UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FÁBIO LUIZ FONTES MARTINS

INSTRUMENTOS VIRTUAIS DE DESENHO E A ARGUMENTAÇÃO EM GEOMETRIA

Porto Alegre, RS, Brasil

2012

FÁBIO LUIZ FONTES MARTINS

INSTRUMENTOS VIRTUAIS DE DESENHO E A ARGUMENTAÇÃO EM GEOMETRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora:
Profª. Drª. Maria Alice Gravina
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Porto Alegre, RS, Brasil
2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Martins, Fábio Luiz Fontes Martins

Instrumentos de desenhos/ Fábio Luiz Fontes Martins. – Porto Alegre, 2012.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2012. (123p.)

Orientadora: Profª. Drª. Maria Alice Gravina.

1. Matemática. 2. Geometria. 3. Ensino-aprendizagem. 4. Representação semiótica. I. Gravina, Maria Alice Gravina. II. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTRUMENTOS VIRTUAIS DE DESENHO E A ARGUMENTAÇÃO EM GEOMETRIA

Fábio Luiz Fontes Martins

Dissertação aprovada em 17 de setembro de 2012.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo (UFRJ)

Profª. Drª. Elisabete Zardo Búrigo (UFRGS)

Prof.ª Drª. Márcia R. Notare Meneghetti (UFRGS)

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Dra. Maria Alice Gravina pela dedicação, por apontar caminhos, por compartilhar reflexões do que seja o ensino de matemática e, pelo estímulo para pesquisa.

Aos membros da banca, professora Dra. Elisabete Zardo Búrigo, professora Dra. Márcia Notare Meneghetti e professor Dr. Victor Augusto Giraldo pelas contribuições e sugestões.

Aos professores do mestrado que contribuíram para a formação em matemática e reflexões sobre o ensino.

Aos colegas do mestrado, em especial, a Camila, Elizandro, Jussara e Maurício pelo companheirismo, conversas e momentos de descontração.

Aos meus pais, Áurea e Erni, pelos exemplos e incentivos aos estudos desde sempre.

À minha querida avó Naura, pela dedicação e pelos conselhos valiosos.

À minha esposa Camila pelo apoio, incentivo e compreensão nesse período de estudo e pesquisa.

Aos meus ex-alunos e alunos, que contribuíram e contribuem, para um entendimento sobre educação a partir da prática.

A Matemática, quando a compreendemos bem, possui
não somente a verdade, mas também a suprema beleza.
Bertrand Russel (1872-1970)

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma proposta para trabalhar, na escola, com a argumentação dedutiva em geometria. A proposta faz uso de material digital consistindo de instrumentos virtuais de desenho que realizam as transformações geométricas de translação, reflexão, rotação e ampliação. Fazendo uso do material digital, elaboramos uma seqüência didática composta por três etapas – atividades de exploração, construção e argumentação, e uma experiência foi realizada em turma de Ensino Médio. Na analise do processo de aprendizagem dos alunos utilizamos a teoria de Van Hiele sobre níveis de pensamento geométrico e a teoria de Duval sobre registros de representações semióticas. No laboratório de informática, inicialmente os alunos sujeitos da experiência foram instigados a explorar os instrumentos virtuais, expressando seu entendimento em registro discursivo; construíram o instrumento virtual a partir do protocolo de construção, aqui transitando entre registros discursivo e geométrico; e finalmente trabalharam na argumentação que explica as transformações realizadas pelos instrumentos. Os resultados obtidos mostram que o uso dos instrumentos virtuais de desenho contribuiu para que os alunos entendessem, no contexto da geometria, o propósito de um raciocínio dedutivo.

Palavras-chave: argumentação, geometria, geometria dinâmica, instrumentos virtuais de desenho, registros de representações semióticas.

ABSTRACT

This dissertation presents a proposal to work, at school, the deductive reasoning in geometry. The proposal makes use of digital material consisting of virtual drawing tools that perform geometric transformations of translation, reflection, rotation and enlargement. Making use of digital material, it was developed a didactic sequence consists of three stages - exploration, construction and argumentation, and an experiment was performed in a high school class. In the analysis of the learning process of the students it was used the theory of Van Hiele related to levels of geometric thought and the theory of Duval related to registers of semiotic representations. In the computer lab, initially the students were encouraged to explore the virtual instruments, expressing their understanding in a discursive register; they made the geometric construction of the instruments, making use of discursive and geometric registers; finally they worked on the argument that explains the transformations performed by the instruments. The results show that the use of virtual instruments helped students to understand, in the geometric context, the purpose of a deductive reasoning.

Key works: argumentation, geometry, dynamic geometry, virtual instruments, registers of semiotic representations.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O conhecimento em geometria é importante, pois o mundo em que vivemos é repleto de formas e de relações entre seus elementos. Na antiguidade, as primeiras ideias sobre geometria eram empíricas, e de forma gradativa esse conhecimento evolui até chegar no que chamamos de geometria dedutiva. A evolução do pensamento possibilitou ao homem refletir sobre o conhecimento geométrico, assim construindo as primeiras argumentações. E esse processo dedutivo culminou com a organização do conhecimento na forma de axiomas, de definições, de teoremas e de demonstrações (BOYER, 2012; EVES, 2011).

Visto que o desenvolvimento da geometria empírica até a geometria dedutiva levou muito tempo, concluímos que atingir o estágio de entendimento da geometria dedutiva não é tarefa simples. Isso nos ajuda a entender o quão difícil pode ser, para os alunos da escola básica, a produção de argumentos dedutivos.

Quando falamos de demonstrações em matemática, isto remete ao uso de uma linguagem matemática precisa. Porém, no ensino da escola básica, temos que aproveitar as ideias que os alunos trazem de suas experiências com o mundo físico e adequar o uso da linguagem matemática para este nível. Acreditamos que o professor precisa interferir no processo de construção de argumentações e instigar os alunos, apontando caminhos. As orientações dadas nos PCN justificam nossa posição:

> Mesmo que a argumentação e a demonstração empreguem, frequentemente, os mesmos conectivos lógicos, há exigências formais para uma demonstração em Matemática que podem não estar presentes numa argumentação. O refinamento das argumentações produzidas ocorre gradativamente pela assimilação de princípios da lógica formal, possibilitando as demonstrações. (BRASIL, 1998, p.86)

A questão motivadora deste trabalho foi: como elaborar um material didático atrativo para os alunos, que possibilite um trabalho com a argumentação dedutiva? Para responder a essa pergunta, levamos em consideração o potencial da tecnologia informática nos processos de aprendizagem e, assim, apresentamos uma proposta de trabalho com argumentação dedutiva que trata de explicar o funcionamento de instrumentos virtuais de desenho. Estes instrumentos, construídos no *GeoGebra*[1], realizam desenhos que correspondem às transformações geométricas de reflexão, de rotação, de translação e de ampliação.

---

[1] Software de Geometria Dinâmica possibilitando construções com régua e compasso. Detalharemos as potencialidades do software no Capítulo 3.

A provocação a ser colocada aos alunos é quanto ao entendimento do funcionamento dos instrumentos e à explicação matemática de seu funcionamento. Procuramos desenvolver uma sequência didática que contempla três tipos de atividades – de exploração, de construção e de argumentação. Nosso objetivo não é demonstrar propriedades básicas da geometria, mas, sim, fazer uso dessas propriedades para desenvolver a argumentação que explica o funcionamento do instrumento, considerando que a exploração e a construção dos instrumentos podem provocar o interesse do aluno em acompanhar a explicação do professor.

Para fundamentar as escolhas feitas quanto à produção do material didático e a organização da experiência, no capítulo 2, tratamos da natureza da geometria e de questões sobre o ensino e aprendizagem da geometria escolar. No capítulo 3, tratamos dos instrumentos virtuais, apresentando: os aspectos históricos dos instrumentos; as definições das transformações que realizam; os procedimentos de construção no *GeoGebra*; as argumentações que explicam a geometria dos instrumentos. O capítulo 4 apresenta o material didático digital e o capítulo 5 apresenta a experiência realizada com turma de Ensino Médio e a análise da produção dos alunos. O capítulo 6 apresenta nossas considerações finais.

2 ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

Neste capítulo, falaremos sobre a natureza da Geometria e o processo de ensino e aprendizagem em Geometria. A referência teórica principal desta dissertação é o trabalho de Gravina (2001). Também falaremos sobre questões que dizem respeito à aprendizagem da geometria escolar. Em especial, vamos tratar de questões que dizem respeito ao tipo de demonstrações e de argumentos que podem ser aceitos na escola.

2.1 Natureza da Geometria

Os livros de história da matemática registram que há referências da geometria desde os primórdios da humanidade. Podemos afirmar que a geometria nasceu de uma forma empírica até chegar à fase na qual os gregos começaram a abordá-la de uma forma mais reflexiva, dispostos a responder a algumas perguntas pertinentes da época. Assim, em um processo de encontrar relações, construíram suas bases para a geometria demonstrativa, ou seja, uma abordagem da geometria preocupada em estabelecer generalizações de verdades geométricas. Essas verdades às quais chegavam eram baseadas em pensamentos de reflexão sobre o objeto matemático.

A natureza da geometria pode ser entendida quando mencionamos as fases da geometria, denominadas por *Geometria Subconsciente*, *Geometria Científica* e *Geometria Demonstrativa*. Em seu trabalho, Araújo (2007) destaca a *Geometria Subconsciente* como sendo o conjunto das artes e das técnicas criadas nos tempos primitivos, de caráter concreto referente ao espaço físico, surgindo como uma necessidade vital de adaptação do homem ao meio em que vive. Em seguida, o autor fala sobre a *Geometria Científica*, em que começou a observação de relações dos objetos matemáticos a partir de processos empíricos, surgindo as primeiras manifestações especulativas da geometria. Nesta fase, temos as contribuições geométricas dos antigos egípcios e babilônios. Caracterizam-se, nessa fase, os métodos indutivos, porém, não havendo preocupação com justificativa ou demonstração dos resultados obtidos. E por fim, o autor fala sobre a *Geometria Demonstrativa*, sendo que a geometria grega pode ser considerada a precursora desta fase. Eves (2011) diz que, segundo a tradição, a fase da Geometria Demonstrativa iniciou com Tales de Mileto, durante a primeira metade do VI século a.C.

