UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

BRUNO BEHRENS BALTAZAR

ANÁLISE DE ERROS COMUNS EM ÁLGEBRA

PORTO ALEGRE
2012

BRUNO BEHRENS BALTAZAR

ANÁLISE DE ERROS COMUNS EM ÁLGEBRA

Monografia apresentada como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador: Prof. Doutor Marcus Vinícius Basso.

PORTO ALEGRE
2012

BRUNO BEHRENS BALTAZAR

ANÁLISE DE ERROS COMUNS EM ÁLGEBRA

Monografia apresentada como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Aprovada em: ____ de ______________________ de ______.

Banca Examinadora

____
Prof. Doutor Carlos Hoppen (UFRGS)

____
Prof. Mestre Eduardo Brito Velho de Matos (UFRGS)

____
Prof. Mestre Luiz Davi Mazzei (UFRGS)

RESUMO

Geralmente, o erro é tomado pelo docente como um apontador de mau desempenho, não sendo utilizado para o redimensionamento do ensino. O professor é levado, tradicionalmente, a somente valorizar o resultado final, o que acaba muitas vezes o decepcionando, visto que reflete um fracasso que não é somente dos alunos, mas também do processo de ensino-aprendizagem. No processo de ensino-aprendizagem, o erro pode contribuir positivamente; basta que se modifique a atitude de condenação do aluno quanto ao erro. Ao cometer um erro, o aluno expressa o que sabe e o que não sabe; oferecendo ao professor uma oportunidade de ajudá-lo a adquirir o conteúdo que lhe falta, ou ainda, levá-lo a compreender por que errou. Portanto, o erro pode oferecer ao professor novos elementos para a reflexão de suas ações didáticas. Conseqüentemente, pode imprimir novos direcionamentos a suas práticas pedagógicas, o que incidiria diretamente sobre o seu desenvolvimento profissional. Este trabalho apresentará algumas reflexões sobre a importância da análise de erros em matemática como uma estratégia didática na produção escrita dos alunos. As ilustrações de erros que serão apresentadas ao longo deste trabalho foram coletadas durante as minhas práticas docentes no Colégio de Aplicação da UFRGS e centraram-se na observação de erros de raciocínio e ou de cálculo que os alunos cometem em matemática. Deseja-se destacar a análise de erros matemáticos como um norte para a tomada de procedimentos que auxiliem no enfrentamento das dificuldades, possibilitando, assim, a superação de uma incompreensão a respeito de certo conteúdo. Além disto, o presente texto visa evocar nos docentes reflexões acerca do tema, afim de que possam recriar seus saberes profissionais. Para tanto, utilizaremos como principal fundamentação teórica a Doutora Helena Noronha Cury, a qual é referência no estudo da análise de erros em matemática.

Palavras-chave: Matemática. Análise de Erros. Álgebra Básica.

ABSTRACT

Usually, the error is assumed by the teacher as a pointer of poor performance, not being used to reconsider education. The teacher is taken, traditionally, to value only the final result, which often ends up disappointing the teacher himself, since it reflects a failure not only of the student, but also of the teaching and learning process. In the teaching and learning process, the error can contribute positively as long as we change our attitude of blaming the student - as if he was the only responsible for the mistake - and also take pre-emptive measures regarding the same (PINTO, Pg. 54). By making a mistake, the student shows what he knows and what he knows not; giving the teacher a chance to help him learn the content that is lacking, or yet, leading the student to understand why he was wrong. Therefore, the error can provide the teacher with new material in order to rethink about his pedagogical attitudes. Consequently, it can set new guidelines to his teaching practice, which would influence directly on his professional development. This paper will present some reflections on the importance of error analysis in mathematics as a didactical strategy to the students' writing production. The examples of errors that will be presented along this paper were collected during my teaching practice at the UFRGS Aplicação School and will be focused on the observation of reasoning or calculation errors that the students make in mathematics. The point is to highlight the mathematical error analysis as a guide for taking procedures which would help when facing difficulties, enabling us, thus, to overcome misunderstandings regarding a certain subject matter. Besides that, this paper aims to make teachers reflect about the issue, so that they are able to rebuild their professional knowledge. For that, we will use as main theoretical basis the works of Dr. Helena Noronha Cury, who has written high qualified articles on the subject.

Keywords: Mathematics. Error Analysis. Basic Algebra.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Deparamo-nos, inúmeras vezes, com as dificuldades encontradas por professores e alunos diante dos erros ocorridos no processo de ensino e aprendizagem de matemática, isso nos faz buscar alternativas para transformar o erro em uma ação didática capaz de imprimir novos rumos às práticas pedagógicas. Dessa maneira, o papel do erro na construção do conhecimento passa a ser o centro das reflexões teóricas, com a finalidade de o aproveitarmos como um recurso pedagógico, eliminando os conflitos e o "medo" de errar, transformando-o em aprendizagem e não em algo irreversível.

Atualmente, o erro já é tratado pela maioria dos professores como um fator decisivo para que se possa chegar ao acerto. Nota-se uma enorme evolução com relação ao tratamento do erro com passar dos anos, uma vez que ele sempre foi tomado como um indicador de fracasso do estudante.

> Em geral, o erro era observado pelo professor como um indicador do mau desempenho do aluno, sem jamais ser utilizado para o redimensionamento do ensino. O que permeava o ensino era uma "pedagogia da resposta" em que o erro era o sintoma visível do fracasso do aluno, assim como o acerto era o sinal mais evidente de seu sucesso. (PINTO, 2000, p. 8).

Dessa forma, cabe ao professor criar um ambiente de ensino-aprendizagem em que o erro não seja sinônimo de falta de conhecimento ou inteligência. Ao cometer um erro, o estudante expressa o que sabe e o que não sabe, possibilitando ao professor redirecionar suas práticas pedagógicas.

> Uma decorrência do principio construtivista é o fato de o erro apresentar-se como uma oportunidade didática para o professor organizar melhor seu ensino a fim de criar situações apropriadas para o aluno superar seus erros e apropriar-se dos conhecimentos necessários à sua cidadania. (PINTO, 2000, p. 11)

Essa investigação tem por fundamento principal apontar as causas dos erros mais comuns ocorridos em álgebra básica e, além disso, destacar o papel construtivo do erro no processo de ensino e aprendizagem em matemática. Como salienta Pinto, "[...] o erro deve ser reconhecido como elemento construtivo da construção do conhecimento [...]" (PINTO, 2000, p. 24), isto é, errar é humano, aprender com os próprios erros é produzir conhecimento para si próprio, ainda na mesma página a autora afirma que:

> [...] do ponto de vista didático, a compreensão do erro nessa perspectiva é uma oportunidade que se oferece ao professor para ajudar os alunos a aprenderem mais – o que implica dar um sentido ético ao trabalho docente. (PINTO, 2000, p. 24)

Portanto, os erros surgem para serem superados. O erro tem seu papel histórico na ciência. Inúmeros cientistas erraram ao concluir suas experiências, possibilitando novas descobertas e, além disso, abriu espaço para que novos cientistas trabalhassem nos problemas não solucionados.

Não se deve condenar ou ignorar o erro, mas sim, analisar seus efeitos para suas possíveis soluções. Foi o que fez, por exemplo, Alexander Fleming que, em 1928, saiu de férias e esqueceu algumas placas com culturas de microrganismos em seu laboratório. Quando voltou da viagem, reparou que uma de suas culturas de *Staphylococus* tinha sido contaminada por um bolor. Tal bolor era o fungo produtor da penicilina, substância com efeito bactericida, que revolucionaria a medicina.

Diante destas e outras questões, a pergunta norteadora da presente investigação é: de que forma a análise de erro pode oferecer ao professor de matemática novos elementos para a reflexão e para o redirecionamento nos conteúdos de álgebra básica?

O objetivo da pesquisa é destacar a análise de erros matemáticos como um norte para a tomada de procedimentos que auxiliem no enfrentamento das dificuldades, possibilitando, assim, a superação de incompreensões nas propriedades algébricas básicas. E, além disso, evocar nos docentes reflexões acerca do tema, a fim de que possam recriar seus saberes profissionais.

