

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIOGRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

INCLUSÃO DE EFEITOS NÃO-CONSERVATIVOS EM MODELOS CONSTITUTIVOS
HIPERELÁSTICOS INCOMPRESSÍVEIS

por

Eduardo Guilherme Motke Wrubleski

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, dezembro de 2012

INCLUSÃO DE EFEITOS NÃO-CONSERVATIVOS EM MODELOS CONSTITUTIVOS
HIPERELÁSTICOS INCOMPRESSÍVEIS

por

Eduardo Guilherme Motke Wrubleski

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Arnaldo Ruben Gonzalez

Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Rogério José Marczak

Comissão de Avaliação:

Prof. Jun Sérgio Ono Fonseca

Prof. Jakson Manfredini Vassoler

Prof. Ignácio Iturrioz

Porto Alegre, 19 de dezembro de 2012.

MOTKE WRUBLESKI, E. G. **Inclusão de efeitos não-conservativos em modelos constitutivos hiperelásticos incompressíveis**. 2012. 18. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

RESUMO

Neste trabalho é apresentado o estudo e aperfeiçoamento do modelo constitutivo de Hoss e Marczak para materiais hiperelásticos incompressíveis considerando a histerese. Sendo que foram estudadas diferentes métodos para a resolução do problema, através de uma função que subtrai a histerese de equação principal e também através do modelo de outros modelos existentes na literatura. Não se objetiva a criação de modelos hiperelásticos, mas na adaptação da histerese para modelos já existentes. Foram analisados dois materiais diferentes, polipropileno e látex, pois apresentam pequenas e grandes deformações respectivamente. Então, foram propostas diferentes tentativas de melhorias para a modelagem da histerese e foi elaborada uma representação numérica que tem maior capacidade de adaptação e simulação desse efeito. A representação numérica da histerese acrescenta três constantes a qualquer modelo hiperelástico e a representa de maneira adequada.

PALAVRAS-CHAVE: hiperelástico, histerese, modelo constitutivo.

MOTKE WRUBLESKI, E. G. **Inclusion of non-conservative effects in hyperelastic incompressible constitutive models**. 2012. 18. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

ABSTRACT

In this paper is presented the study and improvement of Hoss and Marczak constitutive model for hyperelastic and incompressible materials considering hysteresis. Different methods were studied to solve this problem, through a function which reduces the hysteresis from the main equation and also other constitutive model. It is not objective of this paper the creation of hyperelastic models, but in adapt the hysteresis to models already existents. Two materials were analyzed, polypropylene and latex, because they present small and large elongations respectively. Then, different attempts of improvement were proposed to model hysteresis and a new numerical representation that has better adaptation to simulate this effect. The numerical representation add three constants to any hyperelastic model and presents a good response to hysteresis.

KEYWORDS: hyperelastic, hysteresis, constitutive model.

ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO	1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	1
2.1 Modelos hiperelásticos.....	1
2.2 Modelo hiper-visco-histerético.....	3
2.3 Modelo de Dorfmann.....	3
2.4 Estimador de erro.....	4
3 METODOLOGIA.....	5
3.1 Soma de uma função a equação principal.....	5
3.2 Modelo de Dorfmann.....	6
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	7
4.1 Polinomial de grau 3.....	7
4.2 Polinomial de grau 6.....	8
4.3 Dorfmann modificado.....	9
4.4 Comparação dos modelos calculados.....	13
5. CONCLUSÕES.....	14
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	15
Anexo I.....	16
Anexo II.....	18
Apêndice I.....	19

1. INTRODUÇÃO

Materiais hiperelásticos, que possuem uma grande deformação e normalmente não linear, na maioria dos casos são modelados somente para o estado de carregamento sem amolecimento ou dissipação de energia. Além disso, muitos desses materiais apresentam curvas de carregamento e descarregamento não coincidentes devido aos efeitos de histerese. A criação de modelos que fornecem dados para a histerese desses materiais normalmente é realizada através de diversos ensaios mecânicos, Zrida (2009). Esse tipo de modelização produz bons resultados, porém, dispendem de um tempo excessivo para obtenção das constantes do modelo.

Este trabalho propõe uma maneira de simplificar a obtenção das constantes que para modelar a histerese para materiais hiperelásticos. Aqui se propõe uma maneira similar a Dorfmann (2007), que analisa o estado de carregamento do material e possibilita que a curva de carregamento e posterior descarregamento do material não seja a mesma. Porém uma maneira que possa ser adaptada para qualquer modelo já existente sem que o mesmo perca suas características de adaptação de curvas. Foi analisado o modelo proposto por Dorfmann (2007) e então aplicado a outros materiais. Para o polipropileno (PPC7712) apresentou alguns problemas em alguns casos, e para o Látex foi possível a caracterização adequada do mesmo. Por isso se propõe uma adaptação do modelo acima descrito para aumentar-se a faixa de utilização do modelo e sua fácil aplicação a modelos já existentes.

Para realizar a análise foram utilizados os modelos Hoss e Marczak para pequenas e grandes deformações, propostos por Hoss (2009). Modelos que como será apresentado a seguir são baseados em um estudo dos termos de modelos tradicionais para materiais hiperelásticos que não levam em conta a histerese

Este trabalho tem por objetivo generalizar o modelo de histerese proposto por Dorfmann (2007). Para isso foi desenvolvida em Matlab uma rotina que permita o ajuste de curvas para materiais hiperelásticos não conservativos através da adição de uma função de dissipação de energia. Contudo não se deseja propor um novo modelo com essa capacidade, mas uma maneira de adaptar modelos já existentes.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A base de pesquisa foram artigos científicos, teses e dissertações. O modelo que foi escolhido como base de estudos foi proposto na dissertação de Hoss (2009). Ambos modelos foram por ele apresentados, sendo que são similares e se baseiam no estudo dos termos dos modelos predecessores e escolha dos termos mais representativos do comportamento dos materiais para pequenas e grandes deformações. Sendo pequenas deformações consideradas inferiores a 100%, Hoss (2009).

2.1. Modelos Hiperelásticos

O modelo para pequenas deformações (HMLSI) “foi baseado em um Power-law, que consegue descrever bem a deformação globalmente e em um termo exponencial que ajuda para pequenas deformações” (Hoss). Sua equação de energia tem a seguinte forma:

$$W = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(I_1-3)}) + \frac{\mu}{2b} \left(\left(1 + \frac{b(I_1-3)}{n} \right)^n - 1 \right) \quad (2.1)$$

onde α , β , μ , b e n são constantes relativas ao material, e I_1 é o primeiro invariante de deformação para o ensaio realizado.

Para grandes deformações (HMHSI) a principal diferença é o acréscimo de um termo com o segundo invariante de deformações, “o que agrega maior precisão e maior confiabilidade ao modelo” (Hoss). O termo logarítmico foi agregado, pois “apresenta bons

resultados mesmo que seja para um nicho de materiais” (Hoss). Segue equação para o HMHSI:

$$W = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(I_1-3)}) + \frac{\mu}{2b} \left(\left(1 + \frac{b(I_1-3)}{n} \right)^n - 1 \right) + C_2 \ln \left(\frac{1}{3} I_2 \right) \quad (2.2)$$

onde α , β , μ , b , n e C_2 são constantes relativas ao material, I_1 é o primeiro invariante de deformação e I_2 o segundo invariante de deformações para o ensaio realizado. Para maiores informações sobre o modelo verificar o Anexo I.

A utilização de invariantes permite que se proponha uma equação e que com a modificação dos invariantes se altere também o estado de carregamento do material. Isso permite que se ajustem curvas de carregamento em diversos estados de tensão simultaneamente através de um erro global (soma dos erros de todos os ensaios). Porém isto não é o objetivo deste estudo.

Como neste trabalho é apenas analisado o comportamento em tração do corpo do material são apresentadas aqui as equações e a metodologia empregada para que se obtenha as equações de tensão e deformação que propiciam o ajuste de curvas. Para tanto se realiza o estudo de uma lâmina fina incompressível. Este caso pode ser obtido assumindo-se que $\sigma_{22}=\sigma_{33}=0$. O campo de alongamentos (Figura 2.1) resulta:

$$\lambda_1 = \lambda \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (2.3)$$

onde λ é a deformação utilizada para o caso de ajustes de curva para materiais hiperelásticos.

