UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

DAYANE CRISTINA DAS NEVES

SOBRE A APRENDIZAGEM DA MULTIPLICAÇÃO DOS NÚMEROS NEGATIVOS

Porto Alegre
2012

DAYANE CRISTINA DAS NEVES

SOBRE A APRENDIZAGEM DA MULTIPLICAÇÃO DOS NÚMEROS NEGATIVOS

Trabalho de Conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Elisabete Zardo Búrigo

Porto Alegre

2012

DAYANE CRISTINA DAS NEVES

SOBRE A APRENDIZAGEM DA MULTIPLICAÇÃO DOS NÚMEROS NEGATIVOS

Trabalho de Conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Elisabete Zardo Búrigo

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof.ª Dr.ª Elisabete Zardo Búrigo - Orientadora
UFRGS – Instituto de Matemática

Prof.ª Dr.ª Lucia Helena Marques Carrasco
UFRGS – Instituto de Matemática

Prof.ª Dr.ª Bárbara Seelig Pogorelski
UFRGS – Instituto de Matemática

AGRADECIMENTOS

À professora doutora Elisabete Zardo Búrigo, orientadora desta pesquisa, pela paciência, pelo incentivo e pelas explicações, que foram essências, para a realização desta pesquisa, e principalmente, para que eu conseguisse superar alguns obstáculos durante a graduação.

Ás professoras doutoras Lucia Helena M. Carrasco e Bárbara Seelig Pogorelski por participarem da banca examinadora e também por terem contribuído de maneira muito especial na minha formação como professora.

Aos meus pais Gilnei e Izabel, que através do seu amor incondicional, me apararam nos momentos mais difíceis, sempre respeitando e apoiando minhas decisões.

Ao meu tio Gilton, que me ajuda desde o período escolar e continua ajudando através das nossas conversas e discussões acerca da matemática, inclusive contribuindo na motivação para a escolha do tema desta pesquisa.

Á minha dinda Marza, que se faz presente e pronta para ajudar sempre que necessário.

Aos meus queridos amigos, que estiveram ao meu lado durante essa caminhada, aguentando minhas crises de humor, em especial o Fernando e a Liliane, que nessa reta final, ajudaram e apoiaram muito.

Aos entrevistados, meus colegas de graduação, que gentilmente aceitaram contribuir na realização desta pesquisa.

RESUMO

Este trabalho tem os objetivos de identificar e discutir as dificuldades envolvidas no ensino e na aprendizagem da multiplicação de números negativos. Com esses objetivos, foram entrevistados futuros professores, licenciandos em Matemática, e também foi proposto a um grupo de alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública de Porto Alegre que resolvessem uma lista de exercícios, buscando identificar os modos como operam e suas concepções sobre as operações com os números relativos. Os dados foram analisados tendo-se como referência teórica os campos conceituais de Gérard Vergnaud. A partir dessa análise, foi possível identificar que os licenciandos em Matemática não haviam refletido sobre os obstáculos envolvidos no ensino dos números relativos, principalmente no caso da multiplicação de números negativos, e que a maioria dos estudantes que participaram da pesquisa não compreendem os números negativos e como operar com eles, apesar de sua escolaridade avançada.

Palavras-chave: ensino de matemática, multiplicação, números negativos.

ABSTRACT

The objective of this study was to identify and discuss the difficulties involved in the teaching, as well as learning of negative number multiplication. With these goals in mind, we have interviewed prospective teachers, math undergraduates and it has also been proposed to a group of third year students in a local Porto Alegre High School that they solve a list of exercises. We aimed to identify the ways in which they operate with regard to their processing and conceptual understanding of negative number multiplication. The data we obtained was analysed and referenced with regards to the theoretical conceptual fields of Gerard Vergnaud. From this analysis, it was possible to identify that the Math undergraduates did not reflect about the obstacles involved in the teaching of relative numbers. This was especially the case concerning negative number multiplication. We also found that most of the students who participated in our research do not fully understand negative numbers, or how to operate with them, in spite of their advanced academic achievements.

Key-words: math teaching; multiplication; negative numbers

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Sobre a multiplicação por 4 (GONZALEZ, et al., 1990, p.99) 17
Figura 2 - Sobre a multiplicação por -4 (GONZALEZ et al., 1990, p. 99) 18
Figura 3 - Solução do Aluno 11 referente ao Exercício 1 35
Figura 4 - Solução do Aluno 3 referente ao Item a do exercício 1.............................36
Figura 5 - Solução do Aluno 7 referente ao Item b do exercício 1.............................36
Figura 6 - Solução do Aluno 4 referente ao Item b do exercício 1.............................36
Figura 7 - Solução do Aluno 6 referente ao Item b do exercício 1.............................37
Figura 8 - Solução do Aluno 9 referente ao Item c do exercício 1.............................37
Figura 9 - Solução do Aluno 7 referente ao Item c do exercício 1.............................38
Figura 10 - do Aluno 2 referente ao Item c do exercício 1...38
Figura 11 - Solução do Aluno 8 referente ao Item c do exercício 1...........................38
Figura 12 - Solução do Aluno 2 referente ao exercício 2 39
Figura 13 - Solução do Aluno 1 referente ao exercício 2 40
Figura 14 - Solução do Aluno 12 referente ao exercício 2 41
Figura 15 - Solução do Aluno 4 referente ao exercício 2 41
Figura 16 - Solução do Aluno 5 referente ao exercício 2 42
Figura 17 - Solução do Aluno 7 referente ao exercício 2 42
Figura 18 - Solução do Aluno 8 referente ao exercício 2 43
Figura 19 - Solução do Aluno 8 referente ao exercício 3 44
Figura 20 - Solução do Aluno 2 referente ao exercício 3 44
Figura 21 - Solução do Aluno 4 referente ao exercício 3 45
Figura 22 - Solução do Aluno 6 referente ao exercício 3 45
Figura 23 - Solução do Aluno 11 referente ao exercício 4 46
Figura 24 - Solução do Aluno 5 referente ao exercício 4 47
Figura 25 - Solução do Aluno 3 referente ao exercício 4 47
Figura 26 - Solução do Aluno 8 referente ao exercício 4 48
Figura 27 - Solução do Aluno 8 referente ao exercício 5 49
Figura 28 - Solução do Aluno 4 referente ao exercício 6 50
Figura 29 - Solução do Aluno 11 referente ao exercício 6 50
Figura 30 - Solução do Aluno 9 referente ao exercício 6 51
Figura 31 - Solução do Aluno 9 referente ao exercício 7 52

Figura 32 - Solução do Aluno 11 referente ao exercício 7 52
Figura 33 - Solução do Aluno 3 referente ao exercício 7 53
Figura 34 - Solução do Aluno 5 referente ao exercício 8 54

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **10**
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA **13**
2.1 Sobre a aceitação dos números relativos 13
2.2 Por que menos com menos dá mais? 16
2.3 A construção dos conceitos segundo Gérard Vergnaud 18
3 O QUE DIZEM OS FUTUROS PROFESSORES **22**
3.1 Entrevistas realizadas com estudantes de Licenciatura em Matemática: as respostas e análises 23
4 A INVESTIGAÇÃO NO ENSINO MÉDIO **33**
4.1 Metodologia 33
4.2 O que fizeram os alunos: análise dos exercícios 34
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS **55**
REFERÊNCIAS **57**

1 INTRODUÇÃO

No decorrer do curso de Licenciatura em Matemática, estudamos e discutimos em diversas disciplinas a importância da contextualização dos conteúdos matemáticos, para assim favorecer o aprendizado do aluno, porém contextualizar requer uma reflexão mais profunda sobre o conteúdo que será abordado e isso não é uma tarefa fácil.

Minha preocupação com o ensino dos números inteiros negativos despertou quando, em uma conversa familiar, meu tio me questionou sobre por que os professores não tentam ensinar a multiplicação de números negativos de uma forma que permita ao aluno compreender o sentido do resultado do cálculo efetuado: se, para ensinar a soma de números inteiros, se utilizam as ideias de débito e crédito, para a multiplicação não existe uma explicação melhor do que a regra de sinais? Naquele momento, paramos e tentamos encontrar algumas alternativas que fizessem algum sentido, mas percebemos que, na multiplicação entre dois números negativos, era difícil encontrar situações contextualizadas que permitissem justificar um resultado positivo. Confesso que fiquei frustrada por não ter conseguido argumentar sobre esse resultado, mas essa inquietação me motivou a procurar algumas respostas: é possível contextualizar de uma maneira não artificial o produto de dois números negativos? Será que meus colegas, futuros professores de matemática, já pensaram sobre isso? Teriam alguma sugestão a esse respeito?

Contudo, essa inquietação se fortaleceu quando realizei os Estágios de Docência no Ensino Fundamental e Médio. No Ensino Médio, percebi que vários alunos erravam frequentemente as respostas dos exercícios de geometria analítica que exigiam cálculos com números negativos. Fiquei um tanto impressionada com esses erros, pois não esperava encontrar tão expressivamente esse tipo de dificuldade, uma vez que se tratavam de alunos que estavam concluindo a escolarização e precisaram utilizar a regra de sinais nas séries anteriores. No Ensino Fundamental, surgiu o maior desafio: iniciar o estudo dos números inteiros em uma turma do sexto ano. Esse conteúdo que, aparentemente, não é difícil de ser explicado, me exigiu muito nos planejamentos de aula, pois ao mesmo tempo em que não queria priorizar a utilização da regra de sinais, me questionava se de fato existe uma maneira que possa quebrar a “artificialidade” das regras práticas, que apesar de tantas vezes repetidas, o aluno esquece, ou se atrapalha ao utilizá-las no decorrer da sua trajetória escolar.

As dificuldades que pude perceber durante as disciplinas de Estágio me fizeram chegar a outros questionamentos: será que, ao final do período escolar, os alunos conseguem resolver os exercícios que envolvem a multiplicação de números negativos com segurança, quanto ao “sinal” do resultado? Será que os futuros professores já refletiram sobre a dificuldade de compreensão que existe no ensino da chamada “regra de sinais”, segundo a qual o produto de números com sinais diferentes é negativo e o produto de números com mesmo sinal é positivo?

Faço esses questionamentos, pois a regra de sinais que é insistentemente repetida desde o Ensino Fundamental parece não ser tão relevante ou compreensível quanto julgam os professores e, inclusive, os futuros professores. Com o ensino e o uso recorrente, a regra vira uma “verdade” na qual a importância da justificativa acaba se perdendo.

Vale ressaltar que, a partir do estudo do plano cartesiano, os números negativos assumem um sentido bem mais forte do que quando introduzidos no Ensino Fundamental. Nesse momento da introdução, esses números geralmente aparecem em expressões numéricas sem contexto, que não representam uma “situação” em que o resultado final de fato dependa do sinal dos números envolvidos, diferente do que acontece em um contexto geométrico, em especial no Ensino Médio.

Para essa verificação, considerei importante analisar de que modo alunos do Ensino Médio compreendem os resultados oriundos da multiplicação envolvendo números negativos e quais são as concepções que trazem das séries anteriores sobre esse tipo de operação. Foi proposto a duas turmas de estudantes do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública de Porto Alegre que resolvessem uma lista de exercícios e justificassem suas respostas. Além disso, foram realizadas entrevistas com colegas concluintes do curso de Licenciatura em Matemática sobre as suas concepções sobre o assunto.

O segundo capítulo deste trabalho apresenta os referenciais teóricos utilizados. Foram consultados autores que apresentam uma análise histórica sobre as contradições que envolveram o reconhecimento dos números negativos, bem como modelos que possibilitem justificar a multiplicação entre esses números possibilitando a validade das regras de sinais. Para analisarmos como ocorre o processo de construção dos conhecimentos e entendermos como as concepções prévias interferem no aprendizado, utilizaremos a teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud.

O terceiro capítulo apresenta a análise de entrevistas realizadas com estudantes de Licenciatura em Matemática, com o objetivo de identificar concepções que possuem sobre o ensino dos números relativos.

O quarto capítulo apresenta a análise das resoluções da lista de exercícios aplicada em alunos do Ensino Médio de em uma escola pública de Porto Alegre, levando em consideração o desenvolvimento das soluções e das justificativas escritas e orais dadas por esses alunos, para assim identificar se, ao final do período escolar, existem dificuldades para compreender e operar com números negativos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Sobre a aceitação dos números relativos

Para compreender as possíveis dificuldades que surgem durante o ensino dos números inteiros, é importante considerarmos as análises históricas sobre as concepções acerca dos números negativos:

> Os números negativos constituíram um problema conceitual para a matemática enquanto grandeza e números não foram separados epistemologicamente e a definição da matemática era a ciência das quantidades. (SCHUBRING, 2007, p. 1)

As contradições e a rejeição dos números negativos persistiram por vários séculos, em que filósofos e matemáticos não conseguiam entrar em consenso sobre a sua legitimidade. Foi a partir do século XVII, que é um período de destaque da matemática, que surgiram as primeiras interpretações que levariam à aceitação desses números:

> Este século marca o nascimento da ciência moderna. As obras dos filósofos gregos e matemáticos já haviam sido assimiladas por alguns estudiosos que enfrentaram a busca de explicação para a natureza, como haviam feito os sábios gregos. (GONZALEZ *et al.*, 1990, p. 30, minha tradução)

Durante o século XVII, o uso dos negativos foi ampliado ao serem admitidos como raízes e considerados "dispositivos de cálculo" por exigências algébricas, porém não eram reconhecidos como número, pois, para isso, seria necessário interpretá-los. O que ainda não havia sido feito.

> Embora fossem utilizados, a rejeição dos negativos persistiu devido à dificuldade para encontrar um significado intuitivo e empírico, e assumiu várias formas. (GONZALEZ *et al.*, 1990, p. 32, minha tradução)

A ideia de número como quantidade ou expressão de quantidade favorecia essa negação dos negativos como números. Conforme podemos verificar na declaração de Descartes: "Não podem existir números menores que nada". Segundo Gonzalez (1990, p. 32), esse tipo de problema, entre outros, foi superado quando Descartes transformou equações com raízes negativas em equações com raízes positivas, como na resolução geométrica de equações quadráticas. “Foi neste contexto geométrico que os negativos, finalmente, encontraram algum reconhecimento e legitimidade como números.” (GONZALEZ et al., 1990, p. 33, minha tradução)

Embora Descartes tenha sido um dos criadores da Geometria Analítica, ele nunca considerou abscissas negativas, apesar de ter reconhecido que as ordenadas negativas tinham sentido oposto às positivas. Foi Newton o primeiro a utilizar as coordenadas cartesianas como conhecemos hoje, dando um significado geométrico aos negativos representados na reta numérica (GONZALEZ *et al.*, 1990, p. 34). Newton expressou suas ideias da seguinte maneira:

> Quantidades são positivas, ou seja, maiores do que qualquer coisa, ou negativas, ou seja, menos do que nada. Assim, nos assuntos humanos as posses podem ser chamadas de bens positivos, mas as dívidas de bens negativos... e na geometria da mesma maneira. Se uma linha traçada em qualquer direção é considerada positiva, a negativa é a que se traça na direção oposta” (GONZALEZ *et al.*, 1990, p. 34, minha tradução).

