UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE MATEMÁTICA LICENCIATURA

DANIELA BARCELLOS HAAS

UMA EXPERIÊNCIA DE CONTAGEM NO ENSINO MÉDIO

Porto Alegre

2012

DANIELA BARCELLOS HAAS

UMA EXPERIÊNCIA DE CONTAGEM NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como exigência parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Orientadora: Prof.ª Dr.ª Marilaine de Fraga Sant'Ana

Porto Alegre
2012

UMA EXPERIÊNCIA DE CONTAGEM NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como exigência parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Marilaine de Fraga Sant'Ana

Aprovado em ....

Banca Examinadora:

....

Profa. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana

Instituto de Matemática da UFRGS

....

Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Instituto de Matemática da UFRGS

....

Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana

Instituto de Matemática da UFRGS

Dedico este trabalho aos meus avós Lacy Antônio Haas e Dinorá Haas a quem devo a minha vinda a Porto Alegre. Aos meus pais pelo apoio e amor incondicional. E ao meu irmão, companheiro de todas as horas.

RESUMO

O presente Trabalho de Conclusão tem por objetivo avaliar uma proposta de prática pedagógica para o ensino de Análise Combinatória em uma turma de segundo ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Protásio Alves, considerando o uso do jogo “A senha” como uma forma de introduzir o conteúdo de forma dinâmica; e o método de contagem para formalizar os conceitos de permutação, arranjo e combinação. Também é objetivo avaliar o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino de Análise Combinatória aplicado em situações cotidianas, ou oriundas de outras áreas da realidade. Inicialmente é explicado como é feita a abordagem através do Método de Contagem baseada em SANTOS, MELLO E MURARI (2007), CARVALHO (2006) e ALMEIDA (2010). Em seguida, é apresentada a definição de Modelagem Matemática, tomando como embasamento teórico os autores BARBOSA (2001, 2003, 2004), BIEMBENGUT; HEIN (2000) e BASSANEZI (1999). Por fim, são relatadas atividades aplicadas e os resultados obtidos.

Palavras-chave: Método de contagem, Modelagem Matemática, Análise Combinatória

ABSTRACT

The god of this work is to analyze a proposal of pedagogical practice in the field of Combinatorics in a high school class of Colégio Estadual Protásio Alves (State School Protásio Alves), considering the use of the game “A senha” (The Password) as a way of introducing the content in a dynamic way; and the counting principle to formalize the concepts of Permutation, Arrangement and Combination. Also is a god evaluate the use of Modeling Mathematic as a strategy to teach Combinatorics in day-to-day situations. Initially it is explained the approach though the Counting Principle based on SANTOS, MELLO and MURARI (2007), CARVALHO (2006) and ALMEIDA (2010). Following, it is presented the definition of Modeling Math taking theoretical basis on the authors BARBOSA (2001, 2003, 2004), BIEMBENGUT;HEIN (2000) and BASSANEZI (1999). At last, it is presented applied the activities and the results obtained.

Keywords: Counting Principle, Modeling Mathematics, Combinatorics

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante os anos que cursei o Ensino Fundamental e o Ensino Médio da escola básica tive maior afinidade com o conteúdo de matemática, tinha facilidade com os números, operações e interpretação de problemas. Desde cedo, os exercícios que mais me encantavam eram aqueles que envolviam raciocínio lógico, nos quais, nós, como alunos, poderíamos partir de conhecimentos básicos para resolvê-los, sem a necessidade do uso de fórmulas pré-definidas, ou procedimentos memorizados. Estes exigiam que o aluno pensasse a respeito do que estava sendo ensinado.

Foi no curso de Licenciatura em Matemática, enquanto cursava a disciplina de Combinatória I, que conheci outras formas de ensino. Estas permitiam compreender o raciocínio desenvolvido para chegar às fórmulas de Análise Combinatória, por mim tão conhecidas, de Permutação, Arranjo e Combinação. Nós tínhamos autonomia de partir de conhecimentos básicos para resolver as situações-problema que eram propostas. Não estava sendo imposto como deveríamos resolvê-las, poderíamos tirar nossas próprias conclusões do melhor meio para encontrar a resolução dos exercícios. Desta forma, além de trabalharmos em conjunto, estávamos cientes da razão dos cálculos que estavam sendo realizados, e assim poderíamos resolver não só exercícios similares aos exemplos dados, mas outros exercícios de Análise Combinatória.

Encantada com essa possibilidade, e levando em conta que, o ensino escolar está limitado, quase sempre, ao treinamento no uso de fórmulas e algoritmos para encontrar o número de arranjo, combinações ou permutações, não proporcionando que os alunos encontrem as referidas fórmulas pelo uso da manipulação de objetos (SCHLIEMANN, 2001), concluí que seria interessante elaborar uma prática em sala de aula, na qual os alunos tivessem aulas similares as que eu tive na faculdade, de forma que eles primeiramente entendessem como calcular, para então chegar a uma generalização. Afinal, para poder formar indivíduos capazes de pensar criticamente e promover mudanças não é suficiente que aprendam a memorizar e aplicar fórmulas e regras matemáticas, o aluno tem que utilizar a Matemática como um instrumento no crescimento pessoal, ao invés de se adaptar apenas a Matemática escolar (ALMEIDA, 2010).

O objetivo deste trabalho é, então, avaliar uma proposta de prática pedagógica para o ensino de Análise Combinatória em uma turma de segundo ano do Ensino Médio, considerando o uso do jogo "A senha"[1] como uma forma de introduzir o conteúdo de forma dinâmica. Afinal, "além de proporcionar prazer e diversão, o jogo pode representar um desafio e provocar o pensamento reflexivo do aluno." (BERTOLDO; RUSCHEL, s.a., p.9) e o método de contagem para formalizar os conceitos de permutação, arranjo e combinação, permitindo a participação e interação dos alunos durante todo este processo. Por fim, também é objetivo avaliar o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino da aplicabilidade da Análise Combinatória em situações cotidianas, ou oriundas de outras áreas da realidade.

Antes de descrever as atividades realizadas e o desenvolvimento dos alunos, apresento a razão da escolha do tema Análise Combinatória, e em sequência um aporte teórico envolvendo o tema de acordo com a abordagem utilizada - Métodos de Contagem - neste trabalho com o auxílio de argumentos encontrados em texto dos autores como SANTOS, MELLO E MURARI autores do livro Introdução à Análise Combinatória (2007), CARVALHO (2006) e ALMEIDA (2010). Este embasamento teórico construído direcionou o planejamento, realização e reflexão da prática.

No capítulo seguinte, explico os motivos que me levaram a escolher a Modelagem Matemática como metodologia de ensino para realizar o fechamento da prática desse trabalho. Apresento razões para a Modelagem Matemática ser inserida na escola, e cito algumas maneiras de como fazê-lo. Tendo como principais fontes autores como BARBOSA (2001, 2003, 2004), BIEMBENGUT; HEIN (2000) e BASSANEZI (1999).

No quarto capítulo são descritas as atividades. Ele é dividido em quatro partes: na primeira parte abordo quais atividades foram elaboradas; na segunda e terceira partes apresento o desenvolvimento dos alunos durante o ensino de Análise Combinatória, as principais dificuldades, e as adaptações e mudanças que foram

[1] O jogo "A Senha" foi criado...

sendo feitas no decorrer da prática; por fim, na quarta parte exponho como é a elaboração de um projeto de Modelagem Matemática, os principais temas abordados pelos alunos, e como foi para eles elaborarem um trabalho que demonstrasse a aplicação que a matemática tem no cotidiano.

Finalizo com uma análise da prática, considerando todo o rendimento e participação dos alunos no decorrer das atividades. Juntamente com esta análise, acrescento as minhas considerações sobre o trabalho realizado, os aspectos positivos e negativos encontrados no transcorrer das atividades, além de melhorias que considero relevantes para que as atividades sejam melhores desenvolvidas.

2. ANÁLISE COMBINATÓRIA

2.1 Por que Análise Combinatória?

A escolha do conteúdo a ser trabalhado foi realizada enquanto cursava a disciplina de Combinatória I, componente curricular do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, ministrada pela professora Marilaine Sant'Ana. A primeira abordagem do conteúdo de Análise Combinatória foi enquanto aluna da segunda série do Ensino Médio. Sabia como resolver os exercícios, conhecia as fórmulas a serem utilizadas e os atalhos. Porém, me deixou bastante entusiasmada a forma como a professora conduziu o ensino-aprendizagem em sala de aula: éramos convidados a resolver uma situação-problema, sem explicações prévias. Desta forma, tínhamos autonomia de escolher o método de resolução, comparar os erros, e aprender de maneira dinâmica.

Começou com exercícios simples de contagem, e os métodos de resolução eram discutidos com o grande grupo, e depois passávamos à generalização para quaisquer situações similares. Dessa forma, estava claro, para a maioria dos colegas, quais contas estavam sendo feitas, e a razão pela qual elas estavam sendo feitas, e, caso desse um "branco"[2], não precisávamos nos preocupar por não nos lembrarmos das fórmulas, éramos capazes de resolver os exercícios propostos através de raciocínio lógico.

Além disso, através de conversas informais com os colegas em sala de aula, percebi que nem todos haviam tido aulas que abordassem Análise Combinatória durante sua trajetória na escola básica. E mais tarde, falando com os professores onde atualmente atuo como docente, percebi que este conteúdo é, muita vezes, deixado de lado, para ser abordado por último, se ainda houver tempo, e argumentam que são apenas fórmulas para decorar e basta aplicá-las em exercícios simples de arranjo, combinação ou permutação. Desta forma, considerei relevante a elaboração de uma atividade, e a aplicação desta, em uma turma de Ensino Médio, para mostrar que estudar e aprender combinatória pode ser divertido e interessante, não apenas um conteúdo resumido a aplicações de fórmulas, como comentado.

---

[2] "Dar branco" – expressão que faz referência a esquecer algo. Por exemplo, "Deu um branco na hora da prova, não sabia mais como resolver as questões" Significa que o aluno esqueceu o que havia estudado.

Então, enquanto professora de Matemática da Escola Estadual Protásio Alves, tive a oportunidade de trabalhar com uma turma de segundo ano do Ensino Médio, composta por 38 alunos matriculados, destes apenas 21 eram frequentes. Eles estavam concluindo os conteúdos de Matrizes e Sistemas Lineares, e a proposta da escola seria iniciar trigonometria. No entanto, resolvi que seria melhor inverter a ordem dos conteúdos, assim poderia abordar o conteúdo de Análise Combinatória com mais calma, dando a oportunidade aos alunos de imporem o ritmo de aprendizagem.

Comecei a elaborar os planos de aula, pesquisando formas de abordagem, em que os alunos diante de uma situação-problema seriam capazes de resolver, mesmo sem eu ter feito explicações prévias. O método de contagem se encaixava perfeitamente nestes propósitos, como eu já havia confirmado nas aulas de Combinatória I.

2.2 Abordagem: Método de Contagem

O Método de Contagem é considerado bastante simples, por utilizar técnicas elementares de matemática, tais como operações aritméticas de soma, subtração, multiplicação e divisão. No entanto, os alunos e professores o avaliam como sendo um método difícil, talvez por:

> [...] diferentemente do que ocorre com outros assuntos de matemática secundária, cujo ensino muitas vezes é fortemente baseado na aplicação de fórmulas e repetição de problemas-modelo, é preciso pensar para resolver problemas, mesmo os mais simples, de contagem [...] *e assim contribui* para desenvolver a imaginação dos alunos e a sua confiança para resolver problemas. (CARVALHO, 2006, p. 3)

Com esta abordagem em mente, os alunos poderiam através de um raciocínio simples, sem exigir o uso de fórmulas, resolver os problemas propostos. Alguns exercícios serão utilizados como exemplos para explicar como podemos abordar o Método de Contagem, apresentado os tópicos de Análise Combinatória abordados em sala de aula.

Exemplo1[3]: (OMEP_2012/ 2ª fase) Juca quer pintar os algarismos do número 2013, como na figura ao lado, de modo que a região seja pintada com uma das cores branca, cinza ou preta e que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

a) De quantas maneiras diferentes ele poderá pintar o algarismos 1?

Solução: Inicialmente vamos listar todas as possibilidades de colorir o algarismo 1.

> "É importante ter um procedimento sistemático para listar todas as possibilidades, sem repetí-las. Para tal, devemos identificar as diferentes decisões a serem tomadas e examinar todas as possibilidades para cada uma delas. (CARVALHO, 2006, p. 8)

Avaliando o desenho, e o que o exercício está solicitando, temos duas decisões diferentes a serem tomadas: a escolha da cor a ser utilizada para pintar a parte superior do algarismo 1, e a escolha da cor a ser utilizada para pintar a parte inferior do algarismo 1.

A primeira decisão pode ser feita de 3 modos diferentes, já que a cor superior pode ser qualquer uma das disponíveis. Uma vez tomada esta decisão, a cor escolhida não pode mais ser usada para a parte inferior, restando então duas cores a serem escolhidas.

Assim, se escolhermos a cor preta para pintar a parte superior, podemos pintar a parte de inferior de branco ou cinza. Repetindo o processo para as outras duas cores temos um total de 6 possibilidades, como mostra a figura 1.

Figura 1 – Ilustra as possibilidades de pintar o algarismo 1 utilizando 3 cores

[3] Exercício extraído do caderno de provas de nível 2, do ano de 2012, da prova aplicada pela OBMEP. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n2-2012.pdf

Para evitar a listagem de possibilidades, pois nem sempre serão poucas, como no exemplo, devemos encontrar uma forma de generalizar para quaisquer situações, assim poderíamos ter empregado o seguinte raciocínio: a cor superior pode ser escolhida de três modos diferentes. Qualquer que seja esta escolha, restam dois modos para pintar a parte inferior do algarismo 1. Logo, o número total de possibilidades é 2+2+2 = 3x2 = 6.

O procedimento acima ilustra o Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem, que pode ser generalizado da seguinte forma:

> Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se, para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes,então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é m.n. (SANTOS, J. P. O. et al, 2007, p. 39)

O Princípio Multiplicativo também pode ser ilustrado com o auxílio de uma árvore de enumeração, como mostra a figura 2.

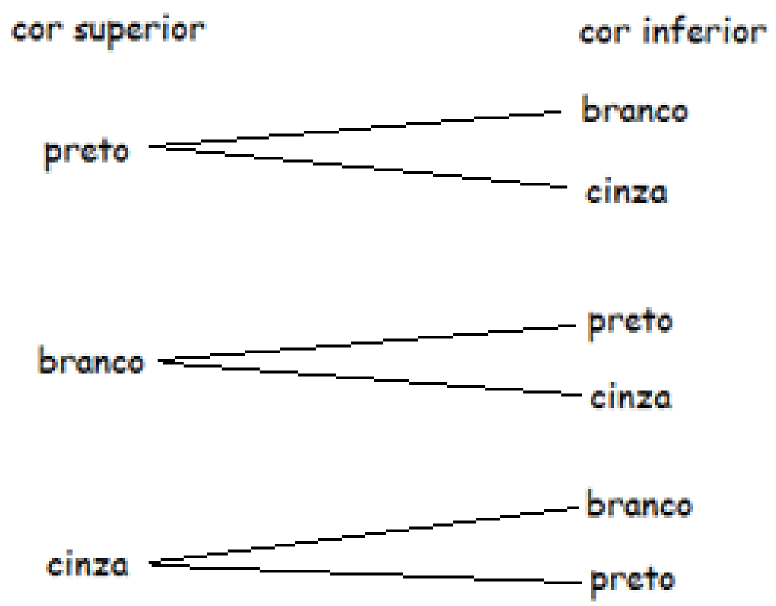


Figura 2 – Exemplo de uma Árvore de enumeração.

b) De quantas maneiras diferentes Juca poderá pintar o algarismo 3?

Solução: As decisões a serem tomadas agora são em maior quantidade, dividiremos o número 3 em regiões numeradas de 1 a 5 como ilustrado na figura 3:

Figura 3 – Ilustra a enumeração das regiões do algarismo 3.

Vamos começar pela região de ponta que mais possui fronteiras, para facilitar as decisões a serem tomadas. Neste caso é a região 3, para a qual temos 3 opções de cores para pintar. Restando 2 cores para pintar a região 2, já que uma já fora usada, e apenas 1 para pintar a região 4, pois esta faz fronteira com a região 2 e com a região 3. E para as regiões 1 e 5 temos 2 opções de cores para pintar, pois basta que seja uma cor diferente da escolhida na região 2 e da região 4 respectivamente. Portanto, empregando o Princípio Multiplicativo obtemos 3x2x1x2x2 = 24 possibilidades.

c) De quantas maneiras diferentes Juca poderá pintar o algarismo 0?

Solução: Vamos numerar as 4 regiões do algarismo 0 de 1 a 4 (como ilustra a figura 4). Para listar todas as possibilidades de pintar o zero teremos de dividir em dois casos, pois se aplicarmos direto o Princípio Multiplicativo corremos o risco de esquecer alguma possibilidade ou contar alguma onde as regiões adjacentes terão a mesma cor. Observe a figura, como exemplo:

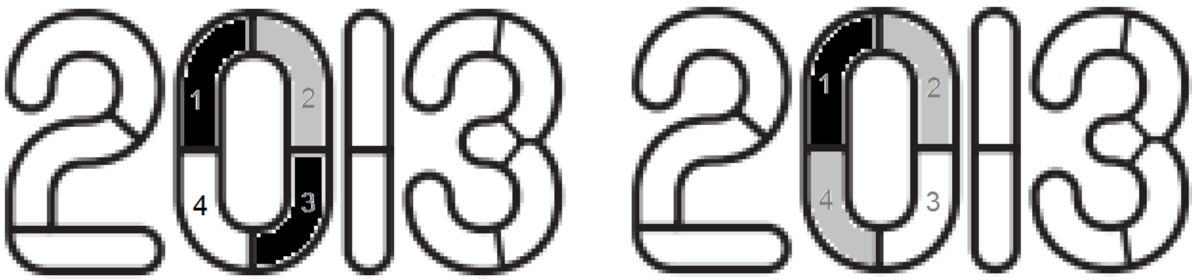


Figura 4 – Ilustra a enumeração das regiões do algarismo 0, demonstrando duas formas diferentes de colorir.