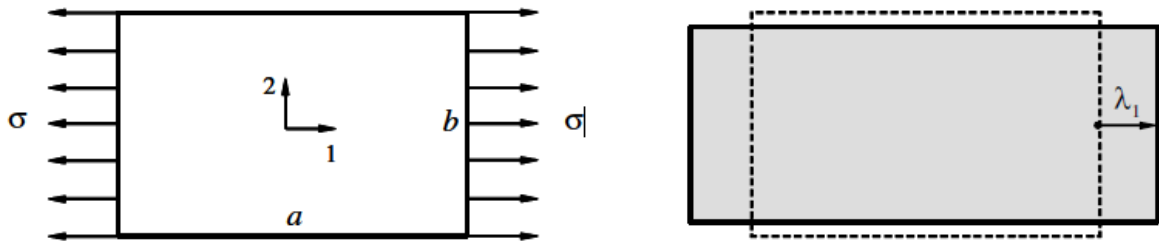


Figura 2.1 – Extensão axial de uma lâmina incompressível

Logo:

$$\begin{aligned} C &= F^T F \\ B &= F F^T \\ I_1 &= \text{tr}(C) = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \\ I_2 &= \frac{1}{2} ((\text{tr } C)^2 - \text{tr } C^2) = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde tr é o traço; F é o gradiente de deformação; C e B são os tensores direito e esquerdo de Cauchy-Green; I_1 e I_2 são os invariantes da função. Mais detalhes Marczak (2006).

$$p_0 = 2 \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_1} - 2\lambda \frac{\partial W}{\partial I_2} \quad (2.5)$$

Então se encontra a tensão axial de Cauchy que é dada por:

$$\sigma = \sigma_{11} = 2 \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (2.6)$$

Essa equação descreve o comportamento do material em tração uniaxial. Existem expressões similares para os casos de tração biaxial e cisalhamento puro.

2.2. Modelo Hiper-visco-histerético

Existem basicamente duas maneiras de fazer a predição do comportamento histerético em materiais não conservativos. Uma delas proposta por Zrida (2009) utiliza-se de um modelo hiper-visco-histerético (HVH). O qual realizou um estudo com polipropileno de diferentes composições. Nessa abordagem cada um dos efeitos é modelado separadamente conforme a figura a seguir:

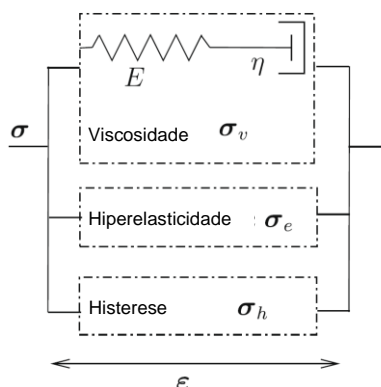


Figura 2.1 - Modelagem utilizada no modelo HVH.

O equacionamento básico é apresentado a seguir, sendo que o equacionamento de cada componente de tensão pode ser visto no Anexo II.

$$\varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_v = \varepsilon_h \quad \sigma = \sigma_e + \sigma_v + \sigma_h \quad (2.7)$$

Apesar dos bons resultados encontrados por Zrida (2009) se trata de uma abordagem complexa e para pequenas deformações (menores de 100%). Não se tem certeza de que o modelo proposto teria capacidade de predição suficiente para grandes deformações. Além disso, seria necessária a realização de três ensaios mecânicos para definir os parâmetros das equações. Ensaios de tração, ensaio de relaxação e ensaios de carga e descarga do material. Sendo que isso depende de mais tempo, principalmente pelo fato da demora de alguns destes ensaios.

2.3. Modelo de Dorfmann

A outra maneira mais simplificada de realizar esse tipo de abordagem foi proposta por Dorfmann (2006), que apesar de ser um pouco mais antiga apresenta bons resultados para materiais com uma faixa de deformação maior do que os propostos por Zrida (2009). Dorfmann (2006) aplicou seu modelo para a simulação do comportamento do músculo do artrópode *Manduca sexta*.

Sua abordagem é mais significativa a este trabalho, pois é possível aplicar esta metodologia a diversos modelos hiperelásticos já existentes. Seu modelo acrescenta dois termos a equação de energia W , e assume a forma apresentada na equação (2.8).

$$\widehat{W}(I, \eta) = \eta W(I) + \phi(\eta) \quad (2.8)$$

onde I representa os invariantes, η é a função que representa o amolecimento do material, que é armazenada em ϕ .

Quando se deriva a equação de energia (2.8) a fim de se obter a tensão, o termo ϕ assume o valor de zero. Isso se deve ao fato de ele não depender dos invariantes de

deformação e conseqüentemente da deformação em si, por isso, como pode ser visto na equação (2.9), depende apenas de η e da tensão original do modelo hiperelástico.

$$\hat{\sigma} = \eta \frac{\partial \hat{W}}{\partial I} = \eta \sigma \quad (2.9)$$

onde σ é a tensão obtida pela equação original de energia e $\hat{\sigma}$ representa a tensão considerando a nova forma de energia.

Para que essa solução funcione é necessário que a função η tenha um valor unitário no carregamento e que este valor varie no descarregamento. Além disso, η deve ter um valor unitário nos pontos extremos (deformação mínima e máxima) para que a deformação seja a mesma nesses pontos. Dorfmann propõe a função mostrada na equação (2.10).

$$\eta = 1 - \frac{1}{r} \tanh\left(\frac{\hat{W}_m - \hat{W}_0(\lambda)}{m}\right) \quad (2.10)$$

onde r e m são constantes do material, \hat{W}_m é a energia na máxima deformação e $\hat{W}_0(\lambda)$ é a energia calculada com a equação original no instante do carregamento. Assim, quando se está carregando o material η assume o valor unitário, visto que a energia máxima até determinado incremento é igual a energia máxima atingida pelo material. Na fase de descarregamento a energia máxima permanece a um valor constante e conforme varia-se a energia para a deformação dada tem-se uma variação no valor da função, simbolizando a dissipação de energia.

Assim tem-se uma energia igual na configuração de máxima deformação, além disso, a função η assume seu valor mínimo quando $\lambda=1$, que corresponde à configuração original do material.

$$\eta_{min} = 1 - \frac{1}{r} \tanh\left(\frac{\hat{W}_m}{m}\right) \quad (2.11)$$

Neste caso Dorfmann integrou a equação $\phi(\eta)$ para que fosse possível o cálculo da energia de deformação em cada ponto do ensaio, equação (2.12).

$$\phi(\eta) = -m(\eta - 1) \tanh^{-1}(r(\eta - 1)) - \hat{W}_m(\eta - 1) - \frac{m}{2r} \log(1 - r^2(\eta - 1)^2) \quad (2.12)$$

Pode-se verificar que todos os termos da Equação (2.5) são multiplicados por $(\eta-1)$, garantindo dessa maneira que quando $\eta=1$ (na fase de carregamento), este termo tende a zero.

2.4. Estimador de erro

Para comparar os resultados entre os métodos ensaiados foi utilizada a mesma metodologia empregada por Hoss (2009). Essa estimativa de erro deve ser realizada a fim de que se possa comparar os resultados obtidos e definir a curva de carregamento que gere menor erro. Essa função, equação (2.13), só pode ser utilizada para comparar modelos para um mesmo material no mesmo intervalo de deformação.

$$R^2 = 1 - \frac{S_{reg}}{S_{Stot}} \quad (2.13)$$

Sendo R^2 o estimador de erro, quanto mais próximo de 1 menor o erro. S_{reg} e S_{Stot} podem ser vistas na equação (2.14).

$$\begin{aligned}
 S_{reg} &= \sum_{i=1}^n (t_e - t_t)^2 \\
 S_{tot} &= \sum_{i=1}^n (t_e - \bar{t}_e)^2
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

onde t_e e t_t representam os valores de tensão experimental e teórico respectivamente, já \bar{t}_e é o valor médio da tensão para o intervalo medido. Basicamente o erro R^2 é calculado a partir do somatório do quadrado das distâncias entre os pontos de tensão experimental e ajustados pela regressão não linear. Essa formulação pode ser utilizada para os mesmos dados experimentais e diferentes modelos.

3. METODOLOGIA

Foram encontradas duas soluções para se realizarem os ajustes de curva de acordo com os objetivos deste trabalho. A utilização de duas funções diferentes para carregamento e descarregamento de curva do mesmo modelo hiperelástico não faz parte do objetivo deste trabalho. Isso quer dizer que não se deseja utilizar a mesma equação do modelo hiperelástico com constantes diferentes para o carregamento e descarregamento, isso acarretaria em constantes diferentes para o mesmo material durante um mesmo intervalo de deformações. A seguir são apresentadas as metodologias utilizadas para os estudos.