Esse período encerrou-se com a aceitação do número negativo. Embora, para alguns, ainda faltasse significado, a Geometria serviu de suporte para a interpretação desses números.

No século XVIII, as confusões em torno dos negativos persistiram devido à falta de um modelo unificador. Dentre alguns conflitos conceituais que ocorreram nessa época, está a contradição de D’Alembert, que define as quantidades negativas como “aquelas que são vistas como menos que nada e que são precedidas do sinal menos”, mas também afirma que “dizer que valor negativo é menos do que nada é expressar uma coisa inconcebível” (apud GONZALEZ, 1990, p. 37). Conforme Gonzalez (1990, p. 37): “a luta entre duas concepções dos negativos, como objetos conceituais e objetos materiais, pode ser vista claramente em D’Alembert”. Essa situação demonstra o quanto era difícil dizer o que é um número negativo. E, entre essas discussões, se inicia o esforço para provar a regra de sinais.

Nessa época, em meio às incompreensões dos negativos, foi Lazare Carnot (1753-1823) quem mostrou as deficiências que existiam em cada uma dessas concepções, discutindo sobre as contradições ao se considerar o número negativo como quantidade, principalmente ao multiplicá-los (*Ibidem*, p. 39). Apesar disso, Carnot estava longe de conseguir demonstrar essa inconsistência, mas suas objeções a esse respeito serviram para provocar a necessidade de uma fundamentação lógica para os negativos:

> Vemos Carnot, carregado de senso comum, expondo as contradições que cercam valores negativos, quando aplicado a eles o conhecimento intuitivo adquirido na manipulação material de grandezas. Carnot não imaginava como resolver estes problemas, precisamente a solução vai exigir a ruptura com o senso comum, com o conhecimento perceptível imediatamente, como visto. (GONZALEZ e*t al.*, 1990, p. 40, minha tradução)

Assim se multiplicaram os esforços para legitimar os negativos e provar a regra de sinais, uma vez que essas questões estavam sempre presentes nas atividades matemáticas, pois dar um significado real ao operar com eles era um problema. Porém, a legitimação dos números negativos só ocorreu em 1867 com a contribuição decisiva do alemão Hermann Hankel (1839-1873), ao publicar a obra "Teoria do sistema dos números complexos". Nesse livro Hankel não utiliza o concreto para justificar os sistemas numéricos e sim o formal: "A condição para construir uma aritmética universal é, portanto, uma matemática puramente intelectual separada de todos os tipos de percepções sensíveis". (apud GONZALEZ *et al.*, 1990, p. 48)

Portanto, Hankel não buscou situações reais para definir os negativos, mas sim leis formais desenvolvidas a partir do "princípio de permanência", segundo as quais "Todos os resultados de álgebra aritmética deduzidas aplicando suas regras, e que são em gerais em sua forma, embora particulares em seu valor, são igualmente os resultados da álgebra simbólica, em que são gerais tanto em seu valor como em sua forma" (HANKEL, apud GONZALEZ *et al.*, 1990, p. 48).

> O princípio da permanência afirma, pois, que todas as regras que se verificam com os números naturais – comutativa e associativa da multiplicação e da soma: distributiva da multiplicação respeita a soma - também são válidas para todos os demais números ou objetos representados por letras. (GONZALEZ *et al.*, 1990, p. 48, minha tradução).

A partir disso, foi possível ampliar alguns critérios para estabelecer o conceito de número, o que fez os negativos serem admitidos e reconhecidos dentro da matemática como "símbolos com que se opera de acordo com certas leis" (GONZALEZ *et al.*, 1990, p. 49).

Ainda nessa época, surgiram diversas teorias e definições para dar significado aos números inteiros. A unificação dessas teorias ocorreu a partir da noção de estrutura do conjunto dos inteiros:

> O conceito de isomorfismo entre estruturas algébricas permite identificar os naturais com os inteiros positivos, que novamente pode considerar Z como uma extensão de N, e escrever $N \subset Z$, embora que o slogan desta inclusão está sob um isomorfismo. (GONZALEZ *et al.*, 1990, p. 57, minha tradução)

2.2 Por que menos com menos dá mais?

Para tentarmos nos aproximar do conjunto Z, existem alguns modelos para esclarecer a sua existência e que podem ser classificados como: aritméticos, algébricos e geométricos. Esses modelos apresentam estratégias de como desenvolver e justificar as operações envolvendo os números negativos.

Contudo, como neste trabalho temos o foco na multiplicação envolvendo números negativos, daremos atenção especial para as possibilidades que permitam justificar "por que menos com menos dá mais?".

No modelo aritmético, os números negativos são escritos como resultados de subtrações com os naturais, já que N é insuficiente para representar essas situações (GONZALEZ *et al.*, 1990, p. 90). Se a é o resultado da subtração $u - v$, $-a$ é o resultado da subtração $v - u$.

Verificando-se as mesmas propriedades que valem para as operações com os números naturais (associativa, comutativa, distributiva), o produto de números inteiros pode ser explicado através do modelo aritmético, conforme segue:

$-a = 0 - a = 1 - (a + 1) = 2 - (a + 2) = 3 - (a + 3) = 4 - (a + 4) = (...)$

Portanto, $a + (-a) = a + (0 - a) = 0 + (a - a) = 0$

1) $a.b + (-a).b = (a + (-a)).b = 0$, e, portanto, $(-a).b = -(a.b)$

2) $(-a).(-b) + (-a).b = (-a).(-b) + (-(a.b)) = (-a).((-b) + b) = (-a).0 = 0$

de modo que $(-a).(-b) + (-(a.b)) = 0$, e portanto $(-a).(-b) = a.b$

No modelo algébrico, os números negativos são necessários para resolvermos equações, em que para qualquer valor numérico de “a”, se verifica que “$(-a) + a = 0$” denominando-se a “a” e “$-a$” números opostos em Z.

> No conjunto dos inteiros todo elemento tem simétrico em relação à soma, isto é, para qualquer número inteiro "a", existe um número "-a" de tal modo que $a + (-a) = 0$, que resulta da definição de Z. Esta relação dá sentido ao sinal que antes havíamos dado a esses novos números, porque o sinal "-" na frente do 3, fazendo deste o oposto de 3 em relação à soma, e vice-versa, 3 é o oposto de "-3 ", de modo que podemos escrever - (-3) = 3. Este sinal duplo deve ser entendido como simétrico ou oposto sobre a adição e não como um símbolo de subtração, o que não tem sentido. (GONZALEZ *et al.*, 1990, p. 93, minha tradução)

Sendo assim, a multiplicação dos números negativos pode ser desenvolvida utilizando-se a propriedade distributiva e a relação $a + (-a) = 0$, conforme segue:

1) $b.a + b.(-a) = b.(a + (-a)) = b.0 = 0$
   Portanto, “$b.a$” é o oposto de “$b.(-a)$”, de modo que: $b.(-a) = -b.a$

2) $(-b)(-a) + (-b.a) = (-b)(-a) + (-b).a = (-b).((-a) + a) = (-b).0 = 0$
   Portanto, $(-b).(-a)$ é o oposto de “$-b.a$”, de modo que: $(-b).(-a) = b.a$

Nos modelos geométricos a introdução dos números negativos, pode ser feita, utilizando-se a reta numérica como suporte intuitivo.

Utilizando a escala númerica para representar a multiplicação por um número positivo, dizemos que a escala é ampliada, mas ao multiplicarmos por um número negativo, além de ampliar a escala é necessário inverter a ordem da sequência numérica. Conforme verificamos na figura 1 e 2:

a) multiplicação por 4

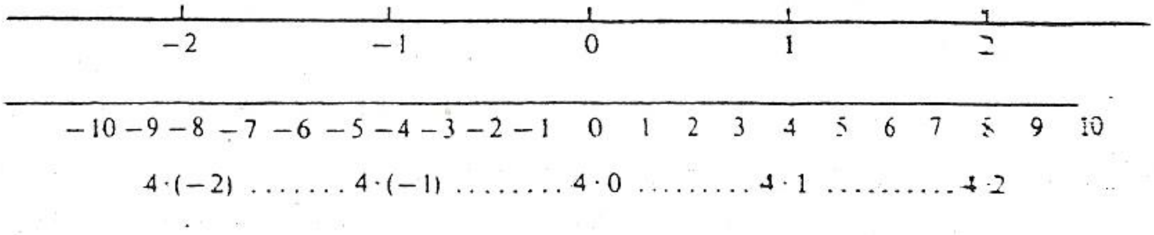


Figura 1 - Sobre a multiplicação por 4 (GONZALEZ, et al., 1990, p. 99)

b) multiplicação por (-4)

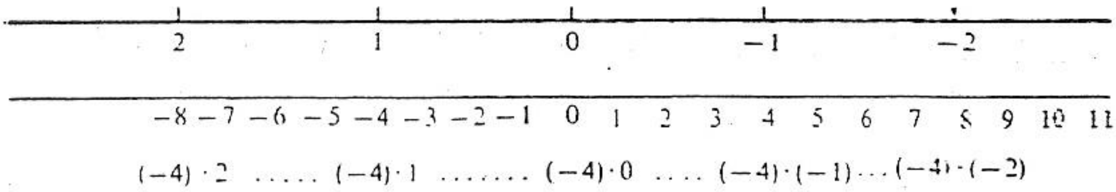


Figura 2 - Sobre a multiplicação por -4 (GONZALEZ et al., 1990, p. 99)

Esses modelos podem auxiliar os professores que desejam justificar a multiplicação de números relativos.

2.3 A construção dos conceitos segundo Gérard Vergnaud

Para compreendermos os problemas que existem para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, como no caso dos números inteiros, utilizaremos a teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud. Sendo que daremos enfoque ao processo de construção dos conhecimentos matemáticos.

Segundo Vergnaud, em uma concepção interativa de construção do conhecimento, devemos entender que “o saber forma-se a partir de problemas a resolver, quer dizer, de situações a dominar” (VERGNAUD, 1980, p. 76). Refletindo sobre isso, percebemos que, para o ensino da matemática, é importante pensar em atividades que permitam aos estudantes desenvolver suas percepções investigativas, com a intenção de identificar as características ou possíveis regularidades que ocorrerem acerca dos conteúdos matemáticos, para que, dessa forma, possam obter a solução para um dado problema. Porém, desenvolver uma situação de exploração para ensinar, é uma possibilidade pouco explorada pelos professores.

> A tendência mais corrente é a de ensinar “maneiras de fazer” ou algoritmos, ligando estes problemas a classes relativamente limitadas. (VERGNAUD, 1980, p. 76)

Com base no que diz o autor, é razoável entendermos porque alguns conceitos não são compreendidos pelos estudantes, favorecendo concepções que dificultam a compreensão de conteúdos matemáticos, como no caso dos números negativos, que, se forem considerados como quantidades, não terão sentido algum. Por isso, é importante estarmos atentos às necessidades dos alunos para criarmos situações que consigam romper com concepções limitadas sobre conceitos que reaparecerão no decorrer da trajetória escolar.

> É um objetivo prioritário, na investigação didática, investigar, analisar e classificar, tão exaustivamente quanto possível, as situações-problema que conferem significação e função a um conceito. (VERGNAUD, 1980, p. 76)

Ainda sobre esse aspecto, o autor salienta que podem existir "conflitos importantes entre as concepções das crianças e os conceitos do professor de matemática" (VERGNAUD, 1980, p. 78). Ou seja, essa situação também pode contribuir para a defasagem das concepções dos estudantes. Cabe ao professor reconhecer que é necessário buscar novas estratégias que possam mudar as possíveis incompreensões manifestadas pelos alunos:

> *A resolução do problema é a origem e o critério do saber operatório*. Devemos ter sempre esta ideia em mente e sermos capazes de proporcionar aos alunos situações que visem alargar a significação de um conceito e pôr à prova as competências e as concepções dos alunos. (VERGNAUD, 1980, p. 79).

Partindo para uma abordagem desenvolvimentalista, devemos saber que "as concepções e as competências desenvolvem-se ao longo de um período de tempo" (VERGNAUD, 1980, p.79). Dessa forma, o autor chama a atenção para conceitos que serão concebidos ainda nas séries iniciais e que podem ser origem de dificuldades ao final do período escolar. É possível fazer essa analogia para os números negativos. Sabemos que o ensino dos negativos é iniciado no sexto ano do Ensino Fundamental, mas que eles não serão tratados exclusivamente nessa série, uma que vez que eles estarão presentes em conteúdos de outras séries e até mesmo em outras disciplinas do currículo escolar, como acontece no Ensino Médio e na física.

Por esse motivo, a importância do estudo dos números inteiros deve ser valorizada pelos professores, pois trata-se de um conhecimento que não será utilizado de forma isolada, até porque "estudar a aprendizagem de um conceito isolado, ou de uma técnica isolada, não tem sentido, praticamente.” (VERGNAUD, 1980, p. 81).

Sobre os conceitos de “teorema-em-ato” e de “campo conceitual”, citaremos alguns problemas teóricos:

> Os matemáticos e os professores sabem em geral o que é um invariante: uma propriedade ou uma relação que é conservada sobre um certo conjunto de transformação. [...] Mas os matemáticos e os professores nem sempre reconhecem o fato bem estabelecido pela psicologia cognitiva desenvolvimentalista (e por Piaget em primeiro lugar) que existem numerosos invariantes cuja identificação pelas crianças dá lugar a uma laboriosa e progressiva construção, enquanto que o adulto não imagina que isso posa constituir um problema. (VERGNAUD, 1980, p. 81)

As relações que as crianças fazem para reconhecer e assim resolver situações às quais são expostas, antes mesmo de terem desenvolvido o saber operatório na escola, podem ser chamados de teoremas.

> A criança encontra um grande número destes teoremas assim que atua sobre o real e que resolve problemas no espaço, no tempo, no domínio das quantidades e das grandezas. Estes “teoremas-em-ato” não são, evidentemente, expressos sob uma forma matemática, nem mesmo às vezes sobre qualquer outra forma. (VERGNAUD, 1980, p.82)

Com isso, podemos refletir que o conceito de número relativo, pode sim, ser de difícil compreensão para alunos do Ensino Fundamental, com base na dificuldade que Vergnaud atribui para a construção do conceito de número natural:

> Há muitos outros axiomas e teoremas implicados na construção do conceito de número natural como medida de quantidades discretas. Alguns destes são percebidos e apropriados desde os 3 ou 4 anos de idade, outros somente aos 6 ou 7 anos; outros são ainda mais difíceis para as crianças de 9 anos. (VERGNAUD, 1980, p. 83)

Para Vergnaud, “campo conceitual” “pode ser definido como um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão” (VERGNAUD, 1980, p. 84).