A fase da Geometria Subconsciente pode ser entendida como época dos primeiros vestígios do pensamento geométrico. Encontramos, na obra de Boyer (2012, p. 26), que

> As afirmações sobre a origem da matemática, seja da aritmética, seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. (...) O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais, o que abriu caminho para geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que, em essência, são partes da geometria elementar e aparecem em todos continentes.

Podemos ilustrar a *Geometria Científica* com os feitos da geometria babilônica, com o que diz Eves (2011, p. 60):

> A geometria babilônica se relaciona (...) com a mensuração prática. De numerosos exemplos concretos, infere-se que os babilônios do período 2000 a.C. a 1600 a.C. deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezoidal.

Como podemos ver, existem diferentes formas de abordar a geometria – desde um nível mais empírico a um nível em que há a preocupação com a argumentação dedutiva, que explica as propriedades através do raciocínio dedutivo. Tem se na história da matemática que

> os gregos insistiram em que os fatos geométricos deviam ser estabelecidos, não por procedimentos empíricos, mas por raciocínios dedutivos; (...) os gregos transformaram a geometria empírica, ou científica, dos egípcios e babilônios antigos no que poderíamos chamar de geometria 'sistemática' ou 'demonstrativa' (EVES, 1992, apud ARAÚJO 2007, p. 4).

Uma das obras mais importantes da antiguidade é *Os Elementos* de Euclides. De acordo com Eves (2011, p. 167), "muito pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides, salvo que foi ele, segundo parece, o criador da famosa e duradoura escola de matemática de Alexandria, da qual, sem dúvida, foi professor". De acordo com o autor, tampouco sabe-se da data de seu nascimento; porém a obra atribuída a Euclides – Os Elementos – já teve mais de mil edições impressas desde a primeira, em 1482, e essa obra dominou, por mais de dois milênios, o ensino de geometria.

Assim, a partir dos gregos, em especial com o livro *Os Elementos*, a geometria torna-se uma área de conhecimento que se organiza da seguinte forma: a) *noções e relações primitivas*: são aceitas sem explicação e possuem significados intuitivos, como por exemplo, *pontos*, *retas*, *estar entre*, *ser igual a*; b) *axiomas*: são verdades aceitas como ponto de partida para construção do modelo, por exemplo, “dois pontos determinam uma única reta” e “por um ponto exterior a uma reta passa uma única reta paralela”; c) *definições*: relações geométricas de expressões únicas que facilitam a organização do modelo, por exemplo, a expressão “mediatriz” significa “reta perpendicular a segmento que passa pelo seu ponto médio” e d) *teorema*: são afirmações passíveis de demonstração, sendo que um encadeamento de inferências lógicas, que faz uso de axiomas e teoremas já demonstrados da mesma forma, garante sua veracidade.

De acordo com Eves (2011, p. 94, grifos do autor), o desenvolvimento da civilização como um todo e, sobretudo com o impulso do comércio, propiciou à humanidade uma nova forma de pensar: *como* e *por quê*.

> Pela primeira vez na matemática, como em outros campos, o homem começou a formular questões fundamentais como “Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?” e “Por que o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?”. Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes o bastante para responder a questões na forma de *como*, não mais bastavam para indagações mais cientificas na forma de *por quê*. Algumas experiências com o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo, e a feição dedutiva da matemática, considerada pelos doutos como sua característica fundamental, passou ao primeiro plano. Assim, a matemática (...) nasceu nessa atmosfera de racionalismo e em uma das novas cidades comerciais localizadas na costa oeste da Ásia Menor. Segundo a tradição, a geometria demonstrativa começou com Tales de Mileto, um dos “sete sábios” da Antiguidade, durante a primeira metade do sexto século a.C.

Muitas descobertas na geometria foram motivadas por pensamentos e raciocínios puramente empíricos, provenientes da experiência e/ou necessidades imediatas. Segundo a tradição, o importante Teorema de Pitágoras já era conhecido pelos babilônios, mais de um milênio antes de sua primeira demonstração atribuída a Pitágoras (EVES, 2011). A demonstração dada por Pitágoras, segundo a literatura, foi por decomposição de figuras. A demonstração, segundo Eves, consiste em denotar por a, b e c os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo, e considerar os dois quadrados da Figura 2.1.1 , cada um de lados iguais a $a+b$. O primeiro quadrado está decomposto em seis partes e, o segundo quadrado está decomposto em cinco partes. Subtraindo-se iguais de iguais, conclui-se que o quadrado sobre a hipotenusa é igual à soma dos quadrados sobre os catetos.

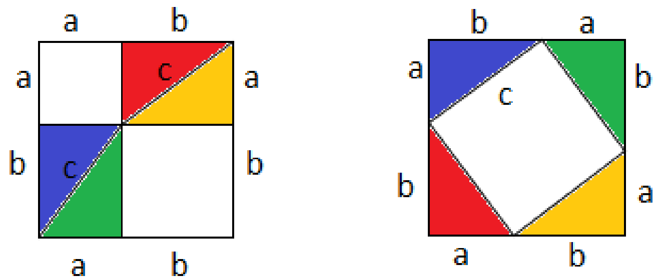


Figura 2.1.1: Teorema de Pitágoras
Fonte: Autor

Para provarmos que a parte central da segunda decomposição é um quadrado de lado *c*, precisamos usar o fato de que a soma dos ângulos de um retângulo é igual a dois ângulos retos (EVES, 2011, p.104).

O processo de produção de uma demonstração se constitui como parte da natureza da geometria. Para atingir o complexo processo de demonstração, muitas "idas e vindas" são necessárias, ou seja, é preciso aventurar-se no processo de argumentação. A questão que se coloca é: como se produzem demonstrações? A complexidade do processo é discutida por Gravina (2001), que apresenta o processo esquematicamente:

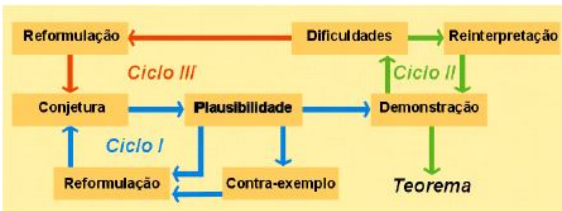


Figura 2.1.2: Complexidade do processo de criação
Fonte: GRAVINA, M.A. (2001, p. 71)

De acordo com a autora, o processo se constitui de três ciclos. O primeiro ciclo é aquele que, a partir da plausibilidade da conjectura, apresentamos um contra-exemplo (refutação) ou construímos a demonstração. Ainda neste ciclo temos a possibilidade de reformulação de acordo com a plausibilidade. Caso haja êxito na construção da demonstração, temos o que chamamos de Teorema (uma conjetura demonstrada). Porém, no processo de construção da demonstração, podemos ter dificuldades de construir argumentos e assim, precisamos reinterpretar como mostra o ciclo II. O terceiro ciclo é aquele em que, a partir das dificuldades, temos que reformular a conjetura.

Ainda segundo Gravina (2001), no processo de demonstração temos raciocínios de natureza dedutiva e visual, manipulando desenhos inseridos num quadro conceitual bem definido. Trata-se da geometria concebida como modelo teórico do mundo físico. Esse modelo é constituído a partir de teoremas e suas demonstrações. A autora também ressalta que o propósito de uma demonstração está além de simplesmente garantir a veracidade de uma propriedade matemática. Neste sentido destaca, como diferentes propósitos: a) ser uma *explicação* quando a demonstração esclarece por que uma certa propriedade (óbvia) é verdadeira. b) ser um *convencimento* quando ela trata-se de garantir a veracidade de uma propriedade que não é óbvia. c) ser uma *descoberta:* quando o processo de demonstração faz emergir novas propriedades. d) ser uma *sistematização:* quando ela organiza os resultados obtidos.

Isto explica porque, de forma bastante recorrente, os matemáticos buscam novas demonstrações para teoremas que já foram demonstrados. No geral, eles estão buscando as demonstrações que explicam, com maior evidência, o porquê da veracidade do teorema. E mais, quanto mais simples a demonstração, mais transparente se torna o entendimento. Neste sentido, é interessante registrar o que nos diz Halmos (apud Gravina, 2001, p.70, grifo do autor) sobre o teorema das quatro cores:

> *(...) algum dia, talvez daqui a seis meses, talvez daqui a seis anos, alguém vai produzir uma demonstração, em sessenta páginas, para o teorema das quatro cores (...) Imediatamente depois disto, talvez em seis meses ou quem sabe em sessenta anos, alguém vai produzir uma demonstração em quatro páginas, baseada em conceitos que, com o passar do tempo, foram desenvolvidos, estudados, entendidos. O resultado será inserido na grandiosa, gloriosa, arquitetural estrutura da matemática. Eficiência não é tão importante, o que vale é o entendimento.*

O “teorema das quatro cores” diz que, para colorir um gráfico planar, bastam quatro cores. Foi demonstrado por Appel e Haken, em 1976. A demonstração utiliza processo exaustivo de coloração de certos subconjuntos de gráficos planares, envolvendo computações além de qualquer capacidade humana. Porém, esta demonstração utiliza resultados obtidos em computador, sendo motivo de polêmica na comunidade matemática.

A discussão em torno da demonstração matemática gera polêmica e controvérsia, principalmente, no que diz respeito sobre o que se permite ou não em uma demonstração.

> A tese do intuicionismo é que a matemática tem de ser desenvolvida apenas por métodos construtivos finitos sobre a sequência dos números naturais, dada intutitivamente. [...] A base última da matemática jaz sobre uma intuição primitiva, aliada, sem dúvida, ao nosso senso temporal de antes e depois, que nos permite conceber um objeto, depois mais um, depois outro mais e assim por diante indefinidamente (EVES, 2011, p.679).

Acerca das demonstrações, os intuicionistas afirmam que a prova deve ser construtível em um número finito de passos; não basta mostrar que a suposição da não existência acarreta uma contradição. Neste sentido, os intuicionistas não admitem demonstrações por contraposição nem por absurdo, apenas aceitam a demonstração direta.

O processo de construção de uma demonstração, por vezes, torna-se tão complexo, que o próprio matemático não visualiza erros de deduções em seu trabalho. Interessantes exemplos são algumas tentativas de demonstração da famosa conjetura conhecida como *Último Teorema de Fermat*, que foi enunciada por Fermat na margem de seu exemplar da Aritmética de Diofanto. Conforme a literatura, Fermat escreveu na margem do livro que havia encontrado a demonstração para a conjetura: *Não existem inteiros positivos x, y, z, n, onde n>2, de modo que* $x^n + y^n = z^n$. Então Fermat escreve nas margens do livro que não foi possível escrever a demonstração, pois a margem era estreita demais. Depois deste fato, muitos brilhantes matemáticos empenharam seu talento para solucionar o problema (EVES, 2011).