3.1. Soma de uma função à equação principal

A primeira solução adotada foi de utilizar uma função dependente de λ que gere a tensão para a fase de carregamento. Assim simulando um amolecimento do material para modelar a histerese. Para uma melhor explicação é apresentada a dedução utilizando o modelo HMHSI.

$$\sigma = HMHSI(\lambda) \tag{3.1}$$

Para a etapa de descarregamento é adicionada uma segunda função com o intuito de atuar na forma de dissipar energia através do amolecimento do material.

$$\sigma = HMHSI(\lambda) - F(\lambda) \tag{3.2}$$

Sendo σ a tensão, λ a deformação, $HMHSI$ a função apresentada anteriormente e F é a função que deve ser desenvolvida neste trabalho. Foram realizados dois ajustes de curva para cada caso, para os intervalos de carregamento e descarregamento.

Após os estudos devem-se verificar as formas que a função de dissipação deve assumir, sendo essa definida de forma experimental. Foram utilizados ensaios encontrados nos artigos de Niemczura (2011), Tomita (2008) e Vandenbroucke (2010) com esse propósito.

Os ensaios tensão x deformação utilizados são apresentados abaixo:

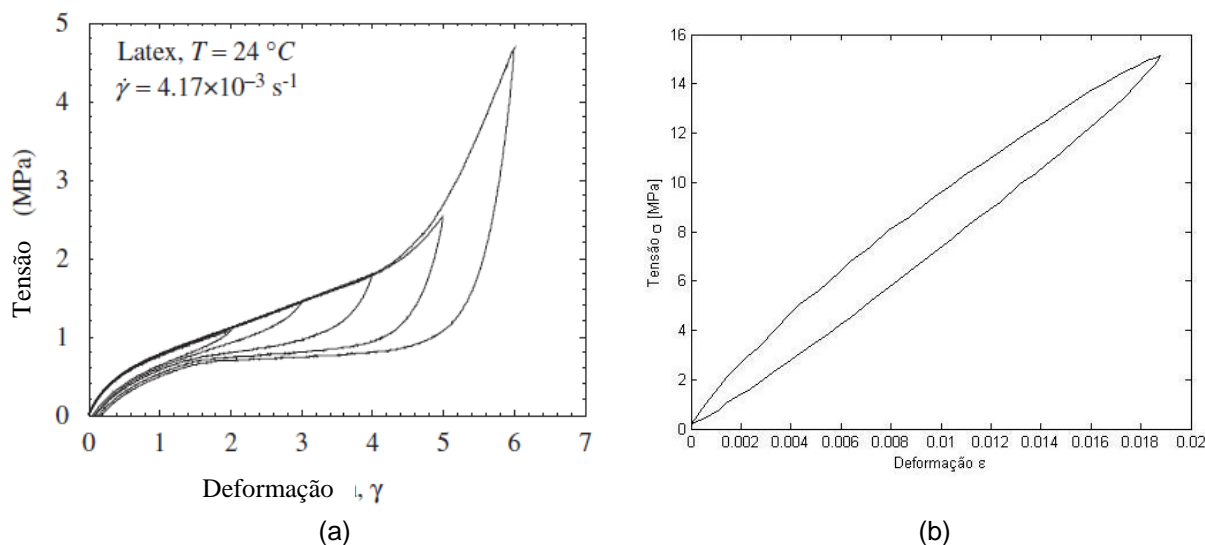


Figura 3.1: Ensaios de tração: (a) Borracha natural de látex (Niemczura); (b) PPC7712 (Zrida).

A dissipação de energia total é calculada como a diferença entre as duas curvas em função da deformação, ou seja, é a área abaixo da curva. A energia total foi estimada através de pontos experimentais das curvas na mesma deformação. É possível verificar que a função varia de acordo com o material. Idealmente o modelo de dissipação deve ter o menor número de variáveis possível. Essa curva é representada na Figura 3.2 que mostra a complexidade que a energia dissipada pode ter (diferença de energia da curva de carregamento e descarregamento).

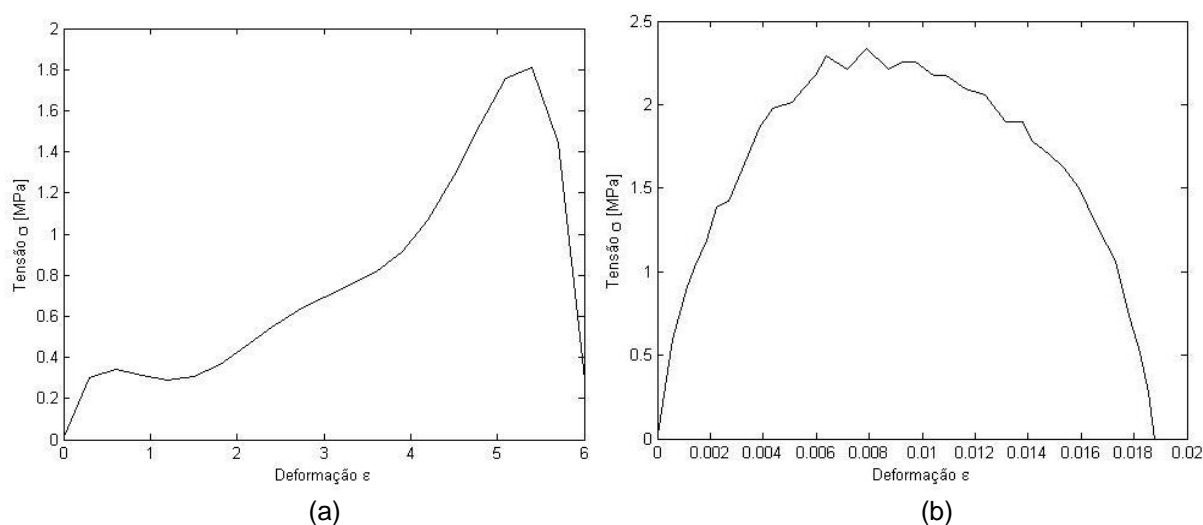


Figura 3.2: Energia dissipada na carga e descarga: (a) Borracha Natural de látex para a máxima deformação da Figura 1; (b) PPC7712.

As tentativas de definição da energia foram feitas com base em funções polinomiais. Essas funções polinomiais são de ordem muito grande para que seja possível um ajuste preciso. Nesse tipo de funções existem descontinuidades nas extremidades, deformações mínimas e máximas.

3.2. Modelo de Dorfmann

Já o modelo proposto por Dorfmann (2006), não apresenta essas descontinuidades que o modelo proposto anteriormente apresenta. Além de que, essa abordagem gera uma função para todo o intervalo, carregamento e descarregamento.

Para adaptar a função e obter-se melhor resultados foi adicionado um termo Power-law ao modelo. Por isso foi adicionada uma constante ao modelo de Dorfmann (2006), sendo que essa foi chamada de z . Com isso foram propostas algumas funções e analisados seus resultados para chegar a uma função que descreva bem o fenômeno em estudo. As equações propostas serão apresentadas juntamente com seus resultados para uma melhor visualização dos resultados.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1. Polinomial de grau 3

Para o primeiro tipo de modelo testado, aquele seguindo a equação (3.1), foram obtidos os seguintes ensaios utilizando-se F como uma função polinomial de grau 3, que causa o amolecimento do material, equação (4.1).

$$F(\lambda) = C_1 \lambda^3 + C_2 \lambda^2 + C_3 \lambda + C_4 \quad (4.1)$$

onde λ a deformação, C as constantes e F a função que mostra a diferença entre o carregamento e o descarregamento.

Esse modelo gerou bons resultados para pequenas deformações como pode ser visto na Figura 4.1.

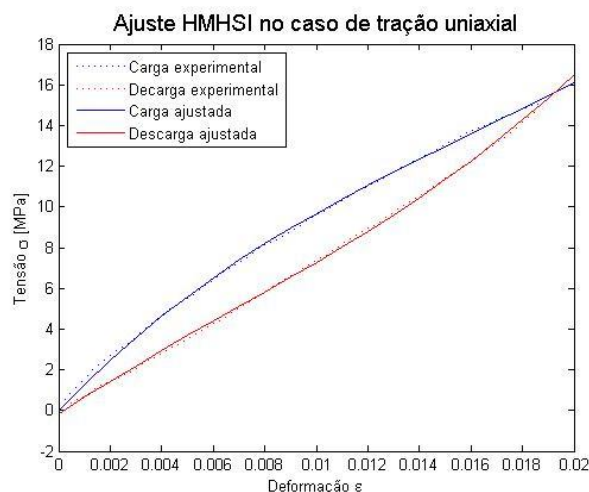


Figura 4.1: Ensaio experimental e dados ajustados para PPC7712 com uma função polinomial de grau 3.

Porém pode-se ver que os resultados não foram satisfatórios para grandes deformações, quando utilizado com o Látex obteve-se o resultado apresentado na Figura 4.2.