> São exemplos de campos conceituais: estruturas aditivas, estruturas multiplicativas, lógica das classes, álgebra. Os campos conceituais partem de conteúdos matemáticos. No caso dos inteiros, os campos conceituais partiriam da estrutura aditiva para compreender a aprendizagem. (BALDINO, 1996, p. 10)

Os campos conceituais relevantes para o tema tratado neste trabalho são o campo aditivo e o campo multiplicativo.

> O Campo Aditivo é definido como um conjunto de problemas e situações que envolvem soma ou subtração na sua resolução. Embora sejam operações distintas, ambas referem-se à relação parte/todo e é esse invariante conceitual que relaciona soma e subtração a uma mesma estrutura de raciocínio, o raciocínio Aditivo. Portanto soma e subtração são definidas como operações irmãs, já que podemos resolver o mesmo problema utilizando uma ou outra. (MORAIS, 2010, p. 67)
>
> O Campo Multiplicativo é definido como um conjunto de problemas e situações que envolvem multiplicação ou divisão na sua resolução. É comum que o ensino da multiplicação seja a partir da ideia de adição repetida de parcelas iguais. No entanto, tais operações são distintas. (MORAIS, 2010, p. 72)

A partir dessas definições, poderemos analisar, nas entrevistas realizadas com estudantes de Licenciatura em Matemática e nas resoluções dos exercícios pelos estudantes de Ensino Médio, as concepções sobre os conceitos envolvidos no ensino e na aprendizagem dos números relativos.

3 O QUE DIZEM OS FUTUROS PROFESSORES

Nesse capítulo quero analisar o que futuros professores de matemática dizem a respeito do ensino dos números inteiros, especificamente sobre a regra de sinais, verificando quais são suas concepções sobre o ensino desse conteúdo e o que pensam sobre as possíveis dificuldades dos alunos. Afinal, se por um longo período até mesmo os matemáticos tiveram divergências e dificuldades sobre essa regra, por que os estudantes de Licenciatura em Matemática não as teriam?

Pelo que pude perceber no decorrer do curso de graduação, nem sempre os estudantes de Licenciatura em Matemática percebem ou aceitam que existem dificuldades para o ensino dos números inteiros.

Pude constatar essa situação no decorrer das disciplinas de Estágio, mais especificamente no Estágio realizado no Ensino Fundamental, pois além das orientações dos professores responsáveis, busquei conversar com alguns colegas que já estivessem lecionando ou não, para verificar se essa inquietação sobre a dificuldade de ensinar números negativos e as operações era compartilhada por eles.

Na tentativa de debater sobre alternativas didáticas para o ensino dos números inteiros, seguindo o ideal de não incentivar a “decoreba” de fórmulas e regras, e sim favorecer o entendimento e a compreensão dos resultados matemáticos, perguntava aos meus colegas de que forma pensavam em ensinar números inteiros. Como explicariam as operações envolvendo os números negativos? Geralmente, a resposta era imediata: “é fácil, utiliza a reta numerada e explica a regra de sinais”. Porém eu insistia e questionava sobre a multiplicação de números negativos, se já tinham pensando sobre como explicar essa operação sem apresentar unicamente a regra de sinais e se tinham uma sugestão a esse respeito. Era nesse momento que o silêncio predominava na conversa, demonstrando que não tinham pensando numa estratégia para essa explicação.

Partindo da hipótese de que existem dificuldades e confusões acerca da multiplicação de números relativos e que esse conteúdo talvez seja subestimado pelos futuros professores, convidei três colegas do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS para concederem uma entrevista sobre esse tema. A pauta da entrevista não foi discutida previamente com eles, para que fosse possível registrar suas convicções sem que as respostas fossem planejadas.

A entrevista foi individual, realizada mediante a autorização concedida pelos entrevistados, e, no desenvolvimento deste trabalho, a identidade dos estudantes será mantida no anonimato.

3.1 Entrevistas realizadas com estudantes de Licenciatura em Matemática: as respostas e análises

Dos três estudantes entrevistados, um está lecionando em regime de contrato temporário no ensino público e os demais já realizaram ou estão realizando as disciplinas de Laboratório de Ensino-Aprendizagem de Matemática ou Estágio, pois estão nos semestres finais da graduação.

Para identificar os entrevistados utilizarei a seguinte legenda:

E1: Estudante de matemática que leciona no ensino público em turmas do Ensino Médio. Já realizou as disciplinas de Laboratório e Estágio.

E2: Estudante de matemática que já realizou as disciplinas de Laboratório e Estágio.

E3: Estudante de matemática que está realizando a disciplina de Laboratório com estudantes do Ensino Médio.

As perguntas foram pensadas com o objetivo de identificar as opiniões e concepções sobre as operações envolvendo números negativos desses três estudantes de Matemática.

1. *Nos conteúdos trabalhados, foi possível perceber se os alunos tinham alguma dificuldade em operar, mais especificamente multiplicar números negativos?*

Vejamos as respostas:

E1: Muita dificuldade. [...] Por exemplo: tu tens uma fórmula e precisas que seja a diferença entre dois números, e um desses dois números tem que ser negativo, então eles vão lá: “já tem um sinal de menos, vou deixar o sinal de menos”. Então tem que parar para explicar: “Não, gente. Se colocar aqui o negativo e não considerar o sinal negativo, a operação toda vai interpretar como se fosse número positivo [...]. Em multiplicação é aquela coisa, quando a operação é com equação, às vezes eles não lembram como é que se resolve... “eu divido ou subtraio?”, “como é que eu faço?”.

E2: Sim. Sempre tem esses erros. Eles esquecem. Eles multiplicam um positivo e um negativo e esquecem o sinal, eles colocam o módulo. Exemplo: [(-2) x 4] eles colocam 8 e deu. Ou até para somar, quando eles estão somando [2 + (– 4)] eles dizem que é 2. Não observam o sinal do quatro.

E3: Até agora não trabalhamos com números negativos. Trabalhamos sempre com números positivos. [...] mas já com os números positivos percebemos que eles têm alguma dificuldade, acho que com os números negativos vai aumentar bastante.

Analisando as respostas dadas, é possível verificar que em algum momento de suas experiências já identificaram que os alunos manifestam dificuldades na concepção de número negativo. Nas situações mencionadas por E1, em que o aluno não faz distinção entre o sinal da operação e do número, e por E2, em que o aluno ignora o sinal do resultado, percebemos alguns exemplos do que se pode considerar como obstáculos de aprendizagem envolvendo números inteiros.

> O habitual no ensino dos números inteiros não tem sido provocar o conflito e sim evitá-lo, através das concepções ingênuas da prática aritmética que permanecem em vigor os números inteiros são reduzidos a um formalismo vazio, e esses são os obstáculos que impedem o conhecimento dos números inteiros. (GONZALEZ *et al.*, 1990, p.151, minha tradução)

Esses obstáculos de aprendizagem podem ser separados em dois grupos:

> *O real como obstáculo:* o apego à evidência imediata, a intuição primária de número como quantidade, impede a construção de múltiplas formas de Z. (GONZALEZ *et al.*, 1990, p.152, minha tradução)
>
> *A imposição do formal como um obstáculo:* a construção do conhecimento formal é uma conquista que requer a quebra de concepções prévias. Se não, o formal é vazio de sentido, e torna-se mera aparência que logo desaparece. (GONZALEZ *et al.*, 1990, p.157, minha tradução)

A inversão da ordem nas operações é um desses obstáculos, que pode ser verificado no exemplo da adição 2 + (– 4) utilizado por E2, no qual ele diz que o aluno não considera a sinal negativo do 4, obtendo como resposta 2.

***2.** Tu consegues atribuir um motivo para a dificuldade percebida?*

Vejamos as respostas:

E1: É que depende muito da situação. Têm alguns que realmente apresentam muita dificuldade, a impressão que dá é que eles entendem o passo, mas quando é pra eles fazerem sozinhos, eles não conseguem... já inventam umas coisas...não sei exatamente, depende muito do passo...

E2: De repente faltou alguma coisa antes. [...] É que pra eles a resposta incompleta se já chegou no dois, já sabe que é dois, o sinal não importa muito. Não sei te explicar direito, mas acho que é alguma coisa assim ou pelo menos eu acho que é isso. Já sei que 2 - 4 é 2.

E3: Não respondeu a essa pergunta, por não ter percebido dificuldade com números negativos.

Segundo Vergnaud (1980, p. 76) “as concepções dos alunos são modeladas pelas situações com que eles se depararam”. Isto pode levar a grandes defasamentos entre estas concepções e os conceitos matemáticos.

Como por exemplo, a ideia do número como representação de quantidade, que de fato pode causar estranheza durante a aprendizagem, pois segundo (VERGNAUD, 1980, p.76) “como não há quantidade negativa, os números negativos não têm sentido algum”. A partir disso, verificamos que a situação relatada por E2 em que “o sinal não importa muito” pode ser consequência dessa concepção que o aluno traz das séries e vivências anteriores. Ao encontro do que diz o autor, considero importante que o professor reflita sobre as possíveis dificuldades que o aluno pode ter, a fim de realizar explicações que favoreçam a ruptura de concepções incorretas ou deficientes.

> Os professores não deveriam ignorar o fato de as concepções dos alunos serem modeladas pelas situações da vida quotidiana e pela sua “primeira compreensão” das relações novas com que deparam. Eles têm de saber com que é que lidam, e conhecer ou reconhecer melhor as concepções mais primitivas, os erros e as incompreensões que se lhes seguem, o modo pelo qual elas mudam ou podem mudar: através de que situações? De que explicações? De que etapas? (VERGNAUD, 1980, p.78-79)

***3.** Como tu justificarias se algum aluno perguntasse: por que menos com menos dá mais, quando se está multiplicando?*

Vejamos as respostas:

E1: [...] Quando é um positivo e um negativo, eu digo: [...] 3 x (-4), por exemplo, tu vai pegar -4, -4, -4, então tu já consegues explicar. Mas quando é menos com menos, tu acabas caindo na regra dos sinais... é complicado. Talvez tu tivesses que usar a questão do sentido na reta dos reais, porque eles se perdem e vira uma bagunça.

E2: Agora "tu me pegou". Como eu explico que menos com menos dá mais? Acho que eu nunca parei pra explicar isso. Eu sempre trabalhei com a ideia já elaborada. Eles já sabiam isso. Nunca tive que explicar isso. Não sei como eu explicaria... menos com menos é mais... [silêncio] a explicação de um número positivo com um negativo, 2 x (-2), eu explicaria que (-2) + (-2) dá -4. Isso eu explicaria assim. Agora, (-2) x (-2)... [silêncio] não sei como explicaria. Porque tem toda uma demonstração de que (-1) x (-1) = 1, que eu acho que no Ensino Fundamental não é explicado isso, eu sempre peguei as turmas no meio do Estágio e do Laboratório com essa ideia já pronta. Nunca tive que explicar isso.

E3: Por que menos com menos dá mais? Uma propriedade da multiplicação. Fica meio difícil assim de chegar e dizer: menos e menos... [silêncio] mas seria uma propriedade da multiplicação. Não pensei sobre isso.

Considero as respostas dadas muito importantes. A partir delas é possível constatar que a demonstração da multiplicação envolvendo números negativos não é conhecida ou não é lembrada pelos estudantes de Licenciatura em Matemática.

> Normalmente, nós, professores de Matemática não nos damos conta das dificuldades que estão subjacentes à compreensão dos números relativos e não explicamos aos nossos alunos o porquê de negativo vezes negativos ser igual a positivo. Será que sabemos explicar o motivo? Ou simplesmente falamos aos alunos que é assim e pronto? (HOFFMANN, 1999, p. 31)

No decorrer da graduação, exercitamos a argumentação para que possamos justificar de forma correta e didática os conteúdos da matemática, mas no caso da regra de sinais, se a demonstração foi vista em alguma das disciplinas, infelizmente ela passou despercebida, ou foi encarada como assunto do ensino superior, que não deveria ser tratado no Ensino Fundamental. Ficou evidente, nas respostas dadas, que essa regra prática que repetimos desde o período escolar, soa tão naturalmente para justificar os resultados das operações envolvendo números negativos, que a temos como fato já conhecido, não requerendo maior atenção para a sua justificativa.

Essa concepção de que a regra não merece maior atenção acaba distanciando o professor das incompreensões que os alunos poderão demonstrar durante a trajetória escolar, o que pode contribuir para as dificuldades que serão percebidas ao final do Ensino Médio.

***4.** Qual é o nível de dificuldade ou a importância que tu atribuis ao ensino dos números inteiros no Ensino Fundamental e por quê?*

Vejamos as respostas:

E1: [...] Esses tempos eu ainda estava pensando sobre isso [...] eu não sei se não seria mais fácil em vez de começarem pelos naturais e se mostrar a subtração de naturais, talvez já começarem a ver os inteiros, por exemplo: existem números positivos e números negativos. Mostrar que existe a soma entre números positivos e números negativos, talvez não desse problema. Talvez eles acabem confundindo [...] acho que os alunos confundem o sinal do número com o sinal da operação. Acho que onde dá mais problema é nisso, até onde eu vejo.

E2: Eu acho que é razoável. Acho que tem coisa mais difícil. A importância é grande. Eu explicava os números inteiros com a reta, tem o zero aqui, os números positivos e os negativos, mas essa aqui, de o produto de dois números negativos ser positivo é uma explicação nada trivial [...].

E3: Eu acho que muitas vezes os professores têm certa resistência. Porque a gente vê [...] a primeira coisa que a professora falou na prática foi: “Trabalha com operações que eles têm muita dificuldade”. Eles já vêm com dificuldade [...] e os professores sabem que é aquilo quando a gente pergunta, dizem que é aquilo, mas todos têm certa dificuldade em trabalhar exatamente nesta questão, então acho que por isso a dificuldade dos professores em lidar com isso, em ter formas de mostrar. Isso se reflete nos alunos que também não vão saber e não vão ter interesse por aquilo [...]”