De acordo com Eves (2011, p.392), “o último teorema de Fermat ganhou distinção de ser o problema matemático com maior número de demonstrações incorretas publicadas”. Ainda conforme o autor, em 1995, a demonstração correta foi publicada pelo matemático inglês Andrew Willes (1953-), ficando o *Último Teorema de Fermat* realmente provado como um teorema.

No contexto da educação escolar, a questão sobre a pertinência ou não de uma demonstração, nesses termos não se apresenta. Isto porque a geometria escolar trata de teoremas e demonstrações com fundamentos bem estabelecidos. E aluno, ao produzir uma demonstração errada ou incompleta, tem a chance de reformulá-la com a orientação do professor. E mais, em sala de aula é interessante abordar tanto a geometria empírica quanto a geometria dedutiva, dependendo do nível de ensino em que estamos trabalhando. Segundo Gravina (2001), o importante é avançar na natureza do conhecimento em geometria – o conhecimento que até então era empírico, adquirido pela experiência com o mundo físico, passa para um estágio em que se deve utilizar pensamento lógico-dedutivo, expresso por uma demonstração matemática.

Sem dúvida, em uma demonstração o texto deve estar escrito em linguagem clara, precisa e apresentando sequência de encadeamentos lógicos (todos verídicos). Salientamos que a formalização de uma demonstração deve ser apropriada a cada nível de ensino, principalmente do que diz respeito à linguagem. Uma linguagem com formalização excessiva torna-se, certamente, de difícil compreensão para os alunos da escola básica.

O termo “argumentação” vem sendo utilizado para colocar em relevância o processo em que o aluno verifica a veracidade de um teorema, ou ainda, em que explica o porquê de um fato matemático. Mesmo não existindo um consenso sobre tais termos – argumentação e demonstração – acreditamos que a argumentação é muito mais apropriada para o escopo pedagógico do que a demonstração. Pensamos que, na argumentação, para fins didáticos, prevalece a ideia de propiciar entendimento de fatos matemáticos ao aluno. Essa é diferente da idéia (demonstração) de provar ou confirmar uma veracidade matemática, justificando uma teoria.

Pensamos nessa distinção – entre argumentação e demonstração – justamente devido ao aspecto, abordado anteriormente, da linguagem do aluno e, ainda, sobre os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem. Outro fato interessante é que, por vezes, o aluno diante de uma demonstração, pode se sentir incapaz de produzir uma redação complexa e abstrata. Neste sentido, é importante adequar a linguagem e abordar fatos compreensíveis aos alunos. Assim, com uma redação mais informal, acreditamos que o aluno possa se sentir capaz de entender tais fatos e de se aventurar, produzindo sua própria argumentação, com redação característica de sua linguagem. Enfim, acreditamos nesta ideia sobre a argumentação para fins didáticos, pois acreditamos que o mais importante é a natureza do pensamento geométrico e o processo de refletir com argumentos dedutivos.

Na próxima seção vamos tratar de demonstração e argumentação no processo de aprendizagem da geometria escolar.

2.2 O processo de aprendizagem da geometria

Um autor que se preocupa com o ensino da demonstração na escola é Fetissov (1994). Em sua obra, fala que os alunos não conseguem compreender por que se faz necessária a demonstração de uma verdade em geometria se ela pode ser comprovada de forma empírica, através da observação no desenho. Neste sentido, Fetissov discute esse tema – a demonstração na escola – respondendo a quatro perguntas: a) *O que é uma demonstração?* b) *As demonstrações são necessárias para quê?* c) *Como deve ser uma demonstração?* d) *O que se pode admitir em geometria sem demonstração?* Conhecer as respostas às perguntas nos ajuda nas decisões a serem tomadas quando se quer trabalhar com demonstrações na escola.

Em relação à primeira pergunta, podemos dizer que uma demonstração se constitui no enunciado de argumentos que possibilitam uma dedução lógica, chegando à conclusão da argumentação.

Na matemática, em geral, o objetivo de uma demonstração é mostrar que um fato é verdadeiro, evidenciado de inúmeros testes e tentativas. Em geometria, nos valemos, muitas vezes, da nossa própria experiência com o mundo físico, referente a formas e tamanhos, para chegar à natureza da demonstração. Esse método de experiência e observação se chama *indutivo*. Ainda, podemos dizer que uma demonstração em geometria é uma sequência de raciocínios apoiados em verdades geométricas já demonstradas, estabelecendo a veracidade de um fato geométrico.

À segunda pergunta, *"As demonstrações são necessárias para quê?"*, podemos responder com o *princípio da razão suficiente*, que, basicamente, propõe que toda afirmação que fazemos tem fundamento (FETISSOV, 1994, p.23). Segundo Fetissov, muitos dos argumentos podem ser apresentados com desenhos, sem a necessidade da palavra escrita. Ainda exemplifica que, no livro *Lilavati*, do matemático Bhaskara (século XII), o teorema de Pitágoras vem ilustrado apenas com os desenhos da Figura 2.2.1 (tratamos desta demonstração na seção anterior em detalhes).

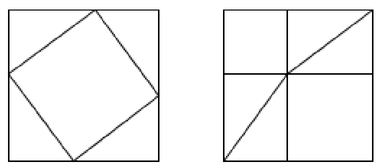


Figura 2.2.1: Teorema de Pitágoras – apenas figura
Fonte: Fetissov (1994)

Podemos questionar se neste caso houve uma demonstração. Fetissov (1994) nos esclarece que sim, pois, se o leitor se restringir a simplesmente olhar o desenho, sem raciocinar, é pouco provável que possa chegar a uma conclusão determinada. Assim, o leitor deve compreende que tem diante de si, desenhados, dois quadrados congruentes e que, por isso, possuem áreas iguais. Vimos que essa demonstração não apresenta um convencimento explícito, porém o leitor pode elaborar uma argumentação analisando a figura.

Evidentemente, para chegar a esse raciocínio o leitor precisa conhecer o teorema em questão e ter familiaridade com o problema. Todavia existem demonstrações mais complexas, para as quais há necessidade de texto escrito ou simbologia matemática, pois os argumentos são tantos que fica difícil ordená-los em um desenho geométrico.

Ainda em Fetissov (1994), encontramos que cada teorema geométrico se relaciona com teoremas demonstrados anteriormente. Esses últimos, com teoremas demonstrados antes ainda, e assim sucessivamente. Assim, o processo segue até atingir as proposições fundamentais e os axiomas que constituem a base da geometria plana.

Nesta direção, podemos afirmar, conforme Fetissov (1994), que: a) Em geometria só se admite, sem demonstração, um pequeno número de verdades fundamentais que, podemos chamar de axiomas. b) Para uma demonstração bem estruturada temos que nos basear em proposições já estabelecidas. c) por meio das demonstrações, podem-se dispor as verdades geométricas num sistema harmonioso de conhecimentos científicos.

Então, com estes subsídios, podemos perceber que as demonstrações são úteis para qualificar e atestar verdades aceitas por meio de encadeamentos dedutivos que partem de uma base denominada axiomas.

A resposta à terceira pergunta a ser respondida, "*Como deve ser uma demonstração*?", encontramos em Fetissov (1994), quando diz que toda demonstração deve ser baseada em proposições verdadeiras, sendo que estas devem ter sido anteriormente demonstradas. Assim, não necessariamente uma demonstração precisa partir de axiomas, depende da complexidade do que se quer mostrar. Ainda, o autor nos diz que todas as conclusões de uma demonstração devem estar corretamente estruturadas e que não podemos perder de vista o objetivo da demonstração, cuidando para não substituir esse objetivo por outro qualquer.

Finalmente, a última pergunta: *"O que se pode admitir em geometria sem demonstração?"*. Ainda, que afirmações geométricas podemos aceitar sem demonstração? Para responder a essa pergunta, nos apoiaremos na ideia de que uma demonstração deve ser construída através de uma sequência estruturada de verdades sem ambiguidades. Como vimos anteriormente, uma demonstração deve estar calcada em algum fato anteriormente demonstrado. Assim, precisamos estabelecer um fato primitivo que será a base de toda construção, porém, se esse fato pode ser demonstrado, significa que existe um outro fato antes dele, e assim por diante.

O ponto central desta discussão é estabelecer o começo, ou seja, estabelecer um fato livre de discussões e ambiguidades. A verdade desse fato deve ser um consenso entre todos. Esses fatos primitivos, mencionados anteriormente, são denominados pelos matemáticos de *axiomas*. Assim, um axioma é uma verdade matemática que não precisa de demonstração, pois sua verdade está em sua natureza. A partir de axiomas, podemos construir uma dedução lógica com o objetivo de mostrar que algo seja verdadeiro, chegando à demonstração.

No processo de aprendizagem da geometria, uma dificuldade marcante diz respeito à interpretação do desenho que acompanha um teorema e sua demonstração. Segundo Gravina (2001), é na articulação adequada de informações do desenho e informações nos enunciados que se constituem mentalmente os objetos geométricos. Para esclarecer essas dificuldades, trazemos a ideia de *conceito figural* , introduzida por Fischbein (1993). O *conceito figural* tem dois componentes: o *componente conceitual* e o *componente figural*. O *componente* *conceitual* trata do formalismo em linguagem natural e simbólica de um enunciado. O *componente figural* é de natureza visual (forma, posição, tamanho) e se expressa via desenho.

Para ilustrar bem essa dificuldade quanto à união adequada dos componentes *conceitual* e *figural*, trazemos um clássico exemplo presente na literatura (GRAVINA, 2001). Os alunos tomam como propriedade do segmento altura de um triângulo o "ser um segmento no interior do triângulo" (Ibid., p.61), ou ainda, que o paralelogramo é um "quadrilátero com dois ângulos agudos e dois obtusos" (Ibid., p.61). O correto, por definição, "a altura relativa a um dos lados de um triângulo é o segmento AB, onde A é vértice oposto ao lado em questão e B é o pé da reta perpendicular que intercepta o lado e passa por A" (Ibid., p.61); e "um paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos paralelos (Ibid., p.61)".