Existem 3 possibilidades de cores para pintar a região 1 (preta, cinza e branca). Supondo que a escolhida seja a cor preta, restam ainda 2 cores para pintar a região 2 (cinza e branca). Escolhendo a cor cinza, restam duas opções para pintar a região 3 (branca e preta). Se escolhermos a cor branca para colorir a região 3, para pintar a região 4 só resta a cor cinza, pois a região 4 é adjacente a região 1 (preta) e a região 3 (branca) (figura 4_direita). Mas, se escolhermos a cor preta para colorir a região 3, então restam duas cores para pintar a região 4 (branca ou cinza), pois tanto a região 1 quanto a região 3 são pretas (figura 4 _esquerda).

As possibilidades de pintar o algarismo 0 podem ser observadas na seguinte árvore de possibilidades iniciando a pintura com a cor preta na região 1, que é análoga as outras 2 cores. Totalizando 3x6 = 18 possibilidades.

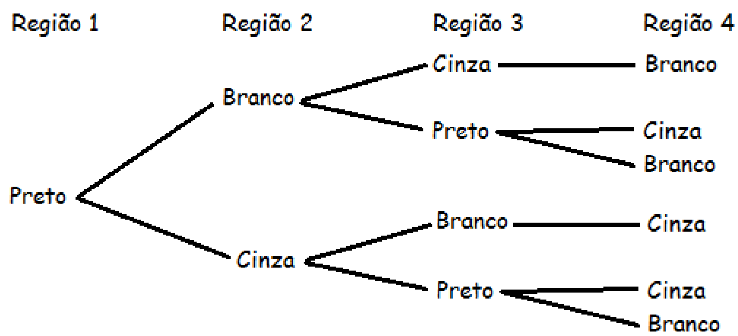


Figura 5 – Árvore de possibilidades de pintar o algarismo 0 começando pela cor preta.

Outra forma de separar os casos[4] é percebendo que:

- As cores de 1 e 3 coincidem: neste caso há três opções de cores para 1 e 3. e restam 2 opções de cores para a região 2 e 2 opções para a 4. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 0 pode ser pintado de 3x2x2 = 12 maneiras diferentes.
- As cores de 1 e 3 são diferentes: neste caso há 3 opções de cores para 1 e, para cada uma dessas, há 2 opções para pintar 3, restando 1 opção para 2 e também para 4. Assim, pelo princípio Multiplicativo o algarismo 0 pode ser pintado de 3x2x1x1=6 maneiras distintas.

[4] Resolução apresentada pela equipe da OBMEP, disponível em: http://www.obmep.org.br/provas_static/sf2n2-2012.pdf

Como um caso não está incluso no outro, o total de maneiras de pintar o algarismo zero pode ser expresso por 12+6=18 possibilidades. Este exemplo segue “um princípio básico que é denominado Princípio Aditivo: Se A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$) com, respectivamente, p e q elementos, então $A \cup B$ possui p+q elementos.” (SANTOS; et al., 2007, p. 39)

Entendo que, tendo *n* possibilidades para um caso A, e *p* possibilidades para um caso B, que não sofre interferência do caso A. Então, o total de possibilidades de acontecer a situação A ou B é n+p.

Exemplo 2: Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os números 0,2,4,6 e 8?

Solução: Vamos escolher os três algarismos sucessivamente, da esquerda para a direita veremos a seguir como a ordem é importante na tomada de decisões para facilitar a resolução do problema. Para o algarismo da centena não podemos utilizar o zero, restando 4 possibilidades para o algarismo da dezena também há 4 possibilidades, já que podemos utilizar o zero, e um dos algarismos já foi utilizado na centena. E por fim, restam três opções para o algarismo da unidade, que deve ser diferente do da centena e do da dezena. Utilizando o Princípio Multiplicativo temos: 4x4x3 = 48 possibilidades.

Aproveito o exemplo para destacar a importância da ordem das decisões a serem tomadas. Se tivéssemos começado pelas unidades, por exemplo, haveria 5 possibilidades para as unidades, 4 para opções para as dezenas e para as centenas? Depende, se o zero já estiver compondo o número temos 3 possibilidades. Caso contrário, apenas 2 possibilidades, pois o zero não pode preencher a casa das centenas. Para calcular o total de possibilidades teríamos que calcular a quantidade de números que tem o zero como algarismo e somar com os que não têm, ou seja, 24 + 24 = 48 possibilidades.

Em geral, segundo Carvalho (2006), uma boa estratégia é seguir os seguintes conselhos para resolver com mais facilidade os problemas de contagem:

- Postura: Imagine-se no lugar daquele que está realizando a ação. Por exemplo, pintando os algarismos no exemplo 1 ou escrevendo o número no exemplo 2, para decidir que ações tomar.

- Divisão: As decisões a serem tomadas podem ser subdividas em decisões mais simples, ou seja, o problema pode ser repartido em etapas, para facilitar a resolução. Por exemplo, na letra c do exemplo 1, que dividimos a pintura do zero em duas etapas.
- Não adiar dificuldades: quanto mais restrita for a decisão, mais cedo ela deve ser tomada. Por exemplo, no exemplo 2, a retirada do 0 como opção para a centena facilitou a resolução do problema, enquanto que se começássemos pela unidade do algarismo teríamos de dividir o problema em partes, e correríamos o risco de contar números mais de uma vez.

Exemplo 3[5]: Quantos são os anagramas da palavra PRATO? E quantos anagramas começam por consoante?

Solução: Este problema pode ser facilmente resolvido através do Princípio Multiplicativo, basta escolher sucessivamente as letras em cada posição da palavra. Para escolher a primeira letra temos 5 opções; a segunda pode ser qualquer uma das 4 letras restantes, e assim por diante. Logo, o número total de anagramas da palavra PRATO é 5x4x3x2x1 = 120. Este problema também é conhecido como Problema de Permutações Simples e, de modo geral, temos que:

> Uma permutação de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos, de modo que, se denominarmos P_n o número das permutações simples dos n objetos, então $P_n = n.(n-1).(n-2)...1 = n!$ (*Lê-se n fatorial).* (SANTOS, J. P. O. et al, 44, 2007).

Para responder a segunda pergunta, primeiramente devemos localizar as consoantes da palavra PRATO: P, R e T. Dividindo o exercício em três etapas, vamos fixar a consoante P como a letra inicial dos anagramas a serem formados. Assim, restam 4 letras para preencher o primeiro espaço vago, para cada uma destas 3 possibilidades para o segundo espaço vago, 2 possibilidades para o terceiro espaço vago e 1 possibilidade para o quarto espaço vago. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo temos um total de 24 possíveis anagramas iniciando pela letra P. O processo é análogo para a contagem dos anagramas que iniciam pelas

---

[5]Este exercício foi extraído do site: http://meteorotica.blogspot.com.br/2012/01/exercicios-resolvidos-sobre-anagramas.html (16/11/2012)

letras R e T. Pelo Princípio Aditivo, temos 24+24+24 = 72 anagramas que iniciam por consoante.

Exemplo 4[6]: Quantos são os anagramas da palavra AMORA?

Solução: Se resolvêssemos este exercício de maneira semelhante ao anterior, teríamos 5 letras que serão dispostas em 5 posições distintas, em um total de 5x4x3x2x1 = 5! = 120 possibilidades.

O que não é verdadeiro, pois há uma letra que se repete: a letra A. Observe que podemos trocar as letras A de lugar, sem alterar o anagrama:

AMORA -> AMORA, o A vermelho trocou de lugar com o A preto, ou seja, houve uma permutação de dois elementos, mas que não alterou o anagrama. Sendo assim, para obter a solução correta do nosso problema, teremos que dividir a solução encontrada anteriormente, pela permutação dos elementos repetidos: $\frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$ possibilidades.

Em geral, temos que:

> [...] o princípio multiplicativo leva em conta a ordem dos elementos do grupo formado. Se essa ordem não importar, devemos excluir as repetições dividindo o resultado, obtido com o princípio multiplicativo, pelo número de permutações dos componentes do grupo. (SANTOS; et al, 2007, p. 46).

Exemplo 5[7]: Sete cavalos disputam um páreo. O número de possibilidades de chegada para os 3 primeiros lugares é:

Solução: Para ocupar o 1º lugar no pódio existem 7 candidatos, para o 2º lugar os 6 cavalos restantes, e para receber a medalha de bronze os 5 cavalos que não chegaram em 1º, nem em 2º lugar. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, temos 7x6x5 = 210 possibilidades de chegada.

Este tipo de problema além de ser resolvido através do Princípio Multiplicativo, também é considerando um *Problema de Arranjo Simples*, em que 3 elementos são escolhidos ordenadamente entre os 7 disponíveis. Notação: A_n^p.

---

[6] Este exercício foi extraído da apostila disponível em: http://cejurgs.com.br/arquivos/1/aulas/62/Aula6-Brigada.pdf (16/11/2012)

[7] Exercício extraído do "Livro 1 - Testes Exatas" do curso pré-vestibular Unificado de 2007, página 26

> Arranjo Simples de n elementos tomados p a p, onde n $\geq$ 1, e p $\leq$ n, são todos os grupos de p elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos p elementos que compõem cada grupo. Notação A_n^p . (SANTOS; et al, 2007, p. 57).

O que quer dizer que temos que escolher ordenadamente dentre n objetos disponíveis, uma quantidade p. Para isso, temos n opções para o primeiro, n-1 para o segundo e assim sucessivamente até chegarmos ao p-ésimo elemento, que teremos n-(p-1) = n-p+1 possibilidades. Utilizando o princípio multiplicativo, temos um total de n(n-1)(n-2)...(n-p+1) possibilidades, e escrevendo em forma de fatorial teremos $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p-1)(n-p)(n-p-1)\dots 1}{(n-p)(n-p-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-p)!}$, sendo assim, podemos escrever $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Aplicando ao exercício temos, $A_n^p = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7x6x5x4x3x2x1}{4x3x2x1} = 7x6x5 = 210$, reafirmando o que já havíamos encontrado.

Exemplo 6[8]: Dado sete pontos dois a dois distintos sobre uma circunferência, o número de triângulos inscritos na circunferência tendo como vértice os pontos dados é:

Solução: Para traçar um triângulo temos de escolher três pontos para serem os vértices. Para a escolha do primeiro vértice temos 7 possibilidades, para a escolha do segundo vértice 6 possibilidades e para a escolha do terceiro vértice 5 possibilidades. Pelo Princípio Multiplicativo temos então 7x6x5 = 210 triângulos possíveis. Porém, observe, na figura 6, que o triângulo BEF é igual ao triângulo FEB, assim como igual aos triângulos BFE, EFB, EBF e FBE, diferenciado apenas na ordem em que foram escolhidos os vértices. Permutando os vértices do triângulo temos 3! = 6, ou seja, estamos contando 6 vezes cada um dos triângulos. Portanto para resolver o problema, basta dividirmos o resultado encontrado pela permutação dos vértices, ou seja, na verdade temos $\frac{210}{6}$ = 35 triângulos possíveis.

[8] Exercício extraído do “Livro 2 – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias” do curso pré-vestibular Unificado de 2012, página 248.

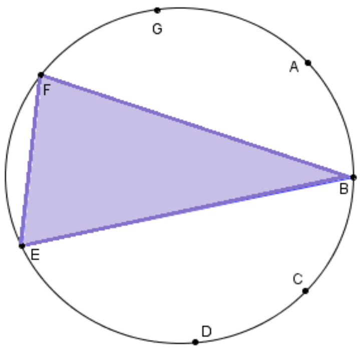


Figura 6 – Ilustra uma das possibilidades de fixar os 7 pontos na circunferência, e um dos possíveis triângulos a serem formados.

Este tipo de problema além de ser resolvido através do Princípio Multiplicativo com repetição, também é considerando um *Problema de Combinação Simples*, em 7 elementos são agrupados 3 a 3. Notação:C_7^3 Em geral temos que:

> Combinação Simples de n elementos tomados p a p, onde n $\geq$ 1, e p $\leq$ n, são todas as escolhas não ordenadas de p desses n elementos. Notação C_n^p. (SANTOS; et al, 2007, p. 62).

Vimos que quando escolhemos p dentre n elementos, tal que, a ordem do agrupamento é importante utilizamos Arranjo Simples, denotado por $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Porém, quando consideramos combinação simples levamos em conta apenas os elementos que formam o grupo, e não a ordem em que foram escolhidos. Então para evitar a contagem do mesmo grupo mais de uma vez, dividiremos o resultado encontrado pela permutação dos elementos que compõem o grupo, ou seja p!. Portanto, $C_n^p = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$.

Aplicando ao exercício temos, $C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!.4!} = \frac{7x6x5x4x3x2x1}{(3x2x1)(4x3x2x1)} = \frac{7x6x5}{3x2x1} = 7x5 = 35$, reafirmando o que já havíamos encontrado.

3. MODELAGEM MATEMÁTICA

Modelagem Matemática é considerada uma estratégia de ensino e aprendizagem para o ensino de matemática, na qual o aluno tem a oportunidade de experimentar, interpretar, analisar situações e tomar decisões, além de desenvolver a sua capacidade de reflexão. (FIDELIS; ALMEIDA,2004). Neste sentido, podemos afirmar que a Modelagem Matemática traz aos alunos uma visão matemática das situações do dia a dia. Ou seja, problemas que não pareciam ter qualquer conexão com a matemática podem ser resolvidos e abordados com a ajuda da Modelagem Matemática.

Com o objetivo de trazer um significado para a aprendizagem de Análise Combinatória foi elaborada uma proposta de atividade, na qual os alunos deveriam criar uma situação problema, dentro de um tema de interesse, e resolver através da Modelagem Matemática. Para que melhor pudesse orientá-los foi realizada uma pesquisa sobre este recurso pedagógico, hoje em dia tão mencionado. As perguntas formuladas para orientar a pesquisa foram: “O que é Modelagem Matemática?”, “Como utilizar Modelagem Matemática?” e “Por que utilizar Modelagem Matemática?”.

3.1 O que é Modelagem Matemática?

Para trabalhar em um ambiente de Modelagem Matemática, é preciso saber do que estamos tratando. Tornando a pergunta “o que é Modelagem Matemática?” bastante pertinente. Apesar de a resposta parecer simples e direta, para elaborá-la é preciso levar em conta as diferentes linhas teóricas tomadas como referencial: BARBOSA (2001, 2003, 2004), BASSANEZI (1999) e BIEMBENGUT; HEIN (2000).

Inicialmente é de interesse definir o que é um modelo, pois esta definição está diretamente relacionada com a concepção de Modelagem Matemática destes autores. Para Biembengut e Hein (2000), a concepção de modelo está presente em todas as áreas de conhecimento, e é definida por um conjunto de símbolos os quais interagem entre si representando algo. O modo como essa representação irá se suceder poderá ser por meio de figuras, projeto, esquema, gráfico, lei matemática, dentre outros. Na matemática, por exemplo, um modelo é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduzem algum fenômeno. Além disso, o conjunto de procedimentos requeridos para a elaboração de um modelo é denominado pelos autores Modelagem Matemática.

Para Bassanezi (1999), um Modelo Matemático é um conjunto de equações ou estruturas matemáticas, elaborado para corresponder a algum fenômeno – podendo este estar relacionado com qualquer área de conhecimento, até mesmo a outro Modelo Matemático. Um modelo é considerado útil se satisfaz de alguma forma uma necessidade humana, e por ser uma aproximação da realidade analisada está sujeito a mudanças constantes. A busca por modelos cada vez mais adequados é o que o autor denomina Modelagem Matemática.

Do ponto de vista de Barbosa (2001) Modelagem Matemática é "uma oportunidade para os alunos indagarem situações por meio da matemática sem procedimentos fixados previamente e com possibilidades diversas de encaminhamento" (p. 05). Desta forma, não há garantias que os alunos irão elaborar uma abordagem com a presença de um modelo matemático, diferentemente de Biembengut; Hein e Bassanezi que utilizam o modelo para definir Modelagem Matemática.

Além disso, por considerar "ambiente" como lugar que estimula o desenvolvimento de certa atividade e definir que a Modelagem Matemática "estimula os alunos a investigarem situações de outras áreas que não a matemática por meio da matemática" (BARBOSA, 2001, p. 06), o autor vincula a Modelagem Matemática à ambientes de aprendizagem[9]. Definindo, então, Modelagem Matemática como "um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade." (BARBOSA, 2001, p. 06)

Destaco ainda, a ênfase que o autor disponibiliza para a possibilidade de aproveitar as atividades de Modelagem Matemática para

> [...] explorar os papéis que a matemática desenvolve na sociedade contemporânea. [...] Isso não significa que os alunos possam desenvolver complexas análises sobre a matemática no mundo social, mas que Modelagem possui o potencial de gerar algum nível de crítica. *Sendo* pertinente sublinhar que necessariamente os alunos não transitam para a

---

[9] SKOVSMOSE, O. Cenários de investigação. Bolema – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

> dimensão do conhecimento reflexivo, de modo que o professor possui grande possibilidade para tal.(BARBOSA, 2001, p. 04)

Diante das referências abordadas, acredito que a Modelagem Matemática pode ser considerada uma estratégia de ensino que permite o aluno desenvolver um conhecimento matemático além da resolução de problemas, contribuindo para a formação do aluno como um cidadão mais crítico e capaz de argumentar matematicamente.

