UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Alguns resultados para a Equação do Calor e Equações de Advecção-Difusão

por

Milene Andréa Guadagnin

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano
Orientador

Porto Alegre, Agosto de 2005.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Guadagnin, Milene Andréa

Alguns resultados para a Equação do Calor e Equações de Advecção-Difusão / Milene Andréa Guadagnin.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2005.

100 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2005.
Orientador: Zingano, Paulo Ricardo de Ávila

Dissertação: Matemática Aplicada
Equação do Calor, Equações de Advecção-Difusão, Comportamento Assintótico

Alguns resultados para a Equação do Calor e Equações de Advecção-Difusão

por

Milene Andréa Guadagnin

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Métodos Analíticos e Numéricos em Dinâmica de Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano

Banca examinadora:

Prof. Dra. Gertrudes Aparecida Dandolini
IFM/UFPEL

Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll
PPGMAT/IM/UFRGS

Prof. Dr. Leandro Farina
PPGMAP/IM/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
12 de agosto de 2005.

Prof. Dra. Maria Cristina Varriale
Coordenador(a)

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

Neste trabalho, são obtidas diversas propriedades (em especial, referentes ao comportamento ao $t \to +\infty$) das soluções $u(\cdot, t)$ da equação linear do calor,

$$u_t = div(A\nabla u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \; t > 0$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz constante simétrica e positiva definida, correspondentes a estados iniciais p-somáveis, i.e.,

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

onde $1 \leq p < \infty$. Em particular, é examinado o comportamento de $\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ ao $t \to +\infty$, mostrando-se que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} \right|$$

quando $p = 1$, e $\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ quando $p > 1$.

São analisadas, também, as taxas de decaimento e o comportamento assintótico das soluções $u(\cdot, t)$ de equações de advecção-difusão da forma

$$u_t + div\mathbf{f}(u) = div(A(u)\nabla u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \; t > 0$$

correspondentes a estados iniciais p-somáveis e limitados, i.e.,

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad u(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

onde $1 \leq p \leq 2$. Novamente, é examinado o comportamento de $\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ ao $t \to +\infty$, mostrando-se que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} \right|$$

quando $p = 1$, e $\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ quando $p > 1$.

Várias outras propriedades importantes são também discutidas, seguindo principalmente [Silva, 2003], [Crandall e Tartar, 1980], [Hagstrom et al., 2003], [Zingano, 1999], [Zingano, 2004a], [Zingano, 2004b].

ABSTRACT

In this work, we derive several fundamental properties of solutions $u(\cdot,t)$ of the linear heat equation,

$$u_t = div(A\nabla u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$$

associated with initial states in $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, i.e.,

$$u(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

where $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ denotes a constant, symmetric positive defined matrix. Particular attention is given to the large time behavior of the L^p - norm of $u(\cdot,t)$, showing that, as $t \to +\infty$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to |m|, \quad m = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},0)d\mathbf{x},$$

when $p = 1$, and $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ when $p > 1$.

We also discuss the decay rates and asymptotic behavior of solutions $u(\cdot,t)$ of advection-difusion equations of the form

$$u_t + div\mathbf{f}(u) = div(A(u)\nabla u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$$

associated to bounded, p-summable initial states, i.e.,

$$u(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

where $1 \leq p \leq 2$. Again, particular attention is given to the large time behavior of the L^p - norm of $u(\cdot,t)$, showing once more that, as $t \to +\infty$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to |m|$$

when $p = 1$, and $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ when $p > 1$.

A number of other fundamental properties are also examined, following [Silva, 2003], [Crandall e Tartar, 1980], [Hagstrom et al., 2003], [Zingano, 1999], [Zingano, 2004a], [Zingano, 2004b].

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, são obtidas diversas propriedades assintóticas importantes para soluções $u(\cdot,t)$ da equação linear do calor da forma

$$u_t = div(A\nabla u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ t > 0 \tag{1.1}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz constante simétrica e positiva definida, correspondentes a estados iniciais p-somáveis, i.e.,

$$u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}), \quad u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n), \tag{1.2}$$

onde $1 \leq p < \infty$. A equação (1.1) é suficientemente simples de modo a permitir uma representação explícita para a solução, dada por

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}, \tag{1.3}$$

onde λ é a média geométrica dos autovalores da matriz A, i.e.,

$$\lambda = (\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n)^{\frac{1}{n}}, \tag{1.4}$$

onde $Spec\ A = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Para estados iniciais $u(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, a condição inicial (1.2) deve ser entendida da forma

$$u(\cdot,t) \to u_0 \quad em \quad L^p(\mathbb{R}^n) \quad ao \quad t \to 0^+, \tag{1.5}$$

isto é,

$$\|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad ao \quad t \to 0^+, \tag{1.6}$$

onde $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ denota a norma do espaço $L^p(\mathbb{R}^n)$, i.e.,

$$\|w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |w(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad w \in L^p(\mathbb{R}^n). \tag{1.7}$$

O objetivo do presente trabalho é discutir detalhadamente várias propriedades fundamentais das soluções de (1.1), (1.2) e mais geralmente, da equação

$$u_t + div\ \mathbf{f}(u) = div(A(u)\nabla u) \tag{1.8}$$

que modela fenômenos de advecção (dada pela função de fluxo $\mathbf{f}$) e difusão (dada pelo termo de segunda ordem), onde A, $\mathbf{f}$ são funções suaves, com $A(\cdot)$ uniformemente positiva definida. Parte dos resultados é bem conhecida, especialmente no caso da equação (1.1), e pode ser encontrada facilmente na literatura; estes resultados formam o conteúdo dos Capítulos 1 e 2 e das seções 4.2.1, 4.3 e parte da seção 5.2, ver e.g. [Harabetian, 1988], [Kreiss e Lorenz, 1989], [Crandall e Tartar, 1980], [Brzezniak e Szafirski, 1991] e [Zingano, 1999]. Os demais resultados são recentes e publicados em [Hagstrom et al., 2003], [Hagstrom et al., 2005], [Zingano, 2004a], [Zingano, 2004b], e encontram aqui uma exposição uniforme e mais detalhada. Não há resultados originais no presente texto, mas algumas provas estão levemente simplificadas ou adaptadas às nossas necessidades. Os resultados discutidos encontram ampla aplicação em quaisquer fenômenos de advecção-difusão modelados por equações da forma (1.8); por exemplo, problemas de difusão (linear ou não linear) de calor em meios homogêneos (isotrópicos ou não), difusão de solutos em meios líquidos, fenõmenos de difusão com advecção passiva, e assim por diante.

Voltando ao problema (1.1), (1.2), verificamos que, para $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $u(\cdot,t)$ dada em (1.3) satisfaz (1.6), tendo-se ademais $u(\cdot,t) \in C^0([0,+\infty[, L^p(\mathbb{R}^n))$, ou seja, $u(\cdot,t) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para cada $t \geq 0$ e, para cada $t_* \geq 0$,

$$\|u(\cdot,t) - u(\cdot,t_*)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad ao \quad t \to t_*. \tag{1.9}$$

Ademais, mostramos que existe apenas uma solução (clássica) para o problema (1.1), (1.2) no espaço $C^0([0,+\infty[, L^p(\mathbb{R}^n))$. Esta e outras propriedades básicas das soluções de (1.1), (1.2) são discutidas no Capítulo 2. Por exemplo, verificamos que $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ decresce monotonicamente em t, i.e.,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, t > 0. \tag{1.10}$$

Além disto, tem-se a propriedade da monotonicidade,

$$u(\cdot,0) \leq v(\cdot,0) \Rightarrow u(\cdot,t) \leq v(\cdot,t) \quad \forall\, t > 0 \tag{1.11}$$

onde

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} u(\mathbf{y},0) d\mathbf{y} \tag{1.12}$$

e

$$v(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} v(\mathbf{y},0) d\mathbf{y} \tag{1.13}$$

denotam as soluções de (1.1), correspondentes a estados iniciais $u(\cdot,0), v(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dados.

Sendo $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a massa de $u(\cdot,t)$, isto é, a quantidade m dada por

$$m = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} \tag{1.14}$$

é invariante no tempo, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},0) d\mathbf{x} \quad \forall\, t > 0, \tag{1.15}$$

e ela desempenha papel importante na descrição do comportamento de $u(\cdot,t)$ ao $t \to +\infty$. Para isso, estabelecemos várias taxas de decaimento (ao $t \to +\infty$) de $u(\cdot,t)$ no Capítulo 3, como e.g.

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C(r,p,\lambda,n) \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)} \quad \forall\, t > 0 \tag{1.16}$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, onde $C(r,p,\lambda,n)$ é uma constante que depende apenas de r, p, λ, n, onde λ é dado em (1.4) acima. Analogamente, $D^\ell u(\cdot,t)$ decai em $L^r(\mathbb{R}^n)$ para cada $\ell \geq 1$, tendo-se

$$\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C_\ell(r,p,\lambda,n) \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)-\frac{\ell}{2}} \quad \forall\, t > 0, \tag{1.17}$$

para todo $p \leq r \leq \infty$, onde $C_\ell(r,p,\lambda,n)$ denota uma constante que depende de ℓ, r, p, λ, n. Aqui, $D^\ell u(\cdot,t)$ denota genericamente as derivadas espaciais de ordem ℓ de $u(\cdot,t)$, de modo que

$$\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_\ell=1}^{n} \|\frac{\partial^\ell u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_\ell}}(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.18}$$

No Capítulo 4, detalhamos certos resultados de [Hagstrom et al., 2005], computando os limites

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)} \|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.19}$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, onde $u(\cdot,t)$ é solução de (1.1), (1.2). No caso $p=1$, temos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to |m|$$

onde m é a massa de $u(\cdot,t)$, dadas em (1.14), (1.15) acima. Ainda neste caso, para $r=\infty$ resulta

$$t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}$$

onde λ é dado em (1.4), enquanto, para $1 < r < \infty$, tem-se

$$t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \to \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{4\pi\lambda}{r}\right)^{\frac{n}{2r}}.$$

No Capítulo 5, estendemos os resultados anteriores a equações de advecção-difusão mais gerais, da forma

$$u_t + div\ \mathbf{f}(u) = div(A(u)\nabla u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \tag{1.20}$$

considerando estados iniciais limitados e p-somáveis,

$$u(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{1.21}$$

onde $1 \leq p \leq 2$. Na equação (1.20), $div\ \mathbf{f}(u)$ é o divergente da função fluxo $\mathbf{f}(u)$ com respeito à variável espacial $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, i.e., $div\ \mathbf{f}(u) = \partial x_1 f_1(u(\mathbf{x},t)) + \ldots + \partial x_n f_n(u(\mathbf{x},t))$, ∇u é o gradiente espacial de $u(\mathbf{x},t)$, e $A(u)$ denota uma matriz positiva definida de ordem n descrevendo a dissipação de viscosidade no sistema, com

$$\langle \boldsymbol{\xi}, A(\mathsf{u})\boldsymbol{\xi}\rangle \geq \mu|\boldsymbol{\xi}|^2 \quad \forall\ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \tag{1.22}$$

para alguma constante $\mu > 0$ e todo u envolvido, onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto interno em $\mathbb{R}^n$, i.e.,

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i \tag{1.23}$$

se $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, com $\xi_i, \eta_i \in \mathbb{R}$ para todo i; escrevemos também $\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta}$ para $\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\rangle$. As funções A, $\mathbf{f}$ são dadas, suaves.

Seguindo [Hagstrom et al., 2003], [Zingano, 1999], [Zingano, 2004a] e [Zingano, 2004b] descrevemos as taxas de decaimento de $u(\cdot, t)$ e suas derivadas. Os resultados no caso de $1 - D$, isto é, para $u(\cdot, t)$ dada pela equação

$$u_t + f(u)_x = (a(u)u_x)_x, \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \tag{1.24}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \tag{1.25}$$

são derivados em detalhe, a partir de desigualdades de energia. Utilizamos estas estimativas, em seguida, para mostrar que, no caso $p = 1$, as soluções de (1.24), (1.25) são bem aproximadas ao $t \to +\infty$ pelas soluções $v(\cdot, t)$ da equação

$$v_t + f^{'}(0)v_x + f^{''}(0)vv_x = a(0)v_{xx} \tag{1.26}$$

$$v(x, 0) = u_0(x), \tag{1.27}$$

dita Equação de Burgers, tendo-se

$$t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \to 0 \quad ao\ t \to +\infty \tag{1.28}$$

para cada $1 \leq r \leq \infty$, uniformemente em r. Este resultado fornece várias propriedades importantes das soluções de (1.24), (1.25), que são discutidas no Capítulo 5. No caso $1 < p \leq 2$, os resultados são mais fáceis de serem descritos: tem-se simplesmente

$$t^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \to 0 \quad ao\ t \to +\infty \tag{1.29}$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r.

Finalmente, mostremos que, para $n \geq 2$ dimensões, as soluções de (1.20), (1.21), são bem aproximadas, no caso $p = 1$, pelas soluções $v(\cdot, t)$ da equação linear do calor

$$v_t + \mathbf{f}^{'}(0)\nabla v = div(A(0)\nabla v) \tag{1.30}$$

$$v(\mathbf{x}, 0) = u(\mathbf{x}, 0), \tag{1.31}$$

tendo-se neste caso

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad ao\ t \to +\infty \tag{1.32}$$

para cada $1 \leq r \leq \infty$, uniformemente em r. Este resultado é utilizado para a obtenção de propriedades interessantes do problema (1.20), (1.21). Quando $1 < p \leq 2$, obtemos novamente o resultado

$$t^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \to 0 \quad ao\ t \to +\infty \tag{1.33}$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r. Várias outras propriedades de interesse são também discutidas.

2 EQUAÇÃO LINEAR DO CALOR EM $\mathbb{R}^n$

2.1 Introdução

Neste capítulo, investigaremos diversas propriedades das soluções $u(\cdot,t)$ da equação do calor

$$u_t = div(A\nabla u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \tag{2.1}$$

correspondentes a estados iniciais, p-somáveis em $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}), \quad u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n), \tag{2.2}$$

para algum $1 \leq p < \infty$.

Aqui, div denota o operador divergente (com respeito às variáveis espaciais $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$), ∇u é o vetor gradiente (com relação a $\mathbf{x}$) de $u(\cdot,t)$, e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz real constante, simétrica e positiva definida. (Se A não fosse simétrica, poderíamos simplesmente substituí-la por sua parte simétrica $(A+A^T)/2$, sem alterar a equação). A equação (2.1) é o modelo básico que descreve a propagação de calor por condução num meio homogêneo não isotrópico (que ocupa o espaço $\mathbb{R}^n$ todo), onde A representa o tensor de difusividade do meio, e $u(\mathbf{x},t)$ é a temperatura no ponto $\mathbf{x}$ e instante de tempo t. Com efeito, podemos neste caso derivar (2.1) do seguinte modo: fixando uma região (arbitrária) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, com fronteira $\partial\Omega$ suave, a quantidade $Q(t)$ de energia térmica em Ω num dado instante t é dada por

$$Q(t) = \int_\Omega \rho c u(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}, \tag{2.3}$$

onde $\rho(\mathbf{x},t)$, $c(\mathbf{x},t)$, $u(\mathbf{x},t)$ denotam a densidade, calor específico e temperatura no ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ e instante t.

Considerando Δt pequeno, a variação de energia

$$Q(t+\Delta t) - Q(t) = \int_\Omega (\rho c u(\mathbf{x},t+\Delta t) - \rho c u(\mathbf{x},t))d\mathbf{x} \tag{2.4}$$

é devida à criação (ou perda) de calor em Ω, dada por um termo fonte $\Delta t S(\mathbf{x},t)$, mais o calor ganho (ou perdido) através da fronteira de Ω no intervalo de tempo $[t, t+\Delta t]$, medido pelo fluxo de calor $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ pela fronteira, ou seja,

$$Q(t+\Delta t) - Q(t) = \triangle t \int_\Omega S(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} - \triangle t \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x},t)\cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})d\sigma + o(\Delta t) \qquad (2.5)$$

onde $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ denota o vetor normal unitário exterior em $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, e $d\sigma$ é o elemento de área em $\partial\Omega$, e $o(\Delta t)/\Delta t \to 0$ ao $\Delta t \to 0$. Se o fluxo de calor pela fronteira de Ω for devido a efeitos de condução, podemos esperar descrevê-lo pela chamada Lei de Fourier,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},t) = -\mathsf{A}\nabla u \qquad (2.6)$$

onde $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz positiva definida, (chamada MATRIZ DE CONDUTIVIDADE TÉRMICA), que neste capítulo vamos supor constante.

Dividindo por Δt e tomando o limite ao $\Delta t \to 0$, obtemos, supondo ρ, c, u suaves, por (2.6),

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(\rho c u)d\mathbf{x} = Q'(t) &= \int_\Omega S(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})d\sigma && (2.7)\\ &= \int_\Omega S(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \langle \mathsf{A}\nabla u, \mathbf{n}\rangle d\sigma, && (2.8)\end{aligned}$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto interno em $\mathbb{R}^n$. Aplicando o teorema do divergente de Gauss, resulta

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(\rho c u)d\mathbf{x} = \int_\Omega S(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} + \int_\Omega div(\mathsf{A}\nabla u)d\mathbf{x}, \qquad (2.9)$$

e, como $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é arbitrário, isto é equivalente a se ter

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c u) = S(\mathbf{x},t) + div(\mathsf{A}\nabla u) \qquad (2.10)$$

para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Supondo ρ, c constantes, obtém-se então

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho c}S(\mathbf{x},t) + div(A\nabla u), \quad A = \mathsf{A}/\rho c \qquad (2.11)$$

onde $A = \mathsf{A}/\rho c$ é a MATRIZ DE DIFUSIVIDADE TÉRMICA. Assim, não havendo fontes (ou sumidouros) de calor, obtemos o modelo básico dado em (2.1) acima.

Como $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pode ser descontínua, a condição (2.2) é entendida aqui no sentido de se ter $u(\cdot,t) \to u_0$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ ao $t \searrow 0$, isto é,

$$\|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad ao \quad t \searrow 0. \tag{2.12}$$

Na seção 2.2 vamos mostrar que $u \in C^\infty(\ \mathbb{R}^n \times\ ]0,+\infty[\ )$ dada por

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \tag{2.13}$$

onde $\lambda = (\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n)^{\frac{1}{n}}$ denota a média geométrica dos autovalores de A, satisfaz (2.1), (2.12), tendo-se ademais $u(\cdot,t) \in C^0(\ [0,+\infty[\ , L^p(\mathbb{R}^n)\ )$, isto é,

$$\|u(\cdot,t) - u(\cdot,t_*)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad ao \quad t \to t_* \tag{2.14}$$

para cada $t_* \geq 0$ dado. Além disso, $u(\cdot,t)$ dada em (2.13) é a *única* solução de (2.1), (2.2) que satisfaz (2.14), conforme Teorema 2.3 a seguir. Esta será, portanto, a solução considerada neste trabalho.

Na seção 2.3, algumas propriedades básicas da solução (2.13) serão revisadas, para uso nos capítulos seguintes.

2.2 Representação explícita da solução

Primeiramente, vamos mostrar como obter a solução dada em (2.13) acima. Observando que

$$div(A\nabla u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u \right),$$

temos, tomando $\mathsf{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversível (constante) e definindo $U(\mathbf{y},t) := u(\mathsf{E}^{-1}\mathbf{y},t)$, obtemos, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}
div(A\nabla u) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}u(\mathbf{x},t)\right) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}U(\mathsf{E}\mathbf{x},t)\right) \\
&= \sum_{i,j,\ell=1}^{n} a_{ij}e_{\ell j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial U}{\partial y_\ell}(\mathsf{E}\mathbf{x},t)\right) \\
&= \sum_{i,j,\ell,m=1}^{n} a_{ij}e_{\ell j}e_{mi}\frac{\partial^2 U}{\partial y_\ell \partial y_m}(\mathsf{E}\mathbf{x},t) \\
&= \sum_{\ell,m=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} e_{mi}a_{ij}e_{\ell j}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial y_\ell y_m}(\mathsf{E}\mathbf{x},t) \\
&= \sum_{\ell,m=1}^{n} (\mathsf{E}A\mathsf{E}^T)_{ml}\frac{\partial^2 U}{\partial y_\ell \partial y_m}(\mathsf{E}\mathbf{x},t)
\end{aligned}$$

onde $e_{l,k}$ denota o elemento l,k da matriz E, e E^T é o transposto de E. Como A é real simétrica, existe $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que

$$Q^TAQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = diag(\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de A. Em particular, tomando $\mathsf{E} = Q^T$, obtemos

$$\begin{aligned}
div(A\nabla u) &= \sum_{\ell,m=1}^{n} (Q^TAQ)_{ml}\frac{\partial^2 U}{\partial y_\ell \partial y_m}(Q^T\mathbf{x},t) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell \frac{\partial^2 U}{\partial y_\ell^2}(Q^T\mathbf{x},t),
\end{aligned}$$

de modo que $U(\mathbf{y},t) := u(Q\mathbf{y},t)$ satisfaz

$$U_t = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell \frac{\partial^2 U}{\partial y_\ell^2}(\mathbf{y},t).$$

Introduzindo $V(\boldsymbol{\xi},t) := U(\sqrt{D}\boldsymbol{\xi},t)$, onde $\sqrt{D} = diag(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})$, segue que V satisfaz

$$V_t = \triangle_{\boldsymbol{\xi}} V(\boldsymbol{\xi},t).$$

Como é bem sabido, uma solução V para a equação acima é dada por

$$V(\boldsymbol{\xi},t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \boldsymbol{\xi}-\mathbf{z},\boldsymbol{\xi}-\mathbf{z}\rangle} V(\mathbf{z},0)d\mathbf{z}.$$

Para tal V, obtemos, como $U(\mathbf{y},t) = V(\sqrt{D^{-1}}\mathbf{y},t)$,

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{y},t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \sqrt{D^{-1}}\mathbf{y}-\mathbf{z},\sqrt{D^{-1}}\mathbf{y}-\mathbf{z}\rangle} V(\mathbf{z},0)d\mathbf{z} \\
&= \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \sqrt{D^{-1}}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\xi}),\sqrt{D^{-1}}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\xi})\rangle} V(\sqrt{D^{-1}}\boldsymbol{\xi},0)d\boldsymbol{\xi} \\
&= \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{y}-\boldsymbol{\xi},D^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\xi})\rangle} U(\boldsymbol{\xi},0)d\boldsymbol{\xi}
\end{aligned}$$

onde $\lambda = (\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n)^{\frac{1}{n}}$. Portanto, usando $u(\mathbf{x},t) = U(Q^T\mathbf{x},t)$, resulta

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle Q^T\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi},D^{-1}(Q^T\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\rangle} U(\boldsymbol{\xi},0)d\boldsymbol{\xi} \\
&= \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle Q^T(\mathbf{x}-\mathbf{y}),D^{-1}Q^T(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} U(Q^T\mathbf{y},0)d\mathbf{y} \\
&= \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},QD^{-1}Q^T(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y} \\
&= \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} u_0(\mathbf{y})d\mathbf{y},
\end{aligned}$$

visto que $QD^{-1}Q^T = A^{-1}$. Isto mostra que $u(\cdot,t)$ dada por

$$u(\cdot,t) = K(\cdot,t) * u_0, \tag{2.15}$$

onde $*$ denota o produto convolutivo em $\mathbb{R}^n$ e $K(\cdot,t)$ é o núcleo (heat kernel) dado por

$$K(\boldsymbol{\xi},t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{4t}\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle}, \tag{2.16}$$

é a solução da equação (2.1). Observamos que, por (B.1), Apêndice B, temos $K(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para cada $t > 0$, com

$$\|K(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} K(\boldsymbol{\xi},t)d\boldsymbol{\xi} = 1. \tag{2.17}$$

Em particular, temos, pela Desigualdade de Young (ver (A.8), Apêndice A), que $u(\cdot,t) = K(\cdot,t) * u_0$ pertence a $L^p(\mathbb{R}^n)$ para cada $t > 0$, tendo-se

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \|K(\cdot,t) * u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|K(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.18}$$

para todo $t > 0$. Em particular, $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ decresce com t: dados $t \geq t_* \geq 0$, temos $u(\cdot,t) = K(\cdot,t) * u_0 = K(\cdot,t-t_*) * u(\cdot,t_*)$, e assim, pela Desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|K(\cdot,t-t_*)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|u(\cdot,t_*)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|u(\cdot,t_*)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad t \geq t_*.
\end{aligned}$$

Por derivação direta é imediato ver que $u(\cdot,t) = K(\cdot,t) * u_0$ é infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}^n \times\ ]0,\infty[$ e satisfaz a equação (2.1) para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Além disso, como mostra o resultado abaixo, a condição (2.12) fica também satisfeita.