Em trabalho que trata da análise de erros em demonstrações de geometria plana, Cury (1994) apresenta erros recorrentes que são cometidos pelos alunos: a) uso inadequado de símbolos e convenções de linguagem escrita; b) informações tomadas de forma equivocada na instância particular de desenho ou informações corretas, mas de caráter puramente perceptivo; c) errôneo uso de conceitos geométricos; d) conclusões de argumentação tomadas em raciocínios inaceitáveis; e) uso inadequado de hipóteses que garantem a aplicação de teoremas já conhecidos; f) uso da própria tese, objeto de demonstração ou de propriedades dela decorrentes.

Ilustramos estes comportamentos com o problema da figura a seguir, mencionado por Gravina (2001), que exige a demonstração de uma congruência de ângulos, partindo da uma congruência de segmentos.

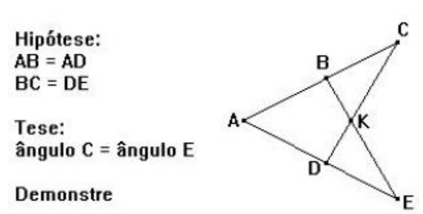


Figura 2.2.2: Problema que exige demonstração
Fonte: GRAVINA, M. A.

Para entendermos os aspectos mencionados acima, encontramos, na tese de Gravina (2001), três exemplos que os ilustram. Esses exemplos são de atividades de alunos sujeitos de sua pesquisa. O aluno escreve: *"K forma dois triângulos BCK e DEK"*. Percebemos, com esse exemplo, que o aluno não domina a linguagem geométrica, sendo que um ponto não pode formar dois triângulos. Um segundo aluno escreve: *"Traçando o segmento CE dá para fazer um triângulo equilátero"*. Facilmente, verificamos que não podemos afirmar que os segmentos possuem a mesma medida. E um terceiro aluno escreve: *"eu estou pensando agora se o ponto médio B vai me servir"*. Neste exemplo o aluno considera que o ponto *B* é médio por estar entre os pontos *A* e *C*.

Os exemplos mencionados nos ajudam a entender que alguns erros de definição ou linguagem em geometria podem ser comuns para alunos que ainda não estão familiarizados com tais aspectos. Também temos os casos em que os alunos compreendem e dominam os conceitos, porém utilizam uma linguagem inadequada para expressar suas idéias.

Para o ensino e aprendizagem em geometria acontecer, precisamos estabelecer uma linguagem apropriada para descrever objetos geométricos, símbolos que representem esses objetos e desenhos. Para entendermos estes aspectos, abordaremos os pressupostos teóricos da Teoria de Registros de Representações Semióticas, de Raymond Duval (2003). Esse estudo se faz importante por permitir uma compreensão desses tipos de registros e a combinação deles no ensino e aprendizagem. Os registros a que nos referimos, para embasar esta dissertação, são os registros de representação em relação à geometria.

A Teoria de Registros de Representações Semióticas parte do pressuposto de que o professor se torna o mediador e o aluno um sujeito ativo, disposto a construir seus saberes. No processo de aprendizagem de geometria, o entendimento da linguagem possibilita uma melhor interação com o professor, possibilitando uma maior compreensão dos saberes. Além da linguagem geométrica, o aluno precisa entender as informações que constam nos desenhos, por meio da visualização geométrica e análise dos objetos geométricos. Assim, a linguagem natural, as figuras geométricas e o registro algébrico são representações semióticas de geometria. Consideramos que definir objetos matemáticos com letras, por exemplo, reta *r*, não é registro algébrico, e sim, linguagem natural. Assim, interpretamos como registro algébrico o desenvolvimento da resolução de uma equação, por exemplo.

O ensino da matemática não deve ter como pretensão a formação de futuros matemáticos nem tampouco oferecer aos alunos conhecimentos que lhes serão úteis somente muito mais tarde. Nesta direção, pensamos que um dos objetivos do ensino da matemática é contribuir para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização.

De acordo com Duval (2003, p.12, grifos do autor), devemos entender a complexidade cognitiva do ensino de matemática, não somente analisando os erros dos alunos para obter essa compreensão, mas, sim, procurando "descrever o funcionamento cognitivo que possibilite ao aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino".

Para elucidar as ideias sobre a complexidade cognitiva, Duval (2003) propõe a seguinte pergunta: O que caracteriza a atividade matemática do ponto de vista cognitivo? Conforme o autor, a compreensão do que seja matemática, e a causa dos bloqueios de compreensão que muitos alunos possuem, surgem dos conceitos matemáticos, por vezes, muito abstratos, e também pelas complexidades epistemológicas (podem ser explicadas através da história da matemática, no contexto de suas descobertas). Como parte de resposta a sua pergunta, Duval salienta: a) a importância primordial das representações semióticas; b) a grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática. Diz ele:

> É suficiente observar a história do desenvolvimento da matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático. Ora, a importância das representações semióticas se deve a duas razões fundamentais. Primeiramente, há o fato de que as possibilidades de tratamento matemático – por exemplo, as operações de cálculo – dependem do sistema de representação utilizado. Por exemplo, o sistema de numeração decimal de posição oferece mais possibilidades que os sistemas grego ou romano de numeração e, no entanto, a aquisição desse sistema de numeração pelos alunos não é simples (DUVAL, 2003, p. 13).

Sobre a variedade de representações semióticas, Duval diz:

> Além dos sistemas de numeração, existem as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural, mesmo se ela é utilizada de outra maneira que não a da linguagem corrente. Para designar os diferentes tipos de representações semióticas utilizados em matemática, falaremos [...] de "registro" de representação (DUVAL, 2003, p.14).

Alguns exemplos de representações podem ser encontrados na geometria, quando falamos do conceito de triângulo – uma representação de um conceito geométrico – , que tem, por registro gráfico, a figura com três lados. Ainda, podemos entender outro registro gráfico do triângulo – um desenho onde se encontram três pontos não colineares, ou ainda, três retas que se interceptam entre si. Assim, podemos ter dois registros distintos para a representação do triângulo – o registro gráfico e o discursivo. Conforme Duval (2003, p.14), "A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação".

Os registros podem sofrer dois tipos de transformação: tratamento e conversão. O *tratamento* é a transformação dentro de um mesmo sistema. Segundo Duval (2003), é somente este tipo de transformação que chama a atenção, porque ele corresponde a procedimentos de *justificação*. Ainda conforme o autor, tenta-se, algumas vezes procurar o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender. A *conversão* é a transformação que gera a mudança de sistema e este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não congruência. Isso se traduz pelo fato de os alunos poderem não reconhecer o mesmo objeto através de duas representações diferentes.

> Os *tratamentos* são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação (...); completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria. As *conversões* são transformações de representações que consistem em mudar de registro, conservando os mesmo objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica (DUVAL, 2003, p. 16, grifo nosso).

Encontramos, na teoria de Duval, um olhar para os processos cognitivos que permeiam a aprendizagem da matemática. Para compreendermos o processo do desenvolvimento global da geometria, temos o modelo apresentado por Van Hiele (GRAVINA, 2001). Nesse modelo, temos cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico: **Nível zero** (o da *visualização*): as crianças classificam e nomeiam formas geométricas, ao abstrair, dos objetos, aspectos de natureza ainda perceptiva; reconhecem quadrados, retângulos, losangos, mas sem a eles atribuir propriedades. **Nível um (**o da *análise*): propriedades são depreendidas das formas geométricas e com elas se identificam, mas não são estabelecidas relações inferenciais entre as propriedades, e definições ainda não se apresentam; por exemplo, através de manipulações de figuras (recortes, dobraduras, medidas), um retângulo passa a ser entendido como uma forma que tem quatro ângulos retos, diagonais congruentes e lados opostos congruentes, mas ainda não se fazem presentes relações do tipo “se quatro ângulos retos, então necessariamente lados opostos congruentes”. **Nível dois** (o da *dedução informal*): relações de implicação entre propriedades começam a ser estabelecidas, mas ainda desprovidas de argumentos dedutivos que expliquem o porquê destas relações; nesse nível, o aluno passa a entender o “definir objetos geométricos” e a hierarquizar propriedades, mas ainda não possui habilidades para produzir suas próprias demonstrações. **Nível três** (o da *dedução formal*): constitui-se o pensamento geométrico de natureza dedutiva, quando, então, axiomas e teoremas se integram no modelo teórico que forma a geometria euclidiana; é nesse nível que se dá o entendimento do significado de uma demonstração e que se torna possível a produção de demonstrações. **Nível quatro** (o do *rigor*): culminância do pensamento geométrico – quando passa a transitar por teorias axiomatizadas –, as geometrias não-euclidianas, que não mais dependem de experiências e intuições sobre o mundo sensível imediato.

Considerando os níveis de Van Hiele e os registros de que fala Duval, podemos relacionar essas duas teorias uma com a outra, sendo que os registros em geometria vão se sofisticando à medida em que avançam nos níveis de Van Hiele. No *nível zero* – o da visualização – o aluno ainda não percebe propriedades, apenas utiliza o registro figural e o discursivo. Porém, o registro discursivo ainda não contém uma linguagem geométrica adequada. Diferente do nível um – o da análise –, onde o aluno já possui uma linguagem geométrica para mencionar propriedades.

Na escola, muito do trabalho feito com geometria é dentro dos níveis zero e um. Contudo, o nível dois, da dedução informal, também poderia ser contemplado. É importante se ter em mente que os alunos produzem diferentes tipos de argumentação e cabe ao professor avaliar a pertinência sob o ponto de vista do raciocínio lógico, deixando de lado a necessidade de uso de linguagem mais formal. Contudo, referente ao nível dois, pensamos que o professor deve conduzir o processo, pois, como dito anteriormente, pode ser impactante para o aluno deparar-se com a tarefa de dedução, assumindo uma postura de desistência, pois pode julgar a tarefa impossível de se realizar.

Especificamente quanto ao trabalho com demonstrações, assim como em Fetissov, temos em De Villiers (2001) a seguinte manifestação:

> Um dos problemas que encontramos para lidar com as provas é que, para provar uma propriedade ou um teorema, o aluno precisa reconhecer alguma necessidade para a prova. No entanto, na maioria dos casos, sobretudo em Geometria, ele percebe visualmente ou verifica que a propriedade é verdadeira através de um exemplo, e isto constitui um argumento satisfatório, ou mesmo uma prova (DE VILLIERS, 2001 apud VIEIRA, 2007, p.42).

