Regularidade de Mínimos Locais de Funcionais com Comportamento Quadrático

Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum

Orientador:
Leonardo Prange Bonorino

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Porto Alegre, 21 de setembro de 2004

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus por ter me dado força de vencer mais esta etapa da minha vida, ao meu marido que me fez enxergar que nunca é tarde para se realizar um sonho, aos meus filhos por entenderem a minha ausência e por me darem tanta alegria.

Agradeço também aos meus colegas, Marnei, Lisiane, Ana, Maurício e em particular ao Josué, que sempre me ajudou, tanto nos estudos como dizendo uma palavra amiga nas horas em que eu mais precisava.

Por fim, agradeço aos professores, Ivan que sempre me estimulou nos estudos, Beti a qual eu me identifiquei muito, Jaime pelo seu jeito exigente e ao mesmo tempo meigo de lidar com os alunos, Vanilde por ter me ajudado a conseguir fazer o curso de mestrado, sempre me estimulando a estudar e seguir em frente e em especial agradeço muito ao meu orientador, Professor Leonardo, pela paciência em explicar com detalhes e muita clareza a teoria exigida para escrever o meu trabalho de dissertação.

Resumo

Neste trabalho estudamos a regularidade de funções que minimizam funcionais com comportamento quadrático. Provamos que estes mínimos locais são funções diferenciáveis e suas derivadas são funções de Hölder. Além disso, optimizamos o expoente de Hölder para funcionais que satisfazem certas condições de crescimento.

Abstract

In this work we study the regularity of functions that minimize functionals with quadratic growth. We prove that these local minimum are differentiable functions with Hölder derivatives. Furthermore, we get a sharp estimate for the Hölder exponent for functionals that satisfy apropriated growth conditions.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos a regularidade das funções que minimizam localmente funcionais da forma

$$F(u;\Omega) \;=\; \int_\Omega f(x,u,Du)\,dx, \tag{1.1}$$

onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ satisfaz certas condições de crescimento.

Muitos trabalhos foram realizados para determinados funcionais, mostrando que as soluções minimizantes são funções de Hölder. De Giorgi [2], um dos pioneiros desta área, provou esta regularidade para pontos críticos do funcional F no caso

$$f(x,u,Du) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_iuD_ju,$$

que correspondem às soluções da equação diferencial parcial elíptica linear de segunda ordem

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij}(x)D_iu) \;=\; 0.$$

Resultados similares foram obtidos por Nash [12]. Posteriormente, estes resultados foram estendidos para equações lineares mais gerais por Morrey [11] e Stampacchia [13] e para equações quasilineares na forma divergente por Ladyzhenskaya e Ural'ceva [9]. Além destes, muitos contribuíram para outros tipos de equações.

Nesta linha de pesquisa estudamos os trabalhos realizados por Mariano Giaquinta e Enrico Giusti [5, 6, 7] para provar a regularidade de mínimos locais de F.

No capítulo 2, introduzimos notações, definimos conceitos e enunciamos alguns teoremas importantes que são ultilizados ao longo do trabalho.

O capítulo 3 é a essência do trabalho. Nele provamos que os optimizadores do funcional F são funções diferenciáveis e têm derivadas de Hölder.

No capítulo 4, obtemos o melhor expoente de Hölder para estas soluções, supondo algumas condições adicionais sobre f.

Algumas noções e resultados de Equações Diferenciais Parciais Elípticas

2.1 Notação Utilizada

i. Ω denota sempre um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

ii. $B(x,r) = B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n; |x-y| < r\}$= bola aberta em $\mathbb{R}^n$ de centro x e raio $r > 0$.

iii. $B_r(x) \subset\subset \Omega$, significa que o fêcho de $B_r(x)$ está contido em Ω.

iv. ω_n = volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

v. $⨍_{B_r(x)} u\, dy = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u\, dy$ =média de u sobre a bola $B_r(x)$.

vi. $\{\ \}_{x,r}$ indica a média em $B_r(x)$.

vii. $\{\ \}_{\Omega}$ indica a média em Ω.

viii. $\sup \operatorname{ess} v = \inf \{M;\ |\{x:\ v(x) > M\}| = 0\}$.

ix. Ao longo do trabalho uma mesma constante pode representar diferentes valores.

2.2 Espaço L^P

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p \leq \infty$. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável, definimos

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \sup\limits_{\Omega} \operatorname{ess} |u| & \text{se } p = \infty. \end{cases} \tag{2.1}$$

Definição 2.1 *Definimos por $L^p(\Omega)$ o conjunto de todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensuráveis com $\|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty$.*

2.2.1 Propriedades

P1 - Desigualdade de Young:

Sejam p, q tais que $1 < p, q < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall\, a, b \geq 0.$$

P2 - Desigualdade de Hölder:

$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)},$$

onde $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

P3 - Desigualdade de Minkowski:

$$\|u + v\| \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} + \|v\|_{L_p(\Omega)},$$

onde $1 < p < \infty$.

P4 - L^p é um espaço vetorial normado completo com relação a norma dada em (2.1).

2.3 Espaço $L^{2,\lambda}$

Definição 2.2 *Seja u uma função pertencente a* $L^2(\Omega)$. *Dizemos que u pertence a* $L^{2,\lambda}(\Omega)$ *se*

$$\|u\|^2_{2,\lambda} = \sup\Big\{\rho^{-\lambda}\int_{\Omega\cap B(x_0,\rho)} |u|^2 dx;\ x_0 \in \Omega,\ \rho < \operatorname{diam}\Omega\Big\} < \infty.$$

2.4 Espaço $\mathcal{L}^{2,\lambda}$

Definição 2.3 *Seja u uma função pertencente a* $L^2(\Omega)$. *Dizemos que u pertence a* $\mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega)$ *se*

$$|\|u\||^2_{2,\lambda} = \sup\Big\{\rho^{-\lambda}\int_{\Omega\cap B(x_0,\rho)} |u - \{u\}_{x_{0,\rho}}|^2 dx;\ x_0 \in \Omega,\ \rho < \operatorname{diam}\Omega\Big\} < \infty.$$

Um estudo mais detalhado sobre estes espaços pode ser visto em [1].

2.5 Espaço de Hölder

Definição 2.4 *Dizemos que u é uniformemente de Hölder num conjunto D (não necessariamente limitado) se a quantidade*

$$[u]_{\alpha;D} = \sup_{x,y\in D} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}\ ;\quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{2.2}$$

é finita; e localmente Hölder contínua em D se u é uniformemente de Hölder nos subconjuntos compactos de D. Esses dois conceitos obviamente coincidem quando D é compacto. Quando (2.2) *é finito para $\alpha = 1$, u é dita de Lipschitz.*

Exemplo: A função u em $B_1(0)$ dada por $u(x) = |x|^\beta$, $0 < \beta < 1$, é Hölder continua com expoente β e é Lipschitz continua se $\beta = 1$.

Definição 2.5 *Os espaços de Hölder $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, $C^{k,\alpha}(\Omega)$ são definidos como os subespaços de $C^k(\bar{\Omega})$, $C^k(\Omega)$ constituidos das funções cujas derivadas de ordem k são uniformemente de Hölder (localmente Hölder contínuas) com expoente α em Ω.*

Para simplificar escrevemos

$$C^\alpha(\Omega) = C^{0,\alpha}(\Omega), \quad C^\alpha(\bar{\Omega}) = C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$$

com $0 < \alpha \leq 1$.
Também designamos por $C_0^{k,\alpha}(\Omega)$ o espaço das funções em $C^{k,\alpha}(\Omega)$ com suporte compacto em Ω.

Definição 2.6 *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ com $\partial\Omega$ de classe C^1 e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, uma função de classe C^1; $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. A função* $\text{div}F : \Omega \to \mathbb{R}$, *definida por*

$$(divF)(x) = D^1 f_1(x) + D^2 f_2(x) + \ldots + D^n f_n(x),$$

onde $D^i f_i = \frac{\partial f_i}{x_i}$, chama-se a divergência do campo F.

Teorema 2.7 *(Teorema da Divergência) Seja Ω um aberto limitado, com $\partial\Omega$ de classe C^1 e tal que Ω está apenas de um dos lados de $\partial\Omega$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, uma função de classe C^1. Então*

$$\int_\Omega \text{div}F \, dx = \int_{\partial\Omega} F.\vec{n} \, ds, \tag{2.3}$$

onde $\overrightarrow{n}$ é o vetor normal exterior a $\partial\Omega$.

Observação 2.1 *Considerando* $F = (0, \ldots, 0, f, 0, \ldots, 0)$*, onde* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *é a i-ésima componente de* F*, temos, pelo Teorema da divergência, que*

$$\int_\Omega D^i f \, dx \;=\; \int_{\partial\Omega} f.n_i \, ds, \tag{2.4}$$

onde n_i *é a i-ésima componente do vetor normal* $\vec{n}$*.*

2.6 Espaço de Sobolev

2.6.1 Derivada no Sentido das Distribuições

Notação: Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço de todas as funções infinitamente diferenciaveis $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, com suporte compacto em Ω. Chamamos uma função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ de função teste.

Motivação para a definição de derivada no sentido das distribuições, também chamada de derivada fraca

Seja $u \in C^1(\Omega)$. Então, se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, vemos, tomando $f = u\varphi$ em (2.4), que

$$\int_\Omega \varphi u_{x_i} \, dx \;=\; -\int_\Omega u\varphi_{x_i} \, dx \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{2.5}$$

visto que φ tem suporte compacto em Ω e, então, se anula em $\partial\Omega$. Mais geralmente, se k é um inteiro positivo, $u \in C^k(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k$, então

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha u \, dx \;=\; (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx, \tag{2.6}$$

onde $D^\alpha \varphi \;=\; \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \varphi$.
Note que, para que o lado direito de (2.6) faça sentido, basta que u seja localmente integrável, enquanto que o lado esquerdo requer que u seja de classe C^k. Resolvemos este problema definindo derivada no sentido das distribuições (derivada fraca):

Definição 2.8 *Suponha que* $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *e* α *é um multi-índice. Dizemos que* v *é a* α*-ésima derivada parcial no sentido das distribuições ou derivada parcial fraca de* u*, se*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi \, dx \tag{2.7}$$

para toda função teste $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$*. Neste caso, definimos* $D^\alpha u = v$*.*

Definição 2.9 *O espaço de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ *consiste de todas funções localmente integráveis* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que para cada multiindice* α *com* $|\alpha| \leq k$*,* $D^\alpha u$ *existe no sentido fraco e pertence a* $L^p(\Omega)$*.*

Definição 2.10 *O espaço de Sobolev* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *consiste de todas funções* u *pertencentes ao espaço* $W^{k,p}(\Omega)$ *que se anulam em* $\partial\Omega$*. Mais precisamente,* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *é o fecho de* $C_0^\infty(\Omega)$ *na norma* $W^{k,p}(\Omega)$*.*

Definição 2.11 *Em* $W^{k,p}(\Omega)$*, definimos a seguinte norma*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} & se\ 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \sup\limits_{\Omega} \text{ess} \, |D^\alpha u| & se\ p = \infty. \end{cases} \tag{2.8}$$

2.6.2 Propriedades

As seguintes propriedades podem ser encontradas no livro do Evans [3], de Equações Diferenciais Parciais.

P1 - Desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg: Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < n$. Então, existe uma constante C, dependendo apenas de p e n tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)},$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $p^* = \frac{np}{n-p}$.

P2 - Desigualdade de Poincaré: Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante $C = C(n, \Omega)$, tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^2(\Omega)},$$

para todo $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

P3 - Desigualdade de Poincaré: Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, com $\partial\Omega$ de classe C^1. Então existe uma constante $C = C(n, \Omega)$, tal que

$$\|u - \{u\}_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^2(\Omega)}$$

para todo $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

Fazendo uma mudança de variável e aplicando a desigualdade de Poincaré P3, temos a seguinte aplicação: Existe uma constante $C = C(B_R(0))$, tal que

$$\|u - \{u\}_R\|^2_{L^2(B_R(0))} \leq CR^2\|Du\|^2_{L^2(B_R(0))}$$

para todo $u \in W^{1,2}(B_R(0))$, onde $R > 0$.

P4 - $W^{k,p}$ é um espaço vetorial normado completo com relação a norma dada em (2.8).

P5 - Seja $p \geq 1$ e $\alpha > 0$. Então, existe uma constante $C > 0$ dependendo de p, n e α, tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(B_1(0))} \leq C\|Du\|_{L^p(B_1(0))},$$

para $u \in \{v \in W^{1,p}(B_1(0)) : \ |\{x : v(x) = 0\}| \geq \alpha\}$. Assim, $W^{1,p}(B_1(0)) \subset L^{p^*}(B_1(0))$. Numa bola de raio R, esta desigualdade continua válida com o mesmo C, se subtituirmos α por αR^n. Ou seja, para uma bola qualquer, C depende apenas de p, n e $\frac{\alpha}{|B_R|}$. Podemos provar isto fazendo uma mudança de variável e aplicando a desigualdade quando o domínio é $B_1(0)$.

P6 - Teorema do Traço: Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^1. Então, existe um operador linear limitado

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega), \text{ tal que}$$

(i) $Tu = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$
e
(ii) $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \;\; \forall \; u \in W^{1,p}(\Omega)$, onde $C > 0$ depende apenas de p e Ω.
Dizemos que Tu é o traço de u em $\partial\Omega$.

2.7 Equação de Euler-Lagrange

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto com fronteira suave. Considere a função suave

$$L : \bar{\Omega} \text{ x } \mathbb{R} \text{ x } \mathbb{R}^n \;\rightarrow\; \mathbb{R},$$

que chamamos de Lagrangiano L. Escrevemos

$$L \;=\; L(x, z, p) \;\; \text{para } x \;\in\; \Omega, \; z \;\in\; \mathbb{R} \; e \; p \;\in\; \mathbb{R}^n.$$

Seja

$$I[w] \;\equiv\; \int_\Omega L(x, w(x), Dw(x)) \; dx \tag{2.9}$$

definida para todas funções suaves

$$w : \;\Omega \;\rightarrow\; \mathbb{R} \tag{2.10}$$

satisfazendo a condição de fronteira

$$w \;=\; g \;\; \text{em } \partial\Omega, \tag{2.11}$$

onde g é uma função suave. Vamos agora supor que alguma função suave particular u satisfazendo

$$u = g \text{ em } \partial\Omega$$

seja um mínimo de $I[\cdot]$ entre todas as funções w satifazendo (2.11). Mostremos então que u é uma solução de uma certa equação diferencial parcial elíptica. Para isto, escolhemos uma função teste $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e consideramos a função real

$$i(\varepsilon) \;=\; I[u + \varepsilon\varphi] \;\;\; (\varepsilon \;\in\; \mathbb{R}). \tag{2.12}$$

Então

$$\frac{i(\varepsilon)-i(0)}{\varepsilon} = \frac{\int_\Omega \left(L(x,u+\varepsilon\varphi, Du+\varepsilon D\varphi) - L(x,u,Du)\right)\, dx}{\varepsilon}.$$

Note que o integrando é igual a zero fora do suporte da φ. Além disso, como L é suave e φ é limitado, a razão incremental converge uniformemente para a derivada de L em compactos. Assim, essa razão converge uniformemente para

$$\sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(x,u,Du)\varphi_{x_i} \; + \; L_z(x,u,Du)\varphi.$$

Logo

$$\frac{i(\varepsilon)-i(0)}{\varepsilon} \to \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(x,u,Du)\varphi_{x_i} \; + \; L_z(x,u,Du)\varphi \Big\}\, dx,$$

pois a convergência uniforme implica a convergência da integral. Logo i é derivável em 0 com

$$i'(0) \; = \; \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(x,u,Du)\varphi_{x_i} \; + \; L_z(x,u,Du)\varphi \Big\}\, dx.$$

Uma vez que u é um mínimo de $I[\cdot]$ e $u+\varepsilon\varphi = g$ em $\partial\Omega$, vemos que $i(\cdot)$ tem um mínimo em $\varepsilon = 0$. Por essa razão,

$$i'(0) \; = \; 0. \tag{2.13}$$

Então

$$0 \; = \; i'(0) \; = \; \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(x,u,Du)\varphi_{x_i} \; + \; L_z(x,u,Du)\varphi \Big\}\, dx. \tag{2.14}$$

Finalmente, fazendo integração por partes em (2.14) e lembrando que φ tem suporte compacto, obtemos

$$0 \; = \; \int_\Omega \left[-\sum_{i=1}^{n} \left(L_{p_i}(x,u,Du)\right)_{x_i} \; + \; L_z(x,u,Du) \right] \varphi \, dx.$$

Como esta equação é válida para toda função teste φ, concluimos que u é solução da equação diferencial parcial eliptica não linear

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(L_{p_i}(x,u,Du)\right)_{x_i} \; + \; L_z(x,u,Du) \; = \; 0 & \text{em } \Omega \\ u \; = \; g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.15}$$

Esta é a **Equação de Euler-Lagrange** associada ao funcional $I[\cdot]$ definido em (2.9). Note que esta equação foi provada sob a suposição de que u é suave. Caso u seja apenas uma função de Sobolev, $u \in W^{1,q}(\Omega)$, precisamos das seguintes hipóteses sobre o crescimento de L:

$$\begin{aligned}
|L(x,z,p)| &\leq C\left(|p|^q + |z|^q + 1\right), \\
|D_pL(x,z,p)| &\leq C\left(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1\right) \text{ e} \\
|D_zL(x,z,p)| &\leq C\left(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1\right).
\end{aligned}$$

Definição 2.12 *Dizemos que $u \in W^{1,q}(\Omega)$; $1 < q < \infty$, é solução no sentido fraco da Equação de Euler Lagrange* (2.15) *se*

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(x,u,Du)\varphi_{x_i} \;+\; L_z(x,u,Du)\varphi \right\} dx = 0$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

A motivação desta definição pode ser encontrada em [3].