Teorema 2.1. *Sendo $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, e $u(\cdot,t) = K(\cdot,t) * u_0$, tem-se $u(\cdot,t) \to u_0$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ ao $t \searrow 0$, isto é,*

$$\|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \textit{ao } t \searrow 0.$$

Demonstração: Consideremos inicialmente o caso $p = 1$. Dado $t > 0$, temos, por (B.1) e o Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\leq \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} |u_0(\mathbf{y}) - u_0(\mathbf{x})| d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} |u_0(\mathbf{y}) - u_0(\mathbf{x})| d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\
&= \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} |u_0(\boldsymbol{\eta}) - u_0(\boldsymbol{\eta} + 2\sqrt{t}\boldsymbol{\xi})| d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\eta} \\
&= \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(\boldsymbol{\eta}) - u_0(\boldsymbol{\eta} + 2\sqrt{t}\boldsymbol{\xi})| d\boldsymbol{\eta} \right) d\boldsymbol{\xi}
\end{aligned}$$

Tomando, então, $\epsilon > 0$, seja $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$\frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\boldsymbol{\xi}| \geq R} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} d\boldsymbol{\xi} \leq \epsilon,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\leq \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\boldsymbol{\xi}| \geq R} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(\boldsymbol{\eta}) - u_0(\boldsymbol{\eta} + 2\sqrt{t}\boldsymbol{\xi})| d\boldsymbol{\eta} \right) d\boldsymbol{\xi} \\
&+ \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\boldsymbol{\xi}| \leq R} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(\boldsymbol{\eta}) - u_0(\boldsymbol{\eta} + 2\sqrt{t}\boldsymbol{\xi})| d\boldsymbol{\eta} \right) d\boldsymbol{\xi} \\
&\leq \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\boldsymbol{\xi}| \geq R} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(|u_0(\boldsymbol{\eta})| + |u_0(\boldsymbol{\eta} + 2\sqrt{t}\boldsymbol{\xi})| \right) d\boldsymbol{\eta} \right) d\boldsymbol{\xi} \\
&+ \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\boldsymbol{\xi}| \leq R} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(\boldsymbol{\eta}) - u_0(\boldsymbol{\eta} + 2\sqrt{t}\boldsymbol{\xi})| d\boldsymbol{\eta} \right) d\boldsymbol{\xi} \\
&= \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} 2\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int_{|\boldsymbol{\xi}| \geq R} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} d\boldsymbol{\xi} \\
&+ \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\boldsymbol{\xi}| \leq R} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(\boldsymbol{\eta}) - u_0(\boldsymbol{\eta} + 2\sqrt{t}\boldsymbol{\xi})| d\boldsymbol{\eta} \right) d\boldsymbol{\xi} \\
&\leq 2\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \epsilon \\
&+ \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\boldsymbol{\xi}| \leq R} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(\boldsymbol{\eta}) - u_0(\boldsymbol{\eta} + 2\sqrt{t}\boldsymbol{\xi})| d\boldsymbol{\eta} \right) d\boldsymbol{\xi}
\end{aligned}$$

Como $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(\boldsymbol{\eta}) - u_0(\boldsymbol{\eta} + \mathbf{h})| d\boldsymbol{\eta} \leq \epsilon$$

para qualquer $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ com $|\mathbf{h}| \leq \delta$, ver e.g.([Royden, 1968], [Rudin, 1986]), de modo que, se $t \leq \delta^2/(4R^2)$, obteremos

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\leq 2\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\epsilon + \epsilon \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\boldsymbol{\xi}| \leq R} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} d\boldsymbol{\xi} \\
&\leq (2\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + 1)\epsilon
\end{aligned}$$

o que conclui o argumento quando $p = 1$.

Considerando agora $1 < p < \infty$, temos

$$\|u(\cdot,t) - u_0\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{pn}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} |u_0(\mathbf{y}) - u_0(\mathbf{x})| d\mathbf{y} \right)^p d\mathbf{x}$$

$$\leq \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{pn}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} d\mathbf{y} \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} |u_0(\mathbf{y}) - u_0(\mathbf{x})|^p d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}$$

$$= \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} |u_0(\mathbf{y}) - u_0(\mathbf{x})|^p d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x},$$

usando a desigualdade de Hölder (A.5), onde $1/p + 1/q = 1$. Assim,

$$\|u(\cdot,t) - u_0\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(\boldsymbol{\eta}) - u_0(\boldsymbol{\eta} + 2\sqrt{t}\boldsymbol{\xi})|^p d\boldsymbol{\eta} \right) d\boldsymbol{\xi}$$

e então, para $\epsilon > 0$ qualquer, tomando $R >> 1$ como anteriormente, resulta

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t) - u_0\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\boldsymbol{\xi}|\geq R} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_0(\boldsymbol{\eta})| + |u_0(\boldsymbol{\eta} + 2\sqrt{t}\boldsymbol{\xi})| \Big)^p d\boldsymbol{\eta} \right) d\boldsymbol{\xi} \\
&+ \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\boldsymbol{\xi}|\leq R} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(\boldsymbol{\eta}) - u_0(\boldsymbol{\eta} + 2\sqrt{t}\boldsymbol{\xi})|^p d\boldsymbol{\eta} \right) d\boldsymbol{\xi} \\
&\leq \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} 2^p \|u_0\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \int_{|\boldsymbol{\xi}|\geq R} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} d\boldsymbol{\xi} \\
&+ \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\boldsymbol{\xi}|\leq R} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(\boldsymbol{\eta}) - u_0(\boldsymbol{\eta} + 2\sqrt{t}\boldsymbol{\xi})|^p d\boldsymbol{\eta} \right) d\boldsymbol{\xi} \\
&\leq 2^p \|u_0\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \epsilon \\
&+ \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\boldsymbol{\xi}|\leq R} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(\boldsymbol{\eta}) - u_0(\boldsymbol{\eta} + 2\sqrt{t}\boldsymbol{\xi})|^p d\boldsymbol{\eta} \right) d\boldsymbol{\xi}.
\end{aligned}$$

Como $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(\boldsymbol{\eta}) - u_0(\boldsymbol{\eta} + \mathbf{h})|^p d\boldsymbol{\eta} \leq \epsilon$$

para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ com $|\mathbf{h}| \leq \delta$, de modo que, se $t < \delta^2/(4R^2)$, teremos

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t) - u_0\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq 2^p \|u_0\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \epsilon + \epsilon \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} d\boldsymbol{\xi} \\
&= \left(2^p \|u_0\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + 1 \right) \epsilon,
\end{aligned}$$

concluindo a prova do Teorema 2.1. □

Assim, definindo

$$u(\cdot,t) = \begin{cases} K(\cdot,t) * u_0, & t > 0 \\ u_0, & t = 0, \end{cases} \tag{2.19}$$

o resultado acima mostra que $u(\cdot,t) \to u(\cdot,0)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ ao $t \searrow 0$. Mostraremos agora que, também para $t_* > 0$ dado qualquer, temos $u(\cdot,t) \to u(\cdot,t_*)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ ao $t \to t_*$.

Teorema 2.2. *Sendo $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, e $u(\cdot,t) = K(\cdot,t) * u_0$, tem-se, para cada $t_* > 0$, $u(\cdot,t) \to u(\cdot,t_*)$ ao $t \to t_*$, isto é,*

$$\|u(\cdot,t) - u(\cdot,t_*)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{ao } t \to t_*. \tag{2.20}$$

Demonstração: Dado $t_* > 0$, temos, para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \to \frac{1}{(4\pi\lambda t_*)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t_*}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

ao $t \to t_*$, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue. Assim,

$$\|u(\cdot,t) - u(\cdot,t_*)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \textit{ao } t \to t_* \tag{2.21}$$

pois

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \frac{1}{(4\pi\lambda t_*)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t_*}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right|^p \\ \leq \; & \frac{2^{p+1}}{(2\pi\lambda t_*)^{\frac{pn}{2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{8t_*}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} |u_0(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \right)^p \\ \leq \; & \frac{2^{p+1+\frac{np}{q}}}{(2\pi\lambda t_*)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{8t_*}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} |u_0(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \equiv \varphi_*(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

onde $1/p + 1/q = 1$. Como $\varphi_* \in L^1(\mathbb{R}^n)$, obtemos (2.20) aplicando novamente o Teorema da convergência dominada de Lebesgue. □

Portanto, pelos teoremas 2.1 e 2.2 acima, temos que $u(\cdot,t)$ dada em (2.19) satisfaz

$$u(\cdot,t) \in C^0([0,+\infty[, L^p(\mathbb{R}^n)). \tag{2.22}$$

Mostraremos agora que esta é a única solução de (2.1), (2.2) com esta propriedade.

Teorema 2.3 (Unicidade da solução). *Seja $u(\cdot,t)$ solução em $\mathbb{R}^n \times]0,T[$ de (2.1), (2.2), tal que $u(\cdot,t) \in C^0([0,T[, L^p(\mathbb{R}^n))$. Então*

$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, A^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\rangle} u(\boldsymbol{y},0) d\boldsymbol{y}, \quad \forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ 0 < t < T. \tag{2.23}$$

Demonstração: Seja $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{t} \in]0,T[$ dados, fixos no que segue e $u(\mathbf{x},t)$ em $C^0([0,T[\ , L^p(\mathbb{R}^n))$, solução de (2.1), (2.2), mostremos que

$$u(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{t}) = \int_{\mathbb{R}^n} K(\hat{\boldsymbol{x}} - \mathbf{x}, t) u_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{2.24}$$

onde

$$K(\boldsymbol{\xi},t)=\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{4t}\langle\boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle}. \tag{2.25}$$

Considere $v:\mathbb{R}^n\times\,]-\infty,\hat{t}[\,\to\mathbb{R}$ dada por

$$v(\mathbf{x},t)=K(\hat{\boldsymbol{x}}-\mathbf{x},\hat{t}-t). \tag{2.26}$$

Em particular

$$v_t=-div(A\nabla v),\quad\forall\,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ t<\hat{t}$$

sendo que $v\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\,]-\infty,\hat{t}[\,)$.

Para cada $R\geq 1$, seja $\zeta_R\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$(i)\zeta_R(\mathbf{x})=1\quad\forall\,|\mathbf{x}|\leq R$

$(ii)\zeta_R(\mathbf{x})=0\quad\forall\,|\mathbf{x}|\geq R+1$

$(iii)0\leq\zeta_R(\mathbf{x})\leq 1=0\quad\forall\,R\leq|\mathbf{x}|\leq R+1$

$(iv)|\frac{\partial\zeta_R}{\partial x_j}(\mathbf{x})|\leq M\quad\forall\,\mathbf{x}\leq\mathbb{R}^n,\ \forall\,i\leq j\leq n$

$(v)|\frac{\partial\zeta_R}{\partial x_ix_j}(\mathbf{x})|\leq M\quad\forall\,\mathbf{x}\leq\mathbb{R}^n,\ \forall\,1\leq i,j\leq n$

com $M>0$ independente de R.

Como $v_t=-div(A\nabla v)$ e $u_t=div(A\nabla u)$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $t\in\,]0,\hat{t}[$, obtemos

$$(u\zeta_Rv)_t-div(\zeta_RvA\nabla u-uA\nabla(\zeta_Rv))=uvdiv(A\nabla\zeta_R)+2u\langle A\nabla v,\nabla\zeta_R\rangle. \tag{2.27}$$

Tomando $\epsilon\in\,]0,\frac{\hat{t}}{2}[$, e integrando (2.27) em $\mathbf{x}\in B_{R+1}(0)$, $t\in[\epsilon,\hat{t}-\epsilon]$, obtemos

$$\int_{|\mathbf{x}|\leq R+1}\int_\epsilon^{\hat{t}-\epsilon}(u\zeta_Rv)_tdtd\mathbf{x}=\int_{|\mathbf{x}|\leq R+1}\int_\epsilon^{\hat{t}-\epsilon}div(\zeta_RvA\nabla u-uA\nabla(\zeta_Rv))dtd\mathbf{x}+$$
$$+\int_{|\mathbf{x}|\leq R+1}\int_\epsilon^{\hat{t}-\epsilon}uvdiv(A\nabla\zeta_R)dtd\mathbf{x}+\int_{|\mathbf{x}|\leq R+1}\int_\epsilon^{\hat{t}-\epsilon}2u\langle A\nabla v,\nabla\zeta_R\rangle dtd\mathbf{x}$$

visto que $\zeta_R(\mathbf{x})=\frac{\partial\zeta_R}{\partial x_j}(\mathbf{x})=0$ se $|\mathbf{x}|\geq R+1$, como tem-se também $\frac{\partial\zeta_R}{\partial x_j}(\mathbf{x})=\frac{\partial\zeta_R}{\partial x_ix_j}(\mathbf{x})=0$ se $|\mathbf{x}|\leq R$. Então, por Fubini

$$\int_{|\mathbf{x}|\leq R+1}\int_\epsilon^{\hat{t}-\epsilon}(u\zeta_Rv)_tdtd\mathbf{x}=\int_\epsilon^{\hat{t}-\epsilon}\int_{|\mathbf{x}|\leq R+1}div(\zeta_RvA\nabla u-uA\nabla(\zeta_Rv))d\mathbf{x}dt+$$
$$+\int_\epsilon^{\hat{t}-\epsilon}\int_{R\leq|\mathbf{x}|\leq R+1}uvdiv(A\nabla\zeta_R)d\mathbf{x}dt+2\int_\epsilon^{\hat{t}-\epsilon}\int_{R\leq|\mathbf{x}|\leq R+1}u\langle A\nabla v,\nabla\zeta_R\rangle d\mathbf{x}dt.$$

Agora,

$$\int_{|\mathbf{x}|\leq R+1}\int_{\epsilon}^{\hat{t}-\epsilon}(u\zeta_R v)_t dt d\mathbf{x} = \int_{|\mathbf{x}|\leq R+1} u(\mathbf{x},\hat{t}-\epsilon)\zeta_R(x)v(\mathbf{x},\hat{t}-\epsilon)d\mathbf{x} - $$
$$- \int_{|\mathbf{x}|\leq R+1} u(\mathbf{x},\epsilon)\zeta_R(x)v(\mathbf{x},\epsilon)d\mathbf{x}.$$

Pelo teorema do Divergente, e utilizando os argumentos acima,

$$\int_{\epsilon}^{\hat{t}-\epsilon}\int_{|\mathbf{x}|\leq R+1} div(\zeta_R v A\nabla u - uA\nabla(\zeta_R v))d\mathbf{x}dt =$$
$$= \int_{\epsilon}^{\hat{t}-\epsilon}\int_{|\mathbf{x}|=R+1} (\zeta_R v A\nabla u - uA\nabla(\zeta_R v))\mathbf{n}(\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{x})dt = 0.$$

Ao $R \to +\infty$,

$$\int_{\epsilon}^{\hat{t}-\epsilon}\int_{R\leq|\mathbf{x}|\leq R+1} uv div(A\nabla\zeta_R)d\mathbf{x}dt = 0,$$

e também

$$2\int_{\epsilon}^{\hat{t}-\epsilon}\int_{R\leq|\mathbf{x}|\leq R+1} u\langle A\nabla v, \nabla\zeta_R\rangle d\mathbf{x}dt = 0.$$

Assim, obtemos

$$\int_{|\mathbf{x}|\leq R+1} u(\mathbf{x},\hat{t}-\epsilon)\zeta_R(\mathbf{x})v(\mathbf{x},\hat{t}-\epsilon)d\mathbf{x} - \int_{|\mathbf{x}|\leq R+1} u(\mathbf{x},\epsilon)\zeta_R(\mathbf{x})v(\mathbf{x},\epsilon)d\mathbf{x} = 0.$$

Fazendo $R \to +\infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},\hat{t}-\epsilon)v(\mathbf{x},\hat{t}-\epsilon)d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},\epsilon)v(\mathbf{x},\epsilon)d\mathbf{x} = 0$$

pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue.

E então, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},\hat{t}-\epsilon)K(\hat{\boldsymbol{x}}-\mathbf{x},\epsilon)d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},\epsilon)K(\hat{\boldsymbol{x}}-\mathbf{x},\hat{t}-\epsilon)d\mathbf{x}$$

visto que, $v(\mathbf{x},t)$ é dado por (2.26).

Fazendo $\epsilon \to 0^+$,

$$u(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{t}) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\mathbf{x})K(\hat{\boldsymbol{x}}-\mathbf{x},\hat{t})d\mathbf{x} \tag{2.28}$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Mais geralmente, no caso da equação

$$u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = div(A\nabla u) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0, \tag{2.29}$$

com $u(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, existe uma única solução $u(\cdot, t) \in C^0([0, +\infty[, L^p(\mathbb{R}^n))$, que é dada por

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{a}t-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a}t-\mathbf{y})\rangle} u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

visto que (2.29) é transformada em (2.1) pela mudança de variável $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{a}t$.

Como se pode ver de (2.15), (2.16), $u(\cdot, t) = K(\cdot, t) * u_0$ tende a se espalhar (difusão) em $\mathbb{R}^n$ e decair à medida que t cresce. Esse comportamento, que será examinado em detalhe nas seções seguintes, é ilustrado na figura a seguir.

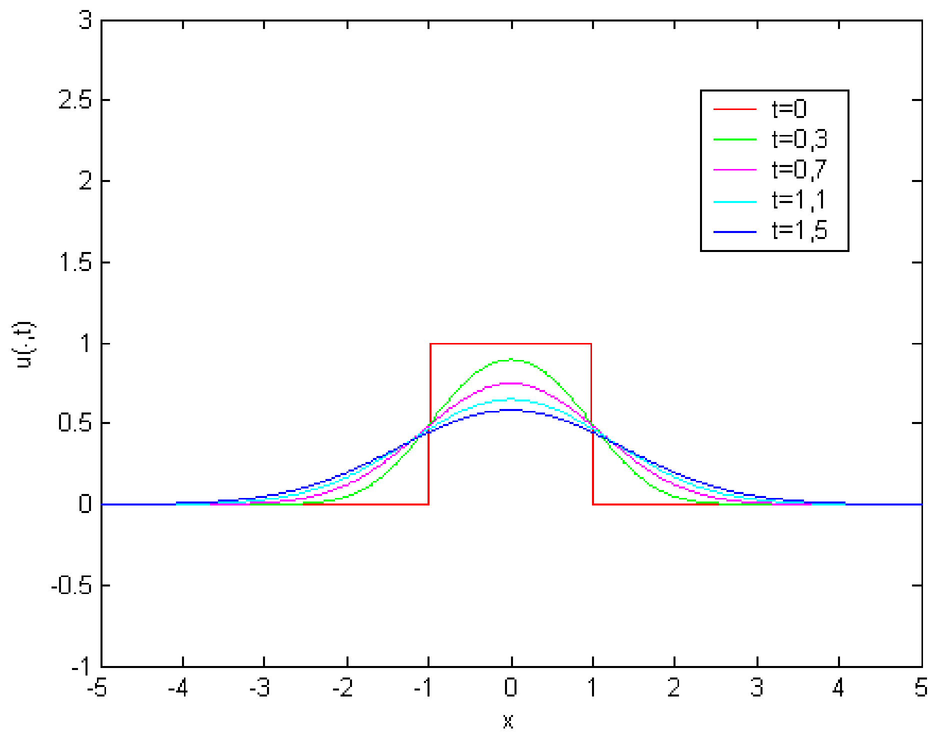

Figura 2.1: Gráficos da solução $u(\cdot, t)$ para alguns valores de t da equação $u_t = u_{xx}$ correspondente ao perfil inicial $u_0 = 1$ *para* $-1 \leq x \leq 1$ *e* $u_0 = 0$ *para* $x < -1$ *ou* $x > 1$.

2.3 Algumas propriedades básicas

Nesta seção, vamos revisar algumas propriedades básicas da solução $u(\cdot,t)$ dada em (2.19), que serão úteis nos capítulos seguintes.

Teorema 2.4 (Princípio do Máximo). *Sendo $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, tem-se $u(\cdot,t)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $t>0$, e*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\ t>0. \tag{2.30}$$

Demonstração: Basta observar

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x},t)| = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\left|\int_{R^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right| \\
&\le \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{R^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} |u(\mathbf{y},0)|\ d\mathbf{y} \\
&\le \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{R^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} d\mathbf{y}\|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

usando (B.1). □

Teorema 2.5 (Monotonicidade de $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$). *Sendo $u(\cdot,t)$ dada por (2.19), onde $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, tem-se*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\ t>0. \tag{2.31}$$

Demonstração: Já mostremos esta propriedade acima, como consequência da Desigualdade de Young. Por conveniência, vamos a seguir mostrar este resultado diretamente. Começando com o caso $p=1$, temos, pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x},t)|d\mathbf{x} \ \le \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|\ d\mathbf{y}\right)d\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}d\mathbf{x}\right)|u(\mathbf{y},0)|\ d\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Introduzindo $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}-\mathbf{y}$ e usando (B.1), obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle}d\boldsymbol{\xi}\right)|u(\mathbf{y},0)|\ d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n}|u(\mathbf{y},0)|\ d\mathbf{y}$$

isto é,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\ t>0. \tag{2.32}$$

Considerando, agora $1<p<\infty$, temos

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x},t)|^p d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{R^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right|^p d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|d\mathbf{y}\right)^p d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Tomando $q\in\,]1,+\infty[$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, tem-se pela desigualdade de Hölder e por (B.1),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|d\mathbf{y} &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(e^{-\frac{1}{4tq}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}\right)\left(e^{-\frac{1}{4tp}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}\right)|u(\mathbf{y},0)|\ d\mathbf{y}\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}d\mathbf{y}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|^p\ d\mathbf{y}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= (4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|^p\ d\mathbf{y}\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema de Fubini e (B.1), obtemos

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left((4\pi\lambda t)^{\frac{np}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|^p\ d\mathbf{y}\right)d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|^p\ d\mathbf{y}\right)d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left[\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}d\mathbf{x}\right)|u(\mathbf{y},0)|^p\ d\mathbf{y}\right]^{\frac{1}{p}}\\
&= \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\ t>0.$$

□

Observe que, pelo resultado acima, se tomarmos $t_0>0$ qualquer, teremos pelo mesmo argumento que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\ t\geq t_0,$$

de modo que $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,s)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ sempre que $0 \leq s \leq t$. Assim, segue de (2.31) acima que $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ é função monotonamente decrescente da variável t.

Observamos também da representação explícita dada em (2.15) que, caso se tomasse $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $u_0 \geq \gamma$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$ (ou $u_0 \leq \Gamma$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$), teríamos $u(\cdot,t) \geq \gamma$ para todo $t > 0$ (ou $u(\cdot,t) \leq \Gamma$, se $u_0 \leq \Gamma$), conforme mostramos abaixo.

Teorema 2.6. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), (2.2), tem-se*

$$u(\boldsymbol{x},0) \geq \gamma \textit{ para quase todo } x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow u(\boldsymbol{x},t) \geq \gamma \quad \forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \tag{2.33}$$

$$u(\boldsymbol{x},0) \leq \Gamma \textit{ para quase todo } x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow u(\boldsymbol{x},t) \leq \Gamma \quad \forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \tag{2.34}$$

Demonstração: Supondo $u(\cdot,0) \geq \gamma$, tem-se por (2.13)

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y} \\ &\geq \gamma \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Portanto, por (B.1), temos que

$$u(\mathbf{x},t) \geq \gamma \quad \forall\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Analogamente, demonstra-se (2.34). $\square$

No caso de interesse aqui, temos $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, e assim (2.33), (2.34) só podem ser aplicados para $\gamma = \Gamma = 0$. Este resultado pode ser generalizado do seguinte modo.

Teorema 2.7 (Monotonicidade do Operador Solução). *Sendo $u(\cdot,t)$, $v(\cdot,t)$ soluções da equação(2.1), com $u(\cdot,0)$, $v(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$u(\cdot,0) \leq v(\cdot,0) \Rightarrow u(\cdot,t) \leq v(\cdot,t) \quad \forall\ t > 0. \tag{2.35}$$

Demonstração: Dado $t > 0$, tem-se, por (2.13) e por (B.1)

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y} \\ &\leq \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} v(\mathbf{y},0)d\mathbf{y} \\ &= v(\mathbf{x},t) \end{aligned}$$

para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, isto é,

$$u(\mathbf{x},t) \leq v(\mathbf{x},t) \quad \forall\ t > 0 \tag{2.36}$$

como afirmado. □

Para finalizar esta seção, citamos ainda o seguinte resultado referente ao caso $p = 1$, que será importante posteriormente. Quando $u(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a quantidade m definida por $m = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},0)d\mathbf{x}$, chamada *massa*, é importante para a descrição do comportamento assintótico ($t \to +\infty$) de $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ e outras normas. É importante observar que a massa de $u(\cdot,t)$ é invariante em t, conforme mostrado a seguir.

Teorema 2.8 (Conservação da Massa). *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), com $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tem-se*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x} \quad \forall\ t > 0. \tag{2.37}$$

Demonstração: Dado $t > 0$, temos por (2.13) e pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right)d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} d\mathbf{x}\right) u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y} \end{aligned}$$

em vista de (B.1). □

No capítulo seguinte, vamos mostrar que as normas de $u(\cdot,t)$ e suas derivadas decaem (ao $t \to \infty$) segundo certas taxas, que serão obtidas a partir da representação explícita (2.13).