O tema escolhido é bastante relevante dada à dificuldade dos estudantes em lidar com as propriedades básicas da álgebra. Para a comprovação de tal dificuldade, o texto a seguir contará com um experimento, no qual alunos concluintes do ensino médio julgaram como verdadeiro ou falso – ajustando os falsos de modo a torná-los verdadeiros – cada item de uma lista contendo os erros julgados comuns em álgebra.

Então, a ideia da investigação é trazer à tona estratégias para desvendar os erros, discutindo com os alunos como, onde e porque eles erraram.

Buscando uma forma alternativa de avaliá-lo, num processo no qual o aluno aprenda com seus próprios erros, evitando apenas corrigir e atribuir uma nota a cada resolução de atividade. Queremos tomar a análise de erros matemáticos como uma estratégia de mudança e superação.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O professor, em sala de aula, habitualmente espera que o aluno obtenha um resultado único na resolução de um problema matemático ou outra atividade qualquer. Caso isso não aconteça, todo o processo de construção é desconsiderado e é atribuído, como valor de avaliação da questão, nota zero ao aluno. Deve-se evidenciar que, para que o estudante chegue a esse resultado "errado", ele precisa raciocinar e todo entendimento a respeito do que lhe foi passado esta representado no processo que conduz a resposta errada. O professor de matemática deve, desse modo, considerar, nos registros escritos e nas manifestações orais dos alunos, os "erros" de raciocínio e cálculo do ponto de vista do processo de ensino/aprendizagem.

A atitude do professor em relação a esses erros passa a ser de investigação, isto é, por que o aluno seguiu esse caminho e não outro? Quais foram os conceitos utilizados para resolver a atividade? Se ele tomou um caminho errado na resolução, como ajudá-lo a retomar o raciocínio? Quais conceitos precisam ser revistos? Há alguma lógica no processo escolhido pelo aluno ou ele fez uma tentativa mecânica de resolução?

O "erro" em Matemática, não deve ser apontado como um "[...] vírus que deve ser imediatamente eliminado [...]" (PINTO, 2000, p.130), uma vez que é constitutivo do processo de acerto. No entanto, romper essa tradição não é uma tarefa simples, exige dos docentes espaços para reflexões, com a finalidade de recriação dos seus saberes profissionais.

Inicialmente, queremos apresentar alguns teóricos que contribuíram para que a análise de erro se tornasse uma tendência bastante emergente na Educação Matemática.

No início do século XX, Thornddike, dado o seu interesse pelo registro e análise de erros, sugeriu que os professores descrevessem minuciosamente os tipos de exercícios propostos aos estudantes, já que ele se propunha a analisar a capacidade de realizar determinados cálculos, até chegar a estabelecer um conjunto detalhado de hábitos ou de conexões mentais.

Enquanto isso, na União Soviética, Krutetskii criticava a falta de interesse em se estudar o processo de solução e a rigidez dos testes aplicados até então. Investigando as habilidades matemáticas dos alunos de uma forma mais abrangente, ele abriu um novo caminho com a utilização de instrumentos variados, participação dos alunos, pais e professores. O foco na observação detalhada da resolução dos problemas, com o cuidado de registrar o "pensar em voz alta" dos discentes e de questionar suas respostas, trouxe novos rumos às análises de erros.

Mais recentemente, o francês Brousseau investiga o papel do erro como obstáculo na constituição dos conceitos e afirma:

> Um obstáculo se manifesta, pois, por erros, mas estes não são devidos ao acaso. […] Além disso, esses erros, em um mesmo sujeito, são ligados entre si por uma fonte comum: uma maneira de conhecer, uma concepção característica, coerente ainda que não seja correta, um "conhecimento" antigo e que é bem sucedido em todo um conjunto de ações. (BROUSSEAU, 1983, p. 173-174).

Nos Estados Unidos, a italiana Rafaella Borasi sintetiza várias pesquisas sobre erros, desenvolvidas por ela e seus colaboradores e considera que as contribuições filosóficas que buscou em Kuhn, Lakatos e Kline e trouxe para a análise de erros lhe permitiram responder a questões desafiadoras sobre resultados apresentados por estudantes, tais como: "[...] o que aconteceria se aceitássemos esse resultado?" ou "[...] em que circunstâncias esse resultado pode ser considerado correto?" (BORASI, 1996, p. 29). Essas perguntas são a base de suas propostas de atividades para utilizar os erros para pesquisa e ensino em Matemática.

Borasi (1996) propõe uma taxionomia de uso dos erros, segundo o objetivo do processo de ensino e aprendizagem (remediar o erro, explorá-lo ou fazer descobertas por meio dele) e o foco do professor-pesquisador (conteúdo técnico-matemático, natureza da matemática, processo de aprendizagem em Matemática).

A presente investigação visa explorar os erros comuns em álgebra básica com o foco no processo de aprendizagem em Matemática. Para tanto, faremos uso das ideias de alguns autores contemporâneos que discutem a temática da análise de erros em matemática.

Segundo Pinto (2000), no processo de ensino-aprendizagem, o erro pode contribuir positivamente; basta a modificação da atitude de condenação do aluno como se ele fosse o único culpado pelo erro, e a tomada de uma postura de tratamento preventivo dos mesmos.

Ao cometer um erro, o aluno expressa o que sabe e o que não sabe; oferecendo ao professor uma oportunidade de ajudá-lo a adquirir o conteúdo que lhe falta, ou ainda, levá-lo a compreender por que errou. Portanto, o erro pode oferecer ao professor novos elementos para a reflexão de suas ações didáticas. Conseqüentemente, pode imprimir novos direcionamentos a suas práticas pedagógicas, o que incidiria diretamente sobre o seu desenvolvimento profissional.

Cury (2007) reforça esse pensamento e considera que, na análise das respostas dos alunos, o importante não é o acerto ou o erro em si – pontuados em uma prova de avaliação da aprendizagem – mas as formas de se apropriar de um determinado conhecimento, as quais emergem na produção escrita e podem evidenciar dificuldades de aprendizagem. Assim, é importante que o professor busque nas produções escritas erros que evidenciem dificuldades de aprendizagem. Para tornar isso possível, é preciso que o professor de Matemática insista para os alunos deixarem explícitos os procedimentos adotados e explicarem suas afirmações quando tratarem de algoritmos ou resoluções de problemas.

É notória a importância da análise de erros nas produções escritas dos estudantes, já que ela está diretamente relacionada à prática escolar cotidiana, normalmente desconsiderando o processo utilizado pelo aluno para chegar à solução e acaba não aproveitando seus erros para auxiliá-lo na compreensão de suas dificuldades. A experiência mostra que, no processo de correção, é bastante comum o professor se deparar com respostas “obscuras” e classificá-las em certas ou erradas simplesmente, sem o compromisso de entender o porquê daquele resultado.

Para melhor situar, quando questionados a respeito de operações matemáticas elementares e tópicos de matemática básica os alunos, muitas vezes, apresentam dificuldade em encontrar uma resposta correta. E durante as tentativas de resposta, encontramos alternativas que caracterizam associações entre números, generalizações e confusões teóricas feitas pelos discentes. Por exemplo, provas nas quais no cálculo da altura de um prédio tem-se como resposta apresentada 0,1 m de altura. Nota-se que nesse caso há uma incoerência da resposta com relação à questão. Muitos professores de matemática já vivenciaram essa experiência marcante e, por que não dizer, frustrante. Nesse tipo de situação, se o docente refletir, ao realizar a correção dessas atividades, sobre o que foi encontrado no registro dessas questões, terá a oportunidade de identificar algumas dificuldades de aprendizagem desse aluno e, a partir delas, elaborar atividades com a finalidade de superá-las.

Refletir sobre a relevância do erro no processo de aprendizagem da Matemática é uma importante mudança na postura didática do docente. Os erros devem ser utilizados como ponto de partida para desafiar o aluno a se modificar. Essa mudança faz com que o aluno aprenda mais e o professor atue de modo mais eficaz.