Segundo o mesmo autor (DE VILLIERS, 2001), diferentes são as funções da demonstração a serem valorizadas na escola: a) *Verificação*: o aluno considera a afirmação e, para verificar se é verdadeira, faz testes, figuras ou gráficos, motivando a formulação de conjecturas. *b) Explicação*: tem por finalidade explicar a verdade da afirmação, visto que a verificação já atestou sua veracidade. *c) Sistematização*: organização dos vários resultados obtidos em um sistema de axiomas, visando que estes resultados serão utilizados em novas demonstrações. d) *Descoberta*: durante uma demonstração podem ocorrer descobertas de outros resultados que podem ser provados ou a descoberta de outra demonstração para um mesmo resultado. *e) Comunicação*: importante para comunicar o resultado a um colega, um professor, colocá-lo em um fórum de discussão ou publicar em algum periódico. *f) Desafio Intelectual*: a busca de uma demonstração pode se tornar um desafio ou uma motivação para não desistir de encontrar o resultado.

Quanto ao tipo de demonstração que pode ser aceita na escola, diferentes são as possibilidades. Balacheff (1987, apud GRAVINA, 2001) mapeou, em duas categorias, as provas produzidas por alunos: provas *pragmáticas* e provas *intelectuais*. As provas pragmáticas são de natureza concreta e realizadas a partir de saberes práticos, já as provas intelectuais exigem que o conhecimento seja colocado em reflexão ou debate. Assim, as provas pragmáticas são feitas pela verificação ou observação de casos particulares (empíricos). As provas intelectuais são feitas a partir de encadeamentos lógicos com base em deduções, essas provenientes de propriedades matemáticas. Podemos dizer que, primeiramente, desenvolvemos as provas pragmáticas para, depois, chegarmos ao estágio das provas intelectuais.

O trabalho de Hajnal (2007) retoma os tipos de validações que Balacheff identificou na produção das provas *pragmáticas* e das provas *intelectuais*: a) Empirismo ingênuo: a validação é feita pela verificação ou observação de poucos casos; b) Experiência crucial: validação por meio de um exemplo; c) Exemplo genérico: já há explicitação das razões que validam uma propriedade, embora fazendo uso de um caso particular; d) Experiência mental: a validação ocorre através de deduções lógicas baseadas em propriedades e não mais através de situações particulares.

No trabalho, o autor também apresenta exemplos ilustrativos, coletados na sua pesquisa no âmbito do projeto AProvaME[2]. Uma questão proposta aos os alunos foi: “Amanda, Dario, Hélio, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira: Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°” (HAJNAL, 2007, pg. 22). A seguir temos alguns exemplos de produções dos alunos (HAJNAL, 2007, pg. 23):

---

[2] O projeto AProvaME – Argumentação e Prova na Matemática escolar (PUC-SP, coordenado pela profª Drª. Siobhan Victoria Healy) – pretende investigar a problemática do ensino e da aprendizagem da prova, compreendendo dois enfoques: o primeiro tem como foco investigar as possibilidades oferecidas pelos ambientes computacionais; o segundo centra-se no professor, pois a integração de uma nova abordagem na sala de aula somente é possível mediante um processo de adaptação do professor (HAJNAL, 2007, p. 16).

Exemplo Empirismo Ingênuo:

Resposta de Dario

Eu medi cuidadosamente os ângulos de todos os tipos de triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180º.

Então Dario diz que a afirmação é verdadeira.

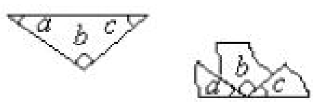
Figura 2.2.3: Exemplo Empirismo Ingênuo

Fontes: HAJNAL - Projeto AProvaMe

Exemplo Experiência Crucial:

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180º.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.

Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira

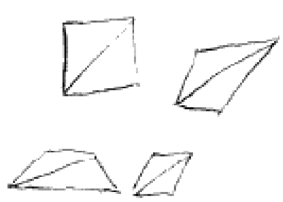
Figura 2.2.4: Exemplo Experiência Crucial

Fontes: HAJNAL - Projeto AProvaMe

Exemplo Genérico:

Justifique sua resposta:

O triângulo é a metade de um quadrilátero portanto a soma dos seus ângulos internos será a metade da soma dos angulos interno do quadrilátero



$\frac{360°}{2} = 180°$

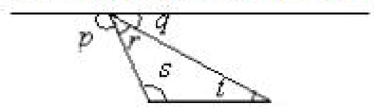
Figura 2.2.5: Exemplo Genérico

Fontes: HAJNAL - Projeto AProvaMe

Exemplo Experiência Mental:

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:



Afirmações	Justificativa
$p = s$..........................	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$q = t$..........................	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180^o$..........	Ângulos numa linha reta.
$\therefore s + t + r = 180^o$	

Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira

Figura 2.2.6: Exemplo Experiência Mental

Fontes: HAJNAL - Projeto AprovaMe

Neste capítulo, tratamos da natureza da geometria e do processo de ensino e aprendizagem. Vimos que o trabalho com argumentação dedutiva exige diferentes formas de raciocínio e diferentes habilidades cognitivas. Os níveis de desenvolvimento de pensamento geométrico proposto por Van Hiele são fundamentais para entendermos como se dá o processo de construção de conhecimento em geometria. A teoria de Duval nos ajuda no entendimento das dificuldades de aprendizagem relacionadas com os diferentes tipos de registros de representação que são usados na geometria. Para compreendermos a função da argumentação, nos apoiamos no trabalho de Balacheff (1987, apud GRAVINA, 2001)[3]. Considerando este referencial teórico, vemos que no processo de aprendizagem da geometria um dos aspectos centrais é a passagem do empírico para o dedutivo. Assim, decidimos trabalhar com instrumentos virtuais de desenho, de início com manipulações empíricas e ao final com a argumentação dedutiva que explica o funcionamento dos instrumentos. No próximo capítulo, apresentaremos os instrumentos virtuais de desenho, parte do material didático a ser utilizado na experiência.

[3] Parte dos aspectos teóricos tratados neste capítulo pretendem, sobretudo, mostrar a complexidade do ensino e aprendizagem da demonstração. Não é nossa pretensão levar em consideração todos esses aspectos no momento de análise da experiência.

3 INSTRUMENTOS VIRTUAIS DE DESENHO E A FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Tendo por objetivo maior trabalhar com argumentação na escola, optamos por produzir um material didático que trata de instrumentos virtuais de desenho. Os instrumentos que abordaremos são os que realizam as transformações de Reflexão, Rotação, Translação e Ampliação/Redução e eles forma construídos com o software *GeoGebra*. Um dos principais motivos para utilização destes instrumentos, em situação de sala de aula, está na possibilidade de manipulá-los dinamicamente e assim, através do movimento que se apresenta na tela do computador, são identificadas às transformações que realizam, bem como as propriedades que neles estão e que vão garantir o funcionamento observado.

Os instrumentos físicos foram idealizados no trabalho de construção de máquinas durante o século XV e XVI. Atualmente, existe um museu italiano chamado *Museo Universitário di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica*[4], da universidade *Universitá Degli Studi di Modena e Reggio Emilia*, que guarda muitos instrumentos de desenhos e também outras máquinas projetadas com elementos de geometria. Esse museu disponibiliza um *website* com fotos dos instrumentos e correspondentes descrições geométricas; para muitos dos instrumentos tem-se réplicas virtuais que podem ser manipuladas on-line.

Encontramos, nesse acervo virtual, referências de que, há tempos, o homem busca soluções práticas para facilitar seu dia a dia, inventando máquinas. Essas invenções começam a ter destaque desde os tempos da Grécia Antiga, com o aperfeiçoamento do pensamento geométrico e com o início da geometria dedutiva. As aplicações da matemática em máquinas, instrumentos de medições, navegação, no comércio, nas fortificações militares, no planejamento hidráulico, na arte (perspectiva), na resolução de problemas particulares (balísticos e movimentos locais) etc., mostram a importância social desta ciência quando aplicada a outras áreas. Outro ponto destacado nas apresentações do museu é quanto a importância do tratamento do movimento na geometria, pois é através da articulação de movimentos que a humanidade inventou muitas das máquinas que ajudaram/ajudam no desenvolvimento da sociedade.

---

[4] Disponível em: http://www.museo.unimo.it/theatrum/inizio.htm. Acesso em 14/02/2012.

O museu tem por interesse manter a história da geometria aplicada à mecânica. A engenhosidade presente nesses instrumentos desperta a curiosidade e pode instigar ao estudo da geometria. No que segue vamos nos concentrar em quatros dos instrumentos que estão disponibilizados no museu – são os instrumentos Refletor, Rotor, Translator e Pantógrafo.

3.1 O instrumento de reflexão

O primeiro instrumento de que trataremos tem a funcionalidade de realizar reflexões em relação a um eixo de simetria.

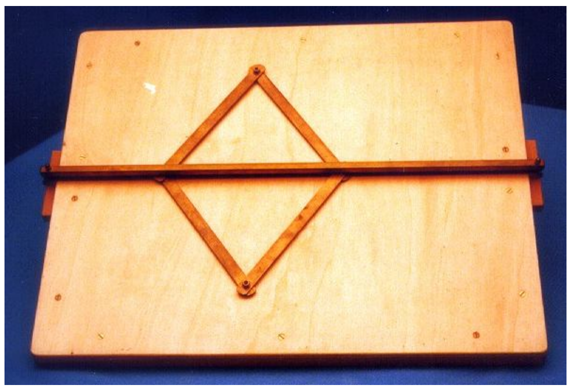


Figura 3.1.1: Instrumento articulado que realiza reflexões
Fonte: *Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica*

Esse instrumento, estruturado de forma simples, é composto por quatro varetas articuladas, formando um losango. Dois vértices opostos do losango deslizam em um trilho, conforme é manipulado o vértice *ponta seca* sobre a figura que vai ser replicada pela *ponta lápis*. O instrumento produz a reflexão da figura em relação a uma reta e é isto que vamos tratar de explicar no que segue.

3.1.1 Definição de reflexão

Em seu livro, Lima (1992) apresenta a definição matemática de reflexão em relação a uma reta, como podemos ver a seguir:

Definição de Reflexão: A reflexão em torno da reta r é a transformação T que faz corresponder a cada ponto S do plano o ponto L tal que:

a) a reta $\overleftrightarrow{SL}$ é perpendicular à reta r;

b) a distância do ponto S até a reta r é a mesma distância do ponto L até a reta.