3.2 Como utilizar Modelagem Matemática?

A busca pela fuga do método tradicional é o principal argumento para se utilizar a Modelagem Matemática como um recurso pedagógico. No entanto, é preciso saber qual a forma mais apropriada, visto que há diferentes linhas de pesquisa, e consequentemente diferentes maneiras de se chegar na solução de uma situação-problema oriunda de outras áreas de conhecimento que não a matemática.

Concordo com Fietz (2011) quando afirma que é preciso domínio de conteúdo e conhecer a turma antes de aplicar atividade tão dinâmica. Além disso, como afirma Barbosa (2004), a Modelagem Matemática está baseada em um convite, se os alunos não tiverem interesse em participar, os resultados provavelmente não serão satisfatórios ou alcançados.

Uma das maneiras de conduzir a atividade é dividir as tarefas (elaboração da situação-problema, coleta e organização dos dados e resolução dos problemas). Segundo Barbosa (2004), podemos ir reduzindo a responsabilidade do professor de acordo com casos enumerados de 1 a 3 e resumidos na figura 7.

	Caso 1	*Caso 2*	*Caso 3*
Elaboração da situação-problema	**professor**	**professor**	**professor/aluno**
Simplificação	**professor**	**professor/aluno**	**professor/aluno**
Dados qualitativos e quantitativos	**professor**	**professor/aluno**	**professor/aluno**
Resolução	**professor/aluno**	**professor/aluno**	**professor/aluno**

Figura 7 – Quadro comparativo dos casos de Modelagem Matemática[10]

No caso 1 a atividade não é muito extensa, pois os alunos não precisam sair da sala de aula para coletar novos dados, as informações fornecidas são suficientes para solucionar o problema apresentado pelo professor. Nota-se que o docente tem um maior controle sobre o rumo da atividade.

No caso 2 cabe ao professor elaborar a situação-problema que os alunos irão investigar. As demais etapas (coleta de dados e solução do problema) são de responsabilidade dos alunos. É demandado maior tempo que o caso anterior, pois o rumo das atividades se dará de acordo com a participação dos alunos.

E por fim, no caso 3 a formulação do problema, a coleta de dados e a resolução são tarefas dos alunos. O professor poderá participar na escolha do tema “não-matemático” que dará origem aos projetos, acompanhando os alunos apenas para orientar, sem fornecer dados ou conclusões.

Ao observar os casos sugeridos por Barbosa (2004), pude relacioná-los com a experiência didática-pedagógica que desenvolvi com a turma de segundo ano. Neste relato de experiência mostrarei as atividades realizadas pelos alunos do Ensino Médio, bem como os níveis de participação durante a execução do projeto.

Outra forma de conduzir a atividade de Modelagem Matemática é baseando-se na autora Biembengut e Hein(2000). De acordo com a autora há três etapas, subdividas, para representar situações reais por meio de Modelos Matemáticos.

[10] Fonte: BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática na sala de aula. *Persoectiva,* Erechim (RS), v. 27, n. 98, p. 65-74, junho 2003

> 1ª Etapa: Interação
> - reconhecimento da situação-problema -> delimitação do problema;
> - familiarização com o assunto a ser modelado -> referencial teórico
> 2ª etapa: Matematização
> - formulação do problema -> hipótese
> - formulação do modelo matemático -> desenvolvimento
> - resolução do problema a partir do modelo -> aplicação
> 3ª etapa: modelo matemático
> - interpretação da solução
> - validação do modelo -> avaliação (p. 13)

Na primeira etapa o aluno irá se interar do assunto que está sendo tratado. Tomar nota dos dados pesquisados que deverão ser bem aproveitados durante o processo de modelagem. Na segunda etapa, o aluno será desafiado a elaborar o Modelo Matemático, e para que isso ocorra com o rigor necessário será exigida lógica para deduções; e domínio algébrico ou geométrico, dependendo do problema abordado. O objetivo é encontrar alguma fórmula ou representação geométrica capaz de resolver a situação-problema, de acordo com as variáveis encontradas. Por fim, na terceira etapa, o modelo pronto será posto em prática em diferentes contextos dentro do assunto estudado, cabendo ao aluno interpretar os acontecimentos.

Reitero que:

> "A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. Com a Modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno com seu ambiente natural. (BASSANEZI apud KLÜBER; BURAK, 2005, p. 2)

Assim, concluo que cabe ao professor, conhecendo seus educandos, determinar qual a melhor estratégia para conduzir o processo de Modelagem Matemática. E em cumplicidade, docente e discente, aprender sobre outras áreas do conhecimento, além tornar a aula mais interativa.

3.3 Por que utilizar Modelagem Matemática?

Já sabemos que Modelagem Matemática é uma estratégia de ensino. Foi argumentado como poderíamos utilizá-la em sala de aula. Agora, é importante que se argumente a razão de incentivar o uso desta metodologia nas escolas.

Os argumentos levantados por Bassanezi (apud Barbosa, 2003) são: *motivação* (os alunos vislumbrariam a aplicabilidade do que estudam na escola), *facilitação da aprendizagem* (conexão das idéias matemáticas com outros assuntos), *preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas*, *investigação* (os alunos desenvolveriam habilidades gerais de exploração) e *compreensão do papel sócio-cultural da matemática.* Destes, o autor destaca a importância do cunho social que a Modelagem Matemática possui, auxiliando a escola na tarefa de formar cidadãos críticos, corroborando o uso da matemática com uma das ferramentas para a conjectura de opiniões bem embasadas.

> Se estamos interessados em educar matematicamente os nossos alunos para agir na sociedade e exercer a cidadania – e esse é o objetivo da educação básica -, podemos tomar as atividades de Modelagem como uma forma de desafiar a ideologia da certeza[11] e colocar lentes críticas sobre as aplicações da matemática. [...] creio que Modelagem pode potencializar a intervenção das pessoas nos debates e nas tomadas de decisões sociais que envolvem aplicações da matemática, o que me parece ser uma contribuição para alargar as possibilidades de construção e consolidação de sociedades mais democráticas. (BARBOSA, 2003, p. 68)

Desta forma, defendo o uso de Modelagem Matemática por ser um recurso que complementa de muitas formas a aula. Além de responder uma das perguntas clássicas dos alunos: “Por que eu tenho que aprender isso? Em que situação eu vou aplicar isso na minha vida?”, é uma oportunidade para o professor e o aluno aprenderem juntos a matemática aplicada em temas não-matemáticos, que é diferente da abstrata habitualmente vista em sala de aula.

[11] A matemática pode ser usada para dar suporte a debates políticos. Tornando-se parte da linguagem com a qual sugestões políticas, tecnológicas e administrativas são apresentadas. O poder de conter o argumento definitivo atribuído à matemática é amparado pelo que Borba (1992) denomina uma ideologia da certeza. Mais informações em Borba e Skovsmose (1997) - “A ideologia da certeza em educação Matemática”, disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=DI-COFyB5ZoC&ei=HuK7UJeLKIeZUL6dgJAO&hl=pt-BR>

4. A PRÁTICA

A prática foi dividida em três etapas, que apresento no decorrer deste capítulo mais detalhadamente. Primeiramente os alunos se familiarizaram com o jogo "A senha", trabalhando com possibilidades de composições de senhas e melhor estratégia de jogadas. Em sequência foi introduzido o conteúdo de Matemática que trabalha com essa temática: Análise Combinatória, e utilizando o Método de Contagem foram formalizados os principais conceitos, como Permutação, Arranjo e Combinação. Enfim, em um terceiro momento, os alunos foram convidados a elaborar um projeto de Modelagem Matemática, demonstrando a aplicabilidade do conteúdo estudado em situações reais.

4.1 Contextualizando a escola e cronograma

Durante o ano de 2012 tive a oportunidade de trabalhar como componente do grupo docente da Escola Estadual Protásio Alves, localizada no bairro Menino Deus do município de Porto Alegre, no Rio Grande do Sul. Assim, tive a chance de trabalhar com uma turma de segundo ano do Ensino Médio, composta por 38 alunos, porém, destes, apenas 21 frequentaram as aulas. Em sua maioria são alunos esforçados, interessados em aprender. Neste contexto, a proposta pedagógica foi elaborada para abordar o conteúdo de Análise Combinatória de forma interativa, dando espaço para dúvidas, e com o desprendimento das fórmulas.

Cronograma da programação:

Data / Períodos disponíveis	Assunto
5/11 – 1 período	Jogo "A Senha"
8/11 – 2 períodos	Questionário e formalização do conteúdo
15/11 – 2 períodos	Interpretação de exercícios. Formalização dos conceitos de Princípio Multiplicativo e Aditivo
19/11 – 1 período	Interpretação de exercícios. Formalização dos conceitos de Permutação, Permutação com repetição. Conceito de fatorial.

22/11 – 2 períodos	Interpretação de exercícios. Formalização do conceito de Arranjo
26/11 – 1 período	Interpretação de exercícios. Formalização do conceito de Combinação.
29/11 – 2 períodos	Pequena avaliação individual.
01/12 – 1 períodos	Espaço aberto para produção do relatório, e dúvidas na elaboração do projeto.
05/12 – 2 períodos	Apresentação dos projetos de Modelagem Matemática

Tabela 1 – Cronograma inicial das atividades em sala de aula.

4.2 A elaboração da Prática

Durante a pesquisa bibliográfica li alguns artigos, monografias e teses que defendem diferentes maneiras de abordar Análise Combinatória. Dentre estes, me chamou atenção a tese de Carvalho (2009): “O uso de jogos na resolução de problemas de contagem”. Ele defende que:

> “O uso de jogos como um recurso às aulas de matemática favorece um ambiente adequado para a resolução de problemas, aplicação e exploração de conceitos matemáticos e/ou para um aprofundamento destes. Assim, torna-se relevante a prática de jogos nas aulas de matemática, pois esses propiciam momentos de desbloqueios dos estudantes que, normalmente, apresentam aversão a essa disciplina”. (2009, p.31)

Desta forma, foi escolhido um, dentre os quatro jogos abordados, para serem aplicados em sala de aula, de forma a iniciar a ensino de Análise Combinatória de forma divertida e interativa. O jogo selecionado foi “A Senha”. Como seria inviável a compra do jogo original, foram produzidas cópias em papel para os alunos, mas diferente do original estes possuíam três tabuleiros, de acordo com a quantidade de cores que formariam a senha (figura 8). Em vez de pinos foram utilizados círculos em cartolina de cinco cores diferentes: azul, verde, rosa, vermelho e amarelo. E as dicas seriam sinalizadas a lápis. A senha formada pelo desafiante deve ser composta por cores diferentes. A cada rodada o desafiante fornecerá dicas para que o adversário elabore a melhor estratégia para criar o seu palpite. Quanto as dicas, para cada cor certa na posição correta é pintada uma bolinha de preto. Se a cor estiver correta, mas na posição errada é feito um x no campo de dicas. Caso nenhuma destas duas situações ocorra, o campo de dicas deverá permanecer em branco.

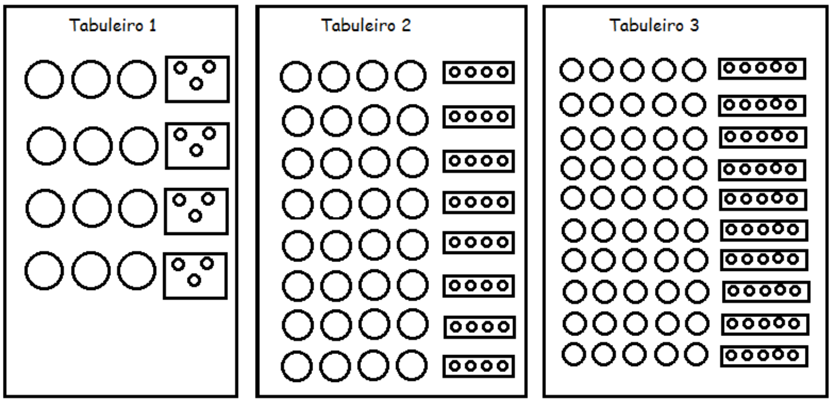


Figura 8 – Tabuleiros do jogo "A senha"

Por exemplo: O aluno A está jogando contra o aluno B no tabuleiro 2. E elabora a seguinte senha: verde – amarelo – rosa - azul. Suponha que o primeiro palpite do jogador B é amarelo – branco – rosa – verde. O jogador irá preencher o campo de dicas com uma bolinha preta, porque tem uma cor na posição certa, e 2X, por que as outras duas cores estão corretas nos lugares errados, e uma das cores não faz parte da senha. Assim, o aluno B montará uma nova senha, de acordo com sua estratégia, e receberá novas dicas. O jogo termina quando o jogador B acertar a senha, ou terminar a quantidade prevista para suas tentativas.

Foi disponibilizado um período de 50 minutos para que os alunos conhecessem o jogo, se interessassem e interagissem, para que na aula seguinte fossem entregues para as duplas um questionário sobre o jogo, já direcionando para o estudo de Análise Combinatória. Como segue:

1 – Quantas possibilidades de senha existiam para o primeiro tabuleiro? Quais são elas?

2 – Sabendo que o desafiador fez a seguinte aposta (rosa – amarelo – verde) e recebeu a dica a seguir (●, X, X), qual a melhor estratégia para a próxima jogada?
3 – Se pudéssemos repetir as cores, sejam elas amarela, verde e rosa, quantas possibilidades de senhas haveria?
4 – Quantas possibilidades de senha existem para o 2º tabuleiro?
5 – Sabendo que o desafiador fez a seguinte aposta (amarelo – verde – vermelho – rosa) e recebeu a dica a seguir (●, X, X). Considerando que o amarelo é uma das cores certas e está no lugar correto, qual a melhor estratégia para a próxima jogada?
6 - Quantas possibilidades de senha existem para o 3º tabuleiro?

Os alunos seriam convidados a sentar novamente em duplas para discutir a melhor forma de resolução das perguntas propostas. Para tornar a situação mais dinâmica, e para que os alunos possam ilustrar o pensamento utilizado, é entregue, novamente, aos alunos, as peças do jogo. Após as respostas serem entregues, a discussão é aberta para o grande grupo, para que todos possam argumentar e defender suas estratégias, permitindo que a turma chegue a um consenso de como devem ser resolvidas as 6 questões.

O papel do professor, neste momento, é apenas de mediador. Procurando direcionar o assunto com perguntas, ao invés de respostas. Desta forma, está estimulando os alunos a pensarem criticamente, e a terem autonomia matemática. Partindo das conclusões da turma, é feita a formalização do conteúdo a ser estudado: Análise Combinatória.

No decorrer das aulas, são apresentados exercícios, retirados de livros didáticos, principalmente do livro “Matemática – Contexto e aplicações” do Dante, e através da resolução destes são feitas as formalizações das definições de Princípio Multiplicativo, Princípio Aditivo, Permutação, Permutação com repetição, Arranjo Simples e Combinação simples. Destaco que o aluno terá participação durante todo o processo, pois dele parte as primeiras hipóteses de resolução dos exercícios e consequentemente de generalizações.

Sequência de exercícios propostos:

1 – Em um restaurante há 2 tipos de salada, 3 tipos de pratos quentes e 3 tipos de sobremesa. Quais e quantas possibilidades temos para fazer uma refeição com 1 salada, 1 prato quente e 1 sobremesa?

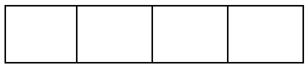
2 – Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7:

a) quantos números de 3 algarismos podemos formar?

b) e de 3 algarismos distintos?

3 – Existem duas vias de locomoção de uma cidade A para uma cidade B e 3 vias de locomoção da cidade B a uma cidade C. De quantas maneiras se pode ir de A a C, passando por B?

4 – A figura abaixo pode ser colorida de diferentes maneiras, usando-se pelo menos 2 de quatro cores disponíveis. Sabendo-se que duas faixas consecutivas não podem ter cores iguais, o número de modos de colorir a figura é:



5 – Quantos são os anagramas (diferentes disposições das letras de uma palavra) da palavra PERDÃO?

6 – De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode sentar-se num banco de 5 lugares para tirar uma foto?

7 – Simplifique as expressões:

a) 20! / 18!   b) 7! / 4!   c) 3!.5! / 4!.6!   d) n! / (n-2)!

8 – Quantos são os anagramas da palavra PAPA?

9 – Quantos números diferentes podemos formar com todos estes algarismos 1, 1, 2, 3 e 3?

10 – Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra CONTAGEM? Quantas "palavras" distintas de 4 letras distintas podemos formar com as letras da palavra CONTAGEM? Quantas destas "palavras" começam pela letra E?

11 – Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos algarismos distintos podemos formar?

12 – Um clube tem 30 membros. A diretoria é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras é possível formar uma diretoria?

13 – Em uma sala de aula existem 24 alunos, e estes precisam se organizar em grupos de 6 pessoas. Quantos grupos são possíveis?

14 – Quantas diagonais tem um pentágono regular?

15 – Em um baralho de truco há 40 cartas. E para jogar cada um dos competidores recebe 3 cartas. Quantas mãos cada um dos jogadores poderá receber? Destas, quantas vezes ele saiu com o “espadão”?

