

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS COMPOSTAS POR ADUELAS  
PRÉ-MOLDADAS DE CONCRETO COM PROTENSÃO  
EXTERNA, SOB ESTADO PLANO DE TENSÃO, ATRAVÉS  
DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.**

*Aline da Silva Ribeiro*

Porto Alegre  
Setembro de 2004

**ALINE DA SILVA RIBEIRO**

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS COMPOSTAS POR ADUELAS  
PRÉ-MOLDADAS DE CONCRETO COM PROTENSÃO  
EXTERNA, SOB ESTADO PLANO DE TENSÃO, ATRAVÉS  
DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia

Porto Alegre  
Setembro de 2004

**ALINE DA SILVA RIBEIRO**

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS COMPOSTAS POR ADUELAS  
PRÉ-MOLDADAS DE CONCRETO COM PROTENSÃO  
EXTERNA, SOB ESTADO PLANO DE TENSÃO, ATRAVÉS  
DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Programa de Pós-Graduação.

Porto Alegre, 03 de setembro de 2004.

**Prof. Américo Campos Filho**

Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Orientador

Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)**

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Roberto Domingo Rios (UFRGS)**

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Alexandre Rodrigues Pacheco (UFRGS)**

Ph.D. pela Pennsylvania State University

*Ao meu noivo e aos meus pais pelo  
esforço que fizeram e incentivo que me  
deram.*

## **AGRADECIMENTOS**

*Ao chegar ao fim de mais essa etapa da minha vida, gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos...*

*Ao meu Orientador, Prof. Américo Campos Filho, pela incansável paciência, pelos conselhos concedidos e por ter me acolhido como sua orientanda.*

*Aos meus pais, Manoel e Anna, pelo apoio e incentivo de toda vida.*

*Ao meu sobrinho, Augusto Tech, pela alegria do convívio diário.*

*Ao Charlei, pela presença constante e amor.*

*À minha família, mesmo distante, sempre presente.*

*Às minhas amigas pela amizade e compreensão inestimáveis.*

*Aos colegas do CEMACOM pela convivência, cooperação e amizade.*

*Aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil pela convivência.*

*Aos professores e funcionários da Escola de Engenharia e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, especialmente ao Prof. Alexandre Rodrigues Pacheco, pela atenção recebida e auxílio prestado na condução deste trabalho.*

*À CAPES - Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - pelo suporte financeiro concedido durante a elaboração deste trabalho.*

Algo só é impossível até que alguém duvide  
e acabe provando o contrário.

*Einstein*

# SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS.....	x
LISTA DE FIGURAS.....	xi
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xv
RESUMO.....	xix
ABSTRACT.....	xx
<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 GENERALIDADES .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2 BREVE HISTÓRICO .....</b>	<b>3</b>
<b>1.3 OBJETIVO DO TRABALHO.....</b>	<b>9</b>
<b>1.4 ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO.....</b>	<b>10</b>
<b>2. ANÁLISE DE UM MATERIAL COM COMPORTAMENTO ELASTO- VISCOPLÁSTICO ATRAVÉS DE MODELO DE ELEMENTOS FINITOS.....</b>	<b>11</b>
<b>2.1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
<b>2.2 COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DO CONCRETO .....</b>	<b>12</b>
2.2.1 Expressões básicas .....	12
2.2.2 Incremento de deformação viscoplástica.....	13
2.2.3 Incremento de tensão .....	13
2.2.4 Equações de equilíbrio .....	14
2.2.5 Correção do equilíbrio .....	15
2.2.6 Modelo de camadas .....	16
<b>2.3 COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DO AÇO.....</b>	<b>17</b>
2.3.1 Incremento de tensão .....	18
2.3.2 Equações de equilíbrio .....	18
2.3.3 Taxa de deformação viscoplástica.....	19
2.3.4 Modelo de camadas .....	19
<b>3. APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....</b>	<b>21</b>
<b>3.1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>21</b>
<b>3.2 ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO.....</b>	<b>21</b>
3.2.1 Campo de deslocamentos e de deformações.....	22

<b>3.3 ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA .....</b>	<b>25</b>
<b>3.3.1 Modelo incorporado .....</b>	<b>26</b>
<b>3.3.2 Formulação geométrica.....</b>	<b>27</b>
<b>3.3.3 Localização de segmentos de armadura no interior de um elemento de concreto .....</b>	<b>30</b>
<b>3.3.4 Funções de forma para os elementos de armadura.....</b>	<b>34</b>
<b>3.3.5 Matriz de rigidez para a armadura .....</b>	<b>35</b>
<b>4. ELEMENTOS DE CONTATO .....</b>	<b>37</b>
<b>4.1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>37</b>
<b>4.2 FORMULAÇÃO.....</b>	<b>37</b>
<b>5. MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS.....</b>	<b>41</b>
<b>5.1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>41</b>
<b>5.2 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO .....</b>	<b>42</b>
<b>5.2.1 Modelo para o concreto comprimido.....</b>	<b>42</b>
5.2.1.1 Critério de ruptura .....	43
5.2.1.2 Critério de plastificação.....	45
5.2.1.3 Regra de endurecimento .....	46
5.2.1.4 Vetor de fluxo plástico .....	47
<b>5.2.2 Modelo para o concreto tracionado .....</b>	<b>48</b>
5.2.2.1 Critério de fissuração.....	48
5.2.2.2 Critério para escolha da curva de amolecimento.....	49
5.2.2.3 Rigidez transversal do concreto fissurado.....	50
<b>5.3 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA A ARMADURA .....</b>	<b>51</b>
<b>5.4 MODELOS VISCOELÁSTICOS PARA O CONCRETO E O AÇO.....</b>	<b>52</b>
<b>6. PROTENSÃO .....</b>	<b>55</b>
<b>6.1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>55</b>
<b>6.2 SISTEMAS DE PROTENSÃO .....</b>	<b>57</b>
6.2.1 Sistema de protensão com aderência inicial.....	58
6.2.2 Sistema de protensão com aderência posterior.....	59
6.2.3 Sistema de protensão sem aderência.....	62
<b>7. MODELO COMPUTACIONAL .....</b>	<b>64</b>
<b>7.1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>64</b>

7.2 IMPLEMENTAÇÃO .....	65
<b>8. ANÁLISE DE VIGAS MONOLÍTICAS DE CONCRETO COM PROTENSÃO NÃO-ADERENTE.....</b>	<b>69</b>
8.1 INTRODUÇÃO .....	69
8.2 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO COMPUTACIONAL .....	71
8.2.1 Evolução da deformada com o carregamento.....	71
8.2.2 Evolução do estado de tensão ( $\sigma_x$ ) dos elementos de concreto ao longo do carregamento .....	73
8.2.3 Deslocamentos e aumento de tensões na armadura protendida ao longo do carregamento. ....	76
<b>9. ANÁLISE DE VIGA SEGMENTADA DE CONCRETO COM PROTENSÃO NÃO-ADERENTE.....</b>	<b>80</b>
9.1 INTRODUÇÃO .....	80
9.2 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO COMPUTACIONAL .....	82
<b>10. CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....</b>	<b>92</b>
<b>ANEXO A – ENTRADA DE DADOS .....</b>	<b>95</b>
A.1 DADOS INICIAIS .....	95
A.2 CONETIVIDADES DOS ELEMENTOS DE CONCRETO .....	95
A.3 CONETIVIDADES DOS ELEMENTOS DE CONTATO .....	96
A.4 CONETIVIDADES DAS BARRAS DE ARMADURA .....	97
A.5 COORDENADAS NODAIS .....	97
A.6 VINCULAÇÃO.....	98
A.7 PROPRIEDADES.....	98
A.8 CARREGAMENTOS.....	99
A.8.1 Carregamento nodal.....	100
A.8.2 Força gravitacional.....	100
A.8.3 Carregamento distribuído .....	100
A.9 EXEMPLO DE ARQUIVO PARA ENTRADA DE DADOS.....	100
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>106</b>

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 3.1</b> – Pesos dos pontos de integração.....	25
<b>Tabela 8.1</b> - Valores para cada viga.....	69
<b>Tabela A.1</b> - Conetividades dos elementos de concreto.....	96
<b>Tabela A.2</b> - Conetividades dos elementos de contato.....	96
<b>Tabela A.3</b> -Conetividades das barras de armadura .....	97
<b>Tabela A.4</b> - Vinculação dos nós.....	98
<b>Tabela A.5</b> - Exemplo.....	101

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.1</b> – Esquema para lançamento de aduela pré-moldada (adaptada de Rombach, 2002) .....	1
<b>Figura 1.2</b> – Tipos de impermeabilização de junta seca (adaptada de Hewson, 1992).....	2
<b>Figura 1.3</b> – Cabos protendidos externamente (adaptada de Hindi, MacGregor, Kreger e Breen, 1995) .....	3
<b>Figura 1.4</b> – Ponte Klockestand Sound, perto de Estocolmo (VSL International, 1992) .....	6
<b>Figura 1.5</b> – Tipos de seção transversal de cabo de protensão externa .....	6
<b>Figura 1.6</b> – Composição de um sistema de protensão externa (adaptada de VSL International, 1992) .....	7
<b>Figura 1.8</b> – Ponte Bang Na Expressway em Bangkok (Brockmann e Rogenhofer, 2000).....	8
<b>Figura 1.9</b> – Transporte de aduelas (Brockmann e Rogenhofer, 2000).....	8
<b>Figura 2.1</b> - Modelo elasto-viscoplástico .....	11
<b>Figura 2.2</b> - Modelo de camadas superpostas.....	16
<b>Figura 3.1</b> – Elementos isoparamétricos: .....	22
(a) linear 4 nós, (b) quadrático 8 nós, (c) quadrático 9 nós .....	22
<b>Figura 3.2</b> – Localização dos pontos de integração de Gauss .....	25
<b>Figura 3.3</b> - Barra de armadura no interior de um elemento de concreto.....	28
<b>Figura 3.4</b> - Coordenadas ao longo do eixo de armadura.....	29
<b>Figura 3.5</b> – Mapeamento inverso para coordenadas locais.....	31
<b>Figura 3.6</b> - Curva de definição da barra de aço.....	32
<b>Figura 3.7</b> - Situações possíveis para a posição de uma barra de armadura.....	33
<b>Figura 3.8</b> - Segmento de armadura dentro do elemento de concreto .....	34
<b>Figura 3.9</b> - Barra de armadura localizada numa aresta entre dois elementos de concreto.....	34
<b>Figura 4.1</b> – Sólidos deformáveis .....	38
<b>Figura 4.2</b> – Elementos de contato .....	38
<b>Figura 5.1</b> - Diagrama carga-deslocamento típico de um elemento de concreto estrutural ...	41
<b>Figura 5.2.a</b> - Meridianos da superfície de ruptura .....	45
<b>Figura 5.2.b</b> - Seções transversais da superfície de ruptura .....	45
<b>Figura 5.3</b> - Superfícies de ruptura e de carregamento.....	46
<b>Figura 5.4</b> - Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido.....	47

<b>Figura 5.5</b> - Curva tensão-deformação para o concreto tracionado (Hinton, 1988).....	50
<b>Figura 5.6</b> - Diagramas tensão-deformação: (a) armadura passiva (b) protendida .....	52
<b>Figura 5.7</b> – Evolução da deformação por fluência para tensão constante aplicada em $t'$ .....	53
<b>Figura 5.8</b> – Modelo de cadeias de Maxwell.....	54
<b>Figura 6.1</b> – Ponte protendida (Veríssimo e César Junior,1998) .....	56
<b>Figura 6.2</b> – Esquema de pista de protensão típica (Veríssimo e César Junior,1998) .....	59
<b>Figura 6.3</b> – Representação das forças nodais equivalentes, devidas à carga de protensão....	60
<b>Figura 6.4</b> - Definição dos parâmetros $s$ e $\Delta\alpha$ .....	61
<b>Figura 7.1</b> – Fluxograma .....	67
<b>Figura 7.2</b> - Fluxograma .....	68
<b>Figura 8.1</b> - Detalhamento das vigas A .....	70
<b>Figura 8.2</b> - Discretização adotada para a análise por elementos finitos das vigas A.....	70
<b>Figura 8.3</b> – Deformada da viga A3 no início da aplicação do carregamento .....	71
<b>Figura 8.4</b> – Deformada da viga A3 no fim da aplicação do carregamento.....	71
<b>Figura 8.5</b> – Deformada da viga A6 no início da aplicação do carregamento .....	72
<b>Figura 8.6</b> – Deformada da viga A6 no fim da aplicação do carregamento.....	72
<b>Figura 8.7</b> – Deformada da viga A9 no início da aplicação do carregamento .....	72
<b>Figura 8.8</b> – Deformada da viga A9 no fim da aplicação do carregamento.....	73
<b>Figura 8.9</b> – Tensões no concreto da viga A3 no início da aplicação do .....	73
carregamento em $\text{kN/cm}^2$ .....	73
<b>Figura 8.10</b> – Tensões no concreto da viga A3 no fim da aplicação do.....	74
carregamento em $\text{kN/cm}^2$ .....	74
<b>Figura 8.11</b> – Tensões no concreto da viga A6 no início da aplicação do .....	74
carregamento em $\text{kN/cm}^2$ .....	74
<b>Figura 8.12</b> – Tensões no concreto da viga A6 no fim da aplicação do.....	75
carregamento em $\text{kN/cm}^2$ .....	75
<b>Figura 8.13</b> – Tensões no concreto da viga A9 no início da aplicação do .....	75
carregamento em $\text{kN/cm}^2$ .....	75
<b>Figura 8.14</b> – Tensões no concreto da viga A9 no fim da aplicação do.....	76
carregamento em $\text{kN/cm}^2$ .....	76
<b>Figura 8.15</b> – Comparação entre os deslocamentos obtidos no modelo computacional e experimentalmente – Viga A3 .....	77

<b>Figura 8.16</b> – Comparação entre os deslocamentos obtidos no modelo computacional e experimentalmente – Viga A6.....	77
<b>Figura 8.17</b> – Comparação entre os deslocamentos obtidos no modelo computacional e experimentalmente – Viga A9.....	78
<b>Figura 8.18</b> – Comparação entre o aumento médio de tensão na armadura de protensão obtido no modelo computacional e experimentalmente – Viga A3.....	78
<b>Figura 8.19</b> – Comparação entre o aumento médio de tensão na armadura de protensão obtido no modelo computacional e experimentalmente – Viga A6.....	79
<b>Figura 8.20</b> – Comparação entre o aumento médio de tensão na armadura de protensão obtido no modelo computacional e experimentalmente – Viga A9.....	79
<b>Figura 9.1</b> – Características geométricas e de carregamento da viga.....	81
<b>Figura 9.2</b> – Discretização dos elementos de concreto.....	81
<b>Figura 9.3</b> – Disposição da armadura de protensão.....	82
<b>Figura 9.4</b> – Deformada da viga segundo modelo computacional com Q=56kN .....	82
<b>Figura 9.5</b> – Deformada da viga segundo modelo computacional com Q=70kN .....	82
<b>Figura 9.6</b> – Deformada da viga segundo modelo computacional com Q=84kN .....	83
<b>Figura 9.7</b> – Deformada da viga segundo modelo computacional com Q=98kN .....	83
<b>Figura 9.8</b> – Deformada da viga segundo modelo computacional com Q=112kN .....	83
<b>Figura 9.9</b> – Deformada da viga segundo modelo computacional com Q=126kN .....	84
<b>Figura 9.10</b> – Deformada da viga segundo modelo computacional com Q=140kN .....	84
<b>Figura 9.11</b> – Distribuição de tensões no concreto.....	85
em kN/cm <sup>2</sup> – Q=14kN .....	85
<b>Figura 9.12</b> – Distribuição de tensões no concreto.....	85
em kN/cm <sup>2</sup> – Q=28kN .....	85
<b>Figura 9.13</b> – Distribuição de tensões no concreto.....	86
em kN/cm <sup>2</sup> – Q=42kN .....	86
<b>Figura 9.14</b> – Distribuição de tensões no concreto.....	86
em kN/cm <sup>2</sup> – Q=56kN .....	86
<b>Figura 9.15</b> – Distribuição de tensões no concreto.....	87
em kN/cm <sup>2</sup> – Q=70kN .....	87
<b>Figura 9.16</b> – Distribuição de tensões no concreto.....	87
em kN/cm <sup>2</sup> – Q=84kN .....	87

<b>Figura 9.17</b> – Distribuição de tensões no concreto.....	88
em $\text{kN/cm}^2$ – $Q=98\text{kN}$ .....	88
<b>Figura 9.18</b> – Distribuição de tensões no concreto.....	88
em $\text{kN/cm}^2$ – $Q=112\text{kN}$ .....	88
<b>Figura 9.19</b> – Distribuição de tensões no concreto.....	89
em $\text{kN/cm}^2$ – $Q=140\text{kN}$ .....	89
<b>Figura 9.20</b> – Comparação entre os deslocamentos obtidos no modelo computacional e experimentalmente.....	90
<b>Figura 9.21</b> – Tensões na armadura.....	90
<b>Figura 10.1</b> – Malha de Elemento Finitos de uma aduela (Rombach, 2002) .....	93
<b>Figura 10.2</b> – Modelo em Elementos Finitos (adaptada de Rombach, 2002) .....	93
<b>Figura 10.3</b> – Shear keys (adaptada de Rombach, 2002) .....	94
<b>Figura A.1</b> - Exemplo 1 - Conetividades.....	96
<b>Figura A.2</b> – Exemplo 1 – Barra de armadura.....	97
<b>Figura A.3</b> – Exemplo 2 – Vinculação .....	98
<b>Figura A.4</b> – Convenção do sentido e direção da gravidade .....	100

# LISTA DE SÍMBOLOS

## I - LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

$A_p$  - área da seção transversal da armadura ativa

$A_s$  - área da seção transversal da armadura passiva

$B$  - matriz que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de concreto;

$B_s$  - vetor que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de aço

$C$  - função de posição ao longo da barra de armadura; coeficiente

$D$  - matriz constitutiva

$E$  - módulo de elasticidade longitudinal

$E_s$  - módulo de elasticidade longitudinal do aço

$E_\mu$  - módulo de elasticidade longitudinal da camada de concreto

$F$  - função de plastificação; tensão efetiva; força; “pseudo-carga”

$F_0$  - tensão corrente de plastificação

$F_p$  - força de protensão

$G$  - módulo de elasticidade transversal

$G_c$  - módulo de elasticidade transversal do concreto fissurado

$H$  - função de interpolação da armadura

$I_1$  - 1° invariante do tensor de tensão

$J$  - matriz jacobiana; função de fluência

$J_2$  - 2° invariante do tensor desviador de tensão

$J_3$  - 3° invariante do tensor desviador de tensão

$K$  - matriz de rigidez do elemento de concreto armado

$K_c$  - matriz de rigidez do concreto

$K_s$  - matriz de rigidez do aço

$N$  - função de interpolação para o elemento de concreto

$P$  - vetor de cargas de superfície e de volume; coordenadas dos nós das barras de aço

$Q$  - função do potencial plástico; carga

$Q_s$  - forças nodais equivalentes da armadura

$RH$  - umidade relativa do ar

$S$  - superfície; matriz de suavização

T - temperatura

U – deslocamentos nodais do elemento

V - volume

W - trabalho

## II - LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

a - vetor de fluxo plástico; coeficiente

b - coeficiente

c - parâmetro; coeficiente

e - espessura total do elemento de concreto; elemento de concreto

$e_i$  - espessura da camada de concreto

f - função

$f_{cm}$  - resistência média à compressão do concreto

$f_{ptk}$  - tensão de ruptura do concreto protendido

$f_{tm}$  - resistência média à tração do concreto

$f_y$  - tensão de escoamento da armadura passiva

g - função

h - espessura fictícia da seção de concreto

k - parâmetro; número de iterações; razão entre  $f_{tm}$  e  $f_{cm}$

$k_1$  - parâmetro

$l_c$  - comprimento característico

m - número de nós da barra de armadura

n - número de nós do elemento de concreto

$n_b$  - número de segmentos de barras de armadura

$n_g$  - número de pontos de integração de Gauss

$n_p$  - número total de pontos de integração da armadura protendida, pós-tracionada e não-aderente

s - constante que depende do tipo de cimento; distância; tensão desviadora

t - tempo, espessura do volume de controle

$t_0$  - tempo inicial

u – deslocamento direção x

v – deslocamento direção y  
x - coordenada cartesiana  
y - coordenada cartesiana  
w - fator de peso; abertura de fissura

### **III - LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS**

$\Gamma$  – perímetro do corpo  
 $\Delta$  - incremento  
 $\Sigma$  - somatório  
 $\Phi$  - função de fluxo  
 $\Pi$  - produtório  
 $\Omega$  - volume do corpo

### **IV – LETRAS GREGAS MINÚSCULAS**

$\alpha$  - coeficiente; ângulo; parâmetro de amolecimento  
 $\beta$  - coeficiente; ângulo  
 $\gamma$  - coeficiente de fluidez do concreto; parâmetro  
 $\gamma_s$  - coeficiente de fluidez do aço  
 $\varepsilon$  - deformação específica longitudinal; deformação de tração nominal da zona fissurada  
 $\dot{\varepsilon}$  - velocidade de deformação  
 $\varepsilon_0$  - deformação de fissuração  
 $\dot{\varepsilon}_e$  - taxa de deformação elástica  
 $\varepsilon_n$  - deformação dependente de tensão  
 $\varepsilon_{svp}$  - deformação viscoplástica do aço  
 $\varepsilon_p$  - deformação plástica  
 $\dot{\varepsilon}_{vp}$  - taxa de deformação viscoplástica  
 $\eta$  - coeficiente de viscosidade; coordenada normalizada  
 $\eta_\mu$  - coeficiente de viscosidade da camada de concreto

$\theta$  - ângulo de similaridade; ângulo gravidade com eixo cartesiano y.

$\lambda$  - parâmetro; distância entre dois corpos

$\nu$  - coeficiente de Poisson

$\xi$  - coordenada normalizada

$\sigma$  - tensão normal no concreto

$\dot{\sigma}$  - velocidade de tensão

$\sigma_{ef}$  - tensão efetiva no concreto

$\sigma_{po}$  - tensão de protensão inicial

$\sigma_{pi}$  - tensão de protensão na extremidade da barra de armadura

$\sigma_s$  - tensão normal na armadura

$\tau$  - tensão tangencial no concreto

$\phi$  - diâmetro da barra da armadura

$\zeta$  - coordenada normalizada

$\mu$  - coeficiente de atrito armadura ativa; camada

$\psi$  - forças residuais

## V - SÍMBOLOS

{ } - vetor coluna

< > - vetor linha

[ ] - matriz

[ ]<sup>T</sup> - matriz transposta

[ ]<sup>-1</sup> - matriz inversa

| | - determinante

|| || - norma

## RESUMO

RIBEIRO, A. S. & CAMPOS FILHO, A. **Análise de estruturas compostas por aduelas pré-moldadas de concreto com protensão externa, sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos.** 2004. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil- PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. Porto Alegre, RS, Brasil.

Aduelas protendidas externamente utilizadas em pontes contrastam com as clássicas construções monolíticas, consistindo de “pequenos” segmentos pré-moldados protendidos por cordoalhas externas. Há muitas vantagens na utilização deste tipo de composição, como rapidez e versatilidade na construção, alto controle de qualidade e economia. No presente trabalho, discute-se uma formulação, baseada no método dos elementos finitos, para simular o comportamento de estruturas compostas por aduelas externamente protendidas. Esta formulação permite tanto a análise de situações de serviço, onde as seções permanecem completamente comprimidas, como também de situações últimas, onde se considera a abertura das juntas e a transferência de esforços através das mesmas. O modelo computacional utiliza dois procedimentos distintos, baseados em um modelo elasto-viscoplástico. No primeiro, determina-se a resposta da estrutura ao longo do tempo, considerando-se, nesta etapa, que o material possui comportamento viscoelástico. No segundo, busca-se a resposta da estrutura para um carregamento instantâneo, considerando-se o material com um comportamento elastoplástico. As juntas entre as aduelas são representadas através de elementos de contato unidimensionais. Os nós de cada elemento de contato coincidem com os nós do elemento de concreto que a ele foi associado. Um modelo de camadas superpostas é utilizado para representar o comportamento viscoelástico do concreto e da armadura protendida. Para representar o concreto fissurado, utiliza-se um modelo de fissuras distribuídas, que leva em conta a contribuição do concreto entre fissuras. A armadura passiva é introduzida na análise através de um modelo incorporado e a armadura de protensão não aderente é disposta em elementos fictícios, paralelos aos elementos reais da estrutura. Para verificar a adequação do modelo computacional, compararam-se resultados numéricos com valores experimentais disponíveis na literatura.

Palavras-chave: Elementos finitos, Construções segmentadas, Pontes, Protensão externa

## ABSTRACT

RIBEIRO, A. S. & CAMPOS FILHO, A. **Plane Stress Analysis of Segmental Prestressed Concrete Bridges Considering a Finite Element Method Approach.** 2004. MS Thesis. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. Porto Alegre, RS, Brazil.

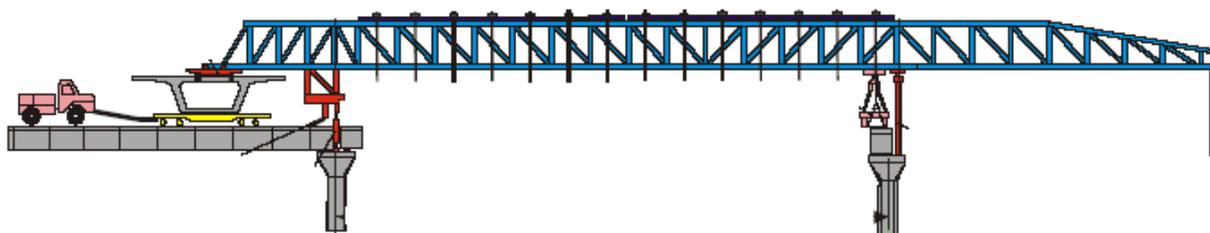
When bridge construction is considered, the application of externally post-tensioned segmental members is a very attractive solution, especially when compared with other, more classical, construction methods. Structures built with that solution consist of smaller precast elements tied together by post-tensioned tendons, giving therefore many advantages, such as fast and versatile construction, high quality control and lower overall cost. In this work, a formulation based on the Finite Element Method is discussed. This formulation is used to numerically simulate the structural behavior of members composed of externally post-tensioned segments. These analysis not only allow serviceability limit state verifications, when sections are fully compressed, but also verifications of ultimate limit states, when joint openings and load transfers at the joints are then considered. The computational code developed in this work uses two different procedures, which are based on a visco-elastoplastic model. In the first procedure, the determination of the structure's behavior in time is carried out; when it is supposed that a viscoelastic behavior of the material is present. In the second procedure, the structure's response to an instantaneous loading is investigated, when an elastoplastic behavior of the material is considered. The joints between precast segments are modeled using one-dimensional contact elements. The nodes of each contact element coincide with the nodes of its associated concrete element. An overlay model is used to better represent the viscoelastic behavior of the concrete and the prestressed reinforcement. To represent cracking of the concrete, a smeared cracking model is used, which considers the contribution of the concrete between cracks. The passive reinforcement is considered in the analysis through a discrete approach, while for the unbonded prestressed reinforcement, fictitious elements parallel to the structure's real elements are used. Additionally, to evaluate the accuracy of the computational model, numerical results are compared with experimental data from the literature.

Key-words: Finite Element Method, Segmental Construction, Bridges, External Prestressing

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 GENERALIDADES

Muitas vezes a solução para o projeto de uma ponte é definida pelo método construtivo que será utilizado para a execução da mesma. A escolha do método construtivo é influenciada por diversos fatores como: o vão, o custo da obra, a disponibilidade de equipamentos da construtora, o cronograma de execução da obra e a economia. Entre os diversos métodos construtivos disponíveis, a construção segmentada para pontes em concreto protendido, método dos balanços sucessivos, tem sido largamente adotada em diversos países. Esse processo consiste na construção em segmentos, denominados de aduelas, que vão constituindo balanços que avançam sobre o obstáculo a ser vencido. As aduelas pré-moldadas são transportadas por meio de treliças metálicas até a extremidade do balanço (ver Fig.1.1), onde são protendidas longitudinalmente (Mattos, 2001).



**Figura 1.1** – Esquema para lançamento de aduela pré-moldada (adaptada de Rombach, 2002)

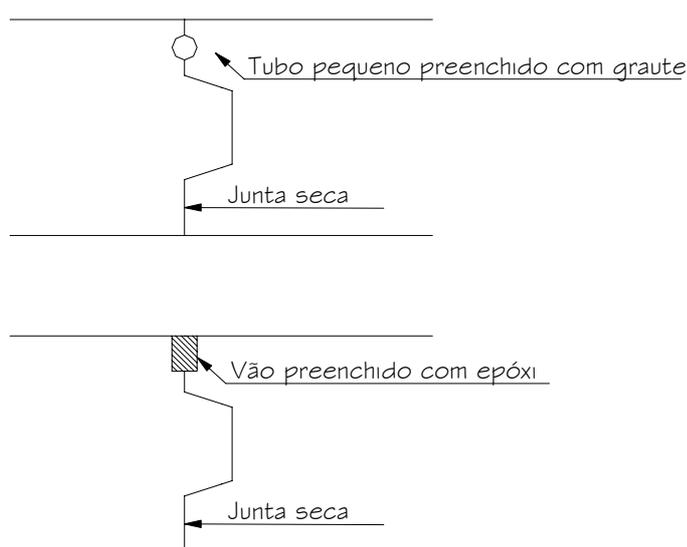
A execução em aduelas pré-moldadas pode ser por dois processos distintos: o sistema “short-line” e o sistema “long-line”. No sistema “short-line”, as aduelas são fabricadas com o uso de apenas uma fôrma metálica, sendo esta fôrma muito sofisticada e cara, de forma a atender a todas as diferenças existentes entre as seções transversais das aduelas, assim como às conformações em planta e perfil do projeto geométrico da estrutura. No sistema “long-line”, a fôrma é fabricada para todo o vão, podendo ser reaproveitada para outros vãos idênticos. A fôrma e a armação são montadas sobre um escoramento metálico ou sobre uma pista de concreto que poderá servir de fôrma de fundo. As aduelas são concretadas de maneira a garantir a perfeita acoplagem entre si, onde cada aduela concretada na etapa anterior serve de fôrma para a próxima (Mattos, 2001).

As principais vantagens do uso de aduelas pré-fabricadas, assim como em toda a construção pré-moldada, são o rígido controle de qualidade das peças, a redução do canteiro de obras, a rapidez de execução, o perfeito acabamento obtido pelo uso de fôrmas metálicas ou de concreto e o uso de mão-de-obra especializada. O tamanho das aduelas depende das condições de transporte e da facilidade de sua fabricação.

Entre os segmentos de concreto pode-se usar, ou não, cola à base de resina epóxi, que serve para lubrificar a superfície, diminuir os efeitos das imperfeições das juntas, impermeabilizá-las e contribuir para a transmissão das tensões cisalhantes. No caso de junta seca, há a vantagem da construção independer das condições climáticas. Outras vantagens seriam:

- eliminação da cola à base de resina epóxi,
- eliminação da protensão temporária necessária para o processo de colagem das juntas;
- diminuição do tempo de construção;
- uso de protensão externa, obrigatoriamente necessária para este tipo de junta, pode reduzir o peso e simplificar a construção.

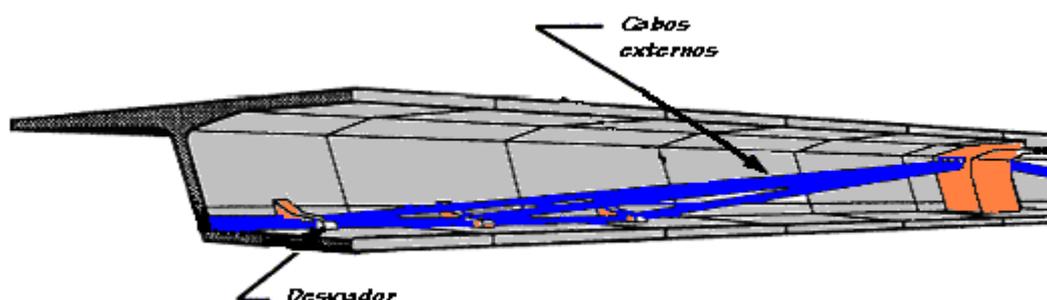
Não obstante, deve-se ter alguns cuidados no uso de junta seca, como vedar a superfície superior para evitar a entrada de umidade (Hewson, 1992). Na Fig. 1.2 pode-se observar dois tipos de impermeabilização de junta seca.



**Figura 1.2** – Tipos de impermeabilização de junta seca (adaptada de Hewson, 1992)

Recentemente, por ser mais vantajoso em relação à tradicional protensão com cabos internos tem crescido de maneira muito rápida o interesse pela protensão externa, fazendo

com que o uso de cabos externos não-aderentes desponte como sistema de construção. Neste sistema, os cabos ficam localizados dentro da aduela, mas são conectados ao concreto somente através dos desviadores e da ancoragem. Eles são envolvidos por uma bainha de polietileno e cobertos por uma pasta de cimento (graute) para proteção contra corrosão (ver Fig. 1.3).



**Figura 1.3** – Cabos protendidos externamente (adaptada de Hindi, MacGregor, Kreger e Breen, 1995)

Este sistema construtivo é recomendado quando ocorrerem os seguintes fatores: necessidade de grandes vãos, execução de viadutos sem a interdição do trânsito em zona urbana e reduzido tempo de execução.

## 1.2 BREVE HISTÓRICO

A construção de pontes com segmentos pré-moldados não é um método novo. Essa técnica vem sendo utilizada desde o final dos anos 60 e começo dos anos 70, superando as limitações de transporte dos segmentos pré-moldados e possibilitando vãos maiores (Abdel-Karim e Tadros, 1993). Jean Muller (1970) foi o pioneiro na tecnologia de construção segmentada pré-moldada, particularmente pelo método dos balanços sucessivos. Já com relação à protensão externa e junta seca, o pioneirismo é atribuído a Bilfinger e Berger (1980), da Alemanha, que já construíram muitas pontes na Ásia, África e Austrália.

A utilização de armaduras de protensão não-aderentes é relativamente polêmica. Alguns países possuem tradição no uso desta solução e outros não. Nos EUA a protensão sem aderência é muito utilizada. Esse sistema também foi empregado na Austrália durante algum tempo, mas posteriormente foi abandonado. No Brasil não existe tradição na utilização deste tipo de solução, tanto que a norma brasileira não trata do assunto (Veríssimo e César Júnior, 1998).

O dilema na escolha de protensão com ou sem aderência se deve às vantagens e desvantagens que um sistema apresenta em relação ao outro. As vantagens da protensão não-aderente são as seguintes:

- permite posicionar os cabos com excentricidades maiores;
- permite a proteção do aço contra a corrosão fora do concreto;
- permite a colocação dos cabos de forma relativamente rápida e simples;
- perdas por atrito muito baixas.

As vantagens da protensão com aderência são as seguintes:

- aumento de capacidade das seções no estado limite último;
- melhoria do comportamento da peça entre os estágios de fissuração e de ruptura;
- a falha de um cabo tem conseqüências restritas (incêndio, explosão, terremoto).

Os cabos aderentes, além de introduzir o esforço de protensão numa peça de concreto podem funcionar ainda como armadura convencional, graças à aderência entre o cabo e o concreto. Essa propriedade é muito importante para o comportamento da peça no que diz respeito à fissuração (Pfeil, 1983). Já os cabos não-aderentes funcionam apenas como elementos para aplicação da força de protensão. Em função da ausência de ligação entre o cabo e o concreto, sua contribuição para a resistência à ruptura da peça é limitada.

Tem-se constatado experimentalmente que nos primeiros estágios de carga de uma viga protendida, quando a seção de concreto ainda trabalha totalmente comprimida, o comportamento dos cabos aderentes e não-aderentes é semelhante. Não obstante, à medida que o carregamento transversal aumenta, até produzir a abertura de fissuras no concreto, o comportamento dos dois tipos de armadura muda. Nos sistemas com aderência, ao se abrir uma fissura no concreto, os cabos sofrem grandes deformações localizadas na região no entorno da fissura. Em decorrência disso, a tensão no aço aumenta consideravelmente nesses pontos, como o comportamento característico das armaduras convencionais em concreto armado. Por outro lado, nos cabos sem aderência, o valor absoluto de abertura de uma fissura se dilui num comprimento muito grande do cabo, produzindo um alongamento unitário pequeno. Como conseqüência disso, o acréscimo de tensão no cabo também é pequeno (Veríssimo e César Júnior, 1998).

A aderência da armadura influencia grandemente no comportamento à fissuração do concreto. Em vigas com cabos não-aderentes forma-se um pequeno número de fissuras com grande abertura. Os cabos aderentes, à semelhança da armadura de concreto armado, limitam a abertura de fissuras, conduzindo a um grande número de fissuras de pequena abertura. Esta

última situação é preferível. Vigas com fissuras de pequena abertura apresentam melhor proteção contra a corrosão das armaduras e melhor aspecto estético (Veríssimo e César Júnior, 1998).