> Diagnosticar e corrigir os erros não é suficiente para a melhoria do ensino. Os erros contêm um potencial educativo que precisa ser mais bem explorado, não apenas pelos professores, como também pelos próprios alunos. (PINTO, 2000, p. 37)

A análise de erros de uma produção escrita é uma atividade que, metodologicamente, se baseia na análise de conteúdo, especialmente se levarmos em conta os conceitos apresentados em Bardin (1979). Testes, experiências e respostas a questionários são exemplos de documentos possíveis a serem submetidos a tal método. Assim, as respostas escritas de estudantes a questões de matemática podem ser objeto de análise.

Segundo Bardin (1979), existem três etapas básicas para o desenvolvimento de uma análise aprofundada e sistemática: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Cury (2007) adapta esse método para a análise das respostas dos estudantes, fazendo, primeiramente, uma leitura "flutuante" de todo o material, com a finalidade de avaliar as respostas. A seguir, as separa em "totalmente corretas", "parcialmente corretas" e "incorretas", fazendo a contagem do número de respostas de cada tipo. Em alguns casos, encontram-se apenas duas classes, resposta corretas ou incorretas, dependendo do tipo de questão e resposta. Em uma próxima etapa, aprofunda-se a análise, realizando a unitarização e categorização das respostas. Nesse momento, já se produz uma interpretação dos dados, uma vez que estabelece os critérios pelos quais se cria as categorias.

Finalmente, na fase do tratamento dos resultados, as categorias são apresentadas por meio de quadros com indicação de freqüências e porcentagens ou com a produção de um texto que resuma cada uma, incluindo-se exemplos dos erros cometidos. Pode-se, a partir dessa análise mais aprofundada, utilizar os resultados obtidos com fins práticos ou teóricos. Um exemplo prático seria explorar os erros, juntamente com os estudantes, para fazer descobertas a respeito dos conteúdos em questão ou simplesmente tentar suprir alguma dificuldade, criando novas estratégias didáticas para retomar os conteúdos nos quais os alunos apresentam mais dificuldades.

Segundo Cury (2007), há referência de muitos trabalhos de investigação sobre a problemática do erro como fonte de aprendizagem entre 1940 e 2006. Números e Álgebra são os principais tópicos abordados por estes trabalhos. Tiveram uma atenção particular as quatro operações básicas, o conceito de número e o sistema de numeração decimal. Além disso, vários conteúdos de Álgebra, como a fatoração de polinômios, a simplificação de frações ou expressões racionais, os produtos notáveis e as equações algébricas também foram analisados em alguns trabalhos.

A não compreensão do significado de uma regra faz com que o estudante a use de forma indiscriminada. Ele memoriza um procedimento para ser aplicado em determinada situação e, quando identifica uma situação similar, aplica essa "pseudoregra". Para elucidar o exposto, a deficiente compreensão da propriedade distributiva, de uma operação em relação à outra, por parte dos alunos, gera a ocorrência de um grande número de erros. Por exemplo, o erro no desenvolvimento do produto notável quadrado da soma $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. "O erro não é somente o efeito da ignorância [...], mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptado." (BROSSEAU, 1983, p. 171).

O conhecimento dos erros primários dados pelos alunos nas suas resoluções é de extrema importância, visto que nos fornece informações a respeito de suas eventuais dificuldades de interpretação e/ou manipulação simbólica. Consoante Pinto & Santos (2006), muitas vezes os erros não são manifestações de ausência de conhecimento, mas, pelo contrário, de conhecimentos construídos sobre bases pouco sólidas que originaram concepções errôneas.

Alguns autores, ao apontar erros comuns em Álgebra, propõem um tipo de exercício que consiste em apresentar aos alunos uma lista de afirmativas falsas, baseadas em erros encontrados usualmente em provas, e solicitar aos estudantes a correção das afirmativas, de forma a discuti-las e interpretá-las posteriormente. A metodologia desta investigação fará uso deste recurso. A interpretação dos dados será realizada através da sistemática proposta por Cury (2007) e exposta acima.

3 METODOLOGIA

O erro do estudante é um saber que ele possui, construído de certa forma, e é necessário criar intervenções didáticas que desestabilizem suas convicções, levando-o a um questionamento sobre as suas respostas. Assim, se forem elaboradas atividades de sala de aula em que os erros dos alunos sejam explorados e aproveitados como ferramentas para a aprendizagem, a análise de erros também pode ser entendida como uma metodologia de ensino. Pensando dessa forma, para a primeira fase da investigação que está a ser desenvolvida, no mês de abril de 2012, aplicamos algumas questões nas turmas 111 e 112 do terceiro ano do ensino médio do Colégio de Aplicação da UFRGS. Os estudantes dispuseram de um período de 45 minutos para a resolução do experimento, o qual contava com quinze afirmações que deveriam ser julgadas em verdadeiras ou falsas. Das quinze afirmações, treze eram falsas e deveriam ser corrigidas.

A análise da produção escrita de estudantes de Matemática é uma atividade normalmente confundida com procedimentos de avaliação. No entanto, ainda que possamos encontrar pontos em comum entre essas práticas, a análise do que foi produzido pelo estudante não tem como objetivo atribuir-lhe um conceito ou nota. Ao analisar a resolução de um exercício ou problema, pode-se usar os erros cometidos pelos estudantes como subsídio para a avaliação, mas também se pode empregar essa análise no decorrer de uma investigação ou mesmo no planejamento de estratégias de ensino. O instrumento aplicado, portanto, não teve caráter avaliativo, já que se tratava apenas de uma investigação.

Nessa primeira fase, tivemos como objetivo verificar se os erros julgados como recorrentes por autores que se dedicam à análise de erros em conteúdos de Álgebra eram ou não identificados pelos estudantes. Um dos exemplos mais conhecidos e citados por tais autores é relacionado à adição de frações; muitas vezes os alunos consideram que $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$, para quaisquer a, b, c, d inteiros, com b, d $\neq$ 0. Então, o que se pode fazer para que um estudante, por meio de um resultado incorreto por ele produzido, possa aprender a somar frações?

O papel do erro no processo de aprendizagem depende de como ele ocorre nas resoluções de tarefas. O aluno pode errar por descuido ou falta de informações necessárias, caso já tenha condições de resolver o problema proposto, e, neste caso, a constatação de seu erro pode levá-lo a refazer o processo. Se a estrutura de pensamento ainda não é suficiente para eleger estratégias de resolução, a percepção do erro pode ajudar o estudante a atingir um nível de desenvolvimento superior quando apoiado pelo professor; nesta situação, o erro passa a ser construtivo. Porém, se o aluno sequer entende o que lhe foi perguntado, a tentativa de apresentar alguma resposta vai ser travada pelos seus limites e os erros cometidos serão sistemáticos, isto é, irão se repetir em situações semelhantes.

Algumas vezes essas idéias são mal-interpretadas e professores ou pais consideram que, se é inevitável que erros aconteçam nessa construção, não se pode avaliar os alunos pelo que eles produzem. Todavia, a avaliação não deve enfocar apenas o resultado, mas considerar o processo de produção de uma resposta para uma questão, da resolução de um desafio ou da realização de uma tarefa. Dessa forma, passamos para a segunda fase do processo investigativo: a correção e análise das respostas dos alunos.

Inicialmente, lemos todas as respostas dadas. Consideramos que só havia a possibilidade de separá-las, nesse caso, em corretas ou incorretas, justamente porque o respondente tinha que decidir sobre a veracidade da afirmativa, para cada item. A seguir, fizemos a contagem do número de respostas certas ou erradas e tabulamos os resultados conforme o número de acertos. A média de acertos das turmas A e B ficaram, respectivamente, em 9,19 e 9,32 de um total de 15 questões.

Estávamos trabalhando com uma amostra de 51 alunos, dos quais escolhemos alguns para fazer parte do *corpus* da pesquisa. Realizamos a escolha por conveniência, ou seja, tomamos os materiais que mais continham informações relevantes escritas para que pudéssemos nos debruçar sobre elas.