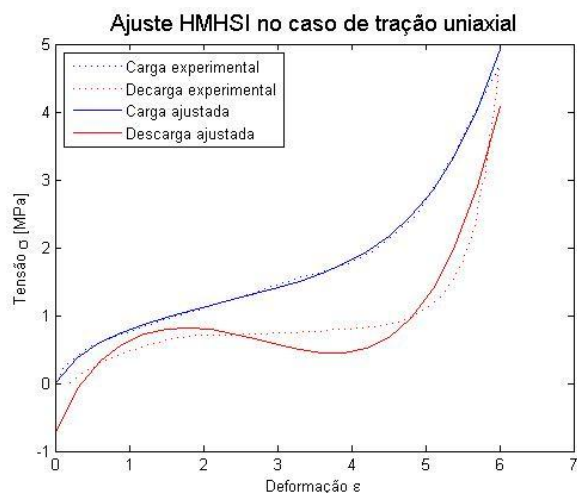


Figura 4.2: Ensaio experimental e dados ajustados para Latex com uma função polinomial de grau 3

4.2. Polinomial grau 6

Para melhorar os resultados o número de constantes foi sendo alterado até uma polinomial de grau seis, que gerou bons resultados para o Látex. Que nesse caso foi ensaiado até uma deformação de até 600%.

$$F = C_1 x^6 + C_2 x^5 + C_3 x^4 + C_4 x^3 + C_5 x^2 + C_6 x^1 + C_7 \quad (4.2)$$

E os resultados obtidos podem ser vistos na Figura 4.3.

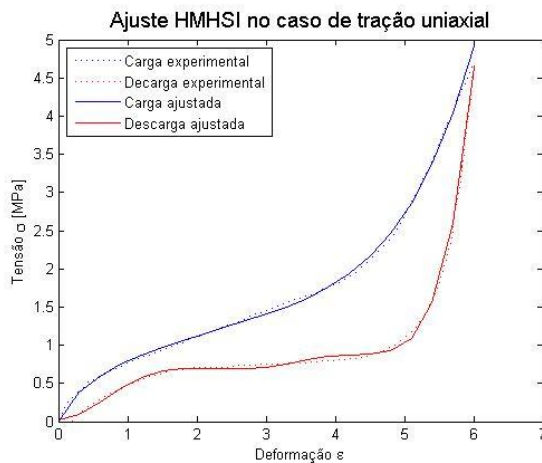


Figura 4.3: Ensaio experimental e dados ajustados para Latex com uma polinomial de grau 6

Para garantir que essa polinomial ainda pode ser utilizada em pequenas deformações, faz-se o ajuste de curvas para o PPC7712. Pode se verificar que não se perdeu adaptabilidade da curva na Figura 4.4.

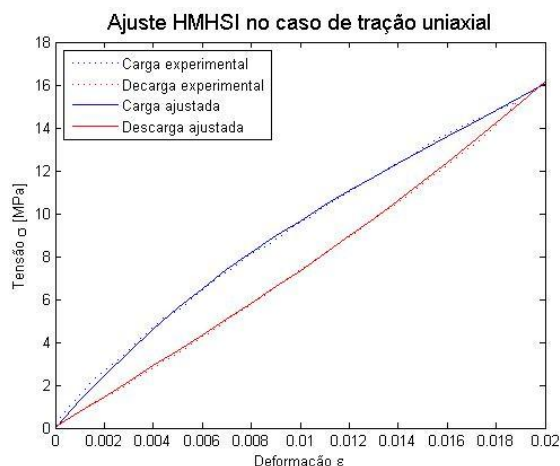


Figura 4.4: Ensaio experimental e dados ajustados para PPC7712 com polinomial de grau 6

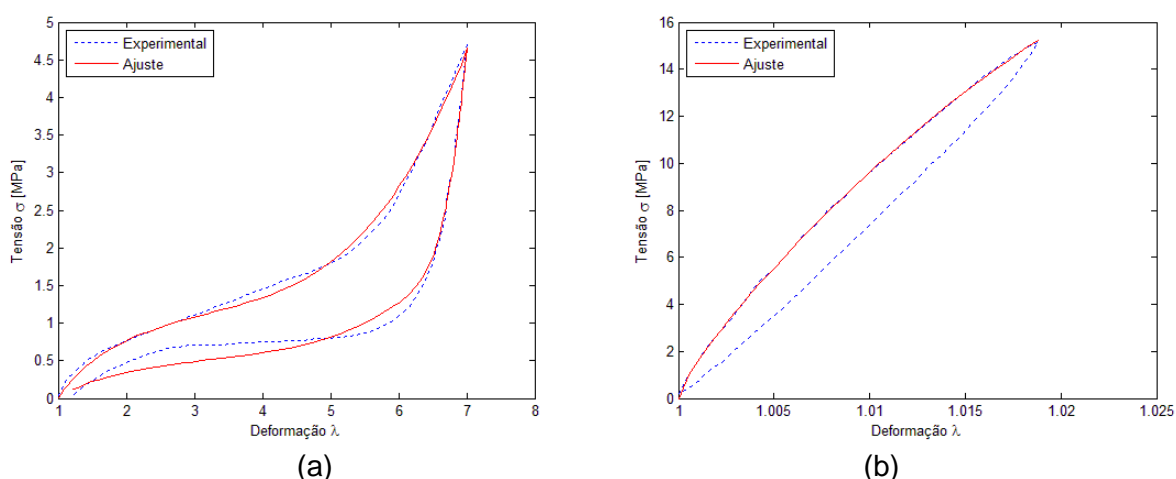
Porém como a polinomial de grau 3 esta também tem uma descontinuidade nos pontos extremos, além de que para garantir as intersecções nos pontos onde deveriam existir, seria necessário fixar constantes. O que diminuiria o número de constantes para realmente simular o comportamento ou acarretaria em um aumento do número de constantes. Sendo assim outro tipo de abordagem foi necessária. Não foram realizados mais testes com essa metodologia devido a sua complexidade e a necessidade de muitas constantes.

4.3. Dorfmann modificado

Como a abordagem polinomial não apresenta uma boa constância principalmente nos extremos das curvas optou-se por abandonar este modelo e seguir para o modelo proposto por Dorfmann (2007).

Nesta seção serão apresentados os resultados referentes ao fator de correção de Dorfman (2007), que pode ser verificado na equação (2.10), assim como a proposição de melhorias nesse fator. Essas melhorias tem o intuito de aumentar a precisão do ajuste e deixar o modelo mais robusto.

Na Figura 4.5 são apresentados os resultados obtidos para o Látex e o PPC7712.