A partir dessas respostas, verificamos que não é à toa que os alunos de Ensino Fundamental ou Médio manifestam dificuldades na compreensão dos números negativos, pois até mesmo estudantes da graduação demonstram certa fragilidade para argumentar sobre esse conteúdo. Contudo, reconhecer a importância dos números relativos, como fez E2, já é significativo. É importante que não tratemos esse conteúdo de forma isolada, uma vez que esses números serão trabalhados em outros conteúdos que exigem um entendimento matemático mais profundo, tais como trigonometria, geometria analítica e funções. Por esse motivo, considero imprescindível saber explicar e dar sentido a esses números e propriedades, sempre que algum aluno demonstrar estranheza com certos resultados, para que o conhecimento matemática não se torne “um amontoado de fatos dispersos, sem conexões e, portanto sem o formato de uma teoria." (MOREIRA; DAVID, 2005, p. 10).

Normalmente supomos,a partir do ensino dos números inteiros, que a utilização da regra de sinais é um "fato conhecido" e que não requer maior atenção, o que é um erro.

> A lentidão do desenvolvimento dos conhecimentos é perigosamente subestimada pelos professores, pelos pais e pelos programas. Por exemplo, considera-se frequentemente que um capítulo de matemáticas estudado deve estar compreendido, pelo menos por uma parte importante dos alunos, pelo que no ano seguinte podemos considerá-lo como adquirido. Todas as investigações empíricas mostram, pelo contrário, que será muito mais sensato voltar às mesmas coisas ano após ano indo um pouco mais profundamente, introduzindo situações cada vez mais complexas contendo novos aspectos, mais poderosos, de um mesmo conjunto de conceitos, eventualmente um conceito novo. (VERGNAUD, 1980, p. 81)

***5.** Tu consegues relacionar as operações envolvendo números negativos com situações concretas? Ou consideras possível relacionar? Poderia exemplificar?*

Vejamos as respostas:

E1: Em partes sim. [...] Geralmente a questão da soma é muito fácil quando se usa como exemplo o dinheiro ou algum objeto. Eles até entendem alguma coisa que possa assumir a forma negativa, mas com a multiplicação e divisão com um número negativo e um positivo fica mais fácil... [silêncio] pensa alguma coisa negativa sendo dividida entre positivos, tu consegue escrever de alguma forma concreta. Agora o problema sempre recai quando é com dois negativos, onde fica o maior problema poder explicar. Por que menos com menos fica mais... essa regra de sinal, quando é dois números negativos multiplicando ou dividindo, é mais difícil de conseguir atribuir uma situação concreta.

E2: Eu acho que sempre dá pra fazer com coisas concretas, por exemplo... [silêncio] não, aliás, com o produto eu não sei. Não me vem na cabeça, mas com soma sempre tem alguma coisa, conta bancária que é negativo [...] mas tem. Eu explicava números negativos assim, alguma coisa com graus, na serra está -3°C ou a conta tem –R$55,00, acho que isso é alguma coisa do cotidiano, que eles já viram. Eles estão acostumados a ver [...]. Agora com o produto, realmente, o produto... não vejo muito... [silêncio].

E3: A questão do mais com menos, sim. [...] Tu podes questionar, se eu tenho dez, se eu tirar dois, tu consegues. Na multiplicação eu não vejo nenhuma. É mais uma propriedade. Não vejo uma forma de tu multiplicares uma coisa negativa [...] existe aquela propriedade e ela tem que ser usada. [...].

Explorar situações contextualizadas para o ensino da Matemática é um discurso presente na formação dos professores, por isso senti a necessidade de buscar situações relevantes para explicar e exemplificar a regra de sinais, porém na multiplicação com números negativos encontrei uma lacuna. Por esse motivo, questionei meus colegas de graduação sobre situações “concretas”, para verificar se teriam alguma sugestão para exploração desse conteúdo de forma contextualizada, pois nem sempre é possível satisfazer esse discurso.

> Os professores geralmente julgam que é bom explorar o “cotidiano”, pois os alunos já têm um conhecimento sobre ele. Isso traz vitalidade às discussões, permitindo explorar as coisas ao nosso redor. No entanto, falta-nos a percepção sobre muitos aspectos deste cotidiano. (MEGID, 2001, p.167)

Conforme podemos verificar nas respostas, surgem alguns exemplos para adição e subtração, mas quando os entrevistados tentam utilizar algum argumento para a multiplicação, não conseguem manifestar uma explicação que satisfaça a regra de sinais. Situação que podemos considerar esperada, devido aos obstáculos em torno dessa regra:

> Os materiais instrucionais para números inteiros são pródigos em apresentar somas e subtrações, mas são insuficientes quanto à multiplicação. (BALDINO, 1996, p. 4)

Por mais que tentemos encontrar uma explicação prática para a multiplicação de dois números negativos, não conseguimos um exemplo convincente:

> Existem também problemas teóricos como, por exemplo, a extensão da multiplicação aos números relativos: a multiplicação de dois números negativos não pode ser reduzida a um problema prático verdadeiramente significativo da multiplicação, salvo se se considerar a utilização do cálculo algébrico como um problema prático. Digamos que muito mais que a coerência dos cálculos o problema eminentemente teórico aparece também como um problema prático. Esta dialética não é apenas um simples efeito retórico: prática e teoria estão em última análise indissoluvelmente ligados. (VERGNAUD, 1980, p. 79)

***6.** Consideras importante apresentar uma justificativa ou demonstrar a validade da regra de sinais?*

Vejamos as respostas:

E1: É importante, com certeza... na soma, subtração e na multiplicação entre positivo e negativo, mas entre dois negativos é que fica mais complicado de explicar. Às vezes o que eu uso (principalmente, quando eu tive que dar umas aulas de física lá também...) é a questão de às vezes tu atribuires o valor negativo ao sentido de alguma coisa. [...] em certo ponto tu estás voltando para trás. Seria mais ou menos essa relação. Dá pra fazer. Acho que seria por aí [...].

E2: Eu acho importante. O problema é [o aluno] se confundir mais ainda. Teria que ser uma demonstração simples e direta, pelo menos eu acho, não poderia ser uma coisa que confundisse mais ainda. Ainda mais que eles estão na sexta [série] geralmente nessa parte dos números inteiros [...] eu já vi uma demonstração que usava, eu acho, que semelhança de triângulos [...] só que, como é que tu vais mostrar uma coisa dessas para uma criança de sexta série? Esse que é o detalhe [...] que a gente vê no dia a dia isso. Acho que é essa a dificuldade toda. Porque um número positivo com o número negativo, tu podes ter essa explicação de que [2 x (-2)], tu somas duas vezes o menos dois [(-2) + (-2)] e é -4. Agora aqui [...] aqui é outra coisa, esse (-1) x (-1) = 1 é outra coisa... [silêncio].

E3: Sim. Porque é uma forma do aluno enxergar, como no caso da multiplicação [...] provar porque que é, de onde veio. Eu acho que ficaria mais palpável para o aluno o porquê que ele está fazendo aquilo. Porque não é uma coisa que ele pode vivenciar no cotidiano, multiplicar duas coisas negativas. Agora na adição, de repente para entrar com o assunto e depois chegar na multiplicação e não assustar.

Os três consideram importante justificar ou demonstrar a regra. No entanto, verificamos que essa situação causa desconforto nos estudantes de matemática quando pensam na multiplicação de negativos, pois não sabem como fazer essa demonstração. Evitar aquilo que não dominamos é comum, entretanto, conforme Vergnaud:

> Os problemas de ensino das matemáticas não se resolvem por definições, e as concepções erradas dos alunos só podem mudar verdadeiramente se entrarem em conflito com situações que elas não permitem tratar. É essencial que os professores possam perspectivar e dominar o conjunto de situações suscetíveis que levem e ajudem os alunos a "acomodar" os seus pontos de vista e os procedimentos a novas relações [...]. É a única maneira de levar os alunos a analisarem as coisas com mais profundidade e a reverem ou ampliarem as suas concepções. (VERGNAUD, 1980, p. 79)

***7.** No Ensino Médio em que os negativos estão fortemente presentes em geometria analítica e funções, tu percebeste se os alunos resolvem os exercícios com segurança quanto ao sinal do resultado? Atribuem um sentido dentro do conteúdo, para a resposta obtida?*

Vejamos as respostas:

E1: Na maioria das vezes não. [...] eu estava trabalhando geometria analítica, então, por exemplo, "dados 3 pontos, tente formar a região triangular". Eles perguntavam "qual é a área?". Eu explicava: "a área se resolve [por] determinante, só que a área é o quê"? É o módulo do determinante dividido por dois. Eles simplesmente esqueciam, passavam por cima daquele módulo ou confundiam que eram parênteses [...].

E2: Não. Eu acho que por causa da distância, [...] metros não tem como ser negativo, ele está vendo um desenho [...] estou dando aula de trigonometria agora, no lado negativo eles não enxergam um cosseno negativo (alguns deles), cos 135º e cos 45º, que tem o mesmo cosseno só que ao contrário, a maioria deles vê que é o mesmo cosseno e dizem que cos 135° = cos 45°, só que eles não vêem esse sinal [...] acho que pela distância ser positiva, o módulo... acho que é sempre o módulo. Pegar o módulo do resultado... dois menos quatro é dois...[...]

E3: Não. A maioria deles pensa com números positivos, [...] vão dar uma olhadinha, será que ficou certo ou não, porque muitos não entendem o que é função. Eles fazem, eles marcam os pontos no plano cartesiano, desenham e ligam os pontos, mas eles não sabem o que estão fazendo.

As dificuldades apontadas vão ao encontro do que diz Vergnaud (1980) sobre a necessidade de se estudar os campos conceituais e não somente os conceitos isolados, pois se não compreendem os números negativos no Ensino Médio é porque não conseguiram fazer conexões com conhecimentos anteriores.

> Uma dada situação não põe habitualmente em jogo um único conceito; a sua análise requer, a maior parte das vezes, vários conceitos, e as dificuldades encontradas pelos alunos derivam, em geral, de vários conceitos. Por exemplo, os problemas de adição e de subtração podem implicar os conceitos de medida, de transformações, de comparação, de diferença, de inversão, de operação unária, de operação binária, de número natural, de número relativo, de função, de abscissa e ainda de outros. (VERGNAUD, 1980, p. 84)

No exemplo dado por E2, é possível perceber que ele atribui a dificuldade na determinação do sinal de um resultado trigonométrico a essa suposta concepção de que a “distância é sempre positiva”.Devido a esse modo de pensar, o aluno não conseguiria diferenciar quando o cosseno é positivo ou negativo. Nos exemplos dados por E1 e E3, eles ressaltam que os alunos talvez estejam fixados nos números positivos. O que é compreensível, foi com o conjunto dos números naturais que eles aprenderam a realizar os primeiros cálculos e esses são também os números com os quais lidamos cotidianamente.

Para encerrar essas entrevistas, fiz uma provocação aos colegas de Licenciatura, tendo em vista essa reflexão sobre números relativos e a regra de sinais, questionando se reavaliaram a importância do ensino dos números inteiros no Ensino Fundamental ou se pensaram numa forma de explicar esse conteúdo.

Vejamos as respostas:

E1: É praticamente fundamental [...]. Se ele não entende a regra de sinais, como é que ele vai chegar a um resultado satisfatório? Acaba dando tudo errado e ele acha que entendeu o conteúdo errado, e não é. Ele entendeu o conteúdo certo, mas na hora de desenvolver as contas ele acaba pecando nesse aspecto.

E2: Eu procuraria alguma coisa pra explicar que (-1) x (-1) = 1, mas de forma bem simples. Eu explicaria mais sobre ordem. Acho que a grande ideia é a regra de sinais. Eu buscaria alguma coisa para explicar isso.

E3: Eu comecei a pensar melhor. Antes eu não tinha pensado muito nessa questão [...] acho que boa parte da dificuldade vem daí, que os alunos na verdade não enxergam, não aprendem isso. Eles não são despertados pra aprender isso, o professor passa rápido por aquilo, eles anotam, no dia da prova eles vão fazer e no dia seguinte eles não vão lembrar. [...]

Com base nessas entrevistas, constatamos o quanto é importante uma discussão sobre os significados dos números relativos e suas propriedades na formação dos professores, pois na análise das respostas dos três entrevistados, independente do tempo de experiência, surgiram dúvidas sobre como justificar as situações envolvendo números negativos. Por outro lado, todos os entrevistados expressaram, a partir da reflexão provocada pela entrevista, preocupação em buscar essas justificativas.

4 A INVESTIGAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Apesar dos números negativos serem apresentados aos alunos no sexto ano do Ensino Fundamental, quando é abordado o conjunto dos números inteiros, seu estudo e uso não ficará restrito a essa série. Identificar esses números e operar com eles faz parte da trajetória escolar de qualquer estudante, pois os relativos estão presentes em todas as séries através de conteúdos variados.

Na tentativa de identificar dificuldades que podem ocorrer ao final do período escolar na solução de exercícios que envolvem a multiplicação de números negativos, realizei uma atividade prática com um grupo de alunos do terceiro ano do Ensino Médio.

Para que essa prática permitisse uma análise a fim de identificar possíveis incompreensões sobre esse conteúdo e verificar se o que os estudantes de matemática relataram em suas entrevistas também ocorre, elaborei uma lista de exercícios envolvendo conteúdos do Ensino Fundamental e Médio.

A investigação foi realizada em uma escola pública de Porto Alegre, em outubro de 2012, tomando como sujeitos da pesquisa, alunos de duas turmas do terceiro ano do Ensino Médio.

4.1 Metodologia

A pesquisa empírica realizada com as turmas de Ensino Médio foi elaborada de forma que permitisse analisar os procedimentos adotados pelos alunos para a resolução dos exercícios, bem como identificar de que forma suas concepções interferem nas operações com esses números.

Levando em consideração que são alunos concluintes do Ensino Médio, a lista proposta envolvia conhecimentos considerados básicos sobre equações, geometria analítica e funções. Sendo que os exercícios foram ordenados de acordo com a série em que usualmente são vistos, supondo que os exercícios do Ensino Fundamental seriam considerados os mais fáceis.

Para a resolução da lista proposta, foram disponibilizados dois períodos da aula de matemática, de acordo com a grade de horários de cada turma. Esse tempo foi considerado como suficiente para a conclusão da lista, podendo ser estendido se necessário.

Nos dias em que a atividade foi realizada na escola, estavam presentes, na turma A, 6 alunos, e na turma B, 8 alunos, totalizando 14 alunos que consentiram na utilização das suas respostas nessa pesquisa. Todavia, será preservado o anonimato desses alunos, que serão identificados somente por números no decorrer deste trabalho.

4.2 O que fizeram os alunos: análise dos exercícios

Neste capítulo apresentarei a análise dos exercícios resolvidos pelos estudantes de Ensino Médio, os erros e as justificativas atribuídas para as resoluções. Sendo o principal objetivo dessa análise, identificar as concepções dos alunos para operarem com números negativos, em especial na multiplicação.