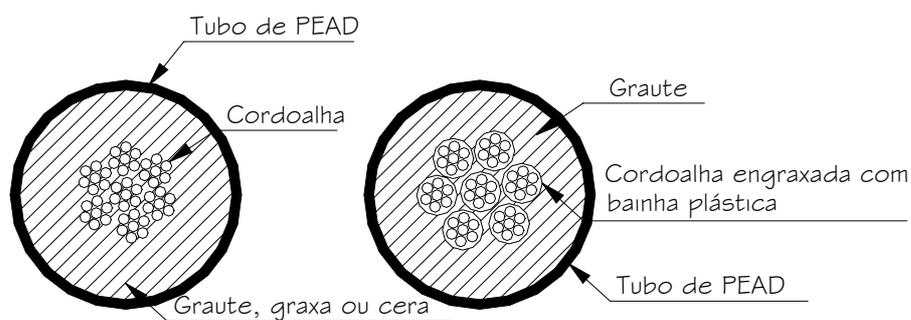
Além de influenciar no problema da fissuração do concreto, a aderência também influi na resistência última das vigas protendidas. Aumentando-se o carregamento transversal até à ruptura da peça, os cabos aderentes sofrem grandes acréscimos de tensão, devido aos alongamentos ocorridos nas seções com fissuras abertas, contribuindo eficientemente para o momento resistente. No caso de cabos não-aderentes, como o alongamento decorrente de fissuras localizadas se distribui ao longo do cabo, os acréscimos de tensão são moderados e conseqüentemente a contribuição para o momento resistente da seção é menos eficiente. Para um mesmo carregamento, vigas com protensão sem aderência rompem para uma carga menor do que com protensão aderente e também apresentam flechas mais pronunciadas (Veríssimo e César Júnior, 1998).

As primeiras pontes construídas em concreto protendido usavam cabos externos ao concreto. Assim são as pontes sobre o Saale em Alsleben (1928), a ponte de Aue (1936) e, na Suécia, a ponte Klockestand Sound, feita entre 1938 e 1943 (ver Fig. 1.4). Algumas destas estruturas apresentaram problemas de corrosão nos cabos externos, desestimulando o uso subsequente da protensão externa. A maioria teve os cabos trocados ou reforçados devido à falta de manutenção preventiva e conseqüente e corrosão provocada por agentes externos (sais, sulfatos, etc.). Outro fator que desanimou o desenvolvimento da protensão externa foi o fato que os desviadores possuíam um custo muito alto. Entretanto, grande parte dos problemas surgidos foram realmente com relação à corrosão dos cabos externos. Nenhum foi em decorrência do comportamento mecânico do sistema. Hoje em dia, os projetos prevêm proteção dos cabos utilizando tubos de polietileno de alta densidade (PEAD) em todo o trajeto do cabo, conforme mostra Fig. 1.5. Utilizam-se também cordoalhas engraxadas em cera de origem petroquímica como agente inibidor de corrosão. Estes produtos são injetados a temperaturas de 80° a 90°C de modo a se obterem maior fluidez. Existe, também, uma maior conscientização sobre a importância da manutenção periódica nessas obras (Pontes, 2000).

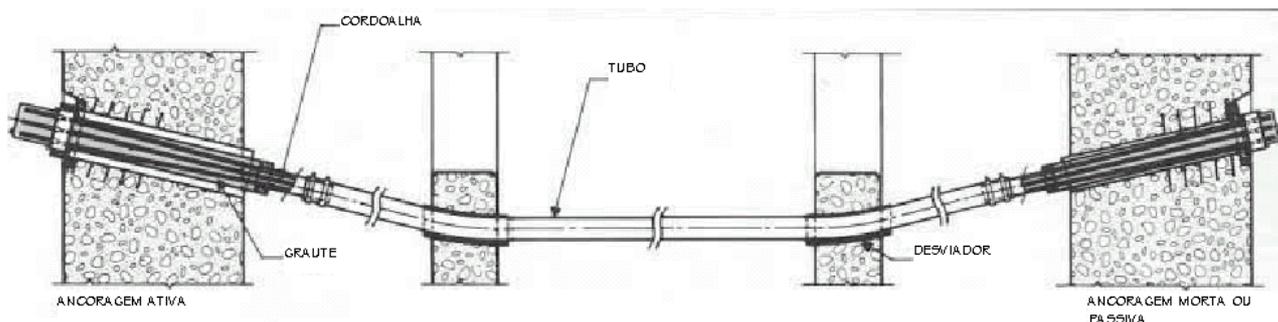


**Figura 1.4** – Ponte Klockestrand Sound, perto de Estocolmo (VSL International, 1992)

Os equipamentos utilizados pelas operações de protensão externa são basicamente os mesmos da protensão com cabos internos aderentes. As cordoalhas, ancoragens, macacos e o maquinário empregado são idênticos. Entretanto, não se usam bainhas para o acondicionamento dos cabos. Nos pontos de ancoragem e nos desviadores usa-se um invólucro metálico envolvendo o duto que contém as cordoalhas (Pontes, 2000). A Fig. 1.6 mostra esquematicamente a composição de um sistema de protensão externa.

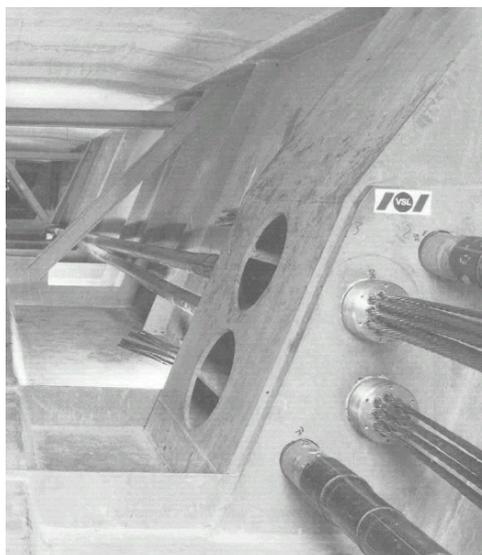


**Figura 1.5** – Tipos de seção transversal de cabo de protensão externa



**Figura 1.6** – Composição de um sistema de protensão externa (adaptada de VSL International, 1992)

O posicionamento dos desviadores requer muita precisão. Discrepâncias entre as tolerâncias de projetos e a posição real acarretam tensões parasitárias no cabo e na peça de concreto. O problema de locação reside tanto na posição quanto na orientação dos desviadores (Pontes, 2000). Na Fig. 1.7 é apresentado um tipo de desviador.



**Figura 1.7** – Tipo de desviador (VSL International, 1992)

A ponte Bang Na Expressway em Bangkok, na Tailândia, construída com essa técnica, além de ser a mais longa ponte do mundo, também representa a maior operação já realizada com aduelas pré-moldadas (ver Fig 1.8). Sua superestrutura é protendida externamente com junta seca e atinge um total de 55 km de extensão. Sua construção possibilitou a diminuição dos congestionamentos frequentes em Bangkok (Brockmann e Rogenhofer, 2000).

A maior vantagem da construção segmentada, com protensão externa e junta seca, é a velocidade com a qual a superestrutura é erguida. Na Bang Na Expressway foram construídos 1800 segmentos por mês com alto controle de qualidade. A Fig. 1.9 mostra como eram transportadas as aduelas que possuíam 10 toneladas cada e 27 metros de largura.



**Figura 1.8** – Ponte Bang Na Expressway em Bangkok (Brockmann e Rogenhofer, 2000)



**Figura 1.9** – Transporte de aduelas (Brockmann e Rogenhofer, 2000)

### 1.3 OBJETIVO DO TRABALHO

O objetivo deste trabalho é implementar um modelo computacional baseado no método dos elementos finitos para o estudo de estruturas segmentadas de concreto protendido sob o estado plano de tensão. Mais especificamente, procura-se avaliar a representação das juntas entre os segmentos deste tipo de estrutura com elementos de contatos unidimensionais, baseados em Habraken e Cescotto (1998). Para tanto, um modelo computacional que utiliza dois procedimentos distintos, baseados em um modelo elasto-viscoplástico, conforme Owen e Hinton (1980), foi usado como base. No primeiro, determina-se a resposta da estrutura ao longo do tempo, considerando-se, nesta etapa, que o material possui comportamento viscoelástico. No segundo, busca-se a resposta da estrutura para um carregamento instantâneo, considerando-se o material com um comportamento elastoplástico.

A fissuração do concreto, a plastificação do concreto e do aço, a diferença entre as resistências à tração e compressão do concreto, a não-linearidade da relação tensão-deformação e os fenômenos relacionados ao tempo como, fluência e retração do concreto e relaxação do aço, também são consideradas no modelo base. Um modelo de camadas superpostas representa o comportamento viscoelástico do concreto e da armadura protendida, conforme proposto por Bazant e Wu (1974). Para representar o concreto fissurado, um modelo de fissuras distribuídas que leva em conta a contribuição do concreto entre fissuras é empregado. As armaduras frouxas são introduzidas no modelo através da formulação proposta por Elwi e Hrudey (1989), como uma linha de um material mais rígido dentro dos elementos de concreto. Existe compatibilidade de deformações ou deslocamentos entre as barras de armadura e os elementos de concreto. A matriz de rigidez total é obtida, assim, pela soma das matrizes de rigidez do concreto e do aço. A armadura de protensão não aderente é disposta em elementos fictícios, paralelos aos elementos reais da estrutura, tendo em comum apenas os nós de extremidade da peça estrutural e os nós localizados nos desviadores. Não existe, portanto, compatibilidade de deformações entre a armadura não aderente e o concreto.

O modelo computacional foi implementado usando-se a linguagem FORTRAN, enquanto que um programa em MATLAB desenvolvido por Machado (2002) foi utilizado para visualizar graficamente os resultados obtidos nas análises realizadas.

Para verificar a precisão do modelo computacional, compararam-se os resultados numéricos obtidos com valores experimentais disponíveis na literatura com os resultados experimentais de Aparicio, Gonzalo e Casas (2002), como também de Gongchen e Xuekang (1988).

## 1.4 ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho é constituído de 10 capítulos principais, dos quais este é o primeiro, além de um anexo.

No **capítulo 2**, faz-se uma breve revisão da teoria e apresenta-se o desenvolvimento do modelo de elementos finitos, para análise de um material elasto-viscoplástico, segundo proposto por Owen e Hinton (1980). Mostra-se o funcionamento do algoritmo de solução incremental para problemas não-lineares e explica-se o modelo de camadas adotado.

O **capítulo 3** apresenta os elementos finitos empregados para o concreto e para a armadura.

No **capítulo 4**, apresenta-se a formulação para os elementos de contato empregados para representar as juntas entre os segmentos de concreto.

Os modelos constitutivos dos materiais são abordados no **capítulo 5**, destacando-se o comportamento do concreto tracionado e comprimido e as propriedades da armadura. Apresentam-se, também, as propriedades dependentes do tempo do concreto e do aço.

No **capítulo 6**, explicam-se os modelos implementados para as estruturas de concreto protendido através de três sistemas de protensão.

No **capítulo 7** mostram-se a implementação computacional desenvolvida neste trabalho, para considerar a estrutura segmentada.

No **capítulo 8**, são apresentadas comparações entre os resultados experimentais de vigas monolíticas de concreto com protensão externa com os obtidos pelo modelo computacional.

No **capítulo 9**, são apresentadas comparações entre os resultados experimentais de uma viga composta por aduelas pré-moldadas de concreto com protensão externa com os obtidos pelo modelo computacional.

O **capítulo 10** apresenta as conclusões deste trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

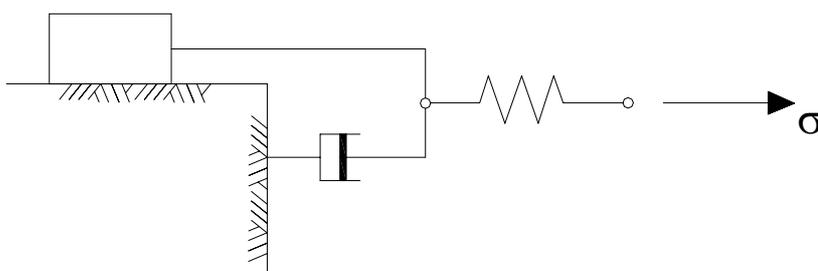
Finalmente, no **anexo A**, faz-se a descrição da entrada de dados do programa, com a finalidade de facilitar a utilização do modelo computacional desenvolvido neste trabalho em investigações futuras.

## 2. ANÁLISE DE UM MATERIAL COM COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO ATRAVÉS DE MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

### 2.1 INTRODUÇÃO

O modelo implementado apresenta um algoritmo de incremento de carga para a solução do problema elastoplástico e um algoritmo de incremento de tempo para solução do problema viscoelástico. Ambos os algoritmos foram desenvolvidos e apresentados por Owen e Hinton (1980). No primeiro algoritmo, estuda-se a resposta de uma estrutura submetida a um carregamento instantâneo, considerando-se o tempo tendendo ao infinito, e cujo estado estável corresponde ao comportamento elastoplástico da estrutura. O segundo algoritmo determina a resposta de uma estrutura decorrido um determinado período após a aplicação do carregamento. Desta forma, com estes dois algoritmos, o comportamento dos materiais neste trabalho é determinado em função de um modelo elasto-viscoplástico, representado por uma mola em série com um amortecedor e um elemento de atrito em paralelo, como mostra a Fig. 2.1. Por este modelo, pode-se encontrar soluções tanto de problemas elastoplásticos, quando a estrutura atinge o estado estacionário, quanto de problemas viscoelásticos, quando se anula a tensão de plastificação.

Conforme Pande, Owen e Zienkiewicz (1977) utiliza-se o modelo de camadas superpostas para a solução do problema viscoelástico. Neste modelo, o material é dividido em um determinado número de camadas, onde cada uma delas possui propriedades mecânicas diferentes, mas sofre a mesma deformação total. Obtém-se, assim, um comportamento composto capaz de representar de forma realista o comportamento viscoelástico de um material.



**Figura 2.1** - Modelo elasto-viscoplástico

## 2.2 COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DO CONCRETO

A formulação matemática utilizada neste trabalho foi apresentada por Owen e Hinton (1980) para a análise estrutural não-linear de materiais isotrópicos, homogêneos e de comportamento elasto-viscoplástico. Para o concreto, um material heterotrópico e não-homogêneo, a modelagem do comportamento elasto-viscoplástico deve sofrer as seguintes adaptações dadas nesta seção.

### 2.2.1 Expressões básicas

Em problemas contínuos não-lineares é admitido a aditividade de taxas de deformação plástica e elástica:

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}_e\} + \{\dot{\varepsilon}_{vp}\}, \quad (2.1)$$

onde  $\dot{\varepsilon}$ ,  $\dot{\varepsilon}_e$  e  $\dot{\varepsilon}_{vp}$  são respectivamente as taxas de deformação total, elástica e viscoplástica e  $(\dot{\quad})$  representa diferenciação com relação ao tempo.

As deformações elásticas são instantâneas e recuperáveis e permanecem constantes no tempo enquanto as tensões atuarem. Já as deformações plásticas permanecem após a retirada das tensões que as causaram enquanto que grande parte das deformações viscoelásticas são recuperáveis com o tempo.

A taxa de tensão total,  $\{\dot{\sigma}\}$ , é calculada a partir da taxa de deformação elástica,  $\{\dot{\varepsilon}_e\}$ , de acordo com:

$$\{\dot{\sigma}\} = [D]\{\dot{\varepsilon}_e\}, \quad (2.2)$$

onde  $[D]$  é a matriz constitutiva do material, apresentada na Eq. 3.14 do capítulo 3.

O comportamento viscoplástico do material, segundo o modelo elasto-viscoplástico de Owen e Hinton (1980), é governado por uma superfície de plastificação dada por:

$$F(\{\sigma\}) - F_0(k) = 0, \quad (2.3)$$

onde  $F_0$  é a tensão de plastificação uniaxial que, neste caso, é função de um parâmetro de endurecimento,  $k$ . Se  $F < F_0$ , tem-se um comportamento elástico, se  $F = F_0$ , plástico, e se  $F > F_0$  viscoplástico.

Conhecido o estado de tensão, Owen e Hinton (1980) sugerem uma lei específica para a determinação da deformação viscoplástica:

$$\begin{aligned} \{\dot{\varepsilon}_{vp}\} &= \gamma \Phi(F) \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}}, \text{ para } F > F_0, \\ \{\dot{\varepsilon}_{vp}\} &= \{0\}, \text{ para } F \leq F_0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

sendo:

- $\gamma = 1 / \eta$  é o parâmetro de fluidez;
- $Q = Q(\{\sigma\})$  é a função potencial plástico;
- $\Phi(F) = F - F_0$ , função proposta por Prates Júnior (1992).

Restringindo-se apenas ao caso de plasticidade associada, na qual  $F \equiv Q$ , a equação (2.4) fica:

$$\{\dot{\varepsilon}_{vp}\} = \gamma \Phi(F) \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \gamma \Phi(F) \{a\}, \quad (2.5)$$

onde  $\{a\}$  é o vetor de fluxo plástico e depende do critério de plastificação utilizado, a ser visto no capítulo 5.

### 2.2.2 Incremento de deformação viscoplástica

Com a lei para a taxa de deformação viscoplástica, expressa na equação (2.5), pode-se definir um incremento de deformação viscoplástica,  $\{(\Delta\varepsilon_{vp})_n\}$ , correspondente a um intervalo de tempo  $(\Delta t)_n = (t)_{n+1} - (t)_n$ , usando um esquema de integração no tempo explícito, uma vez que o incremento de deformação viscoplástica fica completamente determinado pelas condições existentes no tempo,  $(t)_n$ , como:

$$\{(\Delta\varepsilon_{vp})_n\} = (\Delta t)_n \{(\dot{\varepsilon}_{vp})_n\}. \quad (2.6)$$

### 2.2.3 Incremento de tensão

Utilizando-se a forma incremental na equação (2.2) e substituindo-se a equação (2.1) também na forma incremental, obtém-se:

$$\{(\Delta\sigma)_n\} = [(D)_n] \{(\Delta\varepsilon)_n\} = [(D)_n] (\{(\Delta\varepsilon)_n\} - \{(\Delta\varepsilon_{vp})_n\}). \quad (2.7)$$

O incremento de deformação total pode ser expresso em termos do incremento de deslocamento, ou seja:

$$\{(\Delta \varepsilon)_n\} = [B] \{(\Delta u)_n\}, \quad (2.8)$$

onde  $[B]$  é a matriz de relações deformação-deslocamento do elemento de concreto, a ser definida no capítulo 3, e  $\{(\Delta u)_n\}$  é o vetor de incremento de deslocamento nas direções dos eixos globais cartesianos  $x$  e  $y$ .

Substituindo-se as equações (2.6) e (2.8) na equação (2.7), tem-se:

$$\{(\Delta \sigma)_n\} = [(D)_n] ([B] \{(\Delta u)_n\} - (\Delta t)_n \{(\dot{\varepsilon}_{vp})_n\}). \quad (2.9)$$

## 2.2.4 Equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio a serem satisfeitas, a cada instante de tempo  $(t)_n$  são:

$$\int_V [B]^T \{(\sigma)_n\} dV - \{(P)_n\} = 0, \quad (2.10)$$

onde  $\{(P)_n\}$  é o vetor de carga nodal equivalente. No entanto, durante um incremento de tempo, as equações de equilíbrio a serem satisfeitas são dadas pela forma incremental da equação (2.10), como segue:

$$\int_V [B]^T \{(\Delta \sigma)_n\} dV - \{(\Delta P)_n\} = 0, \quad (2.11)$$

na qual,  $\{(\Delta P)_n\}$  representa a variação do vetor de carga nodal equivalente durante um intervalo de tempo. Na maioria dos casos, o incremento de carga é aplicado como passo discreto, considerando-se  $\{(\Delta P)_n\} = 0$  para todos os passos de tempo, exceto para o primeiro passo dentro de um incremento de carga.

Trabalhando-se com as equações (2.7) e (2.11), o incremento de deslocamento, a cada intervalo de tempo, pode ser calculado da forma:

$$\begin{aligned} \{(\Delta u)_n\} &= [(K)_n]^{-1} \{(\Delta F)_n\} \quad \text{e} \\ \{(\Delta F)_n\} &= \int_V [B]^T [(D)_n] \{(\dot{\varepsilon}_{vp})_n\} (\Delta t)_n dV + \{(\Delta P)_n\}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde:

- $[(K)_n]$  é a matriz de rigidez tangencial global, dada por:

$$[(K)_n] = \int_V [B]^T [(D)_n] [B] dV, \quad (2.13)$$

- $\{(\Delta F)_n\}$  é o vetor de incremento de carga nodal equivalente de toda a estrutura, no passo  $n$ , chamado de vetor de “pseudo-cargas”.

Aplicando-se a condição inicial, o incremento de deslocamento pode ser calculado para qualquer instante de tempo, que, quando substituído na equação (2.9), resulta no incremento de tensão. Assim:

$$\begin{aligned} \{(\sigma)_{n+1}\} &= \{(\sigma)_n\} + \{(\Delta\sigma)_n\} \quad \text{e} \\ \{(u)_{n+1}\} &= \{(u)_n\} + \{(\Delta u)_n\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pelas equações (2.7) e (2.8), calcula-se o incremento de deformação viscoplástica:

$$\{(\Delta\varepsilon_{vp})_n\} = [B]\{(\Delta u)_n\} - [(D)_n]^{-1}\{(\Delta\sigma)_n\}, \quad (2.15)$$

e, então:

$$\{(\varepsilon_{vp})_{n+1}\} = \{(\varepsilon_{vp})_n\} + \{(\Delta\varepsilon_{vp})_n\}. \quad (2.16)$$

O estado estacionário pode ser obtido, numericamente, examinando-se a variação do deslocamento nodal. A condição de convergência é atingida quando esta quantidade torna-se adequadamente pequena, de acordo com o fator de tolerância adotado no problema. Logo, verifica-se:

$$\frac{\| \{(\Delta u)_n\} \|}{\| \{(u)_n\} \|} \leq TOLER, \quad (2.17)$$

onde:

- $\| \{(\Delta u)_n\} \|$  é a norma do vetor de incremento de deslocamento;
- $\| \{(u)_n\} \|$  é a norma do vetor de deslocamento;
- TOLER é o fator de tolerância adotado neste trabalho (1%).

### 2.2.5 Correção do equilíbrio

O cálculo do incremento de tensão está baseado numa forma linearizada da equação de equilíbrio (2.11). Portanto, a tensão total,  $\{(\sigma)_{n+1}\}$ , obtida pela acumulação de todos os incrementos de tensões, não está estritamente correta e não satisfaz as equações de equilíbrio (2.10). Segundo Strincklin, Haisler e Reisemann (1973), há vários procedimentos disponíveis para a realização das correções necessárias. A abordagem mais simples é avaliar  $\{(\sigma)_{n+1}\}$ , conforme apresentado anteriormente e, então, calcular a força residual,  $\{(\Psi)_{n+1}\}$ , como:

$$\{(\Psi)_{n+1}\} = \{(P)_{n+1}\} - \int_V [B]^T \{(\sigma)_{n+1}\} dV \neq \{0\}. \quad (2.18)$$

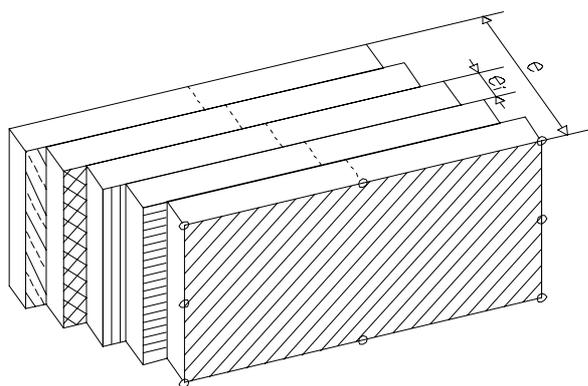
Esta força residual é, então, adicionada ao incremento de força,  $\{(\Delta F)_{n+1}\}$ , no próximo passo de tempo. Tal técnica evita um processo de iteração maior e, ao mesmo tempo, alcança uma redução do erro cometido.

### 2.2.6 Modelo de camadas

Segundo Pande, Owen e Zienkiewicz (1977), uma resposta de um material complexo, como o concreto, pode ser obtida pelo método das camadas superpostas (“overlay models”), na qual simula-se o comportamento viscoplástico com envelhecimento. O material analisado é dividido em um número conveniente de camadas, com propriedades mecânicas distintas, que sofrem a mesma deformação. O campo de tensões totais é obtido pela soma das contribuições de cada camada.

O modelo reológico utilizado neste trabalho é formado por um conjunto de elementos tipo Maxwell em paralelo, tendo-se como parâmetros as espessuras das camadas,  $e_i$ , os módulos de elasticidade,  $E_i$ , as constantes dos amortecedores,  $\gamma_i$ , e as tensões de plastificação,  $F_{0i}$ , a partir das quais começam a atuar os elementos de atrito. Adotou-se o modelo com cinco camadas superpostas, onde os elementos de atrito foram retirados, considerando nulas as tensões de plastificação conforme Machado (2002).

A Fig. 2.2 ilustra, esquematicamente, uma situação em duas dimensões de um modelo de camadas superpostas.



**Figura 2.2** - Modelo de camadas superpostas

Cada camada pode ter um campo de tensão,  $\{\sigma_i\}$ , distinto, que contribui com uma parcela para o campo de tensão total,  $\{\sigma\}$ , conforme sua espessura,  $e_i$ , da forma:

$$\{\sigma\} = \sum_{i=1}^j \{\sigma_i\} e_i, \quad (2.19)$$

onde  $j$ , igual a cinco, é o número de camadas do modelo. Ainda, impõe-se a seguinte condição:

$$\sum_{i=1}^j e_i = 1. \quad (2.20)$$

Portanto, a equação de equilíbrio (2.10) pode ser reescrita como:

$$\int_V [B]^T \sum_{i=1}^j \{(\sigma_i)_n\} e_i dV - \{(P)_n\} = 0. \quad (2.21)$$

A matriz de rigidez do elemento será a soma das contribuições de cada camada, ou seja:

$$[(K)_n] = \sum_{i=1}^j \int_V [B]^T [(D_i)_n] [B] dV, \quad (2.22)$$

onde  $[(D_i)_n]$  é a matriz constitutiva de cada camada, calculada em função das suas propriedades.

O processo de solução é idêntico ao apresentado anteriormente, com o campo de deformação elástica,  $\{\varepsilon_{ei}\}$ , e viscoplástica,  $\{\varepsilon_{vpi}\}$ , além do campo de tensão, sendo avaliados para cada camada, onde a deformação total é a mesma para todas as camadas mesmo tendo, em princípio, propriedades mecânicas diferentes.

## 2.3 COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DO AÇO

No item anterior, foi apresentado um modelo para a análise de um material com comportamento elasto-viscoplástico, adequado para o estudo de peças de concreto simples. Para a incorporação da armadura tanto passiva quanto de protensão no modelo computacional, pode-se escrever uma formulação semelhante, considerando a aderência perfeita entre o aço e o concreto. Assim, neste item, será apresentado um algoritmo incremental para descrever o comportamento elasto-viscoplástico do aço.

### 2.3.1 Incremento de tensão

Conhecido o incremento de deslocamento nodal,  $\{(\Delta u)_n\}$ , para o passo  $n$  de tempo, o incremento de tensão axial em um ponto de uma barra de aço,  $(\Delta \sigma_s)_n$ , é dada por:

$$(\Delta \sigma_s)_n = E_s (\Delta \varepsilon_e)_n = E_s [(\Delta \varepsilon_s)_n - (\Delta \varepsilon_{svp})_n], \quad (2.23)$$

onde:

- $E_s$  é o módulo de elasticidade longitudinal do aço;
- $(\Delta \varepsilon_e)_n$  é o incremento de deformação elástica do aço;
- $(\Delta \varepsilon_s)_n$  é o incremento de deformação total do aço;
- $(\Delta \varepsilon_{svp})_n$  é o incremento de deformação viscoplástica do aço.

O incremento de deformação total pode ser calculado como:

$$(\Delta \varepsilon_s)_n = \langle B_s \rangle \{(\Delta u)_n\}, \quad (2.24)$$

onde  $\langle B_s \rangle$  é o vetor das relações deformação-deslocamento da barra de armadura, a ser definido no capítulo 3.

Usando-se um esquema de integração no tempo explícito, conforme o item 2.2.2, o incremento de deformação viscoplástica para o aço é:

$$(\Delta \varepsilon_{svp})_n = (\Delta t)_n \{(\dot{\varepsilon}_{svp})_n\}, \quad (2.25)$$

sendo a taxa de deformação viscoplástica,  $\{(\dot{\varepsilon}_{svp})_n\}$ , dada adiante no item 2.3.3.

Substituindo-se as equações (2.24) e (2.25) na expressão (2.23), tem-se:

$$(\Delta \sigma_s)_n = E_s [\langle B_s \rangle \{(\Delta u)_n\} - (\Delta t)_n \{(\dot{\varepsilon}_{svp})_n\}]. \quad (2.26)$$

A tensão no próximo passo  $n+1$ ,  $(\sigma_s)_{n+1}$ , fica:

$$(\sigma_s)_{n+1} = (\sigma_s)_n + (\Delta \sigma_s)_n. \quad (2.27)$$

### 2.3.2 Equações de equilíbrio

A equação (2.18), correspondente à força residual, considerando a presença da armadura, resulta em:

$$\{(\Psi)_{n+1}\} = \{(P)_{n+1}\} - \int_V [B]^T \{(\sigma)_{n+1}\} dV - \int_s \{B_s\} (\sigma_s)_{n+1} A_s ds. \quad (2.28)$$

O vetor de “pseudo-carga” da equação (2.12) terá um acréscimo,  $\{(\Delta F_s)_n\}$ , de:

$$\{(\Delta F_s)_n\} = \int_s \{B_s\} E_s A_s \{(\dot{\epsilon}_{svp})_n\} (\Delta t)_n ds, \quad (2.29)$$

sendo  $s$  a coordenada que descreve o eixo da barra de armadura.

### 2.3.3 Taxa de deformação viscoplástica

A taxa de deformação viscoplástica pode ser calculada como:

$$(\dot{\epsilon}_{svp})_n = \gamma_s (\sigma_s - \sigma_y), \quad (2.30)$$

onde  $\sigma_y$  é a tensão de plastificação inicial e  $\gamma_s$  é o coeficiente de fluidez do aço. Na fase elastoplástica, o coeficiente de fluidez é tomado como sendo  $1 \times 10^{-5}$ , conforme Machado (2002).

### 2.3.4 Modelo de camadas

Na etapa viscoelástica, admite-se que o coeficiente de fluidez é nulo para as barras de armadura passiva. Já para a armadura de protensão, faz-se uso, de forma análoga à empregada para o concreto, de um modelo de camadas para a representação do comportamento viscoelástico do aço. Neste modelo, têm-se como variáveis os módulos de elasticidade,  $E_{si}$ , e os coeficientes de fluidez  $\gamma_{si}$ , para cada camada.

O vetor de forças residuais pode ser reescrito como:

$$\{(\Psi)_{n+1}\} = \{(P)_{n+1}\} - \int_V [B]^T \{(\sigma)_{n+1}\} dV - \int_s \{B_s\} \sum_{i=1}^j (\sigma_{si})_{n+1} A_s ds, \quad (2.31)$$

onde  $j$  é o número de camadas.

Já a parcela correspondente à presença da armadura no vetor de “pseudo-carga” é dada por:

$$\{(\Delta F_s)_n\} = \sum_{i=1}^j \int_s \{B_s\} E_s A_s \{(\dot{\epsilon}_{svpi})_n\} (\Delta t)_n ds, \quad (2.32)$$

onde:

$$(\Delta \sigma_{si})_n = E_{si} [ \langle B_s \rangle \{(\Delta u)_n\} - (\Delta t)_n \{(\dot{\epsilon}_{svpi})_n\} ], \quad (2.33)$$

$$\{\sigma_{si}\}_n = \sum_{i=1}^j \{(\Delta \sigma_{si})_n\}, \quad (2.34)$$

$$\{\sigma_s\}_n = \sum_{i=1}^j \{\sigma_{si}\}_n, \quad (2.35)$$

e

$$(\dot{\varepsilon}_{svpi})_n = \gamma_{si} (\sigma_{si} - \sigma_y)_n. \quad (2.36)$$

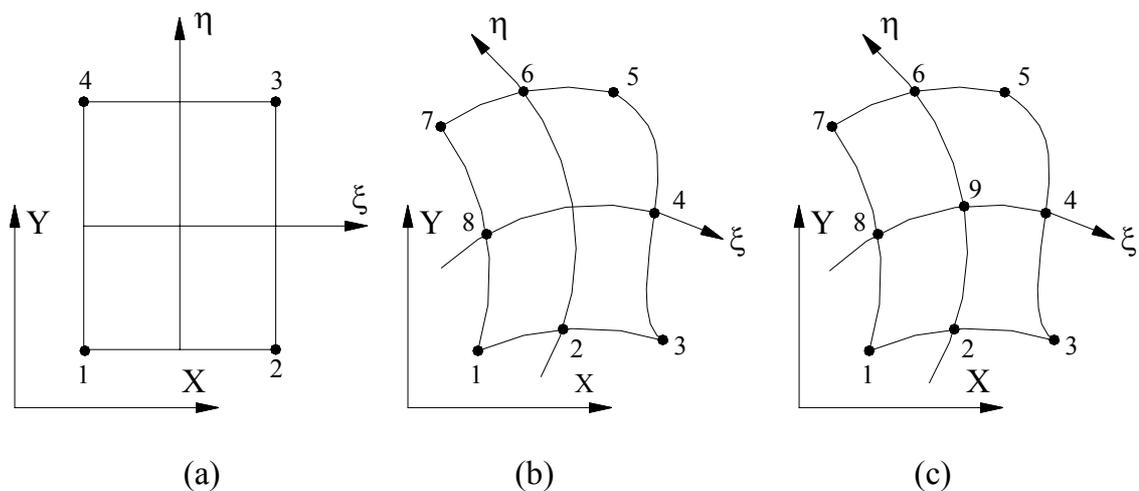
## 3. APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### 3.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta uma formulação pelo método de elementos finitos para a análise de peças estruturais sob o estado plano de tensões. O MEF surgiu em 1955 devido à necessidade de projetos de estruturas arrojadas e com a disponibilidade de computadores digitais. Este método estabelece a divisão do domínio de integração contínuo em um número finito de pequenas regiões, denominadas *elementos finitos*. A essa divisão do domínio dá-se o nome de *malha de elementos finitos* (Soriano e Lima, 1998). As dimensões e a forma dos elementos finitos fica estabelecida através de seus nós. Na solução em deslocamentos, as incógnitas do problema são os deslocamentos nodais; sendo as deformações e tensões no interior dos elementos e as reações de apoio calculadas a partir destes.

### 3.2 ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO

Conforme o modelo implementado neste trabalho, a peça de concreto pode ser discretizada por três tipos de elementos finitos isoparamétricos quadrangulares. A formulação dos elementos isoparamétricos quadráticos permitem gerar elementos com lados curvos e modelar mais adequadamente os contornos irregulares de peças a serem analisadas. Os três tipos de elementos utilizados são ilustrados na Fig. 3.1, sendo um linear e dois quadráticos, conforme Owen e Hinton (1980). Estes elementos possuem 4, 8 e 9 nós, respectivamente. Os elementos possuem dois graus de liberdade em cada nó, correspondentes às translações na direção dos eixos  $x$  e  $y$  do sistema global de coordenadas e coordenadas curvilíneas normalizadas  $\xi$  e  $\eta$  correspondentes a um sistema de referência local.



**Figura 3.1** – Elementos isoparamétricos:

(a) linear 4 nós, (b) quadrático 8 nós, (c) quadrático 9 nós

### 3.2.1 Campo de deslocamentos e de deformações

Conforme a formulação clássica do método dos elementos finitos, apresentada em Zienkiewicz (1989), o campo de deslocamentos no interior do elemento é obtido através dos deslocamentos nodais, mediante o emprego de funções de interpolação bidimensionais, a partir da expressão:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

O campo de deslocamentos possui variação linear, para o elemento linear, e variação quadrática para os elementos de 8 e 9 nós. As funções de interpolação (ou de forma), que têm como variáveis independentes as coordenadas normalizadas  $(\xi, \eta)$  e a numeração dos nós, conforme indicado na Fig. 3.1, são:

1. Elemento linear (4 nós):

$$N_i = 1/4 (1 + \xi_0) (1 + \eta_0), \quad i=1,3,5,7, \quad (3.2)$$

onde  $\xi_0 = \xi / \xi_i$ ,  $\eta_0 = \eta / \eta_i$  e  $(\xi_i, \eta_i)$  são as coordenadas naturais do nó em questão.