Como demonstra o cronograma criado (Tabela 1), a prática, apesar de ser diferente, e necessitar da participação e colaboração dos alunos, não precisa de muitos dias para ser feita. O professor poderá incluí-la durante o ano letivo sem que falte tempo para explicar os demais conteúdos exigidos pelo currículo escolar. Além disso, a interação professor-aluno constante permite ao professor descobrir o que o aluno está pensando e ajudá-lo na interpretação e resolução dos exercícios propostos.

Pensando nesta prática adaptada ao sistema de notas da escola, é solicitado aos alunos que resolvam um dos testes entregues. Foram elaborados dois testes distintos para evitar a possibilidade de trocas de ideias durante a realização do trabalho, apesar dos exercícios serem diferentes, o conhecimento exigido é o mesmo. Poderá encontrá-los, respectivamente no Apêndice A e no Apêndice B.

Cumprida a parte teórica e as avaliações, penso ser relevante mostrar aos alunos algumas aplicações da Análise Combinatória no dia-a-dia. Proponho então, a elaboração de um projeto de Modelagem Matemática aos alunos. Estes projetos dependem muito do envolvimento dos alunos, quanto maior for o interesse deles pela pesquisa, melhor será o projeto. Desta forma, decidi seguir as orientações de BARBOSA (2003) quando comenta o caso 3: a formulação do problema, a coleta de dados e a resolução são tarefas dos alunos. O professor poderá participar na escolha do tema “não-matemático” que dará origem aos projetos, acompanhando os alunos apenas para orientar, sem fornecer dados ou conclusões.

A proposta é que a turma se divida em pequenos grupos, de no máximo 4 integrantes, e entre eles escolham um tema de interesse que irá nortear o projeto. A partir desta escolha, devem começar a levantar questionamentos, o que eles gostariam de pesquisar sobre aquele tema. E como que a matemática, mais especificamente a Análise Combinatória, poderá auxiliar na resolução das questões. Quando pronto, será exposto para o grande grupo.

Por, talvez, ser uma novidade para os alunos, e para acompanhar melhor o desenvolvimento do projeto, disponibilizo alguns períodos antes da apresentação final do projeto para verificar seu andamento, tirar dúvidas e conversar com os grupos. A apresentação poderá ser feita com o uso de slides, cartazes, maquetes, entre outros.

Tendo já elaborado projetos de Modelagem Matemática durante o curso de Licenciatura em Matemática, acredito que é possível aprender bem mais do que aplicações da matemática na realidade. É preciso saber trabalhar em grupo, como e o que pesquisar, quais as informações relevantes, escrever de forma clara para que outros entendam, entre outras características. Isso tudo torna o projeto tão rico em conhecimento.

4.3 Aplicação do jogo “A senha”

Como programado, foi apresentado o jogo “A Senha” para os alunos. Que não entenderam de imediato o que estava sendo proposto. Talvez por estarem habituados a aulas padronizadas, em que o professor, utilizando o quadro negro, explica o conteúdo, enquanto os alunos copiam, para tentar resolver os exercícios posteriormente.

Era um convite, sujeito a negação. Mas aos poucos, os alunos foram se aventurando a jogar, divertiam-se em desafiar os colegas, e eventualmente trocavam as duplas de jogadores. Ao final do período estava satisfeita com o envolvimento dos alunos. Um grupo de colegas havia se entusiasmado tanto que inseriu novas regras para tornar o jogo mais desafiador, ao iniciarmos combinamos que as senhas formadas deveriam ser de cores diferentes, e ao término do período eles já estavam considerando senhas com cores repetidas.

Na aula seguinte, ao perceberem que estava com o material de jogos em mãos perguntaram se íamos seguir jogando, e apresentaram um pouco de decepção quando respondi que não. Prometi então, que se sobrasse tempo no final da aula, eles poderiam ficar aquele tempo jogando.

Tomada a atenção dos alunos, escrevi o questionário no quadro e pedi que eles respondessem como achassem mais apropriado. Os alunos apresentaram confusão, entre as falas mais comuns de protesto estava a “como posso responder uma coisa que não foi explicada?”. Respondi que gostaria de saber como pensavam, não me prendendo a respostas certas ou erradas, mas à interpretação que estavam fazendo. Para auxiliá-los, entreguei novamente as peças do jogo.

Apresento agora algumas das respostas dos alunos:

1 – Quantas possibilidades de senha existiam para o primeiro tabuleiro? Quais são elas?

Resposta esperada: A senha será composta por três cores ordenadas. Para preencher o primeiro espaço há cinco possibilidades de escolha. Para cada uma destas escolhas temos 4 possibilidades de preencher o segundo espaço. E por fim, para preencher o terceiro espaço restam 3 cores. Totalizando 5x4x3 = 60 senhas diferentes.

Acompanhando os alunos percebi que ainda não estava claro para eles como poderiam começar a resolver as perguntas, pois todos concordavam que contar cada uma das possibilidades era inviável, “*não há peças suficientes sôra*”. Sugeri então que criassem um novo tabuleiro, cuja senha seria composta por apenas duas cores. Esperava-se que eles visualizassem que para cada escolha dentre 5 possibilidades de cores, existiam 4 outras para a composição da senha. Desta forma, temos um total de 5x4 = 20 possibilidades de senha.

Seguem algumas resoluções mais interessantes:

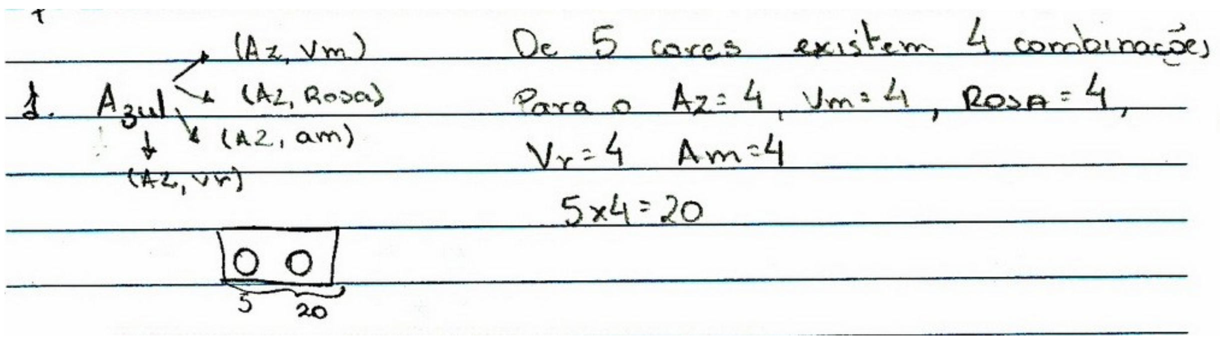


Figura 9 – Resolução da questão 1 parte 1 do aluno A.

Destaco a forma como o aluno A (figura 9) monta seu esquema de resolução, por ser muito parecida com uma árvore de possibilidades. A cor que está sendo fixada para a primeira escolha é escrita por extenso, e dela saem flechas para as senhas que podem ser compostas por ela e uma das outras 4 cores disponíveis. Concluindo corretamente a quantidade de senhas possíveis, sendo o único a tentar expandir o raciocínio para o tabuleiro de três cores, originalmente proposto (figura 10).

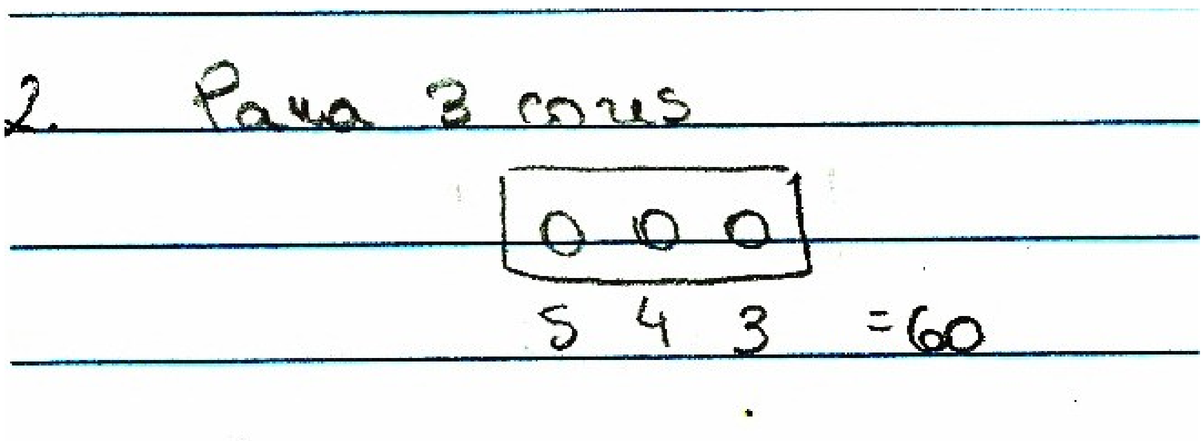


Figura 10 – Resolução da questão 1 parte 2 do aluno A.

Apresento a resolução do aluno B (figura 11) por ser semelhante ao aluno A (figura 10). Apesar de a resposta final ser a mesma, o aluno fez uma pequena confusão ao considerar apenas 4 cores (A – Azul, Vr – Verde, R – Rosa e V – Vermelho). Observe que para atingir as 20 possibilidades de senha ele leva em conta senhas de cores repetidas, e mesmo assim, consegue listar apenas 16, que de fato é o número máximo de combinações com 4 cores. Demonstrando desatenção e falta de compreensão do que está sendo abordado.

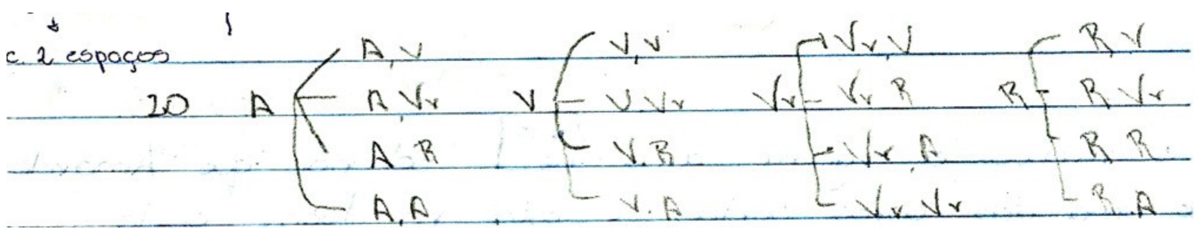


Figura 11 – Resolução da questão 1 parte 1 do aluno B

As resoluções dos alunos C (figura 12) e D (figura 13) são sucintas, pois montaram a variação das cores com as peças do jogo, escrevendo apenas a conclusão final na resposta. Em ambos os casos a estratégia foi a mesma: fixa-se uma cor, e varia as demais.

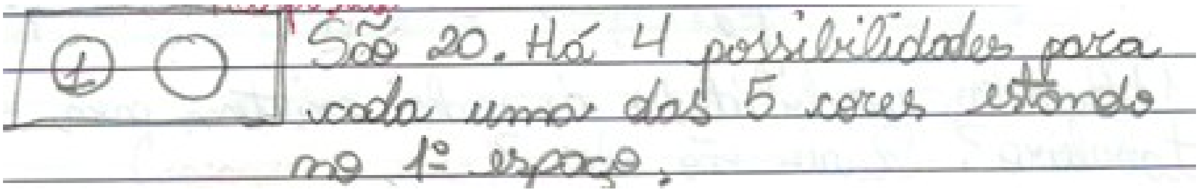

1 São 20. Há 4 possibilidades para cada uma das 5 cores estando no 1º espaço.

Figura 12 – Resolução da questão 1 parte 1 do aluno C.

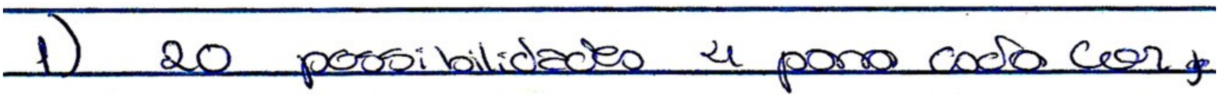

1) 20 possibilidades 4 para cada cor.

Figura 13 - Resolução da questão 1 parte 1 do aluno D.

2 – Sabendo que o desafiador fez a seguinte aposta (rosa – amarelo – verde) e recebeu a dica a seguir (●, X, X), qual a melhor estratégia para a próxima jogada?

Resposta esperada: A dica expressa que as três cores escolhidas formam a senha correta, porém só uma está localizada corretamente. Esperava-se que o aluno listasse as possibilidades de escrever as próximas senhas, fixando uma das cores por vez, e trocando as outras duas de lugar. Fixando a cor rosa temos 1 possibilidade diferente da original: rosa – verde – amarelo; fixando a cor amarela temos 1 possibilidade diferente da original: verde – amarelo – rosa; e fixando a cor verde temos, também, 1 possibilidade diferente da original: amarelo – rosa – verde.

No entanto, os alunos se deram por satisfeitos com argumentos “não-matemáticos” como ilustra as figuras 14 e 15 do aluno C e do aluno E, respectivamente.

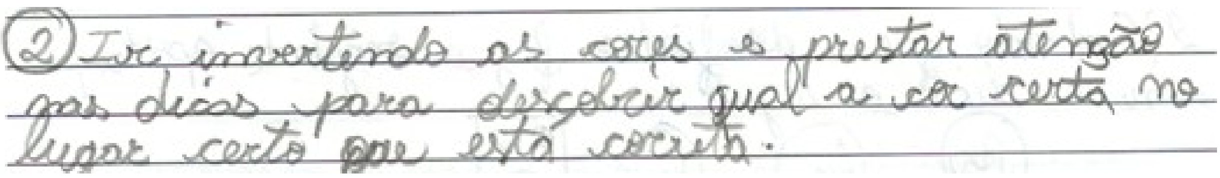

2 Ir invertendo as cores e prestar atenção nas dicas para descobrir qual a cor certa no lugar certo que está correta.

Figura 14 – Resolução da questão 2 do aluno C

“*Ir invertendo as cores e prestar atenção nas dicas para descobrir qual a cor certa no lugar certo que está correta.” (Reescrita pela autora)*

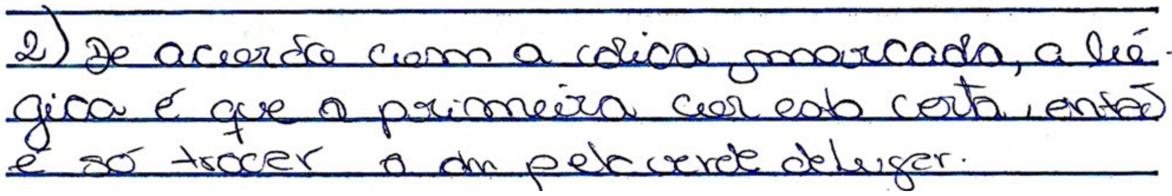

2) De acordo com a dica marcada, a lógica é que a primeira cor esta certa, então é só trocar a am pela verde de lugar.

Figura 15 – Resolução da questão 2 do aluno E.

"De acordo com a dica marcada, a lógica é que a primeira cor está certa, então só trocar a am (amarela) *pela verde de lugar." (Reescrita pela autora)*

Observo que o aluno E confunde-se com o significado da dica, pois a ordem em que são dadas as dicas não condiz, necessariamente, com a ordem das cores que compõem a senha. Apesar de a interpretação inicial ser errônea, a estratégia é condizente.

3 – Se pudéssemos repetir as cores, sejam elas: amarela, verde e rosa, quantas possibilidades de senhas haveria?

Resposta esperada: Temos 3 possibilidades de cor para compor a senha. O primeiro espaço pode ser preenchido com três cores diferentes. Como as cores podem se repetir, para cada uma destas três cores, temos 3 opções para preencher o segundo e terceiro espaço. Num total de 27 possibilidades.

Os alunos que responderam a esta pergunta obtiveram o resultado correto, porém não escreveram a forma como foi calculado, como ilustra as figura 16 e 17. Quando questionados, explicaram que *"é só multiplicar 3x3x3, como na questão 1, só que lá tem 5 cores e não pode repetir, nessa tem só três, e pode repetir"*. Percebo que os alunos, através do questionamento estão conseguindo amadurecer a forma de pensar, e adaptar a estratégia para outros exercícios.

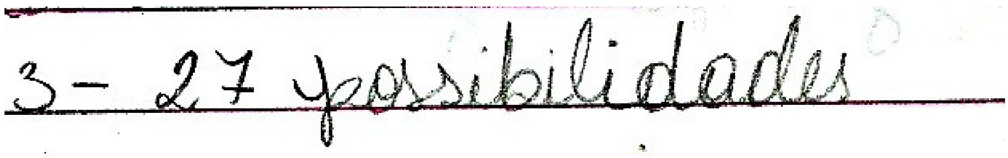

3- 27 possibilidades

Figura 16 – Resolução da questão 3 do aluno F

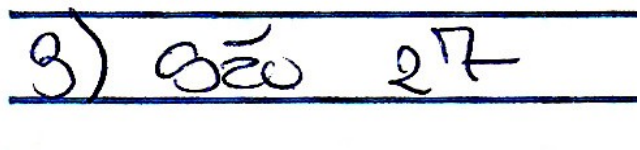


Figura 17 – Resolução da questão 3 do aluno E.

4 – Quantas possibilidades de senha existem para o 2º tabuleiro?

Resposta esperada: A senha será composta por 4 cores ordenadas. Para preencher o primeiro espaço há 5 possibilidades de escolha. Para cada uma destas escolhas temos 4 possibilidades de preencher o segundo espaço. Para preencher o terceiro espaço restam 3 cores. Por fim, para preencher o quarto espaço restam 2 possibilidades de escolha. Em um total de 5x4x3x2 = 120 senhas possíveis.