Com o objetivo de compreender os erros demonstrados e, além disso, discutir formas de resoluções corretas, realizamos uma entrevista/conversa com dois dos quatro alunos selecionados. Buscamos relacionar as informações contidas nos registros escritos com os dados coletados nas entrevistas para que, por fim, pudéssemos fazer uma ligação com a fundamentação teórica e, finalmente, estruturar as conclusões dessa investigação.

4 EXPERIMENTO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Existem bastantes estudos em Educação Matemática que apontam dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de álgebra. A maioria dessas pesquisas indica os principais erros cometidos.

A álgebra apresenta diferentes significados durante o seu ensino. Primeiramente, tem caráter de generalização da aritmética; ou seja, é aplicada para resolver problemas de uma maneira geral. A segunda fase do ensino de álgebra entra no campo do cálculo algébrico, da resolução de equações e do estudo de funções, nesta segunda fase existe um conjunto de regras e procedimentos que devem ser adotados nas resoluções das questões. A segunda fase engloba os anos finais do Ensino Fundamental e o Ensino Médio. A terceira e última fase é a álgebra das estruturas, na qual se estuda teoria de grupos, anéis, corpos, espaço vetorial, conjuntos ordenados, teorias presentes no nível superior dos cursos de matemática e engenharia.

A presente investigação aborda as duas primeiras fases mencionadas acima; isto é, focaremos nas etapas em que o simbolismo começa a fazer parte do processo de ensino e aprendizagem da matemática. Símbolos como =, >, <, {, bem como a utilização de letras começam a fazer parte da rotina escolar. Há muita confusão com a interpretação do significado dessa simbologia. A igualdade, por exemplo, pode ter sentido de fórmula, equação para resolver, identidade, propriedade ou função. O grande perigo existente (~~que existe~~) no simbolismo é o de se perder o significado do que os símbolos representam. Caso isso aconteça, a matemática escolar passa a ter uma estrutura excessivamente formalista.

Nota-se que introduzir os conceitos algébricos não é uma tarefa simples para o professor de matemática. A abstração contida na álgebra e o seu aparente distanciamento da realidade são alguns fatores que dificultam o seu ensino e aprendizagem.

Há ainda abordagens equivocadas do ensino de álgebra que a reduz a meras técnicas e procedimentos a serem memorizados. Esse enfoque na prática se traduz na ineficácia da manipulação desses conhecimentos de maneira problematizada. As dificuldades apresentadas tanto pelos alunos de graduação quanto pelos da Educação Básica mostram facilidade com generalizações que privilegiam o aspecto indutivo, mas apresentam muitas rupturas nas deduções e conceitos.

Professores e alunos devem compreender que a álgebra é muito mais do que manipular letras. No ensino superior, o estudo de álgebra é aprofundado definindo-se os conceitos de estruturas algébricas como grupos, anéis e corpos. Muitos estudantes de licenciatura em matemática não conectam as teorias estudadas com a álgebra da escola básica, o que pode ocasionar abordagens equivocadas do tema quando estiverem na posição de professor. Os principais objetivos da álgebra são: compreender regularidades, relações, e funções; representar e analisar situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos, usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas. Na busca de tentar entender o motivo pelo qual tais objetivos muitas vezes não são alcançados é que esse trabalho se insere.

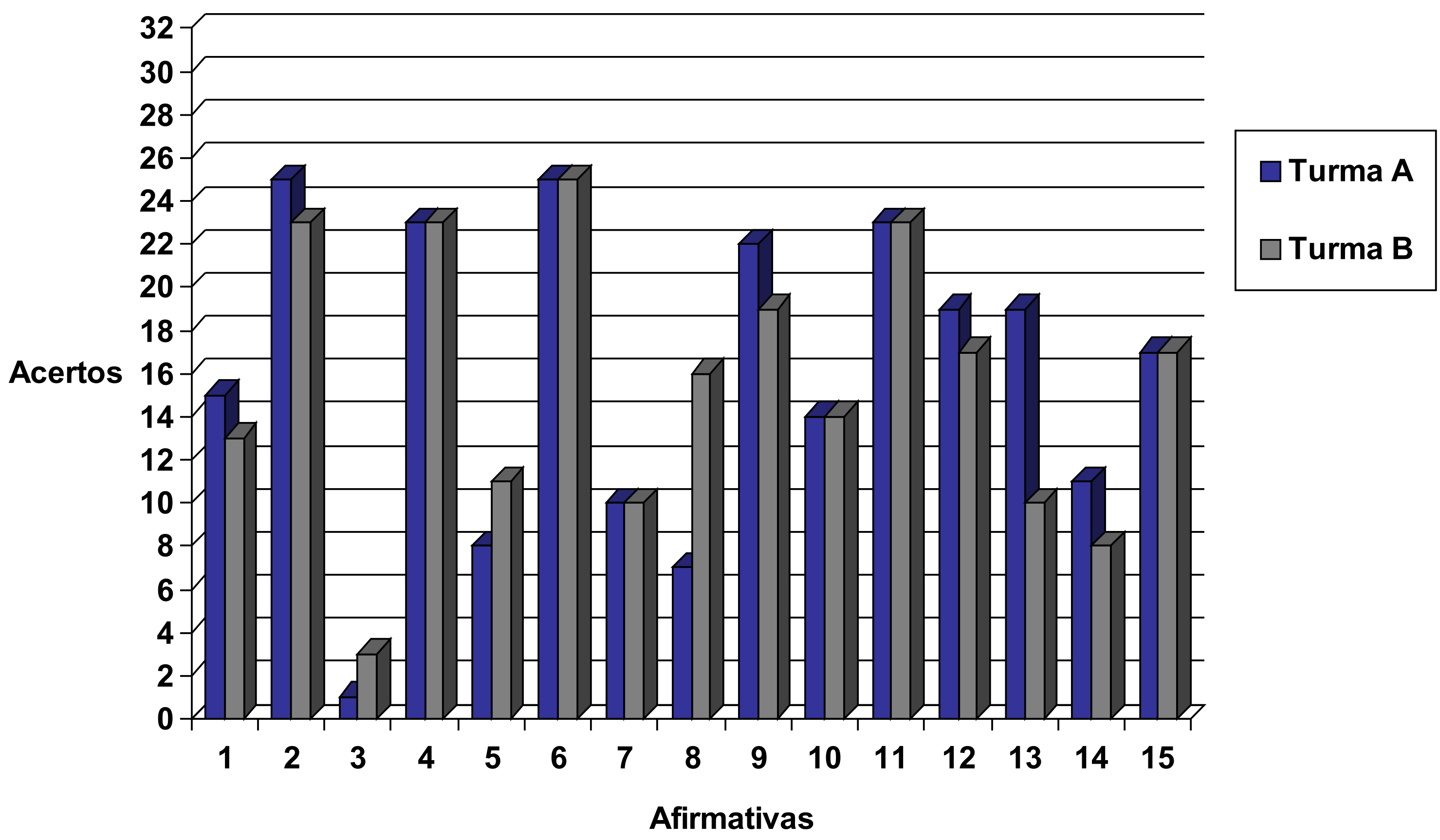
Nessa perspectiva começamos a desenvolver um instrumento que fosse capaz de salientar as dificuldades referidas nos conteúdos de álgebra básica. Uma pesquisa foi realizada em busca dos principais erros cometidos nesse conteúdo durante a escola básica. Consultas a livros, conversas com professores e até mesmo minha própria experiência docente ajudaram na formulação desse instrumento que segue em anexo.

O experimento foi aplicado em duas turmas concluintes do Ensino Médio do Colégio de Aplicação da UFRGS durante o período de aula. A primeira reação dos alunos ao se depararam com o instrumento foi a de lamentação, já que a grande maioria das afirmativas contém apenas letras. Ouvimos inúmeras vezes o questionamento: “por que tantas letrinhas?”. Um aluno fez graça e disse que a lista proposta apresentava mais letras que a redação dele.