2. Elemento quadrático da família Serendipity (8 nós):

– para os nós de canto:

$$N_i = 1/4 (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (\xi_0 + \eta_0 - 1), \quad i=1,3,5,7. \quad (3.3)$$

– para os nós de meio de lado:

$$N_i = \xi_i^2/2(1 + \xi_0)(1 - \eta) + \eta_i^2/2(1 + \eta_0)(1 - \xi^2), \quad i=2,4,6,8. \quad (3.4)$$

### 3. Elemento quadrático da família de Lagrange (9 nós)

– para os nós de canto:

$$N_i = 1/4(\xi^2 + \xi_0)(\eta^2 + \eta_0), \quad i=1,3,5,7. \quad (3.5)$$

– para os nós de meio de lado:

$$N_i = \eta_i^2/2(\eta^2 - \eta_0)(1 - \xi^2) + \xi_i^2/2(\xi^2 - \xi_0)(1 - \eta^2), \quad i=2,4,6,8. \quad (3.6)$$

– para o nó central:

$$N_i = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2), \quad i=9. \quad (3.7)$$

A geometria dos elementos isoparamétricos é definida com as mesmas funções de forma utilizadas na definição do campo dos deslocamentos; portanto as coordenadas cartesianas de um ponto genérico do elemento  $(x,y)$  podem ser escritas em função das coordenadas nodais do elemento  $(x_i, y_i)$  por meio da igualdade:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}, \quad (3.8)$$

na qual  $N_i(\xi, \eta)$  é a função de forma correspondente ao nó  $i$  do elemento e  $n$  é o número de nós do elemento. O campo de deformações no interior do elemento é obtido a partir do campo de deslocamentos:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U^e\}, \quad (3.9)$$

sendo  $U^e$  o vetor de deslocamentos nodais do elemento e  $B$  a matriz deformação-deslocamento, composta pelas submatrizes  $B_i$  de cada nó, calculadas no ponto de integração com coordenadas naturais,  $(\xi, \eta)$  e dadas por:

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

onde  $\frac{\partial N_i}{\partial x, y} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x, y} + \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x, y}$  e os termos  $\frac{\partial \eta}{\partial x, y}$  e  $\frac{\partial \xi}{\partial x, y}$  podem ser obtidos através da inversa da matriz Jacobiana do elemento:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

A matriz de rigidez,  $[K_c]$ , para os elementos de concreto pode ser calculada por:

$$[K_c] = \int_V [B]^T [D] [B] dV, \quad (3.12)$$

e pode ser obtida, numericamente, através da expressão:

$$[K_c] = \sum_{i=1}^{ng} \sum_{j=1}^{ng} [B_i]^T [D] [B_j] w_i w_j e_{ij} |J|, \quad (3.13)$$

onde:

- $ng$  é o número de pontos de integração em cada direção do elemento;
- $[D]$  é a matriz constitutiva elástica ou matriz de constantes elásticas para estado plano de tensão:

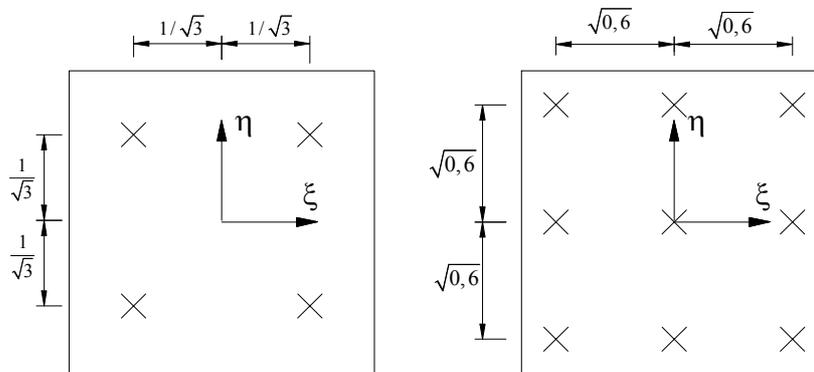
$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

onde:

- $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal;
- $\nu$  é o coeficiente de Poisson;
- $w_i$  e  $w_j$  são os fatores de peso;
- $e_{ij}$  é a espessura do elemento;
- $|J|$  é o determinante da matriz Jacobiana do elemento.

Quando se define a geometria do elemento através de interpolação das coordenadas nodais, as integrações necessárias para o cálculo da matriz de rigidez  $K_c$  são muito elaboradas e impraticáveis de serem levadas a efeito manualmente. Utiliza-se então, como proposto em Owen e Hinton (1977), o Método da Quadratura de Gauss-Legendre, com  $3 \times 3$  pontos para

os elementos quadráticos e  $2 \times 2$  pontos para o elemento linear. As coordenadas naturais dos pontos de integração encontram-se na Fig. 3.2 e os fatores de peso destes pontos são mostrados na tabela 3.1.



**Figura 3.2** – Localização dos pontos de integração de Gauss

**Tabela 3.1** – Pesos dos pontos de integração

<i>Ordem</i>	<i>Peso</i>
<b>Linear</b>	1
	0,5555556
<b>Quadrático</b>	0,8888889
	0,5555556

Finalmente, o sistema de equações de equilíbrio global da estrutura, depois de somar todas as contribuições elementares do concreto e da armadura (ver item 3.2) resulta em:

$$\{P\} = [K]\{U\}, \quad (3.15)$$

onde  $K$  é a matriz de rigidez global,  $U$  é o vetor dos deslocamentos nodais e  $P$  é o vetor de cargas nodais aplicadas sobre a estrutura. A solução deste sistema fornece os deslocamentos nodais para o carregamento aplicado.

### 3.3 ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA

Em um modelo de elementos finitos para análise de peças de concreto estrutural, a armadura pode ser incluída através de três modelos alternativos: o modelo distribuído, o modelo incorporado e o modelo discreto.

No modelo distribuído, considera-se o aço distribuído uniformemente no elemento de concreto, admitindo-se aderência perfeita entre o aço e o concreto. É um modelo conveniente quando a armadura está densamente distribuída, como no caso de placas e cascas. No modelo incorporado, considera-se a armadura como uma linha de material mais rígido no interior do elemento finito de concreto. Desta forma, a armadura não necessita estar uniformemente distribuída, podendo-se representar várias barras de aço no interior de um mesmo elemento de concreto. Admite-se, também, aderência perfeita entre o concreto e o aço. No modelo discreto, a armadura é representada por elementos unidimensionais de treliça, que se integram à malha de elementos finitos utilizada na representação do concreto. Este modelo tem a desvantagem da malha de elementos finitos de concreto limitar a disposição das barras de armadura.

Por suas vantagens, o modelo incorporado é o bastante utilizado em análises por elementos finitos de estruturas de concreto, sendo utilizado, por exemplo, nos trabalhos de Campos Filho (1987), Prates Júnior (1992), Claire (1994), Dantas (2000) e Machado (2002). Assim, neste trabalho, semelhantemente aos trabalhos citados, para a representação da armadura, utilizou-se o modelo incorporado proposto por Elwi e Hrudey (1989). Neste modelo supõe-se que a armadura resista apenas a esforços axiais em sua direção longitudinal e que os deslocamentos de um ponto qualquer da barra são iguais aos do elemento de concreto no qual ela está embebida. Desta forma, as barras da armadura contribuem apenas para a rigidez no sentido longitudinal e permite-se uma disposição arbitrária das mesmas no interior dos elementos de concreto, sem a geração de novas incógnitas no problema.

Apresentam-se, a seguir, os procedimentos para o cálculo da matriz de rigidez da armadura, correspondente aos diversos elementos de concreto e descrevem-se os passos para a determinação automática dos segmentos de barras de armadura contidos em cada elemento finito de concreto.

### **3.3.1 Modelo incorporado**

Os deslocamentos ao longo da barra são obtidos a partir dos deslocamentos nodais do elemento de concreto. Logo, a matriz de rigidez da armadura,  $K_s$ , tem as mesmas dimensões da matriz de rigidez do elemento de concreto,  $K_c$ , e a matriz de rigidez total do elemento é a soma das duas. A expressão final da matriz de rigidez do elemento de concreto armado resulta em:

$$[K] = [K_c] + \sum_{i=1}^{nb} [K_s]_i, \quad (3.16)$$

onde  $nb$  denota o número de segmentos de barra de armadura no interior do elemento de concreto. A matriz de rigidez para cada barra de armadura é expressa por:

$$[K_s] = E_s A_s \int_s \{B_s\} \langle B_s \rangle ds, \quad (3.17)$$

onde:

- $E_s$  é o módulo de elasticidade longitudinal do aço;
- $A_s$  é a área da seção transversal da barra de armadura;
- $\{B_s\}$  é o vetor das relações deformação-deslocamento para a armadura;
- $s$  é a coordenada que descreve o eixo da barra de armadura.

### 3.3.2 Formulação geométrica

Neste item, é apresentada a formulação para se incorporar barras de aço ao elemento de concreto. Na entrada de dados, descrita no Anexo A, as barras de armadura são posicionadas por suas coordenadas globais cartesianas  $(x, y)$ , independentemente da malha de elementos finitos.

As barras de aço são representadas por elementos unidimensionais isoparamétricos. Através destes elementos podem ser modeladas barras retas e curvas. A geometria das barras retas fica definida por dois pontos, enquanto que, para barras curvas, são necessários três pontos.

O elemento de concreto mostrado na Fig. 3.3 é descrito usando-se as suas coordenadas globais  $(x, y)$ . As coordenadas naturais locais do elemento são  $(\xi, \eta)$ . Seguindo o procedimento usual para o mapeamento isoparamétrico, as coordenadas globais de um ponto localizado no interior de um elemento são expressas em termos das funções de interpolação,  $N_i$ , conforme:

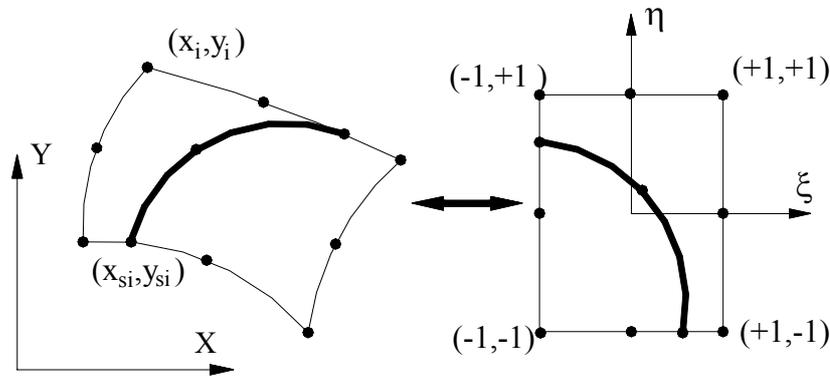
$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i, \quad (3.18)$$

$$y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i.$$

Os elementos infinitesimais das coordenadas globais são expressos por:

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}, \quad (3.19)$$

onde  $[J]$  é a matriz Jacobiana mostrada na Eq. 3.11.



**Figura 3.3** - Barra de armadura no interior de um elemento de concreto

Esta formulação possui a vantagem da localização e geometria das barras independentem da malha de elementos finitos, devendo a armadura ser especificada por um conjunto de pontos nodais.

Para se garantir uma continuidade interelementar adequada, é necessária a colocação de nós nos elementos de barra, onde a armadura atravessa o contorno do elemento de concreto, sendo as coordenadas dos nós das barras de aço entre os pontos de definição da mesma obtidas por interpolação. Desta maneira, nós adicionais são criados dentro dos elementos finitos, onde há a presença de armadura.

Tomando-se  $\{x_{sj}\}$  e  $\{y_{sj}\}$  como vetores que contêm as coordenadas globais dos nós da barra, as coordenadas de qualquer outro ponto ao longo desta barra podem ser assim determinadas:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} H_j(\zeta) & 0 \\ 0 & H_j(\zeta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{sj} \\ y_{sj} \end{Bmatrix}, \quad (3.20)$$

onde  $H_j(\zeta)$  são as funções de interpolação unidimensionais expressas em termos de uma coordenada normalizada,  $\zeta$  (ver Fig. 3.4).

Os vários termos da rigidez associada à armadura requerem integrações sobre a mesma. Para tanto, necessita-se de um elemento diferencial de comprimento,  $ds$ , disposto ao

longo da armadura. A orientação da tangente à barra, ilustrada na Fig. 3.4, é dada pelo ângulo  $\beta$ , onde:

$$\cos \beta = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\zeta} \frac{d\zeta}{ds} \text{ e } \sin \beta = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{d\zeta} \frac{d\zeta}{ds}. \quad (3.21)$$

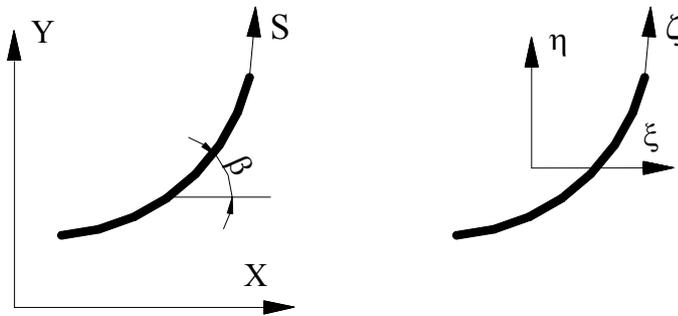
Sendo  $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$ , segue que:

$$\frac{ds}{d\zeta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2}, \quad (3.22)$$

na qual:

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} \frac{dH_j}{d\zeta} & 0 \\ 0 & \frac{dH_j}{d\zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}. \quad (3.23)$$

Então, os cossenos diretores da reta tangente, em qualquer ponto ao longo da armadura e o fator de mapeamento isoparamétrico,  $ds/d\zeta$ , podem ser obtidos pelas expressões apresentadas acima.



**Figura 3.4** - Coordenadas ao longo do eixo de armadura

Um elemento diferencial de volume,  $dV_s$ , da barra de aço pode ser expresso em função do comprimento diferencial,  $ds$ , e da área da seção transversal da barra como:

$$dV_s = A_s ds. \quad (3.24)$$

Usando-se o fator de mapeamento descrito na expressão (3.22), integrais, envolvendo elementos de volume ao longo da armadura podem ser escritas em função da coordenada normalizada,  $\zeta$ , como:

$$\int_{V_s} C dV_s = \int_{\zeta} C A_s \frac{ds}{d\zeta} d\zeta, \quad (3.25)$$

na qual C é uma função de posição ao longo da barra de armadura.

### 3.3.3 Localização de segmentos de armadura no interior de um elemento de concreto

Através de uma subrotina computacional, pode-se calcular automaticamente os segmentos de barras que ficam no interior do elemento de concreto. Uma vez determinados estes segmentos, é realizado o cálculo da matriz de rigidez da armadura total (concreto-aço) de um determinado elemento, atribuindo-lhe uma rigidez adicional. De forma análoga, as forças internas, associadas à armadura, são integradas àquelas do elemento de concreto para a obtenção do vetor de forças internas totais do elemento.

Primeiramente, transformam-se as coordenadas globais,  $P_j(x,y)$ , dos pontos que definem as extremidades da barra de armadura para coordenadas naturais locais,  $P_j(\xi,\eta)$ , dos mesmos que, para elementos isoparamétricos, é feita por:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & N_i(\xi,\eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}, \quad (3.26)$$

onde:

- $(x, y)$  são as coordenadas globais de um ponto qualquer;
- $(x_i, y_i)$  são as coordenadas globais dos nós do elemento de concreto;
- $N_i(\xi,\eta)$  são as funções de interpolação do elemento de concreto.

A forma explícita para a relação inversa da equação (3.26), ver Fig. 3.5, em geral, não é facilmente encontrada. Entretanto, o mapeamento inverso pode ser feito, numericamente, através do algoritmo de Newton-Raphson, como sugerem Elwi e Hrudey (1989). Deste modo, a determinação aproximada das coordenadas  $(\xi_p, \eta_p)$  está baseada no fato destas coordenadas serem raízes do seguinte sistema de equações:

$$\{f(\xi,\eta)\} = \begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}. \quad (3.27)$$

Usando-se o método de Newton-Raphson, tem-se, após k+1 iterações:

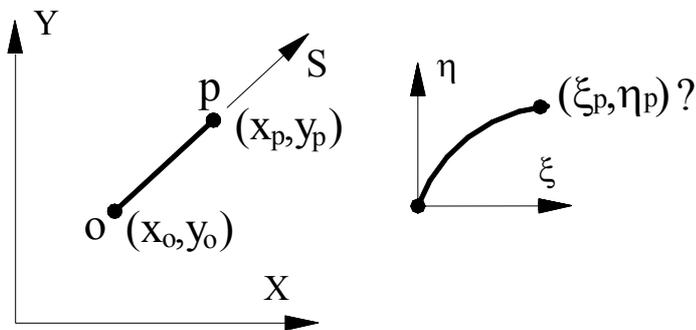
$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}_p^{k+1} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}_p^k + \begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{Bmatrix}_p^{k+1}, \quad (3.28)$$

onde:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{Bmatrix}_p^{k+1} = [J^k]^{-1} \left[ \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_p - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i^k & 0 \\ 0 & N_i^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \right], \quad (3.29)$$

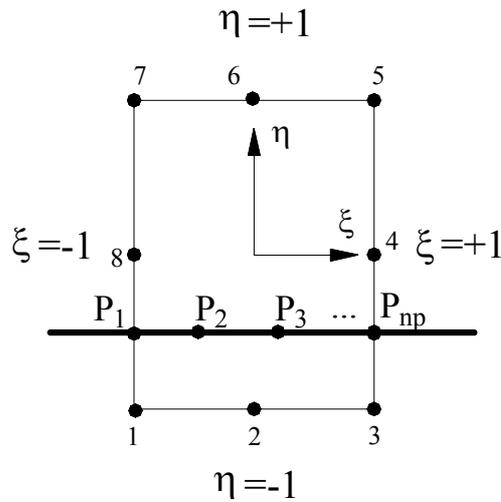
sendo, na iteração k:

- $[J^k] = [J^k(\xi, \eta)]$ , a matriz Jacobiana;
- $\langle N_i^k \rangle = \langle N_i^k(\xi, \eta) \rangle$ , as funções de interpolação do elemento de concreto.



**Figura 3.5** – Mapeamento inverso para coordenadas locais

A segunda etapa define a curva que passa pelos pontos de definição da geometria da barra que foram determinados em coordenadas naturais, referenciados ao sistema natural do elemento em análise. Determinam-se as coordenadas naturais da intersecção da reta, que contém a face do elemento, com a barra de armadura. Os lados do elemento de concreto são definidos fixando-se uma das coordenadas naturais, conforme a Fig. 3.6, e variando a outra entre -1 e 1.



**Figura 3.6** - Curva de definição da barra de aço

Segundo Zienkiewicz (1986), têm-se:

$$\xi = \sum_{i=1}^{np} f_i(\eta) \xi_i, \quad (3.30)$$

$$\eta = \sum_{i=1}^{np} g_i(\xi) \eta_i,$$

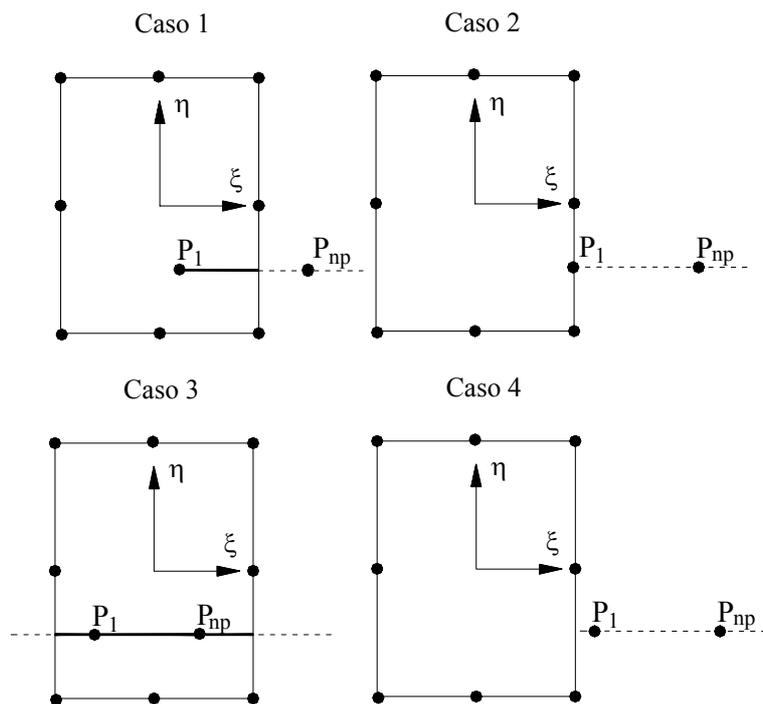
onde,  $np$  é o número de pontos da barra de armadura. Designando por  $i$  a ordem de numeração do ponto em que se tem valor unitário e  $\prod$  como o produtório, calculam-se as funções:

$$g_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)} \text{ e } f_i(\eta) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\eta - \eta_j)}{(\eta_i - \eta_j)}. \quad (3.31)$$

Na terceira etapa, verifica-se a existência de intersecção da curva  $P_1, P_2, \dots, P_{np}$  com cada um dos quatro lados do elemento de concreto. Para tal, fixa-se a coordenada  $\xi = \pm 1$  do elemento e calcula-se a coordenada  $\eta$  da intersecção lado do elemento-curva da barra. Caso  $-1 \leq \eta \leq 1$ , diz-se que a barra intercepta este lado do elemento. Define-se, então, um elemento unidimensional, representativo da parte de armadura, situado no interior deste elemento.

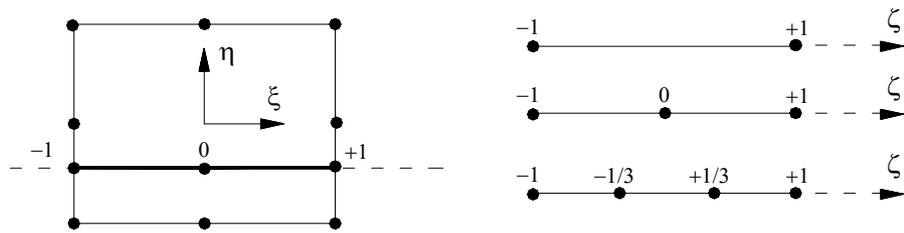
A quarta etapa consiste na verificação do trecho de armadura efetivamente contido no elemento de concreto. Destacam-se os seguintes casos possíveis, mostrados na Fig. 3.7:

- 1) um dos nós, que define uma das extremidades da barra de armadura, encontra-se localizado dentro do elemento de concreto. Isto se evidencia quando as coordenadas naturais de  $P_1$  ou  $P_{np}$ , em módulo, são menores que 1. Outra situação pode ocorrer quando os dois nós estão fora do elemento, um de cada lado, e houver intersecção. Obtém-se, então, o comprimento real do segmento de armadura, contido no interior do elemento de concreto;
- 2) apenas um dos nós de extremidade da barra intercepta um lado do elemento e portanto, nenhum dos nós de definição da barra de armadura está situado dentro do elemento de concreto. Neste caso, considera-se que a barra não está contida em tal elemento;
- 3) os dois nós que definem a geometria da barra de armadura encontram-se localizados no interior do elemento de concreto. Toma-se, então, para as coordenadas naturais dos pontos de intersecção, as mesmas coordenadas naturais dos pontos  $P_1$  e  $P_{np}$  já obtidas anteriormente;
- 4) situação idêntica ao caso 2, pois nenhum dos nós de definição da barra de armadura está situado dentro do elemento de concreto.



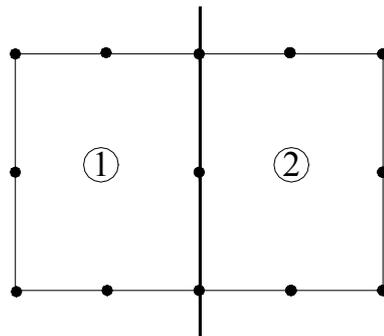
**Figura 3.7** - Situações possíveis para a posição de uma barra de armadura

Na quinta etapa, ocorre a criação, se necessária, de até dois nós intermediários no segmento de armadura, sobre o eixo da coordenada normalizada,  $\zeta$ , conforme ilustra a Fig. 3.8. Determinam-se, posteriormente, as coordenadas cartesianas globais e naturais locais para os nós extremos, bem como para os nós internos do segmento.



**Figura 3.8** - Segmento de armadura dentro do elemento de concreto

Na última etapa, verifica-se se o segmento de armadura coincide com alguma aresta em comum entre dois ou mais elementos de concreto. Neste caso, divide-se a rigidez associada à barra de armadura entre tais elementos. Esta situação pode ser vista na Fig. 3.9.



**Figura 3.9** - Barra de armadura localizada numa aresta entre dois elementos de concreto

### 3.3.4 Funções de forma para os elementos de armadura

As funções de interpolação dos elementos de armadura, segundo Zienkiewicz (1986), são obtidas com os polinômios de Lagrange e são expressas por:

$$H^m(\zeta) = \prod_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^n \frac{(\zeta - \zeta_i)}{(\zeta_k - \zeta_i)}. \quad (3.32)$$

Considerando  $m$  pontos espaçados igualmente segundo a coordenada  $\zeta$ , o polinômio de Lagrange de ordem  $m=n-1$  tem valor unitário em  $\zeta=\zeta_k$  e valor nulo nos demais, onde  $n$

é o número de nós do elemento de armadura. Deste modo, para elementos de 3 nós, empregam-se neste trabalho:

$$\begin{aligned} H_1(\zeta) &= \frac{\zeta^2 - \zeta}{2}, \\ H_2(\zeta) &= 1 - \zeta^2, \\ H_3(\zeta) &= \frac{\zeta^2 + \zeta}{2}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

### 3.3.5 Matriz de rigidez para a armadura

O campo de deformações dentro de um elemento de armadura pode ser definido de diversas maneiras. Segundo Zienkiewicz, Philips e Owen (1974), a deformação ao longo da barra de aço no elemento de concreto é igual à deformação normal na direção tangente à barra. Sendo assim, considerando-se aderência perfeita entre o concreto e o aço, a expressão para a deformação em uma forma incremental, conforme proposto por Elwi e Hrudey (1989), fica:

$$\Delta \varepsilon_s = \Delta \varepsilon_x \cos^2 \beta + \Delta \varepsilon_y \sin^2 \beta + \Delta \gamma_{xy} \sin \beta \cos \beta. \quad (3.34)$$

Os incrementos de deformações  $\Delta \varepsilon_x$ ,  $\Delta \varepsilon_y$ ,  $\Delta \gamma_{xy}$  são obtidos diretamente da relação entre o vetor de relações deformação-deslocamento,  $\{B_s\}$ , também determinado por Elwi e Hrudey (1989), e o campo de incremento de deslocamento,  $\{\Delta u\}$ , do elemento de concreto. Da equação (3.34), segue que a deformação incremental na armadura pode ser expressa como:

$$\Delta \varepsilon_s = \langle B_s \rangle \{\Delta u\}, \quad (3.35)$$

onde:

$$\{B_s\} = \begin{Bmatrix} \cos^2 \beta \left\{ \frac{dN}{dx} \right\} + \cos \beta \sin \beta \left\{ \frac{dN}{dy} \right\} \\ \cos \beta \sin \beta \left\{ \frac{dN}{dx} \right\} + \sin^2 \beta \left\{ \frac{dN}{dy} \right\} \end{Bmatrix}. \quad (3.36)$$

As derivadas das funções de forma,  $N_i$ , em relação às coordenadas  $x$  e  $y$ , são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \frac{dN_i}{dx} \\ \frac{dN_i}{dy} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{dN_i}{d\xi} \\ \frac{dN_i}{d\eta} \end{Bmatrix}. \quad (3.37)$$

Aplicando-se o princípio dos trabalhos virtuais, determina-se a variação de trabalho interno para a armadura:

$$\delta\Delta W = \int_{V_s} (\sigma_s + \Delta\sigma_s) \delta\Delta\varepsilon_s dV_s, \quad (3.38)$$

onde  $\sigma_s$  é a tensão normal na armadura e  $V_s$  é o seu volume.

A forma incremental da relação constitutiva para a armadura pode ser escrita como:

$$\Delta\sigma_s = E_s \Delta\varepsilon_s, \quad (3.39)$$

onde  $E_s$  é o módulo de elasticidade longitudinal do aço. Assim:

$$\delta\Delta W = \int_s \delta\Delta\varepsilon_s \sigma_s A_s ds + \int_s \delta\Delta\varepsilon_s E_s \Delta\varepsilon_s A_s ds, \quad (3.40)$$

ou:

$$\delta\Delta W = \langle \delta\Delta u \rangle ([K_s] \{ \Delta u \} + \{ Q_s \}), \quad (3.41)$$

onde o vetor de força nodal equivalente  $\{ Q_s \}$  é calculado por:

$$\{ Q_s \} = \int_{\zeta} \{ B_s \} \sigma_s \frac{ds}{d\zeta} A_s d\zeta, \quad (3.42)$$

e a matriz de rigidez para a armadura,  $[K_s]$ :

$$[K_s] = \int_{\zeta} \{ B_s \} E_s \langle B_s \rangle \frac{ds}{d\zeta} A_s d\zeta, \quad (3.43)$$

a qual pode ser representada numericamente pela expressão:

$$[K_s] = \sum_{i=1}^{ng} \{ B_{si} \} E_s \langle B_{si} \rangle \frac{ds}{d\zeta} A_s w_i, \quad (3.44)$$

considerando  $w_i$ , o fator de peso e  $ng$ , o número de pontos de integração na direção axial da barra de armadura.

## 4. ELEMENTOS DE CONTATO

### 4.1 INTRODUÇÃO

Neste item, é apresentada a formulação para a incorporação de elementos de contato, que representam as juntas entre os segmentos da estrutura. Esta formulação é baseada no desenvolvimento feito por Habraken e Cescotto (1998).

Na entrada de dados (descrita no Anexo A), os elementos de contato são definidos por suas coordenadas globais cartesianas  $(x, y)$  em função da malha de elementos finitos. Cada elemento de contato é compatível com o elemento de concreto a que é associado e possui os mesmos nós e graus de liberdade de um lado do elemento de concreto.

Os elementos de contato são representados por elementos unidimensionais isoparamétrico, cujas funções de interpolação unidimensionais são as mesmas utilizadas para a armadura. Sua geometria pode ser definida por 2 pontos se forem utilizados elementos de concreto de 4 nós ou por 3 pontos se forem utilizados de elementos de 8 ou 9 nós. A formulação que será apresentada neste capítulo é para elementos de contato de 3 nós.

### 4.2 FORMULAÇÃO

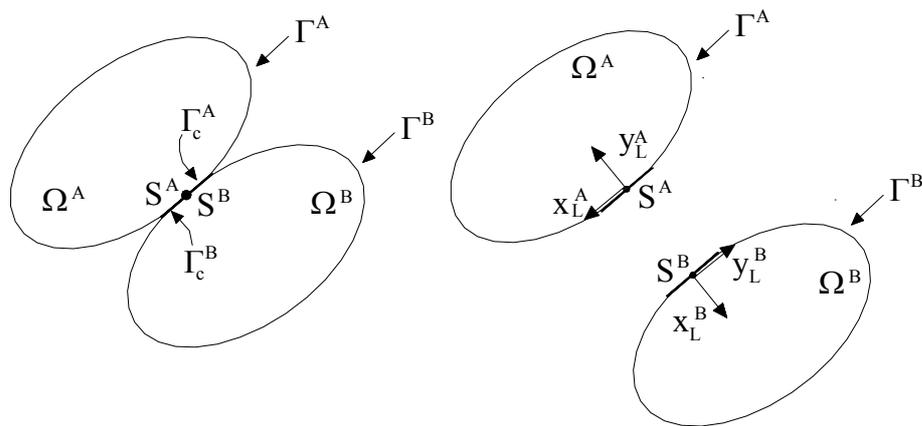
A formulação proposta por Habraken e Cescotto (1998) considera dois sólidos A e B de volume  $\Omega^A$  e  $\Omega^B$  e de perímetro  $\Gamma^A$  e  $\Gamma^B$ , como mostra a Fig. 4.1, estando em contato na superfície através de  $\Gamma_C^A$  e  $\Gamma_C^B$ . As coordenadas no sistema local são definidas pelo vetor  $x_L$ , normal ao ponto S ( $S_A$  ou  $S_B$ ) da superfície de contato, e pelo vetor  $y_L$ , tangencial ao mesmo.

Considera-se o elemento de contato PQR pertencente a  $\Gamma_C^A$  e o elemento EFG pertencente a  $\Gamma_C^B$ , como mostra a Fig. 4.2. As coordenadas globais  $(x, y)$  são:

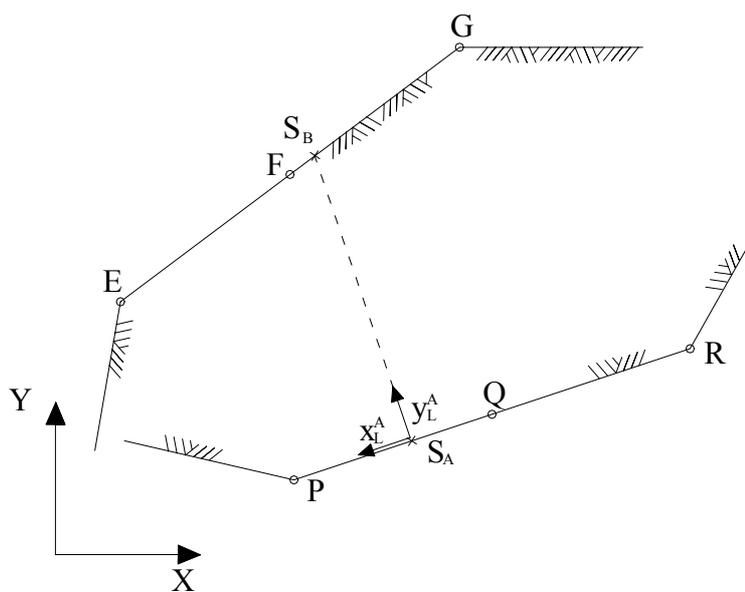
$$(x^M, y^M) \quad M=P, Q, R, E, F, G, \quad (4.1)$$

sendo

$$\begin{cases} x^{JH} = x^H - x^J \\ y^{JH} = y^H - y^J \end{cases} \quad J, H = P, Q, R, E, F, G. \quad (4.2)$$



**Figura 4.1** – Sólidos deformáveis



**Figura 4.2** – Elementos de contato

O sistema de referência local  $(x_L^A, y_L^A)$  é dado por:

$$\begin{aligned} x_L^A &= \cos \beta x + \text{sen} \beta y, \\ y_L^A &= -\text{sen} \beta x + \cos \beta y, \end{aligned} \quad (4.3)$$

e  $\text{sen}\beta$  e  $\text{cos}\beta$  são determinados através da Eq. 3.21, pois se necessita de um elemento diferencial de comprimento ds disposto ao longo do elemento de contato. A orientação da tangente ao elemento de contato é ilustrada na Fig. 3.4.

Tomando-se  $\{x_j\}$  e  $\{y_j\}$  como vetores que contêm as coordenadas globais dos nós do elemento de contato e sendo j a numeração destes nós, as coordenadas de qualquer outro ponto ao longo deste elemento podem ser determinadas por:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} H_j(\zeta) & 0 \\ 0 & H_j(\zeta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \end{Bmatrix}. \quad (4.4)$$

As funções de interpolação unidimensionais utilizadas para o elemento de contato estão descritas no item 3.2.4 e têm seus limites  $-1 \leq \zeta \leq +1$ . Portanto, as coordenadas globais de  $S^A$  são:

$$\begin{aligned} x^A &= \left[ \left( \frac{\zeta_A^2 - \zeta_A}{2} \right) x^P + (1 + \zeta_A^2) x^Q + \left( \frac{\zeta_A^2 + \zeta_A}{2} \right) x^R \right], \\ y^A &= \left[ \left( \frac{\zeta_A^2 - \zeta_A}{2} \right) y^P + (1 + \zeta_A^2) y^Q + \left( \frac{\zeta_A^2 + \zeta_A}{2} \right) y^R \right], \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde  $\zeta_A$  é a coordenada natural de  $S^A$ .