Ressalto que a análise será realizada de acordo com a ordem dos exercícios sem fazer distinção entre as turmas. Como alguns alunos não apresentaram esboço de cálculo ou justificativa, seus exercícios não serão analisados. Além disso, as respostas analisadas foram agrupadas de acordo com o tipo de erro e concepções subjacentes.

Análise do exercício 1

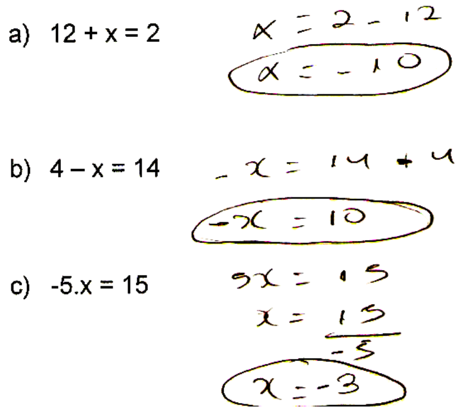
1. Resolva as questões abaixo e justifique sua resposta.

   a) $12 + x = 2$

   b) $4 - x = 14$

   c) $-5.x = 15$

Esse exercício foi resolvido pelos 14 estudantes participantes da pesquisa. Por se tratar de um conteúdo visto no Ensino Fundamental, esse exercício era considerado fácil, porém apenas o Aluno 11 resolveu corretamente todos os itens, conforme a figura 3.



a) 12 + x = 2 $x = 2 - 12$
$x = -10$

b) 4 – x = 14 $-x = 14 + 4$
$-x = 10$

c) -5.x = 15 $5x = 15$
$x = \frac{15}{-5}$
$x = -3$

Figura 3 - Solução do Aluno 11 referente ao Exercício 1

Na análise da resolução dos demais alunos, os acertos ocorreram da seguinte maneira: o item *a* foi resolvido corretamente por 5 alunos, o item *b* por 2 alunos e o item *c* por 5 alunos.

Para identificar as concepções que ocasionaram as respostas incorretas, faremos uma análise das situações que aconteceram e que se repetem na resolução de cada item. A expressão “passar” será utilizada, por ser a forma como os alunos explicaram as resoluções.

No item *a* [12 + x = 2], teve um grupo de 4 alunos que encontrou como resposta da equação x = 10 e 1 aluno que encontrou x = 14.

Os alunos 3, 5, 7 e 8, que chegaram à resposta x =10, optaram por “passar” o 2 para o primeiro membro da equação com o sinal contrário e isolaram a incógnita sem que o sinal dela fosse alterado. Ou seja, chegaram à situação em que [12 – 2 = x].

Nesse exercício, o aluno 3 escreveu a seguinte justificativa na folha de exercícios: “As questões feitas abaixo foram-me explicadas da seguinte maneira: em equações isola-se sempre a letra.”. De fato, ele realizou esse procedimento nos três itens, porém no item *a*, a resposta não satisfaz a equação. Sendo assim, ele parece não compreender por que isolar a incógnita e como verificar a validade da equação.

Os demais alunos não justificaram a resposta. Na figura 4, segue a solução do aluno 3.

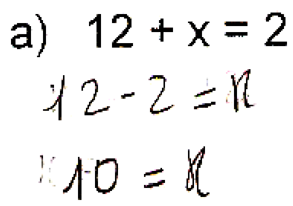


Figura 4 - Solução do Aluno 3 referente ao Item a do exercício 1

No item *b* [4 – *x* = 14], surgiram três respostas incorretas. Sendo *x* = 18 obtida por 4 alunos, *x* = 10 por 2 alunos e *x* = -18 por 1 aluno.

Os alunos 5, 7 e 8, que chegaram à resposta x = 18, ignoraram o sinal que antecedia a incógnita ao a isolarem, além disso, não trocaram o sinal do número 4 ao passarem para o segundo membro da equação. Ou seja, chegaram à situação em que [x = 14 + 4]. O aluno 1 não apresentou cálculos na lista, porém quando retornei à escola e o questionei sobre a resposta dada, ele explicou que sempre se confunde com o sinal “da frente da letra”. Explicação que evidencia dificuldade para diferenciar o sinal da operação e o sinal do número. Na figura 5, segue a solução do aluno 7.

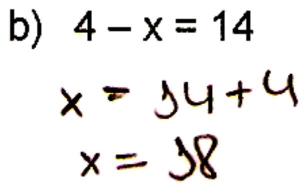


Figura 5 - Solução do Aluno 7 referente ao Item b do exercício 1

Os alunos 4 e 10, que chegaram à resposta x = 10, alteraram o sinal do número 4 ao “passá-lo” para o segundo membro da equação, mas, assim como o grupo anterior, também ignoraram o sinal que antecedia a incógnita. Sendo assim, chegaram à situação [x = 14 – 4]. Na figura 6, segue a solução do aluno 4.

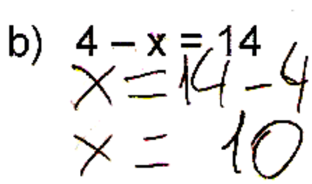


Figura 6 - Solução do Aluno 4 referente ao Item b do exercício 1

O aluno 6, que obteve a resposta x = -18, fez um procedimento a mais, multiplicando todos os termos por -1 e chegando a [-4 + x = -14]. A partir disso, isolou a incógnita escrevendo [x = -14 – 4], conforme justificou: “Isolei o “x” e passei o número que estava do lado do “x” passando para o outro lado com o sinal contrário.”. No entanto ele “passou” o -4 sem trocar o sinal, o que resultou em uma resposta incorreta. Nesse caso, apesar desse erro, percebe-se que ele consegue aplicar as regras das operações com os números negativos, pois efetuou a multiplicação e a soma dos números obtidos corretamente. Na figura 7, segue a solução do aluno 6.

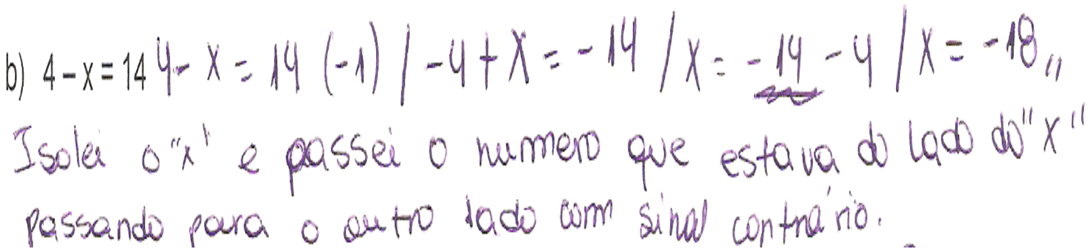


Figura 7 - Solução do Aluno 6 referente ao Item b do exercício 1

No item *c* [-5.x = 15], em que ocorre uma multiplicação, surgiram três respostas incorretas: x = 3, obtida por 3 alunos, x = 10 e x = 20, obtidas por um aluno cada.

Os alunos 6, 9 e 10, que chegaram à resposta x = 3, isolaram a incógnita [x = 15/5] mas “passaram” o -5 trocando o sinal. Na figura 8, segue a solução do aluno 9.

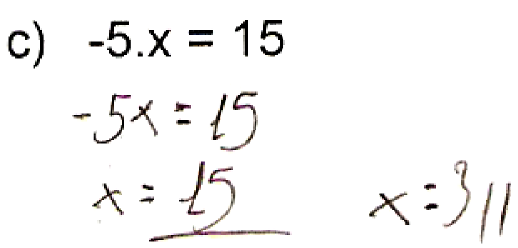


Figura 8 - Solução do Aluno 9 referente ao Item c do exercício 1

O aluno 7, que obteve a resposta x = 10, não considerou que a operação envolvida era uma multiplicação, e ao copiar embaixo a expressão, não colocou o sinal para indicar que era um número negativo [5.x = 15]. Ao isolar a incógnita, ele “passou” o número 5 para o outro membro da equação com o sinal contrário, realizando uma subtração [x = 15 – 5] e obtendo x = 10. Na figura 9, segue a resolução do aluno 7.

c) $-5.x = 15$

$$5x = 15$$
$$x = 15 - 5$$
$$x = 10$$

Figura 9 - Solução do Aluno 7 referente ao Item c do exercício 1

O aluno 2, que obteve a resposta x = 20, semelhante ao que fez o aluno anterior, não considerou que a operação envolvida era uma multiplicação. Ao isolar a incógnita, ele passou o -5 para o segundo membro da equação com o sinal contrário, realizando uma adição [-5.x = 15 + 5] e obtendo x = 20. Na figura 10, segue a solução do aluno 2.

c) $-5.x = 15 + 5$

$$x = 20$$

Figura 10 - do Aluno 2 referente ao Item c do exercício 1

Ainda no item *c*, surgiu uma situação que não se enquadra nas anteriores. É o caso do aluno 8, que isolou a incógnita e escreveu [-5/15 = x] e a partir dessa expressão, dividindo 15 por -5, concluiu que x = -3. Na figura 11, segue a solução do aluno 8.

c) $-5.x = 15$

$$x = \frac{15}{-5} = -3 \,//$$

Figura 11 - Solução do Aluno 8 referente ao Item c do exercício 1

Análise do exercício 2

2. Considere que x pode assumir valores positivos e negativos. Nas expressões abaixo, assinale as que podem ter valor negativo. <u>Justifique</u>.

   a) $3.x$

   b) $5 - x$

   c) $x + 2$

   d) x^2

   e) $x^2 - 1$

   f) x^3

Nesse exercício, surgiram situações que surpreenderam pela incompreensão do que foi solicitado no enunciando. Assim como o exercício anterior, esse exigia conhecimentos vistos no Ensino Fundamental, porém nenhum aluno marcou somente as respostas certas (*a, b, c, e* e *f*).

O aluno 2 foi o que apresentou melhor entendimento sobre o que era solicitado. Durante a resolução da lista, esse aluno me chamou para perguntar se estava resolvendo da maneira correta, pois, “pensava em um número positivo e outro negativo para colocar no lugar do x e usava a regra de sinais para calcular”. Por mais que eu tenha respondido que essa estratégia estava correta, solicitei que escrevesse essa justificativa, mas ele não fez o registro. Na figura 12, segue a solução do aluno 2.

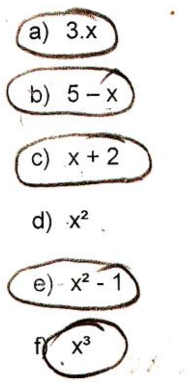

a) $3.x$
b) $5 - x$
c) $x + 2$
d) x^2
e) $x^2 - 1$
f) x^3

Figura 12 - Solução do Aluno 2 referente ao exercício 2

Dentre os alunos que resolveram esse exercício, somente 3 apresentaram justificativas.

O aluno 1 marcou todas as alternativas, esboçou alguns cálculos e justificou da seguinte maneira: “Em qualquer equação quando o número negativo for maior que o positivo o resultado sempre vai ser negativo”. Verificando os cálculos, é possível identificar que, apesar de não ter calculado corretamente as potências das alternativas *d* [$-3^2 = -6$], *e* [$-3^2 = -6 - 1 = -5$] e *f* [$-3^3 = -9$] as multiplicações dos fatores pelos expoentes seguem a regra de sinais. Em contrapartida, na subtração do item *b,* ele faz uma soma, porém apresentou um resultado negativo [5 – (-3) = -8]. Na figura 13, segue a solução do aluno 1.

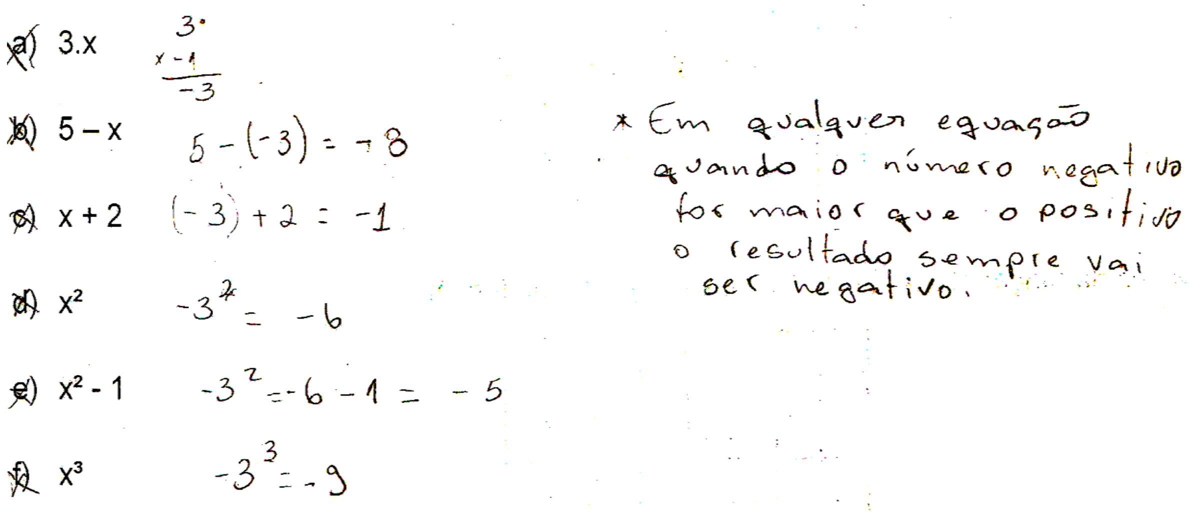


Figura 13 - Solução do Aluno 1 referente ao exercício 2

O aluno 12 justificou os itens *a (“na multiplicação o x é negativo”), c (“na soma de x o valor é negativo”)* e *f (“x sendo multiplicado o valor é negativo”).* A partir das justificativas, percebe-se que ele substituiu a incógnita de todas as alternativas por números negativos. O que por hipótese, pode tê-lo levado a deixar de fora o item *b,* pois ao se substituir a incógnita por um número negativo, a soma será positiva.

Com esse procedimento, ele revela a concepção de que resultados negativos só aparecem em operações com números negativos. Na figura 14, segue a solução do aluno 12.