O ponto *L* é chamado *simétrico* de *S* e escrevemos a notação *L=T(S)*. Na figura a seguir trazemos uma ilustração da reflexão do ponto *S* em relação à reta *r*, sendo *L* o ponto resultado da reflexão.

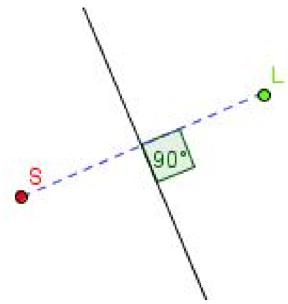


Figura 3.1.2: Reflexão de um ponto
Fonte: Autor

Na Figura 3.1.2 o ponto *L* é a reflexão do ponto *S* em relação à reta *r*, sendo que o segmento formando pelos pontos *S* e *L* é perpendicular à reta *r*, formando ângulos com medida de 90 graus. Os pontos *S* e *L* são equidistantes da reta *r*, ou seja, as distâncias entre esses pontos e a reta são as mesmas.

A partir da definição de Reflexão, vamos analisar o funcionamento do instrumento.

3.1.2 O funcionamento do instrumento

Nesta subseção, trataremos da funcionalidade do instrumento de reflexão, sendo que chamaremos o instrumento de *Refletor*. Iniciamos fazendo a construção do modelo virtual no *GeoGebra*, de acordo com o indicado na Figura 3.1.3:

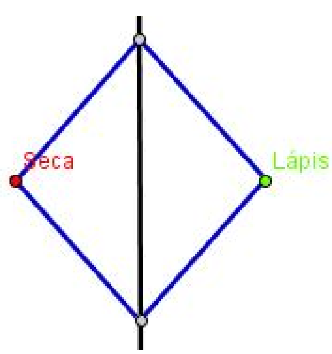


Figura 3.1.3: Modelagem do instrumento de Reflexão
Fonte: Autor

Esse instrumento é composto por quatro varetas de mesma medida, unidas por quatro pontos. As quatro varetas unidas pelos pontos formam um losango. Esse losango desliza sobre um trilho vertical e tem também o movimento de fechar e abrir do losango. Quando a ponta seca se aproxima do lápis, dizemos que está fechando e, quando a ponta seca se afasta do lápis, dizemos que está abrindo. O movimento sobre o trilho vertical pode ser tanto para cima quanto para baixo.

Este instrumento permite realizar contornos sobre figuras com a ponta seca, gerando uma reflexão dessa figura em torno do trilho vertical escrito pelo lápis. Esse mecanismo permite desenhos com traços livres, ou seja, há liberdade de movimentos. Na figura a seguir, temos exemplos de reflexões feitas com o Refletor.

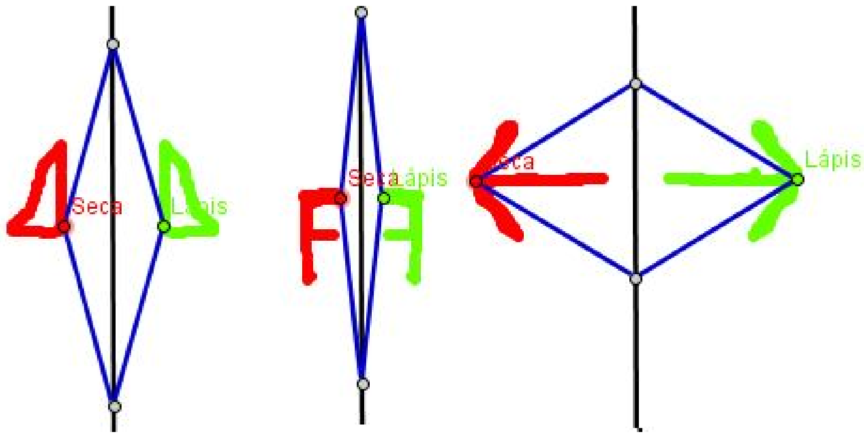


Figura 3.1.4: Exemplos de reflexões
Fonte: Autor

A Figura 3.1.4 ilustra o dinamismo do instrumento virtual. No início do movimento, ele está mais fechado no sentido vertical e no final do movimento está mais aberto. Observamos que, quanto mais fechado o instrumento se encontra, mais afastados estão seus pontos sobre o trilho vertical. Analogamente, quanto mais aberto se encontra o instrumento, mais próximos estão seus pontos sobre o trilho vertical.

Mesmo com esses variados movimentos, o instrumento mantém a característica de losango (quadrilátero com quatro lados congruentes); no instrumento físico isto é evidente, pois as varetas articuladas não mudam de tamanho. Sendo um losango suas diagonais tem a propriedade de se bissectarem perpendicularmente, conforme ilustra a Figura 3.1.5, e é esta propriedade que vai garantir a transformação de reflexão que é feita pelo Rotor, conforme figura a seguir:

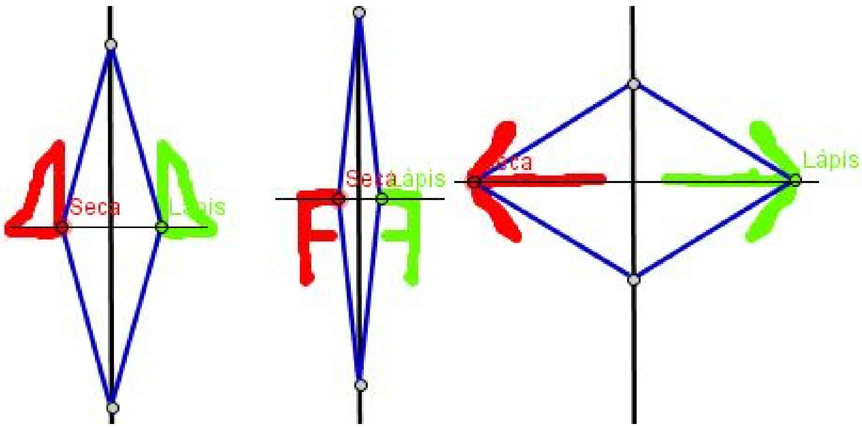


Figura 3.1.5: Bisecção das diagonais do losango
Fonte: Autor

Movimentando o instrumento, observamos que as diagonais permanecem perpendiculares e que a distância da ponta seca até o trilho é a mesma que a do lápis até o trilho. Estas duas características estão de acordo com a definição da reflexão em torno de uma reta e, ainda, são necessárias e suficientes. Portanto, o ponto *L* é reflexão de *S*, conforme a definição.

3.1.3 A construção do instrumento

A construção da modelagem do instrumento Refletor pode ser obtida no *GeoGebra* conforme protocolo de construção passo-a-passo. Este protocolo possui uma linguagem geométrica de fácil entendimento pelo leitor que possui algum conhecimento básico de geometria, como ponto, reta, circunferência, intersecção entre objetos geométricos e segmentos de retas. A seguir apresentamos o protocolo de construção do Refletor organizado em onze passos de construção.

1º passo: Construa uma reta vertical, denominada de reta ***r***.

2º passo: Construa um ponto fora da reta *r*, denominado de ponto ***S*** (será a ponta *Seca* do instrumento).

3º passo: Construa uma circunferência ***c1***, com centro no ponto *S* (escolha um raio qualquer, de forma que interseccione a reta *r*).

4º passo: Construa uma reta ***s*** perpendicular à reta *r*, passando pelo ponto *S*.

5º passo: Determine os dois pontos de intersecção entre a circunferência *c1* e a reta *r*, denominados de ponto ***A*** e ponto ***B***.

6º passo: Construa um segmento do ponto *S* até o ponto *A*, denominado de segmento ***a***.

7º passo: Construa uma circunferência ***c2***, com centro no ponto *A* e com raio de tamanho igual ao do segmento ***a***.

8º passo: Determine a intersecção da circunferência *c2* com a reta *s*, denominado de ponto ***L*** (note que há duas intersecções entre a circunferência *c2* e a reta *s*: o ponto *S* e o ponto *L*).

9º passo: Construa um segmento do ponto *A* até o ponto *L*, denominado de segmento ***b***.

10º passo: Construa um segmento do ponto *L* até o ponto *B*, denominado de segmento ***c***.

11º passo: Construa um segmento do ponto *S* até o ponto *B*, denominado de segmento ***d***.

Após a construção do instrumento, podemos editar os segmentos construídos nos últimos passos, aumentando a espessura e colorindo o segmento, destacando o instrumento na construção. A seguir, apresentamos figuras que ilustram a construção do instrumento.

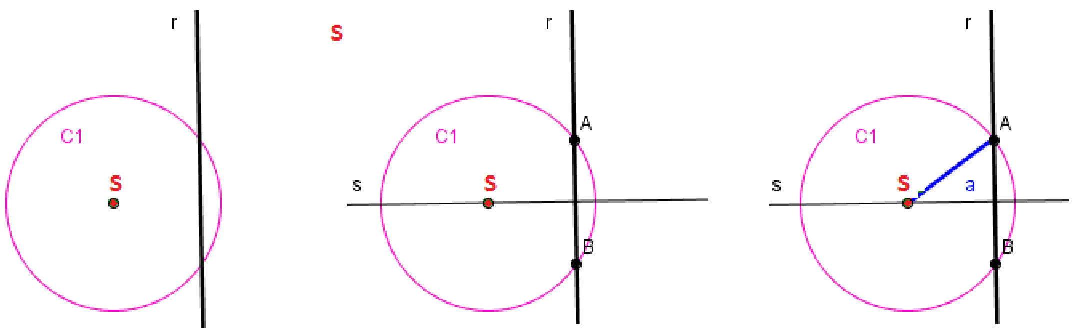


Figura 3.1.6: Construção do Refletor (1º ao 6º passo)
Fonte: Autor

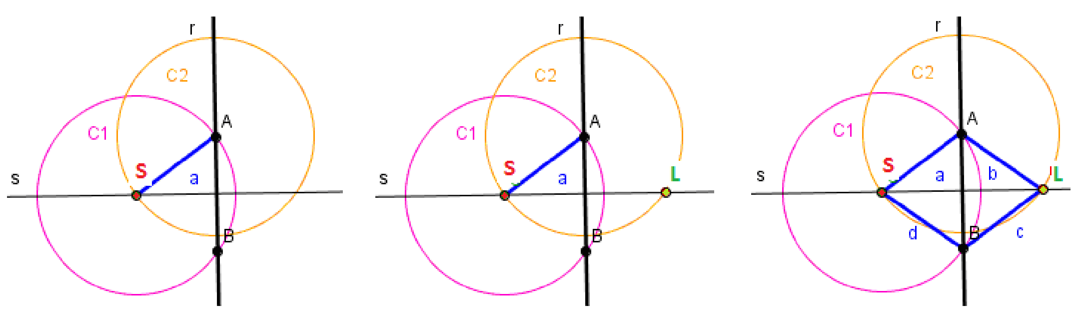


Figura 3.1.7: Construção do Refletor (7º ao 11º passo)
Fonte: Autor

Na Figura 3.1.8, temos a construção do instrumento com todos os objetos geométricos aparentes, porém, o instrumento de reflexão é composto, apenas, pela reta vertical r (trilho por onde desliza o instrumento) e o losango[5] azul (estrutura articulada do instrumento).

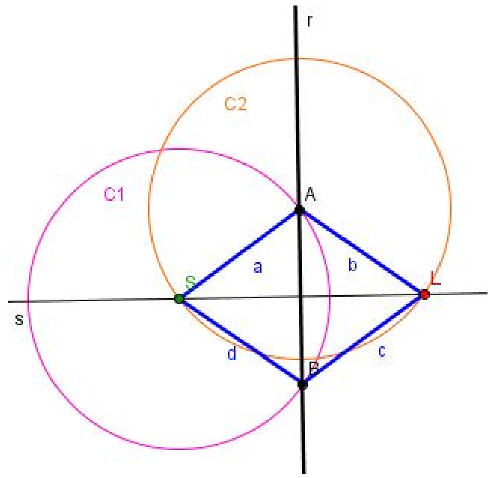


Figura 3.1.8: Construção do refletor
Fonte: Autor

3.1.4 A argumentação que explica a transformação do instrumento

Nesta subseção, mostraremos, matematicamente, que o instrumento, construído no *GeoGebra*, de fato, é um *Refletor* – ou seja, mostraremos que ele realiza a reflexão de uma figura em relação a uma reta. Como mencionado na subseção que trata do funcionamento do instrumento, o Refletor faz uma transformação de reflexão porque nele tem um losango articulado, que desliza em um trilho. Assim, precisamos mostrar que o quadrilátero azul da Figura 3.1.8 é, de fato, um losango.

Conforme a Figura 3.1.8, as circunferências ***c1*** e ***c2*** tem o mesmo raio, portanto as varetas $\overline{SA}$, $\overline{SB}$ e $\overline{AL}$, são congruentes. Na Figura 3.1.9 estão em destaque quatro triângulos Os triângulos assinalados como *1* e *2* são retângulos com hipotenusas congruentes entre si e tem um cateto em comum. Logo, pelo critério de congruência de triângulos retângulos, os triângulos *1* e *2* são congruentes. Então $\overline{SM}$ e $\overline{ML}$ são segmentos congruentes e assim M é ponto médio de $\overline{SL}$. Sendo M é ponto médio de $\overline{SL}$ podemos aplicar o critério *LAL*, aos triângulos *3* e 4 e então obtemos que suas hipotenusas são congruentes, ou seja $\overline{SB}$ e $\overline{BL}$ são congruentes.

[5] Losango é um quadrilátero com quatro lados congruentes entre si.

Assim , sendo $\overline{AL}$, $\overline{SA}$, $\overline{SB}$ e $\overline{BL}$ congruentes, temos que o quadrilátero $SALB$ é losango.

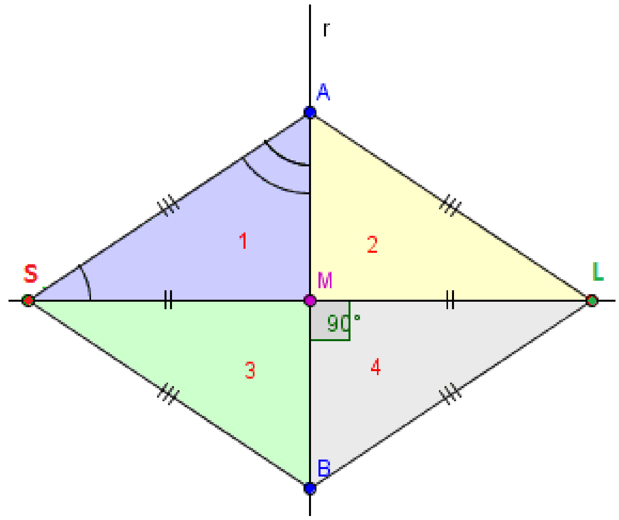


Figura 3.1.9: Argumentação da reflexão
Fonte: Autor

3.2 O instrumento de rotação

Nesta seção, falaremos sobre o instrumento que realiza rotações, chamado de Pantógrafo de Sylvester (1875). O instrumento físico está exposto no *Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica*[6].

Este instrumento é composto por varetas que são articuladas por parafuso, sendo fixado, também por um parafuso, em uma base de madeira. Como podemos ver na figura a seguir, o instrumento é composto por um paralelogramo articulado, no qual temos dois triângulos construídos sobre dois lados do paralelogramo.

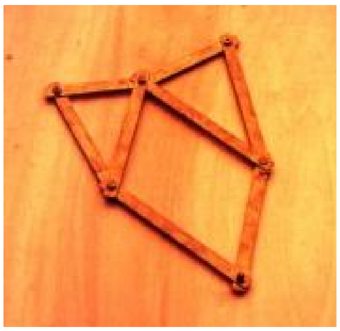


Figura 3.2.1: Pantógrafo de Sylvester
Fonte: *Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica*

[6] Link para o Museu italiano de instrumentação científica: http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/_00lab.htm, acesso em 14 de fevereiro de 2012.

Para entendermos a rotação realizada pelo instrumento, de início, precisamos entender a definição da transformação de rotação.

3.2.1 Definição de rotação

Para tratar o conceito matemático de rotação, nos apoiaremos na definição a seguir apresentada no livro de Lima (1992).

Definição de Rotação: Dado um ponto O e um ângulo de medida α, a rotação T é a transformação no plano que associa o ponto S ao ponto L, tal que:

a) Os segmentos $\overline{OS}$ e $\overline{OL}$ são congruentes;

b) o ângulo formado pelas semi-retas determinadas pelos $\overline{OS}$ e $\overline{OL}$ tem medida α.

Na figura a seguir temos a rotação (sentido horário) do ponto S em torno do ponto O sob um ângulo de medida α. Dizemos que o ponto L é o transformado de S e escrevemos $T(S) = L$.

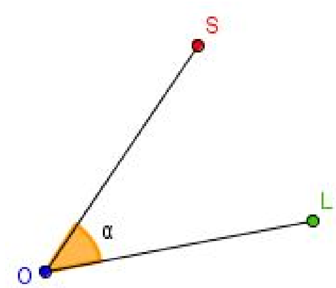


Figura 3.2.2: Rotação de um ponto
Fonte: Autor

A partir do entendimento do conceito de Rotação, poderemos tratar do funcionamento do instrumento de desenho articulado.

3.2.2 O funcionamento do instrumento

Para o entendimento de como o instrumento funciona, construímos uma modelagem geométrica do instrumento no *GeoGebra*. Porém, na modelagem, não é preciso colocar todas as varetas que compõem o instrumento físico, pois queremos construir o instrumento virtual o mais simples possível.

A Figura 3.2.3 mostra o instrumento virtual. A sua modelagem foi projetada utilizando-se dois conjuntos de três varetas, cada conjunto com varetas de mesmo tamanho.

Este instrumento é chamado de Pantógrafo de Sylvester, mas neste trabalho vamos chamá-lo de *Rotor*, para evitar futuras confusões com o Pantógrafo que realiza as ampliações.

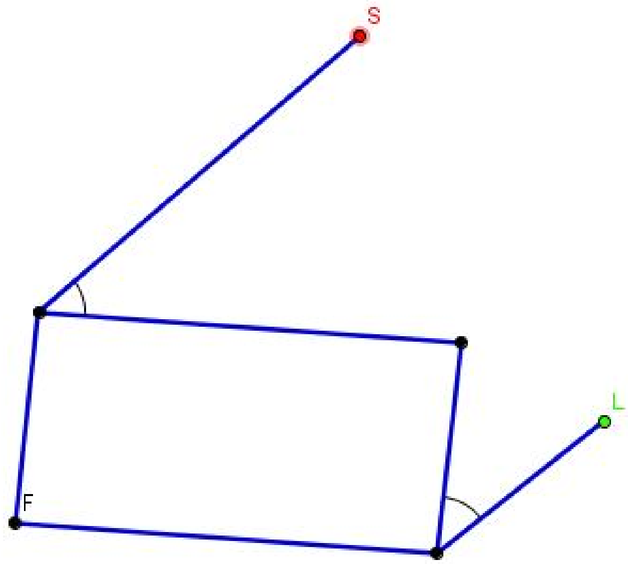


Figura 3.2.3: Construção do Rotor no GeoGebra

Fonte: Autor

A Figura 3.2.3 mostra que o Rotor é composto de seis varetas, sendo três varetas de uma medida k e três varetas de outra medida n. Quatro dessas varetas formam um paralelogramo; as outras duas varetas estão fixadas em dois vértices opostos do paralelogramo e junto com os lados do paralelogramo formam dois ângulos de mesma medida, destacados na figura. Veremos, mais adiante, que este é o ângulo de rotação da transformação produzida pelo instrumento. Na extremidade da vareta maior, temos o ponto S - a ponta *seca* do instrumento. O ponto L, localizado na extremidade da vareta menor, é a ponta *lápis* do instrumento. O instrumento físico tem como funcionalidade a reprodução de um desenho, sendo que esta reprodução será uma rotação da figura original. Porém, ao modelar o instrumento no *GeoGebra*, conseguimos outra funcionalidade: a possibilidade de realizar um desenho com a ponta S e outro desenho simultâneo com a ponta L.

A Figura 3.2.4 ilustra a rotação da figura vermelha, em três situações diferentes - o ponto F é fixo, o ponto S é manipulado para fazer o desenho vermelho e o ponto L é dependente do movimento de S e produz o desenho verde L que a rotação do desenho vermelho.