As coordenadas globais em qualquer ponto do elemento de contato EFG são dadas por:

$$\begin{aligned} x &= \left[ \left( \frac{\zeta_B^2 - \zeta_B}{2} \right) x^E + (1 + \zeta_B^2) x^F + \left( \frac{\zeta_B^2 + \zeta_B}{2} \right) x^G \right], \\ y &= \left[ \left( \frac{\zeta_B^2 - \zeta_B}{2} \right) y^E + (1 + \zeta_B^2) y^F + \left( \frac{\zeta_B^2 + \zeta_B}{2} \right) y^G \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Finalmente, a equação da reta que contém o ponto  $S^A$  e na direção  $y_L^A$  é:

$$\begin{cases} x = x^A + \lambda \text{cos}\beta \\ y = y^A + \lambda \text{sen}\beta \end{cases}. \quad (4.7)$$

Substituindo as Eqs. (4.5) e (4.6) na Eq.(4.7), e através da solução do sistema, chega-se ao valor de  $\zeta_B$ , que é a intersecção da reta com o elemento EFG, e  $\lambda$  que é a distância entre  $S^A$  e  $S^B$  (pontos de integração dos elementos de contato).

Através do valor de  $\zeta_B$  se define o elemento de contato oposto, que será aquele que estiver compreendido entre  $-1$  e  $1$ .

Em geral a forma explícita para a relação inversa da Eq (4.8), necessária para a determinação do valor de  $\lambda$  nos nós do elemento, não é facilmente encontrada. Entretanto, o mapeamento inverso pode ser feito numericamente através de um algoritmo de resolução de sistemas não-lineares (IMSL MATH/LIBRARY, 2000).

$$\lambda = \sum_{j=1}^n H_j \lambda_j. \quad (4.8)$$

No capítulo 7 serão vistos os procedimentos para o cálculo dos parâmetros acima mais detalhadamente.

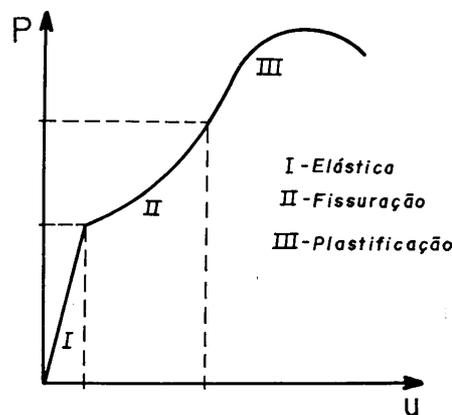
## 5. MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

### 5.1 INTRODUÇÃO

Na análise de estruturas de concreto armado ou protendido deve-se considerar que o comportamento dos materiais é não-linear. Como mostra a Fig. 5.1, o concreto estrutural apresenta três fases típicas quando submetido a uma carregamento: uma fase elástica-linear, com o concreto ainda não-fissurado; uma fase de formação de fissuras e uma fase plástica.

A fissuração do concreto, a plastificação do concreto e do aço, a diferença entre as resistências à tração e compressão do concreto, a não-linearidade da relação tensão-deformação e os fenômenos relacionados ao tempo como, fluência e retração do concreto e relaxação do aço protendido, entre outros fatores, como o engrenamento dos agregados e o efeito de pino das barras de aço, são as causas desta não-linearidade (Machado, 2002).

Através do método dos elementos finitos, pode-se realizar uma análise mais racional destes fenômenos, estudando cada ponto de integração isoladamente, seja para o concreto, seja para o aço.



**Figura 5.1** - Diagrama carga-deslocamento típico de um elemento de concreto estrutural

## 5.2 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO

### 5.2.1 Modelo para o concreto comprimido

Para o concreto comprimido foi empregado um modelo elastoplástico com endurecimento composto por um critério de ruptura, um critério de plastificação e uma regra de endurecimento.

Admite-se, para o concreto não-fissurado, um comportamento isotrópico. Sua superfície de ruptura,  $f$ , pode ser expressa por:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad (5.1)$$

sendo  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  as tensões principais (tensões de tração positivas).

É conveniente substituir as tensões principais pelo primeiro invariante do tensor de tensões,  $I_1$ , e pelos segundo e terceiro invariantes do tensor desviador de tensões,  $J_2$  e  $J_3$ . Desta forma, a expressão (5.1) pode ser escrita como:

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0, \quad (5.2)$$

onde, segundo Chen e Han (1988):

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad (5.3)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_m)^2 + (\sigma_y - \sigma_m)^2 + (\sigma_z - \sigma_m)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2, \quad (5.4)$$

$$J_3 = (\sigma_x - \sigma_m)[(\sigma_y - \sigma_m)(\sigma_z - \sigma_m) - \tau_{xz}^2] + \tau_{xy}[\tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_m) - \tau_{yz}\tau_{xz}] + \tau_{xz}[\tau_{xy}\tau_{yz} - (\sigma_y - \sigma_m)\tau_{xz}], \quad (5.5)$$

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3}, \quad (5.6)$$

e  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$  são as tensões totais. Neste trabalho, tratando-se de um problema de estado plano de tensões, tem-se  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ .

As tensões desviadoras principais,  $s_1, s_2$  e  $s_3$ , são dadas pelas raízes da equação cúbica:

$$s^3 - J_2 s - J_3 = 0, \quad (5.7)$$

onde, substituindo-se, tem-se que:

$$\text{sen}^3 \theta - \frac{J_2}{r^2} \text{sen} \theta - \frac{J_3}{r^3} = 0. \quad (5.8)$$

Fazendo-se uso da seguinte identidade trigonométrica:

$$\operatorname{sen}^3 \theta - \frac{3}{4} \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3\theta = 0. \quad (5.9)$$

e comparando-se as equações (5.8) e (5.9), obtêm-se:

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}} (J_2)^{1/2}, \quad (5.10)$$

e

$$\operatorname{sen} 3\theta = -\frac{4J_3}{r^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}}. \quad (5.11)$$

A primeira raiz da equação (5.11), com  $\theta$  determinado por  $3\theta$  no intervalo de  $\pm\pi/2$ , é uma alternativa para o terceiro invariante do tensor desviador de tensões,  $J_3$ . Notando-se a “natureza cíclica” de  $\operatorname{sen}(3\theta + 2n\pi)$ , têm-se, imediatamente, os três (e apenas três) possíveis valores de  $\operatorname{sen}\theta$ , os quais definem as três tensões principais. As tensões principais podem, então, ser obtidas através da expressão:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2J_2}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \operatorname{sen}(\theta + 2\pi/3) \\ \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen}(\theta + 4\pi/3) \end{Bmatrix} + \frac{I_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (5.12)$$

com  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  e  $-\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6$ .

#### 5.2.1.1 Critério de ruptura

Neste trabalho, utilizou-se o critério de ruptura, proposto por Ottosen (1977), o qual foi adotado pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) e é dado por:

$$\alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0, \quad (5.13)$$

onde  $f_{cm}$  é a resistência média à compressão do concreto e:

$$\lambda = c_1 \cos [1/3 \operatorname{arc} \cos (-c_2 \operatorname{sen} 3\theta)], \text{ para } \operatorname{sen} 3\theta \leq 0, \quad (5.14)$$

$$\lambda = c_1 \cos [\pi/3 - 1/3 \operatorname{arc} \cos (c_2 \operatorname{sen} 3\theta)], \text{ para } \operatorname{sen} 3\theta > 0,$$

com  $\operatorname{sen} 3\theta$  calculado através da equação (5.11).

Os quatro parâmetros do modelo,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c_1$  e  $c_2$ , são determinados conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) a partir da relação,  $k$ , entre a resistência média à compressão uniaxial,  $f_{cm}$ , e a resistência média à tração uniaxial,  $f_{tm}$ , do concreto, dada por:

$$k = \frac{f_{tm}}{f_{cm}}, \quad (5.15)$$

onde:

$$f_{tm} = C (f_{cm})^{2/3} \quad (5.16)$$

e C pode variar entre 0,095 e 0,185, e o resultado,  $f_{tm}$ , sendo dado em kN/cm<sup>2</sup>.

Assim, os parâmetros do critério de Ottosen são calculados por:

$$\alpha = \frac{1}{9k^{1,4}}, \quad (5.17a)$$

$$\beta = \frac{1}{3,7k^{1,1}}, \quad (5.17b)$$

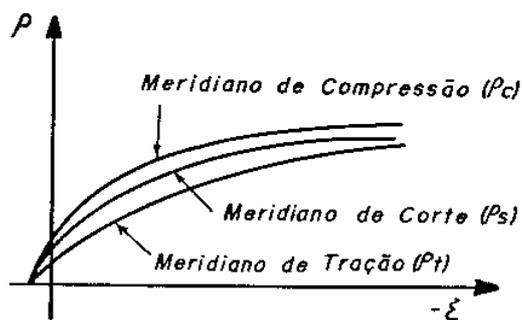
$$c_1 = \frac{1}{0,7k^{0,9}}, \quad (5.17c)$$

$$c_2 = 1 - 6,8(k - 0,07)^2. \quad (5.17d)$$

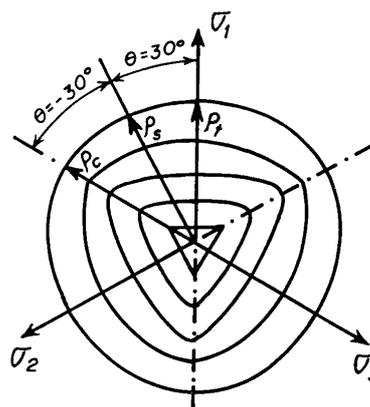
O critério de ruptura de Ottosen, se forem adotados  $\beta = c_2 = 0$ , ou, então,  $\alpha = c_2 = 0$ , reduz-se aos critérios de Von Mises ou Drucker-Prager, respectivamente.

A Fig. 5.2 representa a forma geral da superfície de ruptura do concreto no espaço tridimensional de tensões, podendo ser vista por seus meridianos, Fig.5.2.a, e suas seções transversais, Fig. 5.2.b. Para um material isotrópico e com mesmas resistências à tração e compressão, a superfície de ruptura apresenta tríplex simetria com origem em  $\theta$ , tornando-se necessário o estudo de apenas meio setor com  $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ . Como o concreto possui resistência à tração muito menor do que à compressão, mas considerando que este é um material isotrópico, continua havendo tal simetria, porém a origem passa a não ser mais em 0 e o setor a ser estudado agora é de  $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ . Desta forma, a superfície de ruptura do concreto:

- é dependente dos três invariantes de tensão ( $I_1, J_2, J_3$ );
- tem uma forma suave e convexa, com exceção do seu vértice;
- tem meridianos que são parabólicos e que abrem no sentido negativo do eixo hidrostático;
- possui seções transversais que mudam, de uma forma triangular para circular, com o aumento da pressão hidrostática.



**Figura 5.2.a** - Meridianos da superfície de ruptura



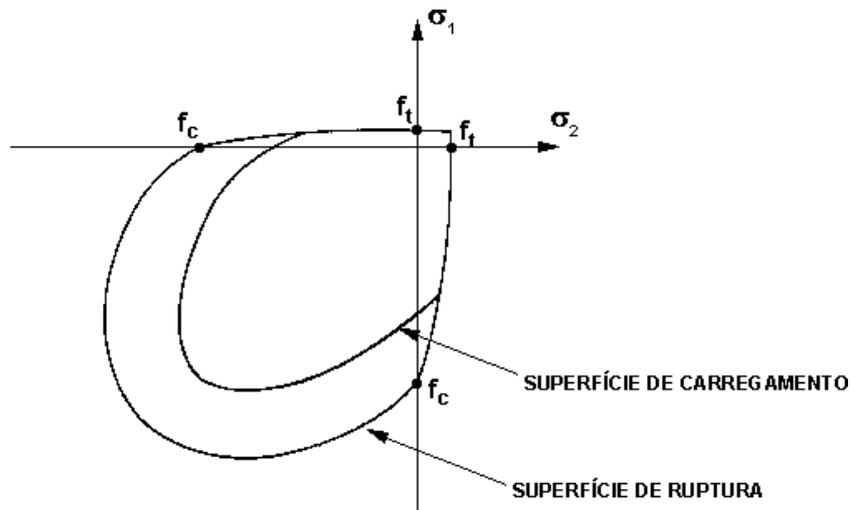
**Figura 5.2.b** - Seções transversais da superfície de ruptura

#### 5.2.1.2 Critério de plastificação

Admite-se, neste trabalho, que o concreto comprimido tenha endurecimento isotrópico, mas, por problemas de convergência, não foi possível adotar, para a superfície de plastificação, a mesma forma da superfície de ruptura de Ottosen. Utilizando-se esta superfície em situação de sollicitação uniaxial, encontram-se valores elevados de deformações viscoplásticas nas direções transversais ao eixo longitudinal do elemento de concreto. Optou-se, então, por adotar a superfície gerada pelo critério de Von Mises, o qual, como foi visto anteriormente, é um caso particular do critério de Ottosen. Esta solução foi empregada por Machado (2002). Desta forma, a expressão geral para a superfície de plastificação ou de carregamento, a partir da superfície gerada pelo critério de Von Mises, é expressa por:

$$F = (3J_2)^{1/2} = \sigma_{ef}. \quad (5.18)$$

Considerando nula a tensão de plastificação inicial, o domínio plástico, onde o material possui um comportamento elastoplástico com endurecimento, ocorre para valores de  $\sigma_{ef}$ , dentro do intervalo  $0 \leq \sigma_{ef} \leq f_{cm}$ , conforme ilustrado na Fig. 5.3.



**Figura 5.3** - Superfícies de ruptura e de carregamento

### 5.2.1.3 Regra de endurecimento

A regra de endurecimento define a maneira pela qual as superfícies de plastificação se movimentam (superfícies de carregamento), durante a deformação plástica. É determinada pela relação tensão-deformação plástica efetiva, onde, aplicando-se tais conceitos, é possível extrapolar os resultados de um simples ensaio uniaxial para uma situação multiaxial.

Neste trabalho, usou-se a curva tensão-deformação, proposta pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), para representar o comportamento do concreto, sob compressão uniaxial, cuja expressão é:

$$\sigma = - \frac{-\frac{E}{f_{cm}} \varepsilon - \left( \frac{\varepsilon}{-0,0022} \right)^2}{1 + \left( \frac{E}{f_{cm}} 0,0022 - 2 \right) \frac{\varepsilon}{-0,0022}} f_{cm} \quad (5.19)$$

Substituindo-se  $\varepsilon = \varepsilon_{\text{elástico}} + \varepsilon_{\text{plástico}} = \sigma/E + \varepsilon_p$  na equação anterior e isolando-se  $\sigma$ , tem-se uma relação,  $\sigma = \sigma(E, f_{cm}, \varepsilon_p)$ , dada pela expressão:

$$\sigma = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (5.20)$$

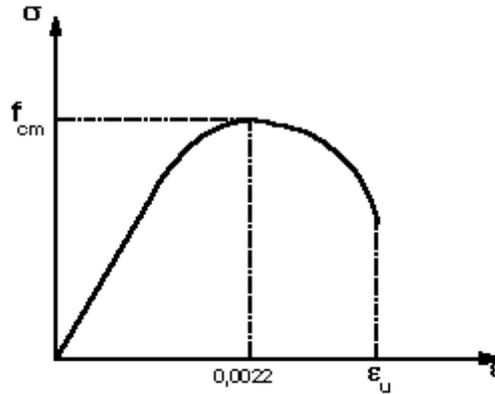
onde:

$$a = (1 - f_{cm}/(E \times 0,0022))^2 / f_{cm}, \quad (5.21)$$

$$b = \varepsilon_p \times (E/f_{cm} - (1-f_{cm}/(E \times 0,0022))/0,0011),$$

$$c = -\varepsilon_p \times (E - (e_p \times f_{cm}))/((0,0022)^2).$$

A Fig. 5.4 representa o diagrama tensão-deformação, para o concreto comprimido.



**Figura 5.4** - Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido

#### 5.2.1.4 Vetor de fluxo plástico

No modelo implementado, considera-se plasticidade associada, ao invés da não-associada, por motivos práticos, já que há poucas evidências experimentais disponíveis para adotarem-se uma ou outra, segundo Owen e Hinton (1980). Desta forma, dentro do domínio plástico, na relação tensão-deformação, o vetor de fluxo plástico é normal à superfície de plastificação. Assim, este vetor,  $\{a\}$ , definido no capítulo 2, pode ser obtido, em termos da função de plastificação, por:

$$\{a\} = \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}}, \quad (5.22)$$

sendo F a condição de plastificação ou as funções de carregamento subsequentes.

Derivando-se a equação (5.11) com relação à  $\theta$ , obtém-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}} = \frac{-\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \left[ \frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial J_3}{\partial \{\sigma\}} - \frac{3J_3}{(J_2)^2} \frac{\partial (J_2)^{1/2}}{\partial \{\sigma\}} \right]. \quad (5.23)$$

Substituindo-se a expressão (5.23) na equação (5.22), pode-se escrever:

$$\{a\} = C_1 \{a_1\} + C_2 \{a_2\} + C_3 \{a_3\}, \quad (5.24)$$

onde:

$$\begin{aligned} \{a_1\} &= \frac{\partial I_1}{\partial \{\sigma\}} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}, \\ \{a_2\} &= \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \{\sigma\}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \{s_x, s_y, s_z, 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx}, 2\tau_{xy}\}, \\ \{a_3\} &= \frac{\partial J_3}{\partial \{\sigma\}} = \left\{ (s_y s_z - \tau_{zy}^2 + \frac{J_2}{3}), (s_x s_z - \tau_{xz}^2 + \frac{J_2}{3}), (s_x s_y - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3}), \right. \\ &\quad \left. 2(\tau_{xz} \tau_{xy} - s_x \tau_{zy}), 2(\tau_{xy} \tau_{yz} - s_y \tau_{xz}), 2(\tau_{yz} \tau_{zx} - s_z \tau_{xy}) \right\}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial I_1},$$

$$C_2 = \left( \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\tan 3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right), \quad (5.26)$$

$$C_3 = \frac{-\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial \theta},$$

nas quais  $s_x, s_y$  e  $s_z$  são as tensões desviadoras e  $\tau_{xy}, \tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$  são as tensões totais de corte.

Para o estado plano de tensão,  $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  são nulos.

Substituindo-se a função F, determinada pela equação (5.18), nas expressões acima, encontram-se as componentes do vetor de fluxo plástico.

## 5.2.2 Modelo para o concreto tracionado

O fato do concreto possuir baixa resistência à tração, resulta na sua fissuração para baixos níveis de tensão, quando comparados com as tensões de falha à compressão. O concreto fissurado segue o modelo de fissuras distribuídas. Neste modelo, necessita-se apenas que se atualize a relação tensão-deformação após a ocorrência da fissura, sem modificar-se a topologia da malha de elementos finitos durante a análise, como ocorre em outros modelos.

### 5.2.2.1 Critério de fissuração

No presente trabalho, o concreto sob tração é modelado como sendo um material elástico com amolecimento (“strain-softening”) e o critério de ruptura de Ottosen foi empregado para se distinguir o comportamento elástico da fratura à tração. Para um ponto

previamente não-fissurado, no interior do elemento, as tensões principais e suas direções são avaliadas conforme o critério estabelecido pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), como:

- se  $\sigma_1 \geq f_{tm}/2$ , o ponto de integração fissurou,
- se  $\sigma_1 < f_{tm}/2$ , o ponto de integração esmagou.

A fissura é formada no plano ortogonal a  $\sigma_1$ . Após isso, considera-se o concreto ortotrópico, sendo desprezado o efeito de Poisson, conforme Hinton (1988), e os eixos materiais locais coincidem com as direções das tensões principais. A direção da fissura é admitida permanecer fixa, sendo este procedimento conhecido como “aproximação da fissura fixa”. Para um ponto já fissurado, pode-se verificar a formação de uma segunda fissura que, por simplicidade, será considerada ortogonal à primeira fissura. Se ocorrerem duas fissuras, o concreto é suposto não colaborar mais na resistência da estrutura, tendo suas tensões anuladas no ponto em questão (Machado, 2002).

A direção da fissura é calculada resolvendo-se um problema de autovetores. Calculam-se os cossenos diretores dos ângulos formados entre o autovalor equivalente à tensão principal máxima,  $\sigma_1$ , e o estado de tensão que originou a fissura (Machado, 2002).

#### 5.2.2.2 Critério para escolha da curva de amolecimento

Os primeiros estudos feitos em análise numérica de concreto estrutural admitiam o concreto como sendo um material frágil sob tração. Quando uma fissura ocorria, a tensão normal à fissura era zerada. Esta idéia foi logo abandonada por levar a dificuldades de convergência dos resultados e não reproduzir corretamente o comportamento real dos elementos estruturais (Machado, 2002).

Foi verificado que, devido às forças de aderência, o concreto entre as fissuras suporta um certo nível de tensões de tração. O concreto adere às barras de armadura e contribui ativamente para a rigidez total da estrutura. Este efeito é conhecido como enrijecimento à tração (“tension stiffening”) e foi incorporado ao modelo modificando-se a curva tensão-deformação do concreto (Machado, 2002).

O modelo de fissuras distribuídas não considera fissuras individuais, então a largura da fissura,  $w$ , deve ser distribuída numa deformação de fissura equivalente,  $\epsilon_c$ , relacionada por um comprimento característico,  $l_c$ . Segundo Hinton (1988), esta relação é feita considerando-se um volume de controle,  $V$ , contendo a fissura com uma área,  $S$ . Supõe-se que, uma vez que a fissura esteja aberta, todas as tensões inelásticas façam parte da fissura e o resto do volume.

Neste trabalho, usa-se a curva exponencial, representada pela Fig. 5.5, sugerida por Hinton (1988), para simular o efeito do amolecimento das deformações. Esta curva é dada por:

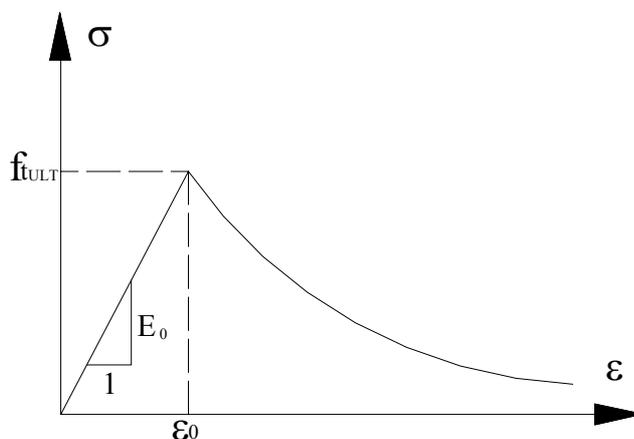
$$\sigma = E \varepsilon_0 (\exp(-(\varepsilon - \varepsilon_0) / \alpha) ), \quad (5.34)$$

onde:

- E é o módulo de elasticidade longitudinal;
- $\varepsilon_0$  é a deformação de fissuração;
- $\alpha$  é o parâmetro de amolecimento;
- $\varepsilon$  é a deformação de tração nominal da zona fissurada.

No contexto do método dos elementos finitos, o volume de controle para o monitoramento da fissura é o volume associado a um ponto de integração, no interior de um elemento e representado por  $dV$  (Machado, 2002). O comprimento característico para cada ponto de integração é dado por:

$$l_c = (dV)^{1/3}. \quad (5.35)$$



**Figura 5.5** - Curva tensão-deformação para o concreto tracionado (Hinton, 1988)

### 5.2.2.3 Rigidez transversal do concreto fissurado

Como uma regra geral, as primeiras fissuras que aparecem no concreto sob tração são perpendiculares à direção da mais alta tensão principal de tração do concreto,  $\sigma_1$ . As direções principais se modificam, por mudanças no carregamento ou por não-linearidades da estrutura, produzindo deslocamentos relativos das faces rugosas da fissura. Isto causa o surgimento de

tensões de corte no plano da fissura. O valor destas tensões de corte depende das condições locais na fissura. O principal mecanismo de transferência de esforços transversais é o engrenamento dos agregados e as principais variáveis envolvidas são o tipo e a granulometria dos mesmos. Além disso, o efeito de pino da armadura que cruza a fissura (dowell effect) tem também importância na transferência de esforços. Neste caso, as principais variáveis envolvidas são o diâmetro das barras, a taxa de armadura e a inclinação das barras em relação ao plano da fissura. Ambos mecanismos são controlados pela abertura da fissura, que, quando aumenta, faz com que se reduza a capacidade de transferência de corte (“shear transfer”) (Machado, 2002).

Os mecanismos acima mencionados não podem ser incluídos diretamente no modelo de fissuras distribuídas. Nos modelos de fissura fixa, tais mecanismos podem ser aproximados, conforme sugere Cervenka (1985), reduzindo-se o valor do módulo de elasticidade transversal do concreto,  $G$ , através de um fator  $\beta$  que varia entre 0 e 1. Desta forma, o novo valor para o módulo de elasticidade transversal,  $G_c$ , é dado por:

$$G_c = \beta G. \quad (5.36)$$

Em diversas análises, um valor constante foi atribuído a  $\beta$ , mas o mais realista seria relacioná-lo com a deformação normal à tração do concreto,  $\varepsilon_t$ . Cervenka (1985) apresentou a seguinte fórmula para  $\beta$ , também utilizada por Hinton (1988), a qual foi adotada neste trabalho:

$$\beta = 1 - (\varepsilon_t / 0,005)^{k_1}, \quad (5.37)$$

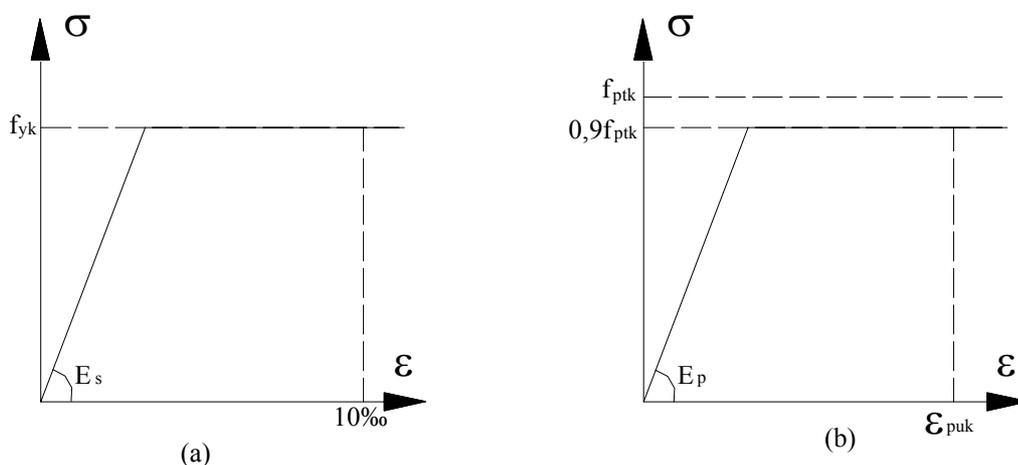
sendo  $k_1$  tomado igual a 0,075, conforme Machado (2002).

### 5.3 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA A ARMADURA

Nas estruturas de concreto estrutural, as barras de aço resistem, fundamentalmente, a esforços axiais. Deste modo, faz-se necessário apenas um modelo uniaxial para descrever o seu comportamento.

No modelo computacional deste trabalho, implementou-se um diagrama tensão-deformação bi-linear do aço, considerando-o como um material elastoplástico perfeito. Seu módulo de elasticidade longitudinal,  $E_s$ , é um parâmetro do problema. Para as barras de armadura passiva, frouxas, o material segue um comportamento elástico-linear até atingir o valor da tensão de escoamento do aço,  $f_y$ . Já para as barras de armadura ativa, protendidas, o material tem um comportamento também elástico-linear até atingir 90% do valor da sua

tensão de ruptura,  $f_{ptk}$ , conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993). A Fig. 5.7 ilustra os dois diagramas tensão-deformação, adotados para ambos os tipos de aço.

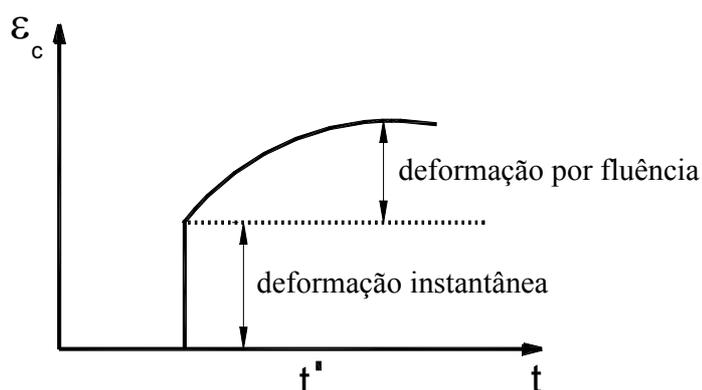


**Figura 5.6** - Diagramas tensão-deformação: (a) armadura passiva (b) protendida

#### 5.4 MODELOS VISCOELÁSTICOS PARA O CONCRETO E O AÇO

O comportamento reológico do concreto, isto é, sua deformabilidade dependente do tempo, tem uma considerável importância na análise estrutural. As deformações diferidas do concreto são convencionalmente separadas em duas: a fluência e a retração. A fluência é o acréscimo contínuo das deformações que ocorre mesmo para uma tensão constante. A retração é a redução de volume do material na ausência de uma carga externa (Araújo, 2003).

O concreto submetido a cargas de longa duração, sofre uma deformação instantânea, seguida por uma deformação devida a fluência, que se desenvolve ao longo do tempo. Desta forma, mesmo sob tensões constantes, as deformações no concreto aumentam no decorrer do tempo, conforme ilustrado na Fig 5.7 (Dantas, 2000).



**Figura 5.7** – Evolução da deformação por fluência para tensão constante aplicada em  $t'$

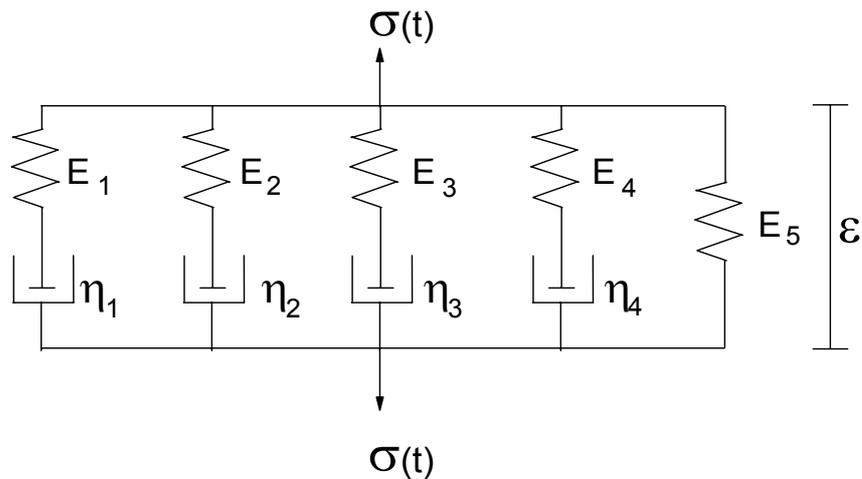
No estudo de estruturas de concreto protendido, a consideração das deformações por fluência e retração é importante, pois apresentam uma série de efeitos indesejáveis, como aumento de flechas de vigas e perdas de protensão. Seus valores são da mesma ordem de grandeza das deformações imediatas, para níveis usuais de tensão (Dantas, 2000).

Em virtude dos efeitos do envelhecimento, a fluência do concreto depende, além da duração do carregamento, da idade da aplicação da carga. O comportamento do material também é influenciado pela troca de água com o meio ambiente. Quanto mais seco for o meio externo e quanto menores forem as dimensões do elemento estrutural maiores serão as deformações por fluência e por retração (Araújo, 2003).

O modelo reológico, adotado para representar o comportamento dependente do tempo do concreto, foi uma cadeia de elementos Maxwell. Esta cadeia é constituída por uma associação em paralelo de elementos formados por uma mola em série com um amortecedor viscoso, conforme ilustra a Fig. 5.8.

Este modelo pode ser obtido a partir do modelo elasto-viscoplástico básico, admitindo-se que os elementos de atrito possuem tensão de plastificação nula.

Segundo o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), para tensões de serviço menores que  $0,4 f_{cm}$  (resistência à compressão média do concreto), as deformações por fluência são proporcionais à tensão. Assim, neste estudo, adotou-se este comportamento linear.



**Figura 5.8** – Modelo de cadeias de Maxwell

Para determinar os valores dos parâmetros desse modelo reológico,  $E_{\mu}(t)$  e  $\eta_{\mu}(t)$ , para cada tempo  $t$ , o programa computacional utiliza o procedimento desenvolvido por Bazant e Wu (1974). A formulação matemática do modelo de Maxwell e a determinação dos parâmetros da função de fluência e retração, pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), estão apresentados no trabalho de Machado (2002).

Para a armadura frouxa, considera-se, nesta etapa, que o aço tem um comportamento elástico. Já a armadura de protensão sofre um processo de perda de tensão por efeito de relaxação. Para representar este comportamento, utilizou-se o mesmo modelo reológico adotado para o efeito de fluência no concreto, mostrado na Fig. 5.8. Adotaram-se, neste trabalho, os procedimentos de calibragem do modelo para considerar a relaxação das armaduras de protensão apresentados em Machado (2002).

## 6. PROTENSÃO

### 6.2 INTRODUÇÃO

Pfeil (1984) propõe a seguinte definição: “*Protensão é um artifício que consiste em introduzir numa estrutura um estado prévio de tensões capaz de melhorar sua resistência ou o seu comportamento, sob diversas condições de carga*”.

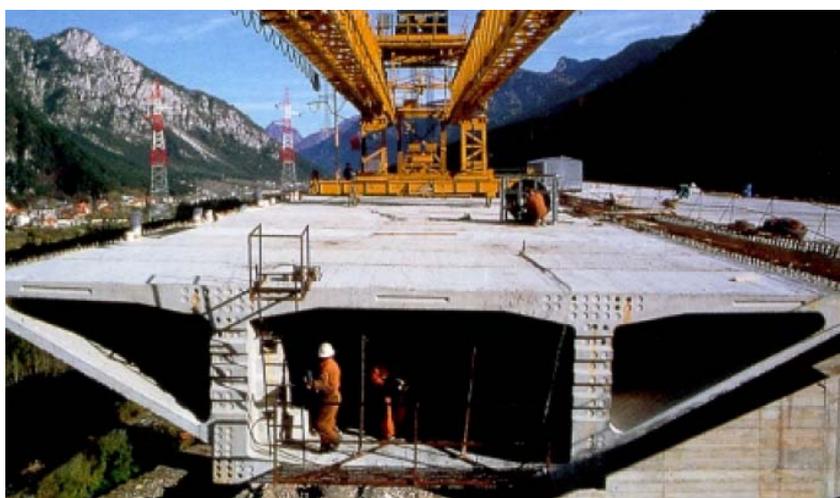
A protensão das armaduras em estruturas de concreto proporciona uma série de vantagens, segundo Veríssimo e César Junior (1989), como por exemplo:

- permite projetar seções mais esbeltas que no concreto convencional, sobretudo se o comportamento em serviço é um fator predominante, uma vez que toda a seção de concreto pode trabalhar à compressão. Assim, normalmente as peças de concreto protendido possuem menor peso próprio, em relação a peças equivalentes de concreto armado, o que viabiliza economicamente o projeto de estruturas para grandes vãos;
- permite controlar a deformação elástica e limitá-la a valores menores que os que seriam obtidos para estruturas similares em aço ou concreto armado;
- proporciona melhores condições de durabilidade, pois anula totalmente, ou quase totalmente, as tensões de tração, principais responsáveis pela fissuração. As armaduras ficam mais protegidas;
- permite que a estrutura se recomponha após a atuação de uma sobrecarga eventual não prevista. Cessada a causa, as fissuras abertas se fecham devido à ação da força de protensão;
- a estrutura normalmente possui maior resistência à fadiga, pois a variação de tensão no aço, proveniente de cargas móveis, é muito pequena se comparada com o valor da sua resistência característica;
- a operação de protensão funciona como uma verdadeira prova de carga, pois as tensões introduzidas nessa fase são muito maiores que as correspondentes à situação da peça em serviço. A estrutura é testada antes de entrar em operação propriamente.

Em contrapartida, podem ser relacionadas algumas desvantagens do concreto protendido:

- o concreto de forma a ter uma maior resistência, exige melhor controle de execução;
- os aços de alta resistência exigem cuidados especiais de proteção contra a corrosão;

- a colocação dos cabos de protensão deve ser feita com maior precisão de modo a garantir as posições admitidas nos cálculos. Como a força de protensão possui em geral um valor muito alto, um pequeno desvio do cabo da posição de projeto pode produzir esforços não previstos, levando ao comportamento inadequado da peça e até mesmo ao colapso;
- as operações de protensão exigem equipamento e pessoal especializado, com controle permanente dos esforços aplicados e dos alongamentos dos cabos (ver Fig. 6.1);
- de um modo geral, as construções protendidas exigem atenção e controle superiores aos necessários para o concreto armado comum.



**Figura 6.1** – Ponte protendida (Veríssimo e César Junior, 1998)

Os aços utilizados no concreto protendido caracterizam-se por elevada resistência e pela ausência de patamar de escoamento. São sensivelmente mais econômicos já que sua resistência pode ser, aproximadamente, até três vezes maior que a dos aços empregados no concreto armado.