A esta altura do questionário os alunos já estavam cansados, e só desejavam ir para o intervalo. Assim as respostas foram mais diretas. Alguns alunos, um pouco mais dedicados, montaram uma árvore de possibilidades, para justificar sua resposta como na figura 18, outros apenas indicaram quantas possibilidades haveriam para cada um dos espaços, e multiplicaram os valores, como mostra as figuras 19 e 20.

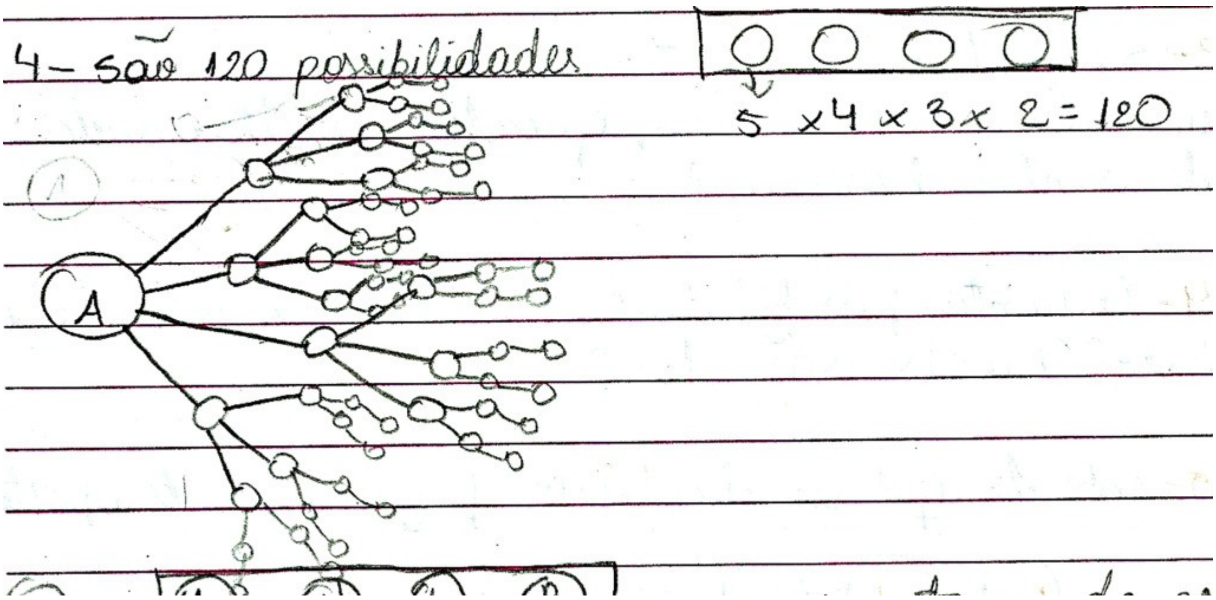


Figura 18 – Resolução da questão 4 do aluno F.

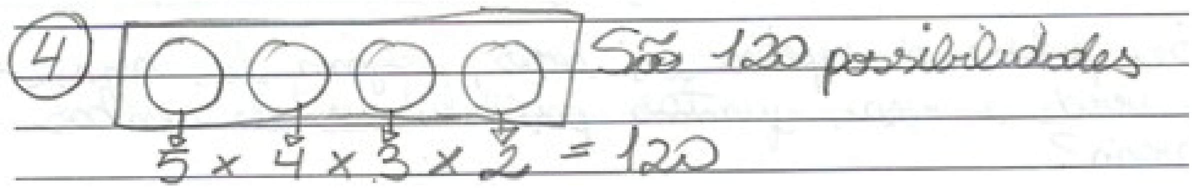


Figura 19 – Resolução da questão 4 do aluno C.

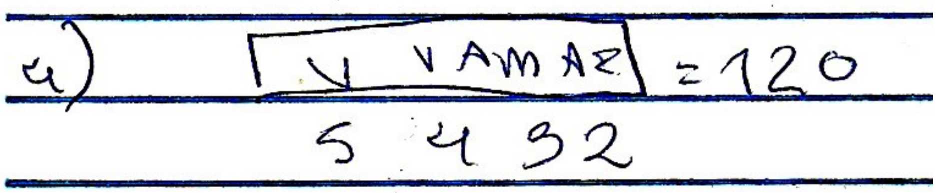


Figura 20 – Resolução da questão 4 do aluno E.

5 – Sabendo que o desafiador fez a seguinte aposta (Amarelo – Verde – Vermelho – Rosa) e recebeu a dica a seguir (●, X, X). Considerando que o amarelo é uma das cores certas e está no lugar correto, qual a melhor estratégia para a próxima jogada?

Resposta esperada: Interpretando a dica, temos que a cor amarela não deve ser alterada nos próximos palpites. Além disso, temos que uma das cores escolhidas está incorreta. Logo, uma das ações a ser tomada é ao mesmo tempo em que troca as cores verde, vermelho e rosa de lugar, trocar um delas, por vez, pela cor Azul: Amarela – Azul – Rosa – Vermelha; Amarela – Rosa – Azul – Verde; ou Amarela – Vermelha – Verde – Azul. Uma vez descoberta quais as quatro cores corretas, basta achar a sequência certa.

Por ser uma questão interpretativa os alunos deveriam pensar a respeito das alternativas, no entanto os alunos se limitaram a respostas óbvias e incompletas, como ilustra a figura 21.

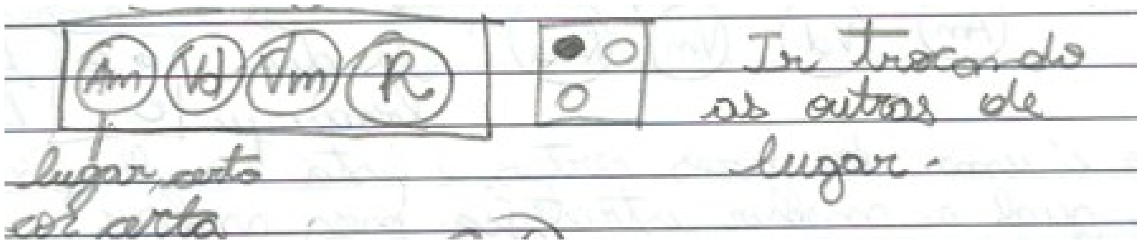


Figura 21 – Resolução da questão 5 do aluno C.

6 - Quantas possibilidades de senha existem para o 3º tabuleiro?

Resposta esperada: A senha será composta pelas 5 cores. Para preencher o primeiro espaço há 5 possibilidades de escolha. Para cada uma destas escolhas temos 4 possibilidades de preencher o segundo espaço. Para preencher o terceiro espaço restam 3 cores. Para preencher o quarto espaço restam 2 possibilidades de escolha, e por fim 1 possibilidade para o quinto espaço. Em um total de 120 senhas possíveis.

Os poucos alunos que responderam, utilizaram da mesma estratégia usada na questão 5. Como mostra a figura 22, consideraram as possibilidades para cada escolha das cores, e multiplicaram os valores, achando o total de possíveis senhas.

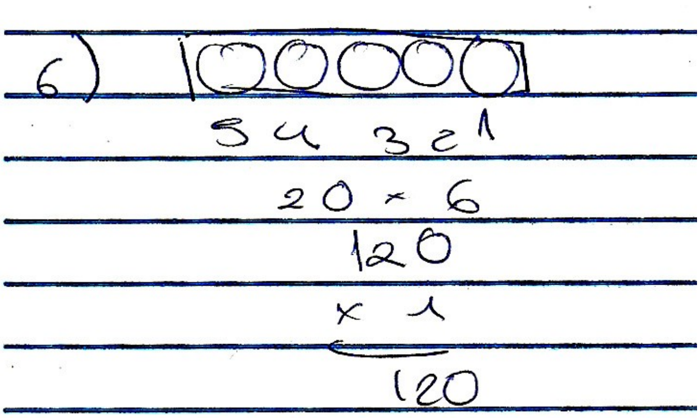


Figura 22 – Resolução da questão 6 do aluno E.

Como faltavam poucos minutos para encerrar a aula, considerei que o tempo não seria suficiente para obter um debate de qualidade. Combinando com os alunos que o assunto seria retomando na aula seguinte. Eles se mostraram satisfeitos, demonstrando ansiedade para sair para o intervalo.

A aula seguinte foi iniciada perguntando aos alunos o que eles consideravam ter feito. A resposta foi quase que instantânea: "*contas, encontrar a matemática nos jogos e cálculos*". Perguntei então, qual a matemática encontrada nos jogos, os alunos que arriscaram a responder afirmaram que "*ajuda a bolar estratégias para as próximas jogadas*". Mostrando satisfação, insisti no assunto, "*e como vocês bolam essas estratégias?*", neste momento os alunos afirmaram que "*é só olhar as* *possibilidades, dicas e montar o próximo chute*". Neste momento, expliquei aos alunos que o conteúdo que estuda a contagem de possibilidades é chamado de Análise Combinatória. Conteúdo este que seria abordado nas próximas aulas.

4.4 Aplicação do Método de Contagem

A atividade será narrada com frações de diálogos informais feitos com os alunos durante as aulas, mostrando como os conceitos foram formalizados partindo do conhecimento e argumentos dos alunos. Para manter a atenção e constante produção dos alunos, os exercícios foram apresentados aos poucos, e resolvidos no quadro em conjunto com a turma, depois de um tempo fornecido para que tentassem sozinhos encontrar a solução. Os exercícios 1 e 2 foram utilizados para formalizar o conceito do Princípio Multiplicativo. Os exercícios 5, 7, 8 e 9 foram utilizados para conceituar permutação simples e permutação com repetição. Para obter o conceito de Arranjo Simples, foram utilizados os exercícios 11 e 12. Por fim, os exercícios 13 e 15 foram usados para obter o conceito de Combinação.

4.4.1 Princípio Multiplicativo

1 – Em um restaurante há 2 tipos de salada, 3 tipos de pratos quentes e 3 tipos de sobremesa. Quais e quantas possibilidades temos para fazer uma refeição com 1 salada, 1 prato quente e 1 sobremesa?

Para resolver este exercício os alunos fizeram uma associação ao que tínhamos trabalhando, com o jogo "A Senha". Quando perguntei aos alunos como poderia resolver este exercício foi respondido que: "*como no jogo das cores, são três coisas pra escolher. E cada uma delas tem as possibilidades. Por exemplo, a salada tem 2, o prato 3 e a sobremesa 3. Por isso, faz 2x3x3, que dá... dá 18*." Nem todos os alunos compreenderam o que o colega tinha pensado, então em conjunto montamos um dos pratos possíveis, escrevendo no quadro todas as possibilidades, e ligando as escolhidas. Ao final, mostrei a eles que poderia ter feito outras 17 escolhas diferentes daquela, obtendo uma árvore de possibilidades. Expliquei que para poucas quantidades não havia problema em elaborá-la, mas era inviável confiar sempre na árvore ou listagem de todas as possibilidades. Foi fornecido mais algum tempo para que copiassem o que estava no quadro e passamos para a resolução do exercício 2.

2 – Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7:

a) quantos números de 3 algarismos podemos formar?

Começamos a resolução deste exercício verificando quantas decisões deveriam ser tomadas. De início, os alunos não reconheceram a restrição que estava contida no exercício, e responderam que havia oito (8) possibilidades para a escolha de cada um dos algarismos. Ao comparar os número 010 e 10 no quadro ficou claro para os alunos que todos os números iniciados pelo algarismo zero seriam números de apenas dois algarismos. Quando questionados novamente responderam que para a centena haveria apenas sete (7) opções de algarismos. Já para a dezena e unidade, continuava tendo oito (8) possibilidades. Sendo assim, concluíram que o número de possibilidades seria: 7x8x8.

A resolução da questão aconteceu de maneira fácil e rápida, passando a impressão de que os alunos realmente haviam entendido o raciocínio que deveria ser utilizado. Passamos então para a segunda parte da questão.

b) quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

Assim como no item anterior, seguimos os mesmos passos, procurando o número de possibilidades para cada algarismo. Como esperado, eles já reconheciam que para a casa da centena não poderia haver o algarismo zero (0) e responderam que para a primeira opção haveria somente sete (7) possibilidades.

A diferença neste item estava no fato de não poder repetir os algarismos, portanto para o segundo algarismo não podíamos considerar o que havia ocupado a centena, mas poderíamos considerar o zero (0). Com essa explicação, os alunos entenderam que para a dezena teria sete (7) possibilidades também, assim como para a centena. Como já tinham utilizado dois algarismos, um para a centena e outro para a dezena, os alunos responderam que para a unidade restavam apenas seis (6) possibilidades, e concluíram que ao todo, o número de possibilidades seria: 7x7x6.

Visto que os alunos estavam entendendo a resolução dos exercícios, em conjunto generalizamos, através de um exemplo, o Princípio Multiplicativo. A situação proposta como exemplo foi a seguinte:

Ex.: *O Aluno A tem 3 calças jeans e 2 camisetas. Quantas vezes ele poderá vir na escola sem repetir combinação de roupas?*

A ideia já estava presente nos alunos e eles responderam que seriam três (3) referentes às calças, vezes dois (2), referentes às camisetas. Resultando, seis (6) dias sem repetir combinação de roupas.

Recebendo essa resposta, continuei questionando os alunos. "*E se ele tiver 20 calças e 14 camisetas?".* Demonstrando confiança, os alunos responderam que seriam: 20x14. Para finalizar, questionei: "*E se ele tiver n calças e p camisetas?* Todos então responderam que seria "*n vezes p".* Aproveitei o momento explicando que esse é um exemplo de uso do Princípio Multiplicativo. *"Quando um evento A tem n possibilidades de acontecer, um evento B tem p possibilidades de acontecer, então o número de possibilidades de acontecer A e B é n x p. E podemos ampliar isso para eventos C, D, etc., ou seja, quantos forem necessários."*

4.4.2 Permutação Simples e Permutação com repetição

Continuando com a mesma metodologia utilizada nas aulas anteriores, resolvendo exercícios em conjunto, para que toda a turma participasse na construção das respostas, na resolução dos exercícios. Relembrando os exercícios da última aula, chegamos à conclusão que a primeira etapa para resolver os exercícios é verificar quantas e quais decisões deveriam ser tomadas, evitando a contagem de possibilidades mais de uma vez.

Nesta aula o exercício 5 foi aproveitado para citar a representação através do fatorial e formalizar o conceito de Permutação, e o exercício 7 foi utilizado para verificar a aprendizagem do conceito de fatorial, e a generalizar para quaisquer valores. Para formalizar o conceito de Permutação com repetição foram utilizados os exercícios 8 e 9.

5 – Quantos são os anagramas (diferentes disposições das letras de uma palavra) da palavra PERDÃO?

Inicialmente verificamos que 6 decisões deveriam ser tomadas: em quais posições iriam se localizar cada uma das letras. Os alunos responderam com tranquilidade que para a primeira posição tinha seis (6) opções de letras, para a segunda posição só restariam cinco (5) letras, e assim sucessivamente, diminuindo em uma unidade o número de letras a cada posição. Ao final, montamos a resposta: 6x5x4x3x2x1.

Antes que usassem a calculadora para resolver a multiplicação, aproveitei o exemplo para mencionar que existe uma representação matemática para situações como esta: o símbolo fatorial (**!**). Expliquei a eles que a multiplicação em questão era igual a escrever 6**!** (lê-se seis fatorial), pois começamos no número seis (6) e iríamos multiplicar por um número a menos até multiplicar por um (1). Foram citados outros exemplos para que os alunos representassem através do fatorial, como 20x19x18x17...x2x1, e dada uma representação em forma de fatorial escrever na forma extensa. Todos respondidos corretamente. Assim, foi solicitado que resolvessem o exercício 7.

7 – Simplifique as expressões:

a) 20! / 18!

A sugestão dos alunos foi que abríssemos os fatoriais em cima e em baixo, para depois cortarmos os semelhantes. Obtendo assim: $\frac{20x19x18x17x16x15x14x13x12x11x10x9x8x7x6x5x4x3x2x1}{18x17x16x15x14x13x12x11x10x9x8x7x6x5x4x3x2x1} = \frac{20x19}{1}$ = 380.

b) 7! / 4!

Seguindo a sugestão de resolução usada na letra a), comecei escrevendo o 7! na forma 7x6x5x4x3x2x1. Perguntei aos alunos se era necessário ir sempre até o 1, para depois cortar com os termos do denominador, ao que eles perceberam que o 4! estava “*dentro*” do 7!: “*Se 7! é 7x6x5x4x3x2x1, e 4! é 4x3x2x1, então 7! é igual a 7x6x5x4!, dai não precisa abrir o 4! de baixo, e só cortar*.” Este fato mostrou que os alunos podem investigar métodos de resolução diferentes do que o professor apresentou.

c) 3!.5! / 4!.6!

Convidei um dos alunos a resolver o exercício no quadro. Para demonstrar seu conhecimento, e a forma como havia resolvido. Foi apresentado o seguinte desenvolvimento:

$$\frac{3!.5!}{4!.6!} = \frac{3!.5x4!}{4!.6x5x4x3!} = \frac{5}{6x5x4} = \frac{1}{24}$$

Quando questionado, o aluno afirmou que abriu os fatoriais maiores, e foi cortando. Perguntei a turma se esse era o único jeito de resolver a questão. Ao que alguns alunos complementando suas respostas afirmaram que: "*os dois fatoriais de baixo são maiores que os de cima*", "*daí abre o 4 até 3!, e 6 até 5!*", "*cortando fica 4x6 em baixo e 1 em cima*." Demonstrando compreender o conteúdo abordado e aplicação em diferentes situações, sem a necessidade do professor explicar como fazer.

d) n! / (n-2)!