2.8 Estimativa da derivada segunda

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto com fronteira suave, $g \in L^p(\partial\Omega)$ e L um Lagrangiano tal que

$$|D_pL(x,z,p)| \;\leq\; C(|p| + 1) \;\; \forall\, x \in \Omega, z \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n$$

e para algum $C > 0$ conveniente. Então qualquer mínimo $u \in A$, onde $A = \{w \in W^{1,p}(\Omega);\; w = g \text{ em } \partial\Omega \text{ no sentido do traço}\}$, é solução fraca da Equação de Euler-Lagrange, ou seja,

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(x,u,Du)\varphi_{x_i} \;+\; L_z(x,u,Du)\varphi \right\} dx = 0 \qquad (2.16)$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Teorema 2.13 *Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma solução fraca da EDP* (2.16) *e o Lagrangiano L depende apenas de p e satisfaz*

$$|L_{pp}(p)| \leq C \tag{2.17}$$

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} L_{p_\alpha p_\beta}(Du)\xi_\alpha\xi_\beta \geq \nu|\xi|^2, \;\; \forall \;\; p, \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e } \nu > 0, \tag{2.18}$$

então $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$ e, consequentemente,

$$\int_\Omega \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} L_{p_\alpha p_\beta}(Du)D_\beta(D_\gamma u)D_\alpha u \, dx = 0, \text{ para } \; \gamma \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.19}$$

A prova deste teorema pode ser encontrado em [3].

2.9 Lemas e Teoremas Importantes

Lema 2.14 *Seja $u \in L^1(\Omega)$ e $\operatorname{osc} u = \sup u - \inf u$ a oscilação de u. Se existe uma constante $C = C(n, \alpha) > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, tal que $\operatorname*{osc}_{B(z,R)} u \leq CR^\alpha$ para qualquer $B(z, R) \subset \Omega$, então $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.*

Prova. Primeiramente vamos mostrar que u é contínua, ou seja, que dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $u(B(x, \delta)) \subset B(u(x), \varepsilon)$.

De fato, para $y \in B(x, \delta)$
$|u(y) - u(x)| \leq \sup_{B(x,\delta)} |u(z) - u(w)| = \sup_{B(x,\delta)} u - \inf_{B(x,\delta)} u = \operatorname*{osc}_{B(x,\delta)} u \leq C\delta^\alpha$.
Então, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Logo u é contínua.

Seja K um conjunto compacto contido em Ω.
Então $d = \operatorname{dist}(K, \partial\Omega) > 0$.
Seja $x, y \in K$.

1º **caso:** $d(x, y) < \frac{d}{2}$.
Seja $R = d(x, y)$. Como $2R < d, B(x, 2R) \subset \Omega$.

Por hipótese $\operatorname*{osc}_{B(x,2R)} u \leq C(2R)^\alpha$, então

$$\begin{aligned} |u(y)-u(x)| &\leq \sup_{B(x,2R)} |u(y)-u(x)| = \sup_{B(x,2R)} u - \inf_{B(x,2R)} u \\ &= \operatorname*{osc}_{B(x,2R)} u \leq C(2R)^\alpha = C2^\alpha |x-y|^\alpha \\ &= D|x-y|^\alpha \end{aligned}$$

2^{o} **caso:** $\quad d(x,y) \geq \frac{d}{2}$.

Então

$$\begin{aligned} \frac{|u(y)-u(x)|}{|x-y|^\alpha} &\leq \frac{|u(y)-u(x)|}{(\frac{d}{2})^\alpha} \\ &\leq 2^\alpha \frac{|u(x)|+|u(y)|}{d^\alpha} \\ &\leq \frac{2^\alpha 2 \sup_{B(x,2R)} |u|_K}{d^\alpha} = M. \end{aligned}$$

Seja $C = \max\{M, D\}$.

Então $\forall\, x, y \in K$

$$\begin{aligned} \frac{|u(y)-u(x)|}{|x-y|^\alpha} &\leq C < \infty \Rightarrow \\ \sup_{x,y\in K} \left\{ \frac{|u(y)-u(x)|}{|x-y|^\alpha} \right\} &\leq C < \infty. \end{aligned}$$

Logo $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

$\square$

Teorema 2.15 *Seja* $x_0 \in \Omega$, $\bar{B_R} = \bar{B_R}(x_0) \subset \Omega$ *e* $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. *Então* $\operatorname*{osc}_{B_r} u \leq Cr^\alpha$, $\forall\, r \leq R$.

Prova. Se $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, então existe $c > 0$ tal que

$$\sup_{x,y\in \bar{B_R}} \left\{ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \right\} \leq c < \infty.$$

Portanto

$$|u(x)-u(y)| \leq c|x-y|^\alpha \leq cr^\alpha, \quad \forall\, x,y \in B_r, r \leq R.$$

Então $\operatorname*{osc}_{B_r} u = \sup_{B_r} u - \inf_{B_r} u = \sup_{B_r} |u(w)-u(\xi)| \leq Cr^\alpha$.

$\square$

Teorema 2.16 *(Teorema de Campanato). Seja $u \in L^1(\Omega)$ e $0 < \alpha \leq 1$. Suponha que existe uma constante positiva M tal que*

$$\fint_B |u - \{u\}_B| \, dx \leq M r^\alpha \tag{2.20}$$

$\forall \; B = B(r) \subset \Omega$. Então $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ e para toda $B(R) \subset \Omega$

$$\operatorname*{osc}_{B(\frac{R}{2})} u \; \leq \; CMR^\alpha, \;\; \textit{onde} \;\; C = C(n, \alpha).$$

Prova. Seja x um ponto de Lebesgue da função u.
Se $B(x, \frac{r}{2}) \subset B(z, r)$, então

$$\begin{aligned}
|\{u\}_{x,\frac{r}{2}} - \{u\}_{z,r}| &= \left| \frac{1}{|B\left(x, \frac{r}{2}\right)|} \int_{B\left(x,\frac{r}{2}\right)} u \, dy \; - \; \frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} u \, dw \right| \\
&= \left| \frac{1}{|B\left(x, \frac{r}{2}\right)|} \left[\int_{B\left(x,\frac{r}{2}\right)} u \, dy \; - \; |B\left(x, \frac{r}{2}\right)| \frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} u \, dw \right] \right| \\
&= \left| \frac{1}{|B\left(x, \frac{r}{2}\right)|} \left[\int_{B\left(x,\frac{r}{2}\right)} u \, dy \; - \; \int_{B\left(x,\frac{r}{2}\right)} 1 \, dy \, \frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} u \, dw \right] \right|.
\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} u \, dw$ é constante em relação a y, temos

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{|B\left(x, \frac{r}{2}\right)|} \left[\int_{B\left(x,\frac{r}{2}\right)} u \, dy \; - \; \int_{B\left(x,\frac{r}{2}\right)} 1 \, dy \, \frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} u dw \right] \right| = \\
&\left| \frac{1}{|B\left(x, \frac{r}{2}\right)|} \left[\int_{B\left(x,\frac{r}{2}\right)} u \, dy - \int_{B\left(x,\frac{r}{2}\right)} \left(\frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} u \, dw \right) dy \right] \right| = \\
\left| \frac{1}{|B\left(x, \frac{r}{2}\right)|} \int_{B\left(x,\frac{r}{2}\right)} (u - \{u\}_{z,r}) dy \right| \;\; &= \;\; \left| \fint_{B\left(x,\frac{r}{2}\right)} (u - \{u\}_{z,r}) \, dy \right| \leq \\
\fint_{B\left(x,\frac{r}{2}\right)} |u - \{u\}_{z,r}| \, dy \;\; &= \;\; \frac{1}{\omega_n (\frac{r}{2})^n} \int_{B\left(x,\frac{r}{2}\right)} |u - \{u\}_{z,r}| \, dy = \\
\frac{2^n}{\omega_n r^n} \int_{B\left(x,\frac{r}{2}\right)} |u - \{u\}_{z,r}| \, dy \;\; &\leq \;\; \frac{2^n}{\omega_n r^n} \int_{B(z,r)} |u - \{u\}_{z,r}| \, dy = \\
2^n \fint_{B(z,r)} |u - \{u\}_{z,r}| \, dy \;\; &\leq \;\; 2^n M r^\alpha.
\end{aligned}$$

Logo

$$|\{u\}_{x,\frac{r}{2}} - \{u\}_{z,r}| \leq 2^n M r^\alpha. \tag{2.21}$$

Como $B(x, \frac{r}{2^i}) \subset B(x, \frac{r}{2^{i-1}})$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, temos

$$|\{u\}_{x,\frac{r}{2^i}} - \{u\}_{x,\frac{r}{2^{i-1}}}| \leq 2^n M \Big(\tfrac{r}{2^{i-1}}\Big)^\alpha \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Então

$$\begin{aligned}
|\{u\}_{x,\frac{r}{2^k}} - \{u\}_{x,r}| &= |\{u\}_{x,\frac{r}{2^k}} - \{u\}_{x,\frac{r}{2^{k-1}}} + \ldots + \{u\}_{x,\frac{r}{2^3}} - \{u\}_{x,\frac{r}{2^2}} + \\
\{u\}_{x,\frac{r}{2^2}} - \{u\}_{x,\frac{r}{2}} &+ \{u\}_{x,\frac{r}{2}} - \{u\}_{x,r}| \leq |\{u\}_{x,\frac{r}{2^k}} - \{u\}_{x,\frac{r}{2^{k-1}}}| + \ldots + \\
|\{u\}_{x,\frac{r}{2^3}} - \{u\}_{x,\frac{r}{2^2}}| &+ |\{u\}_{x,\frac{r}{2^2}} - \{u\}_{x,\frac{r}{2}}| + |\{u\}_{x,\frac{r}{2}} - \{u\}_{x,r}| \leq \\
2^n M r^\alpha \frac{1}{2^{(k-1)\alpha}} &+ \ldots + 2^n M r^\alpha \frac{1}{2^{2\alpha}} + 2^n M r^\alpha \frac{1}{2^\alpha} + 2^n M r^\alpha \frac{1}{2^{0\alpha}} \\
&= 2^n M r^\alpha (2^{-0\alpha} + 2^{-\alpha} + 2^{-2\alpha} + \ldots + 2^{-(k-1)\alpha}) \\
&= 2^n M r^\alpha \sum_{i=0}^{k-1} 2^{-\alpha i} = 2^n M r^\alpha \sum_{i=1}^{k} 2^{-\alpha i} \leq C M r^\alpha
\end{aligned}$$

Como x é ponto de Lebesgue temos que $\{u\}_{x,\frac{r}{2^k}} \to u(x)$. Então

$$|u(x) - \{u\}_{x,r}| \leq C M r^\alpha.$$

Usando (2.21), temos

$$\begin{aligned}
|u(x) - \{u\}_{z,R}| &\leq |u(x) - \{u\}_{x,\frac{R}{2}} + \{u\}_{x,\frac{R}{2}} - \{u\}_{z,R}| \\
&\leq |u(x) - \{u\}_{x,\frac{R}{2}}| + |\{u\}_{x,\frac{R}{2}} - \{u\}_{z,R}| \\
&\leq CM\left(\frac{R}{2}\right)^\alpha + 2^n M R^\alpha = R^\alpha M\left(\frac{C}{2^\alpha} + 2^n\right) = CMR^\alpha
\end{aligned}$$

para cada $x \in B(z, \frac{R}{2})$ ponto de Lebesgue.
Assim,

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - \{u\}_{z,R} + \{u\}_{z,R} - u(y)| \\
&\leq |u(x) - \{u\}_{z,R}| + |\{u\}_{z,R} - u(y)| \\
&\leq CMR^\alpha + CMR^\alpha = CM2R^\alpha \\
&\leq CMR^\alpha
\end{aligned}$$

para qualquer $x, y \in B\left(z, \frac{R}{2}\right) \subset \Omega,$ onde x, y são pontos de Lebesgue.
Seja A o conjunto dos pontos de Lebesgue. Dado $K \subset \Omega$ compacto, seja $R < dist(K, \partial\Omega)$. Logo, para $x, y \in A \cap K$, tal que $|x-y| < \frac{R}{2}$, $x, y \in B(x, \frac{R}{2})$. Assim $|u(x) - u(y)| < CMR^{\alpha}$. Portanto, u é uniformenmente contínua em $A \cap K$. Então podemos estende-la contínuamente para K, já que A é denso em K, pois $m(A^c) = 0$. Daí

$$|u(x) - u(y)| \leq CMR^{\alpha} \;\; \forall\, x, y \in K.$$

Então

$$\begin{aligned} \sup_{B(z,\frac{R}{2})} |u(w) - u(\xi)| &= \sup_{B(z,\frac{R}{2})} u - \inf_{B(z,\frac{R}{2})} u \\ &= \operatorname*{osc}_{B(z,\frac{R}{2})} u \;\leq\; CR^{\alpha}. \end{aligned}$$

Logo pelo Lema 2.14, temos que $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

$\square$

Com o propósito de melhor compreender o Teorema de Campanato, apresentamos no exemplo a seguir uma função descontínua na origem e que não satisfaz (2.20), para qualquer $\alpha > 0$.

Exemplo: Seja a função $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } \; x < 0 \\ 0 & \text{se } \; x = 0 \\ 1 & \text{se } \; x > 0. \end{cases}$$

Então

$$\{u\}_{[-h,h]} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} u(x)\, dx = 0.$$

Logo

$$\fint_{[-h,h]} |u - \{u\}_{[-h,h]}|\, dx = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |u(x)|\, dx = \frac{2h}{2h} = 1.$$

Lema 2.17 *Seja $F \in L^2(\Omega)$. Então*

$$\int_{B_R} |\{F\}_R|^2\, dx \;\leq\; \int_{B_R} |F|^2\, dx$$

$$e$$

$$\int_{B_R} (|F| - |\{F\}_R|)^2\, dx \;\leq\; 4\int_{B_R} |F|^2\, dx$$

Prova.