Os aços de protensão são encontrados, segundo Machado (2002), nas seguintes formas:

- fios trefilados de aço carbono, com diâmetro de 3 mm a 8 mm, fornecidos em rolos ou bobinas;
- cordoalhas: fios enrolados em forma de hélice, com dois, três ou sete fios;
- barras de aço-liga de alta resistência, laminadas a quente, com diâmetros superiores a 12 mm e comprimento limitado.

A corrosão no aço de protensão é um fator preocupante pelo menos por dois motivos. Em primeiro lugar porque normalmente o diâmetro dos fios é pequeno e em segundo lugar porque o aço sujeito a elevadas tensões fica mais susceptível à corrosão. Um certo grau de corrosão, considerado inofensivo para um aço de concreto armado, pode ser crítico no caso de fios de protensão com pequena seção transversal (Veríssimo e César Junior, 1989).

As estruturas de concreto protendido são também armadas com quantidades moderadas de ferragem usual de concreto armado (armadura convencional), colocada sem tensões prévias, a qual se denomina armadura suplementar ou passiva, segundo Machado (2002) e tem as seguintes funções:

- na fase de execução, impede ou controla fissuras provocadas por retração do concreto, recalque de escoramento, etc;
- arma a estrutura para tensões elásticas de tração em serviço;
- no estágio de carga pós-fissuração da estrutura, controla a abertura das fissuras;
- no estágio de carga de ruptura da estrutura, colabora como uma parcela do esforço de tração (a outra parcela, em geral preponderante, do esforço de tração é dada pelo aço de protensão).

Durante as operações de estiramento e ancoragem dos cabos de protensão, ocorrem perdas de tensão nos cabos, devidas a causas mecânicas, tais como: resistências de atrito ao longo do cabo, deslizamentos nas ancoragens, etc. Essas perdas são denominadas imediatas ou instantâneas e devem ser medidas e controladas durante a execução de protensão, de modo a se saber qual o esforço, efetivamente, aplicado na peça (Machado,2002).

O cabo de protensão é um corpo elástico esticado e, efetivamente, ancorado nos extremos. Ele pode ser imaginado como sendo uma mola esticada e presa nas extremidades. Uma vez efetuada a ancoragem do cabo, parece razoável se supor que o esforço de protensão não sofrerá alterações com o tempo. Acontece, porém, que os cabos de aço, quando mantidos sob tensão elevada, apresentam uma perda de protensão por relaxação (Machado,2002).

## **6.2 SISTEMAS DE PROTENSÃO**

Na primeira metade do século XX, quando o concreto protendido passou a ser utilizado em maior escala, alguns estudiosos desenvolveram processos de protensão. Normalmente esses processos eram patenteados e apenas executados por empresas especializadas. Inicialmente existiam apenas dois processos, ou sistemas, de protensão: o de Eugene Freyssinet (francês) e o de Diwidag (alemão). No decorrer de alguns anos foram desenvolvidos vários processos de protensão. Na Alemanha chegaram a existir mais de 20

sistemas patenteados. Com o passar do tempo os processos técnica e economicamente vantajosos se firmaram no mercado (Veríssimo e César Junior, 1989).

Genericamente, os sistemas de protensão se reduzem a três basicamente, a saber: **protensão com aderência inicial, protensão com aderência posterior e protensão sem aderência**. Os cabos de aço não aderentes têm suas extremidades ancoradas no concreto, porém não se acham incorporados à estrutura, não havendo aderência entre os cabos e o concreto. Já os cabos de aço aderentes (inicial ou posterior) têm as extremidades ancoradas no concreto e o próprio cabo ligado à estrutura, com aderência.

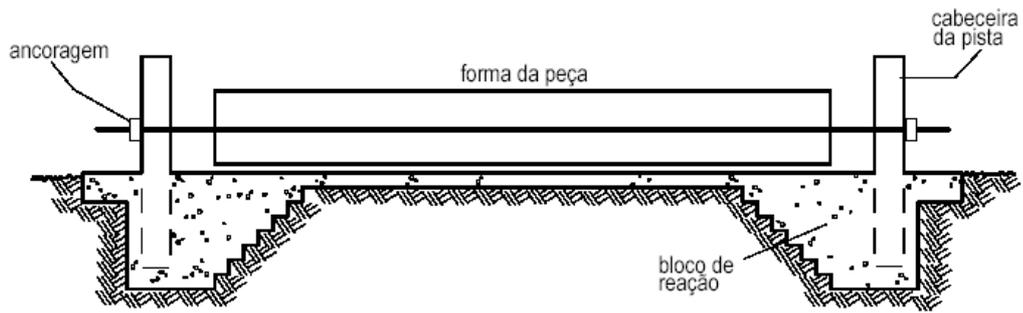
Neste trabalho, com base em Machado (2002), implementaram-se três modelos matemáticos distintos, para cada um dos sistemas de protensão, que serão discutidos a seguir.

### **6.2.1 Sistema de protensão com aderência inicial**

A protensão com aderência inicial é muito empregada na fabricação de pré-moldados de concreto protendido. Nas pistas de protensão, a armadura ativa é posicionada, ancorada em blocos nas cabeceiras e tracionada. Em seguida, a armadura passiva é colocada, o concreto é lançado e adensado, e a peça passa pela fase de cura. Após a cura, as formas são retiradas, os equipamentos que mantinham os cabos tracionados são liberados, e os fios são cortados, transferindo a força de protensão para o concreto pela aderência, que nessa ocasião deve estar suficientemente desenvolvida (ver Fig.6.2). Neste sistema, ocorrem perdas imediatas e, também, perdas, ao longo do tempo, de tensão na armadura protendida. As perdas imediatas de tensão, a qual sofre uma queda, antes da aplicação da protensão, ocorridas no aço protendido, são devidas ao escorregamento dos fios na ancoragem e, também devidas à retração inicial do concreto e à relaxação inicial da armadura (Machado, 2002).

Tanto o concreto, através dos efeitos de fluência e retração, quanto o aço protendido, através da relaxação, sofrem deformações ao longo do tempo. Por este motivo, além das perdas imediatas, a tensão inicial, aplicada na protensão, sofre perdas progressivas, as quais são consideradas, automaticamente, pelo modelo computacional implementado conforme Machado (2002).

Neste sistema de protensão, considerando-se aderência perfeita entre o concreto e o aço, admite-se que ocorre compatibilidade de deformação entre os pontos ao longo da barra e os pontos no concreto, localizados na mesma posição. Assim, os incrementos de tensão, de deformação total, de deformação elástica e de deformação viscoplástica, além do equilíbrio com as forças residuais aplicadas, são calculados conforme mostrado no capítulo 2.



**Figura 6.2** – Esquema de pista de protensão típica (Veríssimo e César Junior,1998)

### 6.2.2 Sistema de protensão com aderência posterior

Neste caso, a protensão é aplicada sobre uma peça de concreto já endurecido e a aderência se dá posteriormente, através da injeção de uma calda de cimento (graute) no interior das bainhas, com o auxílio de bombas injetoras. Geralmente os cabos são pós-tracionados por meio de macacos hidráulicos especiais que se apóiam nas próprias peças de concreto já endurecido. Quando a força de protensão atinge o valor especificado, os cabos são ancorados por meio de dispositivos especiais (Veríssimo e César Junior,1998). Esta força de protensão aplicada é transformada em forças nodais equivalentes para o elemento de concreto correspondente, conforme a Fig. 6.3. A força axial de compressão  $F_p$ , devida à barra protendida é dada por:

$$F_p = \sigma_{p0} A_p, \quad (6.1)$$

onde:

- $\sigma_{p0}$  é a tensão inicial de protensão,  $t=0$ , no primeiro ponto de integração, com  $s = 0$ ;
- $A_p$  é a área da seção transversal da armadura protendida.

Tal força,  $F_p$ , decomposta nas direções cartesianas globais,  $x$  e  $y$ , fica:

$$F_{px} = F_p \cos \alpha, \quad (6.2)$$

$$F_{py} = -F_p \sin \alpha.$$

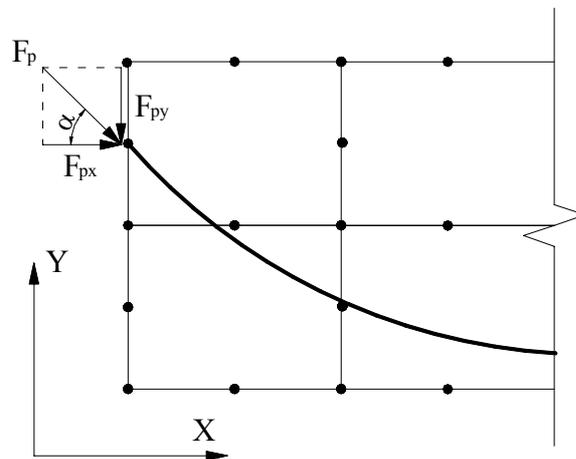
As forças nodais equivalentes,  $F_{pxi}$  e  $F_{pyi}$ , são obtidas por:

$$\begin{Bmatrix} (F_{px})_i \\ (F_{py})_i \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{px} \\ F_{py} \end{Bmatrix}, \quad (6.3)$$

onde  $N_i$  é a função de forma para o nó  $i$  do elemento de concreto.

Neste tipo de protensão, segundo Machado(2002), ocorrem perdas imediatas devidas a diversos fatores:

- deformação imediata do concreto pelo estiramento do primeiro cabo e dos cabos restantes;
- atrito ao longo da armadura protendida;
- escorregamento dos fios na ancoragem;
- acomodação da ancoragem;
- retração e fluência iniciais do concreto;
- relaxação do aço protendido.



**Figura 6.3** – Representação das forças nodais equivalentes, devidas à carga de protensão

A perda de tensão, por atrito no aço protendido, é calculada, segundo Vasconcelos (1980), por:

$$\sigma_{p0} = \sigma_{pi} \exp[-\mu(\Delta\alpha + 0,0001s)], \quad (6.4)$$

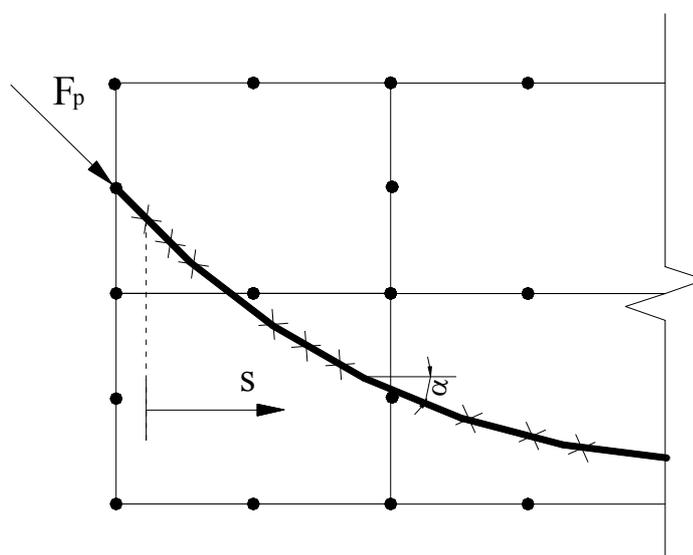
onde:

- $\sigma_{p0}$  é a tensão inicial de protensão,  $t = 0$ , num ponto qualquer ao longo do cabo;
- $\sigma_{pi}$  é a tensão de protensão, aplicada na extremidade do cabo,  $s = 0$ ;
- $\Delta\alpha$  é a deflexão geométrica total, ou ângulo de desvio;
- $s$  é a distância entre um ponto qualquer ao longo do cabo e a sua extremidade;
- $\mu$  é o coeficiente de atrito, dado por:

$$\mu = \begin{cases} 0,50 & \rightarrow \text{contato direto entre o concreto e a armadura} \\ 0,30 & \rightarrow \text{contato direto entre armadura de barras ou fios com mossas} \\ & \text{ou saliências e bainha metálica} \\ 0,25 & \rightarrow \text{contato entre armadura de fios paralelos ou cordoalhas e bainha metálica} \end{cases}$$

A variação de tensão ao longo do cabo é verificada nos pontos de integração do aço. O ponto de integração do cabo situado mais próximo do ponto de aplicação da carga de protensão tem o comprimento  $s = 0$ . O parâmetro  $\Delta\alpha$  da barra mede a variação da inclinação dos pontos de integração ao longo da barra em relação à inclinação do ponto de comprimento  $s = 0$ . Para barras retas,  $\Delta\alpha = 0$ .

A definição dos parâmetros,  $\Delta\alpha$  e  $s$  está ilustrada na Fig. 6.4.



**Figura 6.4** - Definição dos parâmetros  $s$  e  $\Delta\alpha$

O termo ancoragem é aplicado aos dispositivos e, ou, artificios utilizados para fixar os cabos de protensão tensionados, de forma a manter a carga aplicada pelo macaco hidráulico, impedindo que o cabo volte ao estado original, ou seja, frouxo, sem tensões (Veríssimo e César Junior, 1998). Segundo Vasconcelos (1980), não é possível executar uma ancoragem perfeita. Todas, mesmo aquelas baseadas na ação de parafusos, possuem folgas. Com a carga elevada que o cabo aplica à ancoragem, esta se deforma e, durante o processo, há um pequeno retrocesso do cabo. Esse retrocesso depende de cada tipo de ancoragem e seu valor é fixado no catálogo de cada fabricante. Além disso, pode haver algum deslizamento do cabo, na própria ancoragem, antes de se efetivar seu agarramento por atrito ou por engrenamento no

corpo de ancoragem. Esses deslizamentos são fixados por meio de medidas experimentais. Supõe-se que, neste trabalho, as perdas desta natureza já tenham sido consideradas nas forças de protensão aplicadas.

Da mesma forma que no sistema de protensão com aderência inicial, ocorrem, também, perdas progressivas, pelos mesmos motivos apresentados anteriormente e que são consideradas automaticamente pelo modelo computacional desenvolvido.

Os incrementos de tensão, de deformação total, de deformação elástica e de deformação viscoplástica, além do equilíbrio com as forças residuais aplicadas, são, também, calculados, conforme mostrado no capítulo 2, acrescentando-se a carga externa de protensão, além da tensão inicial na armadura protendida.

### **6.2.3 Sistema de protensão sem aderência**

Na protensão não aderente, a armadura permanece livre para se movimentar ao longo de seu perfil em todas as seções com exceção das de ancoragem e nos desviadores. O comportamento dos elementos com protensão não aderente submetidos à flexão é complexo, pois a hipótese da compatibilidade de deformações entre o aço e concreto não é aplicável e tensão na armadura depende da deformação do membro como um todo e não de uma seção apenas.

Para incluir a armadura de protensão não aderente no modelo, utilizou-se o artifício de dispô-la em elementos fictícios, paralelos aos elementos reais da estrutura, tendo em comum apenas os nós de extremidade da peça estrutural e os nós localizados nos desviadores. Não existe, portanto, compatibilidade de deformações entre a armadura não aderente e o concreto. Aos elementos fictícios atribui-se um módulo de elasticidade longitudinal baixo, evitando a singularidade da matriz de rigidez total da estrutura.

A inexistência de aderência refere-se somente à armadura ativa, já que a armadura passiva sempre deve estar aderente ao concreto, estando localizada nos elementos reais.

Figueiras e Póvoas (1994) e Moon e Burns (1997) definiram que a principal característica dos elementos com protensão não aderente submetidos à flexão é que a variação de comprimento na armadura não aderente é equivalente à variação total de comprimento do concreto, ao longo do perfil de protensão. Existe, portanto, compatibilidade de deslocamentos em relação ao conjunto. Esta compatibilidade de deslocamentos e não de deformações, em cada seção transversal faz com que, segundo Mattock et al. (1971), ocorra uma distribuição

praticamente uniforme de tensões ao longo do comprimento da armadura não aderente, função da deformação média do concreto ao longo do perfil de protensão.

A obtenção da força de protensão para o caso de não haver aderência entre a armadura protendida e o concreto, é feita por:

$$F_p = A_p \left[ \sum_{j=1}^{np} (\sigma_{p0})_j \right] / np, \quad (6.5)$$

onde  $np$  é o número total de pontos de integração, ao longo de todo o cabo protendido.

## 7. MODELO COMPUTACIONAL

### 7.1 INTRODUÇÃO

A linguagem de programação utilizada para a implementação do programa MVISCO foi a FORTRAN 90. O FORTRAN é uma das linguagens mais populares e difundidas no meio técnico e científico. Surgiu na metade da década de 50 com a proposta de auxiliar os programadores na codificação de problemas cuja solução requer a utilização de computadores eletrônicos.

A entrada de dados do programa MVISCO é feita através de um arquivo formatado conforme apresentado no Anexo A. O armazenamento dos resultados obtidos para representação gráfica é feito para cada incremento de carregamento aplicado. Após ser alcançada a convergência, os valores de deslocamentos nodais e de tensões totais no concreto e nas armaduras para cada ponto de integração são armazenados em matrizes e gravados em um arquivo que será lido em um programa de visualização gráfica, desenvolvido por Machado (2002) na linguagem MATLAB. Através deste programa, pode-se obter, de uma forma interativa, uma melhor compreensão dos resultados obtidos. Os resultados também ficam disponíveis em um arquivo de saída gerado pelo programa em FORTRAN.

O modelo computacional desenvolvido nesta dissertação é baseado no programa implementado também por Machado (2002) e propõe-se a analisar peças de concreto estrutural com comportamento elasto-viscoplástico. Para tanto, pode-se utilizar dois procedimentos distintos para simular tal comportamento. O primeiro determina a resposta da estrutura ao longo do tempo. Calcula-se o estado de deformação da estrutura, após ter decorrido um certo período de tempo da aplicação do carregamento. Há um processo incremental do tempo real (em dias), onde se consideram os efeitos do tempo sobre a estrutura: fluência e retração no concreto e relaxação na armadura. O segundo processo busca obter a resposta da estrutura submetida a carregamento instantâneo. Nesta fase (etapa 2) considera-se um comportamento elastoplástico para a estrutura.

Na etapa 1, correspondente ao comportamento viscoelástico, adotou-se para o concreto um modelo de cinco camadas, conforme apresentado no capítulo 2, onde são levados em conta os efeitos de fluência e retração. Nesta etapa, distribui-se a tensão total para cada ponto de integração, para cada uma das cinco camadas conforme o valor do seu módulo de elasticidade longitudinal.

No início da etapa 2, calcula-se, em cada ponto de integração, uma tensão total equivalente, a qual é a soma das tensões das cinco camadas, obtidas na etapa 1, através da subrotina STRESS1.

Em ambas as etapas, os pontos de integração são verificados quanto ao critério de fissuração. As tensões nos pontos fissurados passam a sofrer uma redução, conforme mostrado no capítulo 5.

As Figs. 7.1 e 7.2 ilustram o fluxograma correspondente ao modelo computacional, mostrando as modificações sofridas para considerar a estrutura segmentada. Cada implementação será vista em detalhes neste capítulo.

## 7.2 IMPLEMENTAÇÃO

Para possibilitar a mudança da estrutura de monolítica para segmentada, foi preciso utilizar os elementos de contato descritos no capítulo 4, cada um com nós distintos do seu elemento de contato oposto. Suas conectividades são fornecidas na entrada de dados, conforme Anexo A e são armazenadas na matriz JOINT, que possui um número de colunas igual ao número de elementos de contato da estrutura. A matriz JOINT é lida na subrotina INPUT. A subrotina JOINT, que efetua a determinação do elemento de contato oposto ao que está sendo analisado, foi implementada através da formulação apresentada no capítulo 4. Determina, ainda, o valor de  $\lambda$  (através da subrotina LAMB), que é a distância entre os pontos de integração de cada elemento de contato e seu elemento de contato oposto. O elemento de contato oposto é aquele em que a coordenada  $\zeta_B$  está compreendida entre  $-1$  e  $1$ . Os valores de  $\lambda$  são armazenados na matriz ALAMB, onde cada linha corresponde a um elemento de contato e cada coluna a um ponto de integração do elemento de contato. O elemento oposto é armazenado na linha 7 da matriz JOINT.

As coordenadas dos nós do elemento de contato são atualizadas a cada iteração, podendo mudar o valor de  $\lambda$  e  $\zeta_B$ , e, conseqüentemente, o elemento de contato oposto.

A subrotina STIFVP calcula a matriz de rigidez para cada elemento de concreto com a contribuição do aço. Após, a subrotina ASSEMBLY monta a matriz de rigidez global ESTIFG, possuindo uma dimensão NTOTV x NTOTV, sendo NTOTV o número total de graus de liberdade da estrutura.

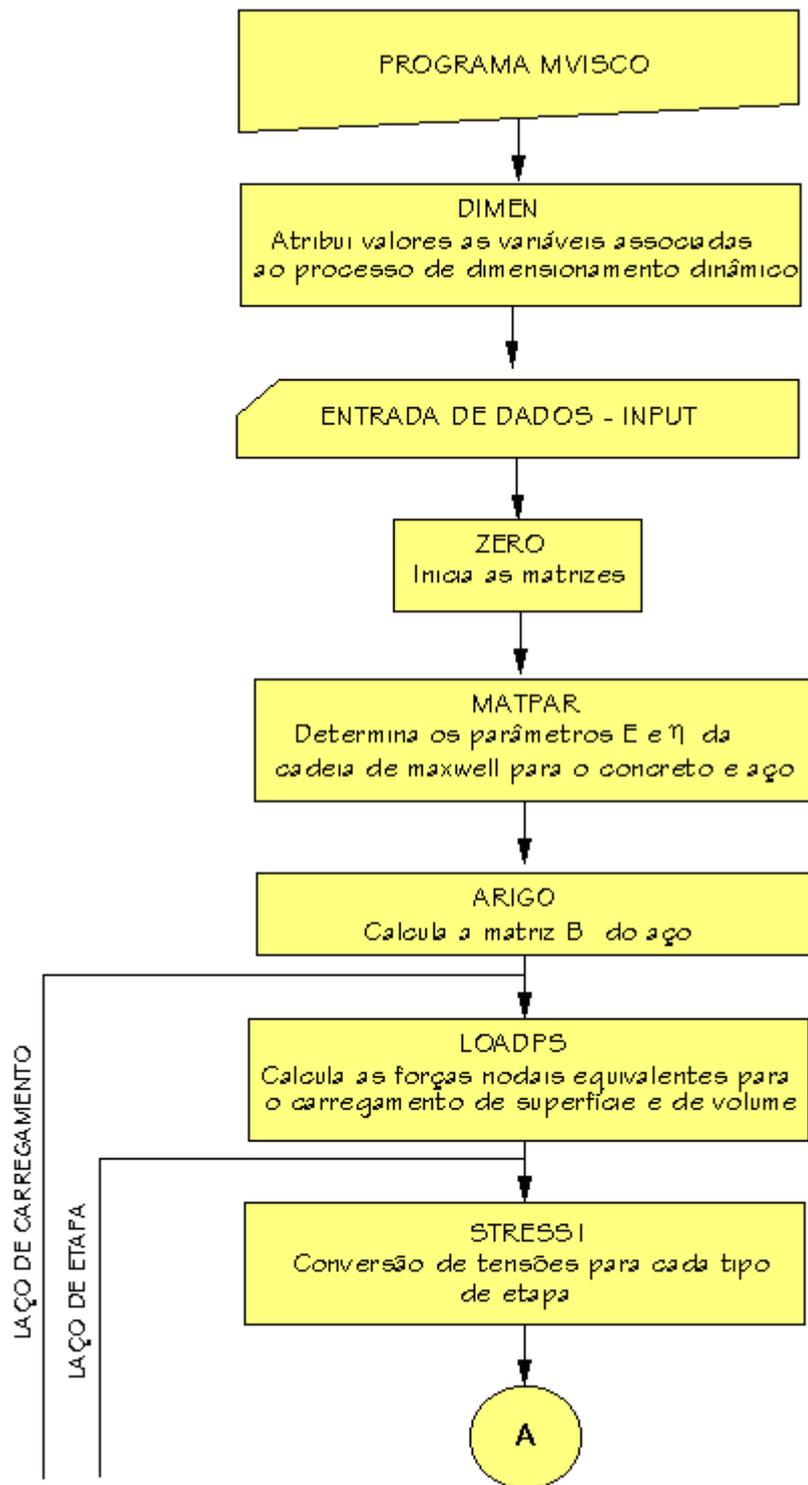
A próxima etapa foi a criação da subrotina BAR que calcula o valor de  $\lambda$  nos pontos de definição da geometria dos elementos de contato, conforme mostrado no capítulo 4, e verifica se os corpos estão juntos ( $\lambda \geq 0$ ), acrescentando então elementos rígidos à matriz de

rigidez global da estrutura entre os nós dos elementos de contato em análise e o seu elemento oposto. À medida que os corpos se distanciam ( $\lambda < 0$ ), esses elementos rígidos são retirados e os nós dos elementos de contatos possuirão deslocamentos diferentes dos nós do elemento de contato oposto.

A subrotina BOUNDARY introduz as condições de contorno na matriz de rigidez da estrutura. A solução do sistema de equações, determinando os incrementos nodais de deslocamento em cada iteração, é obtida através da subrotina DLSLDS. Esta subrotina está disponível na biblioteca do FORTRAN e foi utilizada em substituição à subrotina FRONT, que aparecia no programa original.

Para incluir a armadura de protensão não aderente no modelo, utilizou-se o artifício de dispô-la em elementos fictícios, paralelos aos elementos reais da estrutura, tendo em comum apenas os nós de extremidade da peça estrutural e nos desviadores. Para isso deve-se fornecer na entrada de dados, conforme o Anexo A, o tipo de elemento de concreto e o tipo de armadura. O tipo de elemento indicará se é um elemento com armadura não aderente. Tipo 1 é o elemento real da estrutura e o tipo 0 é o elemento fictício que contém a armadura não aderente. Essa informação é armazenada no vetor NTELE. O tipo de barra indicará que ela tem aderência (tipo 1) ou não (tipo 0) e é armazenado no vetor NTBAR.

Nas Figs. 7.1 e Figs. 7.2 apresenta-se o fluxograma do programa MVISCO, para melhor compreensão das subrotinas alteradas.



**Figura 7.1** – Fluxograma

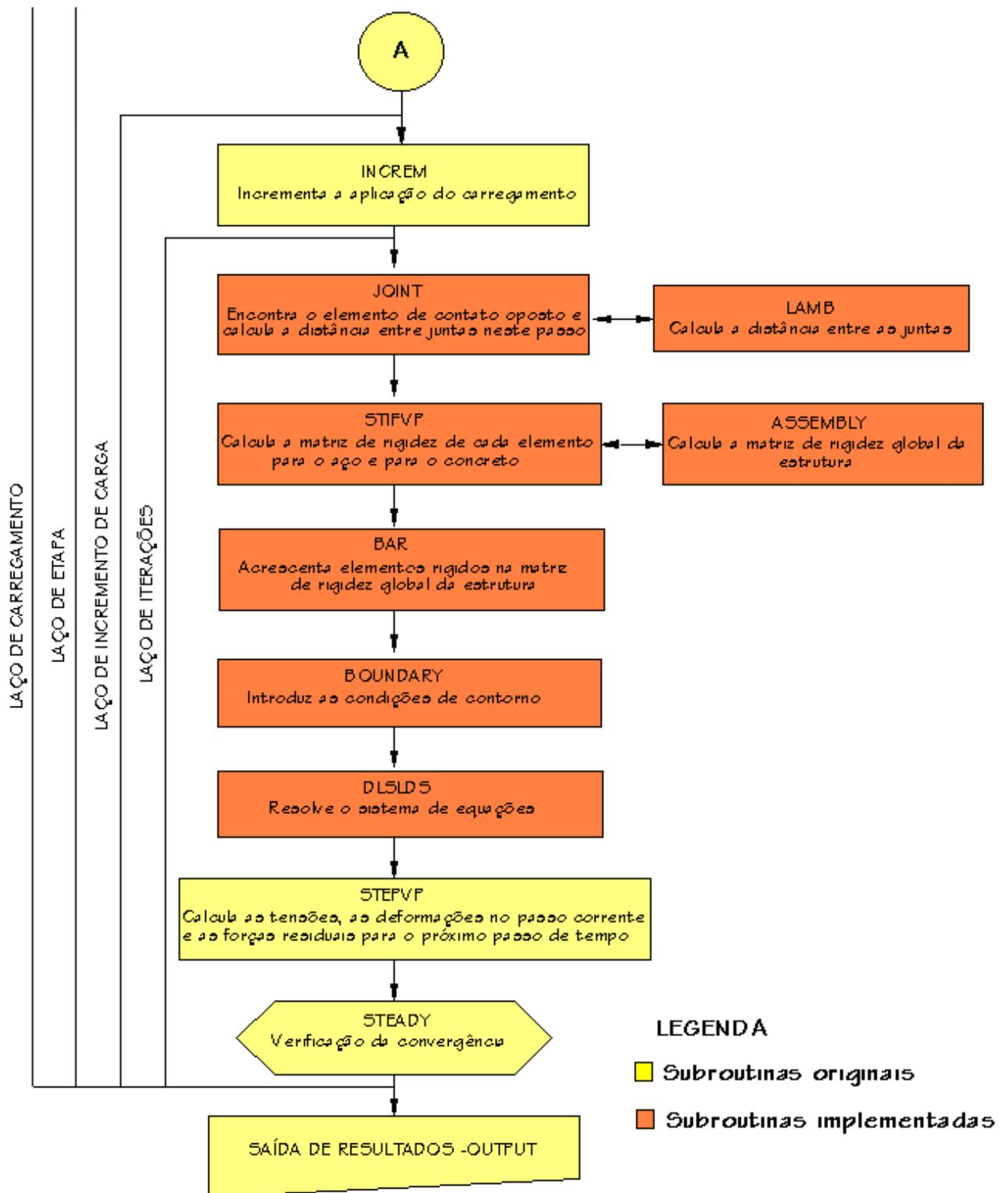


Figura 7.2 - Fluxograma

## 8. ANÁLISE DE VIGAS MONOLÍTICAS DE CONCRETO COM PROTENSÃO NÃO-ADERENTE

### 8.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, comparam-se os resultados obtidos através do modelo computacional com valores determinados por ensaios experimentais, realizados por Gongchen e Xuekang (1988), para vigas bi-apoiadas de concreto com protensão posterior não-aderente.

São analisadas três vigas, referenciadas por A-3, A-6 e A-9, com duas cargas concentradas equidistantes aplicadas até atingir-se a ruptura. Na Fig. 8.1 é mostrado o detalhamento das vigas.

Para cada viga, os valores das resistências médias à compressão do concreto ( $f_{cm}$ ), dos diâmetros das armaduras protendidas ( $\phi_p$ ), das tensões iniciais de protensão ( $\sigma_{p0}$ ), dos diâmetros das armaduras longitudinais passivas tracionadas ( $\phi_s$ ), das tensões de escoamento das armaduras passivas ( $f_y$ ) e das tensões de ruptura das armaduras protendidas ( $f_{ptk}$ ) encontram-se na Tab. 8.1. O módulo de elasticidade das armaduras protendidas é  $E_p=19500\text{kN/cm}^2$  e das armaduras passivas,  $E_s=21000\text{kN/cm}^2$ . O diâmetro  $\phi_s'$  dos estribos é 6,3 mm.

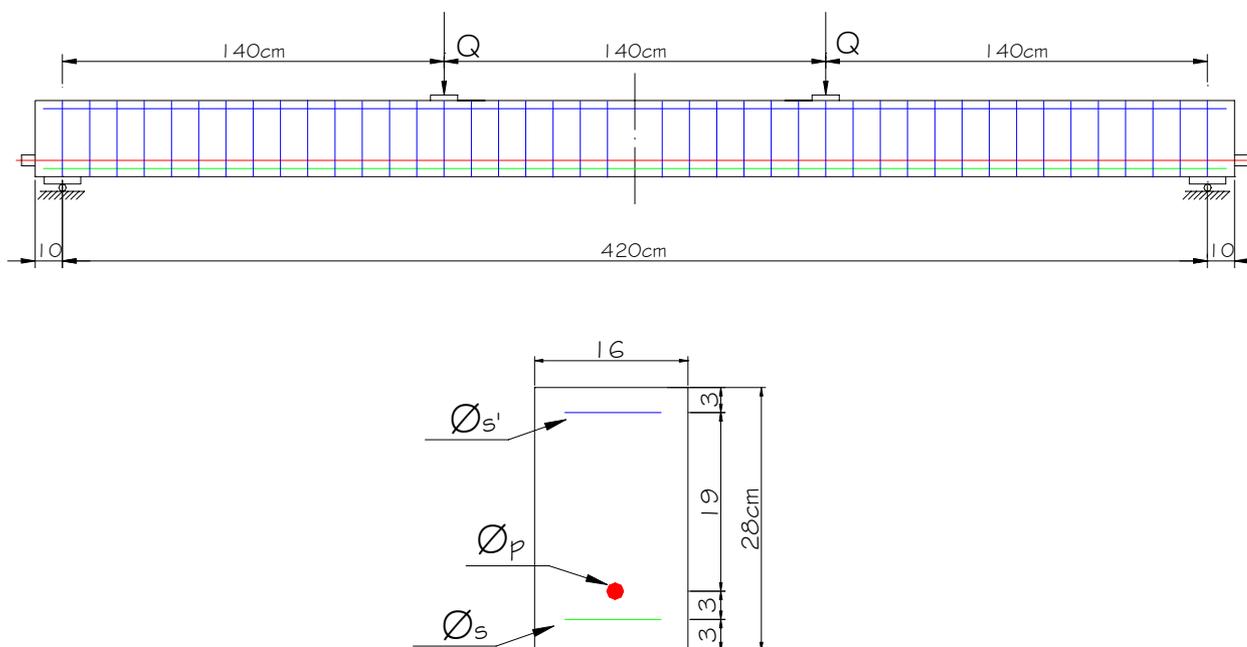
**Tabela 8.1** - Valores para cada viga

<i>Viga</i>	<i>F<sub>cm</sub> (kN/cm<sup>2</sup>)</i>	<i>φ<sub>p</sub> (cm)</i>	<i>σ<sub>p0</sub> (kN/cm<sup>2</sup>)</i>	<i>φ<sub>s</sub> (cm)</i>	<i>f<sub>y</sub> (kN/cm<sup>2</sup>)</i>	<i>f<sub>ptk</sub>(kN/cm<sup>2</sup>)</i>
<b>A-3</b>	3,06	1,41	82,0	1,73	43,0	179
<b>A-6</b>	3,06	1,41	85,4	2,43	40,0	179
<b>A-9</b>	3,31	1,41	92,0	3,20	39,5	179

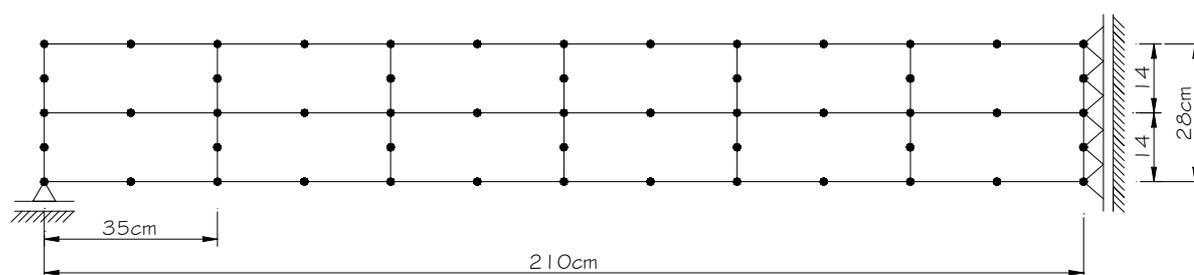
Na análise através do método dos elementos finitos, foi empregada uma malha de 12 elementos quadrangulares quadráticos de oito nós para estado plano de tensão, discretizando-se apenas metade da viga, dadas as condições de simetria de geometria, propriedades e carregamento, conforme Fig. 8.2.

Adotou-se uma umidade relativa do ar de 80% e uma temperatura média de 20° C, já que tais dados não foram fornecidos pelos autores dos ensaios. A espessura fictícia vale 10,180 cm. Todos os ensaios foram considerados como sidos realizados aos 28 dias de idade da estrutura, quando também foi aplicada a protensão na armadura ativa.

O coeficiente de atrito adotado entre a armadura protendida e o concreto, nas vigas do conjunto A, vale 0,5, já que ambos os materiais estavam em contato direto. Tal valor não foi fornecido pelos autores dos ensaios.