A turma demonstrou dúvidas quanto a resolução deste item, já que durante todo o tempo havíamos trabalhado com números. No entanto, ao fazer uma comparação com valores numéricos, os alunos conseguiram resolver o exercício:

Professora – *Vamos pensar assim. Se fosse 7!? Nós fazemos 7x6x5x4x3x2x1, correto? Nós vamos diminuindo uma unidade em cada um dos integrantes da multiplicação. Então se começarmos no n, o próximo número vai ser?*

Aluno A – *(n-1)?*

Professora – Muito bom. Nós pegamos o termo anterior e diminuímos uma unidade. E depois dele vem quem?

Aluno B - *(n-2)?*

Professora - *Isso, e assim sucessivamente, ou seja, n! é n(n-1)(n-2)(n-3), (n-4)... até chegarmos em 1.*

Aluno C – *Mas sôra, e pra "cortar" com o de baixo?*

Professora – *Vocês acham que o n! está "incluído" no (n-2)! ou o contrário?*

Aluno B – *O contrário, porque o n é maior que n-2, tipo se n fosse 5 o n-2 seria 3.*

Professora – *Isso aí. Alguém se habilita a escrever a resposta pra nós?*

Aluno A – *Eu faço.*

A resposta exposta no quadro foi: $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n\,x\,(n-1)\,x\,(n-2)!}{(n-2)!} = n\;x\;(n-1)$.

Ao concluir o exercício foi possível perceber o quanto os alunos amadureceram o conceito de fatorial, sem grandes explicações. Todas as respostas partiram de sugestões feitas por eles, e quando estavam com dúvidas, outras perguntas foram feitas para auxiliar na respostas. Assim, tiveram a oportunidade de investigar o melhor caminho.

8 – Quantos são os anagramas da palavra PAPA?

Este exercício tem o enunciado semelhante ao exercício 5, por esta razão os alunos tentaram resolver da mesma forma, encontrando como resposta 4!. Um erro compreensível. No entanto, em vez de avisá-los fiz um desafio: "*encontrem os 24 anagramas*". De início não gostaram muito da ideia, mas aos poucos foram elaborando seus esquemas. Passado algum tempo começaram a questionar os colegas pra saber quantos tinham achado, "*ô meu, só achei 6, e tu?*", "*pois é, eu também*". Visto que estavam ficando impacientes, perguntei para a turma quantos anagramas aviam encontrado, e a resposta foi unanime: "*seis*". A palavra PAPA foi escrita duas vezes no quadro, de forma que cada letra tivesse uma cor diferente: "**PAPA e PAPA**", explicando que "*quando fazemos a permutação das letras da palavra papa estamos considerando todas as trocas, inclusive a troca do P vermelho pelo P azul, observem que se não fosse a cor, não teria diferença alguma, o mesmo ocorre com as letras A preta e A verde*." Os alunos pareceram entender, mas ainda não sabiam o que fazer com esta informação. Expliquei que "*para eliminar as contagens repetidas devemos dividir pela quantidade de vezes que se repetem. Sendo assim a resposta final fica 4! (número de anagramas se as letras fossem diferentes)/2 (quantas vezes o P pode trocar de lugar sem alterar o anagrama).2 (quantas vezes o A pode trocar de lugar sem alterar o anagrama)*". Este conceito não ficou muito claro para todos os alunos. No entanto, passamos para o exercício seguinte que era semelhante, para tentar esclarecer com outro exemplo.

9 – Quantos números diferentes podemos formar com todos estes algarismos 1, 1, 2, 3, 3?

Se fossem todos números diferentes os alunos não teriam dificuldades em responder. No entanto, o número é composto por dois algarismos 1 e dois algarismos 3. Transcrevo a conversa com os alunos para a construção da resposta:

Professora - *Vamos considerar os números repetidos. Quantos 1 eu tenho?*
Turma – *Dois.*
Professora – *Quantos 2 eu tenho?*
Turma – *Um.*
Professora – *E quantos 3 eu tenho?*
Turma – *2.*
Professora – *E o que fazemos com estas informações mesmo?*
Aluno A – *Divide. Faz 5!/2!.2!.*
Professora – *E por que temos que fazer isso?*
Aluno A – *Porque trocando o 1 com o 1 não altera, e nem o 3 com o 3.*

Notando que somente um aluno demonstrou compreender o processo de permutação com repetição, citei outro exemplo, com pertences dos alunos presentes em sala, para que pudéssemos manipular a posição destes objetos.

Exemplo: Aqui eu tenho uma pilha com 3 livros iguais de matemática e 1 caderno. Quantas formas eu tenho de empilhar estes livros?

O aluno A que havia se manifestado anteriormente se antecipou aos colegas afirmando "*Se trocar tudo de lugar vai ter 4!, daí divide por 3, que são os livros repetidos.*" Observo que ele relaciona a quantidade de objetos à quantidade de repetições. Sem responder que estava certo ou errado, fiz algumas perguntas para envolver os demais colegas na resolução do exemplo, esperando que o aluno percebesse o próprio erro.

Se os objetos fossem todos diferentes, entramos em acordo que o total de disposições seria 4!. Porém, tínhamos 3 livros de matemática iguais. Isolando esta informação como se fosse um exercício, perguntei a eles "*quantas formas podemos empilhar estes 3 livros, imaginando que eles sejam diferentes?*". A turma, inclusive o aluno A, responderam corretamente, 6 maneiras. Neste momento, o aluno A se corrigiu, afirmando que "*na verdade divide por 3!*". Aproveitando a fala do aluno A, retomei o exemplo inicial, que era descobrir de quantas formas poderíamos empilhar 3 livros de matemática e 1 caderno: 4!/3!. A turma compreendeu o procedimento, pois quando perguntado se fossem 2 cadernos, responderam que seria 5!/3!.2!, porque "permuta os cinco objetos, e divide pelo número de repetições de cada um". Concluído assim, esta aula.

4.4.3 Arranjo Simples

Os exercícios 11 e 12 foram utilizados como exemplos de Arranjo Simples. A partir da resolução destes, foi feita uma generalização para quaisquer valores, e formalizado o conceito de Arranjo Simples como "*a escolha de p objetos ordenadamente, dentre n, tal que p $\leq$ n.*"

11 – Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

As primeiras perguntas feitas aos alunos foram: quantas e quais decisões deveriam ser tomadas. Alguns relembraram o exercício 2, afirmando que "*este exercício já foi feito*". Expliquei que não tinha importância que fosse semelhante, pois o objetivo da aula ia além da resposta. Devida a esta afinidade com o outro exercício não houve dificuldades em encontrar a resposta correta. Os alunos chegaram a conclusão que "são três decisões a serem tomadas, pra primeira tem 6 opções, pra segunda tem 5 e pra terceira tem 4, em um total de 6x5x4 números."

Questionei os alunos se haveria uma maneira de representar esta multiplicação na forma fatorial. A turma se apresentou dividida:

Professora - *O que falta para ser representado por fatorial?*

Turma – *Tem que ir até o 1.*

Professora – *Mas isso é fácil resolver, vamos escrever em vermelho o que está faltando: "6x5x4x3x2x1". Vocês ainda lembram como simplifica frações? Se divide o numerador tem que dividir o denominador também?*

Turma – *Sim, sim.*

Professora – *Então, se eu estou multiplicando por valores "em cima", tenho que multiplicar pelos mesmos valores "em baixo", assim eu mantenho a minha resposta original, certo?*

Turma – *É, mais ou menos.*

Professora – *Lembram do exercício da aula passada, que tinha o 7!/4!, nós simplificamos e ficou 7x6x5?*

Turma – *Sim.*

Professora – *Esse é o processo inverso.*

Turma – *Aaah!*

Professora – *Ou seja, 6x5x4 é o mesmo que?*

Turma – *6!/3!*

Concluído esta parte, que considerei um pré-requisito antes da generalização, perguntei aos alunos o que nós havíamos feito, "*calculamos a quantidade de números formados com 3 daqueles algarismos*". Perguntei então como que eles fariam para montar um desses números, "*é só escolher três números, tipo 624"*. Satisfeita com a resposta, expliquei que "*o ato de escolher "coisas" ordenadamente dentre um grupo maior ainda é chamado de Arranjo*". E assim como a permutação existe uma forma genérica de definir Arranjo Simples, "*as famosas fórmulas*". Vendo as caras de protestos, tranquilizei avisando que "*poderiam resolver do jeito que achassem mais fácil, através das fórmulas, ou como vínhamos fazendo*."

Professora – *Bom, como eu comentei com vocês antes, nós vamos escolher um número de "coisas" ordenadamente, dentre um número maior de opções. Digamos que dentro de uma sacola tem n brinquedos, e 5 crianças vão ganhar um destes brinquedos. Entre quantos brinquedos a primeira criança pode escolher o dela?*

Turma – n?

Professora – Isso. Ela pode escolher o dela dentre n. E a segunda criança?

Aluno E – n também?

Professora – Lembrando que a primeira criança escolheu o dela e levou ele embora. Quantos sobraram na sacola?

Aluno C – O que tinha menos um?

Professora – Isso. Tinha n, agora tem (n-1). Então, a segunda criança pode escolher o dele dentre (n-1) opções. E para a terceira criança? Quantas opções sobraram?

Turma – (n-2)?

Professora – *Muito bem. E para a quarta?*

Turma – *(n-3) opções.*

Professora – *E para a quinta?*

Turma – *(n-4).*

Professora – *Isso aí pessoal. Começamos bem. Já sabemos começar com qualquer valor. Agora vamos tentar escrever na forma fatorial. Em cima, nós temos n.(n-1)(n2)(n-3)(n-4). Se fosse seguir, quem seria o próximo?*

Aluno C – *(n-5).*

Professora – *Então, transformando para a forma fatorial, temos?*

Aluno A – *n!/(n-5)!*

Professora – *Isso aí. Tem que completar até chegar no 1 certo? Se nós fossemos seguir teria que ter (n-5)(n-6)(n-7)...2x1, que é a mesma coisa que (n-5)!. Mas isso vale para cinco crianças. E se tivéssemos 7 crianças?*

Turma – *Daí vai ter 7 decisões.Faz n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6).*

Professora – *E na forma fatorial?*

Aluno D – *n!/(n-7)!?*

Professora – *Isso.*

A ideia de trabalhar com um número indefinido de brinquedos assustou, inicialmente, os alunos. Mas, conseguiram responder satisfatoriamente as perguntas. No entanto, observei que quando o número de crianças passou a ser representado por uma letra p, eles apenas aceitaram a explicação: "*há p espaços a serem preenchidos, para o primeiro há n possibilidades, para o segundo (n-1) e assim sucessivamente até? (silêncio) Até um antes de p, que é o p-1. Por quê? Observem o seguinte, para a segunda escolha tem (n-1) possibilidades, que é o mesmo que (n – (2-1)), para a terceira tem (n-2) que é o mesmo que (n – (3-1), então para a p-ésima posição vai ser (n- (p-1)). Se quisermos escrever na forma fatorial, temos n!/(n-p)! =* A_n^p.

Convidei os alunos a resolver o exercício 12. Que não se preocupassem em usar, ou não, a fórmula. A minha preocupação era que eles não ficassem presos a memorizar fórmulas de combinatória. Pois saberiam sua origem, e poderiam deduzi-la caso fosse necessário.

12 – Um clube tem 30 membros. A diretoria é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras é possível formar uma diretoria?

Resolvemos este exercício de duas formas diferentes. A primeira foi analisando as decisões, e possibilidades para cada uma delas: "*há 3 cargos a serem preenchidos. Para o primeiro existem 30 candidatos, para o segundo 29 e terceiro 28", então "o total de maneiras de formar a diretoria é 30x29x28 = 30!/27!.*" A segunda foi utilizando a fórmula recentemente deduzida. O exercício solicitava que escolhêssemos dentre 30 candidatos disponíveis, 3 pessoas para ocupar o cargo de diretoria, secretaria e tesouraria. Desta forma, o n=30 e p=3. $A_{30,3}$ = 30!/(30-3)! = 30!/27!. Encontrando a mesma resposta. Finalizamos a aula, com os alunos afirmando preferir não utilizar a fórmula, por ser mais uma coisa para memorizar.

4.4.4 Combinação Simples

Os exercícios 13 e 15 foram usados como exemplos de Combinação Simples. E serão utilizados para auxiliar na formalização dos conceitos de Combinação Simples.

13 – Em uma sala de aula existem 24 alunos, e estes precisam se organizar em grupos de 6 pessoas. Quantos grupos são possíveis?

Para resolver este exercício os alunos decidiram "*seguir a lógica*". Dividindo a resolução em etapas. A primeira foi distinguir quantas e quais decisões deveriam ser tomadas: "*são 6 decisões, daí faz 24x23x22x21x20x19, que é o mesmo que 24!18!.*" Antes de responder que não era bem essa resposta, perguntei se o grupo "A, B, C, D, E e F" era o mesmo grupo se eu tivesse escolhido "F, E, D, C, B e A". Os alunos chegaram a conclusão que eram iguais, ao que sem influência disseram "*há, então tem que dividir pelas repetições: 6!*".

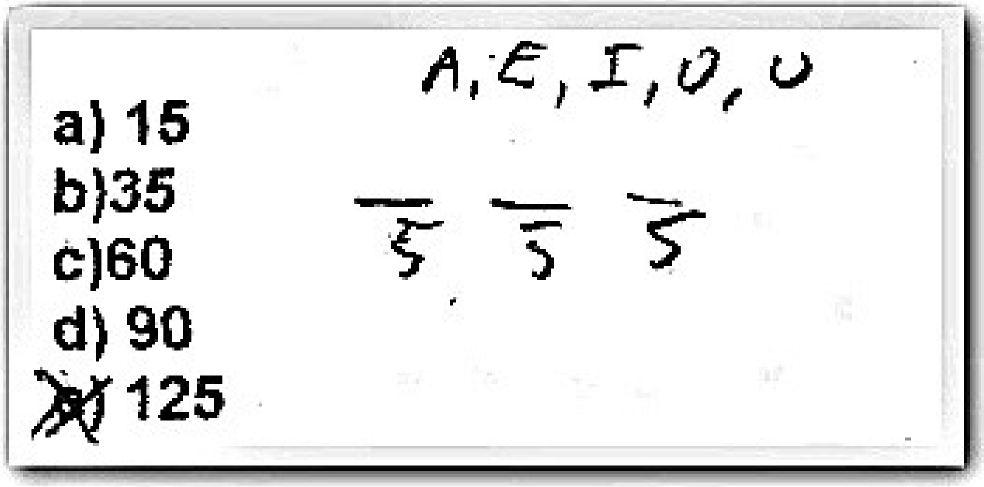
Perguntei então, qual era a diferença deste exercício, para os feitos na aula anterior: "*esse a ordem não importa*". Valendo-me desta afirmação, defini que "*exercícios como este também possuem um nome especial, são exemplos do que* *na combinatória chamamos de Combinação Simples, e assim como o arranjo também possui uma forma generalizada. Imagine a mesma situação com a sacola de brinquedos. Só que agora, invés de crianças escolherem um, vamos escolher 5 para uma delas. Quantos pacotes diferentes essa criança pode ganhar? Se importasse a ordem que ela escolhe, teria n!/(n-5)!, porém, como não importa, dividimos por 5!, obtendo n!/p!.(n-5)!*" A generalização para quaisquer quantidade de brinquedos também não foi muito bem aceita, mas resumida no quadro da seguinte forma : C_n^p = A_n^p / p! = n!/p!(n-p)!"

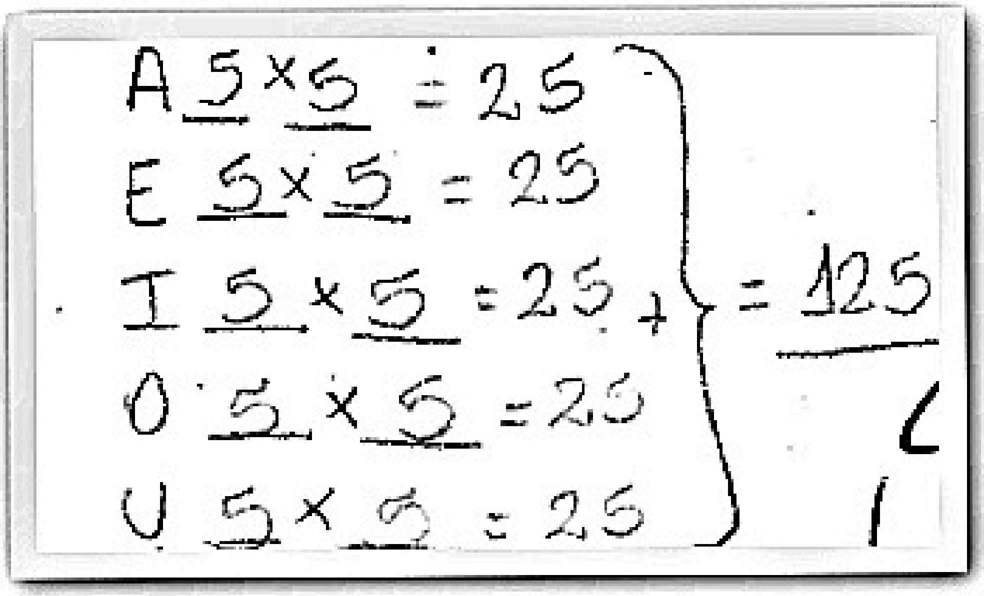
15 – Em um baralho de truco há 40 cartas. E para jogar cada um dos competidores recebe 3 cartas. Quantas mãos cada um dos jogadores poderá receber? Destas, quantas vezes ele saiu com o "espadão"?
Obs: Interpretamos a questão como se as cartas fossem distribuídas de 3 em 3. Consideramos também o primeiro jogador que iria receber as cartas.