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} |\{F\}_R|^2\, dx &= \int_{B_R} \left| \frac{\int_{B_R} F\, dx}{|B_R|} \right|^2 dx = \\
\left| \frac{\int_{B_R} F\, dx}{|B_R|} \right|^2 dx \int_{B_R} 1\, dx &= \frac{\left|\int_{B_R} F\, dx\right|^2}{|B_R|^2}\, |B_R| \leq \\
\frac{\left(\int_{B_R} |F|\, dx\right)^2}{|B_R|} &\leq \frac{\left[\left(\int_{B_R} |F|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R} 1\, dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}{|B_R|} = \\
\frac{\int_{B_R} |F|^2\, dx\, |B_R|}{|B_R|} &= \int_{B_R} |F|^2\, dx
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} (|F| - |\{F\}_R|)^2\, dx &\leq \int_{B_R} (|F| + |\{F\}_R|)^2\, dx \\
\leq 2\int_{B_R} |F|^2\, dx &+ 2\int_{B_R} |\{F\}_R|^2\, dx \\
\leq 2\int_{B_R} |F|^2\, dx &+ 2\int_{B_R} |F|^2\, dx = 4\int_{B_R} |F|^2\, dx
\end{aligned}$$

□

Regularidade de Mínimos Locais de Funcionais Gerais

3.1 Continuidade de Hölder de mínimos locais de Funcionais Gerais

Nesta seção, provamos que a função escalar $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in W^{1,2}(\Omega)$ que minimiza o funcional geral

$$F(w, \Omega) \;=\; \int_\Omega f(x, w, Dw)\, dx \tag{3.1}$$

é Hölder continua, quando f possui certas condições de crescimento. Mais precisamente, suponhamos que f satisfaz

$$\begin{aligned} |p|^2 - b(|u|^\alpha + 1) \leq f(x, u, p) \leq a|p|^2 + b(|u|^\alpha + 1) \\ \text{com } 0 \leq \alpha < 2^* = \frac{2n}{n-2} \;\; (\alpha < \infty \text{ se } n = 2). \end{aligned} \tag{3.2}$$

O resultado principal desta seção é o Teorema 3.6, onde é provado que $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

O Lema abaixo e o Teorema 3.3 encontram-se em [10] cap. II e serão utilizados nas demonstrações dos Teoremas 3.5 e 3.6. Os demais resultados desta seção foram obtidos em [5].

Lema 3.1 *Suponha que $B(x_0, \rho_0) \subset \Omega$ e que existe um $\hat{k}$ tal que se $k \geq \hat{k}$, a função $u(x)$ satisfaz a inequação*

$$\int_{A_{k,\rho-\sigma\rho}} |Du|^2 dx \leq \gamma \left\{ (\sigma\rho)^{-2} \int_{A_{k,\rho}} (u-k)^2\, dx + \rho^{-\varepsilon n} k^\alpha |A_{k,\rho}|^{1-\frac{2}{n}+\varepsilon} \right\}, \tag{3.3}$$

onde $\rho_0 - \rho_0\sigma_0 \leq \rho - \sigma\rho < \rho \leq \rho_0$, σ_0, γ, α *e* ε *são constantes positivas,* $\sigma_0 < 1$, $\varepsilon \leq \frac{2}{n}$, $2 \leq \alpha < 2\varepsilon + 2$ *e* $A_{k,\rho} = \{x \in B(x_0, \rho); u(x) \geq k\}$.
Então existe $c = c(\sigma_0, \hat{k}, n, \gamma, \varepsilon, \alpha, a)$, *onde* $a = \rho_0^{-n} \int_{A_{\hat{k},\rho_0}} (u(x) - \hat{k})^2 \, dx$ *tal que*

$$\sup_{B_{\rho_0 - \sigma_0\rho_0}} \text{ess}\, u \leq c.$$

Definição 3.2 *Denotamos por* $B_2(\Omega, M, \gamma, \delta, \frac{1}{q})$ *a classe de funções* $u(x)$ *pertencentes a* $W^{1,2}(\Omega)$ *com* $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$, *tais que para* $u(x)$ *e* $-u(x)$ *a seguinte desigualdade é válida em uma esfera* $B_\rho = B(x_0, \rho) \subset \Omega$ *para qualquer* $\sigma \in (0, 1)$*:*

$$\int_{A_{k,\rho-\sigma\rho}} |Du|^2 \, dx \leq \gamma \left\{ \frac{1}{\sigma^2 \rho^{2(1-\frac{n}{q})}} \max_{A_{k,\rho}} [u(x) - k]^2 + 1 \right\} |A_{k,\rho}|^{1-\frac{2}{q}} \tag{3.4}$$

para $k \geq \max_{B(x_0,\rho)} u(x) - \delta$, *onde* $A_{k,\rho} = \{x \in B(x_0, \rho); u(x) \geq k\}$ *e* $0 < q \leq \infty$.

Teorema 3.3 *Seja* $u(x)$ *uma função arbitrária pertencente à classe* $B_2(\Omega, M, \gamma, \delta, \frac{1}{q})$ *e seja* $B(x_0, \rho_0) \subset \Omega$, *onde* $\rho_0 \leq 1$. *Então para uma esfera arbitrária* $B(x_0, \rho)$, *onde* $\rho \leq \rho_0$, *a oscilação de* $u(x)$ *em* $B(x_0, \rho)$ *satisfaz a inequação*

$$\operatorname*{osc}_{B_(x_0,\rho)} u \ \leq \ c \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\alpha. \tag{3.5}$$

Lema 3.4 *Seja* $f(t)$ *uma função não negativa limitada definida em todo* t, *tal que* $0 \leq T_0 \leq t \leq T_1$. *Suponhamos que para* $T_0 \leq t < s \leq T_1$ *temos*

$$f(t) \ \leq \ A(s - t)^{-\alpha} + B + \theta f(s)$$

onde A, B, α, θ *são constantes não negativas e* $\theta < 1$. *Então existe uma constante* c, *dependendo somente de* α *e* θ *tal que para todo* ρ, R, $T_0 \leq \rho < R \leq T_1$, *temos*

$$f(\rho) \ \leq \ c[A(R - \rho)^{-\alpha} + B].$$

Prova. Considere a sequência $\{t_i\}$ definida por

$$t_0 = \rho; \quad t_{i+1} - t_i = (1-\tau)\tau^i(R-\rho)$$

com $0 < \tau < 1$.

Como $t_i < t_{i+1}$ $\forall i$, temos por hipótese que

$$\begin{aligned} f(t_i) &\leq A(t_{i+1}-t_i)^{-\alpha} + B + \theta f(t_{i+1}) \\ &= A\frac{\tau^{-i\alpha}}{(1-\tau)^\alpha}(R-\rho)^{-\alpha} + B + \theta f(t_{i+1}) \ \forall i = 0, 1, \ldots, k. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} f(t_0) &\leq \frac{A}{(1-\tau)^\alpha}(R-\rho)^{-\alpha} + B + \theta f(t_1) \\ &\leq \frac{A}{(1-\tau)^\alpha}(R-\rho)^{-\alpha} + B + \theta\left[\frac{A\tau^{-\alpha}}{(1-\tau)^\alpha}(R-\rho)^{-\alpha} + B + \theta f(t_2)\right] \\ &= \frac{A}{(1-\tau)^\alpha}(R-\rho)^{-\alpha} + B + \frac{A\theta\tau^{-\alpha}}{(1-\tau)^\alpha}(R-\rho)^{-\alpha} + \theta B + \theta^2 f(t_2) \\ &\leq \frac{A}{(1-\tau)^\alpha}(R-\rho)^{-\alpha} + B + \frac{A\theta\tau^{-\alpha}}{(1-\tau)^\alpha}(R-\rho)^{-\alpha} + \theta B \\ &+ \theta^2\left[\frac{A\tau^{-2\alpha}}{(1-\tau)^\alpha}(R-\rho)^{-\alpha} + B + \theta f(t_3)\right] \\ &= \frac{A}{(1-\tau)^\alpha}(R-\rho)^{-\alpha} + B + \frac{A\theta\tau^{-\alpha}}{(1-\tau)^\alpha}(R-\rho)^{-\alpha} + \theta B \\ &+ \frac{A\theta^2\tau^{-2\alpha}}{(1-\tau)^\alpha}(R-\rho)^{-\alpha} + \theta^2 B + \theta^3 f(t_3) \\ &\leq \ldots \leq \frac{A}{(1-\tau)^\alpha}(R-\rho)^{-\alpha} + B + \frac{A\theta\tau^{-\alpha}}{(1-\tau)^\alpha}(R-\rho)^{-\alpha} + \theta B \\ &+ \frac{A\theta^2\tau^{-2\alpha}}{(1-\tau)^\alpha}(R-\rho)^{-\alpha} + \theta^2 B + \theta^3 f(t_3) + \ldots + \frac{A\theta^{k-1}\tau^{-(k-1)\alpha}}{(1-\tau)^\alpha} + \theta^{k-1}B \\ &+ \theta^k f(t_k) \\ &= \frac{A}{(1-\tau)^\alpha}(R-\rho)^\alpha\left(\sum_{i=0}^{k-1}\theta^i\tau^{-i\alpha}\right) + B\left(\sum_{i=0}^{k-1}\theta^i\right) + \theta^k f(t_k). \end{aligned}$$

Como $0 < \tau < 1$ temos que $\tau^{i\alpha} < 1$, $\forall \alpha \geq 0$ e $i = 0, 1, \ldots k$. Então $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\theta^i \leq \sum_{i=0}^{k-1}\theta^i\tau^{-i\alpha}$.

Logo
$$f(t_0) \leq \theta^k f(t_k) + \left[\frac{A}{(1-\tau)^\alpha}(R-\rho)^{-\alpha} + B\right]\sum_{i=0}^{k-1}\theta^i\tau^{-i\alpha}.$$

Escolhendo agora τ, tal que $\tau^\alpha > \theta$ e fazendo $k \to +\infty$, obtemos

$$\begin{aligned} f(t_0) = f(\rho) &\le \left[\frac{A}{(1-\tau)^\alpha}(R-\rho)^{-\alpha} + B\right](1-\theta\tau^{-\alpha})^{-1}, \text{ pois} \\ \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\theta}{\tau^\alpha}\right)^i &= \frac{1}{1-\frac{\theta}{\tau^\alpha}}, \lim_{k\to+\infty} \theta^k = 0 \text{ e } f(t_k) \text{ é limitada.} \end{aligned}$$

Logo

$$f(\rho) \le c[A(R-\rho)^{-\alpha} + B], \quad \text{onde } c = (1-\tau)^{-\alpha}(1-\theta\tau^{-\alpha})^{-1}.$$

□

Teorema 3.5 *Seja $f(x,u,p)$ satisfazendo* (3.2) *e $u \in W^{1,2}(\Omega)$ um mínimo local do funcional $F(w;\Omega)$ dado em* (3.1). *Então u é localmente limitada em Ω.*

Prova. Seja $x_0 \in \Omega$ e B_s a bola de raio s centrada em x_0, onde s será escolhido posteriormente.
Para $k > 0$, definimos $A_k = \{x \in \Omega; u(x) > k\}$ e $A_{k,s} = A_k \cap B_s$.

Seja $w = \max(u-k, 0)$ e $\eta(x) \in C^\infty$ uma função com supp $\eta \subset B_s$ tal que $0 \le \eta \le 1$, $\eta = 1$ em B_t, onde $t < s$, e $|D\eta| \le 2(s-t)^{-1}$. Se $v = u - \eta w$, então $v \in W^{1,2}(\Omega)$. Usando a minimalidade de u, temos que

$$F(u;\Omega) \le F(v;\Omega). \text{ Então } \int_\Omega f(x,u,Du)\,dx \le \int_\Omega f(x,v,Dv)\,dx.$$

Portanto,

$$0 \le \int_\Omega [f(x,v,Dv) - f(x,u,Du)]\,dx.$$

Note que $v = u$ em $\Omega \setminus A_{k,s}$, pois $v = u - \eta w$ e $\eta = 0$ em $\Omega \setminus B_s$ e $w = 0$ em $\Omega \setminus A_k$. Então

$$0 \le \int_\Omega [f(x,v,Dv) - f(x,u,Du)]\,dx = \int_{A_{k,s}} [f(x,v,Dv) - f(x,u,Du)]\,dx.$$

Logo

$$\int_{A_{k,s}} f(x,u,Du)\,dx \le \int_{A_{k,s}} f(x,v,Dv)\,dx.$$

Usando (3.2),

$$\int_{A_{k,s}} |Du|^2 - b(|u|^\alpha + 1)\, dx \leq \int_{A_{k,s}} a|Dv|^2 + b(|v|^\alpha + 1)\, dx.$$

Então

$$\int_{A_{k,s}} |Du|^2\, dx \leq \int_{A_{k,s}} a|Dv|^2 + b(|v|^\alpha + 1) + b(|u|^\alpha + 1)\, dx.$$

Em $A_{k,s}$

$$\begin{aligned} v &= u - \eta w = u - \eta(u-k) = (1-\eta)u + \eta k \\ \Rightarrow |Dv| &= |(1-\eta)Du - uD\eta + kD\eta| = |(1-\eta)Du - wD\eta| \\ &\leq (1-\eta)|Du| + w|D\eta|. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Então

$$\begin{aligned} \int_{A_{k,s}} |Du|^2\, dx \leq \int_{A_{k,s}} & a|(1-\eta)Du + wD\eta|^2 + b(|v|^\alpha + 1) + b(|u|^\alpha + 1)\, dx \\ & \leq \int_{A_{k,s}} 2a(1-\eta)^2|Du|^2\, dx + 2a\int_{A_{k,s}} w^2|D\eta|^2\, dx \\ & \quad + \int_{A_{k,s}} (b|u|^\alpha + b)\, dx + \int_{A_{k,s}} (b|u|^\alpha + b)\, dx \\ & = \int_{A_{k,s}} 2a(1-\eta)^2|Du|^2\, dx + 2a\int_{A_{k,s}} w^2|D\eta|^2\, dx \\ & \quad + 2\int_{A_{k,s}} (b|w+k|^\alpha + b)\, dx \\ & \leq \int_{A_{k,s}} 2a(1-\eta)^2|Du|^2\, dx + 2a\int_{A_{k,s}} w^2 \left(2(s-t)^{-1}\right)^2\, dx \\ & \quad + \int_{A_{k,s}} 2b2^\alpha(w^\alpha + k^\alpha)\, dx + 2b|A_{k,s}| \\ & \leq \int_{A_{k,s}} 2a(1-\eta)^2|Du|^2\, dx + 2a\left(2(s-t)^{-1}\right)^2 \int_{A_{k,s}} w^2\, dx \\ & \quad + \int_{A_{k,s}} 2b2^\alpha w^\alpha\, dx + 2b2^\alpha k^\alpha|A_{k,s}| \ + \ 2b|A_{k,s}| \\ & \leq \gamma_1 \left\{ \int_{A_{k,s}} (1-\eta)^2|Du|^2\, dx + \frac{1}{(s-t)^2}\int_{A_{k,s}} w^2\, dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{A_{k,s}} w^\alpha\, dx + (1+k^\alpha)|A_{k,s}| \right\}, \end{aligned}$$

onde $\gamma_1 = \max\{8a, 2b2^\alpha\}$. Observemos agora que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2^*}^{2^*} &= \int_\Omega |u|^{2^*}\,dx \ \geq \int_{A_k} |u|^{2^*}\,dx \\
&\geq \int_{A_k} k^{2^*}\,dx \ = \ k^{2^*}|A_k| \\
\Rightarrow\ |A_k| &\leq \frac{1}{k^{2^*}}\|u\|_{2^*}^{2^*}.
\end{aligned}$$

Logo existe k_0, tal que $\forall\ k \geq k_0$ e $\forall\ T$ com $\frac{T}{2} \leq s \leq T$, temos $|A_k| \leq \frac{1}{2}|B_{\frac{T}{2}}|$. Como supp$w \subseteq A_k$, temos que $|\text{supp}w| \leq \frac{1}{2}|B_{\frac{T}{2}}| \leq \frac{1}{2}|B_s|$. Então $|\{x : w(x) = 0\}| \geq cs^n$. Portanto, usando a propriedade P5, obtemos

$$\begin{aligned}
\|w\|_{L^{2^*}(B_s)} &\leq c\|Dw\|_{L^2(B_s)} \Rightarrow \\
\left(\int_{B_s} |w|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq c\int_{B_s} |Dw|^2\,dx,
\end{aligned}$$

se $n > 2$, onde c só depende de n. Se $n = 2$, seja $\tilde{2} > \alpha$. Neste caso

$$\|w\|_{L^{\tilde{2}}(B_s)} \ \leq \ c\|Dw\|_{L^2(B_s)},$$

onde c depende de n e s. Quando s diminui, c diminui. Assim, podemos considerar o mesmo c para $s < 1$. Faremos a prova para $n > 2$. Para $n = 2$, segue por raciocínio semelhate, substituindo 2^* por $\tilde{2}$.
Se $2 \leq \alpha \leq 2^*$, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_s} w^\alpha\,dx &\leq \left(\int_{B_s} (w^\alpha)^{\frac{2^*}{\alpha}}\,dx\right)^{\frac{\alpha}{2^*}} \left(\int_{B_s} (1)^{\frac{2^*}{2^*-\alpha}}\,dx\right)^{1-\frac{\alpha}{2^*}} \\
&= \left(\int_{B_s} w^{2^*}\,dx\right)^{\frac{\alpha}{2^*}} |B_s|^{1-\frac{\alpha}{2^*}} \\
&= \left(\int_{B_s} w^{2^*}\,dx\right)^{\frac{\alpha-2+2}{2^*}} |B_s|^{1-\frac{\alpha}{2^*}} \\
&= \left[\left(\int_{B_s} w^{2^*}\,dx\right)^{\frac{1}{2^*}}\right]^{\alpha-2} |B_s|^{1-\frac{\alpha}{2^*}} \left(\int_{B_s} w^{2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \\
&\leq \|w\|_{2^*}^{\alpha-2}|B_s|^{1-\frac{\alpha}{2^*}} c\int_{B_s} |Dw|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Como $w = u - k$ em $A_{k,s}$ e $w = 0$ em $A_{k,s}^c$, temos que $\|w\|_{2^*} \leq \|u\|_{2^*}$, $\int_{B_s} |Dw|^2\,dx = \int_{A_{k,s}} |Dw|^2\,dx = \int_{A_{k,s}} |Du|^2\,dx$. Então

$$\int_{B_s} w^\alpha\,dx \leq \|u\|_{2^*}^{\alpha-2}|B_s|^{1-\frac{\alpha}{2^*}} c\int_{A_{k,s}} |Du|^2\,dx.$$

Escolhendo s tão pequeno, de modo que

$$c\|u\|_{2^*}^{\alpha-2}|B_s|^{1-\frac{\alpha}{2^*}} \leq \frac{1}{2\gamma_1}, \quad \text{temos}$$

$$\int_{B_s} w^\alpha \, dx \leq \frac{1}{2\gamma_1}\int_{A_{k,s}} |Du|^2 \, dx. \tag{3.7}$$

Concluimos então que se $\frac{T}{2} \leq t < s \leq T$, temos

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,s}} |Du|^2 \, dx \;&\leq\; \gamma_1\left\{\int_{A_{k,s}} (1-\eta)^2|Du|^2 \, dx + \frac{1}{(s-t)^2}\int_{A_{k,s}} w^2 \, dx\right.\\ &+\; \left.\frac{1}{2\gamma_1}\int_{A_{k,s}} |Du|^2 \, dx + (1+k^\alpha)|A_{k,s}|\right\}.\end{aligned}$$

Como $\eta = 1$ em $A_{k,t}$, temos que $\int_{A_{k,t}}(1-\eta)^2|Du|^2 \, dx = 0$. Logo

$$\int_{A_{k,s}} (1-\eta)^2|Du|^2 \, dx = \int_{A_{k,s}\setminus A_{k,t}} (1-\eta)^2|Du|^2 \, dx \leq \int_{A_{k,s}\setminus A_{k,t}} |Du|^2 \, dx.$$

Então

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,s}} |Du|^2 \, dx \;&\leq\; \gamma_1\int_{A_{k,s}\setminus A_{k,t}} |Du|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_{A_{k,s}} |Du|^2 \, dx\\ &+\; \frac{\gamma_1}{(s-t)^2}\int_{A_{k,s}} w^2 \, dx + (1+k^\alpha)|A_{k,s}|.\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,s}} |Du|^2 \, dx \;&\leq\; 2\gamma_1\left\{\int_{A_{k,s}\setminus A_{k,t}} |Du|^2 \, dx\right.\\ &+\; \left.\frac{1}{(s-t)^2}\int_{A_{k,s}} w^2 \, dx + (1+k^\alpha)|A_{k,s}|\right\}.\end{aligned}$$

Como $B_t \subset B_s$, temos que $\int_{A_{k,t}} |Du|^2 \, dx \leq \int_{A_{k,s}} |Du|^2 \, dx$.
Então

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,t}} |Du|^2 \, dx \;&\leq\; 2\gamma_1\left\{\int_{A_{k,s}\setminus A_{k,t}} |Du|^2 \, dx\right.\\ &+\; \left.\frac{1}{(s-t)^2}\int_{A_{k,s}} w^2 \, dx \;+\; (1+k^\alpha)|A_{k,s}|\right\}.\end{aligned}$$

Sejam ρ e R tais que $\frac{T}{2} \leq \rho \leq t < s \leq R \leq T$.
Então

$$\begin{aligned}
\int_{A_{k,t}} |Du|^2\, dx &\leq 2\gamma_1 \int_{A_{k,s}\setminus A_{k,t}} |Du|^2\, dx \\
&+ 2\gamma_1 \left\{ (s-t)^{-2} \int_{A_{k,R}} w^2\, dx + (1+k^\alpha)|A_{k,R}| \right\}.
\end{aligned}$$

Adicionando $2\gamma_1 \int_{A_{k,t}} |Du|^2\; dx$ em ambos os termos da inequação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
(1+2\gamma_1)\int_{A_{k,t}} |Du|^2\, dx &\leq 2\gamma_1 \int_{A_{k,s}} |Du|^2\, dx \\
&+ 2\gamma_1 \left\{ (s-t)^{-2} \int_{A_{k,R}} w^2\, dx + (1+k^\alpha)|A_{k,R}| \right\}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\int_{A_{k,t}} |Du|^2\, dx &\leq \frac{2\gamma_1}{2\gamma_1+1} \int_{A_{k,s}} |Du|^2\, dx \\
&+ \frac{2\gamma_1}{2\gamma_1+1} \left\{ (s-t)^{-2} \int_{A_{k,R}} w^2\, dx \ + \ (1+k^\alpha)|A_{k,R}| \right\} \\
&\leq \frac{2\gamma_1}{2\gamma_1+1} \int_{A_{k,s}} |Du|^2\, dx \\
&+ (s-t)^{-2} \int_{A_{k,R}} w^2\, dx \ + \ (1+k^\alpha)|A_{k,R}|.
\end{aligned}$$

Definindo

$$\begin{aligned}
f(r) &= \int_{A_{k,r}} |Du|^2\, dx, \ \ \forall r > 0 \text{ e considerando } \theta = \frac{2\gamma_1}{2\gamma_1+1}, \\
A = \int_{A_{k,R}} w^2\, dx \text{ e } B &= (1+k^\alpha)|A_{k,R}|, \text{ temos que}
\end{aligned}$$

$$f(t) \leq \theta f(s) + A(s-t)^{-2} + B.$$

Logo, pelo Lema 3.4, temos

$$\int_{A_{k,\rho}} |Du|^2\, dx \leq \gamma_2 \left\{ (R-\rho)^{-2} \int_{A_{k,R}} w^2\, dx \ + \ (1+k^\alpha)|A_{k,R}| \right\}. \tag{3.8}$$

Finalmente estimamos, para $k > 1$

$$
\begin{aligned}
(1+k^\alpha)|A_{k,R}| &< (k^\alpha + k^\alpha)|A_{k,R}| \\
&= 2k^\alpha |A_{k,R}| \le 2k^{\frac{(\alpha-2+2)2^*}{2^*}} |A_{k,R}|^{1-\frac{(\alpha-2)}{2^*}+\frac{\alpha-2}{2^*}} \\
&= 2\left(k^{2^*}|A_{k,R}|\right)^{\frac{\alpha-2}{2^*}} k^2 |A_{k,R}|^{1-\frac{(\alpha-2)}{2^*}} \\
&\le 2(\|u\|_{2^*}^{2^*})^{\frac{\alpha-2}{2^*}} k^2 |A_{k,R}|^{1-\frac{\alpha}{2^*}+\frac{2}{\frac{2n}{n-2}}} \\
&= 2(\|u\|_{2^*})^{\alpha-2} k^2 |A_{k,R}|^{1-\frac{2}{n}+1-\frac{\alpha}{2^*}}.
\end{aligned}
$$

Introduzindo esta estimativa em (3.8), temos que para $\frac{T}{2} \le \rho < R \le T$

$$
\begin{aligned}
\int_{A_{k,\rho}} |Du|^2\, dx &\le \gamma_2 \left\{ (R-\rho)^{-2} \int_{A_{k,R}} w^2\, dx + 2(\|u\|_{2^*})^{\alpha-2} k^2 |A_{k,R}|^{1-\frac{2}{n}+1-\frac{\alpha}{2^*}} \right\} \\
&\le \gamma_3 \left\{ (R-\rho)^{-2} \int_{A_{k,R}} w^2\, dx + k^2 |A_{k,R}|^{1-\frac{2}{n}+1-\frac{\alpha}{2^*}} \right\}. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Logo, pelo Lema 3.1, existe uma constante c, tal que $\sup\operatorname{ess}_{B_{\frac{T}{2}}} u \le c$.

Visto que $-u$ minimiza o funcional

$$\bar{F}(\psi;\Omega) = \int_\Omega \bar{f}(x,\psi,D\psi)\, dx$$

com $\bar{f}(x,\psi,p) = f(x,-\psi,-p)$ satisfazendo a condição (3.2), a desigualdade (3.9) vale se trocarmos u por $-u$. Podemos, então, aplicar para u e $-u$ o Lema 3.1 e concluimos que u é limitada em $B_{\frac{T}{2}}$.

□

Observação 3.1 *Se u é limitado, $\|u\|_{L^\infty} \le M$, então*

$$|p|^2 - b(M) \le f(x,u,p) \le a|p|^2 + b(M) \text{ para todo } p \in R^n. \qquad (3.10)$$

Teorema 3.6 *Seja $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ um mínimo local do funcional*

$$F(\psi;\Omega) = \int_\Omega f(x,\psi,D\psi)\, dx.$$

Então u é Hölder contínua em Ω.

Prova. Seja $v = u - \eta w$, onde η, w são funções definidas no teorema anterior.

Pela minimalidade de u, temos que

$$F(u;\Omega) \leq F(v;\Omega). \text{ Então } \int_\Omega f(x,u,Du)\,dx \leq \int_\Omega f(x,v,Dv)\,dx.$$

Portanto

$$0 \;\leq\; \int_\Omega [f(x,v,Dv) - f(x,u,Du)]\,dx.$$

Usando o mesmo argumento que no Teorema anterior, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{A_{k,s}} |Du|^2 - b(M)\,dx \;&\leq\; \int_{A_{k,s}} a|Dv|^2 + b(M)\,dx \\
\Rightarrow \int_{A_{k,s}} |Du|^2\,dx \;&\leq\; \int_{A_{k,s}} a|Dv|^2 + 2b(M)\,dx.
\end{aligned}$$

Assim por (3.6), temos

$$\begin{aligned}
\int_{A_{k,s}} |Du|^2\,dx \;&\leq\; \int_{A_{k,s}} a|(1-\eta)Du + wD\eta|^2\,dx \\
&+\; 2b(M)|A_{k,s}| \\
&\leq\; 2\int_{A_{k,s}} a(1-\eta)^2|Du|^2\,dx \\
&+\; 2\int_{A_{k,s}} aw^2|D\eta|^2\,dx \;+\; 2b(M)|A_{k,s}| \\
\leq\; \gamma_4 \Bigg\{ \int_{A_{k,s}} (1-\eta)^2|Du|^2\,dx \;&+\; \int_{A_{k,s}} w^2|D\eta|^2\,dx \;+\; |A_{k,s}| \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Pelo mesmo raciocínio do Teorema anterior, para todo $t < s \leq R$, temos

$$\int_{A_{k,t}} |Du|^2\,dx \;\leq\; \gamma_5 \Bigg\{ \int_{A_{k,s}\setminus A_{k,t}} |Du|^2\,dx \;+\; (s-t)^{-2}\int_{A_{k,R}} (u-k)^2\,dx \;+\; |A_{k,R}| \Bigg\}.$$

Adicionando $\gamma_5 \int_{A_{k,t}} |Du|^2\,dx$ a ambos os membros da desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
&(\gamma_5+1)\int_{A_{k,t}} |Du|^2\,dx \leq \gamma_5 \Bigg\{ \int_{A_{k,s}} |Du|^2\,dx + (s-t)^{-2}\int_{A_{k,R}} (u-k)^2\,dx + |A_{k,R}| \Bigg\} \\
&\Rightarrow \int_{A_{k,t}} |Du|^2\,dx \leq \frac{\gamma_5}{\gamma_5+1} \Bigg\{ \int_{A_{k,s}} |Du|^2\,dx + (s-t)^{-2}\int_{A_{k,R}} (u-k)^2\,dx + |A_{k,R}| \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Definindo

$$f(r) \;=\; \int_{A_{k,r}} |Du|^2 \, dx, \;\; \forall r > 0$$

e considerando

$$\theta = \frac{\gamma_5}{\gamma_5 + 1},$$
$$A = \int_{A_{k,R}} (u-k)^2 \, dx \text{ e } B \;=\; |A_{k,R}|, \text{ temos que}$$

$$f(t) \;\leq\; \theta f(s) + A(s-t)^{-2} + B.$$

Logo, pelo Lema 3.4, para $\rho \leq t < s \leq R,$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{A_{k,\rho}} |Du|^2 \, dx \;&\leq\; \gamma_6 \left\{ (R-\rho)^{-2} \int_{A_{k,R}} (u-k)^2 \, dx + |A_{k,R}| \right\} \\
&\leq\; \gamma_6 \left\{ \frac{1}{(R-\rho)^2} \max_{A_{k,R}} [u-k]^2 \int_{A_{k,R}} \, dx + |A_{k,R}| \right\} \\
&\leq\; \gamma_6 \left\{ \frac{1}{(R-\rho)^2} \max_{A_{k,R}} [u-k]^2 + 1 \right\} |A_{k,R}|.
\end{aligned}$$

Esta mesma desigualdade é válida se trocarmos u por $-u$. Então a função u pertence à classe $B_2(\Omega, M, \gamma_6, 1, 0)$. Tomando $R \leq 1$, temos pelo Teorema 3.3, que a oscilação de $u(x)$ em $B(x_0, \rho)$, para $\rho < R,$ satisfaz a inequação

$$\operatorname*{osc}_{B(x_0,\rho)} u \leq c \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\alpha}.$$

Então $\operatorname*{osc}_{B(x_0,\rho)} u \leq C\rho^{\alpha}$, onde $C(R) = \frac{c}{R^{\alpha}}$. Logo, pelo Lema 2.14, $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

$\square$

3.2 Continuidade de Hölder para as derivadas de mínimos locais de Funcionais Gerais

Nesta seção provamos que a derivada primeira de uma função escalar $u \in W^{1,2}(\Omega)$ que minimiza o funcional geral

$$F(w;\Omega) \;=\; \int_\Omega f(x,w,Dw)\,dx \tag{3.11}$$

é Hölder contínua, ou seja, $Du \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Para isto, é necessário que a função f satisfaça mais algumas hipóteses. Suponhamos que

i. Para todo $(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}$, a função f é duas vezes diferenciável em p, e

$$|f_{pp}(x,u,p)| \leq L, \tag{3.12}$$

onde $L > 0$ independe de x, u e p. Existe um $\nu > 0$ tal que

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} f_{p_\alpha p_\beta}(x,u,p)\xi_\alpha\xi_\beta \geq \; \nu|\xi|^2 \;\; \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.13}$$

ii. A função $(1+|p|^2)^{-1}f(x,u,p)$ é contínua em $\Omega \times \mathbb{R}$ uniformemente em $p \in \mathbb{R}^n$. Portanto, existe uma função limitada, contínua, côncava e crescente $w(t)$, com $w(0) = 0$, tal que

$$|f(x,u,p) - f(y,v,p)| \;\leq\; w(|x-y|^2 + |u-v|^2)(1+|p|^2), \tag{3.14}$$

onde w é uma função de uma variável.

O resultado principal desta seção é o Teorema 3.10, onde provamos que Du é Hölder contínua. Os resultados desta seção estão em [6].

Lema 3.7 *Seja o funcional*

$$F^0(\psi, B_R) \;=\; \int_{B_R} f(x_0, \{u\}_{x_0,R}, D\psi)dx \tag{3.15}$$

e v o minimo de F^0 em B_R entre todas as funções que valem u em ∂B_R. Suponhamos que vale (3.13) *e $w = u - v$. Então*

$$\int_{B_R} |Dw|^2 dx \leq \frac{2}{\nu}[F^0(u; B_R) - F^0(v; B_R)].$$

Prova. Seja $f^0 : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por $f^0(p) = f(x_0, \{u\}_{x_0,R}, p)$.
Pela fórmula de Taylor com resto integral, temos

$f^0(p+h) \; = \; f^0(p) + df^0(p)h + r_2(h)$, onde

$r_2(h) = \int_0^1 (1-t) d^2 f^0(p+th)h^2 \, dt.$

Tomando $w = u - v$, $h = Dw$ e $p = Dv$, temos

$f^0(Dw+Dv) = f^0(Dv) + f^0_{p_\alpha}(Dv)D_\alpha w + \int_0^1 (1-t) f^0_{p_\alpha p_\beta}(Dv + tDw) D_\alpha w D_\beta w \, dt,$

onde o somatório sobre índices repetidos fica subentendido.

Então

$$\begin{aligned} f^0(Du) - f^0(Dv) \;&=\; f^0_{p_\alpha}(Dv)D_\alpha w \\ &+ \int_0^1 (1-t) f^0_{p_\alpha p_\beta}(Dv + t(Du - Dv)) D_\alpha w D_\beta w \; dt = \\ f^0_{p_\alpha}(Dv)D_\alpha w \;&+\; \int_0^1 (1-t) f^0_{p_\alpha p_\beta}(tDu + (1-t)Dv) D_\alpha w D_\beta w \; dt. \end{aligned}$$

Como f^0 satifaz (3.13), temos

$$\begin{aligned} f^0_{p_\alpha}(Dv)D_\alpha w \;&+\; \int_0^1 (1-t) f^0_{p_\alpha p_\beta}(tDu + (1-t)Dv) D_\alpha w D_\beta w \; dt \geq \\ f^0_{p_\alpha}(Dv)D_\alpha w \;&+\; \int_0^1 (1-t)\nu |Dw|^2 \; dt = \\ f^0_{p_\alpha}(Dv)D_\alpha w \;&+\; \int_0^1 \nu |Dw|^2 \; dt - \int_0^1 t\nu |Dw|^2 \, dt = \\ f^0_{p_\alpha}(Dv)D_\alpha w \;&+\; \nu |Dw|^2 t \Big|_0^1 - \frac{t^2}{2}\nu |Dw|^2 t \Big|_0^1 \; = \\ f^0_{p_\alpha}(Dv)D_\alpha w \;&+\; \frac{1}{2}\nu |Dw|^2. \end{aligned}$$

Então

$$\int_{B_R} f^0(Du) - f^0(Dv)\;dx \geq \int_{B_R} f^0_{p_\alpha}(Dv) D_\alpha w\;dx + \frac{\nu}{2}\int_{B_R} |Dw|^2\;dx.$$

Como v minimiza F^0 em B_R, entre todas as funções que valem u em ∂B_R, temos que v é solução fraca da Eq. de Euler Lagrange

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha\left(f^0_{p_\alpha}(Dv)\right) \;=\; 0 & \text{em } B_R \\ v \;=\; u & \text{em } \partial B_R. \end{cases}$$

Então

$$\int_{B_R} f^0_{p_\alpha}(Dv) D_\alpha \varphi\;dx \;=\; 0,\;\; \forall\,\varphi \,\in\, W_0^{1,2}(B_R). \tag{3.16}$$

Como $w = u - v$ e $u = v$ em ∂B_R, temos $w \in W_0^{1,2}(B_R)$. Portanto,

$$\int_{B_R} f^0_{p_\alpha}(Dv) D_\alpha w\,dx \;=\; 0,$$

onde o somatório sobre índices repetidos fica subentendido.

Então

$$\frac{2}{\nu}\Big[\int_{B_R} f^0(Du)\,dx \;-\; \int_{B_R} f^0(Dv)\,dx\Big] \;\geq\; \int_{B_R} |Dw|^2\,dx.$$

Logo

$$\int_{B_R} |Dw|^2\,dx \;\leq\; \frac{2}{\nu}[F^0(u, B_R) \;-\; F^0(v, B_R)].$$

□

Lema 3.8 *Seja $\phi(t)$ uma função não negativa e não decrescente. Dados A, μ, β constantes positivas e B, ε constantes não negativas, $\beta < \mu$, existe uma constante $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(A, \mu, \beta) > 0$ e $c = c(A, \mu, \beta)$ tais que se*

$$\phi(\rho) \leq A\Big[\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^\mu + \varepsilon\Big]\phi(R) + BR^\beta$$

para todo $\rho \leq R \leq R_0$ e $\varepsilon < \varepsilon_0$, então

$$\phi(\rho) \leq c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^\beta[\phi(R) + BR^\beta].$$

Prova. Por hipótese, $\phi(\rho) \leq A\Big[\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{\mu} + \varepsilon\Big]\phi(R) + BR^{\beta}$. Então, para $0 < \tau < 1$ e $R \leq R_0$, temos

$$\begin{aligned}\phi(\tau R) &\leq A\Big[\left(\frac{\tau R}{R}\right)^{\mu} + \varepsilon\Big]\phi(R) + BR^{\beta} = A[\tau^{\mu} + \varepsilon]\phi(R) + BR^{\beta}\\ &= A\tau^{\mu}[1 + \varepsilon\tau^{-\mu}]\phi(R) + BR^{\beta} \leq A\tau^{\mu}[1 + \varepsilon_0\tau^{-\mu}]\phi(R) + BR^{\beta}.\end{aligned}$$

Seja $\delta \in (\beta, \mu)$. Escolhendo $\tau < 1$, de maneira que, $2A\tau^{\mu} \leq \tau^{\delta}$ e tomando $\varepsilon_0 < \tau^{\mu}$, temos que, para todo $R \leq R_0$

$$\begin{aligned}\phi(\tau R) &\leq A\tau^{\mu}[1+1]\phi(R) + BR^{\beta}\\ &= 2A\tau^{\mu}\phi(R) + BR^{\beta} = \tau^{\delta}\phi(R) + BR^{\beta}\end{aligned}$$

Então, para todo inteiro $k > 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\phi(\tau^{k+1}R) = \phi(\tau(\tau^k R)) \leq \tau^{\delta}\phi(\tau^k R) + B(\tau^k R)^{\beta} = \tau^{\delta}\phi(\tau^k R) + B\tau^{k\beta}R^{\beta}\\
&= \tau^{\delta}(\phi(\tau(\tau^{k-1}R))) + B\tau^{k\beta}R^{\beta} \leq \tau^{\delta}(\tau^{\delta}\phi(\tau^{k-1}R) + B\tau^{(k-1)\beta}R^{\beta}) + B\tau^{k\beta}R^{\beta}\\
&\leq \tau^{2\delta}(\tau^{\delta}\phi(\tau^{k-2}R) + B\tau^{(k-2)\beta}R^{\beta}) + B\tau^{k\beta}R^{\beta}(\tau^{\delta}\tau^{-\beta} + 1)\\
&= \tau^{3\delta}\phi(\tau^{k-2}R) + B\tau^{k\beta}R^{\beta}(\tau^{2\delta-2\beta} + \tau^{\delta-\beta} + 1)\\
&\quad\leq \ldots \leq \tau^{k\delta}\phi(\tau^{k-(k-1)}R) + B\tau^{k\beta}R^{\beta}(\tau^{(k-1)\delta-(k-1)\beta}\\
&\quad+ \ldots + \tau^{2\delta-2\beta} + \tau^{\delta-\beta} + 1)\\
&\quad= \tau^{k\delta}\phi(\tau R) + B\tau^{k\beta}R^{\beta}(\tau^{(k-1)\delta-(k-1)\beta}\\
&\quad+ \ldots + \tau^{2\delta-2\beta} + \tau^{\delta-\beta} + 1)\\
&\quad\leq \tau^{k\delta}(\tau^{\delta}\phi(R) + BR^{\beta}) + B\tau^{k\beta}R^{\beta}(\tau^{(k-1)\delta-(k-1)\beta}\\
&\quad+ \ldots + \tau^{2\delta-2\beta} + \tau^{\delta-\beta} + 1)\\
&\quad= \tau^{(k+1)\delta}\phi(R) \;+\; B\tau^{k\beta}R^{\beta}\sum_{j=0}^{k}\tau^{j(\delta-\beta)} \;\leq\; c\tau^{(k+1)\beta}[\phi(R) + BR^{\beta}].
\end{aligned}$$

Dado $\rho > 0$, existe $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, tal que $\tau^{k+1}R < \rho < \tau^k R$. Assim, temos que $\tau^{k+1} < \frac{\rho}{R} < \tau^k$. A partir disto, como ϕ é não decrescente,

$$\begin{aligned}\phi(\rho) &\leq \phi(\tau^k R) \leq c\tau^{k\beta}[\phi(R) + BR^{\beta}]\\ &= \frac{c\tau^{(k+1)\beta}}{\tau^{\beta}}[\phi(R) + BR^{\beta}] \leq \frac{c}{\tau^{\beta}}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\beta}[\phi(R) + BR^{\beta}].\end{aligned}$$

Logo

$$\phi(\rho) \;\leq\; c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\beta}[\phi(R) \;+\; BR^{\beta}].$$

$\square$

Teorema 3.9 *Seja u um mínimo local do funcional*

$$F(w,\Omega) \;=\; \int_{\Omega} f(x,w,Dw)\,dx \tag{3.17}$$

com f satisfazendo (3.10), (3.12), (3.13) *e* (3.14). *Então Du pertence a* $L^{2,n-\varepsilon}_{loc}(\Omega)$.

Prova. Seja $B_R \subset\subset \Omega$ e v o mínimo do funcional F^0 definido em (3.15) entre todas as funções que valem u em ∂B_R.
Vamos estimar primeiro a oscilação de v em B_R. Seja $k > k_0 = \sup\limits_{B_R} u$, $m = \min(v,k)$ e $A_k = \{x \in B_R; v(x) > k\}$.
Note que $m = \min\limits_{\partial B_R}(v,k) = v$, pois $v = u$ em ∂B_R e $k > \sup\limits_{B_R} u \geq u$, então $k > v$ em ∂B_R. Portanto, $m = u$ em ∂B_R. Então

$$F^0(v;B_R) \;\leq\; F^0(m;B_R).$$

Além disso, $m = v$ em $B_R \setminus A_k$ e $m = k$ em A_k. Então, usando a definição de f^0 dada no Lema 3.7 e a desigualdade (3.10),

$$\begin{aligned}
0 \;&\geq\; F^0(v;B_R) - F^0(m;B_R) = F^0(v;A_k) - F^0(k;A_k)\\
&=\; \int_{A_k} f(x_0,\{u\}_{x_0,R},Dv)\,dx - \int_{A_k} f(x_0,\{u\}_{x_0,R},Dk)\,dx\\
&=\; \int_{A_k} f^0(Dv)\,dx - \int_{A_k} f^0(Dk)\,dx\\
&=\; \int_{A_k} f^0(Dv)\,dx - |d||A_k|\\
&\geq\; \int_{A_k} (|Dv|^2 - c)\,dx - |d||A_k|\\
&=\; \int_{A_k} |Dv|^2\,dx - (c+|d|)|A_k|,
\end{aligned}$$

onde $|d| = f^0(Dk)$. Logo

$$\int_{A_k} |Dv|^2\,dx \;\leq\; c|A_k|.$$

Observe que v é Hölder contínua, pois é mínimo do funcional F^0 que possui as mesmas condições de crescimento do funcional F. Logo A_k é aberto, pois

é a imagem inversa de um conjunto aberto por uma função contínua.
Seja $x_0 \in \partial A_k$. Se $x_0 \in \partial B_R$, então $v(x_0) = u(x_0) < k$, portanto $x_0 \in \mathrm{int}(\Omega \setminus \mathrm{A_k})$, contradizendo $x_0 \in \partial A_k$. Então $x_0 \in B_R$. Assim $x_0 \in \partial A_k \cap B_R$ e então existe $x_n \in A_k$ tal que $x_n \to x_0$ e $y_n \in B_R \setminus A_k$ tal que $y_n \to x_0$. Como v é contínua $v(x_n) \to v(x_0)$ e $v(x_n) > k$. Analogamente $v(y_n) \to v(x_0)$ e $v(y_n) \leq k$. Então, $v(x_0) = k$.
Concluimos que $v - k = 0$ em ∂A_k.
Usando a desigualdade de Hölder seguida da desigualdade de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{A_k} (v-k)\, dx &\leq \left(\int_{A_k} (v-k)^{2^*}\, dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int_{A_k} (1)^{\frac{2^*}{2^*-1}}\, dx\right)^{1-\frac{1}{2^*}} \\ &\leq D\left(\int_{A_k} |Dv|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} |A_k|^{\frac{n+2}{2n}} \\ &\leq D(c|A_k|)^{\frac{1}{2}} |A_k|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \\ &\leq D(c)^{\frac{1}{2}} |A_k|^{1+\frac{1}{n}} \leq C|A_k|^{1+\varepsilon},\ \text{onde}\ \ \varepsilon = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Então

$$\int_{A_k} (v-k)\, dx \ \leq\ C|A_k|^{1+\varepsilon},\ \ \forall\, k \geq k_0 = \sup_{B_R} u.$$

Seja $f : (k_0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(k) = \int_{A_k} (v-k)\, dx.$$

Pelo Teorema de Fubini,

$$\int_{A_k} (v-k)\, dx \ =\ \int_k^{+\infty} |A_t|\, dt.$$

Assim, $f(k) = \int_k^{+\infty} |A_t|\, dt$ e portanto, pelo Teorema de Leibniz, temos

$$f'(k) = -|A_k|.$$

Então

$$f(k) \ \leq\ C|A_k|^{1+\varepsilon} = C(-f'(k))^{1+\varepsilon}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}f'(k) &\leq -\frac{1}{C^{\frac{1}{1+\varepsilon}}} f(k)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \\ &\leq -cf(k)^{\mu},\ \text{onde}\ \ \mu = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1.\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{f'(k)}{f(k)^{\mu}} \leq -c.$$

Seja $k_M = \sup\limits_{B_R} v$.

$$\begin{aligned}
\int_{k_0}^{k_M} \frac{f'(k)}{f(t)^{\mu}}\, dt &\leq \int_{k_0}^{k_M} -c\, dt \Rightarrow \\
\int_{f(k_0)}^{f(k_M)} s^{-\mu}\, ds &\leq -c(k_M - k_0) \Rightarrow \\
\frac{f(k_M)^{-\mu+1}}{-\mu+1} - \frac{f(k_0)^{-\mu+1}}{-\mu+1} &\leq -c(k_M - k_0).
\end{aligned}$$

Então, como $f(k_M) = 0$,

$$\begin{aligned}
k_M &\leq k_0 + \frac{f(k_0)^{1-\mu}}{c(1-\mu)} \leq k_0 + Ef(k_0)^{1-\mu} \\
&= k_0 + Ef(k_0)^{1-\frac{1}{1+\varepsilon}} = k_0 + Ef(k_0)^{\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}} \\
&\leq k_0 + E\left(\int_{A_{k_0}} (v - k_0)\, dx\right)^{\frac{1}{n+1}}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder seguida da desigualdade de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned}
k_M &\leq k_0 + E\left[\left(\int_{A_{k_0}} (v-k_0)^{2^*}\, dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \int_{A_{k_0}} (1)^{\frac{n+2}{2n}}\right]^{\frac{1}{n+1}} \\
&\leq k_0 + C\left[\left(\int_{A_{k_0}} |Dv|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} |A_{k_0}|^{\frac{n+2}{2n}}\right]^{\frac{1}{n+1}} \\
&\leq k_0 + C\left[c^{\frac{1}{2}} |A_{k_0}|^{\frac{1}{2}} |A_{k_0}|^{\frac{n+2}{2n}}\right]^{\frac{1}{n+1}} \\
&\leq k_0 + d|A_{k_0}|^{\frac{1}{n}} \\
&\leq k_0 + d|B_R|^{\frac{1}{n}} = k_0 d(\omega_n R^n)^{\frac{1}{n}} \\
&\leq k_0 + cR.
\end{aligned}$$

Como $k_M = \sup\limits_{B_R} v$ e $k_0 = \sup\limits_{B_R} u$, concluímos que

$$\sup_{B_R} v \leq \sup_{B_R} u + cR.$$

Analogamente

$$\inf_{B_R} v \geq \inf_{B_R} u - cR.$$

Então

$$\begin{aligned}\operatorname*{osc}_{B_R} v &\leq \operatorname*{osc}_{B_R} u + 2cR \\ \leq cR^\alpha + cR &\leq cR^\alpha, \text{ já que } \; u \in C^{0,\alpha}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Agora vamos estimar o supremo de $|Dv|$ em $B_{\frac{R}{2}}$. Como v minimiza F^0 em B_R entre todas as funções que valem u em ∂B_R, temos que v é solução fraca da equação de Euler-Lagrange, ou seja,

$$\int_{B_R} \sum_{\alpha=1}^{n} f^0_{p_\alpha}(Dv) D_\alpha \varphi \;=\; 0, \;\; \forall \varphi \in W^{1,2}_0(B_R).$$

Então, pelo Teorema 2.13, temos que, $v \in W^{2,2}_{loc}(B_R)$ e que as derivadas $D_\gamma v$; $\gamma = 1, \ldots, n$, são soluções fracas da equação elíptica, cuja formulação variacional é

$$\int_{B_R} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} f^0_{p_\alpha p_\beta}(Dv) D_\beta(D_\gamma v) D_\alpha \varphi \, dx = 0 \;\; \forall \varphi \in W^1_0(B_R). \tag{3.19}$$

Tomando $\varphi = \eta D_\gamma v$, $\eta \in C^\infty_0(B_R)$, temos

$$\int_{B_R} f^0_{p_\alpha p_\beta}(Dv) D_\beta(D_\gamma v)(\eta D_\alpha(D_\gamma v) + D_\gamma v D_\alpha \eta) \, dx \;=\; 0, \tag{3.20}$$

onde o somatório sobre índices repetidos fica subentendido. Então

$$\begin{aligned}\int_{B_R} f^0_{p_\alpha p_\beta}(Dv) \eta D_\beta(D_\gamma v) D_\alpha(D_\gamma v) \, dx \;\; &+ \\ \int_{B_R} f^0_{p_\alpha p_\beta}(Dv) D_\beta(D_\gamma v) D_\gamma v D_\alpha \eta \, dx \;\; &= \;\; 0\end{aligned}$$

Fazendo somatório sobre γ, temos que $z = |Dv|^2$, satisfaz

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{B_R} f^0_{p_\alpha p_\beta}(Dv) D_\beta z D_\alpha \eta \;\; &= \\ -\int_{B_R} \sum_{\gamma=1}^{n} f^0_{p_\alpha p_\beta}(Dv) \eta D_\beta(D_\gamma v) D_\alpha(D_\gamma v) \;\; &= \\ -\int_{B_R} \sum_{\gamma=1}^{n} f_{p_\alpha p_\beta}(x_0, \{u\}_{x_0,R}, Dv) \eta D_\beta(D_\gamma v) D_\alpha(D_\gamma v) \;\; &\leq \\ -\nu \int_{B_R} \eta |D^2 v|^2 \leq 0, \quad \forall \eta \in C^\infty_0(B_R), \; \eta \;\; &\geq \;\; 0,\end{aligned}$$

onde a ultima desigualdade vem do fato de f satisfazer (3.13). Então

$$\int_{B_R} f^0_{p_\alpha p_\beta}(Dv) D_\beta z D_\alpha \eta \ \leq \ 0. \tag{3.21}$$

Fazendo uma estimativa padrão de equações elípticas (ver [8], p.184), obtemos

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}} |Dv|^2 \leq cR^{-n} \int_{B_R} |Dv|^2 \, dx. \tag{3.22}$$

Como $|Dv|^2 \leq \sup\limits_{B_{\frac{R}{2}}} |Dv|^2$, temos que para todo $\rho < \frac{R}{2}$,

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho} |Dv|^2 \, dx \ &\leq \ \int_{B_\rho} \sup_{B_{\frac{R}{2}}} |Dv|^2 \, dx \\ &\leq \ \sup_{B_{\frac{R}{2}}} |Dv|^2 \omega_n \rho^n \leq \omega_n \rho^n c R^{-n} \int_{B_R} |Dv|^2 \, dx \\ &\leq \ C\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_{B_R} |Dv|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Trocando a contante C na desigualdade acima, temos que esta vale para todo $\rho < R$. Então para todo $\rho < R$, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho} |Du|^2 \, dx \ &= \ \int_{B_\rho} |D(u - v + v)|^2 \, dx \\ &\leq \ 2\int_{B_\rho} |D(u-v)|^2 \, dx + 2\int_{B_\rho} |Dv|^2 \, dx \\ &\leq \ c\Big\{ \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_{B_R} |Dv|^2 \, dx + \int_{B_R} |D(u-v)|^2 \, dx \Big\}. \end{aligned}$$

Tomando $v = v - u + u$ e substituindo na desigualdade acima, obtemos

$$\int_{B_\rho} |Du|^2 \, dx \leq c\Big\{ \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_{B_R} |Du|^2 \, dx + \int_{B_R} |D(u-v)|^2 \, dx \Big\}. \tag{3.23}$$

Agora vamos estimar a última integral de (3.23). Pelo Lema 3.7, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |D(u-v)|^2 \, dx \ &\leq \ \frac{2}{\nu}[F^0(u; B_R) - F^0(v; B_R)] \\ &= \ \frac{2}{\nu}\int_{B_R} [f(x_0, \{u\}_{x_0,R}, Du) - f(x, u, Du)] \, dx \\ &+ \ \frac{2}{\nu}\int_{B_R} [f(x, v, Dv) - f(x_0, \{u\}_{x_0,R}, Dv)] \, dx \\ &+ \ \frac{2}{\nu} F(u; B_R) - F(v; B_R) \end{aligned} \tag{3.24}$$

Definindo $v = u$ em $\Omega \setminus B_R$, então

$$\begin{aligned}
F^0(u; B_R) - F^0(v; B_R) = F^0(u; \Omega) - F^0(v; \Omega) &= \\
\int_\Omega [f(x_0, \{u\}_{x_0,R}, Du) - f(x, u, Du)]\, dx &+ \\
\int_\Omega [f(x, v, Dv) - f(x_0, \{u\}_{x_0,R}, Dv)]\, dx &+ \\
F(u; \Omega) - F(v; \Omega) &\leq \\
\int_\Omega [f(x_0, \{u\}_{x_0,R}, Du) - f(x, u, Du)]\, dx &+ \\
\int_\Omega [f(x, v, Dv) - f(x_0, \{u\}_{x_0,R}, Dv)]\, dx,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

visto que u é mínimo de $F(w; \Omega)$.
Lembrando que $v = u$ em $\Omega \setminus B_R$ e usando a desigualdade (3.14), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega [f(x_0, \{u\}_{x_0,R}, Du) - f(x, u, Du)]\, dx &+ \\
\int_\Omega [f(x, v, Dv) - f(x_0, \{u\}_{x_0,R}, Dv)]\, dx &= \\
\int_{B_R} [f(x_0, \{u\}_{x_0,R}, Du) - f(x, u, Du)]\, dx &+ \\
\int_{B_R} [f(x, v, Dv) - f(x_0, \{u\}_{x_0,R}, Dv)]\, dx &\leq \\
\int_{B_R} |f(x_0, \{u\}_{x_0,R}, Du) - f(x, u, Du)|\, dx &+ \\
\int_{B_R} |f(x, v, Dv) - f(x_0, \{u\}_{x_0,R}, Dv)|\, dx &\leq \\
\int_{B_R} (1 + |Du|^2) w(|x_0 - x|^2 + |\{u\}_{x_0,R} - u|^2)\, dx &+ \\
\int_{B_R} (1 + |Dv|^2) w(|x - x_0|^2 + |v - \{u\}_{x_0,R}|^2)\, dx.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Estimativa de $|v - \{u\}_{x_0,R}|^2$:

$$|v - \{u\}_{x_0,R}|^2 \leq 2|v - u|^2 + 2|u - \{u\}_{x_0,R}|^2.$$

Como $u, v \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ e $u = v$ em ∂B_R, temos que, para todo $y \in \partial B_R$ e

$x \in B_R$,

$$\begin{aligned} |v(x) - u(x)| &\leq |v(x) - v(y)| + |v(y) - u(y)| + |u(y) - u(x)| \\ &\leq c|x - y|^{\alpha} + d|x - y|^{\alpha} \leq CR^{\alpha}. \end{aligned}$$

Então $|v - \{u\}_{x_0,R}|^2 \leq 2CR^{2\alpha} + 2|u - \{u\}_{x_0,R}|^2$.

Como u e $\{u\}_{x_0,R}$ em B_R estão entre $\sup\limits_{B_R} u$ e o $\inf\limits_{B_R} u$, temos

$$|u - \{u\}_{x_0,R}|^2 \leq |\sup_{B_R} u - \inf_{B_R} u|^2 = |\operatorname*{osc}_{B_R} u|^2 \leq cR^{2\alpha}.$$

Então $|v - \{u\}_{x_0,R}|^2 \leq 2CR^{2\alpha} + 2cR^{2\alpha} \leq CR^{2\alpha}$.
Usando isto, (3.24), (3.25), (3.26) e notando que w é uma função crescente, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |D(u - v)|^2 \, dx &\leq \frac{2}{\nu} \int_{B_R} (1 + |Du|^2) w(|x_0 - x|^2 + |\{u\}_{x_0,R} - u|^2) \, dx \\ &+ \frac{2}{\nu} \int_{B_R} (1 + |Dv|^2) w(|x - x_0|^2 + |v - \{u\}_{x_0,R}|^2) \, dx \\ &\leq \frac{2}{\nu} \int_{B_R} (1 + |Du|^2) w(R^2 + CR^{2\alpha}) \, dx \\ &+ \frac{2}{\nu} \int_{B_R} (1 + |Dv|^2) w(R^2 + CR^{2\alpha}) \, dx. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |D(u - v)|^2 \, dx &\leq D \int_{B_R} (1 + |Du|^2) w(CR^{2\alpha}) \, dx \\ &+ D \int_{B_R} (1 + |Dv|^2) w(CR^{2\alpha}) \, dx, \end{aligned} \tag{3.27}$$

onde, $D = \frac{2}{\nu} > 0$, visto que $\alpha \leq 1$ e, portanto, $R^{2\alpha}$ domina R^2. Como w é uma função contínua e $w(0) = 0$, temos que para R suficientemente pequeno $|w(CR^{2\alpha})| \leq \frac{1}{4D}$. Então

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |D(u - v)|^2 \, dx &\leq Dw(CR^{2\alpha}) \int_{B_R} (1 + |Du|^2) \, dx \\ &+ \frac{1}{4} \int_{B_R} (1 + |Dv|^2) \, dx. \end{aligned}$$

Tomando $v = v - u + u$ e substituindo na última desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |D(u-v)|^2\,dx &\leq cw(CR^{2\alpha})\int_{B_R}(1+|Du|^2)\,dx\\ &= cw_1(R)\int_{B_R}(1+|Du|^2)\,dx, \qquad (3.28)\end{aligned}$$

onde $w_1(R) = w(CR^{2\alpha})$. Substituindo a estimativa (3.28) em (3.23), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho}|Du|^2\,dx &\leq c\Big\{\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n\int_{B_R}|Du|^2\,dx + w_1(R)\int_{B_R}(1+|Du|^2)\,dx\Big\}\\ &\leq C\Big\{\Big[\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n + w_1(R))\Big]\int_{B_R}|Du|^2\,dx + w_1(R)R^n\Big\}\end{aligned}$$

Como $w_1(R) \to 0$ quando $R \to 0$, $w_1(R) < \delta < 1$ para R pequeno. Então

$$\int_{B_\rho}|Du|^2\,dx \leq C\Big\{\Big[\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n + \delta\Big]\int_{B_R}|Du|^2\,dx + R^{n-\varepsilon}\Big\},$$

para todo $\varepsilon > 0$ e $\rho < R < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ e R pequeno.
Seja $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ e $R_0 < \operatorname{dist}(\Omega_1, \Omega)$ pequeno. Então, para todo $x_0 \in \Omega_1$ e $\rho < R_0$, temos

$$\int_{B_\rho(x_0)}|Du|^2\,dx \leq C\Big\{\Big[\Big(\frac{\rho}{R_0}\Big)^n + \delta)\Big]\int_{B_{R_0(x_0)}}|Du|^2\,dx + R_0^{n-\varepsilon}\Big\}.$$

Definindo $\phi(r) = \int_{B_r}|Du|^2\,dx \quad \forall r > 0$, temos que ϕ é uma função não decrescente e não negativa. Além disso, tomando $\beta = n - \varepsilon$ e $\mu = n$, temos que μ e β são constantes positivas e $\beta < \mu$. Logo pelo Lema 3.8, para δ suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho(x_0)}|Du|^2\,dx &\leq c\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{n-\varepsilon}\left\{\int_{B_{R_0(x_0)}}|Du|^2\,dx + R_0^{n-\varepsilon}\right\}\\ &= \rho^{n-\varepsilon}\left\{\left(\frac{c}{R_0^{n-\varepsilon}}\right)\int_{B_{R_0(x_0)}}|Du|^2\,dx + c\right\}\\ &\leq C\rho^{n-\varepsilon},\end{aligned}$$

onde $C = C(R_0) = \frac{c}{R_0^{n-\varepsilon}}\int_\Omega |Du|^2\,dx + c$ e R_0 é tal que $w_1(R_0) < \delta$.

Logo $Du \in L^{2,n-\varepsilon}_{loc}(\Omega)$.

$\square$

Teorema 3.10 *Seja u um mínimo local do funcional*

$$F(\psi, \Omega) \;=\; \int_{\Omega} f(x, \psi, D\psi)\, dx \tag{3.29}$$

com f satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.9. *Suponhamos, além disso, que f é Hölder contínua em (x, u) com expoente 2σ. Mais precisamente, suponhamos que a função w em* (3.14), *satisfaz $w(t) \leq At^{\sigma}$, para $\sigma > 0$. Então a derivada de primeira ordem de u é Hölder contínua em Ω.*

Prova. Seja $B_R \subset \Omega$ e v o mínimo local do funcional F^0 definido em (3.15), entre todas as funções que valem u em ∂B_R. Visto que Dv satisfaz (3.19), temos pelo teorema de De Giorgi (ver [2]), a estimativa

$$\int_{B_\rho} |Dv - \{Dv\}_\rho|^2 dx \leq c \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2\delta} \int_{B_R} |Dv - \{Dv\}_R|^2 dx \tag{3.30}$$

para todo $\delta > 0$. Note que

$$\int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho|^2 dx \;=\; \int_{B_\rho} |D(u-v) + Dv - \{D(u-v)\}_\rho - \{Dv\}_\rho|^2 dx$$

$$\leq 2 \int_{B_\rho} |Dv - \{Dv\}_\rho|^2 dx \;+\; 2 \int_{B_\rho} |D(u-v) - \{D(u-v)\}_\rho|^2 dx.$$

Pelo Lema (2.17), temos

$$\int_{B_\rho} |D(u-v) - \{D(u-v)\}_\rho|^2\, dx \;\leq\; 4 \int_{B_\rho} |D(u-v)|^2\, dx$$

Apartir disto, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho|^2\, dx \;&\leq\; 2 \int_{B_\rho} |Dv - \{Dv\}_\rho|^2\, dx \\ + 8 \int_{B_\rho} |D(u-v)|^2\, dx \;&\leq\; 2 \int_{B_\rho} |Dv - \{Dv\}_\rho|^2\, dx \\ &\quad+\; 8 \int_{B_R} |D(u-v)|^2\, dx \end{aligned}$$

Logo, usando (3.30), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho|^2\, dx \;&\leq\; c\Big\{ \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2\delta} \int_{B_R} |Dv - \{Dv\}_R|^2\, dx \\ &\quad+\; \int_{B_R} |D(u-v)|^2\, dx \Big\} \end{aligned}$$

Tomando $v = v - u + u$ e substituindo na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho|^2\, dx \;&\leq\; c\Big\{\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2\delta} \int_{B_R} |Du - \{Du\}_R|^2\, dx \\ &+ \int_{B_R} |D(u-v)|^2\, dx\Big\}. \qquad (3.31)\end{aligned}$$

Pela estimativa dada em (3.28), temos

$$\int_{B_R} |D(u-v)|^2\, dx \;\leq\; cw_1(R) \int_{B_R} (1 + |Du|^2)\, dx, \qquad (3.32)$$

onde $w_1(R) = w(CR^{2\alpha})$.

Como $w(t) \leq At^\sigma$, temos $w(CR^{2\alpha}) \leq AC^\sigma R^{2\alpha\sigma} \leq cR^{2\alpha\sigma}$. Então

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |D(u-v)|^2\, dx \;&\leq\; cR^{2\alpha\sigma} \int_{B_R} (1 + |Du|^2)\, dx \qquad (3.33)\\ &=\; cR^{2\alpha\sigma}\omega_n R^n + cR^{2\alpha\sigma} \int_{B_R} |Du|^2\, dx.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.9, $Du \in L^{2,n-\varepsilon}_{loc}(\Omega)$, então $\int_{B_R} |Du|^2\, dx \leq CR^{n-\varepsilon}$.

Logo

$$\int_{B_R} |D(u-v)|^2\, dx \;\leq\; cR^{2\alpha\sigma+n-\varepsilon}.$$

Tomando $\varepsilon = \alpha\sigma$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho|^2\, dx \;&\leq\; C\Big\{\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2\delta} \int_{B_R} |Du - \{Du\}_R|^2\, dx \\ &+ R^{n+\alpha\sigma}\Big\},\end{aligned}$$

para todo $\rho < R$. Seja $\tau = \min\left\{\frac{\alpha\sigma}{2}, \frac{\delta}{2}\right\}$. Então

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho|^2\, dx \;&\leq\; c\Big\{\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+4\tau} \int_{B_R} |Du - \{Du\}_R|^2\, dx \\ &+ R^{n+2\tau}\Big\},\end{aligned}$$

Definindo $\phi(r) = \int_{B_R} |Du - \{Du\}_r|^2\, dx$, $\forall r > 0$, temos que ϕ é não decrescente e não negativa. Tomando $\mu = n + 4\tau$, $\beta = n + 2\tau$, μ, β são constantes positivas e $\beta < \mu$. Logo, pelo Lema 3.8 temos que

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho|^2\, dx \;&\leq\; C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2\tau} \left[\int_{B_R} |Du - \{Du\}_R|^2\, dx + CR^{n+2\tau}\right] \\ &=\; \rho^{n+2\tau}\left(\frac{C}{R^{n+2\tau}} \int_{B_R} |Du - \{Du\}_R|^2\, dx + C\right) \\ &\leq\; c\rho^{n+2\tau}\end{aligned}$$

onde $c = c(R) = \frac{C}{R^{n+2\tau}} \int_\Omega |Du - \{Du\}_\Omega|^2 \, dx \; + \; C$.
Então

$$\int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho|^2 \, dx \;\leq\; c\rho^{n+2\tau}. \tag{3.34}$$

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho| \, dx \;&\leq\; \left(\int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_\rho} (1)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq\; (c\rho^{n+2\tau})^{\frac{1}{2}} (\omega_n \rho^n)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq\; C\rho^{n+\tau}.
\end{aligned}$$

Então

$$\frac{1}{\omega_n \rho^n} \int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho| \, dx \leq \frac{c}{\omega_n} \rho^\tau \leq C\rho^\tau.$$

Logo, pelo Teorema de Campanato, Du é Hölder contínua. Mais precisamente $u \in C^{1,\tau}$ onde $\tau = \min\left\{\frac{\alpha\sigma}{2}, \frac{\delta}{2}\right\}$.

□

Exemplo: Seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mínimo local do funcional

$$J(\psi; \Omega) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \psi_i \psi_j \, dx,$$

onde os coeficientes $a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ e satisfazem $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \;\geq\; \lambda|\xi|^2$ $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$, onde $\lambda > 0$ é conveniente. Então $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Primeiramente verificamos que a função $f(x, u, p) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) p_i p_j$ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.10.

i. $f_{p_\alpha p_\beta}(x, u, p) = \left[\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) p_i p_j \right]_{p_\alpha p_\beta} = 2a_{\alpha\beta}(x)$. Então

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} f_{p_\alpha p_\beta}(x, u, p)\xi_\alpha\xi_\beta = 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 2\lambda|\xi|^2.$$

ii. $f_{p_\alpha p_\beta}(x,u,p) = \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)p_ip_j\right]_{p_\alpha p_\beta} = 2a_{\alpha\beta}(x)$. Então

$$|f_{p_\alpha p_\beta}(x,u,p)| = |2a_{\alpha\beta}(x)| \leq c,$$

pois $a_{ij}(x) \in C^{o,\sigma}(\Omega)$. Logo

$$|f_{pp}(x,u,p)| \leq L.$$

iii.

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)p_ip_j - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y)p_ip_j\right| &\leq \\
\left|\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)-a_{ij}(y))p_ip_j\right| &\leq \\
\left|\sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=1}^{n}(a_{ij}(x)-a_{ij}(y))p_i\right| &\leq \\
\left|\left(\sum_{j=1}^{n} p_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}(x)-a_{ij}(y))p_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right| &\leq \\
\left||p|^2 \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}(x)-a_{ij}(y))^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right| &\leq \\
\left|\left(1+|p|^2\right) \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}(x)-a_{ij}(y))^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right|&.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)p_ip_j}{1+|p|^2} - \frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y)p_ip_j}{1+|p|^2}\right| &\leq \\
\left|\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}(x)-a_{ij}(y))^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right|&,
\end{aligned}$$

onde $\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}(x)-a_{ij}(y))^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$ é uma função de Hölder e não depende de p. Como $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)p_ip_j$ satisfaz as hipóteses do Teorema, temos que Du é uma função Hölder contínua.

Estimativa optimal para o expoente de Hölder α

Na ultima seção do capítulo anterior, provamos que a derivada primeira da função escalar $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in W^{1,2}(\Omega)$ que minimiza o funcional geral

$$F(w;\Omega) \;=\; \int_\Omega f(x,w,Dw)\,dx \tag{4.1}$$

é Hölder contínua, ou seja, $Du \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. O objetivo desta seção é fazer uma estimativa optimal para o expoente de Hölder α. Afim de obtermos esta estimativa, algumas hipóteses a mais sobre a função f, fazem-se necessárias. Vamos supor que, para todo $M > 0$ existe uma constante $c(M)$, tal que, para todo $x, y \in \Omega$, todo u, v com $|u|$,$|v| \leq M$ e todo $p \in \mathbb{R}^n$, temos

$$|f(x,u,p) - f(x,v,p)| \;\leq\; c|u-v|^\gamma|(1+|p|^2)| \tag{4.2}$$

$$|f_p(x,u,p) - f_p(y,v,p)| \;\leq\; c(|x-y|^2 + |u-v|^2)^{\frac{\sigma}{2}}(1+|p|). \tag{4.3}$$

O teorema a seguir pode ser visto em [7].

Teorema 4.1 *Seja u um mínimo local do funcional*

$$F(\psi,\Omega) = \int_\Omega f(x,\psi,D\psi)\,dx.$$

Se f satistaz as hipóteses dadas anteriormente, então $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ com $\alpha = \min\left(\sigma, \frac{\gamma}{2-\gamma}\right)$.

Prova. Primeiro vamos considerar uma situação mais simples.

(B1) Vamos considerar uma função f dependendo somente de p, e satisfazendo (3.12) e (3.13).

Seja w um mínimo local do funcional

$$\int_{\Omega} f(D\psi)\, dx. \tag{4.4}$$

Por [4], temos que para todo $\varepsilon > 0$, existe um $R_0 > 0$ e c, tal que, para todo ρ , R, onde $0 < \rho < R < R_0$,

$$\int_{B_\rho} |Dw - \{Dw\}_\rho|^2\, dx \;\leq\; c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2-\varepsilon} \int_{B_R} |Dw - \{Dw\}_R|^2\, dx. \tag{4.5}$$

(B2) Suponha agora que f independe de u e que (4.3) é satisfeita. Seja v um mínimo local do funcional

$$\int_{\Omega} f(x, D\psi)\, dx.$$

Seja $x_0 \in \Omega$, $R < dist(x_0, \partial\Omega)$ e seja w um mínimo do funcional

$$J(\psi; B_R(x_0)) = \int_{B_R(x_0)} f(x_0, D\psi)\, dx,$$

entre todas as funções que valem v em $\partial B_R(x_0)$.
Se $\rho < R < R_0$, então, por (4.5), temos

$$\int_{B_\rho} |Dv - \{Dv\}_\rho|^2\, dx = \int_{B_\rho} |D(v - w + w) - \{D(v - w + w)\}_\rho|^2\, dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leq\ 2\int_{B_\rho} |Dw - \{Dw\}_\rho|^2\, dx + 2\int_{B_\rho} |D(v-w) - \{D(v-w)\}_\rho|^2\, dx\\
&\leq\ 2c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2-\varepsilon}\int_{B_R} |Dw - \{Dw\}_R|^2 dx + 2\int_{B_\rho} |D(v-w) - \{D(v-w)\}_\rho|^2 dx\\
&=\ 2c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2-\varepsilon}\int_{B_R} |D(w-v) + Dv - \{D(w-v)\}_R - \{Dv\}_R|^2\, dx\\
&+\ 2\int_{B_\rho} |D(v-w) - \{D(v-w)\}_\rho|^2\, dx\\
&\leq\ 2c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2-\varepsilon}\int_{B_R} |D(w-v) - \{D(w-v)\}|^2\, dx\\
&+\ 2c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2-\varepsilon}\int_{B_R} |Dv - \{Dv\}_R|^2\, dx\\
&+\ \ 2\int_{B_\rho} |D(v-w) - \{D(v-w)\}_\rho|^2\, dx.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema 2.17, temos

$$
\int_{B_R} |D(w-v) - \{D(w-v)\}_R|^2\, dx\ \leq\ 4\int_{B_R} |D(w-v)|^2\, dx, \quad \forall\, R.
$$

Então

$$
\begin{aligned}
\int_{B_\rho} |Dv - \{Dv\}_\rho|^2\, dx\ &\leq\ C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2-\varepsilon}\int_{B_R} |Dv - \{Dv\}_R|^2\, dx\\
&+\ C\int_{B_R} |D(v-w)|^2\, dx. \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, pelo Lema 3.7, considerando

$$
F^0(\psi, B_R)\ =\ \int_{B_R} f(x_0, D\psi)\, dx,
$$

temos

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R} |D(v-w)|^2\, dx\ &\leq\ \frac{2}{\nu}[F^0(v, B_R) - F^0(w, B_R)]\\
&\leq\ c\int_{B_R} [f(x_0, Dv) - f(x_0, Dw)]\, dx\\
&=\ c\int_{B_R} [f(x_0, Dv) - f(x_0, Dw) - f(x, Dv) + f(x, Dv)]\, dx.
\end{aligned}
$$

Definindo $w = v$ em $\Omega \setminus B_R$, temos

$$\begin{aligned}
& c\int_{B_R}[f(x_0, Dv) - f(x_0, Dw) - f(x, Dv) + f(x, Dv)]\,dx \\
= \;& c\int_{\Omega}[f(x_0, Dv) - f(x_0, Dw)]\,dx + c\int_{\Omega} f(x, Dv) - c\int_{\Omega} f(x, Dv)\,dx \\
\leq \;& c\int_{\Omega}[f(x_0, Dv) - f(x_0, Dw)]\,dx + c\int_{\Omega} f(x, Dw) - c\int_{\Omega} f(x, Dv)\,dx \\
= \;& c\int_{\Omega}[f(x_0, Dv) - f(x_0, Dw) - f(x, Dv) + f(x, Dw)]\,dx \\
= \;& c\int_{B_R}[f(x_0, Dv) - f(x_0, Dw) - f(x, Dv) + f(x, Dw)]\,dx,
\end{aligned}$$

pois $w = v$ em $\Omega \setminus B_R$ e v minimiza $\int_\Omega f(x, D\psi)\,dx$.
Logo

$$\int_{B_R}|D(v-w)|^2\,dx \leq c\int_{B_R}[f(x_0, Dv) - f(x_0, Dw) - f(x, Dv) + f(x, Dw)]\,dx. \tag{4.7}$$

Considerando $g(p) = f(x,p) - f(x_0,p)$, temos pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$g(Dw) - g(Dv) = \int_0^1 g_{p_\alpha}(tDw + (1-t)Dv)D_\alpha(w-v)\,dt.$$

Então

$$|g(Dw) - g(Dv)| = \left|\int_0^1 g_{p_\alpha}(Dv + t(Dw - Dv))D_\alpha(w-v)\,dt\right|$$

$$\leq \int_0^1 |f_{p_\alpha}(x, Dv + tD(w-v)) - f_{p_\alpha}(x_0, Dv + tD(w-v))||D_\alpha(w-v)|\,dt.$$