**Figura 8.1** - Detalhamento das vigas A



**Figura 8.2** - Discretização adotada para a análise por elementos finitos das vigas A

## 8.2 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO COMPUTACIONAL

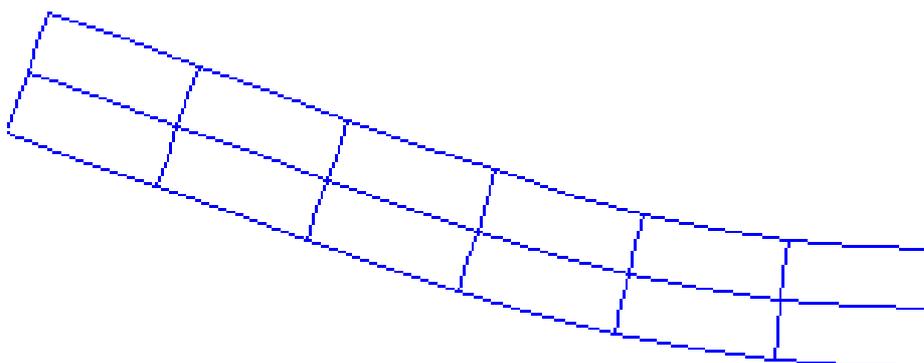
### 8.2.1 Evolução da deformada com o carregamento

Neste item, são apresentados, graficamente, os resultados obtidos pelo modelo computacional. Nas Figs. 8.3 até 8.8 são mostradas as deformadas das vigas A3, A6 e A9, respectivamente, no início e fim da aplicação do carregamento. Nestas figuras, utilizou-se um fator de amplificação igual a vinte. Pode ser observado nas Figs. 8.3, 8.5 e 8.7 que as vigas sofreram um deslocamento positivo, o que era esperado, devido à força de protensão.



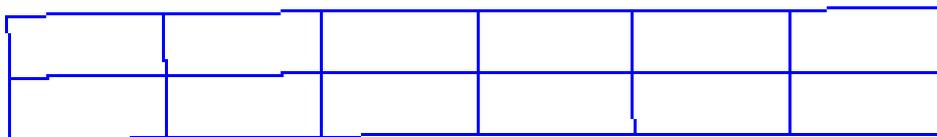
*Deslocamento máximo= + 0,214cm*

**Figura 8.3** – Deformada da viga A3 no início da aplicação do carregamento



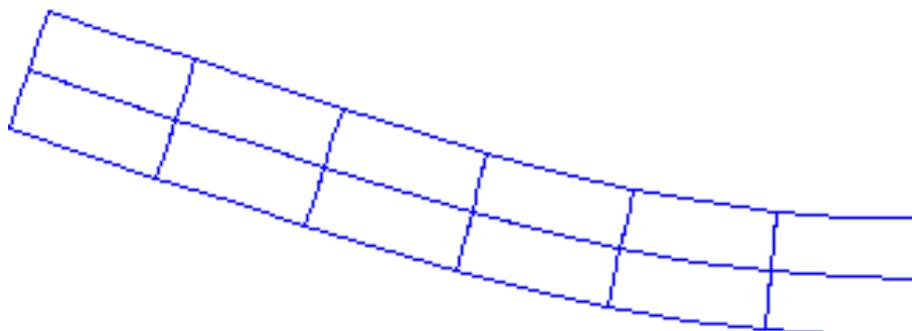
*Deslocamento máximo= - 2,40cm*

**Figura 8.4** – Deformada da viga A3 no fim da aplicação do carregamento



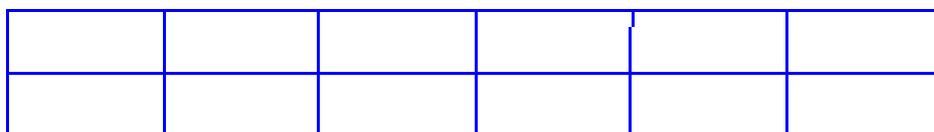
*Deslocamento máximo= + 0,199cm*

**Figura 8.5** – Deformada da viga A6 no início da aplicação do carregamento



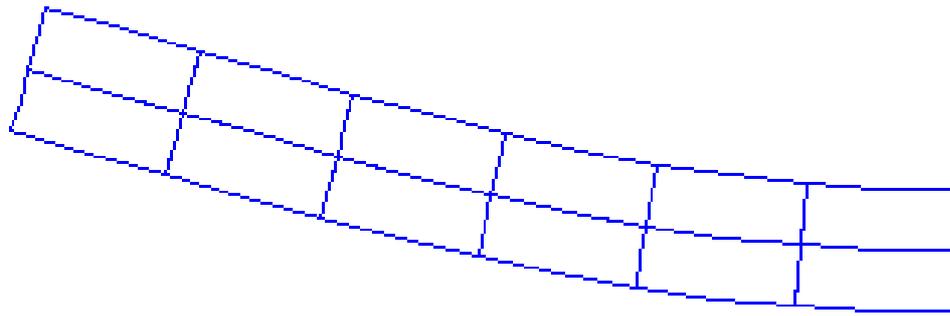
*Deslocamento máximo= - 2,80cm*

**Figura 8.6** – Deformada da viga A6 no fim da aplicação do carregamento



*Deslocamento máximo= + 0,182cm*

**Figura 8.7** – Deformada da viga A9 no início da aplicação do carregamento

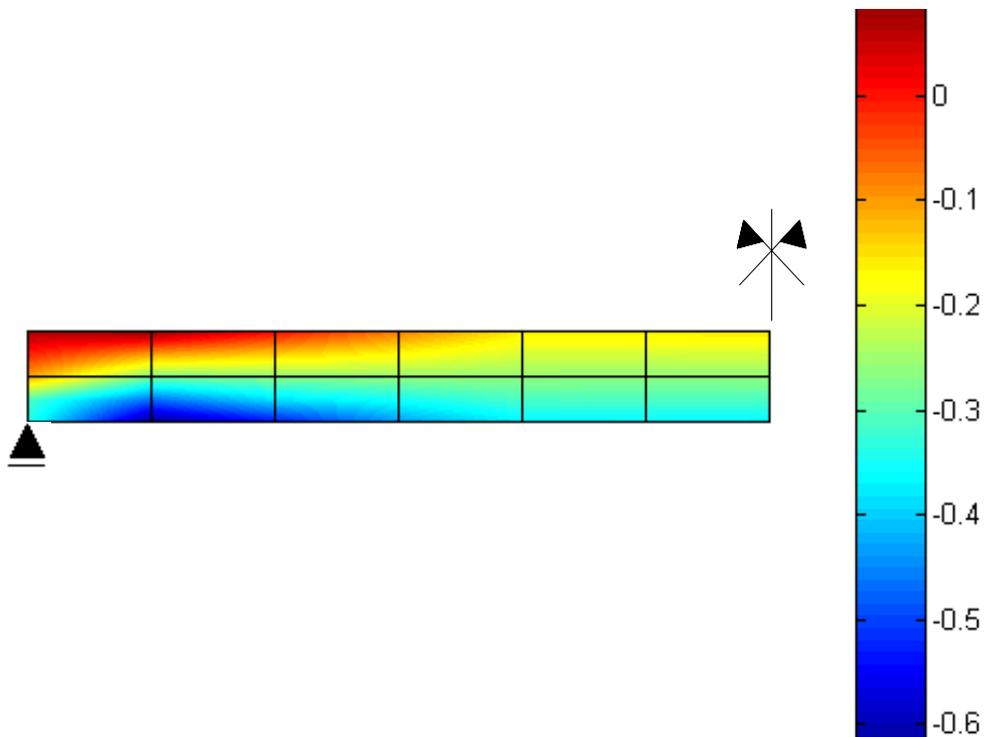


*Deslocamento máximo= - 2,52cm*

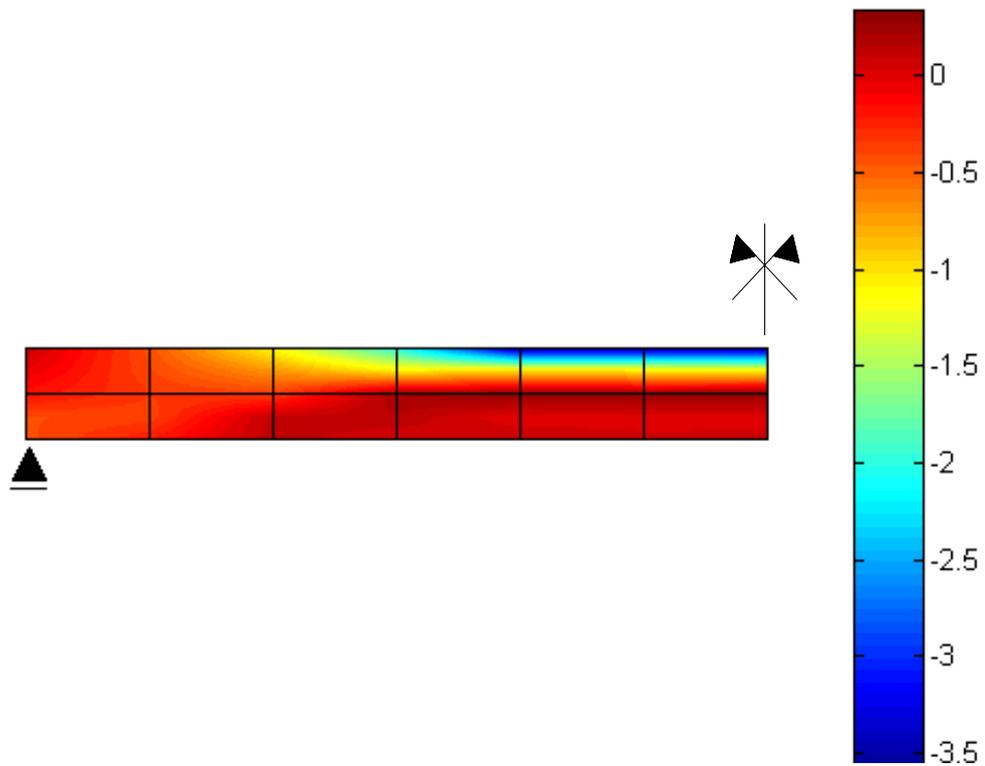
**Figura 8.8** – Deformada da viga A9 no fim da aplicação do carregamento.

### 8.2.2 Evolução do estado de tensão ( $\sigma_x$ ) dos elementos de concreto ao longo do carregamento

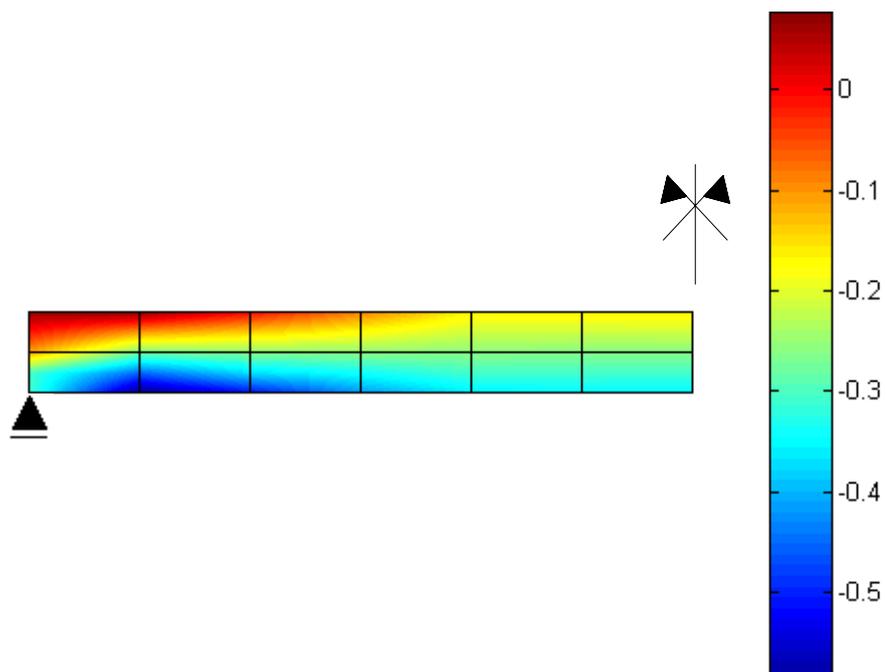
Nas Figs. 8.9 até 8.14, mostram-se os estados de tensões no concreto, em  $\text{kN/cm}^2$ , das vigas A3, A6 e A9, respectivamente, no início e fim da aplicação do carregamento.



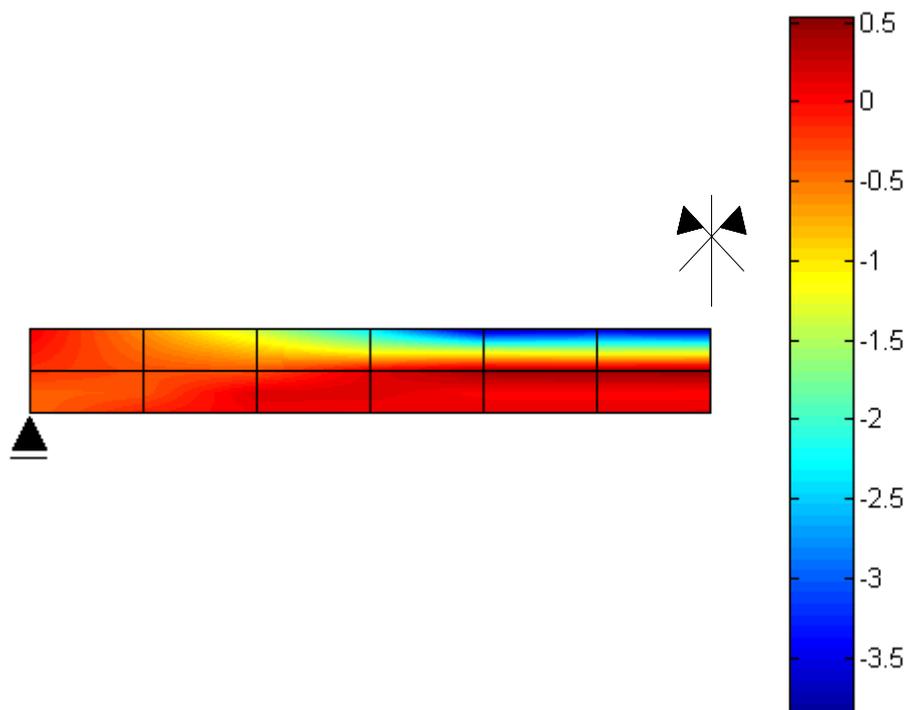
**Figura 8.9** – Tensões no concreto da viga A3 no início da aplicação do carregamento em  $\text{kN/cm}^2$



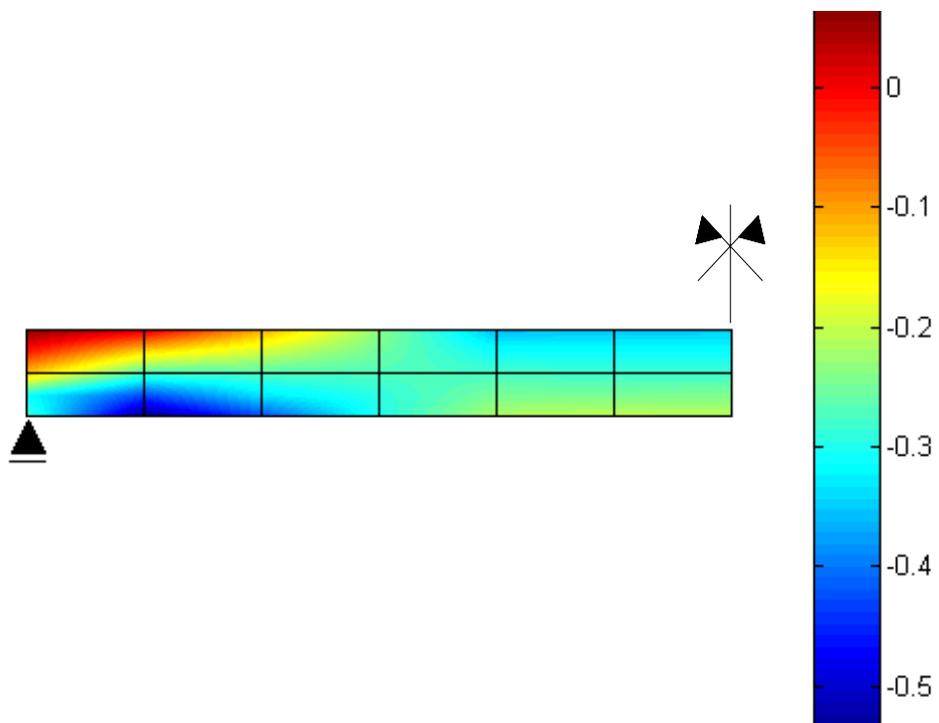
**Figura 8.10** – Tensões no concreto da viga A3 no fim da aplicação do carregamento em  $\text{kN/cm}^2$



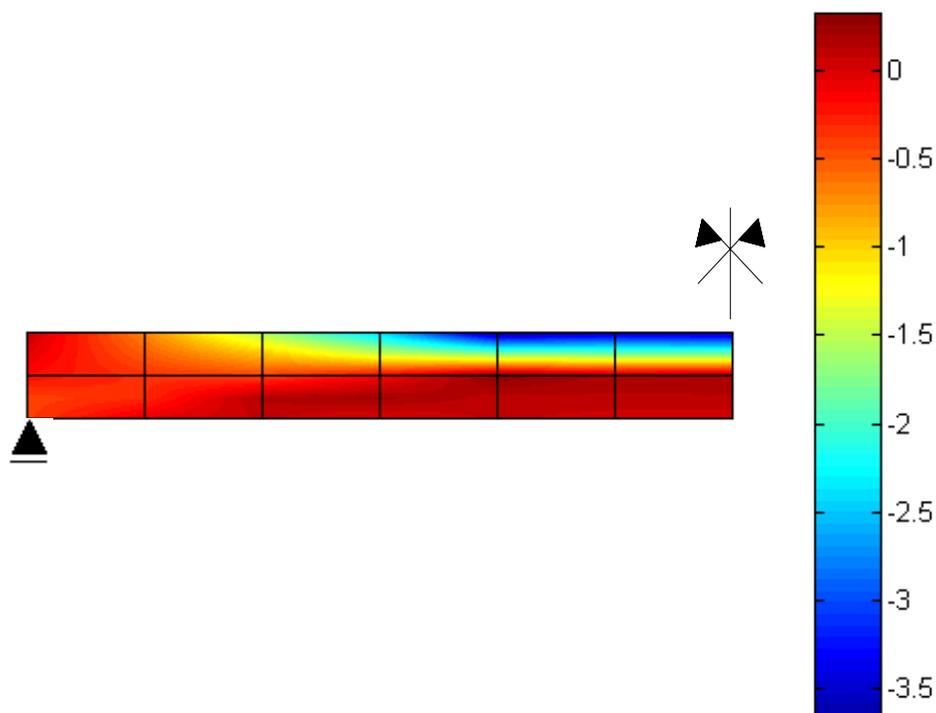
**Figura 8.11** – Tensões no concreto da viga A6 no início da aplicação do carregamento em  $\text{kN/cm}^2$



**Figura 8.12** – Tensões no concreto da viga A6 no fim da aplicação do carregamento em  $\text{kN/cm}^2$



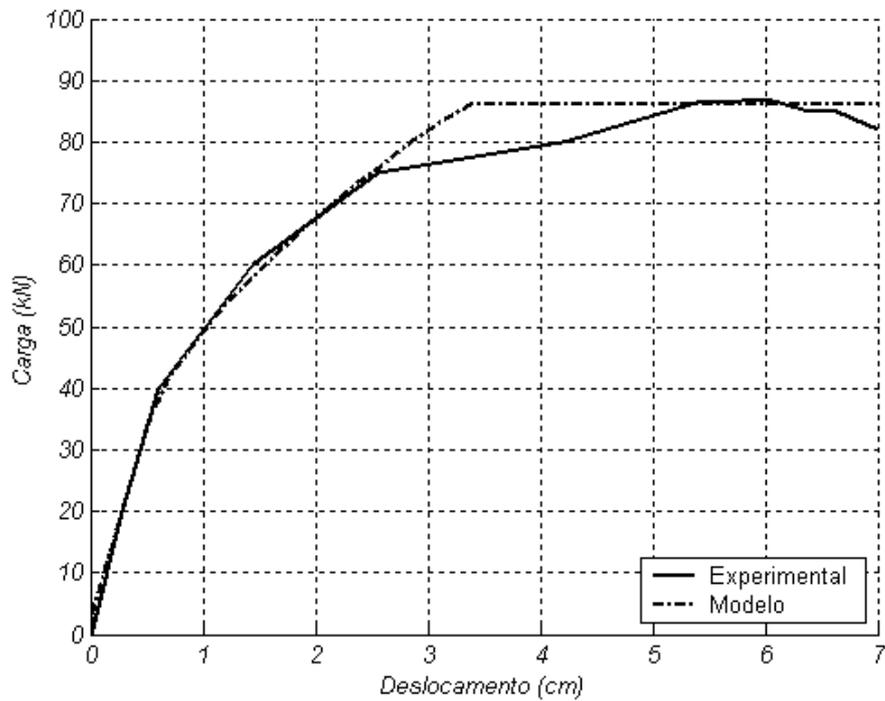
**Figura 8.13** – Tensões no concreto da viga A9 no início da aplicação do carregamento em  $\text{kN/cm}^2$



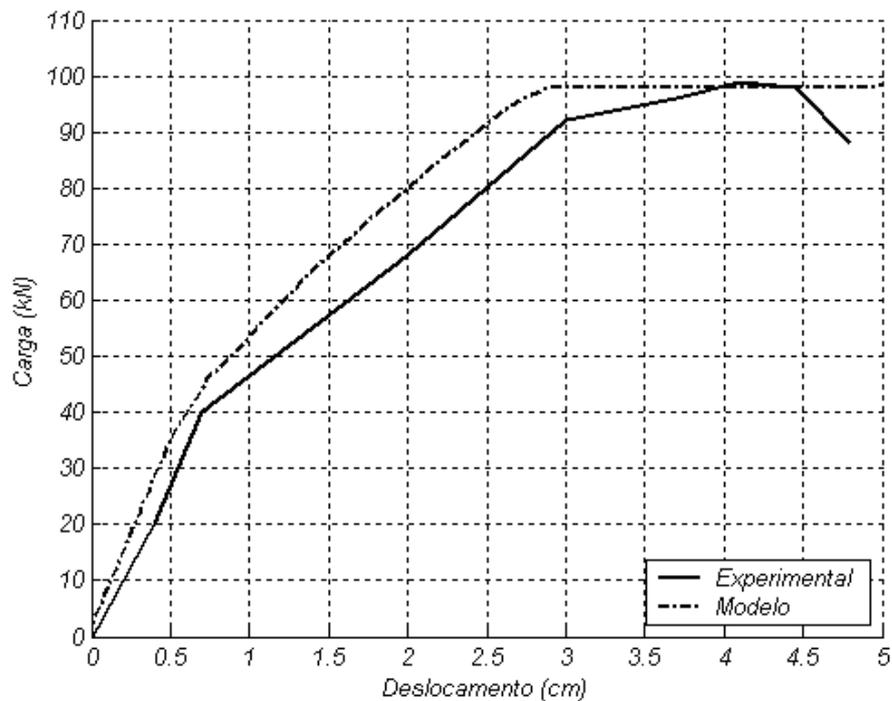
**Figura 8.14** – Tensões no concreto da viga A9 no fim da aplicação do carregamento em  $\text{kN/cm}^2$

### 8.2.3 Deslocamentos e aumento de tensões na armadura protendida ao longo do carregamento.

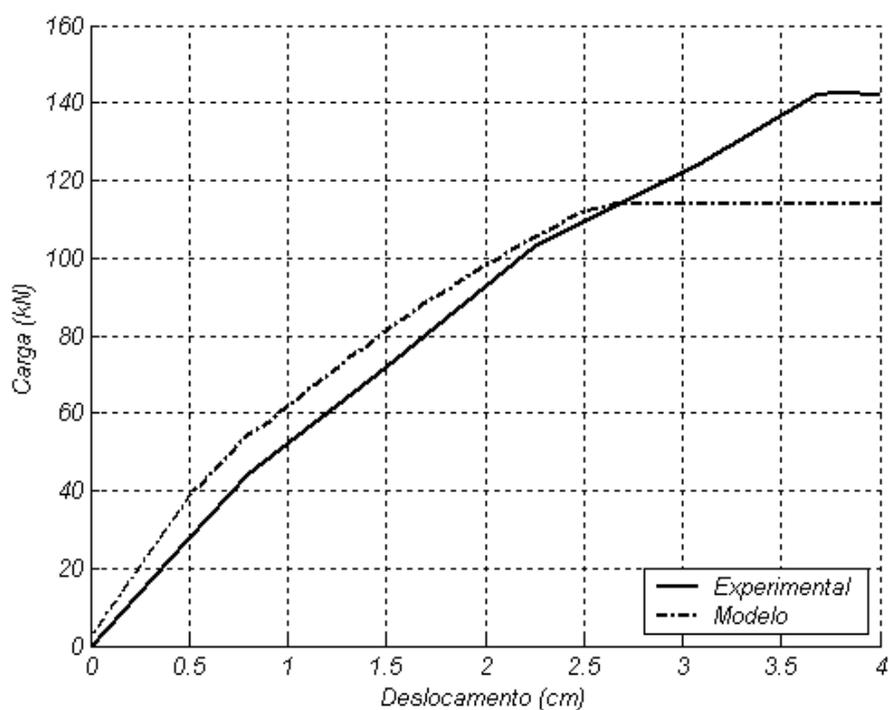
Nas Figs. 8.15 até 8.20, mostram-se comparações entre valores experimentais, obtidos de Gongchen e Xuekang (1988), e através do modelo computacional para as vigas A3, A6 e A9. Nas Figs. 8.15 até 8.17 comparam-se valores de flechas nas vigas e nas Figs. 8.18 a 8.20 comparam-se os valores da variação das tensões na armadura de protensão.



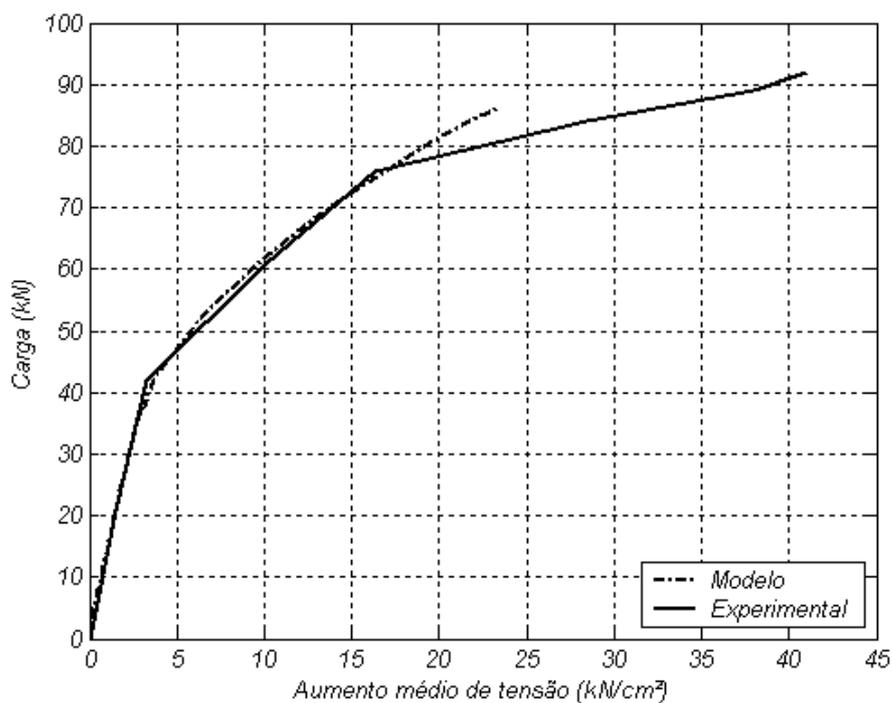
**Figura 8.15** – Comparação entre os deslocamentos obtidos no modelo computacional e experimentalmente – Viga A3



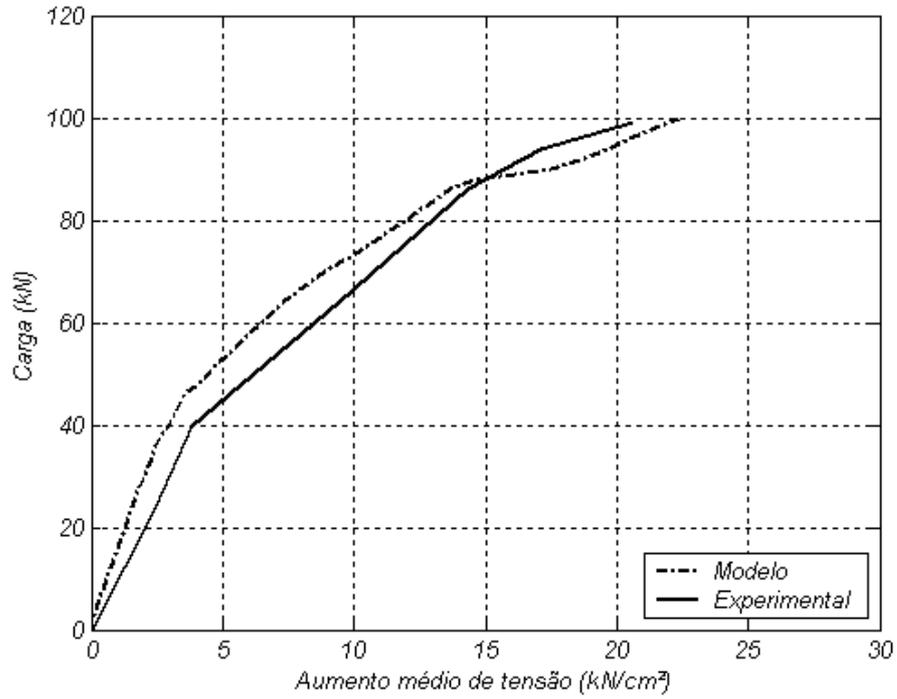
**Figura 8.16** – Comparação entre os deslocamentos obtidos no modelo computacional e experimentalmente – Viga A6



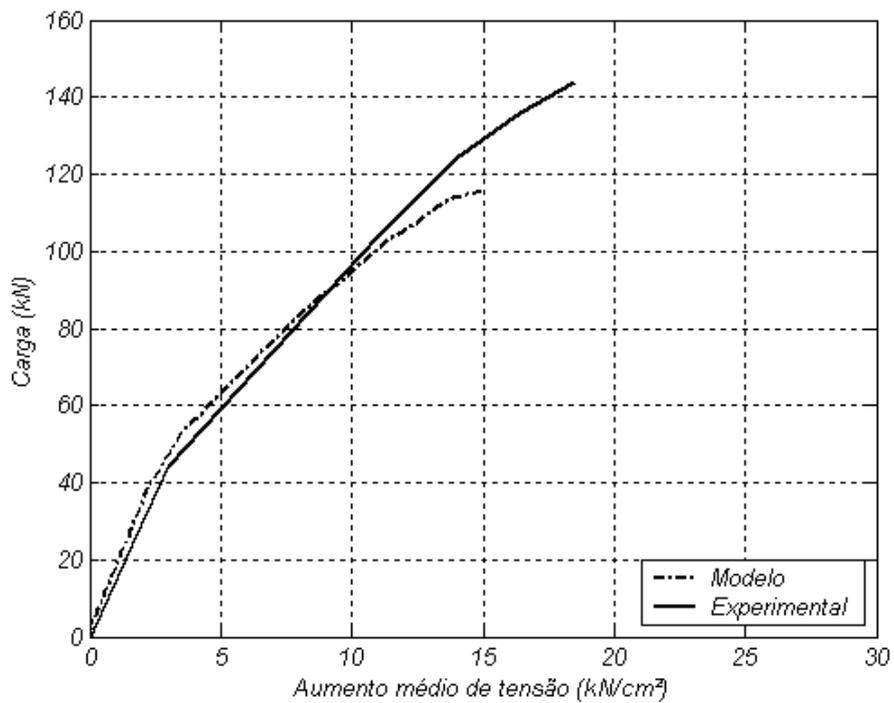
**Figura 8.17** – Comparação entre os deslocamentos obtidos no modelo computacional e experimentalmente – Viga A9



**Figura 8.18** – Comparação entre o aumento médio de tensão na armadura de protensão obtido no modelo computacional e experimentalmente – Viga A3



**Figura 8.19** – Comparação entre o aumento médio de tensão na armadura de protensão obtido no modelo computacional e experimentalmente – Viga A6



**Figura 8.20** – Comparação entre o aumento médio de tensão na armadura de protensão obtido no modelo computacional e experimentalmente – Viga A9

## 9. ANÁLISE DE VIGA SEGMENTADA DE CONCRETO COM PROTENSÃO NÃO-ADERENTE

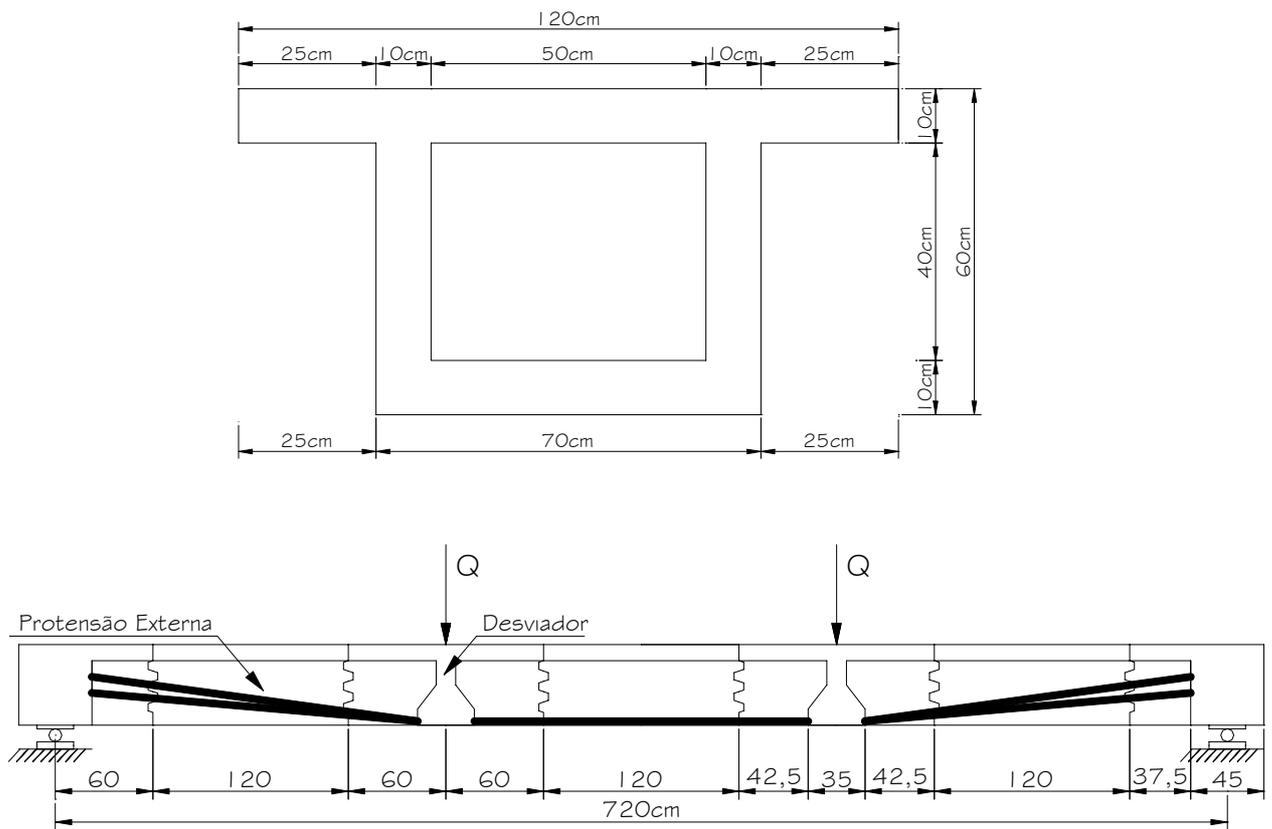
### 9.1 INTRODUÇÃO

Neste item, comparam-se os resultados obtidos através do modelo computacional com valores determinados em ensaio experimental realizado por Aparicio, Gonzalo e Casas para uma viga biapoiada de 7,2 m de vão efetivo e de seção caixão, conforme a Fig. 9.1. A viga é com protensão posterior não-aderente.

