boston, US, 2005.
- [24] Di Vita, G. Natural resources dynamics: Exhaustible and renewable resources, and the rate of technical substitution. *Resource Policy*, 31:172–182, 2006.
- [25] Donghan, C. An improved solow-swan model. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, 13(2):72–78, 1998.
- [26] Edelstein, B. B. Cell specific diffusion model and morphogenesis. *Journal of Theoretical Biology*, 30:515–532, 1971.
- [27] Edelstein-Keshet, L. *Mathematical Models in Biology*. Classics in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, US, 2005.
- [28] Engbers, R. *Spatial Structures in Geographical Economics - Mathematical Modeling, Simulation and Inverse Problems*. PhD thesis, Westfälische Wilhems-Universität, Munster, 2009.
- [29] Fujita, M., Krugman, P., and Venables, A. J. *The Spatial Economy*. MIT Press, 1999.
- [30] Gaitan, B. and Roe, T. L. International trade, exhaustible-resource abundance and economic growth. *Review of Economic Dynamics*, 15(1):72–93, 2012.
- [31] Guerrini, L. The solow-swan model with a bounded population growth rate. *Journal of Mathematical Economics*, 42:14–21, 2006.

- [32] Hillen, T. and Potapov, A. The one-dimensional chemotaxis model: global existence and asymptotic profile. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 27:1783–1801, 2004.
- [33] Holmes, E. E. Are diffusion models too simple? comparison with telegraph models of invasion. *The American Naturalist*, 142(5):779–795, November 1993.
- [34] Isard, W. and Liossatos, P. Parallels from physics for space-time development models: Part i. *Regional Science and Urban Economics*, 1(1):5–40, 1975.
- [35] Isard, W. and Liossatos, P. Parallels from physics for space-time development models: Part ii - interpretation and extensions of the basic model. *Regional Science Association*, 35:43–66, 1975.
- [36] Isard, W. and Liossatos, P. *Spatial Dynamics and Optimal Space-Time Development*, volume 4 of *Studies in Regional and Urban Economics*. North-Holland, New York, US, 1979.
- [37] Jüngel, A. *Mathematical Modeling of Collective Behavior in Socio-Economic and Life Sciences*, chapter Diffusive and nondiffusive population models, pages 397–425. Springer-Verlag, 2010.
- [38] Keller, E. F. and Segel, L. A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. *Journal of Theoretical Biology*, 26(3):399–415, March 1970.
- [39] Kolstad, I. and Soreide, T. Corruption in natural resource management: Implications for policy makers. *Resources Policy*, 34:214–226, 2009.
- [40] Krugman, P. Increasing returns and economic geography. *Journal of Political Economy*, (99):483–499, 1991.
- [41] Krutilla, K. and Reuveny, R. The systems dynamics of endogenous population growth in a renewable resource-based growth model. *Ecological Economics*, 56:256–267, 2006.
- [42] Lafforgue, G. Stochastic technical change, non-renewable resource and optimal sustainable growth. *Resource and Energy Economics*, 30:540–554, 2008.
- [43] Larson, D. A. Transient bounds and time-asymptotic behavior of solutions to nonlinear equations of fisher type. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 34:93–103, 1978.
- [44] Lin, C. C. and Segel, L. A. *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*. Classics in Applied Mathematics. SIAM, US, 1988.
- [45] Lopes, C. P. and Claro, J. Recebimento de royalties na região metropolitana da baixada santista: incentivo ao desenvolvimento sustentável. *eGesta (UNISANTOS)*, 4:1–29, 2008.
- [46] Maxwell, J. C. On the dynamical theory of gases. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A, 157:4988, 1867.
- [47] Michaels, G. The long term consequences of resource-based specialisation. *The Economic Journal*, 121:31–57, 2010.

- [48] Mingari Scarpello, G. and Ritelli, D. The solow model improved through the logistic manpower growth law. *Annali Università di Ferrara - Sez VII - Sc. Mat.*, II:73–83, 2003.
- [49] Murray, J. D. *Mathematical Biology - I: An Introduction*. Springer-Verlag, New York, US, third edition edition, 2002.
- [50] Murray, J. D. *Mathematical Biology - II: Spatial Models and Biomedical Applications*. Springer-Verlag, New York, US, third edition edition, 2003.
- [51] Osaki, K., Tsujikawa, T., and Yagi, A. Finite dimensional attractor for one-dimensional keller-segel equations. *Funkcialaj Ekvacioj*, 44:441–469, 2001.
- [52] Osaki, K., Tsujikawa, T., Yagi, A., and Mimura, M. Exponential attractor for a chemotaxis-growth system of equations. *Nonlinear Analysis*, 51:119–144, 2002.
- [53] Painter, K. J. and Hillen, T. Spatio-temporal chaos in a chemotaxis model. *Physica D*, 240:363–375, 2011.
- [54] Pearce, I. G., Chaplain, M. A. J., Schofield, P. G., Anderson, A. R. A., and Hubbard, S. F. Chemotaxis-induced spatio-temporal heterogeneity in multi-species host-parasitoid systems. *Journal of Mathematical Biology*, 55:365–388, 2007.
- [55] Reyes, R. C. The green solow model with natural resources constraint: A theoretical note. *DLSU Business and Economics Review*, 21:111–116, 2011.
- [56] Rolnik, R. and Klink, J. Crescimento econômico e desenvolvimento urbano - por que nossas cidades continuam tão precárias? *Novos Estudos*, 89:89–109, Março 2011.
- [57] Sachs, J.D. and Warner, A.M. Natural resource abundance and economic growth. *NBER Working Paper 5398*, 1995.
- [58] Sachs, J.D. and Warner, A.M. Natural resource abundance and economic development: The curse of natural resources. *European Economic Review*, 45:827–838, 2001.
- [59] Senba, T. and Suzuki, T. *Applied Analysis: Mathematical Methods in Natural Science*. Imperial College Press, London, UK, 2004.
- [60] Smoller, J. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag, New York, US, 1983.
- [61] Solow, R. A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, LXX:65–94, February 1956.
- [62] Stiglitz, J. E. Growth with exhaustible natural resources: Efficient and optimal growth paths. *The Review of Economic Studies*, 41:123–137, 1974.
- [63] Stiglitz, J. E. Growth with exhaustible natural resources: The competitive economy. *The Review of Economic Studies*, 41:139–152, 1974.
- [64] Stijns, J. P. C. Natural resource abundance and economic growth revisited. *Resources Policy*, 30:107–130, 2005.

- [65] Swan, T. W. Economic growth and capital accumulation. *Economic Record*, (32):334–361, 1956.
- [66] Tahvonen, O. and Salo, S. Economic growth and transitions between renewable and nonrenewable energy resources. *European Economic Review*, 45:1379–1398, 2001.
- [67] Torvik, R. Natural resources, rent seeking and welfare. *Journal of Development Economics*, 67:455–470, 2002.
- [68] Turing, A. M. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, B237:37–72, 1952.
- [69] Webster, A. G. *Partial differential equations of mathematical physics*. Dover Publications, Inc., New York, US, 2nd edition, 1955.
- [70] Williams, A. Shining a light on the resource curse: An empirical analysis of the relationship between natural resources, transparency, and economic growth. *World Development*, 39(4):490–505, 2011.
- [71] Zeidler, E. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications I - Fixed Point Theorems*. Springer-Verlag, New York, US, 1986.
- [72] Zhu, M. and Murray, J. D. Parameter domains for generating spatial pattern: A comparison of reaction-diffusion and cell-chemotaxis models. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5(6):1503–1524, 1995.