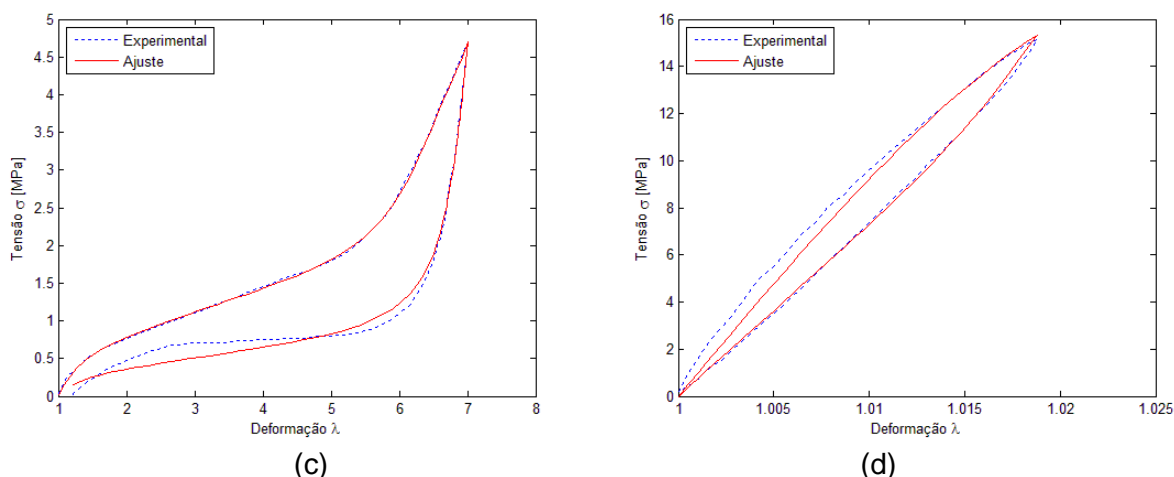


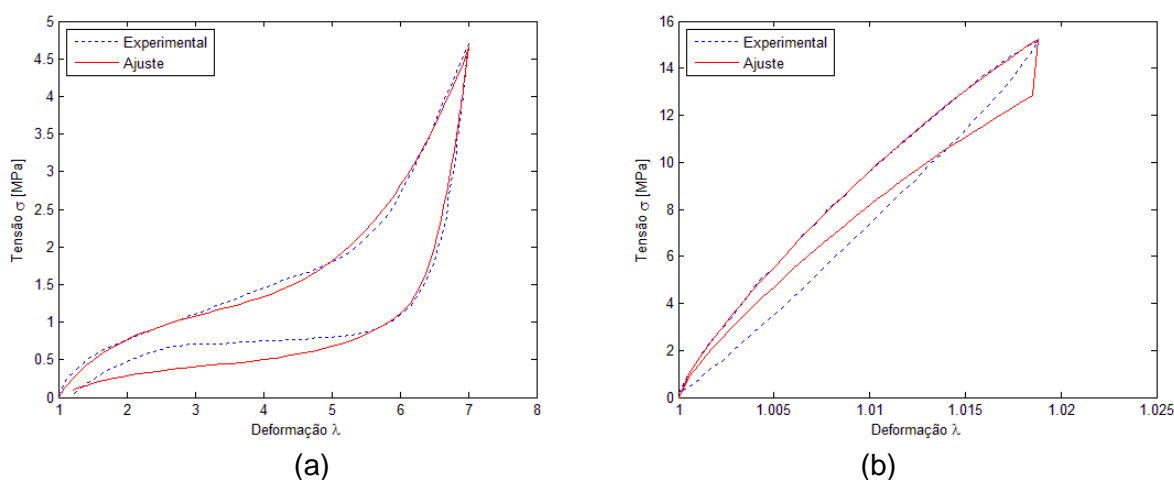
Figura 4.5 – Ajuste dos dados para os modelos HMLS e HMHSI considerando a equação (4.3) para a histerese (a) Látex ajustado com HMLS. (b) PPC7712 ajustado com HMLS. (c) Látex ajustado com HMHSI. (d) PPC7712 ajustado com HMHSI.

Como se pode verificar os resultados para pequenas deformações parecem bastante promissores, porém quando se trata de grandes deformações os resultados ainda podem ser melhorados.

Sendo que a primeira alteração proposta foi de adicionar um termo Power-law para melhorar a precisão do sistema, por isso foi adicionada a constante z ao modelo. A equação (4.4) mostra a alteração realizada.

$$\eta = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^z \tanh\left(\frac{\widehat{W}_m - \widehat{W}_0}{m}\right) \quad (4.4)$$

O que como se pode verificar na Figura 4.6 não acrescentou mudanças significativas para os resultados. Obteve-se, porém, uma vantagem que foi a para o PPC7712 ajustado com o HMLS, onde antes não foi possível ajuste agora se tem um resultado histerético, mesmo que sua forma não seja a mais adequada.



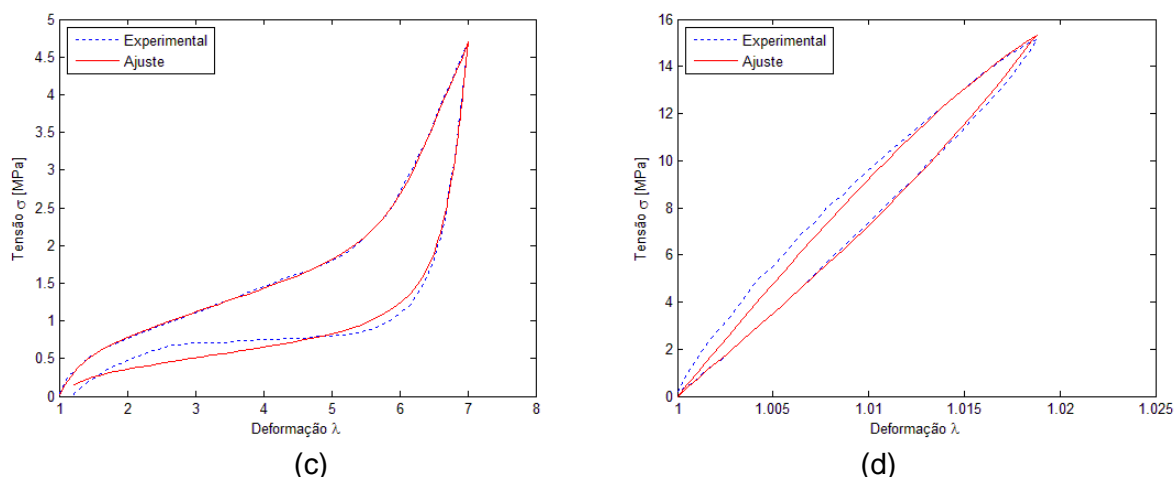
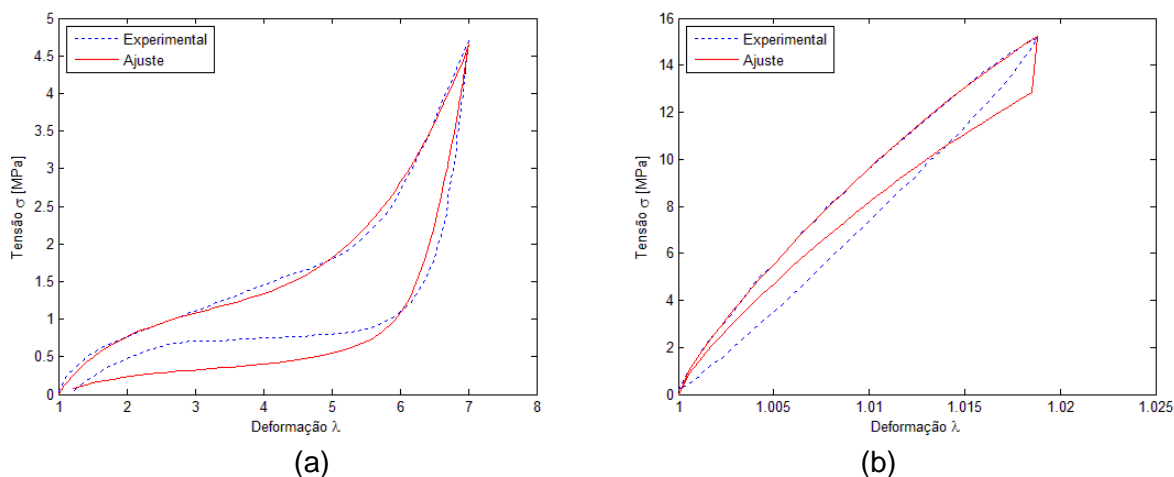


Figura 4.6 – Ajuste dos dados para os modelos HMLSI e HMHSI considerando a equação (4.4) para a histerese (a) Látex ajustado com HMLSI. (b) PPC7712 ajustado com HMLSI. (c) Látex ajustado com HMHSI. (d) PPC7712 ajustado com HMHSI.

Os resultados se apresentaram melhores, porém a predição do carregamento em relação ao modelo original ainda é precária, por isso tentou-se aprimorar adicionando o termo m ao Power-law.

$$\eta = 1 - \left(\frac{m}{z}\right)^z \tanh\left(\frac{\widehat{W}_m - \widehat{W}_0}{m}\right) \quad (4.5)$$

O que não gerou melhorias ao modelo (ver Figura 4.7). Aqui então se chegou a conclusão de que a simples adição de constantes à equação não aumentariam a precisão da predição da histerese.



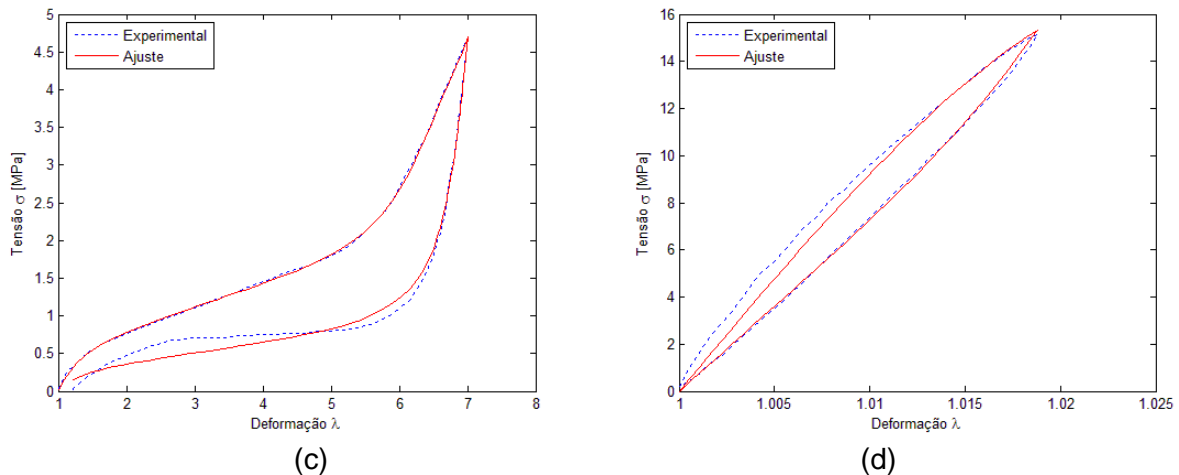


Figura 4.7 – Ajuste dos dados para os modelos HMLSI e HMHSI considerando a equação (4.5) para a histerese (a) Látex ajustado com HMLSI. (b) PPC7712 ajustado com HMLSI. (c) Látex ajustado com HMHSI. (d) PPC7712 ajustado com HMHSI.