Após o pavor inicial, começaram a trabalhar. Durante a aplicação alguns alunos me chamaram, pois não tinham certeza de suas respostas e gostariam que eu lhes desse dicas. Nesse caso, sempre sugeria que trabalhassem com uma situação análoga com números. E muitos assim fizeram. A aplicação do experimento evidenciou duas dificuldades básicas dos alunos. Primeiramente, a dificuldade com a álgebra básica, a qual é trabalhada nessa investigação. Além disso, a dificuldade ao justificar o motivo que tornava alguma afirmação falsa. O estudo das formas de argumentação, na maioria das vezes, está fora do contexto escolar e esse fato pode ser o gerador de tal dificuldade. Outra hipótese é que o aluno tenha o receio de, ao tentar justificar o erro, acabe o agravando. As duas dificuldades citadas ficaram ainda mais explícitas ao longo da correção dos experimentos.

O material recolhido passou por dois processos distintos de análise. Inicialmente, consideramos que, por se tratar de questões de verdadeiro ou falso, as respostas só poderiam ser classificadas em certas ou erradas. Ou seja, fizemos uma primeira análise de caráter quantitativo. O gráfico abaixo apresenta o número total de acertos obtidos pelos 51 alunos das turmas A e B do Colégio de Aplicação da UFRGS em cada uma das 15 afirmativas.

Gráfico 1 – Número de acertos por questão



Fonte: Elaborado pelo autor (2012)

Dos 51 alunos, apenas quatro (7,8%) acertaram a terceira afirmativa, ao responder que a afirmativa é falsa. Já na quinta e na décima quarta afirmativa, 19 alunos (37%) as julgaram como falsas e, por isso, acertaram. As três afirmativas citadas acima foram as que apresentaram os menores índices de acertos. Além dessas três, as afirmativas 1, 7, 8, 10 e 13 chamam atenção pelo baixo índice de acerto (entre 40% e 60%).

A seguir, passamos para fase de exploração do material. Selecionamos os materiais que mais continham informações relevantes para a pesquisa e realizamos uma análise sobre as respostas dadas nas oito afirmativas com menor índice de acerto. A análise qualitativa revelou que a maior parte dos erros se deve a dificuldade nas operações com frações algébricas. Dentre as oito afirmativas citadas acima, cinco delas envolvem esse tipo de operação; a saber, as afirmativas 3, 7, 8, 10 e 13. As demais questões que apresentaram maior índice de erro envolviam propriedades de potenciação e radiciação.

Durante as tentativas de resposta, encontramos alternativas que caracterizaram associações entre números, generalizações e confusões teóricas feitas pelos alunos. Um dos motivos aparente para as dificuldades relacionadas com os números reais e suas propriedades é o fato de que os estudantes recorrem demasiadamente à memorização para usar definições e propriedades. Os erros presentes nessas duas classes de questões estão relacionados a conteúdos e habilidades desenvolvidos em Álgebra, no Ensino Fundamental, tais dificuldades acarretam problemas para os alunos ao longo de toda a sua vida escolar. Visando a compreensão e análise das principais dificuldades encontradas ao resolver o instrumento, realizamos uma entrevista com dois alunos. Segue abaixo a transcrição de cada uma das entrevistas.

Entrevista com Aluno A:

Entrevistador: Observe a terceira afirmativa, a qual você marcou verdadeira. Eu afirmo que ela é falsa. Conseguiria assinalar o motivo que a torna falsa?

Aluno A: Não sei por que multipliquei por dois.

Entrevistador: Não é essa a justificativa correta. Observe a questão mais uma vez com atenção.

Aluno A: O problema é o sinal na frente do parêntesis?

Entrevistador: Sim. Nesse caso, o que acontece daí?

Aluno A: Muda o sinal de todo mundo que está dentro dele.

Entrevistador: Ótimo. Vamos para quinta afirmativa. Tal afirmativa também é falsa. O que te levou a marcar verdadeira?

Aluno A: Eu cortei o quadrado pela raiz.

Entrevistador: Tem ideia do motivo que te levou a fazer isso? Parece óbvio?

Aluno A: É que, quando tem quadrado e raiz, tu corta, mas, como há uma soma, acho que não pode.

Entrevistador: Ótimo. Vamos dar uma olhada na sétima afirmativa. Qual foi o teu pensamento para julgar a questão como verdadeira?

Aluno A: Pois é, $x + z$ não dá z e nem $x + y$ dá y.

Entrevistador: Está certo. No entanto, o que te levou a marcar que era verdadeira?

Aluno A: Talvez eu tenha pensado em cortar o x.

Entrevistador: Pode ter sido isso mesmo. E o que me diz da oitava afirmativa?

Aluno A: É o processo inverso da afirmativa anterior.

Entrevistador: Exatamente. Afirmo que ela é falsa. Consegue me dar uma justificativa?

Aluno A: Deveria igualar o denominador.

Entrevistador: Ou seja, fazer o MMC. Ótimo. O que essa afirmativa diz a respeito da soma de frações?

Aluno A: Que basta somar os numeradores e os denominadores.

Entrevistador: E isso faz algum sentido?

Aluno A: Não, mas parece verdade.

Entrevistador: Vamos adiante. Observe a décima afirmativa. Ali está bem claro o teu raciocínio: cortou o x. No entanto, a afirmativa é falsa. O que a torna falsa?

Aluno A: Não poderia cortar o x?

Entrevistador: Nesse caso, poderia, pois todas as parcelas apresentam x. No entanto, quando simplifica o x, no denominador, a primeira parcela fica zero?

Aluno A: Não. Fica um.

Entrevistador: Aí está o erro da questão. Seguindo adiante, você acertou a décima terceira afirmativa ao julgá-la como falsa, mas a justificativa não está correta. Observe e me diz qual é o erro presente na justificativa.

Aluno A: Deveria fazer o MMC, mas como ficaria a resposta correta?

Entrevistador: Primeiramente, encontra o denominador comum. Depois disso, divide esse denominador comum por cada um dos denominadores originais e multiplica por cada um dos numeradores originais. Pode ser?

Aluno A: Sim, lembrei.

Entrevistador: Por fim, você acertou a décima quarta afirmativa. Efetuou o produto notável na justificativa de maneira correta. No geral, o que você achou dessas afirmativas?

Aluno A: É bem complicado. Tem que prestar atenção em muita coisa, lembrar muitas regras.

Entrevistador: Ótimo. Obrigado pela entrevista.

Entrevista com Aluno B:

Entrevistador: A primeira afirmativa você a julgou como verdadeira. No entanto, ela é falsa. Saberia me justificar o motivo pelo qual ela é falsa?

Aluno B: Não sei. Só sei que está errado.

Entrevistador: Você sabe descrever o procedimento que o levou a concluir que tal afirmativa era verdadeira?

Aluno B: Multipliquei os de baixo (indicando as bases) e somei os de cima (indicando os expoentes).

Entrevistador: Muito bem. Vejamos a terceira afirmativa, a qual você também considerou verdadeira. Afirmo, novamente, que é falsa. Conseguiria a apontar o motivo que a torna falsa?

Aluno B: Teria que igualar os denominadores.

Entrevistador: Note que isso foi feito. Ou seja, o problema não está aí. Observe com atenção mais uma vez.

Aluno B: O problema está no sinal do meio (referindo-se ao sinal de menos no interior dos parênteses)?

Entrevistador: Isso mesmo. Vamos observar a quinta afirmativa agora. Você marcou verdadeiro. Qual a justificativa para considerá-la verdadeira?

Aluno B: Não sei responder.

Entrevistador: Certo. Então, responda-me: qual foi o procedimento adotado para concluir a veracidade da afirmação?

Aluno B: Acho que cortei tudo. Nessa situação, sempre corta o quadrado com a raiz.

Entrevistador: Tudo bem. Vamos adiante. A sétima afirmativa você considerou verdadeira. Na realidade, ela é falsa. Qual é o motivo?

Aluno B: É falsa mesmo. Talvez eu tenha errado na hora de marcar, pois não podemos somar letras diferentes.

Entrevistador: Certo. Por favor, antes de passarmos para próxima questão, diga-me: qual é a diferença entre os dois lados da igualdade?

Aluno B: A diferença é o x. Será que eu cortei o x?

Entrevistador: Pois é, isso eu também gostaria de saber. No entanto, se você levanta essa hipótese, é porque pode ter acontecido?