Primeiramente foi observado que teríamos que escolher 3 cartas dentre as 40 disponíveis. Como não fazia diferença a ordem que as cartas fossem obtidas, chegamos a conclusão que teríamos de dividir o resultado obtido por 3!. Quando questionados, os alunos afirmaram que "para a primeira carta tem 40 opções, para a segunda 39 e para a terceira 38. Daí faz 40x39x38, como não faz diferença a ordem das cartas divide por 3!".

Mesmo que os alunos não apresentassem total afinidade com as fórmulas deduzidas, concluí a parte teórica de Análise Combinatória satisfeita. Os alunos participaram da construção das respostas, e desenvolveram argumentos satisfatórios de contagem. Apresento algumas resoluções, dos testes individuais aplicados na aula seguinte:

Questão 2: **No sistema de emplacamento de veículos que começa a ser implantado, as placas têm 3 letras como prefixo, podendo haver letras repetidas. Usando apenas as vogais, o número máximo de prefixos é;**





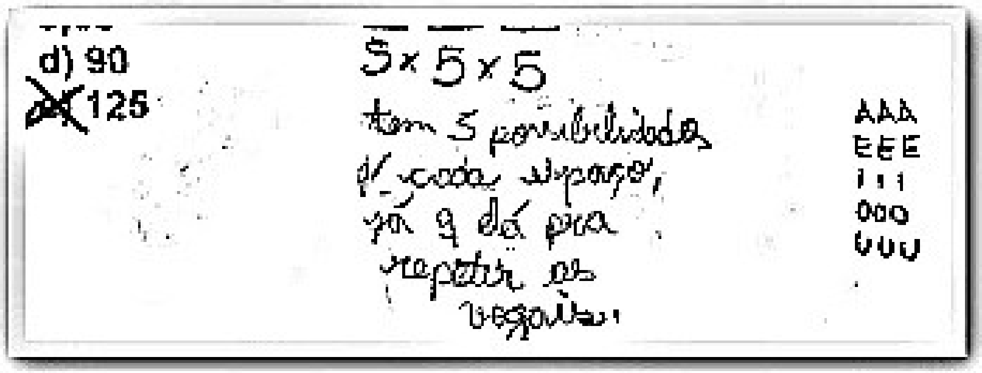


Figura 23 Resposta de alunos referente a questão 2 do teste 1.

Questão 3: **Com os números ímpares pode-se formar n números maiores de 200 e que tenham apenas 3 algarismos, que são distintos. O valor de n é:**

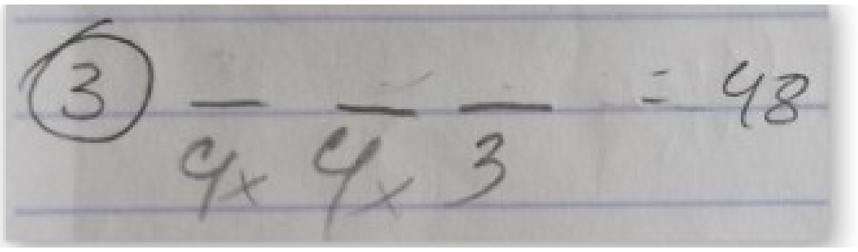


Figura 24 Resposta de alunos referente a questão 3 do teste 1.

Questão 4: **Um grupo de 10 homens tem duas tarefas a executar. Três deles devem cuidar de um jardim, enquanto os outros pintarão uma casa. O número de maneiras que as tarefas podem ser distribuídas é:**

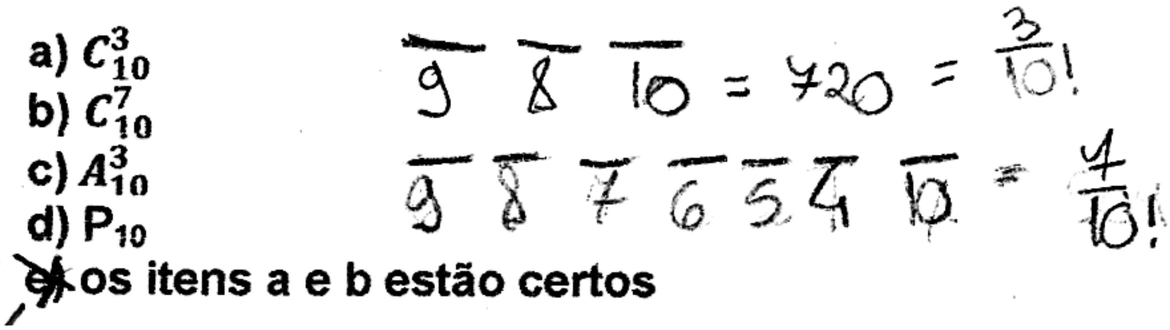


Figura 25 Resposta de aluno referente a questão 4 do teste 1.

Questão 5: **O número de segmentos de retas determinados por 10 pontos, dois a dois distintos, é:**

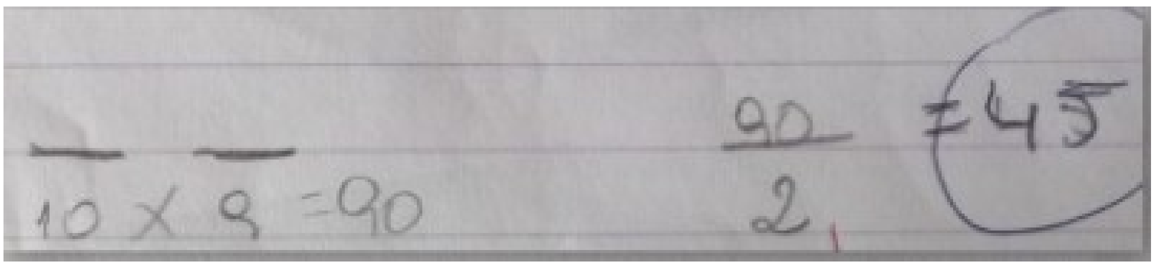


Figura 26 Resposta de aluno referente a questão 5 do teste 1.

Desta forma, acredito que o trabalho tenha sido válido. Visto que a maioria dos alunos entendeu os conceitos de Análise Combinatória, e não se prenderam as fórmulas.

4.5 Aplicação do projeto de Modelagem Matemática

Sem saber o que é Modelagem Matemática, ou como aplicá-la, os alunos foram convidados a elaborar um *Trabalho de Projeto,* "trata-se em dividir os alunos em grupos, os quais devem eleger temas de interesse para serem investigados por meio da matemática, contando com o acompanhamento do professor" (BARBOSA, 2001, p.1). Assim, foram divididos em pequenos grupos de no máximo 4 integrantes. Ao total, foram formados cinco grupos, que denominarei de Grupo Alfa, Grupo Beta, Grupo Gama, Grupo Delta e Grupo Ômega. As tarefas foram distribuídas em dias diferentes. No primeiro dia os alunos deveriam escolher um tema - uma situação da realidade que fosse de interesse deles, como esportes, televisão, música, rádio, jogos. Em sequência, os alunos foram convidados a elaborar perguntas, situações-problema, que pudessem resolver com o auxílio da Análise Combinatória. E enfim, elaborar uma apresentação, para expor ao grande grupo o projeto criado.

Inicialmente, expliquei que o tema poderia ser alterado sempre que eles achassem necessário, o importante era que se identificassem com o assunto. Mesmo assim, o grupo Delta teve dificuldades para decidir seu tema, prometendo entregar na aula seguinte. Os grupos Alfa (figura 27) e Gama (figura 29) seguiram a temática Musical. Os grupos Beta (figura 28) e Ômega (figura 30) decidiram tratar sobre esportes.

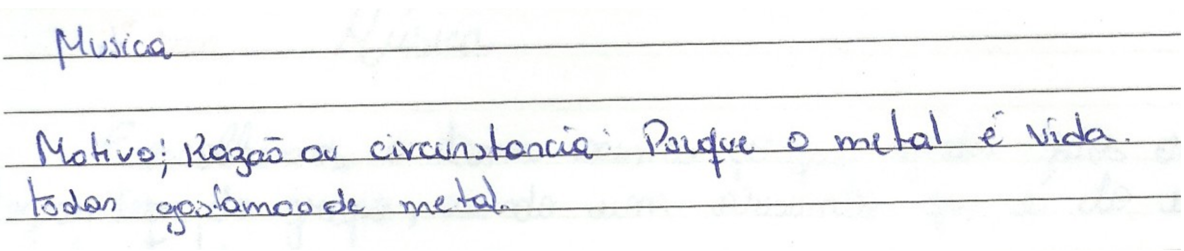


Figura 27 – Escolha e justificativa do tema do Grupo Alfa.

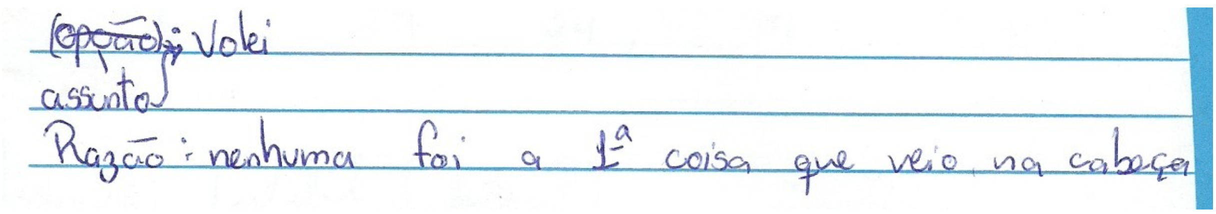
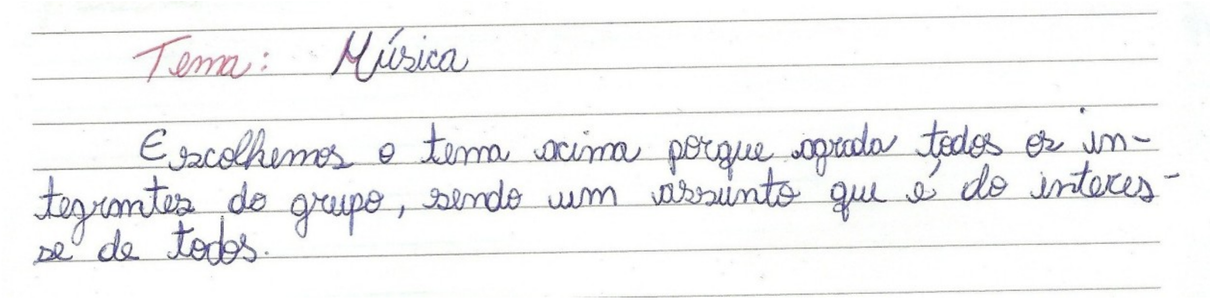


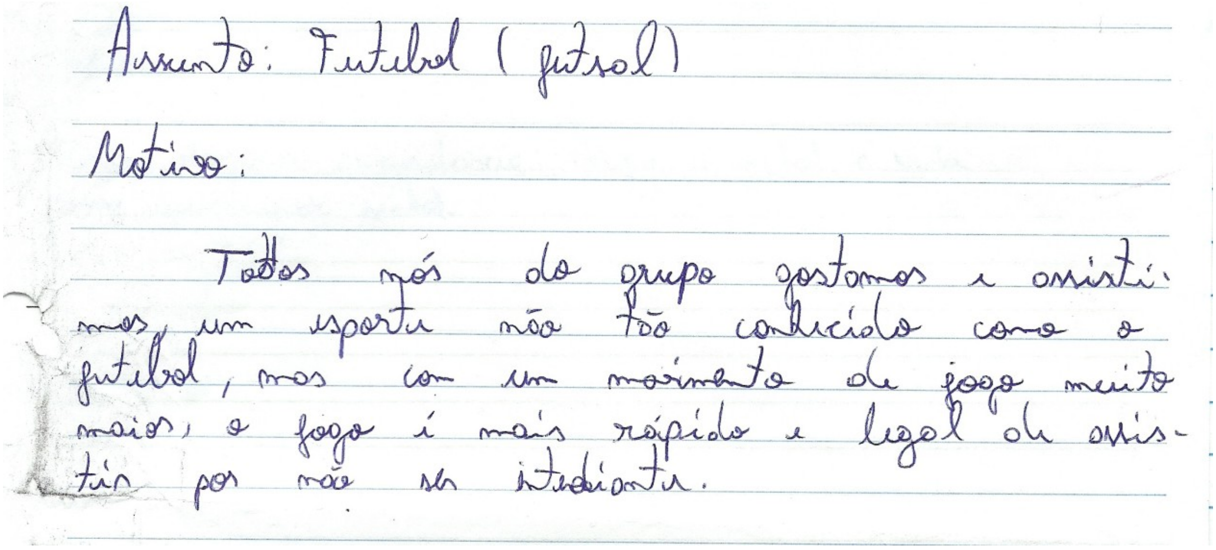
Figura 28 – Escolha e justificativa do tema do Grupo Beta.



Tema: Música

Escolhemos o tema acima porque agrada todos os integrantes do grupo, sendo um assunto que é do interesse de todos.

Figura 29 – Escolha e justificativa do tema do Grupo Gama.



Assunto: Futebol (futsal)

Motivo:

Todos nós do grupo gostamos e assistimos, um esporte não tão conhecido como o futebol, mas com um movimento de jogo muito maior, o jogo é mais rápido e legal de assistir por não ser entediante.

Figura 30 – Escolha e justificativa do tema do Grupo Ômega.

Enquanto elaboravam a situação-problema que iriam trabalhar, foi preciso acompanhar as discussões dos grupos mais de perto. Era visível a dificuldade dos alunos em relacionar o tema a questões de matemática, mais especificamente à Análise Combinatória.

A primeira situação-problema do Grupo Alfa era saber quantos anagramas eram possíveis de formar com as letras das suas bandas de rock favoritas. Apesar de ser uma curiosidade válida, o meu objetivo com a Modelagem Matemática era que os alunos percebessem aplicações práticas do conteúdo de Análise Combinatória no cotidiano. A pergunta “quantos anagramas tem a palavra HEAVY METAL?” por exemplo, não deixa de ser uma pergunta de livro didático, mas não representa nenhuma aplicação da Matemática em uma situação real.

Conversando com o grupo, perguntei por que elas tinham escolhido o tema, o que há de interessante em uma banda, qual a rotina delas. Pensando nestas questões, os integrantes do grupo elaboraram a seguinte situação-problema: "quais as chances de encontrar alguém com a mesma camiseta em um show de Rock". Observo que os alunos não haviam estudado ainda probabilidade, mas "muitas vezes, as atividades de Modelagem oferecem oportunidades para aprender novas idéias matemáticas" (BARBOSA apud BASSANEZI, 2003. p.8). Sendo assim, decidiram pesquisar os dados do show "Rock In Rio": quais as bandas presentes, a quantidade de ingressos vendidos, quantas tipos de camisetas oficiais cada uma das bandas possuía na época, para então realizar os cálculos.

O trabalho não foi apresentado para a turma, apenas entregue impresso. O grupo considerou apenas um dos dias de show, cujas atrações eram as bandas Gloria, Coheed and Cambria, Motörhead, Slipknot e Metallica, com um público estimado em 85 mil pessoas. A quantidade de modelos de camisetas de cada uma das bandas foi estimada pela popularidade da estampa, em um total de 60 tipos. Para efetuar os cálculos estes alunos descontaram 5mil pessoas que poderiam estar com uma camiseta que não fosse de qualquer banda, e dividiram as outras pessoas presentes em conjuntos, tentando aproximar a quantidade de fãs de cada uma das bandas: "quanto mais tarde o show, mais fãs têm a banda". Assim, dados duas pessoas quaisquer do mesmo conjunto de fãs, calcularam as chances de estarem com a mesma camiseta. Apesar de alguns dados serem estimados e os cálculos serem simples o grupo concluiu que o "trabalho ajudou a desenvolver a nossa sabedoria sobre a matéria a qual nós estamos a aprender nesse ano letivo."

O Grupo Beta, como podemos observar na justificativa, escolheu o seu tema sem muita convicção, *"foi a 1ª coisa que veio na cabeça*". Portanto, não era natural a curiosidade sobre o assunto, nem as perguntas que se poderia fazer sobre ele. Mesmo assim, o grupo preferiu manter a temática. Não houve muita produtividade durante as aulas, e lendo o trabalho entregue, percebi que o *convite* não fora aceito. Assim como Barbosa (2001) o meu interesse não era em situações fictícias elaboradas artificialmente, no entanto "exercícios de Análise Combinatória foram criados e resolvidos por *eles* mesmos". Mesmo os alunos tendo apresentado conhecimento satisfatório em Análise Combinatória, não se envolveram com o trabalho, deixando de relacionar o conteúdo aprendido com a realidade.

O Grupo Gama decidiu falar sobre gostos musicais, "*porque todas as pessoas gostam de música*". A pergunta principal era descobrir "*quais as chances de dois integrantes da turma gostar dos mesmos ritmos?*". Durante as aulas, sugeri que aplicassem um questionário com a turma para obter os dados. Poderiam expandir a pesquisa para as demais turmas do segundo ano na escola. Com a troca de ideias, notei que a preocupação do grupo era encontrar perguntas com soluções, ao invés de soluções para as perguntas. Mesmo assim, o trabalho foi entregue, mas não apresentado. Conseguiram, através do Diagrama de Venn, mostrar a quantidade de pessoas que aprecia Rock, Eletrônica, Sertanejo e MPB e assim calcular a probabilidade de dois colegas gostarem do mesmo ritmo musical. Concluindo que *"o trabalho serviu para nos auxiliar nos estudos e compreender o motivo, o que é muito importante para o bom rendimento da aula*".