3 DECAIMENTO DE $u(\cdot, t)$

3.1 Introdução

Neste capítulo, vamos examinar a velocidade do decaimento da solução $u(\cdot, t)$ dada em (2.19) em diversas normas de interesse, bem como suas derivadas.

Na seção 3.2, iniciamos com o caso $r = 1$ (isto é, $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R}^n)$), obtendo

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C(r, \lambda, n) \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)} \quad \forall\, t > 0, \tag{3.1}$$

para cada $1 \leq r \leq \infty$, onde $C(r, \lambda, n)$ denota uma constante cujo valor depende de r e dos parâmetros λ (média geométrica dos autovalores de A, ver (1.4)) e n (dimensão espacial).

Aqui $\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$ denota a norma

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x}, t)|^r d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{r}} \tag{3.2}$$

se $1 \leq r < \infty$, e

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x}, t)| \tag{3.3}$$

se $r = \infty$. De (3.1), vemos que $\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$ decai a zero se $r > 1$, enquanto, para $r = 1$, temos apenas

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, t > 0$$

com

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x}, t)| d\mathbf{x} \geq \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right| = |m|$$

onde m é a *massa* (invariante em t, ver (2.37)) de $u(\cdot, t)$; portanto, se $m \neq 0$ temos que $\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ decresce a um limite não nulo, e cujo valor corresponde a $|m|$, conforme será mostrado no Capítulo 4.

Na seção 3.2, é também examinado o decaimento das derivadas (com relação às variáveis espaciais $x_1, \cdots, x_n$) de $u(\cdot,t)$. Aqui, $D^\ell u(\cdot,t)$ denota coletivamente as derivadas de ordem ℓ de $u(\cdot,t)$, de modo que, para cada $r \geq 1$, $\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$ denota as quantidades

$$\|D^1 u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_j}(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \tag{3.4}$$

$$\|D^2 u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^{n} \|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \tag{3.5}$$

e assim sucessivamente. Obtém-se, para estas normas, a estrutura geral

$$\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C_\ell(r,\lambda,n)\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)-\frac{\ell}{2}} \tag{3.6}$$

para todo $t > 0$ e $\ell = 1, 2, 3, ...$, onde $C_\ell(r,\lambda,n)$ é uma constante que depende de ℓ, r, λ, n.

Finalmente, na seção 3.3, consideremos o caso $u(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 < p < \infty$, obtendo as estimativas

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C_0(r,p,\lambda,n)\|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)} \tag{3.7}$$

e

$$\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C_\ell(r,p,\lambda,n)\|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)-\frac{\ell}{2}} \tag{3.8}$$

para todo $t > 0$ e $\ell = 1, 2, 3, ...$, onde as constantes indicadas dependem dos parâmetros r, p, λ, n.

3.2 Decaimento de $u(\cdot,t)$, caso $p = 1$

Nesta seção, consideraremos a solução $u(\cdot,t) = K(\cdot,t) * u_0$ dada em (2.19). Supondo o estado inicial u_0 em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.1. *Sendo $u(\cdot,t)$ a solução dada em (2.19), para cada $1 \leq r \leq \infty$,*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C(r,\lambda,n)\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\ t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)} \quad \forall\ t > 0 \tag{3.9}$$

onde $C(\infty,\lambda,n) = \frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}$ se $r = \infty$, e $C(r,\lambda,n) = \frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)}}$ quando $1 \leq r < \infty$.

Demonstração: Para $r = 1$: obtemos a desigualdade (2.32), a qual já foi provada anteriormente.

Para $r = \infty$: dado $t > 0$, tem-se por (2.13) e (B.1),

$$\begin{aligned}
|u(\mathbf{x},t)| &\leq \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{R^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|\, d\mathbf{y} \\
&\leq \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{R^n} |u(\mathbf{y},0)|\, d\mathbf{y} \\
&= C(\infty,\lambda,n)\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}t^{-\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, de modo que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(\infty,\lambda,n)\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\; t^{-\frac{n}{2}} \quad \forall\, t > 0 \tag{3.10}$$

onde $C(\infty,\lambda,n) = \frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}$.

Para $1 < r < \infty$: usando a desigualdade de Interpolação (A.9), (2.32) e (3.10)

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} &\leq \|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{r}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|u(\cdot,t)\|^{1-\frac{1}{r}}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \left(\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\; t^{-\frac{n}{2}}\right)^{1-\frac{1}{r}} \\
&= \frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)}}\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\; t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)}
\end{aligned}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Portanto, para cada $t > 0$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C(r,\lambda,n)\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\; t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)}$$

onde $C(r,\lambda,n) = \frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)}}$, como afirmado. $\square$

A seguir, obtemos estimativas para as derivadas espaciais da solução $u(\cdot,t) = K(\cdot,t) * u_0$, neste caso $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.2. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), (2.19) tem-se $D^\ell u(\cdot,t) \in L^r(\mathbb{R}^n)$ para todo $\ell \geq 1$, e*

$$\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C_\ell(r,\lambda,n)\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)-\frac{\ell}{2}} \quad \forall\, t > 0 \tag{3.11}$$

onde $C_\ell(r,\lambda,n)$ é uma constante que depende de r, λ, n.

Demonstração: Por (2.13), temos que $u(\cdot,t)$ é dada por

$$u(\mathbf{x},t)=\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{R^n}e^{-\frac{1}{4t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y} \tag{3.12}$$

para todo $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, de modo que, derivando (3.12), temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(-\frac{1}{4t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle\right)e^{-\frac{1}{4t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}$$

isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(-\frac{1}{2t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}\vec{e}_i\rangle\right)e^{-\frac{1}{4t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}.$$

e então, por (A.4),

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x},t)\right| &\le \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{2\sqrt{t}}|A^{-1}\vec{e}_i|e^{-\frac{1}{4t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|d\mathbf{y}\\ &\le \frac{|A^{-1}\vec{e}_i|}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\frac{\hat{C}}{t^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{1}{8t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|d\mathbf{y}\\ &\le \frac{\hat{C}|A^{-1}\vec{e}_i|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}t^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

para todo $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $t>0$, onde $\hat{C}=max\{s.exp(-s^2/8\hat{\lambda}):s>0\}$, $\hat{\lambda}=max\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$.
Portanto obtemos,

$$\|Du(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\le C_\infty(\lambda,n)\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}t^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\quad\forall\ t>0, \tag{3.13}$$

e também

$$\|Du(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\le C_1(\lambda,n)\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}t^{-\frac{1}{2}}\quad\forall\ t>0. \tag{3.14}$$

Usando a desigualdade de Interpolação (A.9), obtemos então,

$$\|Du(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\le C(r,\lambda,n)\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{2}}\quad\forall\ t>0, \tag{3.15}$$

para todo $1<r<\infty$.

Analogamente, no caso $\ell=2$, temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{x},t)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}-\frac{\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}\vec{e}_i\rangle}{2t}\right)e^{-\frac{1}{4t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}$$

$$=-\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\langle\vec{e}_j,A^{-1}\vec{e}_i\rangle}{2}-\left(\frac{\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}\vec{e}_i\rangle}{\sqrt{4t}}\right)^2\right)e^{-\frac{1}{4t}\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y},$$

de modo que

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x},t)\right| \leq \frac{t^{-1}}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} P_2\left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{\sqrt{t}}\right) e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|d\mathbf{y}$$

onde $P_2(\cdot)$ denota um certo polinômio de grau 2, de coeficientes não negativos. Por indução, obtemos para $\ell \geq 1$ qualquer,

$$\left|\frac{\partial^\ell u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t)\right| \leq \frac{t^{-\frac{\ell}{2}}}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} P_\ell\left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{\sqrt{t}}\right) e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|d\mathbf{y}$$

$\forall\ \ell \geq 1$ e $i_1, i_2, \ldots, i_\ell \in \{i, \ldots, n\}$, onde $P_\ell(z) = a_0^{[\ell]} + a_1^{[\ell]}z + \ldots + a_\ell^{[\ell]}z^\ell$ é um polinômio de grau ℓ, de coeficientes não negativos.
Sendo $\hat{C}_\ell := max\{P_\ell(s).exp(-s^2/8\hat{\lambda}) : s > 0\}$, $\hat{\lambda} = max\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, resulta

$$\left|\frac{\partial^\ell u}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t)\right| \leq \frac{\hat{C}_\ell t^{-\frac{\ell}{2}}}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{8t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|d\mathbf{y},$$

de modo que como no caso $\ell = 0$ tratado anteriormente, obtemos

$$\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_\ell(1,\lambda,n)\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}t^{-\frac{\ell}{2}} \quad \forall\ t > 0, \tag{3.16}$$

e também,

$$\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_\ell(\infty,\lambda,n)\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}t^{-\frac{n}{2}-\frac{\ell}{2}} \quad \forall\ t > 0, \tag{3.17}$$

e então, pela desigualdade de Interpolação (A.9),

$$\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C_\ell(r,\lambda,n)\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)-\frac{\ell}{2}} \quad \forall\ t > 0, \tag{3.18}$$

para todo $1 \leq r \leq \infty$, e para todo $\ell = 0, 1, \ldots$. □

3.3 Decaimento de $u(\cdot,t)$, caso $p > 1$

Teorema 3.3. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1) com $u(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, onde $1 < p < \infty$, tem-se*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C(r,p,\lambda,n)\|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\ t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)} \quad \forall\ t > 0 \tag{3.19}$$

e para cada $p \leq r \leq \infty$.

Demonstração: Dado $t > 0$, tem-se, por (2.13), (A.5) e (B.1),

$$\begin{aligned}
|u(\mathbf{x},t)| &\leq \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} |u(\mathbf{y},0)|\, d\mathbf{y} \\
&\leq \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2p}}} \left(\int_{R^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} |u(\mathbf{y},0)|^p\, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2p}}} \left(\int_{R^n} |u(\mathbf{y},0)|^p\, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, isto é,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2p}}} \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, t^{-\frac{n}{2p}}, \tag{3.20}$$

o que mostra (3.19) quando $r = \infty$. Finalmente, para $p < r < \infty$, temos, pela desigualdade de interpolação (A.9) e por (2.31),

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} &\leq \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{r}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{p}{r}} \\
&\leq \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{r}} (4\pi\lambda)^{-\frac{n}{2p}\left(1-\frac{p}{r}\right)} \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{p}{r}}\, t^{-\frac{n}{2p}\left(1-\frac{p}{r}\right)} \\
&= C(r,p,\lambda,n) \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}
\end{aligned}$$

onde $C(r,p,\lambda,n) = (4\pi\lambda)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}$. $\square$

Teorema 3.4. *Sendo $u(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$, então $u(\cdot,t)$ dada em (2.13) satisfaz*

$$\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C_\ell(r,p,\lambda,n) \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)-\frac{\ell}{2}} \quad \forall\ t > 0 \tag{3.21}$$

para cada $\ell \geq 1$ e $p \leq r \leq \infty$, onde $C_\ell(r,p,\lambda,n)$ denota uma constante que depende dos parâmetros indicados.

Demonstração: Como visto na prova do Teorema 3.2, temos, para cada $\ell \in \mathbb{N}$, $i_1, i_2, \cdot, i_\ell \in \{1, 2, \cdots, n\}$,

$$\left| \frac{\partial^\ell u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t) \right| \leq \frac{t^{-\frac{\ell}{2}}}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} P_\ell\left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{\sqrt{t}} \right) e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} |u_0(\mathbf{y})| d\mathbf{y}$$

para um certo polinômio $P_\ell(\cdot)$ (de grau ℓ) de coeficientes não negativos, de modo que

$$|D^\ell u(\mathbf{x},t)| \leq \frac{\hat{C}_\ell t^{-\frac{\ell}{2}}}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{8t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} |u_0(\mathbf{y})| d\mathbf{y}$$

para $\hat{C}_\ell > 0$ constante adequada. Pela desigualdade de Hölder e (B.1), segue que

$$|D^\ell u(\mathbf{x},t)|^p \leq \frac{\hat{C}_\ell^p 2^{\frac{np}{2}} t^{-\frac{p\ell}{2}}}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{8t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} |u_0(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, de onde

$$\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\hat{C}_\ell 2^{\frac{n}{2}}}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2p}}} \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2p}-\frac{\ell}{2}} \tag{3.22}$$

e

$$\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \hat{C}_\ell 2^n \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{\ell}{2}} \tag{3.23}$$

para todo $t > 0$. Interpolando (3.22), (3.23) para $p < r < \infty$, obtemos (3.21). $\square$

4 COMPORTAMENTO DE $t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$

4.1 Introdução

Neste capítulo, vamos detalhar alguns resultados descritos em [Hagstrom et al., 2005], que computam os limites

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.1}$$

para cada $1 \leq p \leq r \leq \infty$, onde $u(\cdot,t)$ é a solução do problema (2.1), (2.2) dada em (2.19).

Na Seção 4.2 examinamos o caso $p = 1$, obtendo, para $r = 1$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to |m|$$

onde m é a massa de $u(\cdot,t)$, i.e.,

$$m = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},0)d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} \quad \forall\ t > 0.$$

Quando $r = \infty$, tem-se

$$t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}$$

onde λ é a média geométrica dos autovalores da matriz A, dada em (1.4), isto é,

$$\lambda = (\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n)^{\frac{1}{n}},$$

e, para $1 < r < \infty$, obtém-se

$$t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \to \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{4\pi\lambda}{r}\right)^{\frac{n}{2r}}.$$

Finalmente, na seção 4.3, consideremos $1 < p < \infty$, obtendo

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 0 \tag{4.2}$$

para todo $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r.

4.2 Comportamento de $t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$, caso $p=1$

Nesta seção, consideremos o caso $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, e computaremos em detalhe os limites

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = \gamma_r \tag{4.3}$$

para cada $1 \leq r \leq \infty$.

4.2.1 Comportamento de $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$

Inicialmente, vamos considerar o caso de $u(\cdot,t)$ ter massa nula, isto é, $m = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} = 0$.

Teorema 4.1. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), (2.2), com $p=1$, e sendo $m = \int_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x} = 0$, tem-se*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad ao \quad t \to +\infty. \tag{4.4}$$

Demonstração: Por (2.13), temos que $u(\cdot,t)$ é dada por

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t>0$.

Como

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x},t)|\; d\mathbf{x} \;=\int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x},0)|\; d\mathbf{x} = 0 \quad \forall\, t>0$$

temos em particular

$$\liminf_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \geq 0. \tag{4.5}$$

Dado $\epsilon > 0$, tome $R > 0$ suficientemente grande, tal que

$$\int_{|\mathbf{y}|>R} |u(\mathbf{y},0)|d\mathbf{y} \leq \epsilon.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right| d\mathbf{x}\\
&\leq \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{|\mathbf{y}|\leq R} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right| d\mathbf{x}\\
&+ \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{|\mathbf{y}|>R} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}|u(\mathbf{y},0)|d\mathbf{y}\right) d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Fubini e (B.1), obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{|\mathbf{y}|\leq R} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right| d\mathbf{x} + \int_{|\mathbf{y}|>R}|u(\mathbf{y},0)|d\mathbf{y}$$

isto é,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{|\mathbf{y}|\leq R} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right| d\mathbf{x} + \epsilon.$$

Agora, escrevendo $\boldsymbol{\xi}=\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{4t}}$, obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon + \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{|\mathbf{y}|\leq R} e^{-\left\langle \boldsymbol{\xi}-\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}},A^{-1}\left(\boldsymbol{\xi}-\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}\right)\right\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right| d\boldsymbol{\xi}. \quad (4.6)$$

Observe que

$$\begin{aligned}
-\left\langle \boldsymbol{\xi}-\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}},A^{-1}\left(\boldsymbol{\xi}-\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}\right)\right\rangle &= -\left\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\right\rangle + \frac{2}{\sqrt{4t}}\left\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\mathbf{y}\right\rangle - \frac{1}{4t}\left\langle \mathbf{y},A^{-1}\mathbf{y}\right\rangle\\
&\leq -\left\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{t}}|\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\mathbf{y}\rangle|\\
&\leq -\left\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\right\rangle + \left(\left\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t}\left\langle \mathbf{y},A^{-1}\mathbf{y}\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq -\frac{1}{2}\left\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\right\rangle + \frac{1}{2t}\left\langle \mathbf{y},A^{-1}\mathbf{y}\right\rangle
\end{aligned}$$

pelas desigualdades (A.1) e (A.4).

Então, para todo $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{|\mathbf{y}|\leq R} e^{-\left\langle \boldsymbol{\xi}-\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}},A^{-1}\left(\boldsymbol{\xi}-\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}\right)\right\rangle}u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}\right| &\leq e^{-\frac{1}{2}\left\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\right\rangle}\int_{|\mathbf{y}|\leq R} e^{\frac{1}{2t}\langle \mathbf{y},A^{-1}\mathbf{y}\rangle}|u(\mathbf{y},0)|d\mathbf{y}\\
&\leq e^{-\frac{1}{2}\left\langle \boldsymbol{\xi},A^{-1}\boldsymbol{\xi}\right\rangle}C \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

onde

$$C=\int_{|\mathbf{y}|\leq R} e^{\langle \mathbf{y},A^{-1}\mathbf{y}\rangle}|u(\mathbf{y},0)|d\mathbf{y}$$

visto que $t = \frac{1}{2}$.

Do Teorema da convergência dominada de Lebesgue ao $t \to +\infty$, obtemos, apartir de (4.6)

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to+\infty} \|u(.,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\leq \epsilon + \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{|\mathbf{y}|\leq R} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} u(\mathbf{y},0) d\mathbf{y} \right| d\boldsymbol{\xi} \\
&\leq \epsilon + \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} \left| \int_{|\mathbf{y}|\leq R} u(\mathbf{y},0) d\mathbf{y} \right| d\boldsymbol{\xi} \\
&= \epsilon + \left| \int_{|\mathbf{y}|\leq R} u(\mathbf{y},0) d\mathbf{y} \right|
\end{aligned}$$

por (B.1).

Como $\int_{\mathbb{R}} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y} = 0$, tem-se que

$$\int_{|\mathbf{y}|\leq R} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y} = -\int_{|\mathbf{y}|>R} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y}$$

e assim,

$$\left| \int_{|\mathbf{y}|\leq R} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y} \right| = \left| \int_{|\mathbf{y}|>R} u(\mathbf{y},0)d\mathbf{y} \right| \leq \int_{|\mathbf{y}|>R} |u(\mathbf{y},0)| d\mathbf{y} \leq \epsilon.$$

Portanto

$$\limsup_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq 2\epsilon$$

de modo que $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq 2\epsilon$ para t suficientemente grande.

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$\limsup_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq 0, \tag{4.8}$$

e juntamente com (4.5), obtemos (4.4). □

Teorema 4.2. *Se $u(\cdot,t)$ e $\hat{u}(\cdot,t)$ são soluções de (2.1), (2.2), com $p = 1$, tendo a mesma massa, i.e.,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x}, \tag{4.9}$$

então

$$\|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{ao } t \to +\infty. \tag{4.10}$$

Demonstração: Sendo $w(\mathbf{x},t) = u(\mathbf{x},t) - \hat{u}(\mathbf{x},t)$, temos que w satisfaz

$$\begin{aligned} w_t &= div(A\nabla w), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ w(\cdot,0) &= u(\cdot,0) - \hat{u}(\cdot,0)\ \in L^1(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

com massa nula

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(\mathbf{x},0)d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},0)d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\mathbf{x},0)d\mathbf{x} = 0,$$

pelo Teorema anterior segue então

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad ao\ t \to +\infty$$

ou seja

$$\|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad ao\ t \to +\infty,$$

conforme afirmado. □

Teorema 4.3. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (2.1), (2.2), com $p = 1$, tem-se*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to |m| \quad ao \quad t \to +\infty, \tag{4.11}$$

onde m é dada por

$$m = \int_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} \quad \forall\ t > 0.$$

Demonstração: Tome $\hat{u}(\cdot,t)$ dada por

$$\begin{aligned} \hat{u}_t &= div(A\nabla \hat{u}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ \hat{u}(\mathbf{x},0) &= \hat{u}_0(\mathbf{x}), \quad \hat{u}_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

com $\hat{u}_0(\mathbf{x})$ dada por

$$\hat{u}_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{m}{v_n}, & |\mathbf{x}| \leq 1 \\ 0, & |\mathbf{x}| > 1 \end{cases}$$

onde $v_n = \int_{|\mathbf{x}|\leq 1} d\mathbf{x}$ tq $v_n =$ volume de $B_1(0)$.

Seja $\hat{u}(\mathbf{x},t)$ solução de (2.1) e (2.2) dada por

$$\begin{aligned}\hat{u}(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}\hat{u}_0(\mathbf{y})d\mathbf{y} \\ &= \frac{m}{v_n}\frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{|\mathbf{y}|\leq 1} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}d\mathbf{y} \quad \forall\, \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ t>0.\end{aligned}$$

Observe que, por (2.33) e (2.34)

se $m > 0 \Rightarrow \hat{u}(\mathbf{x},t) > 0 \quad \forall\, \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ t>0,$

se $m < 0 \Rightarrow \hat{u}(\mathbf{x},t) < 0 \quad \forall\, \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ t>0,$

obtemos em qualquer caso

$$|\hat{u}(\mathbf{x},t)| = (sgn\ m)\hat{u}(\mathbf{x},t) \quad \forall\, \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ t>0.$$

Portanto, por (2.37), teremos

$$\begin{aligned}\|\hat{u}(\mathbf{x},t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}(\mathbf{x},t)|d\mathbf{x} = (sgn\ m)\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} \\ &= (sgn\ m)\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}_0(\mathbf{x})d\mathbf{x} = (sgn\ m)m = |m|\end{aligned}$$

isto é,

$$\|\hat{u}(\mathbf{x},t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = |m| \quad \forall\, t>0.$$

Seja $w(\mathbf{x},t) = u(\mathbf{x},t) - \hat{u}(\mathbf{x},t)$ tal que w é solução de

$$\begin{aligned} w_t &= div(A\nabla w), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ t>0 \\ w(\mathbf{x},0) &= u_0(\mathbf{x}) - \hat{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\end{aligned}$$

com $w(\cdot,0)\in L^1(\mathbb{R}^n)$ tendo massa nula, pois

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(\mathbf{x},0)d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}_0(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0.$$

Assim, por (4.4) temos

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0 \qquad ao \quad t\to+\infty.$$

Logo

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to |m| \qquad ao \quad t\to+\infty$$

pois,

$$\liminf_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \geq |m| \tag{4.12}$$

devido ao fato de que,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x},t)|d\mathbf{x} \geq \left|\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\right| = |m| \quad \forall\ t>0,$$

e como $u(\mathbf{x},t) = w(\mathbf{x},t) + \hat{u}(\mathbf{x},t)$, pela desigualdade de Minkowski (A.7)

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \|w(\cdot,t) + \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|w(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&= |m| + \|w(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

e assim,

$$\limsup_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \limsup_{t\to+\infty} \left(|m| + \|w(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right) = |m|$$

isto é,

$$\limsup_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq |m|. \tag{4.13}$$

□

4.2.2 Comportamento de $t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$

Lema 4.1. *Se $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tem massa nula então, para cada $1 < r \leq \infty$ tem-se:*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)} \|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 0 \tag{4.14}$$

uniformemente em $1 < r \leq \infty$.

Demonstração: O caso r=1, já foi considerado acima. Consideremos agora r=2: neste caso, por (A.9), temos

$$\begin{aligned}
t^{\frac{n}{4}}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq t^{\frac{n}{4}} \left(\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}} \left(t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

e então, por (3.10) e (4.11), tem-se

$$t^{\frac{n}{4}} \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad ao \quad t \to +\infty.$$

No caso $r = \infty$, usando a desigualdade de Sobolev (A.11) temos:

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq C_n t^{\frac{n}{2}} \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}} \|D^n u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(t^{\frac{n}{4}} \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(t^{\frac{3n}{4}} \|D^n u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e então, pelo caso $r = 2$ e por (3.18),

$$t^{\frac{n}{2}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad ao \quad t \to +\infty.$$

Finalmente, no caso $1 < r < \infty$, tem-se pela desigualdade de Interpolação (A.9) e por (2.31),

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)} \|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} &\leq \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{r}} \left(t^{\frac{n}{2}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right)^{1-\frac{1}{r}} \\ &\leq \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{r}} \left(t^{\frac{n}{2}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right)^{1-\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

de modo que, pelo caso $r = \infty$ e por (4.4),

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)} \|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad ao \quad t \to +\infty.$$

□

Tendo mostrado o Lema acima, podemos obter o seguinte resultado.

Teorema 4.4. *Ao $t \to +\infty$, tem-se*

$$t^{\frac{n}{2}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \tag{4.15}$$

onde m é a massa da $u(\cdot,t)$, e $\lambda > 0$ é dado em (1.4).