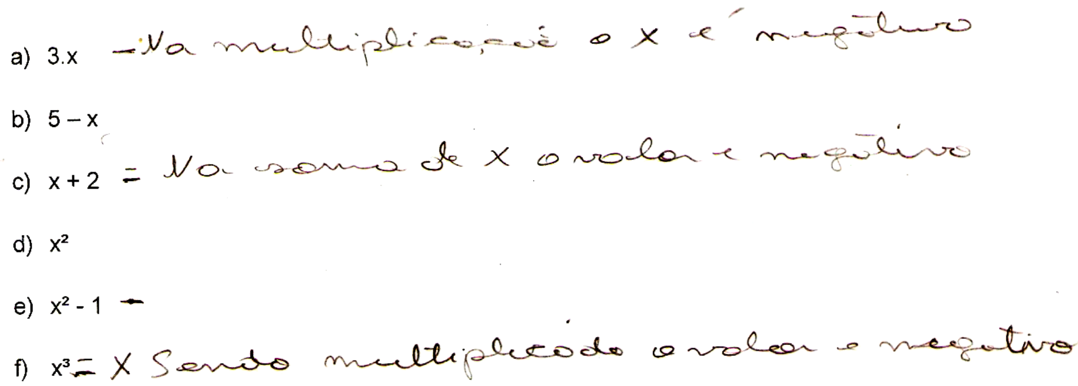

a) 3.x - Na multiplicação o x é negativo
b) 5 – x
c) x + 2 = Na soma de x o valor é negativo
d) x²
e) x² - 1 -
f) x³ = X sendo multiplicado o valor é negativo

Figura 14 - Solução do Aluno 12 referente ao exercício 2

O aluno 4 marcou corretamente os itens *a, b* e *c*. Para identificar quais alternativas poderiam resultar em um valor negativo, ele testou alguns valores em todas as alternativas. Além disso, para justificar seus cálculos, enunciou a seguinte regra: “Na multiplicação sinais iguais (- x -) = + ficam positivos. Sinais diferentes (- x +) = - ficam negativos.” Apesar de ter dado essa justificativa, no item *e* ele errou ao resolver a potência $[(-1)^2 - 1 = (-1.-1) -1 = -1 -1 = +1]$ pois determinou que $(-1)^2 = -1$ e na última etapa calculou como de fosse uma multiplicação [-1 -1 = +1]. No item *f,* ele cometeu o mesmo erro ao resolver a potência $[(-3)^3 = -3.-3.-3 = -9.-3 = +27]$. Ou seja, às vezes usa regra de sinais, na multiplicação, outras vezes não. Na figura 15, segue a solução do aluno 4.

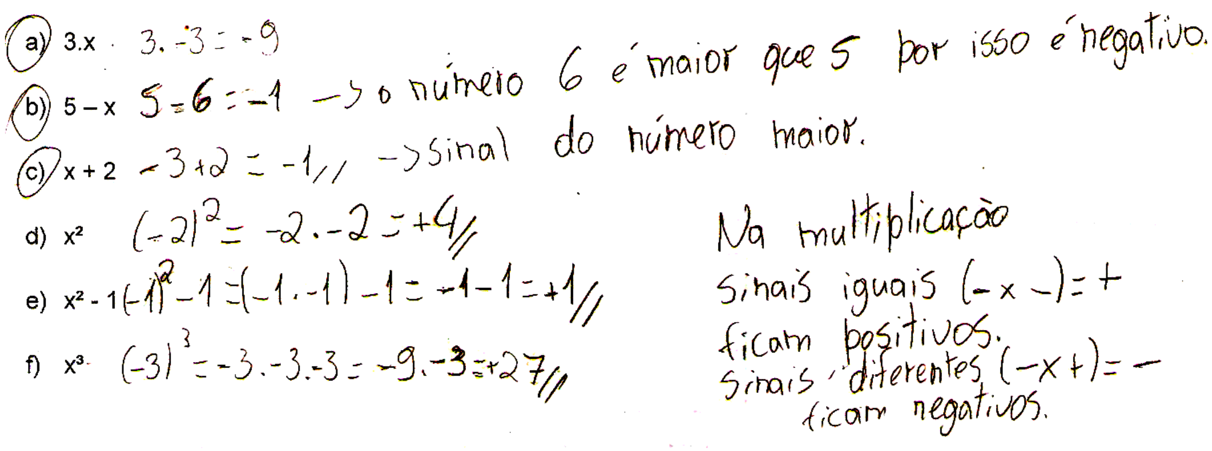

a) 3.x 3.-3 = -9
b) 5 – x 5-6 = -1 -> o número 6 é maior que 5 por isso é negativo.
c) x + 2 -3+2 = -1 -> sinal do número maior.
d) x² (-2)² = -2.-2 = +4
e) x² - 1 (-1)² -1 = (-1.-1) -1 = -1 -1 = +1
f) x³ (-3)³ = -3.-3.-3 = -9.-3 = +27
Na multiplicação sinais iguais (- x -) = + ficam positivos. Sinais diferentes (-x+) = - ficam negativos.

Figura 15 - Solução do Aluno 4 referente ao exercício 2

Nesse exercício, o aluno 5 escreveu novas expressões a partir de igualdades aparentemente sem relação com o que foi solicitado no enunciado. Como não apresentou uma justificativa na lista, retornei à escola para que ele explicasse o que pensou para escrever aquelas expressões, mas simplesmente justificou que “não sabia resolver e que usou o item *a* como exemplo para deixar da mesma forma”. O mais interessante dessa situação, é que outros dois alunos fizeram procedimentos semelhantes para resolver o exercício 2. O aluno 7 representou as alternativas *b (5 – x)* e *c (x+2)* exatamente como o aluno 5: -5x e 2x. Já na alternativa *e*, ele representou a expressão (x^2 - 1) como -1x^2, que também foi a forma utilizada pelo aluno 8. O aluno 8 ainda acrescentou igualdades difíceis de serem interpretadas nas alternativas *b* [5 – x = 4], *c* [x + 2 = 3], *d* [x^2 = 4] e *f* [x^3 = 3].

A escrita desses alunos indica a incompreensão das convenções de escrita algébrica, pois trocam a ordem de letras, números e sinais sem preservar seus significados. Nas figuras 16, 17 e 18, seguem as soluções dos alunos 5, 7 e 8, respectivamente.

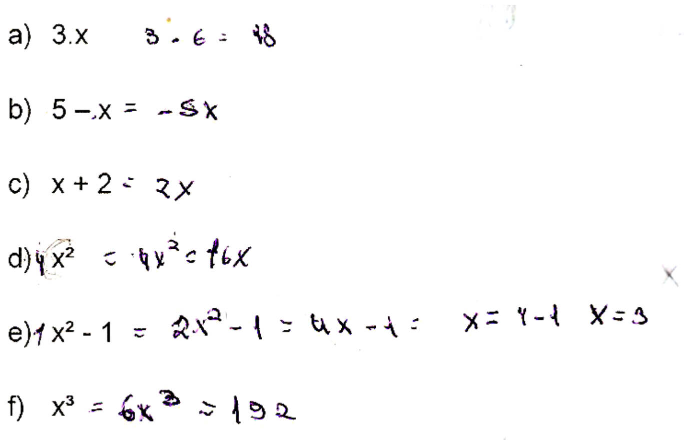

a) 3.x 3 . 6 = 18
b) 5 – x = -5x
c) x + 2 = 2x
d) 4 x^2 = 4x^2 = 16x
e) 1 x^2 - 1 = 2x^2 - 1 = 4x - 1 = x = 4 - 1 x = 3
f) x^3 = 6x^3 = 192

Figura 16 - Solução do Aluno 5 referente ao exercício 2

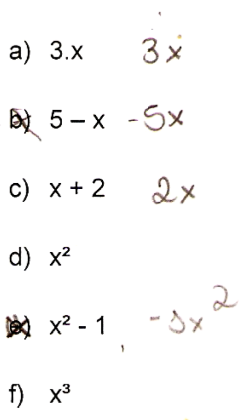
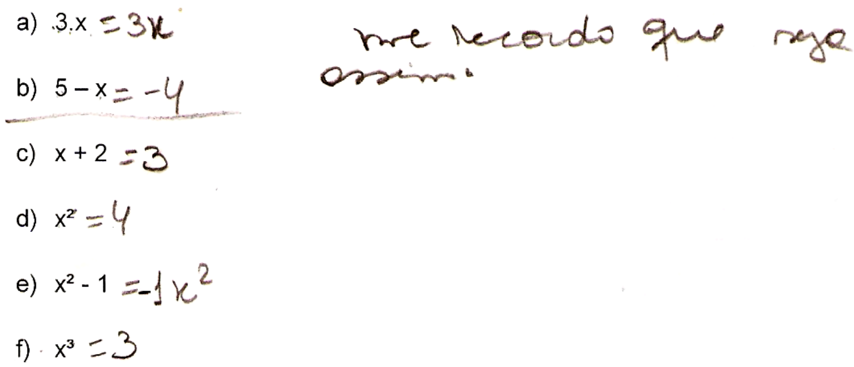

a) 3.x 3x
b) 5 – x -5x
c) x + 2 2x
d) x^2
e) x^2 - 1 -1x^2
f) x^3

Figura 17 - Solução do Aluno 7 referente ao exercício 2

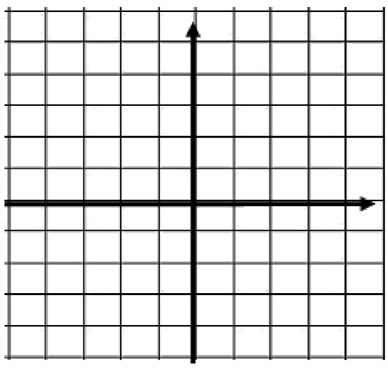

a) 3.x = 3x
b) 5 – x = -4
c) x + 2 = 3
d) x² = 4
e) x² - 1 = -1x²
f) x³ = 3

me recordo que seja assim.

Figura 18 - Solução do Aluno 8 referente ao exercício 2

Análise do exercício 3

3. Marque no plano cartesiano os pontos cujas coordenadas são (-1, 2), (4, -3) e (-2, -5).



Na resolução do exercício 3, pode-se considerar que o desempenho foi melhor, pois boa parte dos alunos conseguiu identificar corretamente o eixo das abscissas e ordenadas, bem como a localização dos números positivos e negativos.

Dos alunos que fizeram esse exercício, 10 souberam identificar positivos e negativos. Porém chamou a atenção o aluno 8, que marcou os números em ordem decrescente a partir da origem, ou seja, iniciando em -1, -2, etc.... e espelhando os pontos nas partes positiva e negativa de cada eixo. Também demonstrou dificuldade para marcar os pontos solicitados (-1, 2), (3, -3) e (-2, -4), pois além de não identificar corretamente quais eram as coordenadas do eixo x e eixo y, uniu os pontos desses eixos com segmentos de reta. Nessa situação, ficou evidente a dificuldade do aluno ao trabalhar no plano cartesiano. Na figura 19, segue a solução do aluno 8.

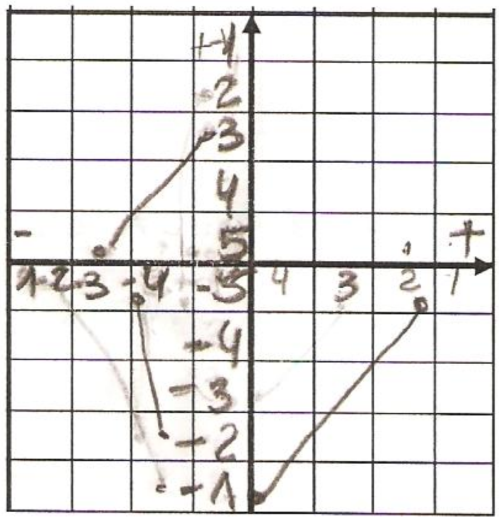


Figura 19 - Solução do Aluno 8 referente ao exercício 3

Dificuldades para localizar e marcar os pontos solicitados, também foram perceptíveis na resolução de outros alunos, como o aluno 2, que não diferenciou as coordenadas x e y, de cada ponto, marcando quase todas as coordenadas sobre o eixo x. Na figura 20, segue a resolução do aluno 2.

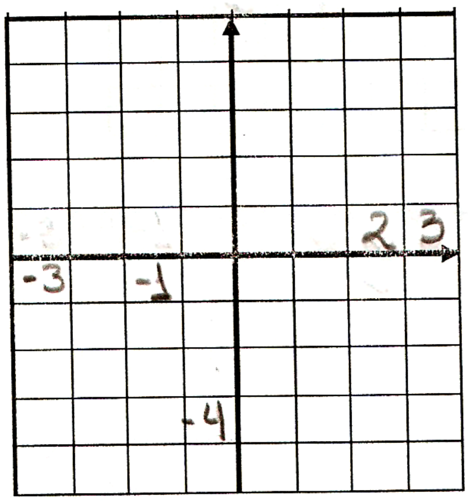


Figura 20 - Solução do Aluno 2 referente ao exercício 3

Outra situação interessante ocorreu com o aluno 11, que marcou os pontos solicitados (-1, 2), (3, -3) e (-2, -4), mas também os pontos com as coordenadas trocadas (2, -1), (-3, 3) e (-4, -2). O aluno revela indecisão sobre a localização das coordenadas x e y. Na figura 21, segue a solução do aluno 4.

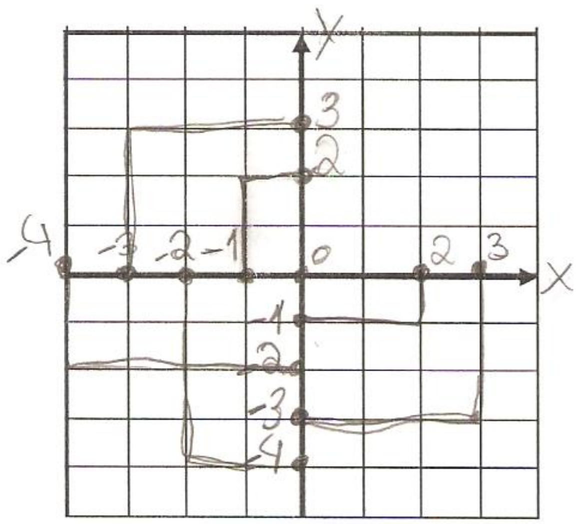


Figura 21 - Solução do Aluno 4 referente ao exercício 3

Além dessas dificuldades, houve o caso do aluno 6, que confundiu o lado no qual deveria marcar as coordenadas positivas e negativas do eixo x. Percebe-se que o aluno não considera a regra convencionada de que o sentido do eixo é crescente. Na figura 22, segue a solução do aluno 6.

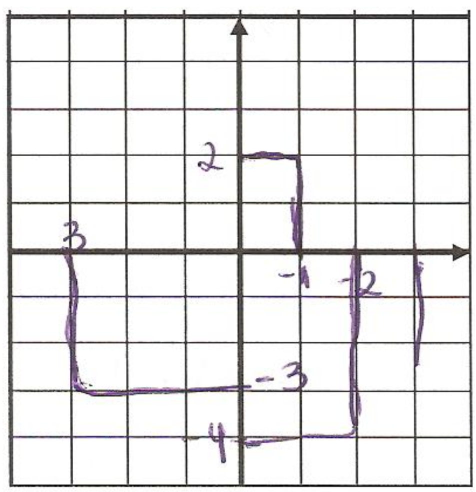


Figura 22 - Solução do Aluno 6 referente ao exercício 3

Análise do exercício 4

4. Sabendo que as coordenadas de um ponto qualquer são representadas por um par ordenado (x,y), determine a ordenada (y) de um ponto P, sabendo que:

a) x = -2
y= - x

b) x = -7
y = 3x

Esse exercício exigia conhecimentos básicos de geometria analítica, sendo que o principal objetivo era observar a multiplicação solicitada para obtenção da segunda coordenada. Dos 14 alunos que participaram da atividade, apenas 4 tentaram resolver esse exercício, e as respostas que surgiram foram para mim surpreendentes.