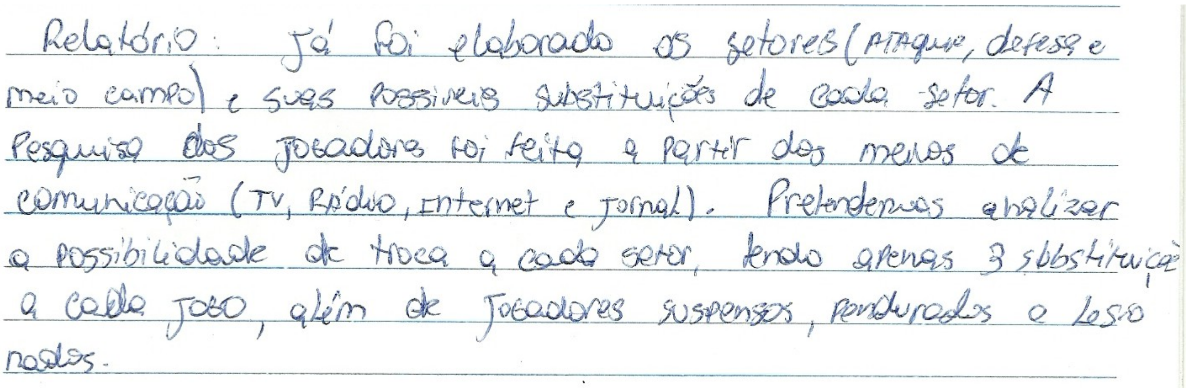
O Grupo Delta, na segunda aula dedicada ao Projeto de Modelagem Matemática, tomou Rádio como sua temática e elaborou a seguinte situação: "*Vamos imaginar que uma rádio quer trocar o "top five". E tem 20 faixas de músicas famosas. Quantas possibilidades há de montar o hanking de músicas?*" Novamente, houve a necessidade de explicar que situações fictícias poderiam gerar discussões válidas (BARBOSA, 2001), mas não era esse o objetivo do trabalho. Desta forma, insisti que deveriam procurar uma rádio, observar como funciona o hanking, conhecer quantas músicas concorrem, como são eleitas. Os alunos pareceram confusos, pois estavam preocupados em achar perguntas com soluções. Ao final da aula, eles decidiram deixar de lado aquela temática, e pensar em outro assunto.

No terceiro encontro, o grupo estava discutindo bastante as diversas possibilidades, mas ainda não haviam compreendido que as situações deveriam ser reais. Quando questionados sobre o andamento do trabalho, afirmaram que estavam "*pensando em uma loja, que estivesse em promoção: na compra de duas peças da mesma roupa, ganha uma camiseta. Por exemplo, comprando duas calças ganha uma camiseta. Quantas combinações de compras têm na loja?*". Perguntei aos alunos se essa loja de fato existia, e brinquei querendo saber onde estava localizada, "*lugar bom de fazer umas comprinhas*". Eles responderam negativamente, e um pouco frustrados voltaram a decidir como fazer o trabalho.

Não houve outras aulas para orientação do trabalho, no entanto os alunos entenderam o recado. Para a apresentação final, levaram dados retirados da lanchonete da escola, com preços de cada um dos produtos lá vendidos, e montaram a cena de uma pessoa indo com R$ 3,00 comprar um lanche. Houve alguns erros de interpretação do problema. Mas ao final, estava satisfeita por terem encontrado uma situação real em que o grupo se identificasse.

Por fim, o Grupo Ômega. Este grupo era o mais entusiasmado, pois os 4 meninos que compunham o grupo gostavam muito de futebol, e de memória sabiam o nome e função dos jogadores de diversos times principais, assim como os reservas e os jogadores lesionados. A pergunta norteadora deles era saber quantas formações o time do Internacional poderia ter em campo. Durante a conversa, os alunos explicaram que *"o técnico não testa só a qualidade de cada jogador, mas também com quem irá jogar ao seu lado*". Desta forma, para escalar o time que entraria em campo os alunos levaram em conta a posição individual de cada jogador, e "*também tem que considerar as parcerias em campo*".

No relatório (Figura 31) é possível perceber que o grupo havia aceito o convite, e estava engajado em elaborar um projeto que fosse significativo para eles, e envolvesse os conteúdos trabalhados em sala de aula.



Relatório: Já foi elaborado os setores (ataque, defesa e meio campo) e suas possíveis substituições de cada setor. A pesquisa dos jogadores foi feita a partir dos meios de comunicação (TV, Rádio, internet e jornal). Pretendemos analizar a possibilidade de troca a cada setor, tendo apenas 3 substituições a cada jogo, além de jogadores suspensos, pendurados e lesionados.

Figura 31 – Relatório do Grupo Ômega

Ao final, para apresentação os alunos montaram no quadro um esquema tático do tipo 4-4-2, inicialmente contando de quantas formas cada setor poderia entrar em campo, e a partir dos dados levantados limitaram as escolhas, considerando os jogadores lesionados, e as duplas pré-formadas. O grupo concluiu que a matemática "*ajuda a prever as possibilidades de jogo, mas tem a estratégia, porque tem a dupla que tem eficiência e a outra que pode não ter*".

Ao final do trabalho, considero que alguns aspectos devem ser ressaltados. Para a elaboração de um projeto de Modelagem Matemática é preciso considerar que o seu uso “foge da rotina do ensino tradicional e os estudantes, não estão acostumados ao processo”, eles tem o professor “como transmissor de conhecimentos e quando são colocados no centro do processo de ensino-aprendizagem [...] a aula passa a caminhar em ritmo mais lento” (MACHADO JR. apud BASSANEZI, 2008, P. 40), além de, muitas vezes, esperarem que o professor tire suas dúvidas, em vez de buscar respostas. Mesmo assim defendo seu uso, os alunos demonstraram satisfação ao encontrar relação do conteúdo estudado com situações reais.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Análise Combinatória é um conteúdo importante a ser trabalhado com os alunos, e não deve ser ignorado ou deixado por último. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio:

> Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. As fórmulas devem ser conseqüência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. (BRASIL, 2000, p.123-127)

Assim, esta prática pedagógica elaborada para o ensino de Análise Combinatória permitiu que as fórmulas fossem obtidas através de exemplos e conjecturas. A turma estava habituada a aulas expositivas, as quais o professor era o detentor do conhecimento e utilizando quadro branco e pincel explicava pra classe os conteúdos. Embora seja um método válido, não atraia o interesse da turma, que, talvez por essa razão, não tinham um bom rendimento em Matemática.

A abordagem feita através do jogo “A senha” sem quaisquer menções do conteúdo a ser estudado fez com que os alunos relutassem um pouco em responder o questionário, argumentando que não poderiam responder um assunto que não foi explicado. Com uma sequência de perguntas, os alunos perceberam que o conhecimento que eles já possuíam de matemática permitia formular as respostas. O jogo tornou-se uma boa estratégia por ser considerado como uma aplicação divertida da Análise Combinatória, quebrando, um pouco, o conceito de que a Matemática é uma disciplina chata e sem utilidade.

Para a formalização dos conceitos de Análise Combinatória foi utilizado o Método de Contagem. Os alunos demonstraram maior entendimento, pois durante todo o processo havia interação entre professor e aluno. A construção dos conceitos partia dos argumentos dos alunos para resolver os exercícios, o que permitia uma maior compreensão do que estava sendo feito. Comprovando que o Método de

Contagem é válido para ser utilizado em sala de aula tanto de nível superior quanto no Ensino Médio. Cabe ao professor apresentar os exercícios e construir os conceitos com os alunos, não é preciso que o professor seja sempre o transmissor do conteúdo a ser aprendido, os alunos podem e devem fazer parte desta construção. O que eles sabem é tão importante e relevante quanto o que estão aprendendo.

Como os alunos reagiram positivamente às aulas interativas foi proposta a realização de um Trabalho de Projeto. No qual os alunos teriam a oportunidade de vincular a realidade aos conteúdos trabalhados em sala de aula. Utilizar a Modelagem Matemática como metodologia de ensino parecia apropriado e de acordo com a proposta, auxiliando na elaboração da metodologia aplicada. A experiência foi válida para os alunos, pois estes se encontraram animados ao saber que o que eles aprendem em sala de aula pode ser aplicado em situações reais.

Os três eventos propostos por este trabalho constituem em uma sequência de estratégias para o ensino de Análise Combinatória, e podem ser utilizados separadamente, ou em ordens diferentes. É importante que tanto professor quanto aluno trabalhem juntos para a obtenção de melhores resultados.

Por fim, avalio os resultados da proposta de prática pedagógica para o ensino de Análise Combinatória em uma turma de segundo ano do Ensino Médio, considerando o uso do jogo “A senha” como uma forma de introduzir o conteúdo de forma dinâmica e o método de contagem para formalizar os conceitos de Permutação, Arranjo e Combinação, permitindo a participação e interação dos alunos durante todo este processo, como satisfatória. Assim como o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino da aplicabilidade da Análise Combinatória em situações cotidianas, ou oriundas de outras áreas da realidade.

Futuramente, enquanto ainda atuar como docente no Ensino Médio, continuarei utilizando o Método de Contagem para o ensino de Análise Combinatória, acredito que a melhor maneira do aluno aprender é participando da aula e da construção dos conceitos. Além disso, utilizarei a Modelagem Matemática para auxiliar, sempre que possível, os alunos para associar os conteúdos de matemática abordados em sala, com situações reais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, A. L. de **Ensinando e aprendendo Análise Combinatória com ênfase na Comunicação Matemática: um estudo com o 2º ano do ensino médio.** Dissertação de Mestrado, Mestrado Profissional em Educação Matemática, UFOP, Ouro Preto, Minas Gerais, 2010. Disponível em : < http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/Diss_Adriana_Luzie.PDF> Acesso em: dezembro de 2012.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática na sala de aula.** Perspectiva, Erechim (RS), v. 27, nº 98, p. 65-74, junho/2003. Disponível em: < http://www.uefs.br/nupemm/perspectiva.pdf> Acesso em: dezembro de 2012.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico.** In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais... Caxambu: ANPED, 2001. 1 CDROM. Disponível em: < http://www.uefs.br/nupemm/anped2001.pdf> Acesso em: dezembro de 2012.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como?.** Veritati, nº 4, p. 73-80, 2004. Disponível em: < http://www.uefs.br/nupemm/veritati.pdf> Acesso em: dezembro de 2012

BASSANEZI, R. C. **Modelagem Matemática: Uma disciplina emergente nos programas de formação dos professores.** Biomatemática XI, 1999. Disponível em: < http://www.ime.unicamp.br/~biomat/bio9art_1.pdf> Acesso em: dezembro de 2012.

BERTOLDO, J. V.; RUSCHEL, M. A. de M. **Jogo, Brinquedo e Brincadeira - Uma Revisão Conceitual.** Disponível em: < http://tele.multimeios.ufc.br/~semm/conteudo/leitura/je/JOGO,%20BRINQUEDO%20E%20BRINCADEIRA%20%20QUESTOES%20CONCEITUAIS.pdf> Acesso em: dezembro de 2012.

BIEMBENGUT, M. S; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino.** São Paulo, Ed. Contexto, 2000.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Matemática/ Secretaria da Educação Fundamental. – Brasília: MEC/ SEF, 2000. Disponível em: <http://www.fisica.ufmg.br/~menfis/programa/CienciasNatureza+.pdf> Acesso em: dezembro de 2012.

CARAMORI, M. F. **Aula 6 - Conhecimentos de Matemática: Soldado Brigada Militar**. Disponível em: < http://cejurgs.com.br/arquivos/1/aulas/62/Aula6-Brigada.pdf> Acesso em: dezembro de 2012.

CARVALHO, P. C. P. **Métodos de Contagem e Probabilidade.** 2006. Disponível em: <http://www.de.ufpe.br/~leandro/APOSTILA_CONTAGEM.pdf> Acesso em: dezembro de 2012.

CARVALHO, G. Q. **O uso de jogos na resolução de problemas de contagem: um estudo de caso em uma turma do 8º ano do Colégio Militar de Porto Alegre.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2009. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/17845> Acesso em: dezembro de 2012.

CECHIM, L. **Exercícios resolvidos sobre Anagramas.** Disponível em: <http://meteorotica.blogspot.com.br/2012/01/exercicios-resolvidos-sobre-anagramas.html> Acesso em: dezembro de 2012.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações.** 2. Ed. São Paulo: Ática, 2005.

FIDELIS, R.; ALMEIDA, L. W. **Modelagem Matemática em sala de aula: Contribuições para competência de refletir-na-ação.** Disponível em: < http://www.4shared.com/office/tUpya2vx/modelagem_matemtica_em_sala_de.html> Acesso em: dezembro de 2012.

FIETZ, H. **O ensino de estatística por meio de uma atividade de Modelagem Matemática.** Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática), UFRGS, Porto Alegre, 2010. Disponível em: < http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/31675/000784065.pdf?sequence=1 > Acesso em: dezembro de 2012.

KLÜBER, T. E.; BURAK, D. **Modelagem Matemática: uma experiência concreta.** In: IV Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática – IV CNMEM, Anais... Feira de Santana, 2005.

MACHADO JR, A. G. **Modelagem Matemática no ensino-aprendizagem e resultados.** Dissertação de Mestrado, UFP, Belém, 2005. Disponível em: < http://www.ppgecm.ufpa.br/media/Dissertacao_Arthur%20Goncalves%20Machado%20Junior.pdf> Acessado em: dezembro de 2012.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória.** 4. Ed. Rio de janeiro: Ciência Moderna Ltda., 2007

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; CARRAHER, T. N. **Na vida dez, na escola zero.** 12. ed. São Paulo: Cortez, 2001. Disponível em: < http://www.fcc.org.br/pesquisa/publicacoes/cp/arquivos/588.pdf> Acesso em: dezembro de 2012.

SKOVSMOSE, O. **Cenários de investigação**. Bolema – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000. Disponível em: < http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/textos/skovsmose(Cenarios)00.pdf> Acesso em: dezembro de 2012.

ANEXO – AUTORIZAÇÃO DA ESCOLA ESTADUAL PROTÁSIO ALVES PARA UTILIZAR O PROJETO PEDAGÓGICO APLICADO NESTE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO.

UFRGS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Consentimento Informado

O COLÉGIO ESTADUAL PROTÁSIO ALVES, com o endereço nesta capital, na Av. Ipiranga, 1090, CNPJ – 92941681/000100, neste ato representado por sua Diretora Sônia Tessaro Boyde, por intermédio do presente instrumento, **autoriza** Daniela Barcellos Haas, brasileira, solteira, estudante, residente e domiciliada na Rua São Manuel, 750 – Ap 204, em Porto Alegre, RS, CPF 017173640-04, a utilizar o projeto "Uma Experiência De Contagem No Ensino Médio" em seu trabalho de conclusão na Faculdade de Matemática na Universidade do Rio Grande do Sul.

O autorizado, por sua vez, se obriga a manter absoluto sigilo a identidade dos discentes que participaram do referido projeto.

Porto Alegre, 17 de dezembro de 2012.

Sônia Tessaro Boyde

Sônia M. Tessaro Boyde
Diretor
Matr. Nº 1247677/01
Col. Est. Protásio Alves

De acordo:

Daniela Barcellos Haas

APÊNDICE A - TESTE 1

1 – (UCS) O valor de x na equação $x(x+1)! = 42.x.(x-1)!$ é:

2 – (UFRGS) No sistema de emplacamento de veículos que começa a ser implantado, as placas têm 3 letras como prefixo, podendo haver letras repetidas. Usando apenas as vogais, o número máximo de prefixos é:

3 – (UFRGS) Com os números ímpares pode-se formar n números maiores de 200 e que tenham apenas 3 algarismos, que são distintos. O valor de n é:

4 – (ULBRA) Um grupo de 10 homens tem duas tarefas a executar. Três deles devem cuidar de um jardim, enquanto os outros pintarão uma casa. O número de maneiras que as tarefas podem ser distribuídas é:

5 – (UFRGS) O número de segmentos de retas determinados por 10 pontos, dois a dois distintos, é:

6 – O número de anagramas da palavra MATEMATICA que terminam por vogal é:

APÊNDICE B – TESTE 2

1 - (UCS) O valor de x na equação $\frac{n!}{(n-3)!} = 4.\frac{n!}{(n-2)!}$ é:

2 - (UFRGS) Queremos formar placas de automóveis com seis símbolos distintos, dos quais os dois primeiros são letras e os restantes algarismos. Com as vogais e os algarismos 0,2,4 e 6 podemos formar:

3 - (UFRGS) De quantas maneiras distintas pode-se alinhar cinco estacas azuis idênticas, uma vermelha e uma branca?

4 - (UFRGS) Ao planejar uma prova de Matemática contendo 5 questões, um professor dispõe de 5 questões de Álgebra e 6 de Trigonometria. Calcule o número de provas diferentes que é possível elaborar, usando em cada prova 2 questões de Álgebra e 3 de Trigonometria.

5 - (UFRGS) Dado 7 pontos dois a dois distintos sobre uma circunferência, o número de triângulos inscritos na circunferência tendo como vértices os pontos dados é:

6 - O número de anagramas da palavra ALEGRIA que começam e terminam por consoante é: