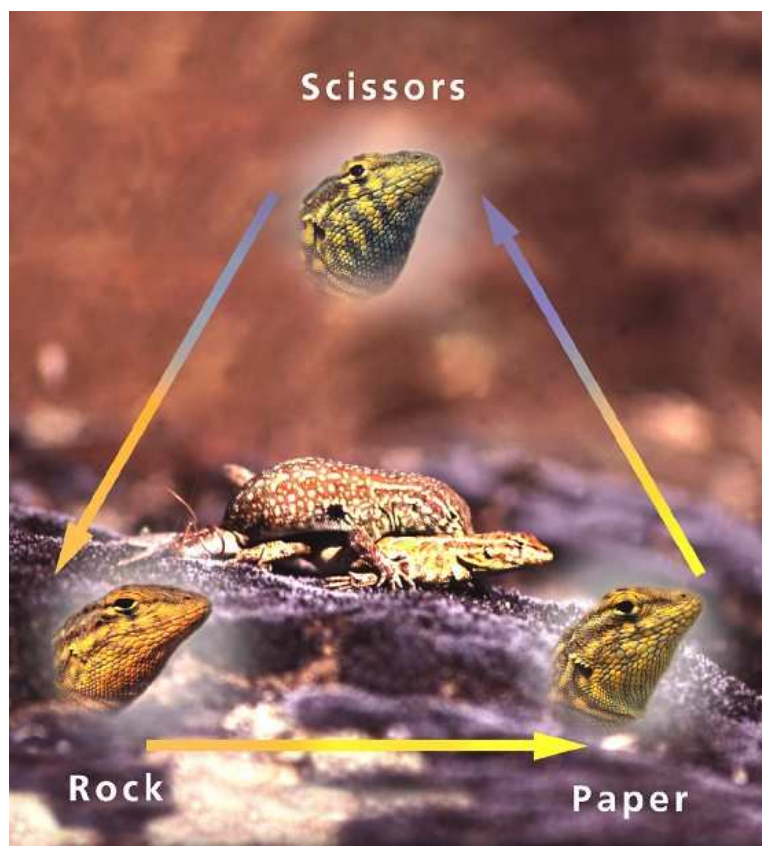


# Competição e Coexistência em Populações Biológicas

## Motivação

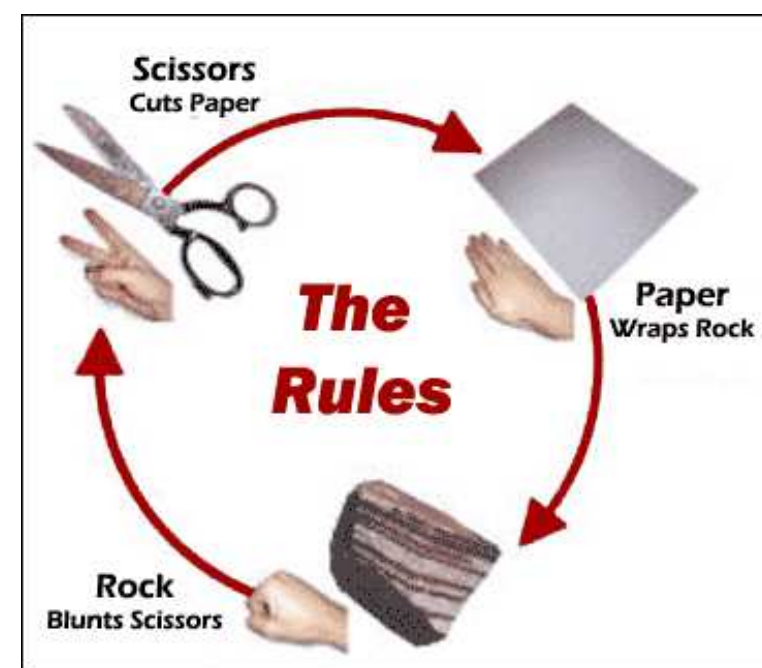


Sinervo e Lively NATURE 380 (1996) 240

- O objetivo deste estudo consiste em descrever, através de um modelo

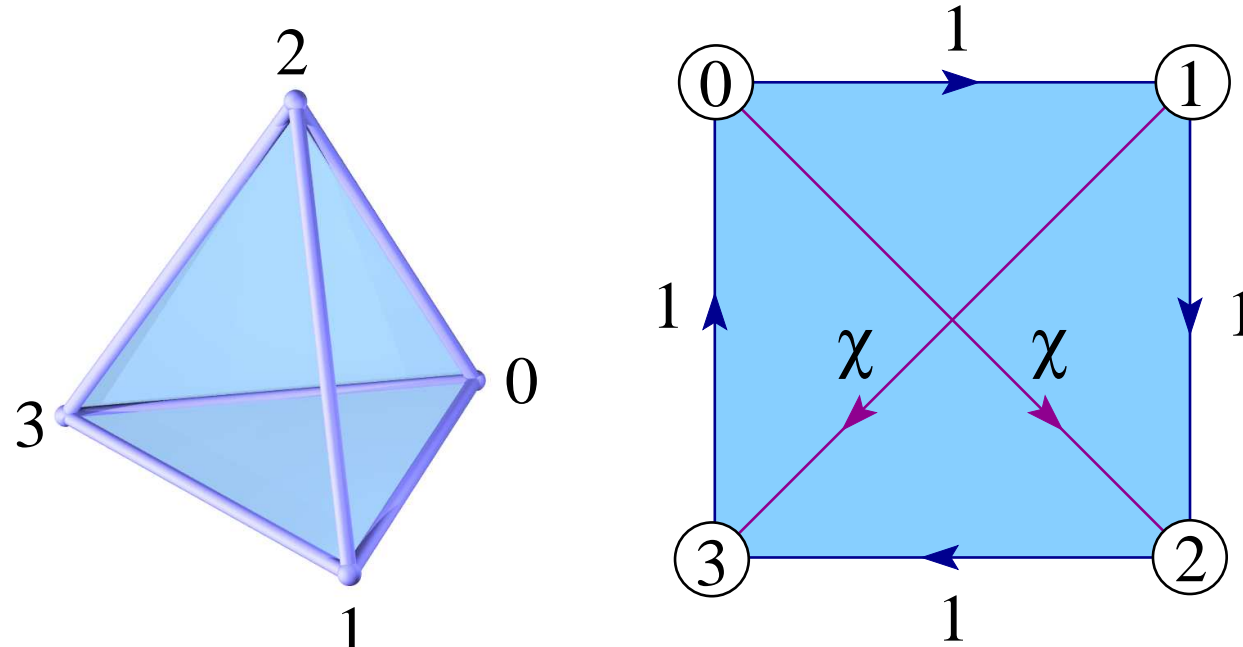
simple e tratável, o comportamento resultante da competição direta entre espécies que interagem ciclicamente.

- Exemplo: competição entre 3 espécies.



## Modelo

- 4 possíveis espécies.
- Uma invasão pode ocorrer, a uma taxa  $1$  ou  $0 \leq \chi \leq 1$ , quando um predador interage com sua presa, conforme o grafo abaixo (direita).
- As densidades populacionais das espécies, em diferentes instantes de tempo, podem ser representadas por pontos  $(\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3)$  em um 3simplex (esquerda). Cada coordenada é dada pela distância entre um dos vértices e o ponto.



## Aproximação de Campo Médio

- Desconsiderando as correlações espaciais, as densidades das quatro estratégias obedecem:

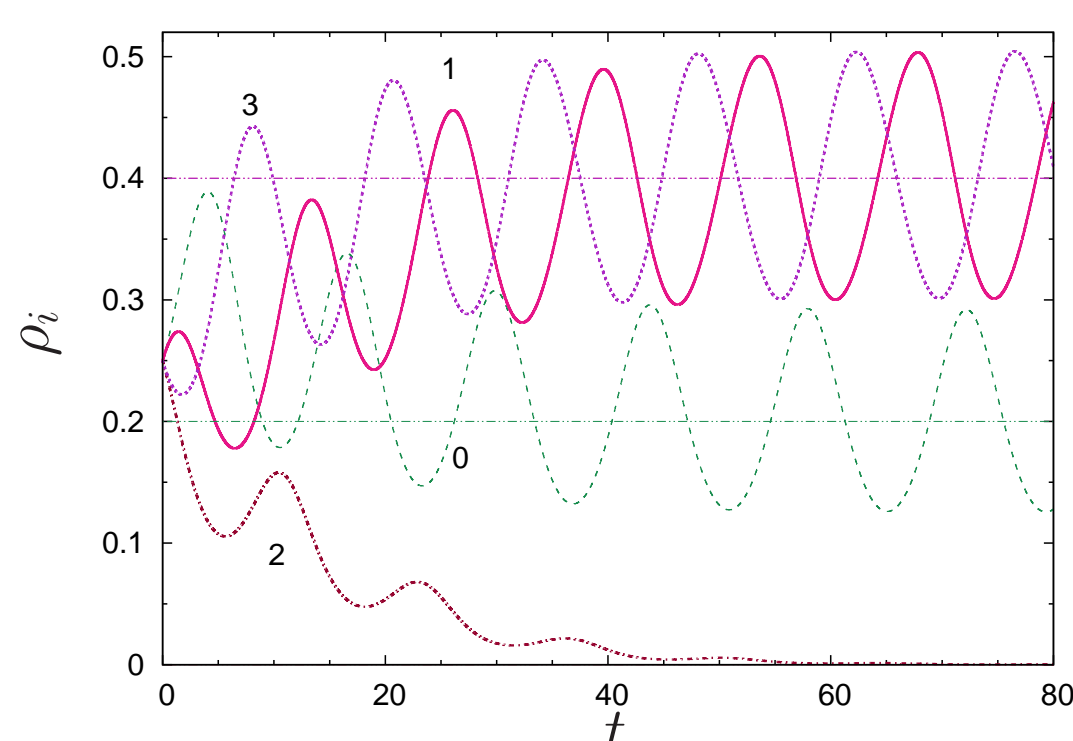
$$\dot{\rho}_i = \sum_{j=0}^3 I_{ij} \rho_i \rho_j$$

- As entradas da matrix de interação,  $I_{ij}$ , correspondem às taxas com que  $i$  invade  $j$

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \chi & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \chi \\ -\chi & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -\chi & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

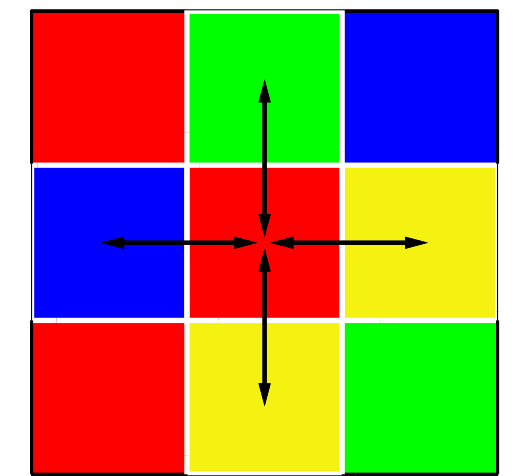
## Soluções

- Para  $\chi > 0$  as densidades (exceto  $\rho_2$ , a qual é nula) oscilam em torno do ponto  $(\frac{\chi}{2+\chi}, \frac{1}{2+\chi}, 0, \frac{1}{2+\chi})$ , após atingido o equilíbrio. O gráfico abaixo corresponde à evolução do sistema para  $\chi = 0.5$ .

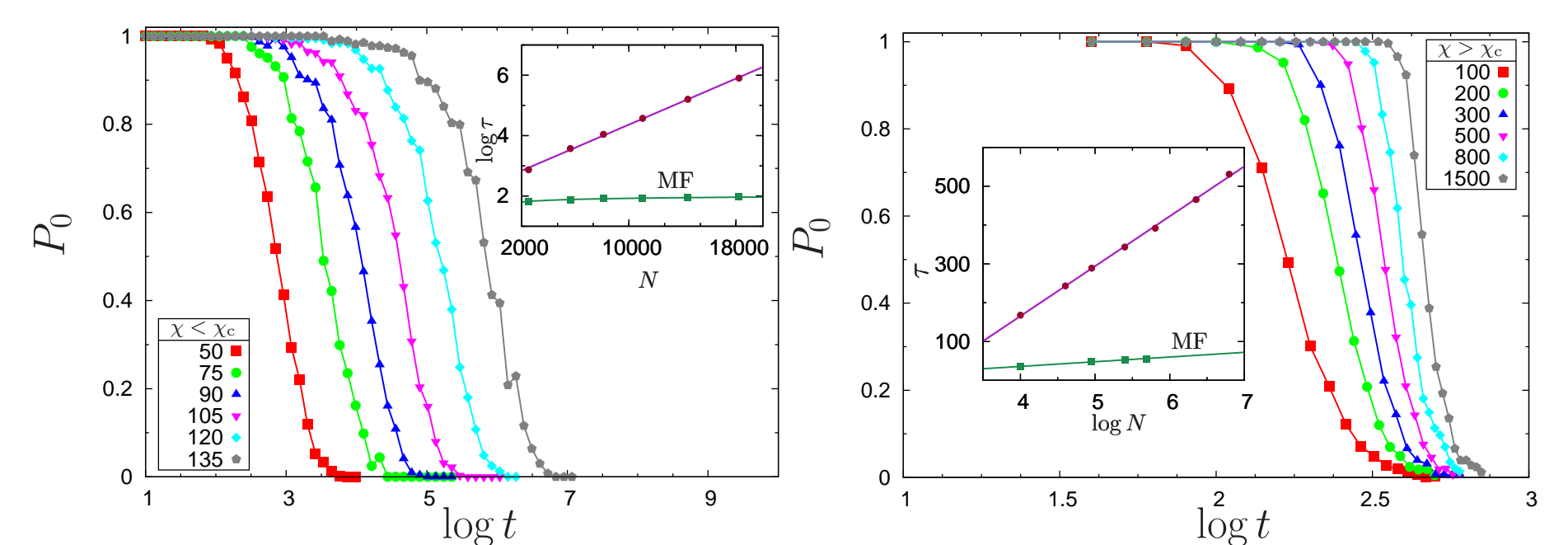


## Simulações

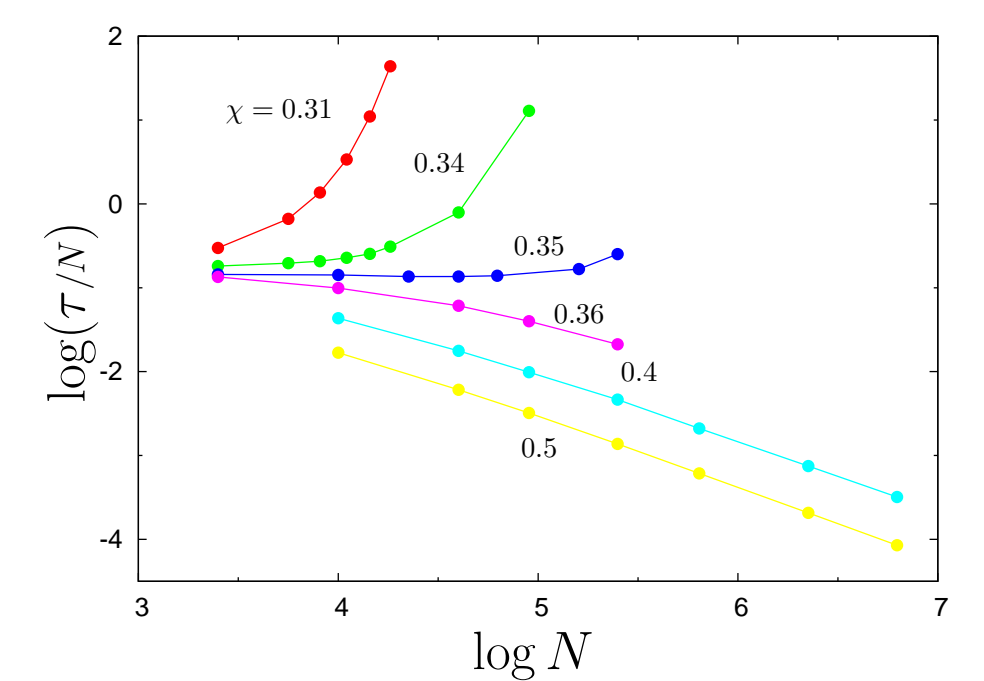
- 4 espécies distribuídas em uma rede quadrada de lado  $L$  ( $N = L^2$  sítios), com condições periódicas de contorno.
- Cada espécie pode interagir com um de seus quatro vizinhos mais próximos.



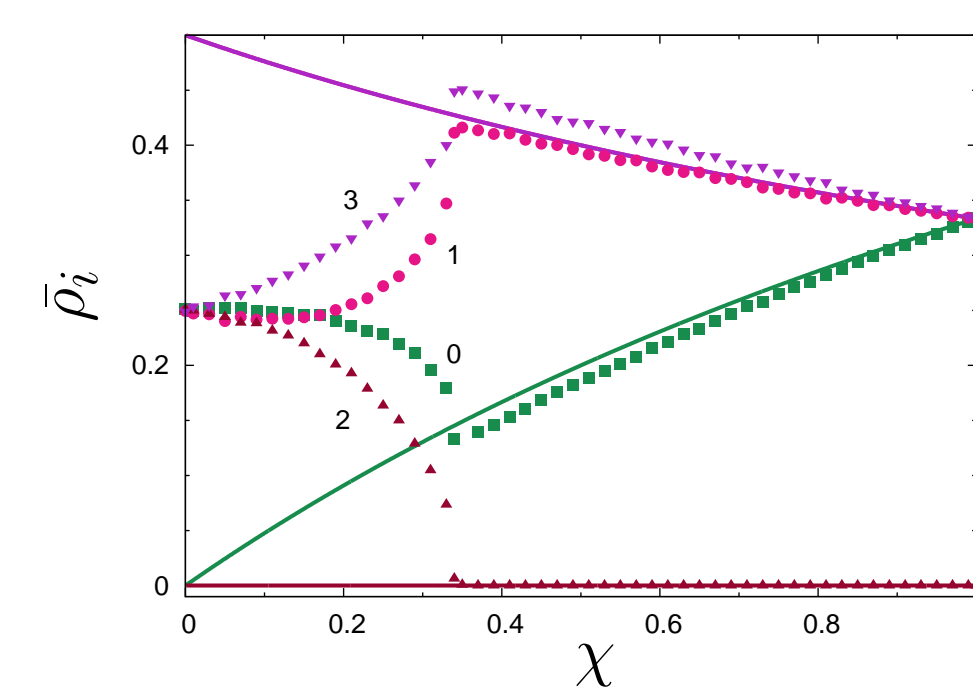
## Soluções: Probabilidades de Extinção



- $N$ : tamanho do sistema.
- $P_0(t)$ : Probabilidade de não haver extinções durante o tempo  $t$ , para vários tamanhos.
- $\tau$ : tempo necessário para que  $P_0$  atinja a metade de seu valor inicial:  $P_0(\tau) = 1/2$ .



## Soluções: Densidades Assintóticas Médias



## Conclusões

- O modelo apresenta uma transição dinâmica e existe um valor mínimo de intransitividade,  $1 - \chi_c = 1 - 0.35$ , necessária para que o sistema apresente coexistência total.
- A aproximação de Campo Médio descreve bem o sistema para  $\chi > 0.35$ . Essa aproximação, porém, não captura a transição verificada nas simulações de rede em  $\chi \simeq 0.35$ , não havendo um estado de coexistência total para  $\chi > 0$ . As correlações espaciais, portanto, são essenciais à manutenção da coexistência (note-se que não basta conhecer o grafo de interações para prever se há ou não coexistência).

## Bibliografia

- **Evolutionary Games on Graphs**, G. Szabó and G. Fáth, *Phys. Rep.* 446 (2007)97-217
- **Evolutionary Dynamics: Exploring the Equation of Life**, M. A. Nowak (Harvard University, Cambridge, MA, 2006)
- **Intransitivity and coexistence in four species cyclic games**, A. F. Lütz, S. Risau-Gussman e J. J. Arenzon, submetido ao *J. Theor. Biol.* ( arXiv:1205.6411 [q-bio.PE]).