Dos 4 alunos, apenas 2 fizeram as substituições solicitadas, mas ainda assim ocorreram alguns erros. O aluno 11 calculou corretamente a ordenada no item *a* [-(-2) = +2], obtendo um valor positivo, mas no item *b* substituiu a variável pelo número 7 ao invés de -7, o que resultou em um número positivo [3(7) = 21]. O esboço do gráfico não tinha sido solicitado, mas o aluno 6 o fez de acordo com as coordenadas obtidas. Na figura 23, segue a solução do aluno 11.

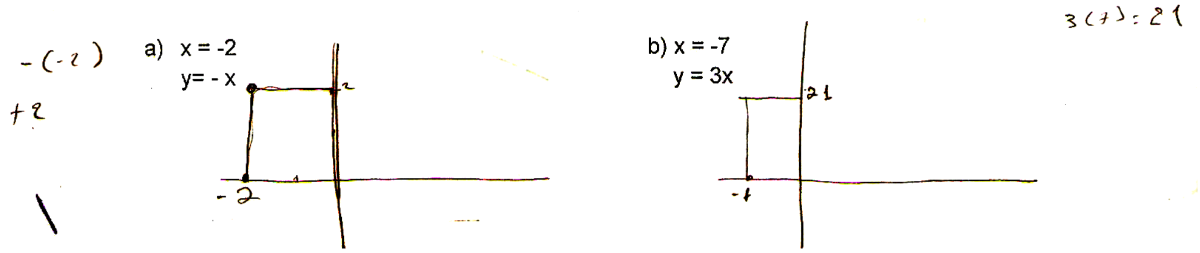


Figura 23 - Solução do Aluno 11 referente ao exercício 4

Do mesmo modo, o aluno 5 calculou corretamente a ordenada do item *a* [y = -(-2) = 2], porém no item *b,* quando fez a substituição da variável *x* pelo número -7, ele utilizou o sinal do número como se fosse o sinal de uma subtração, pois resolveu [y = 3(-7) = 4]. Logo, percebe-se que além de confundir o sinal do número com o sinal da subtração, ele diminuiu errado. Segundo a explicação dada pelo aluno, ele se confunde quando encontra esse tipo de subtração, pois não tem certeza se o resultado é positivo ou negativo, “só sabe que tem que diminuir”. Na figura 24, segue a solução do aluno 5.

Figura 24 - Solução do Aluno 5 referente ao exercício 4

Ao contrário dos alunos 5 e 11, os alunos 3 e 8 tentaram resolver o exercício 4 de maneiras que demonstram que não compreenderam o que era necessário fazer para calcular a ordenada. De forma semelhante, os dois tentaram montar uma equação para conseguirem um resultado para o exercício. Dessa forma, não foi possível analisar o entendimento que eles tinham sobre a multiplicação de números inteiros.

O aluno 3 expressou as seguintes equações para os itens *a* e *b*: [-2 – x = 0] e [-7 + 3x = 0]. Apesar de ter apagado a equação [-2 – x = 0] do item *a,* a folha ficou marcada e é nítido esse rascunho. Os cálculos que ele apresentou evidenciam dificuldade de interpretação do que foi solicitado. Na figura 25, segue a solução do aluno 3.

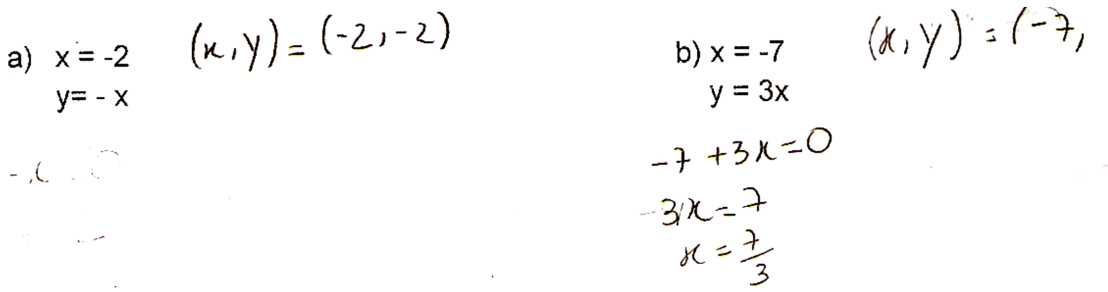


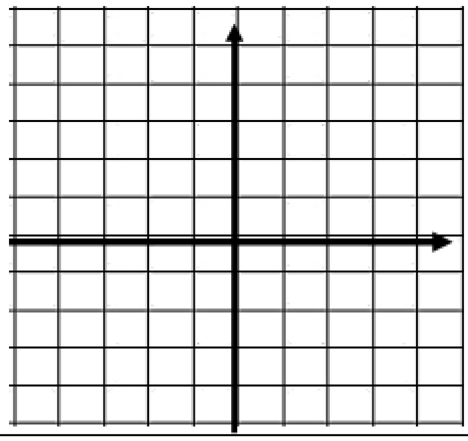
Figura 25 - Solução do Aluno 3 referente ao exercício 4

O desenvolvimento apresentado pelo aluno 8 nesse exercício dificulta uma análise sob o aspecto requerido nessa pesquisa. Contudo, podemos perceber manipulações algébricas que não seguem as regras convencionadas, destacando a incompreensão do que foi solicitado no exercício. Na figura 26, segue a solução do aluno 8.

Figura 26 - Solução do Aluno 8 referente ao exercício 4

Análise do exercício 5

5. Marque o ponto Q(x,5) no plano cartesiano, sabendo que $x^2 = 9$.



Esse exercício exigia conhecimentos básicos de geometria analítica e buscava verificar se os estudantes considerariam que a incógnita pode assumir os valores 3 e -3, já que consta no enunciado que $x^2 = 9$.

No entanto, apenas 6 alunos tentaram resolver esse exercício e todos os que o fizeram consideraram que a raiz de nove é três e marcaram apenas o ponto (3, 5). Entretanto, teve um erro que se repetiu nesse exercício, pois o aluno 8 inverteu a ordem dos pontos ao marcá-los sobre os eixos coordenados,. Na figura 27, segue a solução do aluno 8.

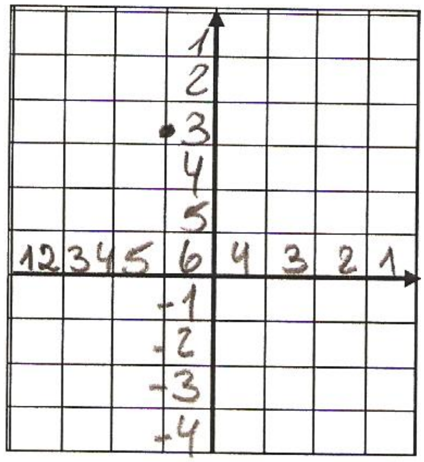
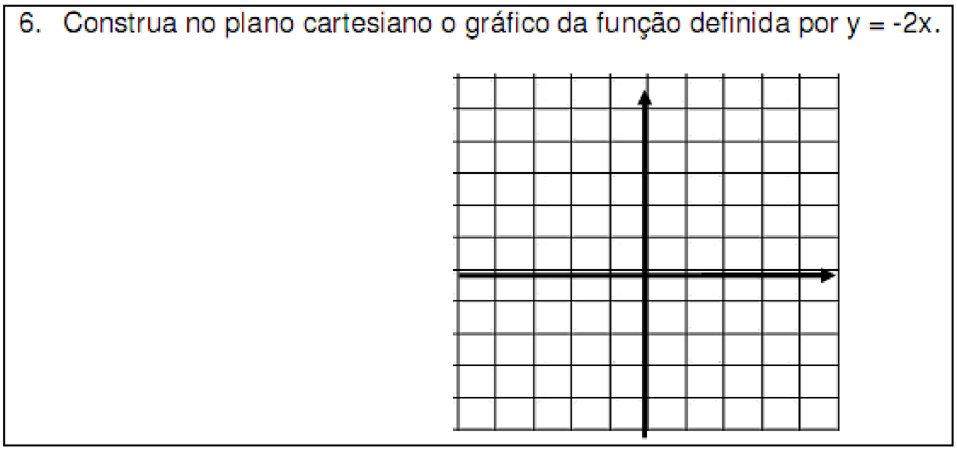


Figura 27 - Solução do Aluno 8 referente ao exercício 5

Análise do exercício 6


6. Construa no plano cartesiano o gráfico da função definida por y = -2x.

Com esse exercício, pretendia identificar as estratégias que poderiam surgir para a construção do gráfico da função. Em especial, se testariam valores para a variável x. Dessa forma eles teriam que realizar a multiplicação da variável pelo número -2 e identificar no plano cartesiano os pontos de coordenadas positivas e negativas.

Apenas 3 alunos tentaram resolver esse exercício, cujas tentativas e erros serão mencionados por conterem cálculos que permitem a análise da multiplicação.

Nesse exercício, o aluno 4 apesar de escrever “não lembro”, testou dois valores para a variável, sendo o primeiro um número negativo (-1) e o segundo um positivo (2). Primeiro teste: [y = -2 . -1 = +2], segundo teste: [y = -2 . 2 = -4]. Os cálculos foram feitos corretamente, porém ele não soube marcar as coordenadas de acordo com os valores testados e os resultados obtidos. Na figura 28, segue a solução do aluno 4.

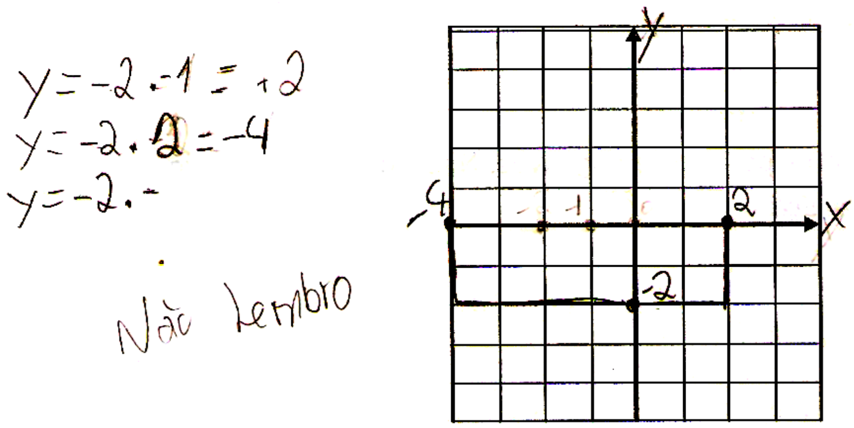


Figura 28 - Solução do Aluno 4 referente ao exercício 6

O aluno 11 também testou alguns valores para a variável, porém utilizou somente números positivos. Ao escrever as expressões, ele trocou o sinal do multiplicador, tornando-o positivo. Somente no último teste ele preservou o sinal do multiplicador, calculando corretamente a expressão [y = -2 . (5) = -10]. Além disso, marcou o primeiro ponto calculado (2,4), coerente com o cálculo que havia feito. Na figura 29, segue a solução do aluno 11.

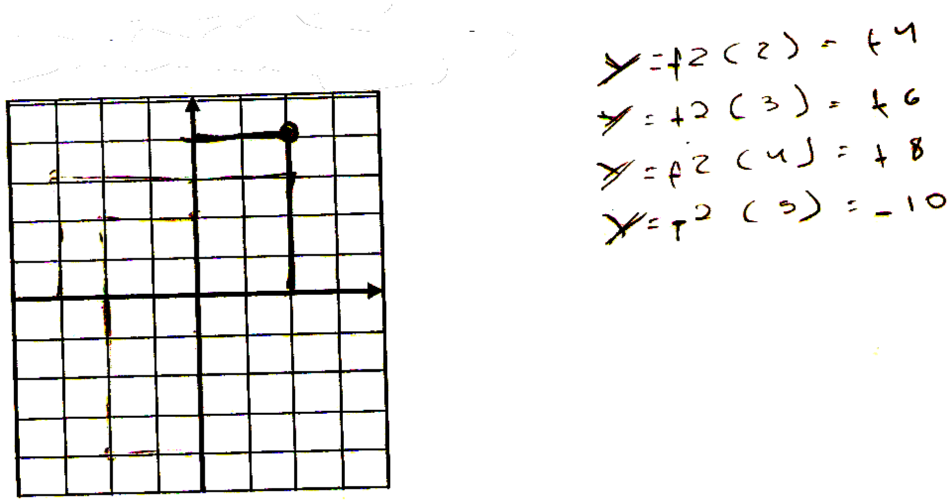


Figura 29 - Solução do Aluno 11 referente ao exercício 6

O aluno 9 testou um único valor para a variável x [y =-2.2= -4] e calculou corretamente. Porém esse resultado negativo parece não ter feito sentido, pois marcou uma ordenada positiva [y = 4] e no eixo x, ao invés de marcar o número 2 que utilizou para o teste, marcou x = 4. Na figura 30, segue a solução do aluno 9.

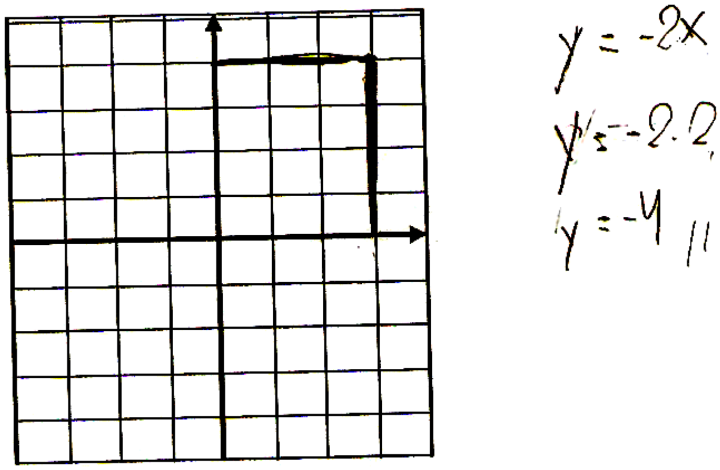
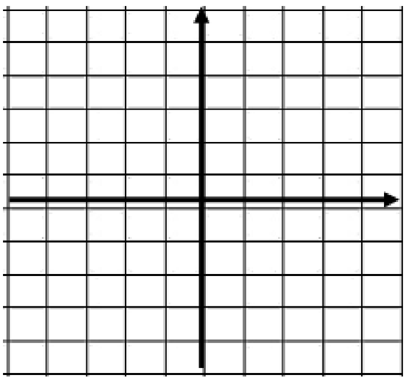


Figura 30 - Solução do Aluno 9 referente ao exercício 6

Análise do exercício 7

7. Calcule a raiz da função f(x) = -3x+5. Construa o gráfico da função.



O exercício 7 novamente trouxe como conteúdo central Funções, e o conhecimento necessário para resolver o exercício era saber o que é ou como calcular a raiz de uma função.