Aluno B: Sim, pode. No entanto, não lembro.

Entrevistador: Sem problemas. Vamos trabalhar com a oitava afirmativa. Você marcou verdadeira. Sabendo que é falsa, qual seria a justificativa nesse caso?

Aluno B: É o contrário da afirmativa anterior. Devo ter utilizado a mesma ideia.

Entrevistador: Você saberia me informar o que te levou a considerar essa afirmativa como verdadeira?

Aluno B: Eu acho que somei os de cima (referindo-se aos numeradores) e somei os de baixo (referindo-se aos denominadores). Não é assim que se faz. Deveria ter feito MMC.

Entrevistador: Ótimo. A décima afirmativa você acertou parcialmente, uma vez que, na justificativa, considerou que nada poderia ser feito na expressão inicial. Note que todas as parcelas apresentam x. Assim, o x poderia ser simplificado. Como ficaria essa expressão?

Aluno B: Ficaria a + b dividido por 1 + d?

Entrevistador: Isso mesmo. Essa seria a expressão simplificada. Vejamos a décima terceira afirmativa. Ela não é verdadeira. Gostaria que me dissesse qual o procedimento deveria ser adotado nesse caso.

Aluno B: Teria que igualar os de baixo (referindo-se aos denominadores).

Entrevistador: Exatamente. Então, o que há de errado naquela igualdade?

Aluno B: Não saberia dizer.

Entrevistador: Com números você saberia fazer?

Aluno B: Sim.

Entrevistador: O procedimento é idêntico com letras. Finalmente, passamos para décima quarta afirmação, a qual você considerou verdadeira. Qual foi o procedimento adotado?

Aluno B: Elevei cada um dos números ao quadrado.

Entrevistador: Tudo bem. Sabendo que a afirmação é falsa, você conseguiria dizer o que está errado ali?

Aluno B: Tem que escrever como (x+4).(x+4) e fazer “chuveirinho” ?

Entrevistador: Exatamente. O procedimento correto seria aplicar o produto notável. Acabamos a entrevista por aqui. Obrigado.

Finalmente, passamos para fase de análise dos resultados. Nessa fase, notamos, primeiramente, que, de fato, os erros presentes no instrumento são bastante comuns e que as produções escritas dos alunos e as entrevistas realizadas evidenciam grandes dificuldades de aprendizagem em álgebra básica. Além disso, ao relacionar as respostas obtidas à teoria que fundamenta essa investigação, concluímos que os estudiosos da área do erro citados acima apontam os verdadeiros motivos para tais dificuldades. Passemos, então, a estabelecer relações entre a fundamentação teórica e a parte experimental presentes nessa investigação. As afirmativas 1, 3, 5, 7, 8, 10, 13 e 14 foram as escolhidas para que se realizasse uma análise mais aprofundada, uma vez que foram as que apresentaram um maior índice de erro.

Afirmativa 1: A maior parte dos alunos que erraram a consideraram verdadeira com a justificativa da suposta propriedade de “multiplicar as bases e somar os expoentes” como foi o caso do Aluno B entrevistado. A “pseudo” regra criada nos revela a não compreensão da definição de potência e provem da propriedade de multiplicação para potências de mesma base, na qual se conserva a base e somam-se os expoentes. Em geral, os estudantes identificaram o padrão existente na afirmativa e o tomaram como verdadeiro, já que não recordavam o verdadeiro procedimento a ser realizado.

Afirmativa 3: Essa foi a afirmativa com menor índice de acerto. Apenas quatro alunos a acertaram. A maioria dos alunos identificou a necessidade de se fazer o MMC, no entanto ignorou o sinal da segunda parcela e a regra de sinais que deveria ser aplicada. Os estudantes que fizeram parte da pesquisa, em geral, sabem aplicar o MMC e a regra de sinais; por isso, a falta de atenção e a dificuldade em lidar com o simbolismo algébrico podem ser as principais causas para o baixo índice de acerto dessa questão.

Afirmativa 5: A generalização é o motivo dessa afirmativa estar entre as mais erradas. Com a justificativa de simplificar os quadrados com a raiz quadrada, a maior parte dos alunos assumiu que a afirmativa era verdadeira. Ou seja, tal simplificação é utilizada indiscriminadamente.

Afirmativa 7: A simplificação equivocada mais uma vez foi a principal causa de erros. Grande parte dos estudantes simplificou a expressão eliminando o “x”. No entanto, na entrevista, quando questionados sobre o motivo pelo qual haviam feito tal simplificação, notaram a falsidade da alternativa e reconheceram o erro. Penso que, nesse caso, a igualdade induz o aluno a concluir a veracidade da afirmativa e como forma de justificativa toma a simplificação.

Afirmativa 8: Mais uma afirmativa que envolve operações com frações entre as que apresentam menor índice de acerto. Ao questionar o aluno quanto ao procedimento a ser adotado quando se trabalha com soma ou subtração de frações, a grande maioria responde corretamente. Entretanto, ao responder o instrumento julgaram tal afirmativa como verdadeira. A ideia de simplificar o procedimento como um todo pode ser a causa do referido erro. Aos olhos de grande parte dos alunos, “parece óbvio” que para somar duas frações basta efetuar a soma dos numeradores e a soma dos denominadores. Isto é, não compreendem o verdadeiro significado da operação trabalhada. Nesse caso, a matemática torna-se meramente mecânica e formalista.

Afirmativa 10: A interpretação da simplificação foi o principal problema dessa afirmativa. No geral, os alunos simplificaram o “x” que está em cada parcela da expressão e consideraram a afirmativa verdadeira. Tal simplificação, de fato, pode ser feita. O problema está na expressão resultante, a qual deveria apresentar denominador igual a “1 + d”. O estudante que considera “d” como denominador resultante desconhece o motivo pelo qual a expressão é passível de simplificação e vê o processo de simplificação simplesmente como um mecanismo.

Afirmativa 13: Assim como na oitava afirmativa, temos uma questão que envolve operações com frações. A análise realizada nessa afirmativa nos revela a mesma dificuldade com a compreensão do significado da operação encontrada na Afirmativa 8. Operar frações torna-se um mecanismo, o qual grande parte dos alunos não recorda.

Afirmativa 14: O índice de erro dessa afirmativa foi bastante elevado. Os estudantes que a erraram elevaram cada uma das parcelas ao quadrado. Esse mecanismo adotado nos revela a incapacidade do aluno ao lidar com a definição de potência, já que $(x + 4)^2 = (x + 4).(x + 4)$.

Ao longo dos anos, o ensino da Matemática tem propiciado a uma parte expressiva dos alunos apenas a aquisição de técnicas que são utilizadas sem significados. Em geral, o professor desta área do conhecimento apresenta simplesmente um conjunto de regras e processos que nem sempre são compreendidos pelos estudantes. A ação mecânica dessa didática de ensino implica o surgimento das principais dificuldades ao operar com os conceitos algébricos; como foi comprovado na parte experimental desta investigação. Muitas vezes, os estudantes que realizam alguma tarefa proposta neste campo do saber o fazem sem uma compreensão elaborada dos procedimentos adotados. Ou seja, de fato, o erro, muitas vezes, não é uma demonstração de falta de conhecimento, mas, pelo contrário, de conhecimentos produzidos sobre bases pouco sólidas, assim como afirmam Pinto & Santos (2006). Pinto (2000) ainda afirma que, apenas diagnosticar e corrigir o erro não é suficiente para a melhoria do ensino, é preciso explorar o seu potencial educativo. Portanto, devemos encontrar alternativas que auxiliem os alunos a entenderem melhor a Álgebra e o uso de regras abstratas.