Demonstração: Pelo Lema 4.1, é suficiente mostrar este resultado para a solução $\hat{u}(\cdot,t)$ dada por

$$\hat{u}_t = div(A\nabla\hat{u}), \quad t > 0$$

$$\hat{u}(\mathbf{x},0) = \hat{u}_0(\mathbf{x}), \quad t = 0$$

onde

$$\hat{u}_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{m}{v_n}, & |\mathbf{x}| \leq 1 \\ 0, & |\mathbf{x}| > 1 \end{cases}$$

sendo que v_n é dado por (B.2).

Logo,

$$w_0(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) - \hat{u}_0(\mathbf{x}) \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

tem massa zero, e daí pelo Lema 4.1:

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}} \|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$$

onde $w(\cdot,t)$ é a solução de

$$\begin{aligned} w_t &= div(A\nabla w) \\ w(\cdot,0) &= w_0 \end{aligned}$$

ou seja

$$w(\mathbf{x},t) = u(\mathbf{x},t) - \hat{u}(\mathbf{x},t)$$

de modo que

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}} \|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Como

$$\hat{u}(\mathbf{x},t) = \frac{m}{v_n} \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\mathbf{y}|\leq 1} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} d\mathbf{y}$$

temos

$$t^{\frac{n}{2}} |\hat{u}(\mathbf{x},t)| = \frac{|m|}{v_n} \frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\mathbf{y}|\leq 1} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} d\mathbf{y}.$$

Em particular,

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}} \|\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \geq t^{\frac{n}{2}} |\hat{u}(0,t)| &= \frac{|m|}{v_n} \frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\mathbf{y}|\leq 1} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{y}, A^{-1}\mathbf{y}\rangle} d\mathbf{y} \\ &\geq \frac{|m|}{v_n} \frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\mathbf{y}|\leq 1} e^{-\frac{1}{4t}\|A^{-1}\|_E} d\mathbf{y} \\ &= \frac{|m|}{v_n} \frac{1}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \, e^{-\frac{1}{4t}\|A^{-1}\|_E} \int_{|\mathbf{y}|\leq 1} d\mathbf{y} \end{aligned}$$

e assim, por (B.2) temos

$$t^{\frac{n}{2}}\|\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}\; e^{-\frac{1}{4t}\|A^{-1}\|_E} \quad \forall\ t>0.$$

Fazendo $t \to +\infty$ obtemos

$$\liminf_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}}\|\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}.$$

Analogamente,

$$|\hat{u}(\mathbf{x},t)| = \frac{1}{v_n}\frac{|m|}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{|\mathbf{y}|\leq 1} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle}d\mathbf{y} \leq \frac{1}{v_n}\frac{|m|}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{|\mathbf{y}|\leq 1} d\mathbf{y}$$

e então, novamente usando (B.2), tem-se

$$t^{\frac{n}{2}}|\hat{u}(\mathbf{x},t)| \leq \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \quad \forall\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ t>0$$

e daí,

$$t^{\frac{n}{2}}\|\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \quad \forall\ t>0.$$

Fazendo $t \to +\infty$, obtemos

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}}\|\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}$$

completando assim a demonstração. □

4.2.3 Comportamento de $t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$, $1<r<\infty$

Teorema 4.5. *Sendo* $1<r<\infty$, *tem-se*

$$t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \to \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{4\pi\lambda}{r}\right)^{\frac{n}{2r}}, \quad 1<r<\infty \tag{4.16}$$

ao $t\to+\infty$, *onde* m *é a massa de* $u(\cdot,t)$ *e* λ *é dado por (1.4).*

Demonstração: Seja $\hat{u}(\cdot,t)$ dada por

$$\hat{u}_t = div(A\nabla\hat{u}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, \quad t>0$$
$$\hat{u}(\mathbf{x},0) = \hat{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, \quad t>0$$

onde

$$\hat{u}_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{m}{v_n}, & |\mathbf{x}| \le 1 \\ 0, & |\mathbf{x}| > 1 \end{cases}$$

sendo que v_n é dado por (B.2).

Dado $1 < r < \infty$,

$$t^{\frac{n}{2}(r-1)} \|\hat{u}(\cdot,t)\|^r_{L^r(\mathbb{R}^n)} = t^{\frac{n}{2}(r-1)} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\mathbf{x},t)|^r d\mathbf{x}.$$

Como

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\mathbf{x},t)| &= \left| \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} \hat{u}_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \\ &= \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \frac{|m|}{|v_n|} \int_{|\mathbf{y}|\le 1} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} d\mathbf{y} \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}(r-1)} \|\hat{u}(\cdot,t)\|^r_{L^r(\mathbb{R}^n)} &= t^{\frac{n}{2}(r-1)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}r}} \frac{|m|^r}{v_n^r} \left(\int_{|\mathbf{y}|\le 1} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} d\mathbf{y} \right)^r d\mathbf{x} \\ &= \frac{t^{-\frac{n}{2}}}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}r}} \frac{|m|^r}{v_n^r} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|\mathbf{y}|\le 1} e^{-\left\langle \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{4t}} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}, A^{-1}\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{4t}} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}\right)\right\rangle} d\mathbf{y} \right)^r d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Agora, introduzindo $\boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{4t}}$, obtemos

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}(r-1)} \|\hat{u}(\cdot,t)\|^r_{L^r(\mathbb{R}^n)} &= \frac{t^{-\frac{n}{2}}}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}r}} \frac{|m|^r}{v_n^r} (4t)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|\mathbf{y}|\le 1} e^{-\left\langle \boldsymbol{\xi} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}, A^{-1}\left(\boldsymbol{\xi} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}\right)\right\rangle} d\mathbf{y} \right)^r d\boldsymbol{\xi} \\ &= \frac{2^n}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}r}} \frac{|m|^r}{v_n^r} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|\mathbf{y}|\le 1} e^{-\left\langle \boldsymbol{\xi} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}, A^{-1}\left(\boldsymbol{\xi} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}\right)\right\rangle} d\mathbf{y} \right)^r d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned}$$

Ora, para cada $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ dado, usando (4.7),

$$\int_{|\mathbf{y}|\le 1} e^{-\left\langle \boldsymbol{\xi} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}, A^{-1}\left(\boldsymbol{\xi} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}\right)\right\rangle} d\mathbf{y} \le C v_n e^{-\left\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\right\rangle}, \quad \forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

onde

$$C = e^{\frac{1}{4t}\|A^{-1}\|_E}.$$

Pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue, ao $t \to +\infty$, e por (B.1), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}(r-1)} \|\hat{u}(.,t)\|^r_{L^r(\mathbb{R}^n)} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{2^n}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}r}} \frac{|m|^r}{v_n^r} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|\mathbf{y}|\le 1} e^{-\left\langle \boldsymbol{\xi} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}, A^{-1}\left(\boldsymbol{\xi} - \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{4t}}\right)\right\rangle} d\mathbf{y} \right)^r d\boldsymbol{\xi} \\ &= \frac{2^n}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}r}} \frac{|m|^r}{v_n^r} \int_{\mathbb{R}^n} v_n^r\, e^{-r\langle \boldsymbol{\xi}, A^{-1}\boldsymbol{\xi}\rangle} d\boldsymbol{\xi} \\ &= \frac{2^n}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}r}} |m|^r \left(\frac{\pi\lambda}{r}\right)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})}||\hat{u}(\cdot,t)||_{L^r(\mathbb{R}^n)} \to \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{4\pi\lambda}{r}\right)^{\frac{n}{2r}}.$$

□

A figura abaixo mostra o comportamento da solução $u(\cdot,t)$ para diferentes tempos e ilustra as propriedades discutidas acima: ao $t \to \infty$, tem-se $||u(\cdot,t)||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to |m|$ enquanto $||u(\cdot,t)||_{L^r(\mathbb{R}^n)} \to 0$, com $||u(\cdot,t)||_{L^r(\mathbb{R}^n)}$ decrescendo mais rapidamente à medida que r cresce.

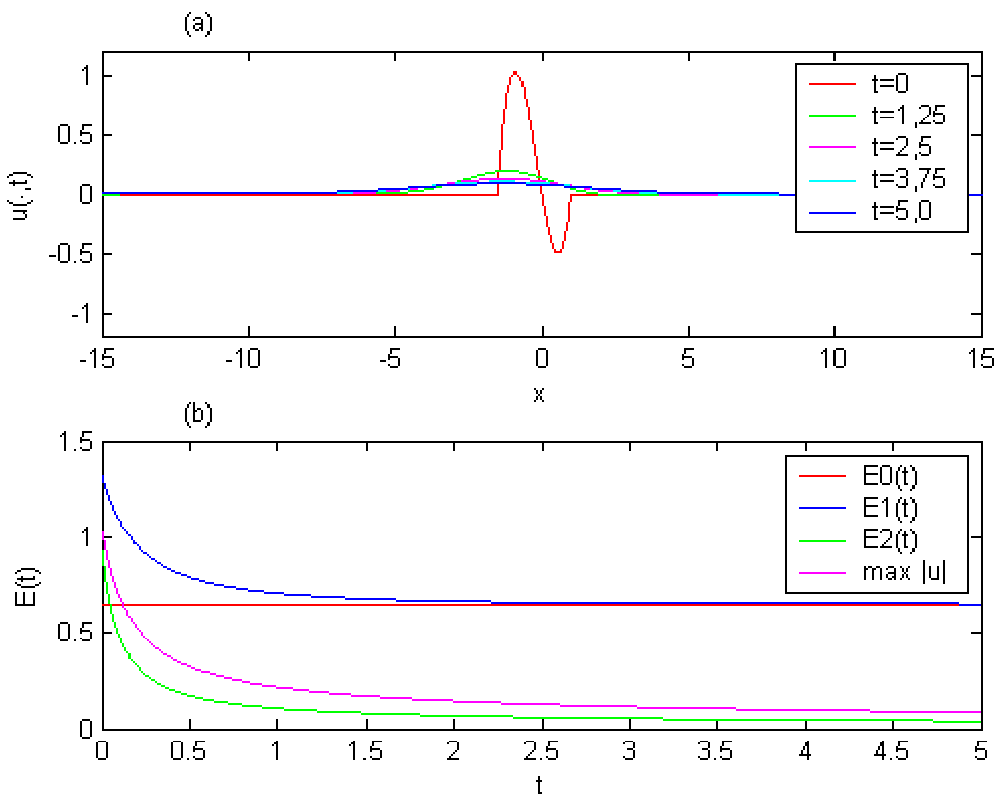

Figura 4.1: (a) Comportamento da solução $u(\cdot,t)$ para alguns valores de t da equação $u_t = u_{xx}$ correspondente ao perfil inicial $u_0 = -x(x+1,5)(1-x)$ *para* $-1,5 \le x \le 1$ *e* $u_0 = 0$ *para* $x < -1,5$ *ou* $x > 1$. (b) Massa transportada e comportamento assintótico $(t \to \infty)$ de várias normas da solução $u(\cdot,t) = K(\cdot,t) * u_0$ para o problema descrito em (a), onde $E0(t) = |m|$, $E1(t) = ||u(\cdot,t)||_{L^1}$, $E2(t) = ||u(\cdot,t)||_{L^2}$ e max $|u| = ||u(\cdot,t)||_{L^\infty}$.

4.3 Comportamento de $t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$, caso $p>1$

Nesta seção, vamos mostrar de um modo quase imediato que, se $u(\cdot,t) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algum $1<p<\infty$, então

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 0$$

para cada $p \le r \le \infty$, uniformemente em r. Começamos pelo caso $r=p$.

Teorema 4.6. *Sendo $u(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1<p<\infty$, então*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \textit{ao } t \to +\infty.$$

Demonstração: Dado $\epsilon>0$, seja $R>0$ suficientemente grande tal que

$$\int_{|\mathbf{x}|\ge R} |u(\mathbf{x},0)|^p d\mathbf{x} \le \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p. \tag{4.17}$$

Sejam v_0 e $w_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dadas por

$$v_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} u(\mathbf{x},0), & |\mathbf{x}|<R \\ 0, & |\mathbf{x}|\ge R \end{cases}$$

e $w_0 = u(\cdot,t) - v_0$: por (4.17), temos $\|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \frac{\epsilon}{2}$, de modo que $w(\cdot,t)$ dada por

$$w(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{R^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} w_0(\mathbf{y})d\mathbf{y} \tag{4.18}$$

satisfaz, pelo Teorema 2.5,

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \frac{\epsilon}{2} \tag{4.19}$$

para todo $t>0$. Por outro lado como $v_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pois

$$\|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{|\mathbf{x}|<R} |u(\mathbf{x},0)|d\mathbf{x} \le (v_n R^n)^{1-\frac{1}{p}}\|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{4.20}$$

usando a desigualdade de Hölder (A.5), segue pelo Teorema 3.1, que $v(\cdot,t) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$v(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y},A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} v_0(\mathbf{y})d\mathbf{y}, \tag{4.21}$$

satisfaz

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(\lambda,n,p)\|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}. \tag{4.22}$$

Portanto, temos $\|v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\epsilon}{2}$ para todo $t \geq t_0$ para algum t_0 suficientemente grande, e daí

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|w(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

para todo $t \geq t_0$. □

Teorema 4.7. *Sendo $u(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$, então*

$$t^{\frac{n}{2}\frac{1}{p}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \textit{ao } t \to +\infty.$$

Demonstração: Usando a desigualdade de Sobolev (A.17), (ver[Friedman, 1969])

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(p,n)\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}}\|D^n u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}} \tag{4.23}$$

obtemos, pelo Teorema 3.4 (com $\ell = n, r = p$)

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2p}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq C(p,n)\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}}(t^{\frac{n}{2}}\|D_u^n(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C(p,n)(C_n(p,\lambda,n)\|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})^{\frac{1}{p}}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}} \\ &= C(p,\lambda,n)\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

para todo $t > 0$, de modo que, pelo Teorema 4.6, temos o resultado. □

Teorema 4.8.

$$t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \textit{ao } t \to +\infty.$$

para cada $1 < r < \infty$, uniformemente em r.

Demonstração: Usando os Teoremas 4.6 e 4.7 acima, resulta, por interpolação, para cada $p < r < \infty$,

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} &\leq t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{r}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{p}{r}} \\ &= \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{r}}(t^{\frac{n}{2p}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)})^{\left(1-\frac{p}{r}\right)} \end{aligned}$$

isto é,

$$t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad ao\ t \to +\infty,$$

como afirmado. $\square$

5 EQUAÇÕES DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO

5.1 Introdução

Neste capítulo, estendemos os resultados anteriores a equações de advecção-difusão mais gerais, da forma

$$u_t + div\ \mathbf{f}(u) = div(A(u)\nabla u) \tag{5.1}$$

com $u(\cdot, t)$ correspondente a um estado inicial

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{5.2}$$

onde $1 \leq p \leq 2$. Aqui, $div\ \mathbf{f}(u)$ é o divergente da função fluxo $\mathbf{f}(u)$ com respeito à variável espacial $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, i.e., $div\ \mathbf{f}(u) = \partial x_1 f_1(u(\mathbf{x}, t)) + \ldots + \partial x_n f_n(u(\mathbf{x}, t))$, ∇u é o gradiente espacial de $u(\mathbf{x}, t)$, e $A(u)$ denota uma matriz positiva definida de ordem n descrevendo a dissipação de viscosidade no sistema, com

$$\langle \boldsymbol{\xi}, A(\mathsf{u})\boldsymbol{\xi} \rangle \geq \mu |\boldsymbol{\xi}|^2 \quad \forall\ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \tag{5.3}$$

para alguma constante $\mu > 0$ e para todo u envolvido, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em $\mathbb{R}^n$, i.e.,

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i \tag{5.4}$$

se $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, com $\xi_i, \eta_i \in \mathbb{R}$ para todo i; escrevemos também $\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}$ para $\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle$. As funções A, $\mathbf{f}$ são dadas, e supostas suaves; se quisermos, podemos também supor (sem perda de generalidade) que $A(\mathsf{u})$ é simétrica para todo u, visto que podemos substituí-la por sua parte simétrica, $(A(\mathsf{u}) + A(\mathsf{u})^T)/2$, porém isso não será realmente necessário.

As soluções $u(\cdot, t)$ de (5.1), (5.2) que consideraremos na investigação conduzida neste Capítulo são, como antes, as soluções $u(\cdot, t)$ variando continuamente em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e limitadas, i.e., $u(\cdot, t) \in C^0([0, \infty[\, , L^p(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times\,]0, \infty[)$ satisfazem (5.1) no sentido clássico e verificam o princípio do máximo dado por

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \tag{5.5}$$

para todo $t > 0$, ver Teorema 5.1 a seguir. Ademais, para um par qualquer $u(\cdot,t)$, $\hat{u}(\cdot,t)$ correspondentes a estados iniciais u_0, $\hat{u}_0 \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, existe $B > 0$ constante tal que

$$\|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq e^{Bt}\|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{5.6}$$

para todo $t > 0$, de onde segue (em particular) que as soluções de (5.1), (5.2) são únicas, [Kreiss e Lorenz, 1989], [Hagstrom et al., 2005]. No caso $p = 1$, é mostrado na seção 5.2 que se pode tomar $B = 0$, tendo-se então

$$\|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \tag{5.7}$$

para todo $t > 0$, ver Teorema 5.2.

Na seção 5.2, descrevemos as taxas de decaimento de $u(\cdot,t)$ e suas derivadas, seguindo [Hagstrom et al., 2003], [Zingano, 1999], [Zingano, 2004a] e [Zingano, 2004b]. Os resultados no caso $1-D$, isto é,

$$u_t + f(u)_x = (a(u)u_x)_x \tag{5.8}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \tag{5.9}$$

são derivados em detalhe, a partir de desigualdades de energia. A mesma técnica é utilizada no caso n-dimensional, $n > 1$, como mostrado na subseção 5.2.2 .

A seguir, na Seção 5.3, consideremos o caso $p = 1$ (isto é, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$), e utilizamos as estimativas obtidas na seção anterior para mostrar que as soluções de (5.1), (5.2) são bem aproximadas ao $t \to +\infty$ pelas soluções $v(\cdot,t)$ da equação de Burgers

$$v_t + f^{'}(0)v_x + f^{''}(0)vv_x = (a(0)v_{xx}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{5.10}$$

$$v(x,0) = u_0(x), \tag{5.11}$$

no caso $n = 1$, e por $v(\cdot, t)$ dada pela equação do calor

$$v_t + \mathbf{f}'(0) \cdot \nabla v = div(A(0)\nabla v), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ t > 0 \tag{5.12}$$

$$v(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \tag{5.13}$$

no caso $n \geq 2$. Em ambos os casos, considerados separadamente nas subseções 5.3.1 e 5.3.2, obtemos que

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right)} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 0 \tag{5.14}$$

para cada $1 \leq r \leq \infty$, uniformemente em r. Disso resulta que, sendo $u(\cdot, t), \hat{u}(\cdot, t)$ soluções de (5.1), (5.2) transportando a mesma massa, temos

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right)} \|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 0 \tag{5.15}$$

para cada $1 \leq r \leq \infty$, uniformemente em r.

Finalmente, na Seção 5.4, consideremos o caso $1 < p \leq 2$, obtendo que

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 0 \tag{5.16}$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r.

Antes de procedermos a derivação destes resultados, será útil revisar algumas propriedades básicas das soluções $u(\cdot, t)$ que serão utilizadas posteriormente. Seguindo [Harabetian, 1988], [Kreiss e Lorenz, 1989], construímos *funções sinal regularizadas* do seguinte modo: tomando $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ monótona crescente com

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \quad se\ x = 0 \\ \varphi(x) &= 1 \quad se\ x \geq 1 \\ \varphi(x) &= -1 \quad se\ x \leq -1 \end{aligned}$$

e, para cada $\delta > 0$, seja $\varphi_\delta \in C^2(\mathbb{R})$ dada por

$$\varphi_\delta(x) = \varphi\left(\frac{x}{\delta}\right) \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}. \tag{5.17}$$

Definindo $L_\delta \in C^\infty(\mathbb{R})$ via

$$L_\delta(x) = \int_0^x \varphi_\delta(\xi) d\xi \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{5.18}$$

temos $L_\delta \geq 0,\ L_\delta'' \geq 0$ e

$$L_\delta(x) \to |x| \qquad ao \qquad \delta \to 0 \tag{5.19}$$

uniformemente em $x \in \mathbb{R}$, com ademais

$$L_\delta'(x) \to sgn(x) \qquad ao \qquad \delta \to 0 \tag{5.20}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, onde sgn denota a função sinal. Esta função $L_\delta'(\cdot)$ tem, assim, o papel de uma função sinal regularizada sendo útil para estimar propriedades de normas L^p como por exemplo a norma L^1, como ilustramos a seguir.

Teorema 5.1 (Monotonicidade de $\|\cdot\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$). *Sendo $u(\cdot,t)$ a solução de (5.1), (5.2), tem-se*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,0)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, t > 0 \tag{5.21}$$

para cada $p \leq r \leq \infty$.

Demonstração: Dados $T > 0$, $p \leq r < \infty$, $0 < t_0 < T$, tomamos uma δ-família $L_\delta'(\cdot)$ de funções sinal regularizadas (introduzidas acima) e multiplicamos (5.1) por $rL_\delta(u)^{r-1}L_\delta'(u)$, integrando em $\mathbb{R}^n \times [t_0, T]$ para obter

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(\mathbf{x},T))^r d\mathbf{x} + \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(u(\mathbf{x},t))\langle \nabla u, A(u)\nabla u\rangle d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(\mathbf{x},t_0))^r d\mathbf{x},$$

onde $\Psi(s) := r(r-1)L_\delta'(s)^{r-1} + L_\delta(s)^{r-1}L_\delta''(s)$. Como $\Psi(s) = d^2/ds^2 L_\delta(s)^r \geq 0$ visto que $L_\delta(s)^r$ é convexa em $s \in \mathbb{R}$, e $\langle \nabla u, A(u)\nabla u\rangle \geq 0$ por (5.3), resulta

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(\mathbf{x},T))^r d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(\mathbf{x},t_0))^r d\mathbf{x}$$

para todo $\delta > 0$, fazendo $\delta \to 0$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x},T)|^r d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x},t_0)|^r d\mathbf{x},$$

e (5.21) é obtido fazendo $t_0 \to 0$, que fornece

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,0)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}.$$

Finalmente, fazendo $r \to \infty$, resulta

$$\|u(\cdot,T)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

□

De modo análogo, obtém-se o seguinte resultado fundamental, válido apenas no caso $p = 1$.

Teorema 5.2 (Contratividade em $L^1(\mathbb{R}^n)$). *Sendo $u(\cdot,t)$, $\hat{u}(\cdot,t)$ soluções de (5.1), (5.2), correspondentes a estados iniciais $u(\cdot,0), \hat{u}(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, tem-se*

$$\|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,0) - \hat{u}(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \tag{5.22}$$

para todo $t > 0$.

Demonstração: A diferença $\theta(\cdot,t) = u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)$ satisfaz

$$\theta_t + div[\mathbf{f}] = div(A(u)\nabla\theta) + div([A]\nabla\hat{u}), \tag{5.23}$$

onde $[\mathbf{f}] = \mathbf{f}(\theta+\hat{u}) - \mathbf{f}(\hat{u})$, $[A] = A(\theta+\hat{u}) - A(\hat{u})$. Dados $T > 0$, $t_0 \in]0,T[$, e tomando uma δ-família $L_\delta'(\cdot)$ de funções sinal regularizadas L_δ', conforme (5.17) - (5.20) acima, obtemos, multiplicando (5.23) por $L_\delta'(\theta(\mathbf{x},t))$ e integrando em $\mathbb{R}^n \times [t_0,T]$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(\theta(\mathbf{x},T))d\mathbf{x} &+ \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta''(\theta)\langle\nabla\theta, A(u)\nabla\theta\rangle d\mathbf{x}dt \\
= \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(\theta(\mathbf{x},t_0))d\mathbf{x} &+ \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta''(\theta)\langle\, [\mathbf{f}], \nabla\theta\rangle d\mathbf{x}dt \\
&- \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta''(\theta)\langle[A]\nabla\hat{u}, \nabla\theta\rangle d\mathbf{x}dt,
\end{aligned}$$

de modo que, como $L_\delta''(\theta) \geq 0$ e $\langle\nabla\theta, A(u)\nabla\theta\rangle \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(\theta(\mathbf{x},T))d\mathbf{x} \quad &\leq \quad \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(\theta(\mathbf{x},t_0))d\mathbf{x} \\
+ \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta''(\theta)\langle[\mathbf{f}], \nabla\theta\rangle d\mathbf{x}dt \quad &- \quad \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta''(\theta)\langle[A]\nabla\hat{u}, \nabla\theta\rangle d\mathbf{x}dt
\end{aligned} \tag{5.24}$$

para todo $\delta > 0$. Como $L''_\delta(\theta)\theta \to 0$ ao $\delta \to 0$ para todo θ e $|L''_\delta(s)s| \leq C$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$, resulta pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\int_{t_0}^{T} \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(\theta)\langle[\mathbf{f}], \nabla\theta\rangle d\mathbf{x}dt \to 0$$

e

$$-\int_{t_0}^{T} \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(\theta)\langle[A]\nabla\hat{u}, \nabla\theta\rangle d\mathbf{x}dt \to 0$$

ao $\delta \to 0$, de modo que, fazendo $\delta \to 0$ em (5.24) acima, resulta $||\theta(\cdot, T)||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq ||\theta(\cdot, t_0)||_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, o que mostra o resultado. □

Este resultado permite obter a seguinte propriedade de monotonicidade do operador solução de (5.1).