Através do estudo do gráfico $\eta \times tempo$ da Figura 4.8 (a) verificou-se que a tangente hiperbólica do fator η estabiliza de maneira brusca, criando um patamar no final da fase de descarregamento. Vale salientar que o patamar inicial, aquele estabilizado em 1 indica a fase de carregamento onde a equação inicial de energia não se altera. Para solucionar o problema, propôs-se uma inclusão do termo de energia fora da tangente hiperbólica.

O objetivo desse segundo termo é a variação do patamar de descarga, para que o modelo possa se adaptar melhor à curva de descarregamento. Como antes todos os termos fora da tangente hiperbólica eram constantes não havia possibilidade suficiente de adaptação do modelo.

Por isso a equação (4.4) foi modificada colocando-se a mesma diferença de energia do termo interno a tangente hiperbólica com o intuito de modificar o segundo patamar da tangente hiperbólica, equação (4.6), e garantir melhor adaptabilidade ao modelo. A adaptabilidade dessa nova função proposta pode ser vista na Figura 4.8.

$$\eta = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{z(\hat{W}_m - \hat{W}_0)} \tanh\left(\frac{\hat{W}_m - \hat{W}_0}{m}\right) \quad (4.6)$$

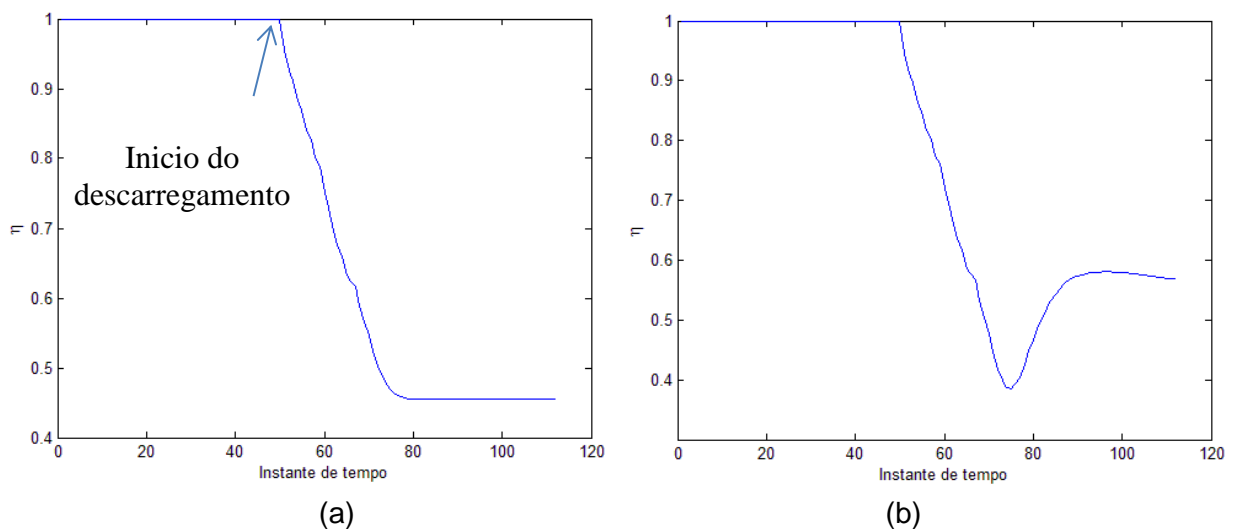


Figura 4.8 – Variação do fator η em função do tempo calculado para Látex utilizando o HMHSI. (a) resultado para o modelo de Dorfmann, (b) resultado para o modelo proposto, equação (4.6).

Como se pode ver na Figura 4.9, as curvas de descarregamento foram melhoradas em relação aos dados anteriormente apresentados. Essa mudança fica mais acentuada quando se utiliza na predição do Látex.

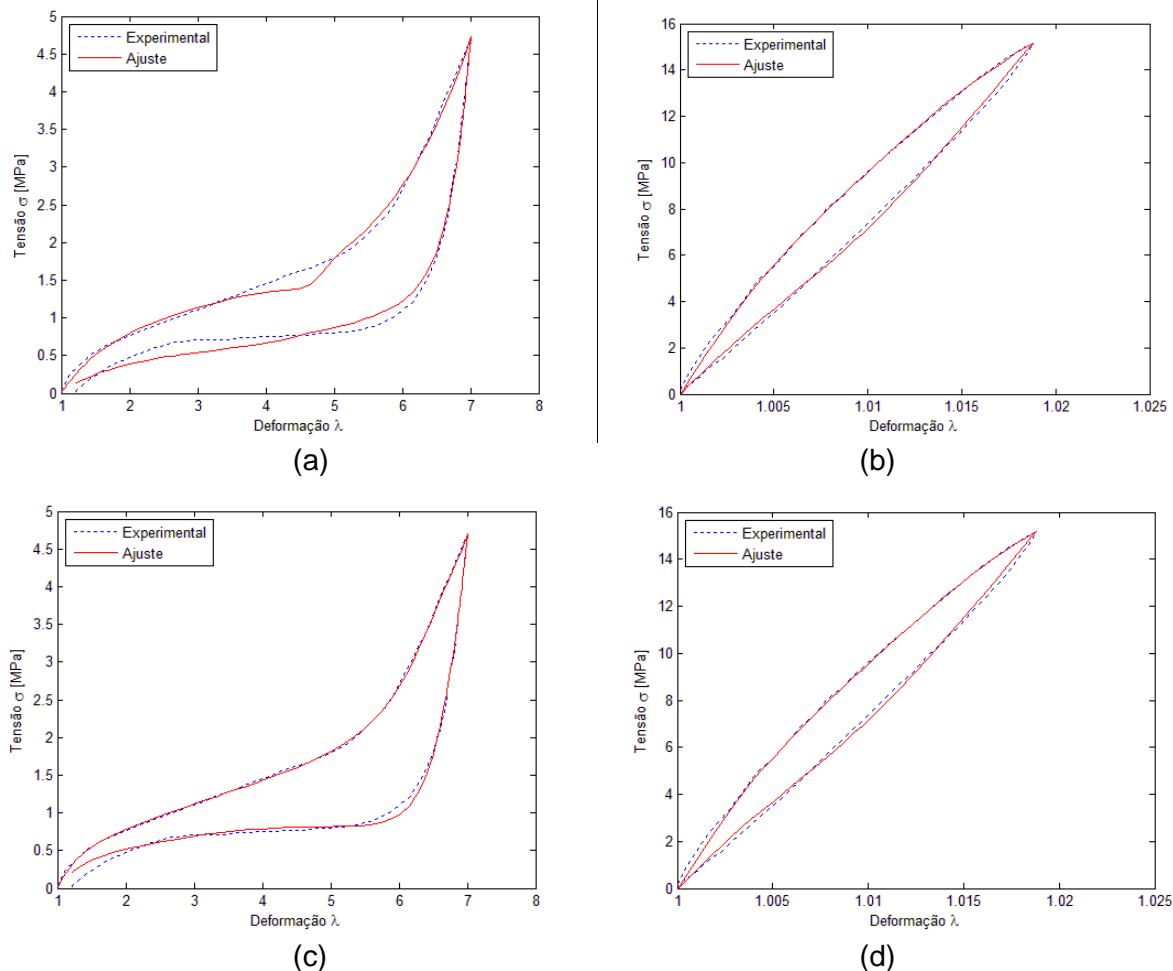


Figura 4.9 – Ajuste dos dados para os modelos HMLSI e HMHSI considerando a equação (4.6) para a histerese (a) Látex ajustado com HMLSI. (b) PPC7712 ajustado com HMLSI. (c) Látex ajustado com HMHSI. (d) PPC7712 ajustado com HMHSI.

4.4. Comparação dos modelos calculados

Então para verificar qual foi o método mais efetivo foi calculado o erro conforme apresentado na seção 2.4. Os resultados pode ser verificado na Figura 4.10 e Tabelas 4.1 e 4.2.

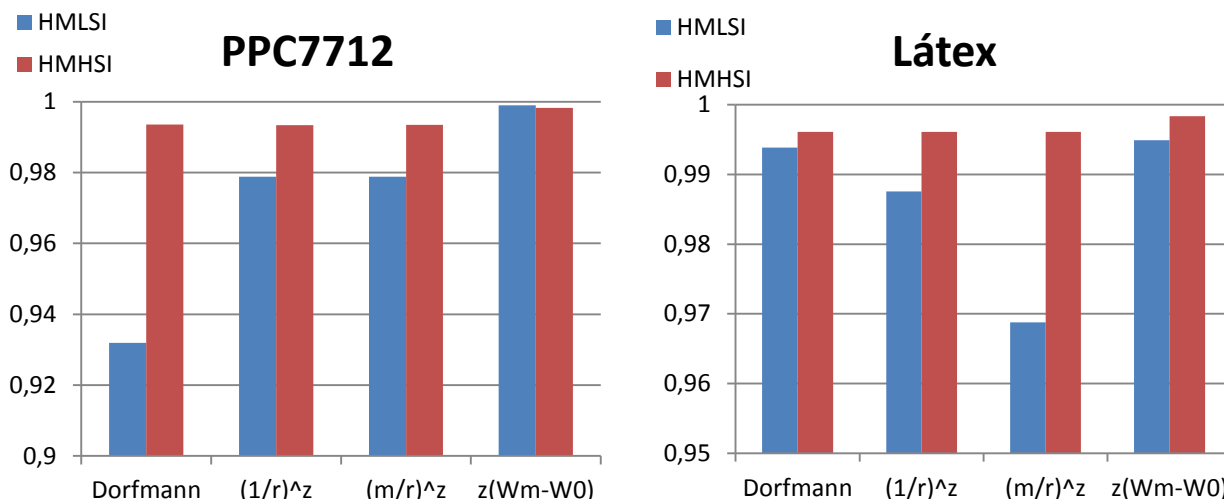


Figura 4.10 – Erros encontrados para o PPC7712 e Látex

Com isso pode-se verificar que a melhor opção de simulação dos resultados é o Modelos HMHSI e que todas as alternativas apresentadas, na análise global do erro, pouca variação quando utilizados com este modelo. Além disso, a histerese não pode ser bem representada pelo modelo HMLSI original nem com os primeiros propostos.

Considerando-se os erros calculados apresentados nas Tabelas 4.1, para o Látex, obteve-se o melhor desempenho com o HMHSI utilizando o modelo proposto pela equação (4.6). Para os dados da Tabela 4.2, PPC7712, obteve-se um desempenho muito semelhante quando se tratava do HMHSI e HMLSI com a equação (4.6) definindo a histerese.

Devido a esse resultado com erro menor quando utilizado o modelo HMHSI vale dizer que este modelo tem uma capacidade de adaptação superior ao modelo HMLSI na maioria dos casos. Mesmo tendo sido idealizado para grandes intervalos de deformação é capaz de se adaptar a pequenos intervalos com bons resultados.

As Tabelas, 4.1 e 4.2, apresentam os mesmos resultados que a Figura 4.10, porém pode-se observar que todos os resultados são muito similares, o que pode levar ao questionamento do método de cálculo do erro. Porém Hoss (2009) realizou um estudo com diversos modelos e quando se tem uma adaptação de curva grosseira ou modelos inadequados para o material, o erro tende a ser maior.

Tabela 4.1 – Resultado do estimador de erro para o Látex

HMLSI				HMHSI			
Original	(1/r) ^z	(m/r) ^z	z(Wm-W0)	Original	(1/r) ^z	(m/r) ^z	z(Wm-W0)
0,993866	0,987563	0,968757	0,994915	0,996098	0,996098	0,996098	0,998372

Tabela 4.2 – Resultado do estimador de erro para o PPC7712

HMLSI				HMHSI			
Original	(1/r) ^z	(m/r) ^z	z(Wm-W0)	Original	(1/r) ^z	(m/r) ^z	z(Wm-W0)
0,931904	0,978816	0,978816	0,998971	0,993531	0,993353	0,993518	0,998257

5. CONCLUSÕES

O presente trabalho apresentou a inclusão dos efeitos não conservativos em modelos hiperelásticos incompressíveis, através da utilização de termos aditivos a equações já existentes. Pode-se verificar que a abordagem com funções polinomiais geram resultados inadequados para o tipo de modelagem aqui apresentada. São modelos que necessitam de muitas constantes e muitos pontos de controle para que não produzam oscilações indesejadas na função, o que pode acarretar um excessivo esforço computacional. Além de que as

descontinuidades que esse tipo de equação pode causar nos extremos da equação não propiciam a utilização em softwares computacionais.

Referente aos modelos hiperelásticos pode se concluir que o modelo HMHSI apresentou melhor adaptabilidade em quase todas as simulações. Houve uma exceção (para o PPC7712), porém a diferença foi pequena (ver Figura 4.10 e Tabela 4.1), sendo assim, quando um problema dessa natureza se apresentar é sugerível optar pelo HMHSI.

Finalmente, com o modelo aqui proposto na equação (4.6) obtém-se uma capacidade de adaptação superior aos outros modelos testados, e a maneira de implementá-la permanece a mesma. Esse tipo de modelagem é fácil de ser empregada em modelos já existentes, sendo necessário para tanto a equação da energia em função da deformação ou dos invariantes de deformação. O que torna uma maneira viável e prática para predição de comportamentos não conservativos com apenas um ensaio.

Para trabalhos futuros sugere-se aplicar essa modelagem da histerese para outros tipos de materiais e outros modelos, com o intuito de validar o modelo aqui proposto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dorfmann, A., Trimmer, B. A., Woods Jr, W. A. **“A constitutive model for muscle properties in a soft-bodied arthropod”**, J. R Soc. Interface, vol 4, pp 257-269, 2007.

Hoss, L. **“Modelos constitutivos hiperelásticos para elastômeros incompressíveis : ajuste, comparação de desempenho e proposta de um novo modelo”**, 2009. 315f. Dissertação (Mestrado) – Programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2009.

Marczak, R., Gheller Jr, J., Hoss, L. **“Caracterização de elastômeros para simulação numérica”**, SENAI-RS, 2006.

Niemczura, J., Ravi-Chandar, K. **“On the response of rubber at high strain rates-III. Effect of hysteresis”**, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 59, pp 457-472, 2011.

Ogden, R. W. **“Non-linear Elastic Deformations”**, Dover, 1984.

Ogden, R. W., Roxburgh, D.G. **“A pseudo-elastic model for the Mullins effect in filled rubber”**, Proc. R. Soc. Lond. A, 445, pp 2861-2877, 1999.

Tomita, Y., Azuma, K., Naito, M. **“Computational evaluation of strain-rate-dependent deformation behavior of rubber and carbon-black-filled rubber under monotonic and cyclic strain”**, International Journal of Mechanical Science, vol. 50, pp 856-868, 2008.

Vandenbroucke, A., Laurent, H., Aït Hocine, N., Rio, G. **“A Hyperelasto-Visco-Hysteresis model for an elastomeric behaviour: Experimental and numerical investigations”**, Computational Materials Science, vol. 48, pp 495-503, 2010.

Zrida, M., Laurent, H., Rio, G., Pimbert, S., Grolleau, V., Masmoudi, N., Bradai, C. **“Experimental and numerical study of polypropylene behavior using a hyper-visco-hysteresis constitutive law”**, Computational Materials Science, vol 45, pp 517-527, 2009.