Portanto, usando (4.3), temos

$$\begin{aligned}
|g(Dw) - g(Dv)| \leq \int_0^1 \Big[c\left((x-x_0)^2\right)^{\frac{\sigma}{2}}(1 + |Dv + tD(w-v))| \\
|D_\alpha(w-v)|\Big]\,dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 c(x-x_0)^\sigma(1+|Dv+tD(w-v)|)|D_\alpha(w-v)|\,dt\\
&= c|x-x_0|^\sigma|D_\alpha(w-v)|\int_0^1 dt + c|x-x_0|^\sigma|D_\alpha(w-v)||Dv|\int_0^1 dt\\
&+ c|x-x_0|^\sigma|D_\alpha(w-v)||D(w-v)|\int_0^1 t\,dt\\
&= c|x-x_0|^\sigma|D_\alpha(w-v)|(1+|Dv|+\frac{1}{2}|D(w-v)|)\\
&\leq c|x-x_0|^\sigma|D(w-v)|(1+|Dv|+|D(w-v)|).
\end{aligned}
$$

Logo

$$
|g(Dw)-g(Dv)| \;\leq\; c|x-x_0|^\sigma(1+|Dv|+|D(w-v)|).
$$

Introduzindo esta inequação em (4.7) temos

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R}|D(v-w)|^2\,dx \;&\leq\; c\int_{B_R}[f(x_0,Dv)-f(x_0,Dw)-f(x,Dv)+f(x,Dw)]\,dx\\
&\leq \left|\int_{B_R} g(Dv)-g(Dw)\,dx\right| \leq \int_{B_R}|g(Dv)-g(Dw)|\,dx\\
&\leq \int_{B_R} c|x-x_0|^\sigma|D(w-v)|(1+|Dv|+|D(w-v)|)\,dx\\
&\leq \int_{B_R} cR^\sigma|D(w-v)|^2\,dx\\
&+ \int_{B_R} cR^\sigma|D(w-v)|(1+|Dv|)\,dx.
\end{aligned}
$$

Então

$$
(1-cR^\sigma)\int_{B_R}|D(w-v)|^2\,dx \leq \int_{B_R} cR^\sigma|D(w-v)|(1+|Dv|)\,dx.
$$

Tomando R tão pequeno,de modo que, $(1-cR^\sigma) \;>\; \frac{1}{2}$, temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{B_R}|D(v-w)|^2\,dx \;&<\; (1-cR^\sigma)\int_{B_R}|D(v-w)|^2\,dx\\
&\leq\; cR^\sigma\int_{B_R}|D(w-v)|(1+|Dv|)\,dx\\
&\leq\; cR^\sigma\left(\int_{B_R}|D(w-v)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_R}(1+|Dv|)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\int_{B_R}|D(v-w)|^2\,dx \leq CR^{2\sigma}\int_{B_R}(1+|Dv|^2)\,dx. \tag{4.8}
$$

Substituindo (4.8) em (4.6), temos

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} |Dv - \{Dv\}_\rho|^2\, dx \;&\leq\; c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2-\varepsilon} \int_{B_R} |Dv - \{Dv\}_R|^2\, dx \\ &+\; CR^{2\sigma} \int_{B_R} (1 + |Dv|^2)\, dx, \qquad (4.9)\end{aligned}$$

para R suficientemente pequeno.

Seja agora u mínimo local do funcional $F(.;\Omega)$ e seja v mínimo local do funcional

$$\tilde{F}(\psi, B_R) \;=\; \int_{B_R} \widetilde{f}(x, D\psi)$$

entre todas funções que valem u em ∂B_R, onde $\widetilde{f}(x,p) = f(x,u(x),p)$.

Pelo mesmo raciocínio do início do Teorema 3.10,

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho|^2\, dx \;&\leq\; 2\int_{B_\rho} |Dv - \{Dv\}_\rho|^2\, dx \\ &+\; 8\int_{B_R} |D(u-v)|^2\, dx.\end{aligned}$$

Logo, usando (4.9), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho|^2\, dx \;&\leq\; c\Big\{ \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2-\varepsilon} \int_{B_R} |Dv - \{Dv\}_R|^2\, dx \\ + R^{2\sigma}\int_{B_R} (1+|Dv|^2)\, dx \;&+\; \int_{B_R} |D(u-v)|^2\, dx\Big\}.\end{aligned}$$

Tomando $v = v - u + u$ e substituindo na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho|^2\, dx \;&\leq\; C\Big\{ \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2-\varepsilon} \int_{B_R} |Du + \{Du\}_R|^2\, dx \\ + R^{2\sigma}\int_{B_R} (1+|Du|^2)\, dx \;&+\; \int_{B_R} |D(u-v)|^2\, dx\Big\}. \qquad (4.10)\end{aligned}$$

Por outro lado, usando o Lema 3.7

$$\begin{aligned}&\int_{B_R} |D(v-u)|^2\, dx \leq c\int_{B_R} [\widetilde{f}(x,Du) - \widetilde{f}(x,Dv)]\, dx \\ =\;& c\int_{B_R} [f(x,u(x),Du) - f(x,u(x),Dv)]\, dx \\ =\;& c\int_{B_R} [f(x,u,Du) - f(x,v,Dv) + f(x,v,Dv) - f(x,u,Dv)]\, dx \\ =\;& c\int_{B_R} [f(x,u,Du) - f(x,v,Dv)]\, dx \\ +\;& c\int_{B_R} [f(x,v,Dv) - f(x,u,Dv)]\, dx.\end{aligned}$$

Definindo $v = u$ em $\Omega \setminus B_R(x_0)$, então

$$\begin{aligned} & c\int_{B_R} [f(x,u,Du) - f(x,v,Dv)]\,dx \ + \ c\int_{B_R} [f(x,v,Dv) - f(x,u,Dv)]\,dx \\ = & \ c\int_{\Omega} [f(x,u,Du) - f(x,v,Dv)]\,dx \ + \ c\int_{\Omega} [f(x,v,Dv) - f(x,u,Dv)]\,dx \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \le \ c\int_{\Omega} [f(x,v,Dv) - f(x,u,Dv)]\,dx \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \ c\int_{B_R} [f(x,v,Dv) - f(x,u,Dv)]\,dx \end{aligned}$$

visto que u é mínimo de $F(\cdot;\Omega)$ e $u = v$ em $\Omega \setminus B_R(x_0)$.
Agora, usando (4.2), obtemos

$$\begin{aligned} c\int_{B_R} [f(x,v,Dv) - f(x,u,Dv)]\,dx \ & \le \ c\int_{B_R} |[f(x,v,Dv) - f(x,u,Dv)]|\,dx \\ & \le \ c\int_{B_R} |v-u|^{\gamma}(1 + |Dv|^2)\,dx \\ & \le \ c\int_{B_R} |v-u|^{\gamma}(1 + |D(v-u) + Du|^2)\,dx \\ & \le \ c\int_{B_R} |v-u|^{\gamma}\,dx \ + \ c\int_{B_R} |v-u|^{\gamma}|D(v-u) + Du|^2\,dx \\ & \le \ c\int_{B_R} |v-u|^{\gamma}\,dx \ + \ 2c\int_{B_R} |v-u|^{\gamma}|D(v-u)|^2\,dx \\ & + \ 2c\int_{B_R} |v-u|^{\gamma}|Du|^2\,dx \\ & \le \ c\int_{B_R} |v-u|^{\gamma}(1 + |Du|^2 + |D(v-u)|^2)\,dx. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |D(v-u)|^2\,dx \ & \le \ c\int_{B_R} |v-u|^{\gamma}(1 + |Du|^2 + |D(v-u)|^2)\,dx \\ \le c\int_{B_R} |v-u|^{\gamma}(1 + |Du|^2)\,dx \ & + \ c\int_{B_R} |v-u|^{\gamma}|D(v-u)|^2\,dx. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Nós observamos agora que u e v são funções Hölder contínuas e $v = u$ em ∂B_R. Então para todo $y \in \partial B_R$ e $x \in B_R$, temos

$$\begin{aligned} |u(x) - v(x)| \ & \le \ |u(x) - u(y)| + |v(x) - v(y)| + |u(y) - v(y)| \\ & \le \ cR^{\alpha} + dR^{\alpha} \le CR^{\alpha}. \end{aligned}$$

Logo se R é suficientemente pequeno, temos $c|u-v|^\gamma \leq CR^{\alpha\gamma} < \frac{1}{2}$. Substituindo em (4.11), obtemos

$$\int_{B_R} |D(v-u)|^2\,dx \leq c\int_{B_R} |v-u|^\gamma(1+|Du|^2)\,dx + \frac{1}{2}\int_{B_R} |D(v-u)|^2\,dx.$$

Então

$$\frac{1}{2}\int_{B_R} |D(v-u)|^2\,dx \quad \leq \quad c\int_{B_R} |v-u|^\gamma(1+|Du|^2)\,dx.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |D(v-u)|^2\,dx &\leq D\int_{B_R} |v-u|^\gamma(1+|Du|^2)\,dx \\ &\leq D\int_{B_R} |v-u|^\gamma\,dx + D\int_{B_R} |v-u|^\gamma|Du|^2\,dx.\end{aligned}$$

Como Du é limitado, temos que

$$D\int_{B_R} |v-u|^\gamma|Du|^2\,dx \leq DM\int_{B_R} |v-u|^\gamma\,dx.$$

Logo

$$\int_{B_R} |D(v-u)|^2\,dx \leq C\int_{B_R} |v-u|^\gamma\,dx. \tag{4.12}$$

Usando a desigualdade de Hölder seguida da desigualdade de Sobolev em (4.12), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |D(v-u)|^2\,dx &\leq C\left(\int_{B_R} (|u-v|^\gamma)^{\frac{2^*}{\gamma}}\,dx\right)^{\frac{\gamma}{2^*}}\left(\int_{B_R} 1^{\frac{2^*}{2^*-\gamma}}\,dx\right)^{1-\frac{\gamma}{2^*}} \\ &\leq C\left[\left(\int_{B_R} |u-v|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{1}{2^*}}\right]^\gamma |B_R|^{1-\frac{\gamma}{2^*}} \\ &\leq C\left[\left(\int_{B_R} |D(u-v)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]^\gamma |B_R|^{1-\frac{\gamma}{2^*}} \\ &= C\left(\int_{B_R} |D(u-v)|^2\,dx\right)^{\frac{\gamma}{2}} |B_R|^{1-\frac{\gamma}{2^*}}.\end{aligned}$$

Então

$$\int_{B_R} |D(v-u)|^2\,dx \leq \left(C|B_R|^{1-\frac{\gamma}{2^*}}\right)^{\frac{2}{2-\gamma}},$$

onde $2^* = \frac{2n}{n-2}$. Logo

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |D(v-u)|^2\, dx &\leq C|B_R||B_R|^{\frac{2\gamma}{(2-\gamma)n}} = Cw_nR^n(w_nR^n)^{\frac{2\gamma}{(2-\gamma)n}}\\ &= Cw_n^{1+\frac{2\gamma}{(2-\gamma)n}}R^{n+\frac{2\gamma}{2-\gamma}} = cR^{n+\frac{2\gamma}{2-\gamma}}.\end{aligned}$$

Introduzindo este resultado em (4.10) e lembrando que $|Du|$ é limitada, obtemos

$$\int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho|^2\, dx \;\leq\; C\Big\{ \Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n+2-\varepsilon} \int_{B_R} |Du + \{Du\}_R|^2 dx$$

$$+R^{2\sigma}\int_{B_R} (1+|Du|^2)\, dx \;+\; \int_{B_R} |D(u-v)|^2\, dx\Big\}$$

$$\leq C\Big\{ \Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n+2-\varepsilon} \int_{B_R} |Du + \{Du\}_R|^2\, dx \;+\; R^{n+2\sigma}(\omega_n + M\omega_n) + cR^{n+\frac{2\gamma}{2-\gamma}}\Big\}.$$

Logo

$$\int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho|^2\, dx \leq c\Big\{ \Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n+2-\varepsilon} \int_{B_R} |Du + \{Du\}_R|^2\, dx + R^{n+2\alpha}\Big\},$$

onde $\alpha = \min\Big\{\sigma, \frac{\gamma}{2-\gamma}\Big\}$.

Definindo $\phi(r) = \int_{B_R} |Du - \{Du\}_r|^2\, dx$, $\forall r > 0$, temos que ϕ é não decrescente e não negativa. Tomando $\mu = n+2-\varepsilon$, $\beta = n+2\alpha$ e $A = C$, temos que A, μ, β são constantes positivas e $\beta < \mu$, caso $\varepsilon < 2-2\alpha$.
Logo pelo Lema 3.8, temos que

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho|^2\, dx &\leq c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n+2\alpha}\Big[\int_{B_R} |Du - \{Du\}_R|^2\, dx \;+\; cR^{n+2\alpha}\Big]\\ &= \rho^{n+2\alpha}\Big(\frac{c}{R^{n+2\alpha}}\int_{B_R} |Du - \{Du\}_R|^2\, dx \;+\; c\Big)\\ &\leq C\rho^{n+2\alpha},\end{aligned}$$

onde $C = C(R) = \frac{c}{R^{n+2\alpha}} \int_\Omega |Du - \{Du\}_\Omega|^2\, dx \;+\; c$.
Então

$$\int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho|^2\, dx \leq C\rho^{n+2\alpha}. \tag{4.13}$$

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho| \, dx &\leq \left(\int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_\rho} (1)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (C\rho^{n+2\alpha})^{\frac{1}{2}} (\omega_n \rho^n)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c\rho^{n+\alpha}.
\end{aligned}
$$

Então

$$\frac{1}{\omega_n \rho^n} \int_{B_\rho} |Du - \{Du\}_\rho| \, dx \leq \frac{c}{\omega_n} \rho^\alpha \leq C\rho^\alpha.$$

Logo, pelo Teorema de Campanato, $Du \in C^{0,\alpha}$, onde $\alpha = \min \left\{ \sigma, \frac{\gamma}{2-\gamma} \right\}$.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] S. Campanato, *"Equazioni ellittiche del secondo ordine spazi $\mathcal{L}^{2,\lambda}$,"* Ann. Mat. Pura Appl., 69 (1965), 321-380.

[2] E. De Giorgi, *"Sulla differenziabilitá e l'analicità delle estremalli degli integrali multipli regolari,"* Mem. Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.(3) 3, 25-43 (1957).

[3] L. C. Evans, *"Partial Differential Equations,"* Department of Mathematics, University of California, Berkeley.

[4] M. Gianquinta, *"Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems,"* Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 105.

[5] M. Giaquinta e E. Giusti, *"On the regularity of minima of variational integrals,"* Acta Math., 148 (1982), 31-46.

[6] M. Giaquinta e E. Giusti, *"Differentiability of minima of non-differentiable funcionals,"* Invent. Math., 72 (1983),285-298.

[7] M. Giaquinta e E. Giusti, *"Sharp estimates for the derivatives of local minima of variational integrals,"* Bollettino U.M.I. (6), 3-A (1984), 239-248.

[8] D. Gilbarg e N. S. Trudinger, *"Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,"* Springer-Verlag, Berlin (1977).

[9] O. A. Ladyzenskaya e N. N. Ural'ceva, *"Quasilinear elliptic equations and variational problems with several independent variables,"* Uspehi Mat.

Nauk 16, n.1 (1961), 19-90 [Russo]. Tradução para o inglês no Russian Math. Surveys 16, n.1 (1961), 17-92.

[10] O. A. Ladyzenskaya e N. N. Ural'ceva, *"Linear and quasilinear elliptic equations,"* New York and London, Academic Press (1968).

[11] C. B. Morrey, *"Second order elliptic equations in several variables and Hölder continuity,"* Math. Z., 72 (1959), 146-164.

[12] J. Nash, *"Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, "* Amer. J. Math., 80 (1958), 931-954.

[13] G. Stampacchia, *"Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane,"* Ann. Mat. Pura Appl. (4), 51 (1960), 1-37.