A análise de erros matemáticos proposta por Maria Helena Noronha Cury é uma oportunidade de o educador aperfeiçoar o encaminhamento dos conteúdos, contribuindo para a sua ação pedagógica no processo de ensino/aprendizagem. Uma crença comum é a de que educar implica em meramente transmitir informações, técnicas e fatos, uma postura que insiste na fixação das ideias e conceitos pela repetição, aspecto bastante comum nas aulas de matemática. Nesse tipo de ensino, considera-se que raciocinar é deter o domínio de técnicas de cálculo memorizadas através de uma sequência de instruções a seres executadas. A análise dos erros presentes nos materiais recolhidos e nas entrevistas realizadas nos permitiu concluir que recorrer demasiadamente à memorização é uma dentre as principais causas da dificuldade dos estudantes em álgebra básica. Assim, cabe ao professor relacionar os padrões comuns aparentes ao resolver uma equação ou ao lidar com regras abstratas com as definições básicas da álgebra; desse modo, o aluno pode construir o conhecimento e não mais encarar a matemática de uma maneira puramente formalista.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa investigação concretiza a discussão do aspecto construtivo e positivo do erro no processo de ensino e aprendizagem de matemática, salientando que jamais estamos isentos de erros, tanto na vida cotidiana, quanto na vida escolar. É impossível avançar por um determinado caminho do conhecimento sem se equivocar, não existe aprendizagem sem erros. Devemos, assim, transformar nossa atitude de pensar e agir perante os erros. O erro é um processo de evolução do ser humano. E para nós educadores e futuros educadores, disponibiliza-se uma nova prática pedagógica baseada na análise dos erros. Para tanto, cabe ao professor conhecer o aluno e para isso deve buscar conhecer a realidade do mesmo, tentar entender como esse aluno pensa, como ele erra, e porque ele erra. Como afirma Pinto (2000, p.168), “Diagnosticar o erro do aluno sem a devida contextualização, não levando em conta quem erra e por que se erra, é desconhecer o fato de que os erros são produtos históricos”.

O processo de aprendizagem é repleto de tentativas, hipóteses, levantamento de suposições. Transformamos o erro de fracasso para superação ao considerar que todos erram em suas tentativas de aprendizagem, mas, aprendem novamente tentando corrigi-los, refletindo sobre o mesmo, chegando a uma nova conclusão, portanto, um novo conhecimento.

A pesquisa aponta para a possibilidade de que, na maior parte dos casos, o erro em álgebra básica é provocado por erros mecânicos. Partindo deste princípio, temos como possibilidade de resposta que para a superação deste erro, o professor deve buscar mais a atenção dos alunos em sala de aula, e tentar tornar a aula o mais interessante possível, interagindo com os alunos, deixando os alunos participarem ativamente das aulas. Vale salientar que o objetivo dessa investigação foi diagnosticar os erros comuns e não propor soluções. Quanto às demais causas dos erros apontadas nesta investigação, compreende-se que para superá-los, é necessário retomar ao conteúdo sempre que possível, na aplicação de atividades, trabalhos, provas entre outros.

Concluímos que a melhor forma de se utilizar o erro como instrumento de superação e de aperfeiçoamento é analisá-lo de forma individual nas correções de atividades em geral. Torna-se papel do educador buscar o erro, tentar entender o motivo do estudante se expressar daquela forma e levar para sala de aula as discussões e debates com relação a esses erros. Os professores devem estar preparados para tal projeto, uma vez que, a partir do momento que o professor trabalha o erro do aluno como um instrumento de superação e não de fracasso, adota novas formas de avaliação e não simplesmente o recurso de notas para punir o aluno que errou.

Segundo Pinto (2000, p. 173),

> [...] mobilizar o professor para observar melhor o erro do aluno é instigá-lo a uma prática reflexiva, em que possa desenvolver sua criatividade, seu espírito critico e cooperativo, no dialogo com todos os agentes escolares, rompendo com o individualismo e a rotina e, ao mesmo tempo, criando os laços de confiança necessários à sua autonomia docente.

Portanto, desejamos que o educador, ao ler esse trabalho, passe a considerar o erro como um caminho no processo de aprendizagem e adotar novas formas de avaliar esse novo trajeto dos alunos.

Dessa forma, com professores comprometidos em realmente transformar o aprendizado e o conhecimento, e com alunos participativos e ativos no processo de ensino e aprendizagem, conseguiremos transformar o erro em um processo positivo no aprendizado escolar e também da vida cotidiana das pessoas.

REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** Lisboa: Edições 70, 1979.

BORASI, R. **Reconceiving mathematics Instruction**: a Focus on Errors. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.

BROUSSEAU, G. Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 4, n. 2, p. 165-198, 1983.

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

PINTO, J.; SANTOS, L. **Modelos de avaliação das aprendizagens.** Lisboa: Universidade Aberta, 2006.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática:** Estudo do erro no ensino da matemática elementar. Campinas: Papirus, 2000.

APÊNDICE A – Instrumento Aplicado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
COLÉGIO DE APLICAÇÃO - INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Responsáveis Prof. Luiz Davi Mazzei, Profa Simone Cruz
Acad. Bruno Baltazar

Nome: Turma:

Assinale verdadeiro(V) ou falso(F) para cada uma das afirmações abaixo. Corrija as que considerar falsas.

( ) $3^2 . 3^3 = 9^5$

( ) $x + y - 3(z + w) = x + y - 3z + w$

( ) $\frac{r}{4} - \frac{(6 - s)}{2} = \frac{r - 12 - 2s}{4}$

( ) $3a + 4b = 7ab$

( ) $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$

( ) $a^5 . a^3 = a^8$

( ) $\frac{x + y}{x + z} = \frac{y}{z}$

( ) $\frac{x}{y} + \frac{r}{s} = \frac{x + r}{y + s}$

( ) $2^{-1} = \frac{1}{2}$

( ) $\frac{xa + xb}{x + xd} = \frac{a + b}{d}$

( ) $b^2 . b^5 = b^{10}$

( ) $(3a)^4 = 3a^4$

( ) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a - b}{ab}$

( ) $(x + 4)^2 = x^2 + 16$

( ) $(a^2)^5 = a^7$

ANEXO A – Instrumento Respondido Aluno 1

6/15

UFRGS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
COLÉGIO DE APLICAÇÃO - INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Responsáveis: Profa Simone Cruz . Prof. Luiz Davi Mazzei,
Acad. Bruno Baltazar

Nome:_ ________________________ Turma 23/04

Assinale verdadeiro(V) ou falso(F) para cada uma das afirmações abaixo. Corrija as que considerar falsas.

X (V) $3^2.3^3 = 9^5$ multiplicação soma os expoentes.

C (F) $x + y - 3(z + w) = x + y - 3z + w$ / $x+y-3z-3w$

X (V) $\frac{r}{4} - \frac{(6-s)}{2} = \frac{r-12-2s}{4}$

C (F) $3a + 4b = 7ab$ somente mutiplicações

X (V) $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$ corta as raízes

C (V) $a^5.a^3 = a^5$ soma os expoentes quando multiplica

X (V) $\frac{\cancel{x}+y}{\cancel{x}+z} = \frac{y}{z}$ corta o "x"

C (F) $\frac{x}{y} + \frac{r}{s} = \frac{x+r}{y+s} = \frac{x+r}{ys}$

C (V) $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$ $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$

X (V) $\frac{xa + xb}{x + xd} = \frac{a+b}{d}$

C (F) $b^2.b^5 = b^{10}$ soma $= 10^7$

X (V) $(3a)^4 = 3a^4$

X (V) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab}$

X (V) $(x + 4)^2 = x^2 + 16$

X (V) $(a^2)^5 = a^7$

ANEXO B – Instrumento Respondido Aluno 2

13/15

UFRGS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
COLÉGIO DE APLICAÇÃO - INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Responsáveis: Profa Simone Cruz , Prof. Luiz Davi Mazzei.
Acad. Bruno Baltazar

Nome:________ ________ Turma 112

Assinale verdadeiro(V) ou falso(F) para cada uma das afirmações abaixo. Corrija as que considerar falsas.