ANEXO I: Modelos Hoss e Marczak

A família de modelos HMI (Hoss e Marczak incompressível) foi desenvolvida com o intuito de generalizar uma expressão para energia de deformação que fosse aplicável a uma apreciável gama de elastômeros, representando com fidelidade o comportamento da curva $t \times e$ e tanto para pequenas como grandes deformações. Alexander (1968) empregou o mesmo conceito aqui proposto, para o desenvolvimento de seu modelo constitutivo. Trata-se de um modelo heurístico, gerado com base na observação do desempenho dos modelos estudados por Hoss (2009). A idéia básica foi manter os termos, na expressão de W , que sabidamente produziam bem a forma geral da curva $t \times e$, ou seja, apresentar amolecimentos a médias deformações e enrijecimento pronunciado em altas deformações. Então foram identificados quais termos presentes nos diversos modelos hiperelásticos eram responsáveis por reproduzir bem efeitos secundários, em particular a significativa mudança de rigidez em pequenas deformações ($0 \leq e \leq 100\%$). A base da família é modelo *power-law* de Knowles (1977), ao qual são somados termos responsáveis por conferir ao modelo as características desejadas para toda a faixa de alongamentos. Propõe-se duas versões para este modelo, ambas geradas por modificações das equações básicas do modelo de Knowles:

HMLSI – Pequenas deformações:

O modelo HMLSI possui formulação híbrida e consiste na adição de um termo exponencial ao modelo *power-law* KI, responsável por melhorar a qualidade dos ajustes e previsões em pequenas deformações (Yeoh, 1993). Sua formulação é bastante geral, e permite a obtenção de outros modelos por simplificação. Baseado no 1º invariante de deformações, apresenta a seguinte expressão para a energia de deformação:

$$W = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(I_1-3)}) + \frac{\mu}{2b} \left(\left(1 + \frac{b(I_1-3)}{n} \right)^n - 1 \right) \quad (1)$$

Onde α , β , μ , b e n são as constantes do material. Adotando-se $\alpha=0$ obtém-se o modelo KI, tomando-se o limite de $n \rightarrow \infty$ da expressão (1), com $\alpha=0$ recai-se no modelo FI.

HMHSI – Grandes deformações:

A principal diferença deste modelo em relação ao modelo HMLSI está na consideração, na expressão da energia de deformação do 2º invariante de deformações. Isto reveste o modelo HMHSI de uma maior sensibilidade e precisão na predição do comportamento de materiais com o enrijecimento pronunciado em grandes deformações. Manteve-se o termo exponencial responsável por conferir precisão às previsões em baixa deformação. Expresso em termos de 1º e 2º invariantes de deformação, apresenta a seguinte expressão para energia de deformação:

$$W = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(I_1-3)}) + \frac{\mu}{2b} \left(\left(1 + \frac{b(I_1-3)}{n} \right)^n - 1 \right) + C_2 \ln \left(\frac{1}{3} I_2 \right) \quad (1)$$

Onde α , β , μ , b , n e C_2 são as constantes constitutivas do material. Adotando-se $\alpha=C_2=0$ obtém-se o modelo KI, tomando-se o limite de $n \rightarrow \infty$ da expressão (2), com $\alpha=C_2=0$ recai-se no modelo FI.

Os modelos propostos empregam uma formulação híbrida, entretanto, em função do termo dominante na expressão para energia de deformação ser o modelo KI, pode-se considerar os modelos como sendo *power-law*. Elegeu-se esta base devido aos bons resultados encontrados para o modelo de KI, e também pelo fato do modelo ser um dos precursores na modelagem do fenômeno de enrijecimento elevado em grandes deformações. Os termos somados a base originaltem por objetivo reproduzir os efeitos secundários, como

por exemplo, significativa mudança de rigidez em pequenas deformações. A parcela exponencial, responsável por conferir precisão em baixas deformações, foi empregada a partir da análise dos resultados dos ajustes e previsões do modelo YFI, que possui formulação semelhante. Já o termo logarítmico da equação (2) foi agregado em função dos excelentes resultados, embora para um nicho específico de material, e encontrados para o modelo PSI.

ANEXO II: Modelo Hiper-Visco-Elastico

Para simular o comportamento tensão-deformação, o novo modelo que leva em conta o comportamento do polímero e a sua dependência com a taxa de deformação é aqui apresentado. Teorias de elasto-visco-plasticidade normalmente consideram o comportamento visto de um nível macroscópico. Na teoria da viscoplasticidade baseada em sobre carregamento, por exemplo, polímeros semi-cristalinos são analisados como compósitos, visto que eles consistem de fases amorfa e cristalina, que resistem a deformação de maneiras diferentes.

O presente modelo HVH é baseado numa abordagem diferente dos modelos tradicionais. Ao invés de particionar a deformação, as diversas contribuições da tensão são superpostas.

Para levar em conta os diferentes comportamentos dos materiais, as componentes histeréticas, viscosas e hiperelásticas são consideradas independentes. Elas são a composição das três leis são escritas em paralelo de acordo com a seguinte relação:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v + \varepsilon_h \quad \sigma = \sigma_e + \sigma_v + \sigma_h \quad (1)$$

onde σ são as tensões de Cauchy, e ε as deformações de Alami, sendo os coeficientes e , v e h representam a componente elástica, viscosa e histerética respectivamente. São ainda necessárias grandes transformações para escrever e implementar o modelo. A seguir são apresentadas as modelagens para cada uma das componentes.

- Comportamento hiperelástico

É utilizada a seguinte função potencial:

$$W = \frac{K}{6} \ln^2(V) + \frac{Q_{0r}^2}{2\mu_0} \ln \left(\cosh \left(\frac{2\mu_0 Q_\varepsilon}{Q_{0r}^2} \right) \right) + \mu_\infty Q_\varepsilon^2$$

- Comportamento viscoelástico

Para modelar esse comportamento é utilizado uma generalização do modelo de Maxwell. O modelo de Maxwell é originalmente composto de uma queda viscosa e uma ascensão elástica. É utilizada somente a parte que resulta da distorção do tensor de taxa de deformação \bar{D} .

$$\bar{D} = \frac{1}{2G} \dot{S}_v + \frac{S_v}{\mu}$$

onde \dot{S}_v é a derivação no tempo de Oldroyd do tensor S . μ é a viscosidade, e $G=E/(1+\nu)$ é o módulo de elasticidade transversal.

- Comportamento histerético

O material é assumido como isotrópico. O modelo histerético adaptado para carregamento cíclico é composto por uma lei de comportamento incremental e um algoritmo de controle de inversão do carregamento. O tensor é obtido pela integração no tempo na relação constitutiva:

$$\dot{S}_h = 2\mu_h \bar{D} + \beta \phi(S_h, D) \Delta_r^t S_h$$

onde $\Delta_r^t S_h$ é a evolução da tensão entre a referência r e o tempo t ; β é relativo a intensidade de $\Delta_r^t S_h$; ϕ representa a dissipação não reversível intrínseca a taxa de deformação;

Para maiores informações sobre o modelo verificar Zrida (2006).

APENDICE I: Constantes calculadas

Na Tabela 1 são apresentadas as constantes obtidas durante a elaboração deste trabalho.

Tabela 1 – Constantes calculadas para os modelos

	HMHSI - PP	HMLSII-PP	HMHSI - Látex	HMLSII - Látex
Dorfmann				
α	237,6141613	84,05586261	0,08064101	0,238528487
β	22,47478057	153,4496313	-0,032637329	0,052488284
b	0,029623751	19893802,15	-0,074950486	16983,4264
n	-0,0002176	0,831946556	1,612157707	2,441980654
μ	200,5210988	-723,8147475	-0,153600182	-7,09E-09
$C2$	-71,1570279		-0,538945996	
r	3,592757119	23433736942	1,83830941	1,820231785
m	0,24556627	-5580544875	0,996724836	0,128967213
(1/r) ^z				
α	237,6141613	84,05586261	0,08064101	0,238528487
β	22,47478057	153,4496313	-0,032637329	0,052488284
b	0,029623751	19893802,15	-0,074950486	16983,4264
n	-0,0002176	0,831946556	1,612157707	2,441980654
μ	200,5210988	-723,8147475	-0,153600182	-7,09E-09
$C2$	-71,1570279		-0,538945996	
r	0,00E+00	0,000358631	0,072516218	0,00E+00
m	0,461853067	0,356581312	0,996569842	0,192136385
z	-0,00113517	-0,239191216	-0,232107499	-0,000660576
(m/r) ^z				
α	237,6141613	84,05586261	0,08064101	0,238528487
β	22,47478057	153,4496313	-0,032637329	0,052488284
b	0,029623751	19893802,15	-0,074950486	16983,4264
n	-0,0002176	0,831946556	1,612157707	2,441980654
μ	200,5210988	-723,8147475	-0,153600182	-7,09E-09
$C2$	-71,1570279		-0,538945996	
r	0,00E+00	0,153763635	7,229128486	0,00E+00
m	0,278710245	1,13E-64	0,997133988	0,284811865
z	-0,001684343	0,013053444	0,307349641	-0,000503917
z(Wm-W0)				
α	237,6141613	84,05586261	0,08064101	0,238528487
β	22,47478057	153,4496313	-0,032637329	0,052488284
b	0,029623751	19893802,15	-0,074950486	16983,4264
n	-0,0002176	0,831946556	1,612157707	2,441980654
μ	200,5210988	-723,8147475	-0,153600182	-7,09E-09
$C2$	-71,1570279		-0,538945996	
r	0,999961627	0,262445697	1,026171166	0,884624226
m	98,14314359	0,468513912	3,613453342	2,908625418
z	158,8980438	0,672386771	3,601317002	-0,944915801