Os 3 alunos que tentaram resolver o exercício calcularam valores para *x* e *y*, mas não os utilizaram para esboçar o gráfico.

Os alunos 9 e 11 testaram alguns valores para a variável x e, ao fazerem as substituições calcularam corretamente. Porém, o aluno 9 parece não distinguir a notação da variável dependente e independente em uma função, pois no desenvolvimento dos seus cálculos expressa f(x) e x como sendo a mesma variável. No primeiro passo, usou a expressão f(x)= -3x+5, no segundo passo escreveu x= -3.3+5 e assim sucessivamente para concluir que x=-4. Portanto percebe-se que ele não reconhece que a variável x já assumiu um valor naquela equação quando testou o número 3. Consequentemente, ele não soube marcar o ponto (-3,-4) como é possível constatar na figura 29.

O aluno 11, que também testou valores para a variável x, identificou que os valores obtidos deveriam ser marcados no eixo y do plano cartesiano, porém a sua dificuldade também foi para reconhecer os valores da variável x, pois marcou dois pontos (-3, -1) e (-3, -4), ou seja, utilizou o coeficiente -3 que multiplica a variável x como uma coordenada. Nas figuras 31 e 32, segue a solução dos alunos 9 e 11.

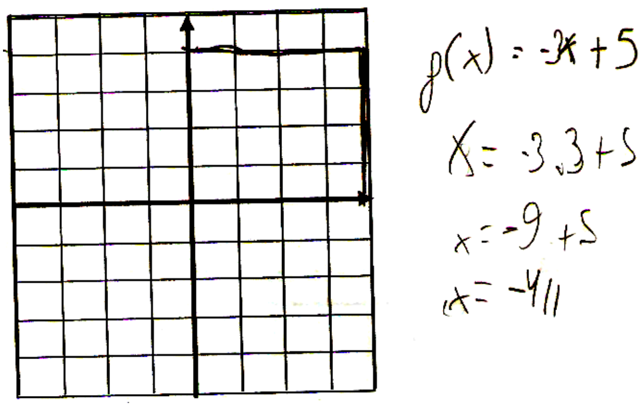


Figura 31 - Solução do Aluno 9 referente ao exercício 7

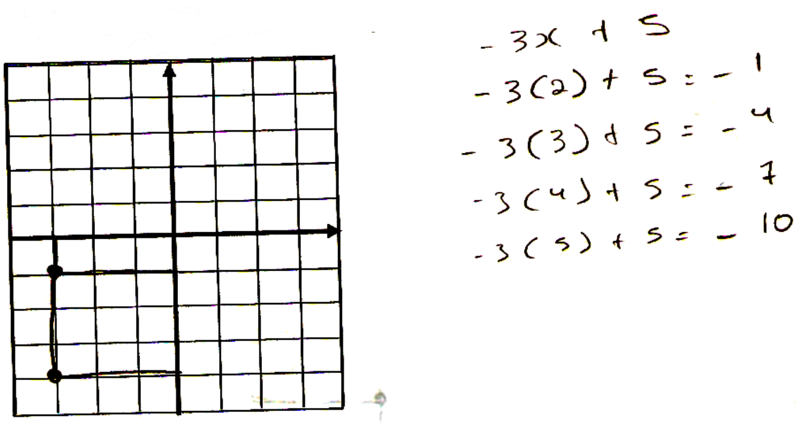


Figura 32 - Solução do Aluno 11 referente ao exercício 7

O único aluno que calculou a raiz da função também demonstrou dificuldades. Primeiro ao resolver a equação [-3x + 5 = 0], ao “passar” o número 5 para o segundo membro da equação não fez a troca de sinal [-3x = 5] e então concluiu que [x = 5/-3]. Na sequência, não soube marcar o ponto (-5/3,0) que encontrou, mas marcou o ponto (-3,-5) a partir do valor encontrado x=5/-3. Na figura 33, segue a solução do aluno 3.

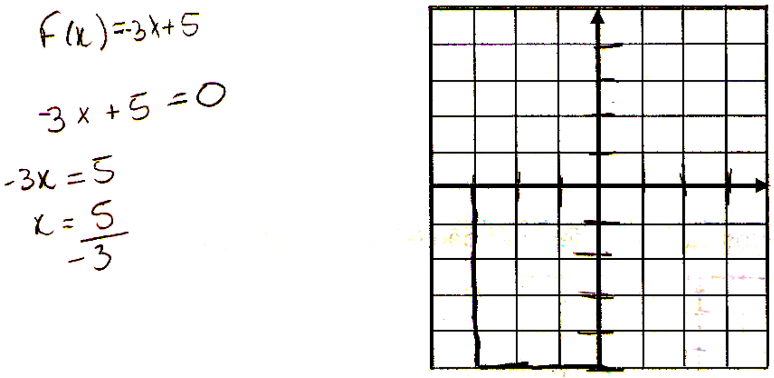


Figura 33 - Solução do Aluno 3 referente ao exercício 7

Os exercícios 8 e 9, que envolviam um grau de dificuldade maior, não foram resolvidos pela maioria dos alunos. Por esse motivo, será analisada somente a solução do aluno que apresentou algum tipo de cálculo ou justificativa.

8. O polinômio $p(x) = ax^4 + 3x^3 - 4x^2 + dx - 2$, com $a \neq 0$ e que $p(1) = 0$ e $p(-1) = 0$, podemos concluir que:

(A) a = 6 e d = -3
(B) a = 3 e d = -3
(C) a = -3 e d = 3
(D) a = 9 e d = -3
(E) a = -3 e d = 6

9. Os pontos A = (-a, 0), B = (0, b) e C = (a,0) são vértices de um triângulo retângulo com ângulo reto em B. Verifique se cada afirmativa é verdadeira ou falsa. Justifique.
( ) $a - b = 0$
( ) $a + b = 0$
( ) $a - b = 1$
( ) $a - |b| = 1$
( ) $|a| - |b| = 0$

O aluno 5 foi o único que desenvolveu o exercício 8 na tentativa de obter os valores de a e d solicitados. Para isso ele fez as duas substituições sugeridas no enunciado, mas na primeira parte substituiu a variável de *x* por 1 e na segunda parte por -1.

Na primeira parte da solução, realizada a substituição da variável *x* por 1 [$a.1^4 + 3.1^3 - 4.1^2 + d.1 – 2$], buscou separar as incógnitas dos números [$a.1^4 + d.1 = 3^3 - 4^2 - 2$] , porém ele manipulou os termos incorretamente: não alterou os sinais dos números ao “passá-los” para o segundo membro da equação; resolveu incorretamente potências que não existiam [$a.1^4 + d.1 = 18 – 16 – 2$], pois tratou os expoentes como coeficientes do polinômio, obtendo [$a^4 + d.1 = 0$].

Na segunda parte da solução, ele realizou subtrações e somas ao substituir a variável por -1: [$a\text{-}1^4 + 3\text{-}1^3 - 4(-1)^2 + d(-1) – 2$]. Assim como no item *b* do exercício quatro, percebe-se que ele não identifica que a operação inicial de multiplicação se mantém, e se confunde com o sinal que aparece “entre” os números [$a\text{-}1^4 + 2^3 - 5^2 + d1 – 2$] = [a1 + 12 – 25 + d1 – 2] = [a1 + (-13) + d1 – 2] = [a1 + d1 = (-13) – 2] = [a1 +d1 = -15]. Além disso, não é respeitada a ordem das operações, pois ele calcula a potência dos resultados que obteve ao substituir a incógnita por -1. Sendo possível observar novamente, que não sabe resolver algumas potências.

Consequentemente ele não conseguiu concluir o resultado. Na figura 34, segue a solução do aluno 5.

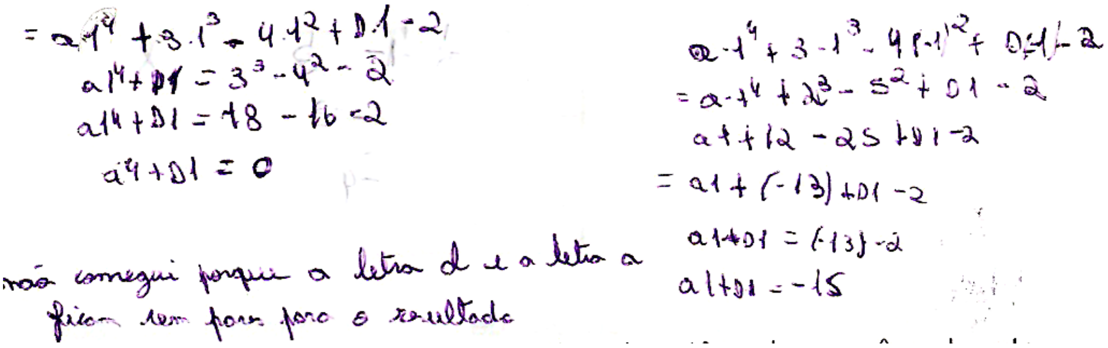


Figura 34 - Solução do Aluno 5 referente ao exercício 8

A partir desses exercícios e de suas respectivas análises, foi possível identificar que esses alunos do Ensino Médio têm dificuldades que vão além da multiplicação dos números negativos, pois têm concepções algébricas erradas que favorecem o surgimento dos erros.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através da pesquisa realizada, foi possível perceber que para compreender os números relativos e a multiplicação de números negativos, muitas discussões aconteceram até que os matemáticos conseguissem aceitar e justificar suas propriedades. Contudo, por mais que esse assunto seja explorado há séculos, ainda hoje, existem conflitos sobre as concepções que cercam o ensino e a aprendizagem desses números.

Com a realização da pesquisa empírica que é composta por entrevistas de estudantes de Licenciatura em Matemática e exercícios resolvidos por alunos do Ensino Médio, foi possível identificar alguns conflitos.

Nas entrevistas, identificamos que futuros professores têm concepções de que o ensino dos números inteiros é fácil, porém encontram dificuldade para justificar e explicar certas propriedades e operações envolvendo números negativos, pois apesar dos esforços, não conseguem contextualizar situações para operar com esses números. Conforme verificamos na história dos números negativos, esse esforço para dar sentido através de contextualizações foi uma alternativa que vários matemáticos tentaram, mas todas sem sucesso. Pelo que constatamos com futuros professores isso não é diferente, e talvez, o principal obstáculo para articular explicações formais satisfatórias, esteja na resistência em reconhecer que nem sempre existem exemplos contextualizados que satisfaçam todas as operações com negativos, como é o caso da multiplicação.

Por isso, é importante refletir sobre o ensino dos números relativos durante e depois do curso de Licenciatura, para que seja possível encontrar meios que auxiliem nas explicações, favorecendo o entendimento e a apropriação dos conceitos por parte dos alunos.

Na lista proposta para estudantes do Ensino Médio, ficou evidenciado que, mesmo ao final do período escolar, existem dificuldades em operar com números negativos e atribuir um sentido para os resultados obtidos. Os procedimentos utilizados para resolver os exercícios mostram que nem mesmo regras convencionadas, como é o caso da regra de sinais, são utilizadas corretamente. Entre os erros existentes, não distinguir entre o sinal da operação e do número foi o mais comum, indicando que os estudantes nem mesmo diferenciam claramente os números negativos dos demais.

Confrontando as dificuldades manifestadas por estudantes de Licenciatura em Matemática e estudantes de Ensino Médio, com base na teoria da formação de conceitos de Gérard Vargnaud, constatamos que a introdução dos números negativos, iniciado no Ensino Fundamental através do conjunto dos números inteiros, pode ser um “alicerce” para a construção de concepções mais amplas sobre números negativos, que serão exigidas até o fim do período escolar.

Apesar de considerar artificiais as situações, divulgadas nos livros didáticos, que tentam ilustrar intuitivamente a multiplicação de números negativos e a regra de sinais, os modelos apresentados nesse trabalho podem servir como suporte para as explicações em sala de aula. Esclarecer que a propriedade distributiva da multiplicação garante a validade da regra de sinais ou ressaltar que as operações algébricas podem ser resolvidas a partir do conceito de simetria, pode auxiliar a quebrar a “artificialidade” dos resultados oriundos das operações com números negativos. Assim como o modelo geométrico, que pode ser utilizado como uma possibilidade para a visualização e representação das operações com números relativos.

A realização desta pesquisa contribuiu para responder às inquietações e questões que propus neste trabalho, mas principalmente agregou conhecimentos à minha formação de professora. Através das discussões e análises que realizei sobre os números negativos, que tem sua importância dentro do currículo escolar, pude aprimorar meus conhecimentos e minhas concepções sobre esse tema, com a perspectiva de realizar um ensino de qualidade ao exercer a docência.

REFERÊNCIAS

BALDINO, Roberto Ribeiro. Sobre a epistemologia dos números inteiros**. Educação Matemática em Revista,** SBEM, n. 5, p. 4-10, 1996.

GONZALEZ, José Luis *et al.* **Numeros Enteros. MADRID:** Sintesis, 1990.

HOFFMANN, Vera Kern. Construção dos Números Relativos e de suas Operações. **Educação Matemática em Revista**, SBEM, n. 1, p.31-36, 1999.

MEGID, Maria Auxiliadora B.A. Construindo matemática na sala de aula: uma experiência com os números relativos. in: FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. **Por trás da porta, que matemática acontece?** Campinas: FE/UNICAMP/CEMPEM, 2001. p.145-184.

MORAIS, Anuar Daian de. **Fórmula (-1): Desenvolvimento objetos digitais de aprendizagem para as operações com números positivos e negativos.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2010. Disponível em: http://hdl.handle.net/10183/31426

MOREIRA, Plínio Cavalcanti. ; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. **Revista Brasileira de Educação,** n. 28, p.50-61, 2005. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1590/S1413-24782005000100005

SCHUBRING, Gert. Um Outro Caso de Obstáculos Epistemológicos: o princípio de permanência. **Bolema**, n. 28, p. 1-20, 2007.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das Matemáticas. Um exemplo: As estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, 1(V), p.75-90, 1980.