Teorema 5.3. *Sendo $u(\cdot, t)$, $\hat{u}(\cdot, t)$ soluções de (5.1) correspondentes a estados iniciais $u(\cdot, 0), \hat{u}(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, com $u(\cdot, 0) \leq \hat{u}(\cdot, 0)$, então $u(\cdot, t) \leq \hat{u}(\cdot, t)$ para todo $t > 0$.*

Demonstração: O argumento a seguir é adaptado de [Crandall e Tartar, 1980]: considerando $I(t)$ dada por

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x}, t) - \hat{u}(\mathbf{x}, t)| d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n} (u(\mathbf{x}, t) - \hat{u}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x}, \tag{5.25}$$

temos $I(t) \geq 0$ para todo t, enquanto, pelo Teorema 5.2,

$$\begin{aligned} 0 \leq I(t) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x}, 0) - \hat{u}(\mathbf{x}, 0)| d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x}, 0) - \hat{u}(\mathbf{x}, 0)| d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (|u(\mathbf{x}, 0) - \hat{u}(\mathbf{x}, 0)| + u(\mathbf{x}, 0) - \hat{u}(\mathbf{x}, 0)) d\mathbf{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

visto que $|u(\mathbf{x}, 0) - \hat{u}(\mathbf{x}, 0)| + u(\mathbf{x}, 0) - \hat{u}(\mathbf{x}, 0) = 0$ pela hipótese. Logo, $I(t) = 0$, e assim

$$|u(\mathbf{x}, t) - \hat{u}(\mathbf{x}, t)| + u(\mathbf{x}, t) - \hat{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{5.26}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, visto que $|u(\mathbf{x},t) - \hat{u}(\mathbf{x},t)| + u(\mathbf{x},t) - \hat{u}(\mathbf{x},t) \geq 0$ para todo $\mathbf{x}$ e $I(t) = 0$. Isso implica que $u(\mathbf{x},t) - \hat{u}(\mathbf{x},t) \leq 0$ para todo $\mathbf{x}$, o que mostra o resultado. $\square$

5.2 Taxas de decaimento

Nesta seção, descrevemos diversas taxas de decaimento para $u(\cdot,t)$ e várias derivadas, que serão necessárias para a obtenção dos resultados discutidos nas seções 5.3 - 5.4.

5.2.1 O caso unidimensional, $n = 1$

Iniciamos investigando o decaimento das soluções $u(\cdot,t)$ no caso $n = 1$, isto é, $u(\cdot,t)$ solução de

$$u_t + f(u)_x = (a(u)u_x)_x, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{5.27}$$

$$u(\cdot,0) = u_0 \in Ł^p(\mathbb{R}) \cap Ł^\infty(\mathbb{R}), \tag{5.28}$$

onde $1 \leq p \leq 2$, com a, f funções suaves satisfazendo

$$a(\mathsf{u}) \geq \mu > 0 \quad \forall\ \mathsf{u} \in [-K_\infty, K_\infty] \tag{5.29}$$

para $\mu > 0$ fixo, onde K_∞ é tomado de modo a se ter

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K_\infty. \tag{5.30}$$

Também será conveniente introduzir $K_p > 0$ tal que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq K_p. \tag{5.31}$$

Começamos pelo caso $p = 1$, i.e., assumindo $u_0 \in Ł^1(\mathbb{R}) \cap Ł^\infty(\mathbb{R})$.

Teorema 5.4 (Desigualdade de Energia 1a). *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (5.27), (5.28) com $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, tem-se*

$$T\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu \int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq 2\sqrt{2}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\mu^{-\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}} \tag{5.32}$$

para todo $T > 0$.

Demonstração: Multiplicando (5.27) por $tu(x,t)$ e integrando em $\mathbb{R} \times [0,T]$, $T > 0$ dado, obtém-se

$$\int_0^T t \int_{\mathbb{R}} uu_t dxdt + \int_0^T t \int_{\mathbb{R}} uf(u)_x dxdt = \int_0^T t \int_{\mathbb{R}} u \cdot (a(u)u_x)_x dxdt.$$

Integrando por partes, resulta

$$\int_0^T t \int_{\mathbb{R}} uu_t dxdt \quad = \quad \frac{T}{2} \int_{\mathbb{R}} (u(x,T))^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (u(x,t))^2 dxdt$$

isto é,

$$\int_0^T t \int_{\mathbb{R}} uu_t dxdt = \frac{T}{2} \|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \frac{1}{2} \int_0^T \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt. \tag{5.33}$$

Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}} uf(u)_x dxdt = \int_{\mathbb{R}} u(x,t) f'(u(x,t)) u_x(x,t) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} g(u(x,t)) dx$$

onde

$$g(x,t) = \int_0^{u(x,t)} v f'(v) dv,$$

de modo que

$$\int_{\mathbb{R}} uf(u)_x dx = 0,$$

e assim

$$\int_0^T t \int_{\mathbb{R}} uf(u)_x dxdt = 0. \tag{5.34}$$

Finalmente, integrando por partes, temos também

$$\int_0^T t \int_{\mathbb{R}} u(a(u)u_x)_x dxdt = -\int_0^T t \int_{\mathbb{R}} a(u) u_x^2 dxdt,$$

e por (5.29), resulta

$$\int_0^T t \int_{\mathbb{R}} u(a(u)u_x)_x dxdt \leq -\mu \int_0^T t \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt. \tag{5.35}$$

Assim, por (5.33), (5.34) e (5.35), obtém-se

$$T\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu\int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \int_0^T \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt. \tag{5.36}$$

Pela desigualdade de Sobolev (A.12), pela desigualdade de Hölder (A.5) e pelo Teorema da Monotonicidade (ver 5.21), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt &= \sqrt[3]{4}\int_0^T \|u(\cdot,t)\|^{\frac{4}{3}}_{L^1(\mathbb{R})}\|u_x(\cdot,t)\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(\mathbb{R})}dt \\
&\leq \sqrt[3]{4}\|u(\cdot,0)\|^{\frac{4}{3}}_{L^1(\mathbb{R})}\int_0^T \|u_x(\cdot,t)\|^{\frac{2}{3}}_{L^2(\mathbb{R})}dt \\
&\leq 2^{\frac{2}{3}}\|u(\cdot,0)\|^{\frac{4}{3}}_{L^1(\mathbb{R})}(2\sqrt{t})^{\frac{2}{3}}(2\mu)^{-\frac{1}{3}}\left(2\mu\int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt\right)^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Portanto, sendo $E(T) = T\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu\int_0^T t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt$, obtemos

$$E(T) \leq 2\|u(\cdot,0)\|^{\frac{4}{3}}_{L^1(\mathbb{R})}\mu^{-\frac{1}{3}}T^{\frac{1}{3}}E(T)^{\frac{1}{3}},$$

o que implica

$$E(T) \leq 2\sqrt{2}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\mu^{-\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}$$

como queríamos demonstrar. □

No caso $p = 2$, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 5.5 (Desigualdade de Energia 1b). *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (5.27), (5.28) com $u_0 \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu\int_0^T \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \|u(\cdot,0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \tag{5.37}$$

para todo $T > 0$.

Demonstração: Dado $T > 0$, multiplicando (5.27) por $2u(x,t)$ e integrando em $\mathbb{R}\times[0,T]$, obtemos, após integrar por partes,

$$\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\int_0^T\int_{\mathbb{R}} a(u)u_x^2dxdt = \|u(\cdot,0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

e assim, por (5.29), obtemos o resultado. □

Finalmente, no caso $1 < p < 2$, procedemos como na derivação do Teorema 5.4 para obter o seguinte resultado.

Teorema 5.6 (Desigualdade de Energia 1c). *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (5.27), (5.28), com $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, tem-se*

$$T^{\frac{1}{p}}\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu\int_0^T t^{\frac{1}{p}}\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq C_p(\mu)\|u(\cdot,0)\|^2_{L^p(\mathbb{R})}T^{\frac{1}{2}} \tag{5.38}$$

para todo $T > 0$, onde $C_p(\mu) = (2/p)^{\frac{2+p}{2p}}\mu^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}$.

Demonstração: Dado $T > 0$, multiplicando (5.27) por $2t^{\frac{1}{p}}u(x,t)$ e integrando em $\mathbb{R}\times[0,T]$, obtemos, após integrar por partes,

$$T^{\frac{1}{p}}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\int_0^T t^{\frac{1}{p}}\int_{\mathbb{R}} a(u)u_x(x,t)^2dxdt = \frac{1}{p}\int_0^T t^{\frac{1}{p}-1}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt,$$

de modo que, por (5.29),

$$T^{\frac{1}{p}}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu\int_0^T t^{\frac{1}{p}}\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \frac{1}{p}\int_0^T t^{\frac{1}{p}-1}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt. \tag{5.39}$$

Pela desigualdade de Sobolev (A.12), Apêndice A, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T t^{\frac{1}{p}-1}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt &\leq 4^{\frac{2-p}{2+p}}\int_0^T t^{\frac{1}{p}-1}\|u(\cdot,t)\|^{\frac{4p}{2+p}}_{L^p(\mathbb{R})}\|u_x(\cdot,t)\|^{2\frac{2-p}{2+p}}_{L^2(\mathbb{R})}dt \\ &\leq 4^{\frac{2-p}{2+p}}\|u(\cdot,0)\|^{\frac{4p}{2+p}}_{L^p(\mathbb{R})}\int_0^T t^{\frac{1}{p}-1}\|u_x(\cdot,t)\|^{2\frac{2-p}{2+p}}_{L^2(\mathbb{R})}dt\end{aligned}$$

pelo Teorema da Monotonicidade (ver 5.21). Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\int_0^T t^{\frac{1}{p}-1}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq 2\mu^{-\frac{2-p}{2+p}}\|u(\cdot,0)\|^{\frac{4p}{2+p}}_{L^p(\mathbb{R})}T^{\frac{p}{2+p}}E(T)^{\frac{2-p}{2+p}}$$

onde

$$E(T) := T^{\frac{1}{p}}\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu\int_0^T t^{\frac{1}{p}}\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt.$$

Portanto, por (5.39), obtemos

$$E(T) \leq \frac{2}{p}\mu^{-\frac{2-p}{2+p}}\|u(\cdot,0)\|^{\frac{4p}{2+p}}_{L^p(\mathbb{R})}T^{\frac{p}{2+p}}E(T)^{\frac{2-p}{2+p}},$$

o que fornece

$$E(T) \leq \left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{2+p}{2p}}\mu^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^p(\mathbb{R})}T^{\frac{1}{2}},$$

como afirmado. $\square$

Em particular, segue dos Teoremas 5.4 - 5.6 o seguinte resultado fundamental.

Teorema 5.7. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (5.27), (5.28), $1 \leq p \leq 2$, tem-se*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_p \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})} (\mu t)^{-\frac{1}{2p}} \tag{5.40}$$

para todo $t > 0$, onde $C_p = 2^{\frac{1}{2p}+\frac{3}{8}} p^{-\frac{2+p}{4p}}$.

Demonstração: No caso $p = 2$, temos, pelo Teorema 5.5,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,0)\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

e

$$\int_0^T \|u_x(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} d\tau \leq \frac{1}{2\mu} \|u(\cdot,0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})};$$

pelo Teorema (A.10), Apêndice A, existe $t_* \in [0,t]$ tal que

$$\|u_x(\cdot,t_*)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2\mu} \|u(\cdot,0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} t^{-1},$$

de modo que, por (A.11), Apêndice A,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t_*)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \sqrt{2} \|u(\cdot,t_*)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})} \|u_x(\cdot,t_*)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \sqrt[4]{2} \mu^{-\frac{1}{4}} \|u(\cdot,0)\|_{L^2(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

e então,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \sqrt[4]{2} \|u(\cdot,0)\|_{L^2(\mathbb{R})} (\mu t)^{-\frac{1}{4}}.$$

No caso $1 \leq p < 2$, temos, pelos Teoremas 5.4 e 5.6,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_p(\mu)^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}$$

e

$$\int_{\frac{t}{2}}^t \tau^{\frac{1}{p}} \|u_x(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq \frac{C_p(\mu)}{2\mu} \|u(\cdot,0)\|^2_{L^p(\mathbb{R})} t^{\frac{1}{2}};$$

por (A.10), Apêndice A, existe $t_* \in [\frac{t}{2}, t]$ tal que

$$\|u_x(\cdot, t_*)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2^{\frac{1}{2p}} \frac{C_p(\mu)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\mu}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{4}} t_*^{-\frac{1}{2p}}$$

de modo que, por (A.11),

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot, t_*)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \sqrt{2} \|u(\cdot, t_*)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|u_x(\cdot, t_*)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{2} \frac{C_p(\mu)^{\frac{1}{2}}}{\mu^{\frac{1}{4}}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{8}} t_*^{-\frac{1}{2p}+\frac{1}{8}},
\end{aligned}$$

e então,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, t_*)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2^{\left(\frac{1}{2p}+\frac{3}{8}\right)} C_p(\mu)^{\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1}{4}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2p}},$$

onde $C_p(\mu)$ é a constante referida no Teorema 5.6, o que mostra o resultado. □

Interpolando as estimativas dadas nos Teoremas 5.4 - 5.7 acima, obtemos imediatamente o seguinte resultado:

Teorema 5.8. *Sendo $u(\cdot, t)$ solução de (5.27), (5.28), onde $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ com $1 \leq p \leq 2$, temos*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C_p^{1-\frac{p}{r}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} (\mu t)^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)} \tag{5.41}$$

para todo $t > 0$ e $p \leq r \leq \infty$, onde C_p é a constante dada no Teorema 5.7.

Demonstração: Pela desigualdade (A.9), Apêndice A, temos

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{r}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{p}{r}} \\
&\leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{r}} C_p^{1-\frac{p}{r}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{1-\frac{p}{r}} (\mu t)^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)},
\end{aligned}$$

o que mostra o resultado. □

Na seção 5.3, precisaremos também de estimativas para $\|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ e $\|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ no caso $p = 1$, i.e., quando $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Antes de podermos derivar desigualdades de energia para $u_x(\cdot, t)$ e $u_{xx}(\cdot, t)$, visto que nada se assume sobre $u_x(\cdot,0)$ ou $u_{xx}(\cdot,0)$, precisamos observar o seguinte. Dado $\hat{t_0} > 0$ qualquer (arbitrariamente pequeno, mas fixo), temos, pelo Teorema 5.4,

$$\int_{\frac{\hat{t_0}}{2}}^{\hat{t_0}} t\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq C(\mu)\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\hat{t_0}^{\frac{1}{2}}$$

para $C(\mu) > 0$ constante apropriada (dependendo apenas de μ). Por (A.10), Apêndice A, existe $t_0 \in [\frac{\hat{t_0}}{2}, \hat{t_0}]$ tal que

$$t_0\|u_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2C(\mu)\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\hat{t_0}^{-\frac{1}{2}},$$

de modo que

$$t_0^2\|u_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2C(\mu)\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\hat{t_0}^{\frac{1}{2}}. \tag{5.42}$$

Segue que (tomando uma seqüência $(\hat{t_0}^{(\ell)})_\ell$ com $\hat{t_0}^{(\ell)} \to 0$ ao $\ell \to \infty$), existe seqüência $(t_0^{(\ell)})_\ell$ com

$$t_0^{(\ell)}\|u(\cdot,t_0^{(\ell)})\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0, \quad t_0^{(\ell)} \searrow 0 \tag{5.43}$$

Podemos agora estimar $\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ no caso $u_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$.

Teorema 5.9. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (5.27), (5.28), com $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\mu,K_1,K_\infty)\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}t^{-\frac{3}{4}} \tag{5.44}$$

para todo $t > 0$, onde $C(\mu,K_1,K_\infty) > 0$ é uma constante que depende apenas dos parâmetros μ, K_1, K_∞ dados em (5.29) - (5.31) acima.

Demonstração: Introduzindo $\psi(\cdot,t)$ via

$$\psi(x,t) := \int_0^{u(x,t)} a(v)dv \tag{5.45}$$

temos que $\psi(\cdot,t)$ satisfaz a equação

$$\psi_t + \tilde{f}(\psi)_x = \tilde{a}(\psi)\psi_{xx}, \tag{5.46}$$

onde

$$\tilde{f}(v) := \int_0^v f'(\Phi(y))dy, \quad \tilde{a}(v) := a(\Phi(v))$$

e $\Phi(\cdot)$ denota a função inversa de $\Psi(\cdot)$ dada por

$$\Psi(w) = \int_0^w a(y)dy.$$

De (5.45), (5.40), temos

$$|u(x,t)| \leq C_0 \qquad\qquad |\psi(x,t)| \leq A_0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $t \geq \frac{t_0}{2}$, onde

$$C_0 = \sqrt{12}\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}(\mu t_0)^{-\frac{1}{2}} \qquad A_0 = \max_{|v|\leq C_0} |a(v)|C_0.$$

Em particular, de (5.45) obtém-se

$$|\psi(x,t)| \leq C(K_\infty)|u(x,t)| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \tag{5.47}$$

de modo que $\psi(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R})$ para todo $t \geq 0$ e

$$\|\psi(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(\mu, K_1, K_\infty)\|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})}t^{-\frac{1}{2}} \quad \forall\, t > 0. \tag{5.48}$$

Dado $T > 0$, tome $t_0 \in \,]0,T[\, \cap \{(t_0^{(\ell)})_\ell : \ell \in \mathbb{N}\}$ onde $(t_0^{(\ell)})_\ell$ é dada em (5.43) acima; derivando (5.46) em relação a x, multiplicando a equação resultante por $2t^2\psi_x(x,t)$ e integrando em $\mathbb{R} \times [t_0, T]$, obtemos

$$\begin{aligned} T^2\|\psi_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu\int_{t_0}^T t^2\|\psi_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq t_0^2\|\psi_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \\ +2\int_{t_0}^T t\|\psi_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + 2\int_{t_0}^T t^2\int_{\mathbb{R}}\psi_x(f\,'(\Phi(\psi))\psi_x)_x dxdt \end{aligned} \tag{5.49}$$

em vista de (5.29).

Como $\psi_x = a(u)u_x$, tem-se por (5.47),

$$\|\psi_x(.,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \tilde{C}\|u_x(.,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{5.50}$$

Ora,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T t^2\int_{\mathbb{R}}\psi_x(f\,'(\Phi(\psi))\psi_x)_x dxdt &= \int_{t_0}^T t^2\int_{\mathbb{R}}\psi_x(f\,'(\Phi(\psi)) - f\,'(\Phi(0)))\psi_x)_x dxdt \\ &= \int_{t_0}^T t^2\int_{\mathbb{R}}(f\,'(\Phi(\psi)) - f\,'(\Phi(0)))\psi_x\psi_{xx}dxdt, \end{aligned}$$

pela desigualdade (A.1) com $\epsilon = \mu$, e por (5.48), tem-se

$$\int_{t_0}^{T} t^2 \int_{\mathbb{R}} (f\,'(\Phi(\psi)) - f\,'(\Phi(0)))\psi_x \psi_{xx} dx dt \leq$$

$$\leq \mu \int_{t_0}^{T} t^2 \|\psi_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + \frac{1}{4\mu} \int_{t_0}^{T} t^2 \int_{\mathbb{R}} |f\,'(\Phi(\psi)) - f\,'(\Phi(0))|^2 |\psi_x|^2 dx dt$$

$$\leq \mu \int_{t_0}^{T} t^2 \|\psi_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, K_\infty) \int_{t_0}^{T} t^2 \int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 |\psi_x|^2 dx dt$$

$$\leq \mu \int_{t_0}^{T} t^2 \|\psi_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, K_1, K_\infty) \int_{t_0}^{T} t \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt$$

De modo que, por (5.49) obtemos

$$T^2 \|\psi_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu \int_{t_0}^{T} t^2 \|\psi_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt$$

$$\leq t_0^2 \|\psi_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + C(\mu, K_1, K_\infty) \int_{t_0}^{T} t \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt.$$

Portanto, fazendo $t_0 \to 0^+$, conforme (5.43) acima, obtém-se então

$$T^2 \|\psi_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu \int_{t_0}^{T} t^2 \|\psi_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq C(\mu, K_1, K_\infty) \int_{t_0}^{T} t \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt$$

para todo $T \geq t_0$, onde $C(\mu, K_1, K_\infty) > 0$ depende de μ, K_1, K_∞.

De modo que por (5.32) acima, obtemos

$$T^2 \|\psi_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu \int_{0}^{T} t^2 \|\psi_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq C(\mu, K_1, K_\infty) \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{1}{2}} \tag{5.51}$$

para todo $T > 0$.

Em particular, resulta

$$\|\psi_x(\cdot,T)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\mu, K_1, K_\infty) \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})} T^{-\frac{3}{4}} \quad \forall\, T > 0. \tag{5.52}$$

Como $\psi_x(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{u(x,t)} a(v) dv = a(u(x,t)) u_x(x,t)$

fornece

$$|\psi_x(x,t)| \geq \mu |u_x(x,t)|$$

resulta de (5.52) que

$$\mu \|u_x(x,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\mu, K_1, K_\infty) \|u(\cdot,0)\|_{L^1(\mathbb{R})} t^{-\frac{3}{4}}$$

e o resultado está mostrado. $\square$

Teorema 5.10 (Desigualdade de Energia 2). *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (5.27), (5.28), com $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\begin{aligned} T^4 \|u_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu \int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \\ \leq C(\mu, K_1, K_\infty) \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{1}{2}} (1 + T^2) \quad \forall\, T > 0 \end{aligned} \tag{5.53}$$

para alguma constante $C(\mu, K_1, K_\infty) > 0$ que depende apenas dos parâmetros μ, K_1, K_∞ dados acima.

Demonstração: Derivando a equação (5.27) em relação a x, multiplicando por $t^4 u_x$ e integrando em $\mathbb{R} \times [t_0, T]$, onde $t_0 \in]0, T[$ é dado em (5.43) acima, obtemos

$$\begin{aligned} T^4 \|u_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu \int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq t_0^4 \|u_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ +4 \int_{t_0}^{T} t^3 \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + 2 \int_{t_0}^{T} t^4 \int_{\mathbb{R}} f'(u) u_x u_{xx} dx dt \\ -2 \int_{t_0}^{T} t^4 \int_{\mathbb{R}} a'(u) u_x^2 u_{xx} dx dt \end{aligned} \tag{5.54}$$

Pela desigualdade (A.1), tomando $\epsilon = \frac{\mu}{3}$, obtemos

$$\begin{aligned} 2 \int_{t_0}^{T} t^4 \int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)| |u_x| |u_{xx}| dx dt \\ \leq \frac{\mu}{3} \int_{t_0}^{T} t^4 \int_{\mathbb{R}} |u_{xx}|^2 dx dt + \frac{3}{\mu} \int_{t_0}^{T} t^4 \int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)|^2 |u_x|^2 dx dt \end{aligned}$$

de modo que por (5.40), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{3}{\mu} \int_{t_0}^{T} t^4 \int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)|^2 |u_x|^2 dx dt \leq C(\mu, K_\infty) \int_{t_0}^{T} t^4 \|u(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \\ \leq C(\mu, K_1, K_\infty) \int_{t_0}^{T} t^3 \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq C(\mu, K_1, K_\infty) T^2 \int_{t_0}^{T} t \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2 \int_{t_0}^{T} t^4 \int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)| |u_x| |u_{xx}| dx dt \\ \leq \frac{\mu}{3} \int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, K_1, K_\infty) T^2 \int_{t_0}^{T} t \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt. \end{aligned}$$

Por outro lado pela desigualdade (A.1) com $\epsilon = \frac{\mu}{3}$, e por (A.13)

$$2\int_{t_0}^{T} t^4 \int_{\mathbb{R}} |a^{'}(u)| u_x^2 |u_{xx}| dx dt \leq 2C(K_\infty) \int_{t_0}^{T} t^4 \int_{\mathbb{R}} u_x^2 |u_{xx}| dx dt$$

$$\leq \frac{\mu}{3} \int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, K_\infty) \int_{t_0}^{T} t^4 \|u_x(\cdot,t)\|^4_{L^4(\mathbb{R})} dt$$

$$\leq \frac{\mu}{3} \int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, K_\infty) \int_{t_0}^{T} t^4 \|u_x(\cdot,t)\|^3_{L^2(\mathbb{R})} \|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} dt$$

$$\leq \frac{2\mu}{3} \int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, K_\infty) \int_{t_0}^{T} t^4 \|u_x(\cdot,t)\|^4_{L^2(\mathbb{R})} \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt$$

$$\leq \frac{2\mu}{3} \int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + C(\mu, K_1, K_\infty) \int_{t_0}^{T} t \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt.$$

usando (5.44).
E também

$$4\int_{t_0}^{T} t^3 \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq 4T^2 \int_{t_0}^{T} t \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt.$$

de modo que, por (5.54), obtemos

$$T^4 \|u_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu \int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt$$

$$\leq t_0^4 \|u_x(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + C(\mu, K_1, K_\infty)(1+T^2) \int_{t_0}^{T} t \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt$$

Portanto, fazendo $t_0 \to 0^+$, conforme (5.43) acima, obtém-se então

$$T^4 \|u_x(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu \int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt$$
$$\leq C(\mu, K_1, K_\infty)(1+T^2) \|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})} T^{\frac{1}{2}}$$

para todo $T \geq t_0$, onde $C(\mu, K_1, K_\infty) > 0$ depende de μ, K_1, K_∞ como afirmado em (5.53). □

Em particular, como em (5.43) acima, podemos concluir de (5.53) acima que existe seqüência $(t_0^{(\ell)})_\ell$ com

$$t_0^{(\ell)^5} \|u_{xx}(\cdot, t_0^{(\ell)})\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \to 0, \quad t_0^{(\ell)} \searrow 0 \tag{5.55}$$

ao $\ell \to \infty$: de fato, dado $\hat{t_0} \in \,]0,1[$ qualquer, temos por (5.53) que

$$\int_{\hat{t_0}/2}^{\hat{t_0}} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq C(\mu, K_1, K_\infty) \hat{t_0}^{\frac{1}{2}},$$

de modo que existe $t_0 \in [\frac{\hat{t_0}}{2}, \hat{t_0}]$ tal que

$$t_0^4 \|u_{xx}(\cdot, t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2C(\mu, K_1, K_\infty)\hat{t_0}^{-\frac{1}{2}},$$

e assim,

$$t_0^5 \|u_{xx}(\cdot, t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2C(\mu, K_1, K_\infty)\hat{t_0}^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 5.11. *Supondo $a, f \in C^2$, e sendo $u(\cdot, t)$ solução (5.27), (5.28), com $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\begin{aligned} &T^7 \|u_{xx}(\cdot, T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu \int_{t_0}^T t^7 \|u_{xxx}(\cdot, t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \\ &\leq C(\mu, K_1, K_\infty)\|u(\cdot, 0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}(1 + T^2)T^{\frac{5}{2}} \end{aligned} \tag{5.56}$$

para todo $T > 0$, onde $C(\mu, K_1, K_\infty) > 0$ é uma constante que depende apenas dos parâmetros μ, K_1, K_∞ acima.