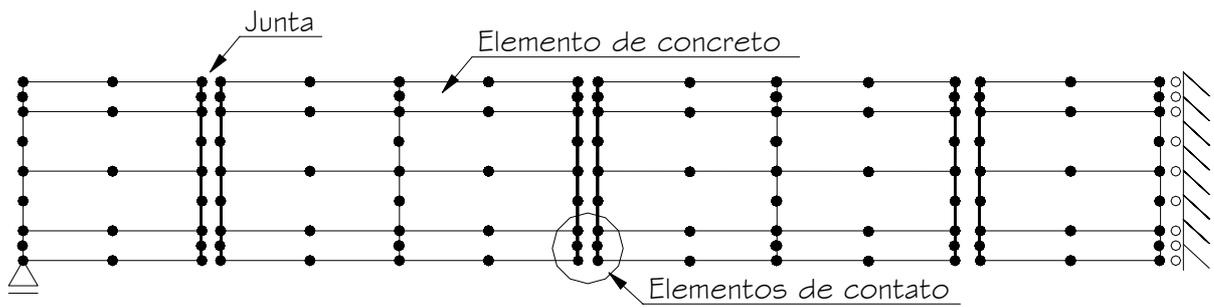
Aparicio, Gonzalo e Casas (2002) ensaiaram uma viga com sete aduelas de concreto com junta seca, cujo detalhamento pode ser visto na Fig. 9.1. A armadura de protensão, de aço CP-190 RB, é constituída de quatro cordoalhas, com diâmetro 15,2 mm, cuja posição é mostrada na Fig. 9.1. A tensão inicial de protensão no aço é  $\sigma_{p0} = 876$  MPa. O módulo de elasticidade do aço é 195.000 MPa, e seu limite de resistência à tração,  $f_{ptk}$ , é de 1.900 MPa. A resistência média à compressão do concreto é de 45 MPa. Para o parâmetro C, na Eq. 5.16, que calcula a resistência à tração do concreto, foi adotado o valor 0,185. Este foi o valor que resultou em melhor aproximação com os resultados experimentais.

Todos os ensaios foram considerados como sidos realizados aos 28 dias de idade da estrutura, quando também foi aplicada a protensão na armadura ativa.

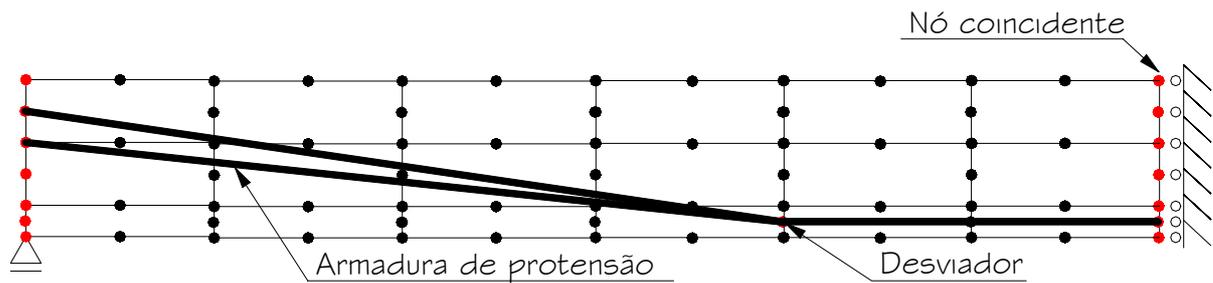
Na análise através do método dos elementos finitos, foi empregada uma malha de vinte e quatro elementos quadrangulares quadráticos de oito nós para estado plano de tensão. Discretizou-se apenas metade da viga, dadas às condições de simetria de geometria, propriedades e carregamento, conforme Fig. 9.2. Para incluir a armadura de protensão não aderente no modelo, utilizou-se o artifício de dispô-la em elementos fictícios, paralelos aos elementos reais da estrutura, tendo em comum apenas os nós indicados na Fig. 9.3. O nó interno à viga corresponde ao desviador existente na viga estudada.



**Figura 9.1** – Características geométricas e de carregamento da viga



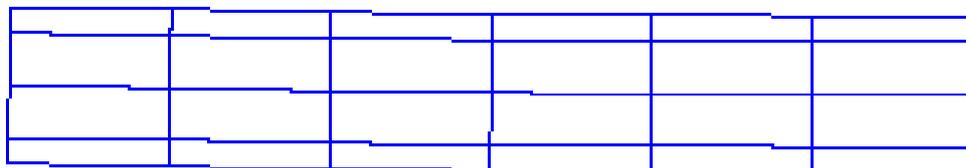
**Figura 9.2** – Discretização dos elementos de concreto



**Figura 9.3** – Disposição da armadura de protensão

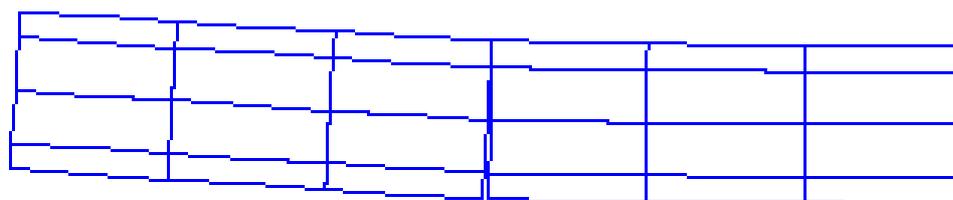
## 9.2 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO COMPUTACIONAL

Neste item, são apresentados graficamente os resultados obtidos pelo modelo computacional. Nas Figs. 9.4 até 9.10 são mostradas as deformadas das vigas para diferentes níveis de carregamento. Nestas figuras, utilizou-se um fator de amplificação igual a vinte.



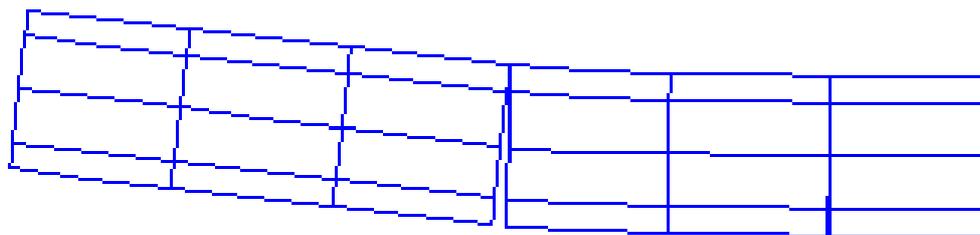
*Deslocamento máximo= - 0,155cm*

**Figura 9.4** – Deformada da viga segundo modelo computacional com Q=56kN



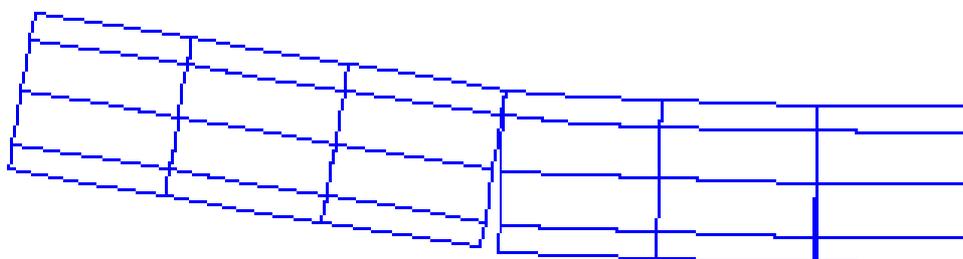
*Deslocamento máximo= - 0,912cm*

**Figura 9.5** – Deformada da viga segundo modelo computacional com Q=70kN



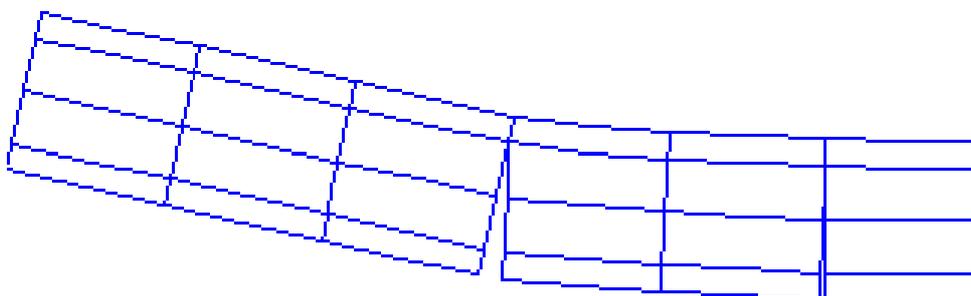
*Deslocamento máximo= - 1,369cm*

**Figura 9.6** – Deformada da viga segundo modelo computacional com Q=84kN



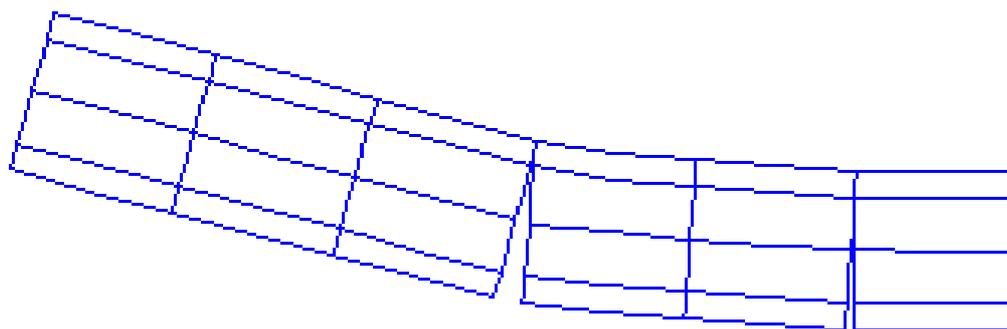
*Deslocamento máximo= - 1,934 cm*

**Figura 9.7** – Deformada da viga segundo modelo computacional com Q=98kN



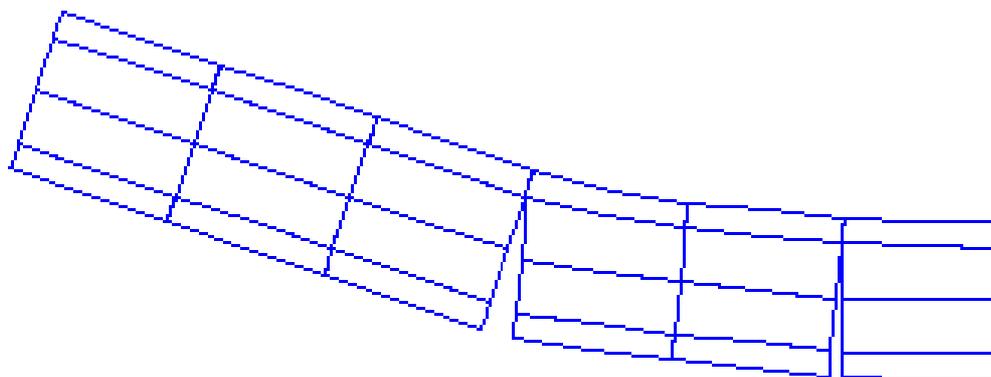
*Deslocamento máximo= - 2,892 cm*

**Figura 9.8** – Deformada da viga segundo modelo computacional com Q=112kN



*Deslocamento máximo= - 3,608cm*

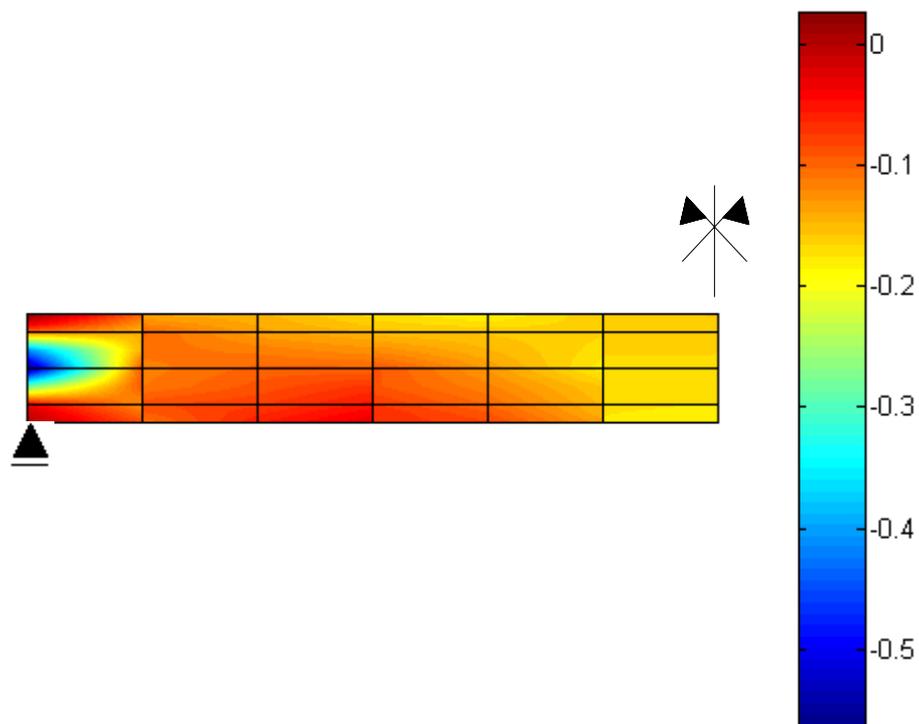
**Figura 9.9** – Deformada da viga segundo modelo computacional com  $Q=126\text{kN}$



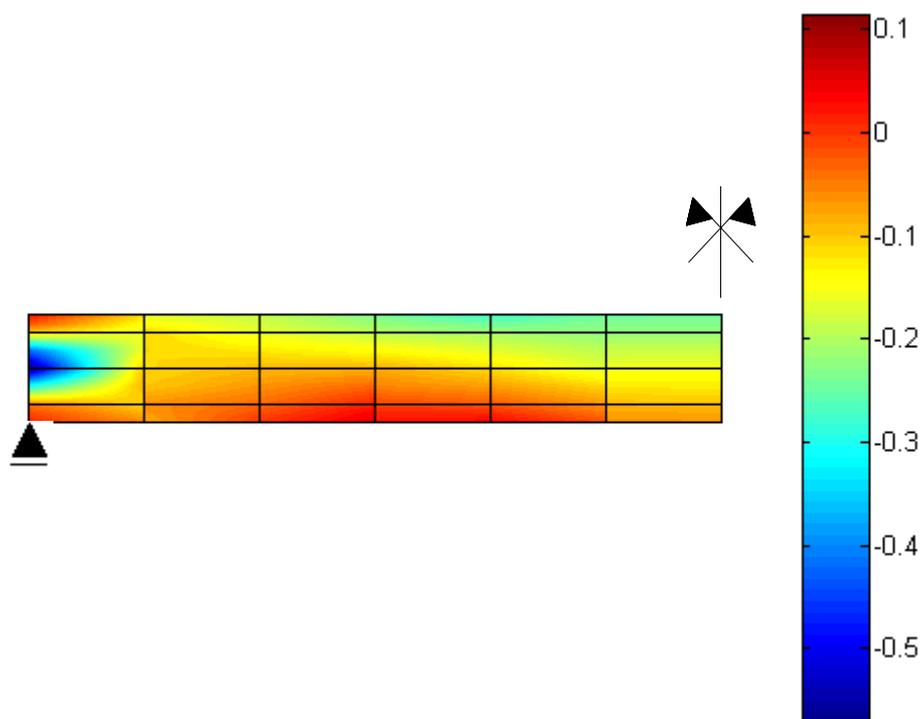
*Deslocamento máximo= - 4,185cm*

**Figura 9.10** – Deformada da viga segundo modelo computacional com  $Q=140\text{kN}$

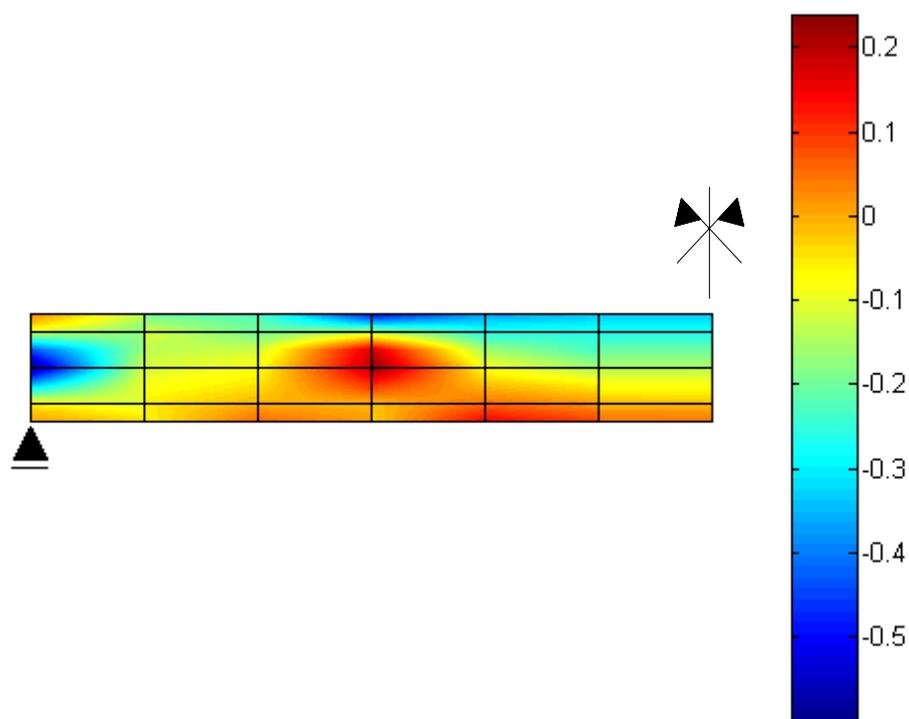
Nas Figs. 9.11 até 9.19, mostram-se os estados de tensões no concreto, em  $\text{kN/cm}^2$ , para diversos níveis de carga aplicada.



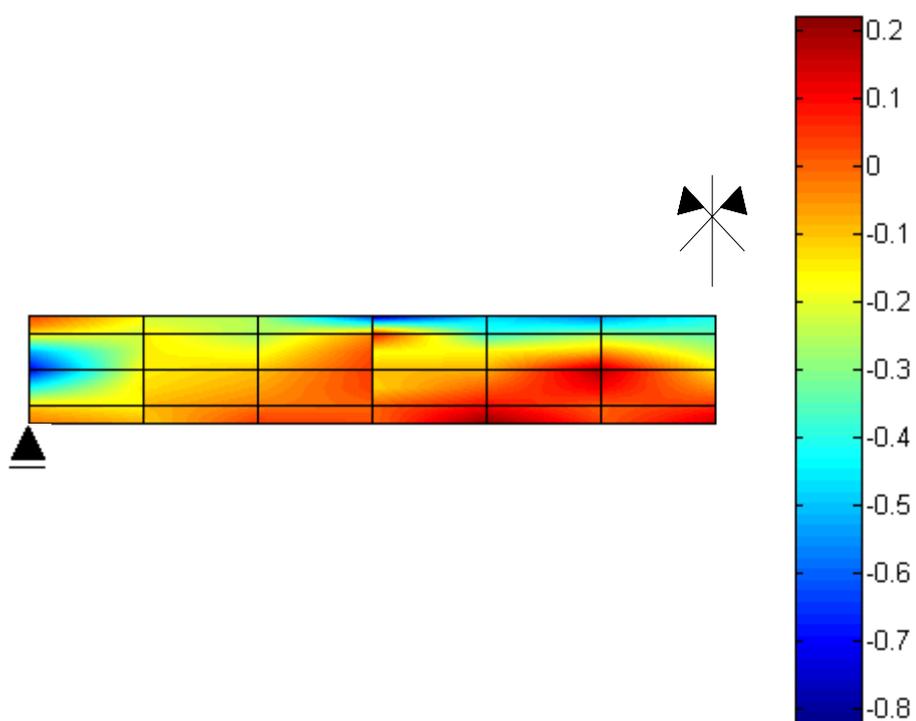
**Figura 9.11** – Distribuição de tensões no concreto em  $\text{kN/cm}^2$  –  $Q=14\text{kN}$



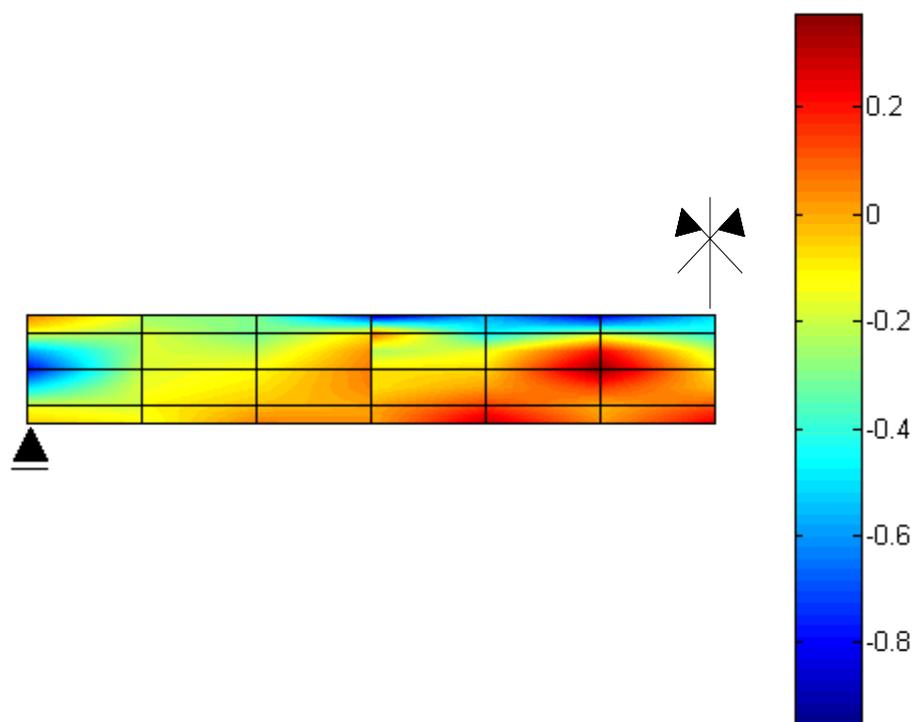
**Figura 9.12** – Distribuição de tensões no concreto em  $\text{kN/cm}^2$  –  $Q=28\text{kN}$



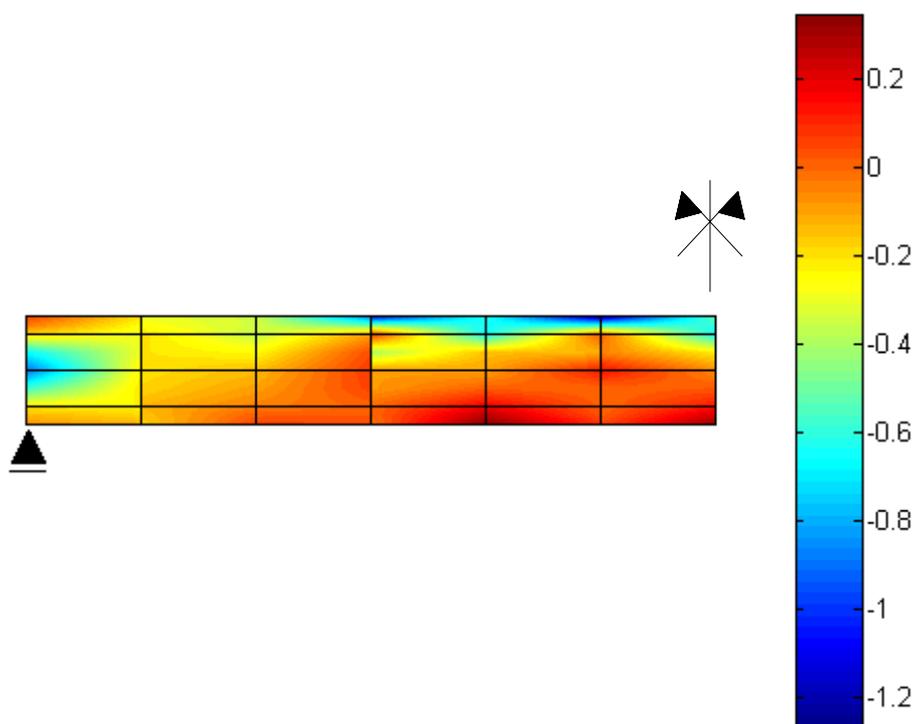
**Figura 9.13** – Distribuição de tensões no concreto em  $\text{kN/cm}^2$  –  $Q=42\text{kN}$



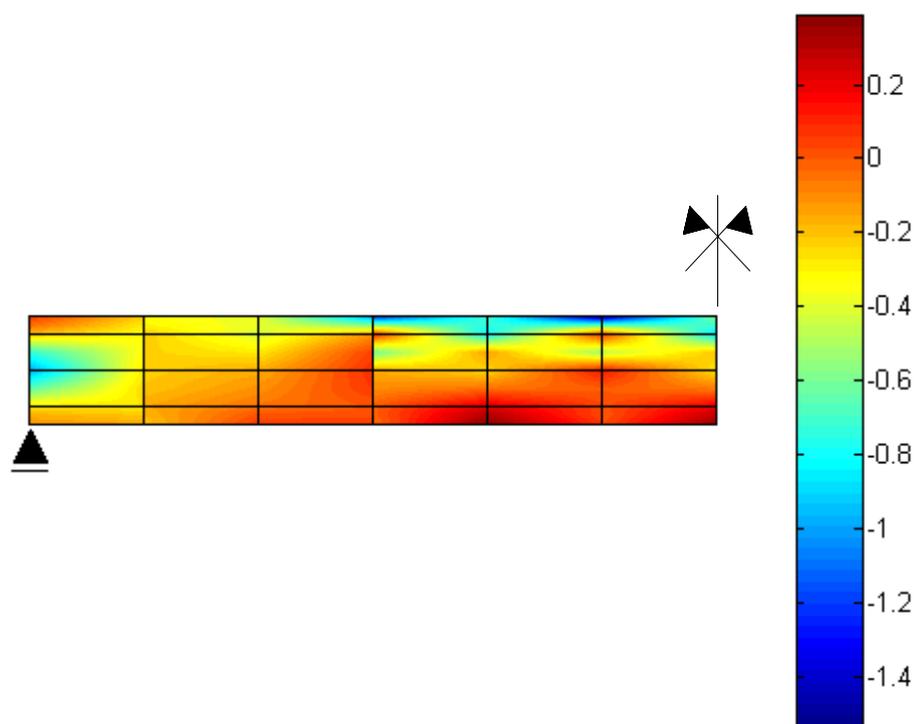
**Figura 9.14** – Distribuição de tensões no concreto em  $\text{kN/cm}^2$  –  $Q=56\text{kN}$



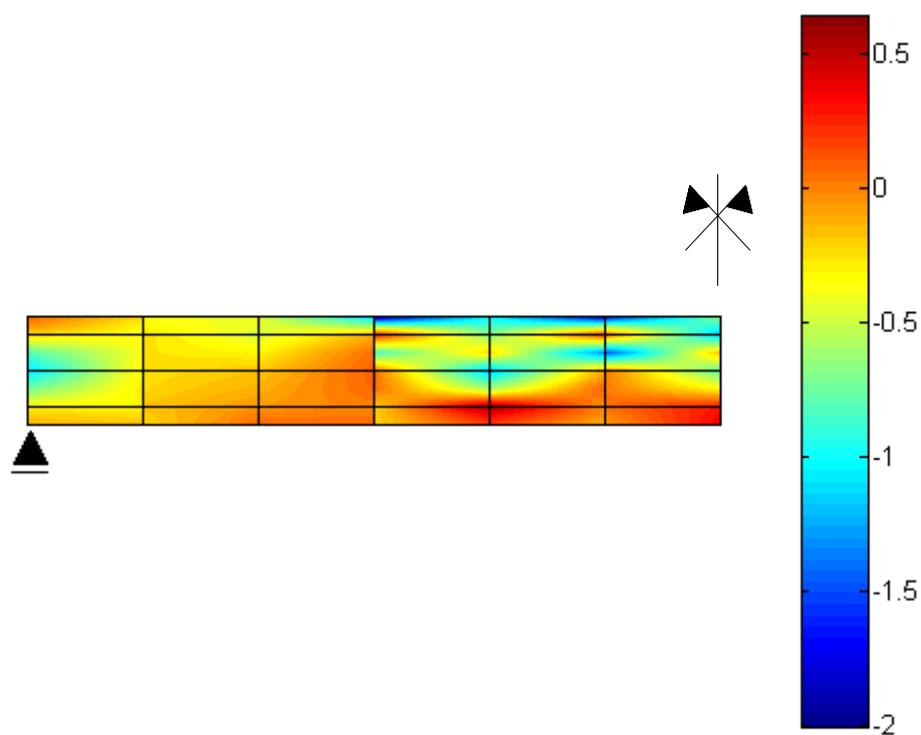
**Figura 9.15** – Distribuição de tensões no concreto em  $\text{kN}/\text{cm}^2$  –  $Q=70\text{kN}$



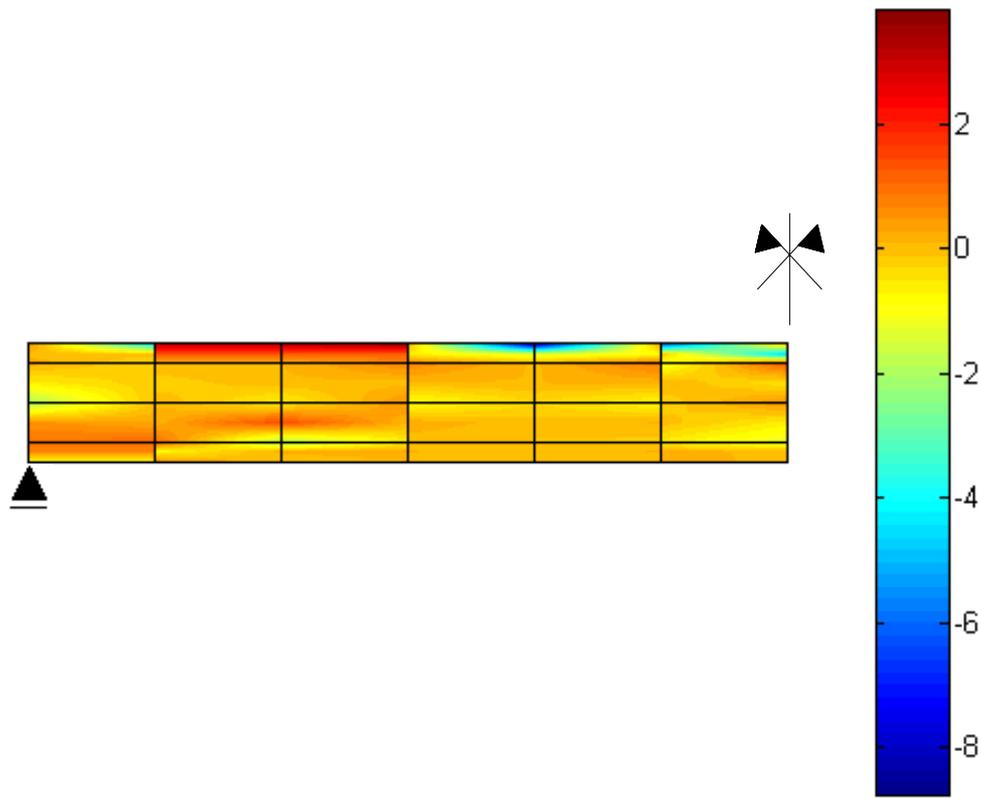
**Figura 9.16** – Distribuição de tensões no concreto em  $\text{kN}/\text{cm}^2$  –  $Q=84\text{kN}$



**Figura 9.17** – Distribuição de tensões no concreto em  $\text{kN/cm}^2$  –  $Q=98\text{kN}$



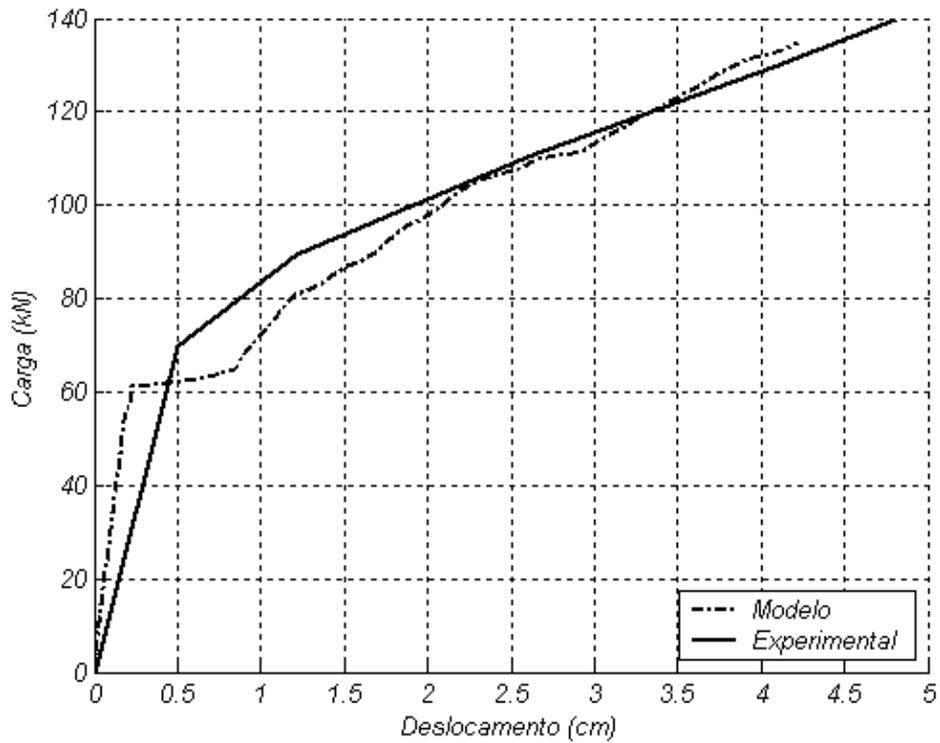
**Figura 9.18** – Distribuição de tensões no concreto em  $\text{kN/cm}^2$  –  $Q=112\text{kN}$



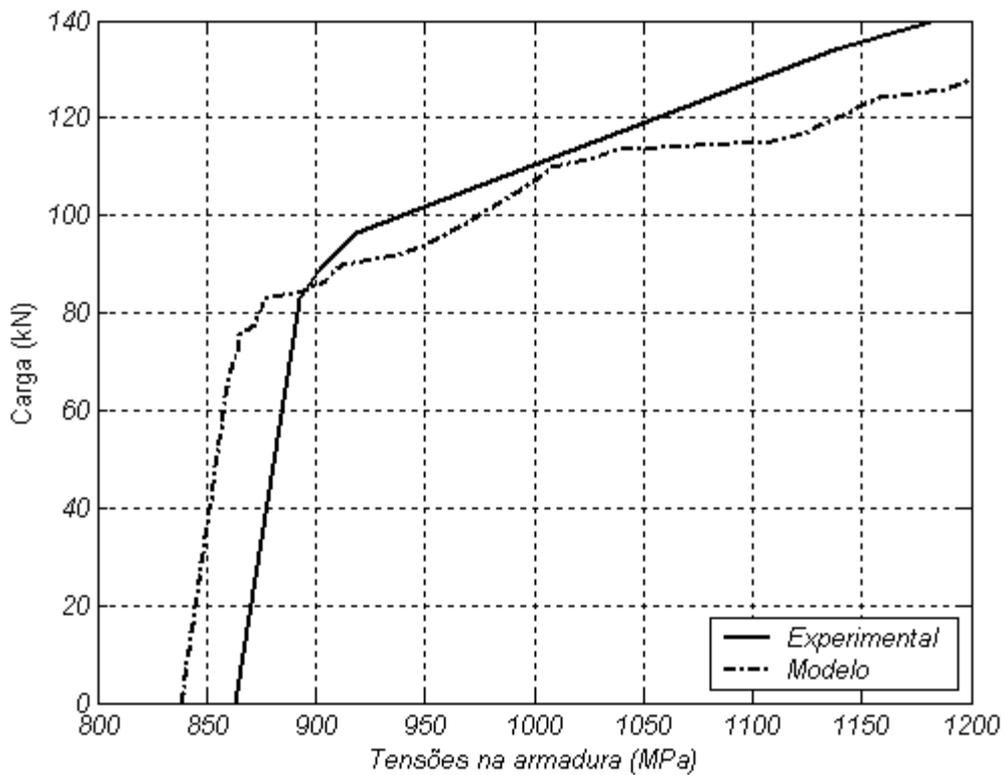
**Figura 9.19** – Distribuição de tensões no concreto em  $\text{kN/cm}^2$  –  $Q=140\text{kN}$

A Fig. 9.20 apresenta as curvas carga ( $Q$ ) x deslocamento máximo para a viga analisada, e a Fig. 9.21 apresenta as curvas carga ( $Q$ ) x tensões na armadura na seção central da viga, segundo o modelo computacional e os resultados experimentais.

Na situação de serviço, a viga permanece totalmente comprimida e apresenta um comportamento monolítico. Esta situação é ilustrada pelos resultados apresentados nas Figs. 9.4 e 9.11. No entanto, ao aproximar-se o estado limite último, as tensões de compressão diminuem e surgem tensões de tração, provocando a abertura das juntas (Figs. 9.5 a 9.10). Na situação analisada, primeiramente abriu-se a junta onde a armadura de protensão estava inclinada em relação ao eixo longitudinal da viga. Posteriormente, observou-se também a abertura da junta mais próxima do centro da viga. No gráfico carga x tensões na armadura, pode-se observar que, devido a abertura das juntas, ocorre um aumento significativo das tensões na armadura. Com a abertura das juntas a armadura passa a resistir a totalidade dos esforços naquelas seções. A abertura máxima de junta, para carga  $Q = 140 \text{ kN}$ , foi de 6mm.



**Figura 9.20** – Comparação entre os deslocamentos obtidos no modelo computacional e experimentalmente



**Figura 9.21** – Tensões na armadura

Comparando os resultados obtidos através do modelo com os valores experimentais, verifica-se a possibilidade de simular computacionalmente o funcionamento real de estruturas segmentadas de concreto. A concordância dos resultados numéricos e experimentais, apresentados nas Figs. 9.20 e 9.21, é muito boa.

## 10. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

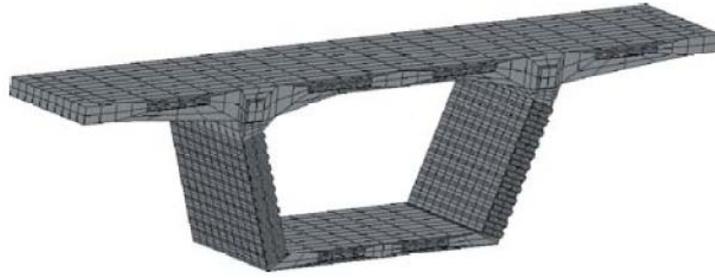
Neste trabalho, apresentou-se um modelo elasto-viscoplástico, baseado no método dos elementos finitos, para a análise de vigas segmentadas de concreto com protensão não aderente. Tal modelo tem como casos particulares o viscoelástico, onde os efeitos sobre os materiais ligados ao tempo, como fluência e retração do concreto e relaxação do aço, são investigados, e o elastoplástico, onde se busca o estado de deformações após a aplicação de um determinado carregamento.

Esta dissertação teve como base principal o trabalho de Machado (2002), onde implementou-se um modelo para considerar a estrutura segmentada através de elementos de contato para representar as juntas entre os segmentos da estrutura. Além disso introduziu-se um novo algoritmo para a consideração das armaduras de protensão não aderentes. A armadura protendida não aderente é localizada em elementos fictícios, para simular o comportamento de vigas com protensão externa, tanto para as estruturas segmentadas, como para as monolíticas.

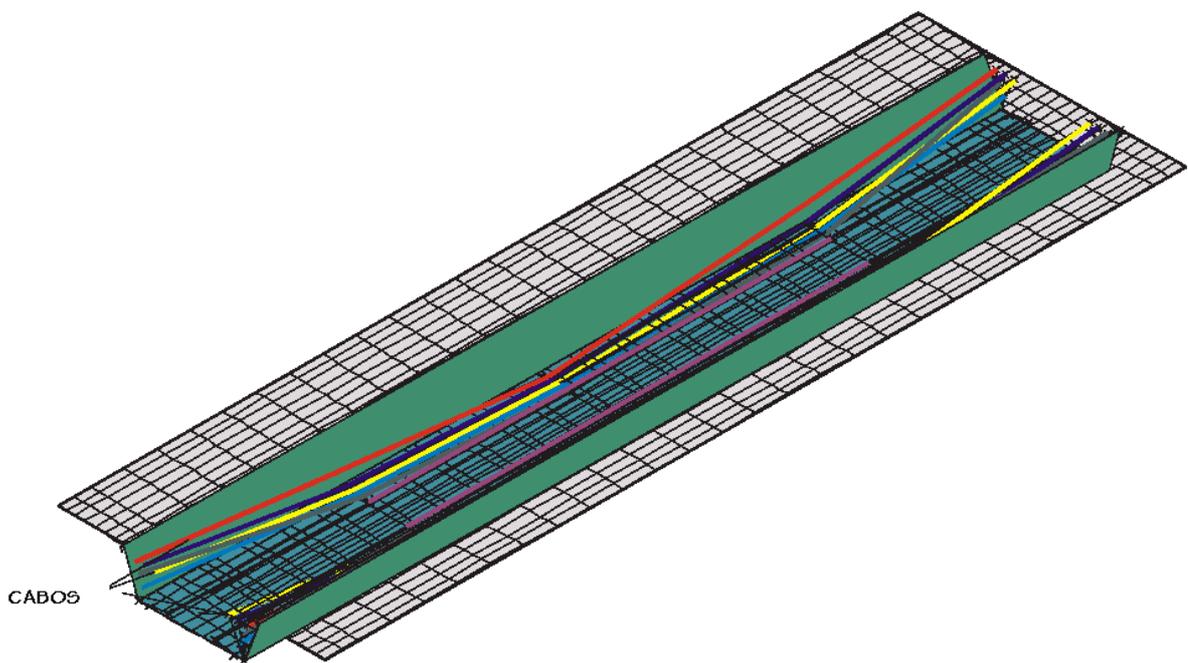
Com os excelentes resultados obtidos com o modelo, mostrados nos capítulos 8 e 9, ao serem comparados com os dados experimentais, verificou-se a possibilidade de se simular computacionalmente o funcionamento real de estruturas segmentadas de concreto com protensão externa e com junta seca através do uso dos modelos adotados.

Para o prosseguimento da pesquisa nesta área, pode-se sugerir:

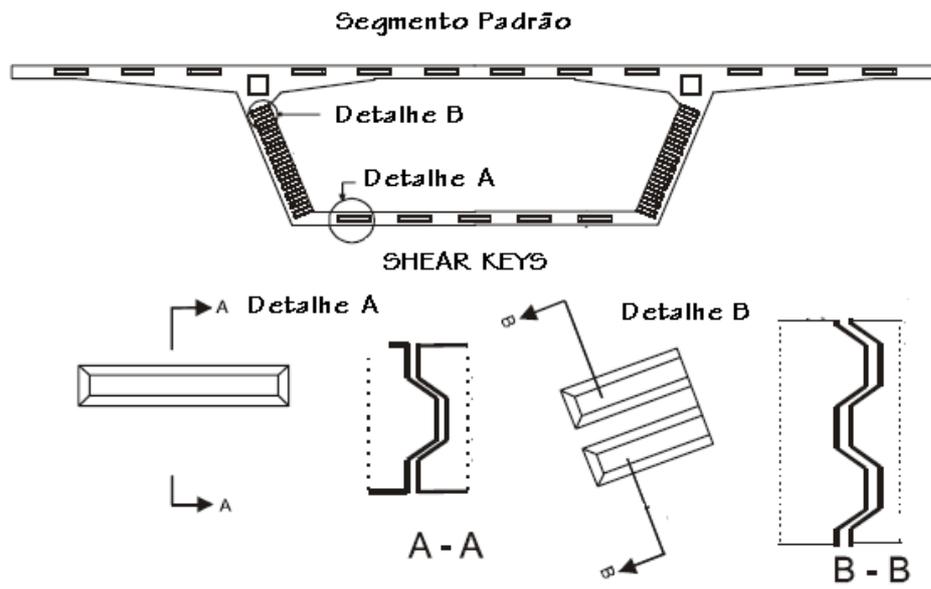
- verificação das diferenças obtidas em se utilizar junta seca e junta com epóxi;
- desenvolvimento de um modelo tridimensional para a simulação do comportamento de vigas segmentadas, face à simplicidade do implementado neste trabalho (ver Figs. 10.1 e 10.2);
- modelo que considere a transferência de esforço cortante na junta, mesmo quando aberta, através de ‘shear keys’ (ver Fig 10.3);
- desenvolver um programa para a visualização gráfica tridimensional dos resultados obtidos, através da biblioteca gráfica OpenGL (Open Graphics Library, 2004), uma poderosa e sofisticada API (*Application Programming Interface*), ou seja, uma biblioteca de subrotinas gráficas e de modelagem bi e tridimensional;
- criar uma interface amigável para a entrada de dados do programa.



**Figura 10.1** – Malha de Elemento Finitos de uma aduela (Rombach, 2002)



**Figura 10.2** – Modelo em Elementos Finitos (adaptada de Rombach, 2002)



**Figura 10.3** – Shear keys (adaptada de Rombach, 2002)

## **ANEXO A – ENTRADA DE DADOS**

O programa computacional, desenvolvido neste trabalho, foi implementado na linguagem FORTRAN 90. Os dados, para cada análise, são introduzidos no programa através de um arquivo de texto formatado. O objetivo deste anexo é apresentar a formatação para geração deste arquivo.

### **A.1 DADOS INICIAIS**

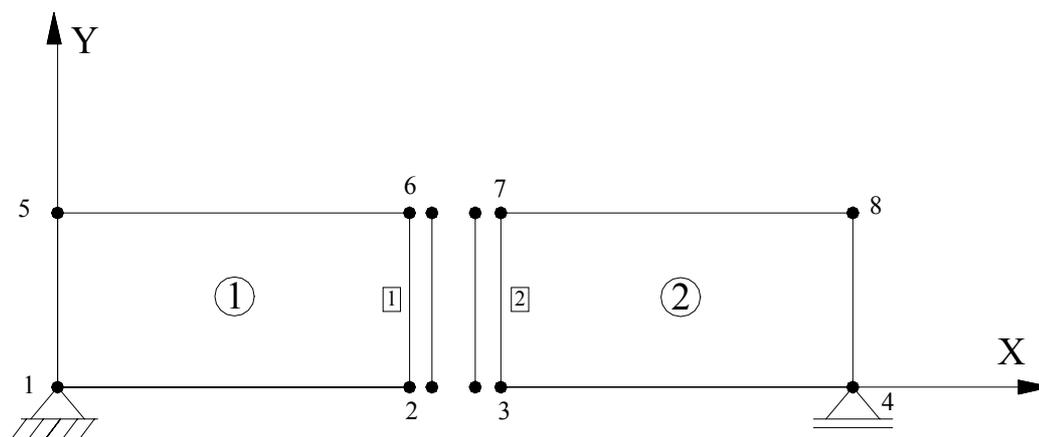
No primeiro registro do arquivo de dados, são fornecidos, ao programa, dados essenciais para a leitura das demais informações, na seguinte ordem:

- número de nós da estrutura (NPOIN);
- número de elementos de concreto (NELEM);
- número de nós vinculados (NVFIX);
- número de nós por elemento (NNODE);
- número de materiais diferentes para o concreto (NCONC);
- número de pontos de integração em cada direção (NGAUS);
- número de elementos de concreto (NELEC);
- número de barras de armadura (NBARS);
- número de materiais diferentes para a armadura ativa (NMATA);
- número de materiais diferentes para a armadura passiva (NMATP);
- número de carregamentos (NLOAD);
- número de nós por barras de armadura (NNOBR).

### **A.2 CONETIVIDADES DOS ELEMENTOS DE CONCRETO**

A seguir devem ser introduzidas as conetividades dos elementos de concreto. Devem ser fornecidos para cada elemento o seu número, o tipo de concreto (valor 1 ou 0) e suas conetividades nodais. O tipo de elemento indicará se o elemento de concreto é real (tipo 1) ou fictício (tipo 0), para incluir uma armadura sem aderência. A ordem das conetividades deve ser colocada no sentido anti-horário.

Para ilustrar esta situação, apresenta-se na Tab. A.1 as conetividades dos elementos apresentados na Fig. A.1.



**Figura A.1 - Exemplo 1 - Conetividades**

**Tabela A.1 - Conetividades dos elementos de concreto**

<i>Nº do Elemento</i>	<i>Tipo do concreto</i>	<i>Tipo</i>	<i>Conetividades</i>
1	1	1	1 2 6 5
2	1	1	3 4 8 7

### A.3 CONETIVIDADES DOS ELEMENTOS DE CONTATO

A seguir, são introduzidas as conetividades dos elementos de contato. Nestes registros são fornecidos para cada elemento de contato o número da junta, do corpo e do elemento de concreto, que o elemento de contato está associado, e suas conetividades nodais.

Os dados para os elementos de contato da Fig. A.1 estão indicados na Tab. A.2.

**Tabela A.2 - Conetividades dos elementos de contato**

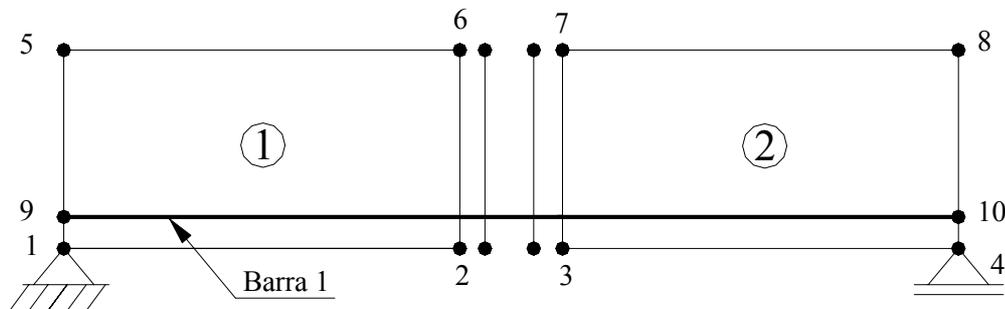
<i>Junta</i>	<i>Corpo</i>	<i>Elemento de Concreto</i>	<i>Conetividades</i>
1	1	1	2 6
1	2	2	3 7

## A.4 CONETIVIDADES DAS BARRAS DE ARMADURA

Para as conexões das barras de armadura, são fornecidos os seguintes dados:

- número da barra de armadura;
- número das propriedades do material;
- número da barra da qual é continuação (para barras curvas e poligonais);
- tipo de barra;
- conexões da barra.

O tipo de barra indicará que ela tem aderência (tipo 1) ou não (tipo 0). No exemplo da Fig. A.2 têm-se os dados apresentados na Tab. A.3.



**Figura A.2** – Exemplo 1 – Barra de armadura

**Tabela A.3** -Conexões das barras de armadura

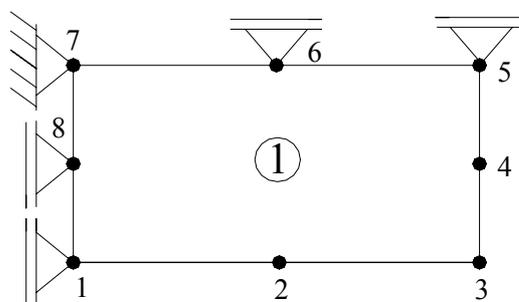
<i>Nº da barra</i>	<i>Nº do material</i>	<i>Nº da barra da qual é continuação</i>	<i>Tipo de barra</i>	<i>Conexões</i>
1	1	0	0	9 10

## A.5 COORDENADAS NODAIS

Na seqüência, são fornecidas as coordenadas cartesianas(x,y), em centímetros, de todos os nós da malha de elementos finitos. Ao final da enumeração dos nós dos elementos de concreto, devem ser listados os nós dos elementos de armadura.

## A.6 VINCULAÇÃO

Após, devem ser especificados os nós vinculados e seus códigos de restrição, conforme ilustrado na Fig. A.3 e Tab. A.4.



**Figura A.3** – Exemplo 2 – Vinculação

**Tabela A.4** - Vinculação dos nós

<i>Nó restringido</i>	<i>Código de restrição</i>
<b>1</b>	10
<b>5</b>	01
<b>6</b>	01
<b>7</b>	11
<b>8</b>	10

Havendo deslocamento imposto em algum nó devem ser fornecidos, o número desse nó, o código de restrição e o valor do deslocamento imposto neste nó nas direções x e y.

## A.7 PROPRIEDADES

Posteriormente, são fornecidas as propriedades do ambiente, concreto, armadura passiva e armadura protendida.

Para o ambiente, são informadas as seguintes propriedades:

- data do início da retração, em dias. Esta informação é introduzida, separadamente, em uma linha anterior ao restante das propriedades do ambiente. Havendo mais de um tipo de concreto, devem ser informadas nesta mesma linha, as datas de início de retração de cada tipo de concreto;

- umidade relativa do ar;
- período de duração  $\Delta T_1$  da temperatura  $T_1$ , em dias;
- valor da temperatura  $T_1$  no período  $\Delta T_1$ , em graus Celsius.

Para o concreto, são informadas, as seguintes propriedades:

- espessura do elemento, em centímetros;
- resistência média à compressão aos 28 dias, em  $\text{kN/cm}^2$ ;
- espessura fictícia, em centímetros;
- tipo de cimento: endurecimento lento (-1), normal (0) ou rápido (1).

Para as armaduras, passiva e protendida, são informadas, as seguintes propriedades:

- número de barras;
- tensão de escoamento do aço, para armadura passiva, ou tensão de ruptura do aço, para armadura protendida, em  $\text{kN/cm}^2$ ;
- diâmetro da barra, em centímetros;
- tipo do aço: A (1), B(2), relaxação normal (3) ou relaxação baixa (4).

Os próximos dados só deverão ser fornecidos se a armadura for protendida:

- coeficiente de atrito entre o cabo e a bainha metálica;
- tensão inicial, em  $\text{kN/cm}^2$ ;
- tipo de protensão: pré-tração (1), pós-tração com aderência (2) ou pós-tração sem aderência (3);
- data da protensão, em dias.

Havendo mais de um tipo de concreto e/ou armadura, as propriedades de cada tipo de elemento devem estar em diferentes linhas. O tipo 1 de elemento deve estar na primeira linha, o tipo 2 na segunda linha, e assim por diante.

## A.8 CARREGAMENTOS

Finalmente, devem ser fornecidas as seguintes informações:

- número do carregamento;
- data do carregamento;
- número de incrementos de carga;
- número de nós carregados;
- ocorrência de força gravitacional: valor 1, para considerar peso próprio e 0, para não considerar;
- número de bordos carregados, em caso de carregamento distribuído.

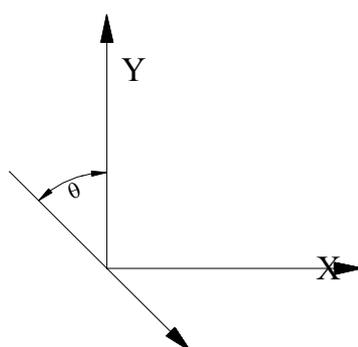
Para cada tipo de carregamento devem ser fornecidas as seguintes informações:

### A.8.1 Carregamento nodal

Devem ser incluídas as cargas aplicadas nos nós. São fornecidos o número do nó e as componentes de carga nas direções x e y.

### A.8.2 Força gravitacional

Devem ser fornecidos o ângulo de gravidade,  $\theta$ , em graus, medido em relação ao eixo y positivo, conforme Fig. A.4, e a constante gravitacional, em  $m/s^2$ .



**Figura A.4** – Convenção do sentido e direção da gravidade

### A.8.3 Carregamento distribuído

Havendo cargas distribuídas nos bordos dos elementos, deverão ser fornecidos o número do elemento, uma lista de pontos nodais, que compõem o bordo do elemento, e os valores das componentes normais e tangenciais, ao bordo, de carga em cada nó.

## A.9 EXEMPLO DE ARQUIVO PARA ENTRADA DE DADOS

Neste item, apresenta-se um exemplo de arquivo para a entrada de dados, da viga estudada no capítulo 9, através da Tab. A.5. O texto em *itálico* e em **negrito** é apenas de comentário.

**Tabela A.5 - Exemplo**

**DADOS INICIAIS:**

<b>N° DO ELEMENTO,</b>	<b>TIPO DE CONCRETO,</b>	<b>TIPO DE ELEMENTO,</b>	<b>CONETIVIDADES</b>								
178	42	10	8	5	3	24	4	0	1	1	2
1	1	1	1	2	3	5	8	7	6	4	
2	1	1	24	25	26	30	34	33	32	29	
3	1	1	26	27	28	31	36	35	34	30	
4	1	1	61	62	63	67	71	70	69	66	
5	1	1	63	64	65	68	73	72	71	67	
6	1	1	98	99	100	102	105	104	103	101	
7	2	1	6	7	8	10	13	12	11	9	
8	2	1	32	33	34	38	42	41	40	37	
9	2	1	34	35	36	39	44	43	42	38	
10	2	1	69	70	71	75	79	78	77	74	
11	2	1	71	72	73	76	81	80	79	75	
12	2	1	103	104	105	107	110	109	108	106	
13	2	1	11	12	13	15	18	17	16	14	
14	2	1	40	41	42	46	50	49	48	45	
15	2	1	42	43	44	47	52	51	50	46	
16	2	1	77	78	79	83	87	86	85	82	
17	2	1	79	80	81	84	89	88	87	83	
18	2	1	108	109	110	112	115	114	113	111	
19	3	1	16	17	18	20	23	22	21	19	
20	3	1	48	49	50	54	58	57	56	53	
21	3	1	50	51	52	55	60	59	58	54	
22	3	1	85	86	87	91	95	94	93	90	
23	3	1	87	88	89	92	97	96	95	91	
24	3	1	113	114	115	117	120	119	118	116	
25	4	0	1	121	122	132	137	136	6	4	
26	4	0	122	123	124	133	139	138	137	132	
27	4	0	124	125	126	134	141	140	139	133	
28	4	0	126	127	128	67	143	142	141	134	
29	4	0	128	129	130	135	145	144	143	67	
30	4	0	130	131	100	102	105	146	145	135	
31	5	0	6	136	137	147	153	152	11	9	
32	5	0	137	138	139	148	155	154	153	147	
33	5	0	139	140	141	149	157	156	155	148	
34	5	0	141	142	143	150	159	158	157	149	
35	5	0	143	144	145	151	161	160	159	150	
36	5	0	145	146	105	107	110	162	161	151	
37	5	0	11	152	153	163	169	168	16	14	
38	5	0	153	154	155	164	171	170	169	163	
39	5	0	155	156	157	165	173	172	171	164	
40	5	0	157	158	159	166	175	174	173	165	
41	5	0	159	160	161	167	177	176	175	166	
42	5	0	161	162	110	112	115	178	177	167	
<b>N° DA JUNTA,</b>	<b>N° DO CORPO,</b>	<b>N° DO ELEM. DE CONC., CONECTIVIDADES</b>									
1	1	1	3	5	8						
1	1	7	8	10	13						
1	1	13	13	15	18						
1	1	19	18	20	23						
1	2	2	24	29	32						
1	2	8	32	37	40						
1	2	14	40	45	48						
1	2	20	48	53	56						
2	2	3	28	31	36						
2	2	9	36	39	44						
2	2	15	44	47	52						
2	2	21	52	55	60						

2	3	4	61	66	69
2	3	10	69	74	77
2	3	16	77	82	85
2	3	22	85	90	93
3	3	5	65	68	73
3	3	11	73	76	81
3	3	17	81	84	89
3	3	23	89	92	97
3	4	6	98	101	103
3	4	12	103	106	108
3	4	18	108	111	113
3	4	24	113	116	118
<b>N° DA BARRA, TIPO DE AÇO, N° DA BARRA QUE É CONTINUAÇÃO, TIPO DA BARRA, CONETIVIDADES DA BARRA DE ARMADURA</b>					
1	1	0	0	14	67
2	1	0	0	67	102
3	1	0	0	11	67
4	1	0	0	67	102
<b>COORDENADAS DOS NÓS</b>					
1	0.0	0.0			
2	30.0	0.0			
3	60.0	0.0			
4	0.0	5.0			
5	60.0	5.0			
6	0.0	10.0			
7	30.0	10.0			
8	60.0	10.0			
9	0.0	20.0			
10	60.0	20.0			
11	0.0	30.0			
12	30.0	30.0			
13	60.0	30.0			
14	0.0	40.0			
15	60.0	40.0			
16	0.0	50.0			
17	30.0	50.0			
18	60.0	50.0			
19	0.0	55.0			
20	60.0	55.0			
21	0.0	60.0			
22	30.0	60.0			
23	60.0	60.0			
24	60.0	0.0			
25	90.0	0.0			
26	120.0	0.0			
27	150.0	0.0			
28	180.0	0.0			
29	60.0	5.0			
30	120.0	5.0			
31	180.0	5.0			
32	60.0	10.0			
33	90.0	10.0			
34	120.0	10.0			
35	150.0	10.0			
36	180.0	10.0			
37	60.0	20.0			
38	120.0	20.0			
39	180.0	20.0			
40	60.0	30.0			
41	90.0	30.0			
42	120.0	30.0			

43	150.0	30.0
44	180.0	30.0
45	60.0	40.0
46	120.0	40.0
47	180.0	40.0
48	60.0	50.0
49	90.0	50.0
50	120.0	50.0
51	150.0	50.0
52	180.0	50.0
53	60.0	55.0
54	120.0	55.0
55	180.0	55.0
56	60.0	60.0
57	90.0	60.0
58	120.0	60.0
59	150.0	60.0
60	180.0	60.0
61	180.0	0.0
62	210.0	0.0
63	240.0	0.0
64	270.0	0.0
65	300.0	0.0
66	180.0	5.0
67	240.0	5.0
68	300.0	5.0
69	180.0	10.0
70	210.0	10.0
71	240.0	10.0
72	270.0	10.0
73	300.0	10.0
74	180.0	20.0
75	240.0	20.0
76	300.0	20.0
77	180.0	30.0
78	210.0	30.0
79	240.0	30.0
80	270.0	30.0
81	300.0	30.0
82	180.0	40.0
83	240.0	40.0
84	300.0	40.0
85	180.0	50.0
86	210.0	50.0
87	240.0	50.0
88	270.0	50.0
89	300.0	50.0
90	180.0	55.0
91	240.0	55.0
92	300.0	55.0
93	180.0	60.0
94	210.0	60.0
95	240.0	60.0
96	270.0	60.0
97	300.0	60.0
98	300.0	0.0
99	330.0	0.0
100	360.0	0.0
101	300.0	5.0
102	360.0	5.0
103	300.0	10.0

104	330.0	10.0
105	360.0	10.0
106	300.0	20.0
107	360.0	20.0
108	300.0	30.0
109	330.0	30.0
110	360.0	30.0
111	300.0	40.0
112	360.0	40.0
113	300.0	50.0
114	330.0	50.0
115	360.0	50.0
116	300.0	55.0
117	360.0	55.0
118	300.0	60.0
119	330.0	60.0
120	360.0	60.0
121	30.0	0.0
122	60.0	0.0
123	90.0	0.0
124	120.0	0.0
125	150.0	0.0
126	180.0	0.0
127	210.0	0.0
128	240.0	0.0
129	270.0	0.0
130	300.0	0.0
131	330.0	0.0
132	60.0	5.0
133	120.0	5.0
134	180.0	5.0
135	300.0	5.0
136	30.0	10.0
137	60.0	10.0
138	90.0	10.0
139	120.0	10.0
140	150.0	10.0
141	180.0	10.0
142	210.0	10.0
143	240.0	10.0
144	270.0	10.0
145	300.0	10.0
146	330.0	10.0
147	60.0	20.0
148	120.0	20.0
149	180.0	20.0
150	240.0	20.0
151	300.0	20.0
152	30.0	30.0
153	60.0	30.0
154	90.0	30.0
155	120.0	30.0
156	150.0	30.0
157	180.0	30.0
158	210.0	30.0
159	240.0	30.0
160	270.0	30.0
161	300.0	30.0
162	330.0	30.0
163	60.0	40.0
164	120.0	40.0

165	180.0	40.0
166	240.0	40.0
167	300.0	40.0
168	30.0	50.0
169	60.0	50.0
170	90.0	50.0
171	120.0	50.0
172	150.0	50.0
173	180.0	50.0
174	210.0	50.0
175	240.0	50.0
176	270.0	50.0
177	300.0	50.0
178	330.0	50.0

**VINCULAÇÃO**

**NÓ, CÓDIGO, DESLOCAMENTOS PRESCRITOS**

1	01	0.0	0.0
100	10	0.0	0.0
102	10	0.0	0.0
105	10	0.0	0.0
107	10	0.0	0.0
110	10	0.0	0.0
112	10	0.0	0.0
115	10	0.0	0.0
117	10	0.0	0.0
120	10	0.0	0.0

**DATA PARA CONSIDERAR O INÍCIO DA RETRAÇÃO ,PARA TODOS OS TIPOS DE CONC.**

28.000	28.000	28.000	28.000	28.000
--------	--------	--------	--------	--------

**RH, TEMPO DE DURAÇÃO, TEMPERATURA**

80.000	20000.000	20.000
--------	-----------	--------

**PROPRIEDADES DO CONCRETO:**

**ESPESSURA, FCM, H, TIPO DE CONCRETO**

70.000	5.300	10.000	0.000
20.000	5.300	10.000	0.000
120.000	5.300	10.000	0.000
70.000	5.300	10.000	0.000
20.000	5.300	10.000	0.000

**PROPRIEDADES DO CONCRETO:**

**Nº DE BARRAS, FCTK,  $\phi$ , TIPO DE ARMADURA, COEF. DE ATRITO,  $\sigma$  INICIAL, TIPO DE AÇO, TEMPO DE PROTENSÃO**

2.0	190.0	1.52	4.0	0.0	87.6	3.0	28.0
-----	-------	------	-----	-----	------	-----	------

INTERNAL PRESSURE

**Nº DO CARREGAMENTO, DATA DA APLICAÇÃO, Nº DE INCREMENTOS, Nº DE CARGAS NODAIS, CARGA GRAVITACIONAL, CARGA DISTRIBUÍDA**

1	28.00	10	1	0	0
---	-------	----	---	---	---

95	0.0	-14.0
----	-----	-------

**FORÇA APLICADA NO NÓ 95**



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDEL-KARIM, A. M. & TADROS, M. K. Computer-analysis of spliced girder bridges **ACI Structural Journal**, v. 90, n. 1, p. 21-31, jan-feb. 1993

OH, B. H. & CHAE, S. T. Structural behavior of tendon coupling joints in prestressed concrete bridge girders **ACI Structural Journal**, v. 98, n. 1, p. 87-95, jan-feb. 2001

ALKHAIRI, F. M. & NAAMAN, A. E. Analysis of beams prestressed with unbonded internal or external tendons **Journal of Structural Engineering** v.119, n.9, p. 2680-2700, set. 1993.

APARICIO, C. A.; GONZALO R. & CASAS R. J. Testing of externally prestressed concrete beams. **Engineering Structures**, v. 24, n. 4-8, p. 73-84, 2002.

ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado**. v.1, 2 ed., Rio Grande, Ed. Dunas, 2003.

ARIYAWARDENA, N. & GHALI, A. Prestressing with unbonded internal or external tendons: Analysis and computer model **Journal of Structural Engineering -ASCE** v.128, n.12, p. 1493-1501, dec. 2002.

BAZANT, Z. P. & WU, S.T. Rate-type creep law of aging concrete based on Maxwell chain. **Matériaux et Constructions**, v. 7, n. 34, p. 45-60, 1974.

BROCKMANN, C. & ROGENHOFER, H. Bang Na Expressway, Bangkok, Thailand – World's Longest Bridge and Largest Precasting Operation. **PCI Journal**, p. 26-38, jan-feb. 2000.

CAMPOS FILHO, A. **Análise teórico-experimental de elementos de concreto armado para obtenção de modelo matemático**. 1987. Tese de Doutorado em Engenharia Civil – Universidade de São Paulo, São Paulo. 293p.

CERVENKA, V. Constitutive model for cracked reinforced concrete. **Journal of the American Concrete Institute**, v. 82, n. 6, p. 877-882, 1985.

CHEN, W. F. & HAN, D. J. **Plasticity for structural engineers**. New York: Springer-Varlag, 1988. 606p.

CLAURE, J. D. **Análise tridimensional elasto-viscoplástica de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos.** 1994. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 145p.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP Model Code 1990.** Lausanne, 1993. (Bulletin d'Information, 213/214).

CRUZ, P. J. S.; MARI, A. R. & ROCA, P. Nonlinear time-dependent analysis of segmentally constructed structures **Journal of Structural Engineering -ASCE** v.124, n.3, p. 278-287, mar. 1998.

DANTAS, A. U. **Simulação numérica dos processos de recuperação e reforço de peças estruturais em concreto armado.** 2000. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 133p.

ELWI, A. E. & HRUDEY, T. M. Finite element model for curved embedded reinforcement. **Journal of Engineering Mechanics Division**, ASCE, v. 115, n. 4, p. 740-745, apr. 1989.

FIGUEIRAS, J. A. & PÓVOAS, R. H. Modelling of Prestress in Non-Linear Analysis of Concrete Structures. **Computers & Structures**. London, Elsevier Science, v. 53, n. 1, jan. 1994.

GONGCHEN, D. & XUEKANG, T. Contrainte ultime dans câbles non-adhérents de poutres en béton a précontrainte partielle. **Annales de L'Institut Technique du Batiment et des Tavaux Publics**, n. 462, p. 75-88, fev. 1988.

HABRAKEN, A. M. & CESCOTTO, S. Contact between deformable solids: The fully coupled approach. **Mathl. Comput. Modelling**, v. 28, n. 4-8, p. 153-169, 1998.

HEWSON, N. The Use Of Dry Joints Between Precast Segments For Bridge Decks. **P I Civil Eng-Civ**, En 92 (4): 177-184, nov. 1992.

HINDI, A.; MACGREGOR, R.; KREGER, M. E. & BREEN, J. E. Enhancing strength and ductility of post-tensioned segmental box girder bridges. **ACI Structural Journal**, v. 92, n. 1, p. 33-44, jan-feb. 1995.

HINTON, E. **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells.** Swansea: Pineridge Press, 1988. 550p.

TAN, K. H. & NG, C. K. Effect of shear in externally prestressed beams **ACI Structural Journal** v. 95, n. 2, p. 116-128, mar-apr. 1998.

IMSL MATH/LIBRARY **Fortran 90**, Ed. 6.5, 2000.

MACHADO, M. S. **Aplicação do método dos elementos finitos para a análise elasto-viscoplástica de peças de concreto armado e protendido, submetidas a estados planos de tensão.** 2002. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.150p.

MATTOCK, A. H.; YAMAZAKI J. & KATTULA, T. Comparative study of prestressed concrete beams, with and without bond. **Journal of the American Concrete Institute**, v. 68, n. 2, p.116-125, feb. 1971.

MATTOS, T.S. **Programa para análise de superestruturas de pontes de concreto armado e protendido.** 2001. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil – COPPE/ Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 167p.

MOON, J. & BURNS, N. H. Flexural Behavior of Member with Unbonded Tendons I: Theory. **Journal of the Structural Division**, New York, ASCE, v. 104, n. 7, jul. 1997.

OPENGL, **Silicon Graphics, Inc.** 2004.

OTTOSEN, N. S. A failure criterion of concrete. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, ASCE, v. 103, n. 4, p. 527-535, aug. 1977.

OWEN, D. R. J. & HINTON, E. **Finite element in plasticity: theory and practice.** Swansea, Pineridge Press, 1980. 594p.

OWEN, D. R. J. & HINTON, E. **Finite element programming.** London: Academic Press, 1977. 305p.

PANDE, G. N.; OWEN. D. R. J. & ZIENKIEWICZ, O. C. Overlay models in time-dependent non-linear material analysis. **Computers and Structures**, v. 7, n. 3, p. 435-443, 1977.

PONTES, V. M. **Análise não-linear de estruturas externamente protendidas**. 2000. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil - Universidade Federal Fluminense, Niterói. 120p.

PFEIL, W. **Concreto protendido 1: introdução**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1984.

PFEIL, W. **Concreto protendido 2: processos construtivos/perdas de protensão** Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1983.

PRATES JÚNIOR, N. P. **Um modelo elasto-viscoplástico para análise de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos**. 1992. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 131p.

ROMBACH, G. Precast segmental box girder bridges with external prestressing- design and construction. **INSA Rennes Technical University**, Hamburg-Harburg, Germany. feb. 2002. 15p.

SORIANO, H. L. & LIMA S. S. **Método de elementos finitos em análise de estruturas**. 1998. 392 p.

STRINCKLIN, J. A.; HAISLER, W. & REISEMANN, W. Evaluation of solution procedures of material and/or geometrically non-linear structural analysis. **AIAA Journal**, v. 11, n. 3, p. 292-299, 1973.

VASCONCELOS, A. C. **Manual prático para a correta utilização dos aços no concreto protendido em obediência às normas atualizadas**. Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos, editora Ltda, 1980. 64p.

VERÍSSIMO, G. S & CÉSAR JUNIOR, K. M. L. **Concreto Protendido: fundamentos básicos** . Minas Gerais: UFV, 1998. 73p.

VSL INTERNATIONAL, **External post- tensioning**. 1992. 34p

ZIENKIEWICZ, O.C. & TAYLOR, R.L. **The finite element method. Volume 1: basic formulation and linear problems**. 4.ed.. London, McGraw-Hill International, 1989.

ZIENKIEWICKZ, O. C. **The finite element method**. London: McGraw-Hill, 1986. 787p.

ZIENKIEWICKZ, O. C.; PHILLIPS, D. V. & OWEN D. R. J. **Finite element analysis of some concrete non-linearities: theory and examples**. In: SEMINAR ON CONCRETE STRUCTURES SUBJECTED TO TRIAXIAL STRESSES. PAPERS. Bergamo: IABSE, 1974, p.1-21.