C (F) $3^2.3^3 = 9^5$ $3^2 \cdot 3^3 = 3^5 \rightarrow 9.27 = 243 \rightarrow 243 = 243$

C (F) $x + y - 3(z + w) = x + y - 3z + w$ $x+y-3(z+w) = x+y-3z+3w$

X (V) $\frac{r}{4} - \frac{(6-s)}{2} = \frac{r-12-2s}{4}$ $\frac{8}{4} - \frac{(6-4)}{2} = \frac{8-12-2.4}{2}$ $2 - \frac{2}{2} = \frac{8-12-8}{2}$

C (F) $3a + 4b = 7ab$ $3.1 + 4.2 \neq 7.1.2 \rightarrow 3+8 \neq 14 \rightarrow 11 \neq 14$

C (F) $\sqrt{x^2+y^2} = x + y$ $\sqrt{2^2+3^2} \neq 2+3 \rightarrow \sqrt{4+9} \neq 5 \rightarrow \sqrt{13} \neq 5$

C (V) $a^5.a^3 = a^5$ $a^5 \cdot a^3 = a^{5+3}$

C (F) $\frac{x+y}{x+z} = \frac{y}{z}$ $\frac{1+2}{1+3} \neq \frac{2}{3}$ $\frac{3}{4} \neq \frac{2}{3}$

C (F) $\frac{x}{y} + \frac{r}{s} = \frac{x+r}{y+s}$ $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq \frac{1+1}{1+1} \rightarrow 1+1 \neq \frac{2}{2} \rightarrow 2 \neq 1$

C (V) $2^{-1} = \frac{1}{2}$

C (F) $\frac{xa+xb}{x+xd} = \frac{a+b}{d}$ $\frac{1.1+1.1}{1+1.1} \neq \frac{1+1}{1} \rightarrow \frac{2}{2} \neq \frac{2}{1}$

X (V) $b^2.b^5 = b^{10}$ $b^2 \cdot b^5 = b^{2+5}$

C (F) $(3a)^4 = 3a^4$ $(3.1)^4 \neq 3.1^4 \rightarrow (3)^4 \neq 3.1 \rightarrow 81 \neq 3$

C (F) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab}$

C (F) $(x+4)^2 = x^2 + 16$ $(x+4)^2 = x^2 + 2x.4 + 4^2 \rightarrow (x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$

C (F) $(a^2)^5 = a^7$ $(a^2)^5 = a^{2.5} = a^{10}$

$\frac{27}{243}$ $\frac{3}{9}$ $\frac{3}{27}$ $\frac{3}{81}$ $\frac{3}{243}$

ANEXO C – Instrumento Respondido Aluno 3

9/15

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
COLÉGIO DE APLICAÇÃO - INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Responsáveis: Profa Simone Cruz , Prof. Luiz Davi Mazzei,
Acad. Bruno Baltazar

Nome: ____________________ Turma ________

Assinale verdadeiro(V) ou falso(F) para cada uma das afirmações abaixo. Corrija as que considerar falsas.

C (F) $3^2 . 3^3 = 9^5$ \ $3^2 . 3^3 = 3^5$

C (F) $x + y - 3(z + w) = x + y - 3z + w$ / $x + y - 3(z + w) = x + y - 3z - 3w$

X (V) $\frac{r}{4} - \frac{(\overset{x2}{6} - \overset{x2}{s})}{2^{x2}} = \frac{r - 12 - 2s}{4}$

C (F) $3a + 4b = 7ab$ / $3A + 4B = 3A + 4B$

X (V) $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$

C (V) $a^5 . a^2 = a^5$

X (V) $\frac{\cancel{x} + y}{\cancel{x} + z} = \frac{y}{z}$

C (F) $\frac{x}{y} + \frac{r}{s} = \frac{x + r}{y + s}$ / $\frac{X}{Y} + \frac{R}{S} = \frac{X}{Y} + \frac{R}{S}$

X (F) $2^{-1} = \frac{1}{2}$ $= 0,2$

X (V) $\frac{\cancel{x}a + \cancel{x}b}{\cancel{x} + \cancel{x}d} = \frac{a + b}{d}$

C (F) $b^2 . b^5 = b^{10}$ / $B^2 . B^5 = B^7$

X (V) $(3a)^4 = 3a^4$

C (F) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a - b}{ab}$ / $\frac{A}{B} - \frac{B}{A} = \frac{A}{B} - \frac{B}{A}$

C (F) $(x + 4)^2 = x^2 + 16$ $x^2 + 8x + 16$

C (F) $(a^2)^5 = a^7$

ANEXO D – Instrumento Respondido Aluno 4

9/15

UFRGS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
COLÉGIO DE APLICAÇÃO - INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Responsáveis: Profa Simone Cruz , Prof. Luiz Davi Mazzei,
Acad. Bruno Baltazar

Nome:_ ______________ Turma 111

Assinale verdadeiro(V) ou falso(F) para cada uma das afirmações abaixo. Corrija as que considerar falsas.

X (V) $3^2 \cdot 3^3 = 9^5$

e (F) $x + y - 3(z + w) = x + y - 3z + w$ $\quad x+y-3(z+w)$ $\quad x+y-3z+3w$

X (V) $\frac{r}{4} - \frac{(6-s)}{2} = \frac{r-12-2s}{4}$ $\quad \frac{r}{4} - \frac{(6-s)}{2} = \frac{r-12-2s}{4}$

e (F) $3a + 4b = 7ab$ $\quad 3a + 4a = 3b + 4b$

X (V) $\sqrt{x^2+y^2} = x + y$ $\quad \sqrt{x^2+y^2} = x+y$

e (V) $a^5 \cdot a^3 = a^8$

e (F) $\frac{x+y}{x+z} = \frac{y}{z}$ $\quad \frac{x+y}{xz}$

X (V) $\frac{x}{y} + \frac{r}{s} = \frac{x+r}{y+s}$ $\quad \frac{x+r}{y+s} =$

X (V) $2^{-1} = \frac{1}{2}$

$x, xd \,|\, xd$

e (F) $\frac{xa+xb}{x+xd} = \frac{a+b}{d}$ $\quad \overline{2xd}$

e (F) $b^2 \cdot b^5 = b^{10}$ $\quad b^2 \cdot b^5 = b^7$

e (F) $(3a)^4 = 3a^4$ $\quad (3a)\cdot(3a)\cdot(3a)(3a) = 9a^2 \cdot 9a^2 = 81a^4$

X (V) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab}$ $\quad \frac{a}{b} - \frac{b}{a} =$

e (F) $(x+4)^2 = x^2 + 16$ $\quad (x+4)(x+4) = x^2 + 4x + 16$

e (F) $(a^2)^5 = a^7$

$(a^2)^5 = a^{10}$

ANEXO E – Instrumento Respondido Aluno 5

UFRGS UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

9/15

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
COLÉGIO DE APLICAÇÃO - INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Responsáveis: Profa Simone Cruz . Prof. Luiz Davi Mazzei, Acad. Bruno Baltazar

Nome: __________ Turma 111

Assinale verdadeiro(V) ou falso(F) para cada uma das afirmações abaixo. Corrija as que considerar falsas.

X (V) $3^{2}.3^{3} = 9^{5}$

C (F) $x + y - 3(z + w) = x + y - 3z + w$
Porque seria: x+y-3z+3w

X (V) $\frac{r}{4} - \frac{(6-s)}{2} = \frac{r-12-2s}{4}$

C (F) $3a + 4b = 7ab$
Porque não pode somar a+b porque é diferente

X (V) $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$

C (V) $a^{2}.a^{3} = a^{5}$

C (F) $\frac{x+y}{x+z} = \frac{y}{z}$ Não pode somar x+z são diferentes

X (V) $\frac{x}{y} + \frac{r}{s} = \frac{x+r}{y+s}$

X (F) $2^{-1} = \frac{1}{2}$ Não sei justificar
Não sei se está certo

C (F) $\frac{xa + xb}{x + xd} = \frac{a+b}{d}$ teria que ser -xa+xb para o x ser cortado e a mesma coisa embaixo

C (F) $b^{2}.b^{5} = b^{10}$ Não multiplica 2.5

C (F) $(3a)^{4} = 3a^{4}$ Não sei justifico, Não lembro como faz.

C (F) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab}$ Não sei justificar a parte de baixo
Só sei que não pode juntar ab

X (V) $(x + 4)^2 = x^2 + 16$

C (F) $(a^{2})^{5} = a^{7}$ porque se faz 2x5
Não 2+5