Demonstração: Derivando a equação (5.8) duas vezes com relação a x, multiplicando por $t^7 u_{xx}$ e integrando por partes em $\mathbb{R} \times [t_0, T]$, $t_0 > 0$ tomado como em (5.55), obtemos

$$\begin{aligned} &T^7 \|u_{xx}(\cdot, T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mu \int_{t_0}^T t^7 \|u_{xxx}(\cdot, t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq t_0^7 \|u_{xx}(\cdot, t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &+7 \int_{t_0}^T t^6 \|u_{xx}(\cdot, t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt + 2 \int_{t_0}^T t^7 \int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)||u_{xx}||u_{xxx}| dx dt \\ &+2 \int_{t_0}^T t^7 \int_{\mathbb{R}} f''(u) u_x^2 u_{xxx} dx dt - 2 \int_{t_0}^T t^7 \int_{\mathbb{R}} a''(u) u_x^3 u_{xxx} dx dt \\ &-6 \int_{t_0}^T t^7 \int_{\mathbb{R}} a'(u) u_x u_{xx} u_{xxx} dx dt. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Pela desigualdade (A.1), tomando $\epsilon = \frac{\mu}{5}$, obtemos

$$\begin{aligned} &2 \int_{t_0}^T t^7 \int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)||u_{xx}||u_{xxx}| dx dt \\ &\leq \frac{\mu}{5} \int_{t_0}^T t^7 \int_{\mathbb{R}} |u_{xxx}|^2 dx dt + \frac{5}{\mu} \int_{t_0}^T t^7 \int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)|^2 |u_{xx}|^2 dx dt \end{aligned}$$

de modo que por (5.40), tem-se

$$\begin{aligned} &\frac{5}{\mu} \int_{t_0}^T t^7 \int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)|^2 |u_{xx}|^2 dx dt \leq C(\mu, K_\infty) \int_{t_0}^T t^7 \|u(\cdot, t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u_{xx}(\cdot, t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \\ &\leq C(\mu, K_1, K_\infty) \int_{t_0}^T t^6 \|u_{xx}(\cdot, t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt \leq C(\mu, K_1, K_\infty) T^2 \int_{t_0}^T t^4 \|u_{xx}(\cdot, t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt. \end{aligned}$$

Assim,

$$2\int_{t_0}^{T} t^7 \int_{\mathbb{R}} |f^{'}(u) - f^{'}(0)||u_{xx}||u_{xxx}|dxdt$$
$$\leq \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + C(\mu, K_1, K_\infty)T^2 \int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt.$$

Por outro lado pelas desigualdades (A.1), (A.14) e por (5.44), obtemos

$$2\int_{t_0}^{T} t^7 \int_{\mathbb{R}} |a^{''}(u)||u_x^3||u_{xxx}|dxdt$$
$$\leq \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + \frac{5}{\mu}C(K_\infty)\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_x(\cdot,t)\|^6_{L^6(\mathbb{R})}dt$$
$$\leq \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + C(\mu, K_\infty)\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_x(\cdot,t)\|^6_{L^6(\mathbb{R})}dt$$
$$\leq \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + C(\mu, K_\infty)\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_x(\cdot,t)\|^4_{L^2(\mathbb{R})}\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt$$
$$\leq \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + C(\mu, K_1, K_\infty)\int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt.$$

Pela desigualdade (A.1) tomando $\epsilon = \frac{\mu}{5}$, pela desigualdade de Sobolev (A.16), e por (5.40), obtemos

$$2\int_{t_0}^{T} t^7 \int_{\mathbb{R}} f^{''}(u)u_x^2 u_{xxx}dxdt \leq \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt$$
$$+\frac{5}{\mu}\int_{t_0}^{T} t^7 \int_{\mathbb{R}} f^{''}(u)^2 u_x^4 dxdt \leq \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt$$
$$+C(\mu, K_\infty)\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_x(\cdot,t)\|^4_{L^4(\mathbb{R})}dt \leq \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt$$
$$+C(\mu, K_\infty)\int_{t_0}^{T} t^7 \|u(\cdot,t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt$$
$$+C(\mu, K_1, K_\infty)\int_{t_0}^{T} t^6 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \leq \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt$$
$$+C(\mu, K_1, K_\infty)T^2\int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt.$$

E também, pelas desigualdades (A.1), (A.14) e por (5.44), obtemos

$$
\begin{aligned}
-6\int_{t_0}^{T} t^7 \int_{\mathbb{R}} a^{'}(u)u_x u_{xx} u_{xxx} dxdt &\leq \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + C(\mu, K_\infty)\int_{t_0}^{T} t^7 \int_{\mathbb{R}} u_x^2 u_{xx}^2 dxdt \\
&= \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + C(\mu, K_\infty)\int_{t_0}^{T} t^7 \int_{\mathbb{R}} u_x^3 u_{xxx} dxdt \\
&\leq \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + \frac{\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + C(\mu, K_\infty)\int_{t_0}^{T} t^7 \int_{\mathbb{R}} u_x^6 dxdt \\
&= \frac{2\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + C(\mu, K_\infty)\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_x(\cdot,t)\|^6_{L^6(\mathbb{R})}dt \\
&\leq \frac{2\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + C(\mu, K_\infty)\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_x(\cdot,t)\|^4_{L^2(\mathbb{R})}\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \\
&\leq \frac{2\mu}{5}\int_{t_0}^{T} t^7 \|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + C(\mu, K_\infty)\int_{t_0}^{T} t^4 \|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt.
\end{aligned}
$$

De modo que, por (5.57), obtemos

$$
\begin{aligned}
&T^7\|u_{xx}(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu\int_{t_0}^{T} t^7\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \\
&\leq t_0^7\|u_{xx}(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + C(\mu, K_1, K_\infty)T^2\int_{t_0}^{T} t^4\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt.
\end{aligned}
$$

Fazendo $t_0 \to 0^+$ como em (5.55), obtemos então

$$
\begin{aligned}
&T^7\|u_{xx}(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu\int_{t_0}^{T} t^7\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \\
&\leq C(\mu, K_1, K_\infty)T^2\int_{t_0}^{T} t^4\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt
\end{aligned}
$$

e então, por (5.53) acima,

$$
\begin{aligned}
&T^7\|u_{xx}(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \mu\int_{t_0}^{T} t^7\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt \\
&\leq C(\mu, K_1, K_\infty)T^2(1+T^2)\|u(\cdot,0)\|^2_{L^1(\mathbb{R})}T^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

como afirmado. □

5.2.2 O caso n-dimensional, $n \geq 2$

Consideremos, agora, $u(\cdot,t)$ solução de (5.1), com $u(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, onde $1 \leq p \leq 2$ e qualquer n.

Teorema 5.12. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (5.1), (5.2), tem-se*

$$T^{\frac{n}{p}}\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\mu\int_0^T t^{\frac{n}{p}}\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \\ \leq C(n,p)\mu^{-\left(\frac{n}{p}-\frac{n}{2}\right)}\|u(\cdot,0)\|^2_{L^p(\mathbb{R}^n)}T^{\frac{n}{2}} \tag{5.58}$$

para todo $T>0$, onde $C(n,p)$ denota uma constante cujo valor depende apenas de p e da dimensão n.

Demonstração: No caso $p=2$, tem-se, multiplicando (5.1) por $2u(\mathbf{x},t)$ e integrando em $\mathbb{R}^n\times[0,T]$, para $T>0$ dado,

$$\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\langle\nabla u, A(u)\nabla u\rangle d\mathbf{x}dt = \|u(\cdot,0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

de modo que, por (5.3),

$$\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\mu\int_0^T \|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \leq \|u(\cdot,0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

o que implica (5.58) no caso $p=2$. Considerando, agora, $1\leq p<2$, podemos proceder como segue. Multiplicando (5.1) por $2t^{\frac{n}{p}}u(\mathbf{x},t)$ e integrando em $\mathbb{R}^n\times[0,T]$, obtemos, pelo teorema do divergente,

$$T^{\frac{n}{p}}\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\int_0^T t^{\frac{n}{p}}\int_{\mathbb{R}^n}\langle A(u)\nabla u,\nabla u\rangle d\mathbf{x}dt \\ = \frac{n}{p}\int_0^T t^{\frac{n}{p}-1}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt,$$

de modo que, por (5.3),

$$T^{\frac{n}{p}}\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\mu\int_0^T t^{\frac{n}{p}}\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \\ \leq \frac{n}{p}\int_0^T t^{\frac{n}{p}-1}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt.$$

Usando a desigualdade de Sobolev

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p}\ \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1/n}{(1/p-1/2+1/n)}}\ \|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(1/p-1/2)}{(1/p-1/2+1/n)}},$$

onde $C_{n,p}>0$ é uma constante que depende de n,p, (ver Teorema (A.17), Apêndice A), obtemos, usando (5.21),

$$E_p(T) \leq \frac{n}{p}\ C^2_{n,p}\ \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2}{n}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)}\int_0^T t^{\frac{n}{p}-1}\|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2(1/p-1/2)}{(1/p-1/2+1/n)}}dt \tag{5.59}$$

onde

$$E_p(T) := T^{\frac{n}{p}} \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\mu \int_0^T t^{\frac{n}{p}} \|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt.$$

Pela desigualdade de Hölder (ver (A.5), Apêndice A), obtemos

$$\int_0^T t^{\frac{n}{p}-1} \cdot \|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2(1/p-1/2)}{(1/p-1/2+1/n)}} dt \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1/n}{(1/p-1/2+1/n)}} \cdot$$
$$\cdot T^{\frac{1/2}{(1/p-1/2+1/n)}} \cdot \left(\int_0^T t^{\frac{n}{p}} \|Du(\cdot,t)\|^2 dt_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{(1/p-1/2)}{(1/p-1/2+1/n)}},$$

de modo que, por (5.59), resulta

$$E_p(T) \leq \tilde{C}_{n,p} \cdot \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2/n}{(1/p-1/2+1/n)}} \cdot T^{\frac{1/2}{(1/p-1/2+1/n)}} \cdot$$
$$\cdot \mu^{-\frac{(1/p-1/2)}{(1/p-1/2+1/n)}} \cdot E_p(T)^{\frac{(1/p-1/2)}{(1/p-1/2+1/n)}}$$

para $\tilde{C}_{n,p} > 0$ constante dependendo apenas de n, p. Logo, obtemos

$$E_p(T) \leq C_{n,p} \cdot \|u_0\|^2_{L^p(\mathbb{R}^n)} \cdot T^{\frac{n}{2}} \cdot \mu^{-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}$$

para $C_{n,p} > 0$ dependendo apenas de n, p, o que mostra (5.58). □

Em particular, resulta de (5.58) que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} (\mu t)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \tag{5.60}$$

para todo $t > 0$.

De modo análogo, utilizando o Teorema 5.12 podemos mostrar (ver [Hagstrom et al., 2003] para detalhes) que, para cada $\ell \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} T^{\frac{n}{p}+\ell} \|D^\ell u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \mu \int_0^T t^{\frac{n}{p}+\ell} \|D^{\ell+1} u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt \\ \leq C_\ell(n,p,\mu,K_p,K_\infty) \|u_0\|^2_{L^p(\mathbb{R}^n)} T^{\frac{n}{2}} \end{aligned} \tag{5.61}$$

para todo $T > 0$, onde $C_\ell > 0$ denota uma constante que depende de ℓ, n, p, μ e K_p, K_∞ dados por

$$\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K_p, \qquad \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K_\infty. \tag{5.62}$$

Em particular, para cada ℓ,

$$\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_\ell(n,p,\mu,K_p,K_\infty)^{\frac{1}{2}}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-\frac{\ell}{2}} \tag{5.63}$$

para todo $t > 0$; assim,

$$\|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_1(n,p,\mu,K_p,K_\infty)^{\frac{1}{2}}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}} \tag{5.64}$$

$$\|D^2 u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_2(n,p,\mu,K_p,K_\infty)^{\frac{1}{2}}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-1} \tag{5.65}$$

e assim sucessivamente. Resulta, então, para todo $t > 0$,

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq C_n \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}} \|D^n u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(n,p,\mu,K_p,K_\infty)\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2p}}\end{aligned} \tag{5.66}$$

por (A.17), (5.60) e (5.63).

Teorema 5.13. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (5.1) com $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, onde $1 \leq p \leq 2$, tem-se*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p,K_p,K_\infty)\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)} \tag{5.67}$$

para todo $p \leq r \leq \infty$, onde $C(n,p,K_p,K_\infty) > 0$ é uma constante que depende dos parâmetros n, p, K_p e K_∞.

Demonstração: Os casos $r = p$ e $r = \infty$ foram considerados anteriormente, ver Teorema 5.1 e (5.66) acima. No caso $p < r < \infty$, temos, por (A.9),

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} &\leq \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{r}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{p}{r}} \\ &\leq C(n,p,K_p,K_\infty)\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\end{aligned}$$

para todo $t > 0$ como afirmado. □

5.3 Comportamento assintótico, caso $p = 1$

Nesta seção, investigamos o comportamento assintótico (ao $t \to +\infty$) de várias normas das soluções $u(\cdot,t)$ do problema (5.1), (5.2) no caso $p = 1$, i.e.,

$u(\cdot,t)$ é dada por

$$u_t + div\ \mathbf{f}(u) = div(A(u)\nabla u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \tag{5.68}$$

$$u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{5.69}$$

onde $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Inicialmente, vamos considerar o caso unidimensional (i.e., $n = 1$), e depois o caso em que $n \geq 2$.

5.3.1 O caso unidimensional, $n = 1$

Temos, aqui, $u(\cdot,t)$ dada por (5.8), (5.9), i.e.,

$$u_t + f(u)_x = (a(u)u_x)_x, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{5.70}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{5.71}$$

onde $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Iniciamos substituindo a equação (5.70) por outra mais simples, que aproxima (5.70) suficientemente bem (ao $t \to +\infty$) para os nossos propósitos. Intuitivamente, na equação (5.70),

$$u_t + f^{'}(u)u_x = a(u)u_{xx} + a^{'}(u)u_x^2 \tag{5.72}$$

temos, para $t >> 1$, que

$$\begin{aligned} u_t + (f^{'}(0) + f^{''}(0)u + O(u^2))u_x \ &= \\ (a(0) + a^{'}(0)u + O(u^2))u_{xx} \ &+ \ (a^{'}(0) + a^{''}(0)u + O(u^2))u_x^2 \end{aligned}$$

tem a forma

$$u_t + (f^{'}(0) + f^{''}(0)u)u_x + O(t^{-2}) = a(0)u_{xx} + O(t^{-2})$$

visto que temos, por (5.40), para a, f, suaves,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= O(t^{-1/2}) \\ \|u_x(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= O(t^{-1}) \\ \|u_{xx}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= O(t^{-3/2}). \end{aligned}$$

Em particular, sendo $v(\cdot,t)$ definida por

$$v_t + f^{'}(0)v_x + f^{''}(0)vv_x = a(0)v_{xx} \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{5.73}$$

esperamos ter $v(\cdot,t)$ próxima de $u(\cdot,t)$ para $v(\cdot,0)$ adequada. Este fato é estabelecido no próximo Teorema, seguindo a discussão em [Zingano, 2004a]. É preciso aqui, assumir que $f^{''}(\mathrm{u})$ seja Hölder contínua em $\mathrm{u} = 0$, isto é, que se tenha

$$\|f^{''}(\mathrm{u}) - f^{''}(0)\| \leq \Gamma|\mathrm{u}|^{\alpha}, \quad |u| \leq \Omega \tag{5.74}$$

para algum $\Omega > 0$, e constantes Γ, $\alpha > 0$. Antes de mostrarmos o próximo Teorema, precisamos observar o seguinte Lema:

Lema 5.1. *Para cada $\epsilon > 0$ existe $t_0 = t_0(\mu, k_1, \alpha, \Gamma, \Omega; \epsilon) > 0$ tal que*

$$\|u(\cdot,t) - w(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \epsilon \quad t > t_0, \tag{5.75}$$

onde $w(\cdot,t)$ é dada por

$$w_t + f^{'}(0)w_x + f^{''}(0)ww_x \;=\; a(0)w_{xx}, \quad t > t_0 \tag{5.76}$$

$$w(\cdot,t_0) \;=\; u(\cdot,t_0) \tag{5.77}$$

Demonstração: Seja $\hat{t_0} = \hat{t_0}(\mu, K_1, \Omega) \geq 1$ suficientemente grande de modo a se ter

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \Omega \quad t \geq \hat{t_0} \tag{5.78}$$

e tomemos $t_0 \geq \hat{t_0}$, a ser escolhido abaixo (ver (5.85)). Como $u(\cdot,t)$ satisfaz

$$u_t + f^{'}(u)u_x = (a(u)u_x)_x$$

isto é,

$$\begin{aligned} u_t + f^{'}(0)u_x + f^{''}(0)uu_x + [f^{'}(u) - f^{'}(0) - f^{''}(0)u]u_x \\ = a(0)u_{xx} + ([a(u) - a(0)]u_x)_x \end{aligned} \tag{5.79}$$

e como $w(\cdot,t)$ satisfaz

$$w_t + f^{'}(0)w_x + f^{''}(0)ww_x = a(0)w_{xx}, \quad t > t_0$$

obtemos que $\theta(t) = u(\cdot,t) - w(\cdot,t)$, satisfaz

$$\theta_t + f^{'}(0)\theta_x + f^{''}(0)\left(\frac{\theta^2}{2} + \theta w\right)_x = a(0)\theta_{xx} - \mathcal{F}(u)u_{xx} + ([a(u)]u_x)_x, \tag{5.80}$$

$$onde \quad \mathcal{F}(u) = f^{'}(u) - f^{'}(0) - f^{''}(0)u \quad e \quad [a(u)] = a(u) - a(0). \tag{5.81}$$

Observando que

$$\mathcal{F}(u) = (f^{''}(\xi) - f^{''}(0))u$$

para $|\xi| \leq |u|$, obtemos, de (5.74) e de (5.78)

$$|\mathcal{F}(u)| = |f^{''}(\xi) - f^{''}(0)||u| \leq \Gamma|\xi|^{\alpha}|u| \leq \Gamma|u|^{1+\alpha}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $t \geq \hat{t_0}$, ou seja

$$|\mathcal{F}(u(\cdot,t))| \leq \Gamma|u(\cdot,t)|^{1+\alpha} \quad t \geq \hat{t_0}. \tag{5.82}$$

Analogamente,

$$[a(u)] = a(u) - a(0) = a^{'}(\eta)u \; para \; |\eta| \leq |u|, \; de \; modo \; que \tag{5.83}$$

$$|[a(u(\cdot,t))]| \leq C(\Omega)|u(x,t)| \quad t \geq \hat{t}_0. \tag{5.84}$$

Tomando $L_{\delta}^{'}(\cdot)$ função sinal regularizada ver (5.17) - (5.20) acima, multiplicando (5.80) por $L_{\delta}^{'}(\theta)$ e integrando por partes em $\mathbb{R} \times [t_0, T]$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} L_{\delta}(\theta(x,T))dx = \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} f^{''}(0)L_{\delta}^{''}(\theta)\theta\left(\frac{\theta}{2} + w\right)\theta_x dxdt$$
$$-\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} a(0)L_{\delta}^{''}(\theta)\theta_x^2 dxdt - \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_{\delta}^{'}(\theta)\mathcal{F}(u)u_x dxdt + \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_{\delta}^{'}(\theta)([a(u)]u_x)_x dxdt$$

visto que por (5.77), temos $\theta(\cdot, t_0) = 0$.
Usando o fato de que $L_{\delta}^{''} \geq 0$ e que $|L_{\delta}^{'}(\theta)| \to 1$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} L_{\delta}(\theta(x,T))dx \leq f^{''}(0)\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L_{\delta}^{''}(\theta)\theta\left(\frac{\theta}{2} + w\right)\theta_x dxdt$$
$$+\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(u)||u_x|dxdt + \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} |[a(u)]||u_{xx}|dxdt + \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} |a^{'}(u)||u_x|^2 dxdt$$

Pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos que

$$f''(0)\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}} L''_\delta(\theta)\theta\left(\frac{\theta}{2}+w\right)\theta_x dxdt \to 0 \quad ao\ \delta\to 0,$$

enquanto as demais integrais podem ser estimadas como segue.

Por (5.82), (A.6), (5.40), (5.41) e (5.44), tem-se

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{F}(u)||u_x|dxdt \le \Gamma\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}}|u|^{1+\alpha}|u_x|dxdt$$

$$\le \Gamma\int_{t_0}^{T}\|u(\cdot,t)\|^{\alpha}_{L^\infty(\mathbb{R})}\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \Gamma C(\mu,K_1,K_\infty)\int_{t_0}^{T} t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}dt$$

$$= \frac{2}{\alpha}\Gamma C(\mu,K_1,K_\infty)(t_0^{-\frac{\alpha}{2}}-T^{-\frac{\alpha}{2}}) \le \frac{1}{\alpha}C(\mu,K_1,K_\infty)\Gamma t_0^{-\frac{\alpha}{2}}$$

$\forall\ \delta>0$ e para todo $T\ge t_0$.

Analogamente por (5.84), (A.6), (A.1), (5.32) e (5.56),

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}}|[a(u)]||u_{xx}|dxdt \le C(K_\infty)\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}}|u||u_{xx}|dxdt$$

$$\le \frac{1}{\mu}C(K_\infty)\int_{t_0}^{T} t^{-1}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt + \frac{\mu}{4}C(K_\infty)\int_{t_0}^{T} t\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt$$

$$\le C(\mu,K_1,K_\infty)\int_{t_0}^{T} t^{-\frac{3}{2}}dt \le C(\mu,K_1,K_\infty)t_0^{-\frac{1}{2}}$$

$\forall\ \delta>0$ e para todo $T\ge t_0$.

Finalmente, por (5.44),

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}}|a'(u)||u_x|^2dxdt \le C(K_\infty)\int_{t_0}^{T}\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dt$$

$$\le C(\mu,K_1,K_\infty)\int_{t_0}^{T} t^{-\frac{3}{2}}dt \le C(\mu,K_1,K_\infty)t_0^{-\frac{1}{2}}$$

$\forall\ \delta>0$ e para todo $T\ge t_0$.

Portanto, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta(x,T))dx \le \frac{1}{\alpha}C(\mu,K_1,K_\infty)\Gamma t_0^{-\frac{\alpha}{2}} + C(\mu,K_1,K_\infty)t_0^{-\frac{1}{2}} + C(\mu,K_1,K_\infty)t_0^{-\frac{1}{2}}$$

para todo $T\ge t_0$, $\delta>0$.

Fazendo $\delta\to 0$,

$$\|\theta(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \le C(\mu,K_1,K_\infty,\alpha,\delta,\Gamma)(t_0^{-\frac{\alpha}{2}}+t_0^{-\frac{1}{2}}+t_0^{-\frac{1}{2}}) \tag{5.85}$$

para todo $T\ge t_0$, de onde segue o resultado. □

Tendo mostrado o Lema acima, podemos obter o seguinte resultado fundamental:

Teorema 5.14. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (5.8), (5.9), e $v(\cdot,t)$ solução de*

$$v_t + f^{'}(0)v_x + f^{''}(0)vv_x = a(0)v_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{5.86}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{5.87}$$

com $v_0 \in L^1(\mathbb{R})$ e

$$\int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx = \int_{\mathbb{R}} v_0(x)dx,$$

então

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0. \tag{5.88}$$

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, pelo Lema anterior, existe $\hat{t_0} = \hat{t_0}(\epsilon;\mu,k_1,K_\infty,\alpha,\Gamma,\delta) > 0$ tal que

$$\|w(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\ t \geq \hat{t}_0 \tag{5.89}$$

onde $w(\cdot,t)$ é solução de

$$w_t + f^{'}(0)w_x + f^{''}(0)ww_x \;=\; a(0)w_{xx}, \quad t > \hat{t}_0 \tag{5.90}$$

$$w(\cdot,\hat{t}_0) \;=\; u(\cdot,\hat{t}_0) \tag{5.91}$$

Ora, $v(\cdot,t)$ é solução de (5.86), com $v(\cdot,\hat{t}_0) = v_0$, onde $v_0(x) = v(x,\hat{t}_0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e tem a mesma massa que $w(\cdot,\hat{t_0})$, então

$$\int_{\mathbb{R}} v_0(x)dx = \int_{\mathbb{R}} v(x,\hat{t_0})dx = \int_{\mathbb{R}} v(x,0)dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} u(x,0)dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,\hat{t_0})dx = \int_{\mathbb{R}} w(x,\hat{t_0})dx$$

Agora, por [Zingano, 2004a], temos então

$$\|w(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \quad \textit{ao } t \to +\infty$$

de modo que, existe $t \geq \hat{t_0}$ tal que

$$\|w(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, t \geq \hat{t}_0. \tag{5.92}$$

Portanto, por (5.89), (5.92), obtemos

$$\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t) - w(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|w(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \epsilon$$

para todo $t \geq \hat{t}_0$, de onde segue o resultado. □

Teorema 5.15. *Seja $u(\cdot,t)$ solução de (5.8), (5.9) e $v(\cdot,t)$ solução de*

$$v_t + f^{'}(0)v_x + f^{''}(0)vv_x = a(0)v_{xx} \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{5.93}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{5.94}$$

com $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ e

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,0)dx = \int_{\mathbb{R}} v(x,0)dx,$$

então,

$$t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{ao } t \to +\infty \tag{5.95}$$

para cada $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração: Caso $p = 1$, já visto no Teorema anterior. Caso $p = 2$: pela desigualdade de Interpolação (A.9), temos que

$$t^{\frac{1}{4}}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq t^{\frac{1}{4}}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\mathbb{R})}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

e portanto, por (5.40) e (A.7),

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{4}}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\mathbb{R})}(t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + t^{\frac{1}{2}}\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(\mu, K_1, K_\infty)\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \end{aligned}$$

ao $t \to +\infty$, pelo caso $p = 1$.

Caso $p = \infty$: pela desigualdade de Sobolev (A.11), temos que

$$t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})}(t\|D_u(\cdot,t) - D_v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}}$$

e assim, por (A.7) e (5.44),

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \sqrt{2}t^{\frac{1}{8}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})}(t^{\frac{3}{4}}\|D_u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}} \\ &+ \sqrt{2}t^{\frac{1}{8}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})}(t^{\frac{3}{4}}\|D_v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(\mu,K_1,K_\infty)(\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}} \to 0 \end{aligned}$$

ao $t \to +\infty$, pelo caso $p = 2$.

Caso $1 < p < \infty$: pela desigualdade de Interpolação (A.9),

$$t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|^{\frac{1}{p}}_{L^1(\mathbb{R})}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|^{1-\frac{1}{p}}_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

e então,

$$t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|^{\frac{1}{p}}_{L^1(\mathbb{R})}(t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^{\left(1-\frac{1}{p}\right)} \to 0$$

pelos casos anteriores $p = 1$ e $p = \infty$. □

Teorema 5.16. *Sendo $u(\cdot,t)$, $\hat{u}(\cdot,t)$ soluções de (5.8), (5.9), com $u(\cdot,0)$ e $\hat{u}(\cdot,0)$ em $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ tendo a mesma massa, então*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \tag{5.96}$$

para cada $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração: Caso $p = 1$: pelo Teorema 5.15, sendo $v(\cdot,t)$ solução de (5.86), (5.87) com $v_0(x) = u(x,0)$, temos

$$\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \quad \textit{ao } t \to +\infty$$
$$\|\hat{u}(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \quad \textit{ao } t \to +\infty$$

e portanto

$$\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|v(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0.$$

Caso $p = 2$: pela desigualdade de Interpolação (A.9), temos que

$$t^{\frac{1}{4}}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq t^{\frac{1}{4}}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\mathbb{R})}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

e portanto, por (A.7) e (5.32),

$$t^{\frac{1}{4}}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\mathbb{R})}(t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+t^{\frac{1}{2}}\|\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}} \to 0$$

pelo caso $p = 1$.

Caso $p = \infty$: pela desigualdade de Sobolev (A.11), temos que

$$t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2}(t^{\frac{7}{4}}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}}(t^{-\frac{3}{4}}\|u_x(\cdot,t)-\hat{u}_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}}$$

e assim, por (A.7) e (5.44),

$$t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(\mu,K_1,K_\infty)(t^{\frac{7}{4}}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}} \to 0$$

pelo caso $p = 2$.

Caso $1 < p < \infty$: pela desigualdade de Interpolação (A.9),

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{p}}_{L^1(\mathbb{R})}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|^{1-\frac{1}{p}}_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

e então,

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{p}}_{L^1(\mathbb{R})}(t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)-\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^{1-\frac{1}{p}} \to 0$$

pelos casos anteriores $p = 1$ e $p = \infty$. $\square$

Teorema 5.17. *Seja $u(\cdot,t)$ solução de (5.8), correspondente a um estado inicial $u(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Então, para cada $1 \leq p \leq \infty$*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \gamma_p(m), \tag{5.97}$$

onde $\gamma_p(m)$ é dado por

$$\gamma_1(m) = |m|, \quad se\ p = 1;$$

$$\begin{aligned} \gamma_p(m) &= \frac{|m|}{\sqrt{4\pi a(0)}}(4a(0))^{\frac{1}{2p}}\left|\frac{2a(0)}{f''(0)m}(1-e^{-\frac{f''(0)m}{2a(0)}})\right|\|\mathcal{F}\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad se\ f''(0) \neq 0 \\ \gamma_p(m) &= \frac{|m|}{\sqrt{4\pi a(0)}}\left(\frac{4\pi a(0)}{p}\right)^{\frac{1}{2p}}, \quad se\ f''(0) = 0 \end{aligned}$$

se $1 < p < \infty$, *e*

$$\begin{aligned}
\gamma_\infty(m) &= \frac{|m|}{\sqrt{4\pi a(0)}}\left|\frac{2a(0)}{f''(0)m}(1-e^{-\frac{f''(0)m}{2a(0)}})\right| \|\mathcal{F}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad se\ f''(0) \neq 0 \\
\gamma_\infty(m) &= \frac{|m|}{\sqrt{4\pi a(0)}}, \quad se\ f''(0) = 0
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{F} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ *é dada por*

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\mu - h.erf(\xi)}$$

onde

$$erf(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\xi e^{-s^2}ds, \qquad \mu = \frac{1+e^{-\frac{f''(0)m}{2a(0)}}}{2},$$

$$h = |1 - e^{-\frac{f''(0)m}{2a(0)}}|, \qquad m = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)dx.$$

Demonstração: Sendo $v(\cdot,t)$ dada por

$$\begin{aligned}
v_t + f'(0)v_x + f''(0)vv_x &= a(0)v_{xx}, \quad t > 0 \\
v(\cdot,0) &= u(\cdot,0)
\end{aligned}$$

temos, pelo Teorema 5.15

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \tag{5.98}$$

para cada $1 \leq p \leq \infty$.

Como

$$\begin{aligned}
t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} - t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
&\leq t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} + t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

obtemos o resultado por (5.98) e o fato de se ter

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \gamma_p(m),$$

conforme resultados apresentados no Capítulo 4, ([Zingano, 2004b]) e ([Silva, 2003]).

$\square$

5.3.2 O caso n-dimensional, $n \geq 2$

Nesta subseção, investigamos o comportamento assintótico (ao $t \to +\infty$) de várias normas das soluções $u(\cdot,t)$ do problema

$$u_t + div\ \mathbf{f}(u) = div(A(u)\nabla u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \tag{5.99}$$

$$u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{5.100}$$

onde $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, com $n \geq 2$. Lembrando as seguintes estimativas, obtidas na Seção 5.2,

$$||u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_0(n,p,\mu,K_1,K_\infty)||u(\cdot,0)||_{L^1(\mathbb{R}^n)}t^{-\frac{n}{4}} \tag{5.101}$$

$$||Du(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_1(n,p,\mu,K_1,K_\infty)||u(\cdot,0)||_{L^1(\mathbb{R}^n)}t^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \tag{5.102}$$

$$||D^\ell u(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_\ell(n,p,\mu,K_1,K_\infty)||u(\cdot,0)||_{L^1(\mathbb{R}^n)}t^{-\frac{n}{4}-\frac{\ell}{2}} \tag{5.103}$$

para cada $\ell \geq 1$, onde K_1, K_∞ são valores dados tal que

$$||u_0||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq K_1, \qquad ||u_0||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K_\infty \tag{5.104}$$

$$||u(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \hat{C}_0(n,p,\mu,K_1,K_\infty)||u(\cdot,0)||_{L^1(\mathbb{R}^n)}t^{-\frac{n}{2}} \tag{5.105}$$

$$||Du(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \hat{C}_1(n,p,\mu,K_1,K_\infty)||u(\cdot,0)||_{L^1(\mathbb{R}^n)}t^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \tag{5.106}$$

$$||D^\ell u(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \hat{C}_\ell(n,\mu,K_1,K_\infty)||u(\cdot,0)||_{L^1(\mathbb{R}^n)}t^{-\frac{n}{2}-\frac{\ell}{2}} \tag{5.107}$$

para $\ell \geq 1$, é natural esperar (repetindo o argumento da subseção 5.3.1) que as soluções da equação (5.99) sejam bem aproximadas (para $t >> 1$) pelas soluções $v(\cdot,t)$ da equação

$$v_t + \mathbf{f}^{'}(0)\cdot\nabla v = div(A(0)\nabla v), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \tag{5.108}$$

correspondentes a estados iniciais $v(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ com a mesma massa. De fato, isto é comprovado de modo preciso nos Teoremas 5.18 e 5.19 abaixo. Antes de obtermos estes teoremas, observemos o seguinte resultado que será útil na sua derivação.

Lema 5.2. *Dado $\epsilon > 0$, $\exists\ t_0 = t_0(\epsilon, \mu, K_1, K_\infty, n) \geq 1$ suficientemente grande tal que a solução $v(\cdot, t)$, $t \geq t_0$, de*

$$v_t + \boldsymbol{f}^{'}(0) \cdot \nabla v = div(A(0)\nabla v), \quad t \geq t_0 \tag{5.109}$$

$$v(\cdot, t_0) = u(\cdot, t_0) \tag{5.110}$$

satisfaz

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon, \quad t \geq t_0. \tag{5.111}$$

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, temos para $t_0 \geq 1$ escolhido (ver (5.118), (5.119)) a seguir que $\theta(\cdot, t) = u(\cdot, t) - v(\cdot, t)$, $t \geq t_0$, satisfaz

$$\theta_t + \mathbf{f}^{'}(0) \cdot \nabla\theta = div(A(0)\nabla\theta) + \mathcal{F}(\mathbf{x}, t), \quad t \geq t_0 \tag{5.112}$$

$$\theta(\cdot, t_0) = 0 \tag{5.113}$$

onde

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = div((A(u) - A(0)) \cdot \nabla u) - (\mathbf{f}^{'}(u) - \mathbf{f}^{'}(0)) \cdot \nabla u. \tag{5.114}$$

Multiplicando (5.112), por $L_\delta^{'}(\theta)$ definida na seção anterior, e integrando em $\mathbb{R}^n \times [t_0, T]$ para $T > t_0$ qualquer, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(\theta(\mathbf{x}, T))d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{t_0}^{T} L_\delta^{''}(\theta)\langle A(0)\nabla\theta, \nabla\theta\rangle d\mathbf{x}dt$$
$$= \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta^{'}(\theta)\mathcal{F}(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x}dt \tag{5.115}$$

onde $\mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$ é dada por (5.114) acima. Fazendo $\delta \to 0^+$, obtemos

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(\mathbf{x}, t)|d\mathbf{x}dt \tag{5.116}$$

sendo $L_\delta^{''}(\theta)\langle A(0)\nabla\theta, \nabla\theta\rangle \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$ e $\delta > 0$.

Observe que

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(\mathbf{x}, t)|d\mathbf{x}dt \leq \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^n} |\langle\mathbf{f}^{'}(u) - \mathbf{f}^{'}(0), \nabla u\rangle|d\mathbf{x}dt$$
$$+ \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^n} |div(A(u) - A(0)) \cdot \nabla u|d\mathbf{x}dt. \tag{5.117}$$

Por (5.101), (5.102), tem-se

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^n}|\langle \mathbf{f}^{'}(u)-\mathbf{f}^{'}(0),\nabla u\rangle|d\mathbf{x}dt \leq \int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^n}|\mathbf{f}^{'}(u)-\mathbf{f}^{'}(0)||\nabla u|d\mathbf{x}dt$$

$$\leq C(K_\infty)\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^n}|u(\mathbf{x},t)||\nabla u|d\mathbf{x}dt \leq C(K_\infty)\int_{t_0}^{T}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt$$

$$\leq C(\mu,K_1,K_\infty,n)\int_{t_0}^{T}t^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}dt \leq C(\mu,K_1,K_\infty,n)t_0^{-\frac{n-1}{2}} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto,

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^n}|\langle \mathbf{f}^{'}(u)-\mathbf{f}^{'}(0),\nabla u\rangle|d\mathbf{x}dt \leq C(\mu,K_1,K_\infty,n)t_0^{-\frac{n-1}{2}} \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{5.118}$$

para todo $t_0 >> 1$.

Por outro lado, pelas desigualdades (A.6), (5.101), (5.102),(5.103) obtém-se

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^n}|div(A(u)-A(0))\nabla u|d\mathbf{x}dt \leq \sum_{i,j=1}^{n}\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^n}|a_{ij}(u)-a_{ij}(0)|\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}\right|d\mathbf{x}dt$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^n}|a_{ij}^{'}(u)|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|d\mathbf{x}dt \leq C(K_\infty)n^2\int_{t_0}^{T}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|D^2u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt$$

$$+C(K_\infty)n^2\int_{t_0}^{T}\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \leq C(\mu,K_1,K_\infty,n)\int_{t_0}^{T}t^{-\frac{n}{2}-1}dt \leq C(\mu,K_1,K_\infty,n)t_0^{-\frac{n}{2}} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo,

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^n}|div(A(u)-A(0))\nabla u|d\mathbf{x}dt \leq C(\mu,K_1,K_\infty,n)t_0^{-\frac{n}{2}} \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{5.119}$$

para todo $t_0 >> 1$.

Assim, de (5.118) e (5.119) juntamente com (5.117) e (5.116), segue o resultado. □

Teorema 5.18. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (5.99), (5.100) e $v(\cdot,t)$ solução de*

$$v_t+\boldsymbol{f}^{'}(0)\cdot\nabla v = div(A(0)\nabla v), \quad t>0 \tag{5.120}$$

$$v(\cdot,0)\in L^1(\mathbb{R}^n) \tag{5.121}$$

com

$$\int_{\mathbb{R}^n}u(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n}v(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x},$$

então,

$$\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\to 0 \quad \textit{ao } t\to+\infty. \tag{5.122}$$

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, pelo Lema anterior existe $\hat{t}_0 = \hat{t}_0(\mu, K_1, K_\infty, n, \epsilon) \geq 1$ tal que

$$\|u(\cdot,t) - w(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, t \geq \hat{t}_0 \tag{5.123}$$

onde $w(\cdot,t)$, $t \geq \hat{t}_0$ é dada por

$$\begin{aligned} w_t + \mathbf{f}'(0)\cdot\nabla w &= div(A(0)\nabla w), \quad t \geq \hat{t}_0 && (5.124)\\ w(\cdot,\hat{t}_0) &= u(\cdot,\hat{t}_0) && (5.125)\end{aligned}$$

e daí, para todo $t \geq \hat{t_0}$

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\leq \|u(\cdot,t) - w(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|w(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \|w(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

para todo $t \geq \hat{t}_0$, para algum $t_0 \geq \hat{t}_0$ suficientemente grande. □

Teorema 5.19. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (5.99), (5.100), e $v(\cdot,t)$ solução de*

$$v_t + \boldsymbol{f}'(0)\cdot\nabla v = div(A(0)\nabla v), \quad t > 0 \tag{5.126}$$

$$v(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \tag{5.127}$$

com

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} v(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x},$$

então

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad ao\ t \to +\infty \tag{5.128}$$

para cada $1 \leq p \leq \infty$, uniformemente em p.

Demonstração: Caso $p = 1$, já visto no Teorema anterior. Caso $p = 2$: pela desigualdade de Interpolação (A.9), temos que

$$t^{\frac{n}{4}}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq t^{\frac{n}{4}}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

e portanto, por (5.40),

$$t^{\frac{n}{4}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}+t^{\frac{n}{2}}\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)})^{\frac{1}{2}} \to 0$$

ao $t \to +\infty$, pelo caso $p=1$.

Caso $p=\infty$: pela desigualdade de Sobolev (A.11), temos que

$$t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \sqrt{2}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}}(t^n\|D^n u(\cdot,t)-D^n v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})^{\frac{1}{2}}$$

e assim, por (A.7) e (5.103),

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq (\sqrt{2}t^{\frac{n}{8}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{3n}{4}}\|D^n u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})^{\frac{1}{2}} \\ &+ \sqrt{2}t^{\frac{n}{8}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{3n}{4}}\|D^n v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})^{\frac{1}{2}}) \to 0 \end{aligned}$$

ao $t \to +\infty$, pelo caso $p=2$.

Caso $1<p<\infty$: pela desigualdade de Interpolação (A.9),

$$t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}}$$

e então,

$$t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}}(t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)})^{(1-\frac{1}{p})} \to 0$$

pelos casos anteriores $p=1$ e $p=\infty$. □

Com os resultados acima, podemos investigar o comportamento de $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ ao $t \to +\infty$ apartir dos resultados obtidos no Capítulo 4.

Teorema 5.20. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (5.99), (5.100), então,*

$$\lim_{t\to+\infty}\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = |m| \tag{5.129}$$

onde m é a massa de $u(\cdot,t)$, dada por

$$m = \int_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x}$$

Demonstração: Sendo $v(\cdot,t)$ solução de

$$\begin{aligned} v_t + \mathbf{f}^{'}(0)\cdot\nabla v &= div(A(0)\nabla v), \quad t>0 \\ v(\cdot,0) &= u(\cdot,0) \end{aligned}$$

temos, por (5.122)

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0$$

enquanto

$$\lim_{t\to+\infty} \|v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = |m|$$

por (4.11).

Como

$$\begin{aligned} \|v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} - \|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\le \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\le \|v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

o resultado segue. □

Teorema 5.21. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (5.99), (5.100), então,*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \tag{5.130}$$

onde $m = \int_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x}$ é a massa de $u(\cdot,t)$ e $\lambda = (\lambda_1\ldots\lambda_n)^{\frac{1}{n}}$, onde $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ são os autovalores de $\mathcal{A} = (A(0)+A(0)^T)/2$.

Demonstração: Sendo $v(\cdot,t)$ solução de

$$\begin{aligned} v_t + \mathbf{f}^{'}(0)\cdot\nabla v &= div(A(0)\nabla v) = div(\mathcal{A}\nabla v), \quad t>0 \\ v(\cdot,0) &= u(\cdot,0) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{A} = (A(0)+A(0)^T)/2$, temos, pelo Teorema 4.4,

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}}\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \tag{5.131}$$

onde $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n)^{\frac{1}{n}}$, $spec(\mathcal{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Ademais, por (5.128), temos

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{n}{2}} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

de modo que o resultado segue de

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}} \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} - t^{\frac{n}{2}} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq t^{\frac{n}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq t^{\frac{n}{2}} \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + t^{\frac{n}{2}} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.22. *Sendo $u(\cdot, t)$ solução de (5.99), (5.100), então, para cada $1 \leq p \leq \infty$, temos*

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{4\pi\lambda}{p}\right)^{\frac{n}{2p}} \tag{5.132}$$

onde $m = \int_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x}, 0) d\boldsymbol{x}$ é a massa de $u(\cdot, t)$, e $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n)^{\frac{1}{n}}$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de $\mathcal{A} = (A(0) + A(0)^T)/2$.

Demonstração: Os casos $p = 1$ e $p = \infty$ já foram considerados acima. Seja então, $1 < p < \infty$: tomando $v(\cdot, t)$ solução de

$$\begin{aligned} v_t + \mathbf{f}'(0) \cdot \nabla v &= div(A(0)\nabla v) = div(\mathcal{A}\nabla v), \quad t > 0 \\ v(\cdot, 0) &= u(\cdot, 0) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{A} = (A(0) + A(0)^T)/2$, temos, pelo Teorema 4.5,

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)} \|v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{4\pi\lambda}{p}\right)^{\frac{n}{2p}} \tag{5.133}$$

onde $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n)^{\frac{1}{n}}$, $spec(\mathcal{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Ademais, por (5.128), temos

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

de modo que o resultado segue de

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)} \|v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} - t^{\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq t^{\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq t^{\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)} \|v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + t^{\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.23. *Sendo $u(\cdot,t)$, $\hat{u}(\cdot,t)$ soluções de (5.99) correspondentes a estados iniciais $u(\cdot,0), \hat{u}(\cdot,0) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tendo a mesma massa, então*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0 \tag{5.134}$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$, uniformemente em p.

Demonstração: Sendo $v(\cdot,t)$ solução de

$$\begin{aligned} v_t + \mathbf{f}'(0)\cdot\nabla v &= div(A(0)\nabla v), \quad t>0 \\ v(\cdot,0) &= u(\cdot,0) \end{aligned}$$

temos, por (5.128),

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|\hat{u}(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

de modo que o resultado segue de

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|\hat{u}(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

□

5.4 Comportamento assintótico, caso $1 < p \leq 2$

Para finalizar, vamos agora considerar o problema (5.1), (5.2), i.e., $u(\cdot,t)$ dada por

$$u_t + div\ \mathbf{f}(u) = div(A(u)\nabla u), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, t>0 \tag{5.135}$$

$$u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \tag{5.136}$$

onde $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 < p \leq 2$. Em contraste com os resultados obtidos no caso $p = 1$ (ver Seção 5.3 acima), a análise é bem mais simples no caso presente $p > 1$.

Teorema 5.24. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (5.135), (5.136) , onde $1 < p \leq 2$, tem-se*

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{5.137}$$

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, tomamos $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$\int_{|\mathbf{x}|>R} |u_0(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \leq \epsilon^p, \tag{5.138}$$

e consideremos $w(\cdot,t)$ dada por

$$w_t + div\ \mathbf{f}(w) = div(A(w)\nabla w), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \tag{5.139}$$

$$w(\mathbf{x},0) = w_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{5.140}$$

onde $w_0 \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$w_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_0(\mathbf{x}), & |\mathbf{x}| > R \\ 0, & |\mathbf{x}| \leq R \end{cases}$$

Pelo Teorema 5.1, temos, por (5.138) acima,

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon.$$

Por outro lado, como $w_0 - u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos, pelo Teorema 5.2,

$$\|w(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|w_0 - u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $t > 0$, de modo que pela desigualdade de Interpolação (A.9), obtemos

$$\begin{aligned} \|w(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|w(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}} \|w(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}} \\ &\leq \|w_0 - u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}} \cdot (\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}} + \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}}) \\ &= O(t^{-\frac{n}{2p}}) \to 0 \quad \textit{ao } t \to +\infty \end{aligned}$$

pelos resultados da Seção 5.2, visto que $w_0, u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Portanto, para $t > 0$ suficientemente grande, temos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|w(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u(\cdot,t) - w(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq 2\epsilon,$$

e como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue o resultado. $\square$

Na Seção 5.2, demonstramos que, quando $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = O(t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)})$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, ver Teorema 5.13. Com base no Teorema 5.24 acima, vamos agora mostrar que na verdade $\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = o(t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)})$ ao $t \to +\infty$.

Teorema 5.25. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (5.135), (5.136) , onde $1 < p \leq 2$, tem-se*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 0 \tag{5.141}$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r.

Demonstração: O caso $r = p$ foi examinado no Teorema 5.24 acima; no caso $r = \infty$, temos, pela desigualdade de Sobolev

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1/2}{(1/2+1/p)}} \cdot \|D^n u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1/p}{(1/2+1/p)}}$$

conforme Teorema (A.17), Apêndice A, que

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2p}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq C(n,p)\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1/2}{(1/2+1/p)}} \cdot t^{\frac{n}{2p}} \cdot \|D^n u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1/p}{(1/2+1/p)}} \\ &\leq C(n,p)\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1/2}{(1/2+1/p)}} \cdot \left(t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}\right)}\|D^n u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1/p}{(1/2+1/p)}} \\ &= O\left(\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1/2}{(1/2+1/p)}} \end{aligned}$$

visto que $\|D^n u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}\right)})$ por (5.63). Pelo Teorema 5.24, resulta então $t^{\frac{n}{2p}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0$ ao $t \to +\infty$, como afirmado.

Finalmente, no caso $p < r < \infty$, temos, por (A.9), Apêndice A,

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} &\leq t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{r}} \cdot \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{p}{r}} \\ &= \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{r}} \cdot \left(t^{\frac{n}{2p}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right)^{1-\frac{p}{r}} \end{aligned}$$

e o resultado segue pelos casos $r = p$ e $r = \infty$ já considerados. □

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nos Capítulos anteriores, examinamos em detalhe várias propriedades fundamentais das soluções $u(\cdot,t) \in C^0([0,\infty[, L^p(\mathbb{R}^n))$ de equações da forma

$$u_t + div\ \mathbf{f}(u) = div(A(u)\nabla u) \tag{6.1}$$

com particular atenção ao caso da equação linear do calor. A análise foi favorecida pelo fato de tais soluções serem limitadas para $t > 0$, tendo-se o princípio do máximo

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \tag{6.2}$$

para todo $0 \leq t_0 \leq t$. Esta e outras propriedades simples de $u(\cdot,t)$ permitiram uma descrição detalhada do comportamento assintótico $(t \to \infty)$ de $u(\cdot,t)$ em várias normas de interesse.

De modo similar, várias propriedades aqui discutidas podem ser obtidas para equações de advecção-difusão em meios não homogêneos dadas por

$$u_t + div\ \mathbf{f}(\mathbf{x},t,u) = div(A(\mathbf{x},t,u)\nabla u) \tag{6.3}$$

onde $\mathbf{f}, A$ são funções suaves, limitadas com A uniformemente positiva definida e

$$\sum_{j=1}^{n} v \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\mathbf{x},t,v) \geq 0 \tag{6.4}$$

para todos os valores $(\mathbf{x},t,v)$ envolvidos. Estas hipóteses garantem, em particular, a validade de (6.2) acima e propriedades adicionais de (6.1) como por exemplo a contratividade em L^1

$$\|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \tag{6.5}$$

para todo $t > 0$, a monotonicidade em t das normas $\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$, $p \leq r \leq \infty$, e o decaimento de $\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$ para $r > p$.

Contudo, os resultados mais finos obtidos para (6.1) não valem em geral; em particular, no caso $p = 1$, apesar de a massa de $u(\cdot,t)$ ser conservada, pode-se mostrar apenas que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \searrow \gamma \quad ao \;\; t \to \infty \tag{6.6}$$

para algum $\gamma \geq |m|$, podendo-se ter $\gamma > |m|$. No caso $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, tem-se novamente $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to |m|$, ver e.g. [Brzezniak e Szafirski, 1991], mas no caso $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$ o valor do limite γ em geral não é conhecido. Também não são conhecidos os valores dos demais limites estudados nas seções 4.2 e 5.3. A investigação destas propriedades no contexto da equação (6.3) representa um importante passo a ser examinado no estudo subsequente destas equações.

ANEXO A

Teorema A.1 (Desigualdade de Cauchy). *Sendo $a, b \geq 0$, tem-se*

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon}\, b^2 \quad \forall\ \epsilon > 0. \tag{A.1}$$

Demonstração: Tem-se, para todo $\epsilon > 0$ dado,

$$\begin{aligned} ab &= (\sqrt{2\epsilon}a)\ \frac{b}{\sqrt{2\epsilon}} \leq \frac{2\epsilon a^2}{2} + \frac{1}{2}\ \frac{b^2}{2\epsilon} \\ &= \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon} \end{aligned}$$

visto que $2ab \leq a^2 + b^2$. □

Teorema A.2 (Desigualdade de Young: Primeira Versão). *Sendo $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se*

$$ab \leq \frac{1}{p}\ a^p + \frac{1}{q}\ b^q \quad \forall\ a, b \geq 0. \tag{A.2}$$

Demonstração: Se $a = 0$ ou $b = 0$, (A.2) vale trivialmente. Basta então considerar $a, b > 0$. Como e^x é convexa, tem-se

$$\begin{aligned} ab &= \exp\ (\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)) \\ &\leq \frac{1}{p}\exp\ (\ln(a^p)) + \frac{1}{q}\exp\ (\ln(b^q)) \\ &= \frac{1}{p}\ a^p + \frac{1}{q}\ b^q, \end{aligned}$$

como afirmado. □

Teorema A.3 (Desigualdade de Young: Segunda Versão). *Sendo $p, q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se*

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q \quad \forall\ a, b \geq 0,\ \ \epsilon > 0 \tag{A.3}$$

onde

$$C(\epsilon) = \frac{1}{q(p\epsilon)^{\frac{p}{q}}}.$$

Demonstração: Tem-se, para $\epsilon > 0$ dado,

$$ab \leq (p\epsilon)^{\frac{1}{p}} a \frac{b}{(p\epsilon)^{\frac{1}{p}}} \leq \epsilon a^p + \frac{b^q}{q(p\epsilon)^{\frac{q}{p}}}$$

em virtude de (A.2). □

Teorema A.4 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^n$). *Sendo $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica e positiva definida, tem-se*

$$|\langle \boldsymbol{x} \,, B\boldsymbol{y}\rangle| \leq (\langle \boldsymbol{x} \,, B\boldsymbol{x}\rangle)^{\frac{1}{2}} (\langle \boldsymbol{y} \,, B\boldsymbol{y}\rangle)^{\frac{1}{2}} . \tag{A.4}$$

Demonstração: Se $\mathbf{x} = 0$ ou $\mathbf{y} = 0$ a desigualdade é óbvia. Caso contrário, procedemos do seguinte modo: Dados $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \neq 0$; Seja $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $q(t) = \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, B(\mathbf{x} + t\mathbf{y})\rangle$. Como B é positiva definida, temos, para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} q(t) = \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, B(\mathbf{x} + t\mathbf{y})\rangle &= \langle \mathbf{x}, B\mathbf{x}\rangle + t\langle \mathbf{x}, B\mathbf{y}\rangle + t\langle \mathbf{y}, B\mathbf{x}\rangle + t^2\langle \mathbf{y}, B\mathbf{y}\rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, B\mathbf{x}\rangle + 2t\langle \mathbf{x}, B\mathbf{y}\rangle + t^2\langle \mathbf{y}, B\mathbf{y}\rangle \end{aligned}$$

visto que B é simétrica, com $q(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, segue que $\langle \mathbf{x}, B\mathbf{y}\rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, B\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y}, B\mathbf{y}\rangle$, que é equivalente a (A.4). □

Teorema A.5 (Desigualdade de Hölder). *Sendo Ω mensurável $\subseteq \mathbb{R}^n$, e sendo $1 \leq p, q \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se*

$$||fg||_{L^1(\Omega)} \leq ||f||_{L^p(\Omega)}||g||_{L^q(\Omega)} \tag{A.5}$$

para toda $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$.

Demonstração: Se $p = 1$, $q = \infty$ ou $p = \infty$, $q = 1$, a desigualdade é óbvia; se $p, q > 1$ finitos são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, procede-se do seguinte modo: se $||f||_{L^p(\Omega)} = 0$ ou $||g||_{L^q(\Omega)} = 0$, (A.5) é óbvia; assim, vamos supor $||f||_{L^p(\Omega)} > 0$ e $||g||_{L^q(\Omega)} > 0$. Definindo $\tilde{f} \in L^p(\Omega)$, $\tilde{g} \in L^q(\Omega)$, via

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &:= \frac{f(x)}{||f||_{L^p(\Omega)}} \\ \tilde{g}(x) &:= \frac{g(x)}{||g||_{L^q(\Omega)}} \end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$, obtém-se

$$\|\tilde{f}\|_{L^p(\Omega)} = 1, \qquad \|\tilde{g}\|_{L^q(\Omega)} = 1$$

e, pela Desigualdade de Young (A.2),

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\tilde{f}(x)|\ |\tilde{g}(x)|\ dx &\leq \int_\Omega \left(\frac{1}{p}\ |\tilde{f}(x)|^p + \frac{1}{q}\ |\tilde{g}(x)|^q \right) dx \\
&= \frac{1}{p} \int_\Omega |\tilde{f}(x)|^p\ dx + \frac{1}{q} \int_\Omega |\tilde{g}(x)|^q\ dx \\
&= \frac{1}{p}\ \|\tilde{f}\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{q}\ \|\tilde{g}\|^q_{L^q(\Omega)} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}} \int_\Omega |f(x)|\ |g(x)|\ dx \leq 1$$

que é a desigualdade (A.5), como afirmado. □

Teorema A.6 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz em $L^2(\Omega)$). *Sendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mensurável, então*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|g\|_{L^2(\Omega)} \tag{A.6}$$

para toda $f, g \in L^2(\Omega)$.

Demonstração: Resulta de (A.5) tomando p = q = 2 . □

Teorema A.7 (Desigualdade de Minkowsky). *Sendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mensurável e f, g em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$, tem-se*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)}\ \leq\ \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}. \tag{A.7}$$

Demonstração: Se $p = 1$ ou $p = \infty$, (A.7) é óbvia; se $1 < p < \infty$, procedemos do seguinte modo: se $\|f + g\|_{L^p(\Omega)} = 0$, a desigualdade é óbvia; se $\|f + g\|_{L^p(\Omega)} > 0$

tomando $1 < q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se, pela Desigualdade de Hölder (A.5),

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx \\
&\leq \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}\left(|f(x)|+|g(x)|\right) dx \\
&\leq \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|\; dx + \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|\; dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\; dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |f(x)|^p\; dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\; dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\; dx\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\
&= \|f+g\|^{\frac{p}{q}}_{L^p(\Omega)}\left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}\right)
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|f+g\|^{p-\frac{p}{q}}_{L^p(\Omega)} \;\leq\; \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)},$$

que é a Desigualdade (A.7) visto que $p - \frac{p}{q} = 1$. □

Teorema A.8 (Desigualdade de Young para a Convolução). *Sendo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$, tem-se $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \;\leq\; \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{A.8}$$

Demonstração: Se $p = 1$ ou $p = \infty$, a desigualdade é óbvia; se $1 < p < \infty$, procedemos do seguinte modo: tomando $1 < q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|f * g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy\right|^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\; |g(x-y)|dy\right]^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{\frac{1}{q}}\; |f(y)|^{\frac{1}{p}}\; |g(x-y)|\; dy\right]^p dx \\
&\leq \|f\|^{\frac{p}{q}}_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)|^p\; dy\right] dx \\
&= \|f\|^{\frac{p}{q}}_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^p\; dx\right] dy \\
&= \|f\|^{1+\frac{p}{q}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

onde se usou a Desigualdade de Hölder (A.5) e o Teorema de Fubini (ver [Royden, 1968]). Logo, elevando na $1/p$, obtém-se

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \;\leq\; \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

que é a desigualdade (A.8) visto que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. □

Teorema A.9 (Desigualdade de Interpolação). *Sendo $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 \leq p < \infty$, tem-se $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ para cada $p \leq r \leq \infty$, com*

$$\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{r}} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{p}{r}}. \tag{A.9}$$

Demonstração: Para $p < r < \infty$, temos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^r d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^p \; \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{r-p} d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{p}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{p}{r}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{r}}.
\end{aligned}$$

□

Teorema A.10. *Se $f \in C^0([a,b])$ e $\int_a^b f(t)dt \leq M$, para $a,\ b,\ M \in \mathbb{R}$, $a < b$, então existe $t_* \in [a,b]$ tal que*

$$f(t_*) \leq \frac{M}{b-a}. \tag{A.10}$$

Demonstração: Se não houvesse tal t_*, teríamos

$$f(t) > \frac{M}{b-a} \qquad \textit{para todo } t \in [a,b]$$

e então teríamos de ter

$$\int_a^b f(t)dt \; > \int_a^b \frac{M}{b-a} dt = M,$$

contradizendo a hipótese sobre f. □

Teorema A.11 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 1). *Sendo* $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$, *tem-se* $\mathrm{u} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ *e*

$$||\mathrm{u}||_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2}\ ||\mathrm{u}||^{1/2}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} ||\mathrm{u}_x||^{1/2}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \tag{A.11}$$

Demonstração: Tem-se pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (A.6),

$$\begin{aligned}
\mathrm{u}(\bar{x})^2 &= 2\int_{-\infty}^{\bar{x}} \mathrm{u}(x)\mathrm{u}_x(x)dx \\
&\leq 2\left(\int_{-\infty}^{\bar{x}} (\mathrm{u}(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\bar{x}} (\mathrm{u}_x(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{u}(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{u}_x(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\ ||\mathrm{u}||_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}\ ||\mathrm{u}_x||_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Logo,

$$|\mathrm{u}(\bar{x})| \leq \sqrt{2}\ ||\mathrm{u}||^{1/2}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} ||\mathrm{u}_x||^{1/2}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \qquad \forall \bar{x} \in \mathbb{R},$$

de onde segue (A.11) $\square$

Teorema A.12 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 2). *Sendo* $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$||\mathrm{u}||_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \leq 2^{\frac{1-p/2}{1+p/2}} ||\mathrm{u}||^{\frac{p}{1+p/2}}_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} ||\mathrm{u}_x||^{\frac{1-p/2}{1+p/2}}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \tag{A.12}$$

Demonstração: Tem-se, por (A.11), (A.9),

$$\begin{aligned}
||\mathrm{u}||_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} &\leq ||\mathrm{u}||^{\frac{p}{2}}_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} ||\mathrm{u}||^{1-\frac{p}{2}}_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})} \\
&\leq \sqrt{2}^{1-\frac{p}{2}}\ ||\mathrm{u}||^{\frac{p}{2}}_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} ||\mathrm{u}||^{\frac{1}{2}-\frac{p}{4}}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} ||\mathrm{u}_x||^{\frac{1}{2}-\frac{p}{4}}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

de onde segue o resultado. $\square$

Teorema A.13 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 3). *Sendo* $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$||\mathrm{u}||_{\mathrm{L}^4(\mathbb{R})} \leq \sqrt[4]{2}\ ||\mathrm{u}||^{3/4}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} ||\mathrm{u}_x||^{1/4}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \tag{A.13}$$

Demonstração: Tem-se

$$\begin{aligned}\|\mathrm{u}\|^4_{\mathrm{L}^4(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{u}(x)|^4 dx \\ &\leq \|\mathrm{u}\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}\|\mathrm{u}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

e, então, por (A.11),

$$\|\mathrm{u}\|^4_{\mathrm{L}^4(\mathbb{R})} \leq 2\|\mathrm{u}\|^3_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}\|\mathrm{u}_x\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})},$$

o que mostra (A.13), como afirmado. □

Teorema A.14 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 4). *Sendo* $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$\|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^6(\mathbb{R})} \leq \sqrt[3]{2}\ \|\mathrm{u}\|^{2/3}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}\|\mathrm{u}_x\|^{1/3}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \tag{A.14}$$

Demonstração: Por (A.11) tem-se,

$$\begin{aligned}\|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^6(\mathbb{R})} &\leq \|\mathrm{u}\|^{2/3}_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}\|\mathrm{u}\|^{1/3}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \left(\sqrt{2}\ \|\mathrm{u}\|^{1/2}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}\|\mathrm{u}_x\|^{1/2}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}\right)^{2/3}\|\mathrm{u}\|^{1/3}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

que é a desigualdade (A.14). □

Teorema A.15 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 5). *Sendo* $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$\|\mathrm{u}_x\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \leq \|\mathrm{u}\|^{1/2}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}\|\mathrm{u}_{\mathrm{xx}}\|^{1/2}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \tag{A.15}$$

Demonstração: Integrando por partes, tem-se

$$\begin{aligned}\|\mathrm{u}_x\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{u}_x\mathrm{u}_x dx = -\int_{\mathbb{R}} \mathrm{u}\mathrm{u}_{xx} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{u}|\ |\mathrm{u}_{xx}|\ dx \leq \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}\|\mathrm{u}_{\mathrm{xx}}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

pela desigualdade (A.6). □

Teorema A.16 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 6). *Sendo* $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$\|\mathrm{u}_x\|_{\mathrm{L}^4(\mathbb{R})} \leq \sqrt{3}\|\mathrm{u}\|^{1/2}_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}\|\mathrm{u}_{\mathrm{xx}}\|^{1/2}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \tag{A.16}$$

Demonstração: Integrando por partes e utilizando a desigualdade (A.1), tem-se

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{u}_x^3 \mathrm{u}_x dx &= -3\int_{\mathbb{R}} \mathrm{u}_x^2 \mathrm{u}_{xx} \mathrm{u} dx \\ &\leq 3\int_{\mathbb{R}} \mathrm{u}_x^2 |\mathrm{u}_{xx}||\mathrm{u}| dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{u}_x^4 dx + \frac{9}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{u}_{xx}^2 \mathrm{u}^2 dx\end{aligned}$$

mas,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{u}_x^4 dx \leq \frac{9}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{u}_{xx}^2 \mathrm{u}^2 dx$$

assim,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{u}_x^4 dx \leq 9\int_{\mathbb{R}} \mathrm{u}_{xx}^2 \mathrm{u}^2 dx \leq 9\|\mathrm{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{u}_{xx}^2 dx$$

$$\|\mathrm{u}_x\|^4 \leq 9\|\mathrm{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|\mathrm{u}_{xx}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

isto é,

$$\|\mathrm{u}_x\| \leq \sqrt{3}\|\mathrm{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|\mathrm{u}_{xx}\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}}$$

como afirmado. □

Teorema A.17 (Desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg). *Sejam* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *e* $j, m \in \mathbb{Z}$ *com* $0 \leq j < m$ *tal que*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a\left(\frac{1}{q} - \frac{m}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{r}$$

para $a \in [j/m, 1[$. *Então, existe constante* $C > 0$ *dependendo apenas de* m, j, n, p, q, r *tal que*

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D^m u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^a \|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{1-a} \tag{A.17}$$

para toda $u \in C_0^m(\mathbb{R}^n)$. *Quando* $m < j + \frac{n}{q}$, *(A.17) vale também no caso de se ter* $a = 1$.

Demonstração: Ver [Friedman, 1969], PDEs, pp. 22-27 (Seção 1.9). □

ANEXO B

Teorema B.1. *Sendo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, simétrica e positiva definida, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \boldsymbol{x}, A^{-1}\boldsymbol{x}\rangle} d\boldsymbol{x} = (4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}} \quad \forall\ t > 0 \tag{B.1}$$

onde $(\lambda = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n)^{\frac{1}{n}}$; $\qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in spec(A)$.

Demonstração: Seja $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ base *ortonormal* de $\mathbb{R}^1$ formada por autovetores de A com $A\overrightarrow{u_j} = \lambda_j\overrightarrow{u_j}$, $1 \leq j \leq n$. Então, sendo: $Q = [\overrightarrow{u_1}|\overrightarrow{u_2}|\ldots|\ \overrightarrow{u_n}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ temos Q *ortogonal* e AQ $=$ QΛ, $\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Em particular, $\Lambda = Q^TAQ$ e $\Lambda^{-1} = Q^TA^{-1}Q$, e daí fazendo a mudança de variável $\boldsymbol{\xi} = Q^T\mathbf{x}$ e usando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha\langle\ \mathbf{x}\ ,\ A^{-1}\mathbf{x}\ \rangle} d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha\langle\ Q\boldsymbol{\xi}\ ,\ A^{-1}Q\boldsymbol{\xi}\ \rangle} |detQ| d\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha\langle\boldsymbol{\xi}\ ,\ \Lambda^{-1}\boldsymbol{\xi}\ \rangle} d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{j=1}^n \frac{\alpha}{\lambda_j}\boldsymbol{\xi}_j^2} d\boldsymbol{\xi} = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\alpha}{\lambda_j}\boldsymbol{\xi}_j^2} d\boldsymbol{\xi} = \left(\frac{\pi\lambda}{\alpha}\right)^{\frac{n}{2}}\end{aligned}$$

Tomando $\alpha = \frac{1}{4t}$, segue o resultado. $\square$

Teorema B.2. *O volume v_n da bola unitária em $\mathbb{R}^n$ é dado por*

$$v_n = \int_{|\boldsymbol{\xi}|\leq 1} d\boldsymbol{\xi} = \frac{2}{n}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \tag{B.2}$$

onde $\Gamma(\cdot)$ *denota a função Gama de Euler.*

Demonstração: De (B.1) segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|\boldsymbol{\xi}|^2} d\boldsymbol{\xi} = 1$$

e, escrevendo $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\omega} r$, $\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}$, $r = |\boldsymbol{\xi}|$

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|\boldsymbol{\xi}|^2} d\boldsymbol{\xi} = \int_0^{+\infty}\int_{|\boldsymbol{\omega}|=1} e^{-\pi r^2} r^{n-1} d\boldsymbol{\omega} dr = \sigma_n \int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2} r^{n-1} dr$$

onde σ_n é a área da superfície esférica de raio 1, em $\mathbb{R}^n$.

Introduzindo $t = \pi r^2$, temos

$$\int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2} r^{n-1} dr = \frac{\pi^{-\frac{n}{2}}}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(-1+\frac{n}{2})} dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \Gamma(\frac{n}{2}),$$

de modo que

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Segue daí

$$v_n = \int_{|\boldsymbol{\xi}|\leq 1} d\boldsymbol{\xi} = \int_0^1 \int_{|\boldsymbol{\omega}|=1} r^{n-1} d\boldsymbol{\omega} dr = \sigma_n \int_0^1 r^{n-1} dr = \frac{\sigma_n}{n},$$

o que prova (B.2). $\square$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Brzezniak e Szafirski, 1991] Brzezniak, Z. e Szafirski, B. (1991). Asymptotic behavior of L^1 norm of solutions to parabolic. *Bull. Proc. Polish Acad. Sci. Math*, (39):1–10.

[Crandall e Tartar, 1980] Crandall, M. e Tartar, L. (1980). Some relations between nonexpansive and order preserving mappings. *Pro.Amer.Math.Soc.*, (78):391–401.

[Friedman, 1969] Friedman, A. (1969). *Partial Differential Equations.* Holt, Rinehart and Winston, New York.

[Hagstrom et al., 2003] Hagstrom, T., Lorenz, J., e Zingano, P. R. (2003). On advection-diffusion equations, i. *Submetido.*

[Hagstrom et al., 2005] Hagstrom, T., Lorenz, J., e Zingano, P. R. (2005). On advection-diffusion equations, ii. *Em preparação.*

[Harabetian, 1988] Harabetian, E. (1988). Rarefactions and large time behavior for parabolic equations and monotone schemes. *Comm.Math.Phys*, (114):527–536.

[Kreiss e Lorenz, 1989] Kreiss, H. O. e Lorenz, J. (1989). *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations.* Academic Press, New York.

[Royden, 1968] Royden, H. L. (1968). *Real Analysis.* Macmillan, New York, segunda edição.

[Rudin, 1986] Rudin, W. (1986). *Real and Complex Analysis.* Singapore: Mcgraw-Hill, terceira edição.

[Silva, 2003] Silva, A. M. C. (2003). Equações de advecção-difusão: propriedades e comportamento assintótico em 1-d. Dissertação de mestrado, UFRGS, Porto Alegre.

[Zingano, 1999] Zingano, P. R. (1999). Nonlinear L^2 stability under large disturbances. *J. Comp.Appl.Math.*, (103):207–219.

[Zingano, 2004a] Zingano, P. R. (2004a). Asymptotic behavior of the L^1 norm of solutions to nonlinear parabolic equations. *Comm. Pure Appl. Anal.*, (3):151–159.

[Zingano, 2004b] Zingano, P. R. (2004b). Some new asymptotic results for burgers equation. *Submetido*.