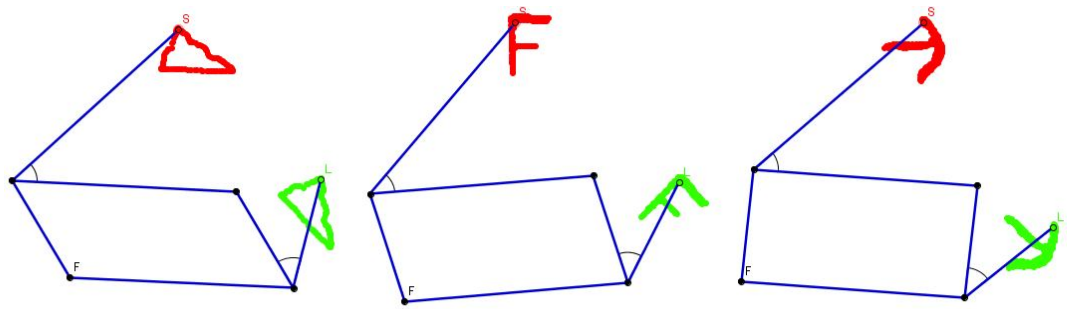


Figura 3.2.4: Exemplo de Rotações
Fonte: Autor

Quando tratamos sobre o funcionamento do instrumento, é interessante responder à pergunta: *Por que o instrumento realiza Rotações?* Para respondermos a essa pergunta, precisamos buscar elementos geométricos que expliquem a articulação do instrumento. A Figura 3.2.5 nos ajuda a elucidar esses elementos.

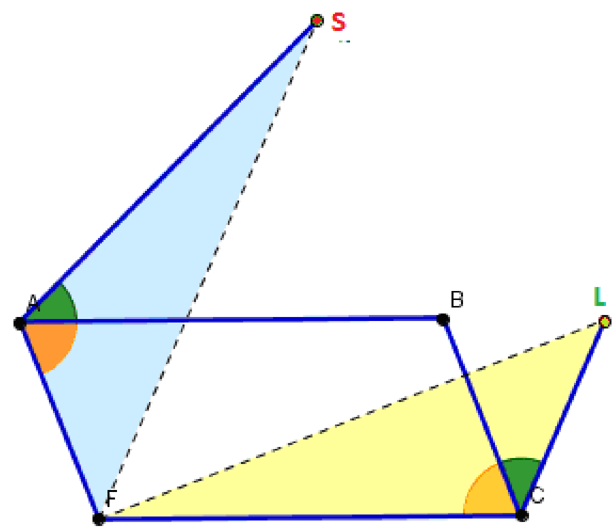


Figura 3.2.5: Explicação do funcionamento do Rotor
Fonte: Autor

O instrumento faz a rotação porque o triângulo azul e o triângulo amarelo são sempre congruentes (pelo critério *LAL)*, decorrendo que os ângulos em verde são congruentes ao ângulo determinado pelos segmentos tracejados *FS* e *FL*. Veremos a argumentação matemática deste fato, com detalhe, na seção 3.2.4.

3.2.3 A construção do instrumento

Nesta subseção, trataremos da construção da modelagem geométrica do Rotor no software *GeoGebra*. Para realizarmos a construção, planejamos um protocolo passo a passo, que apresentamos a seguir.

1º passo: Construa um ponto denominando-o de ***F*** (será o ponto fixo do instrumento).

2º passo: Construa o ponto ***S*** (será a ponta seca do instrumento).

3º passo: Construa uma circunferência **C1** com centro no ponto *F*.

*4º passo:*Construa uma circunferência **C2** com centro no ponto S.

*5º passo:*Construa o ponto ***A*** de intersecção entre as circunferências C1 e C2.

6º passo: Construa um segmento ***AS*** do ponto *A* ao ponto *S*.

7º passo: Construa um segmento **AF** do ponto *A* ao ponto *F*.

8º passo: Construa a rotação com centro em *A* do ponto *S*, em sentido horário, com ângulo de medida α em sentido horário, denominando de ponto ***B***.

9º passo: Construa um segmento ***AB*** do ponto *A* ao ponto *B*.

10º passo: Construa uma reta ***r*** paralela ao segmento *AF* passando pelo ponto *B*.

11º passo: Construa uma reta ***s*** paralela ao segmento *AB* passando pelo ponto *F*.

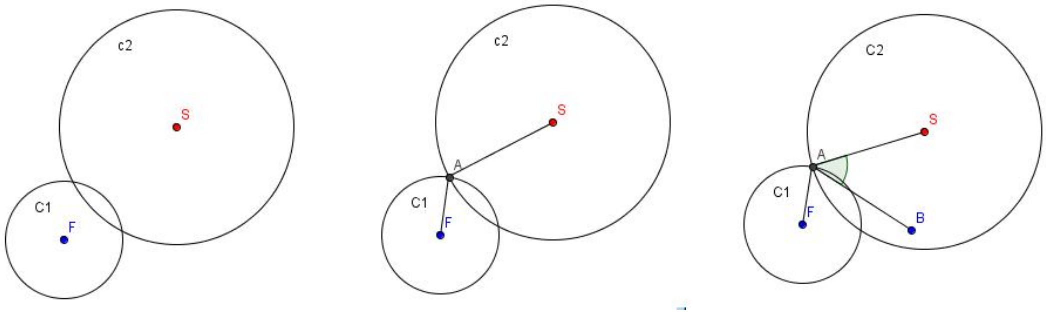
12º passo: Construa o ponto ***C*** de intersecção entre as retas *r* e *s*.

13º passo: Construa a rotação com centro em *C* do ponto *B*, em sentido horário, com ângulo de medida α, denominando de ponto ***L*** (será o Lápis do instrumento).

14º passo: Construa um segmento do ponto *C* ao ponto *L*; construa um segmento do ponto *B* ao ponto *C*; construa o segmento do ponto *F* ao ponto *C*.

Depois de terminada a construção do instrumento, podemos realçar as varetas do instrumento colorindo-as, bastando editar a cor dos segmentos que representam essas varetas. Também podemos editar a espessura das varetas e os tamanhos e cores dos pontos.

A seguir, apresentamos figuras que ilustram os passos de construção do Rotor.



1

Figura 3.2.6: Construção do Rotor (1º ao 9º passo)
Fonte: Autor

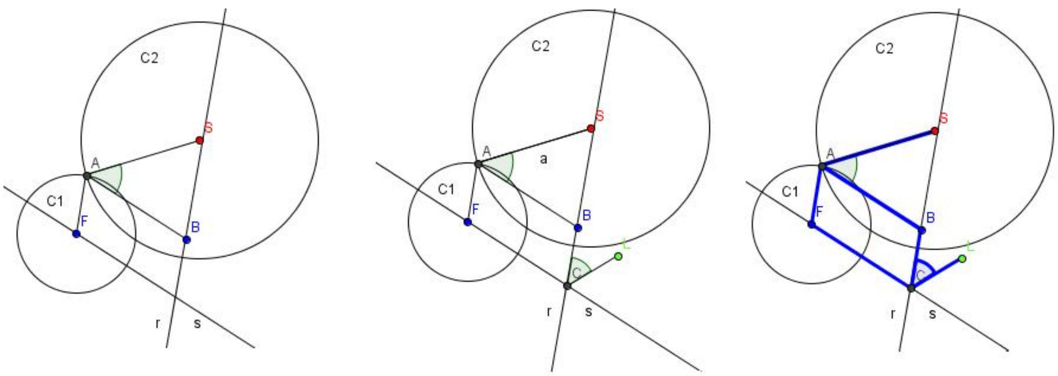


Figura 3.2.7: Construção do Rotor (9º ao 14º passo)
Fonte: Autor

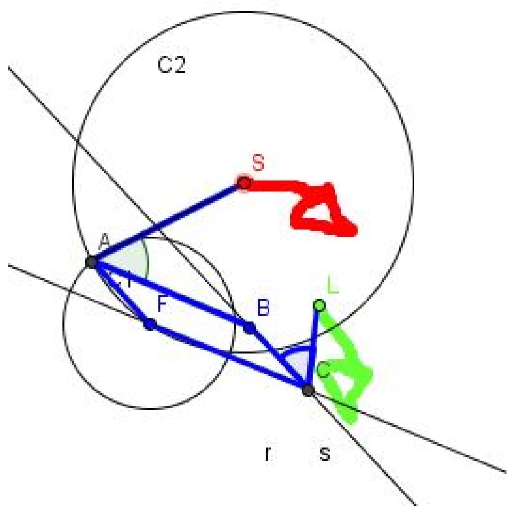


Figura 3.2.8: Testando o Rotor
Fonte: Autor

3.2.4 A argumentação que explica a transformação do instrumento

Nesta subseção, trataremos da argumentação dedutiva, que explica matematicamente porque o instrumento funciona. Essa argumentação atesta que o instrumento realiza Rotações e ela faz uso de propriedades básicas da geometria plana.

Para construirmos a argumentação dedutiva, nos apoiaremos em encadeamentos lógicos feitos sobre o esquema geométrico do instrumento, que apresentamos na Figura 3.2.9.

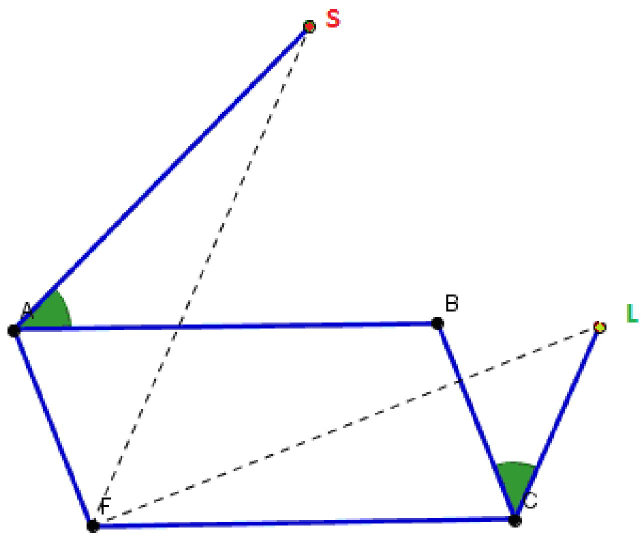


Figura 3.2.9: Esquema 1 da argumentação do Rotor
Fonte: Autor

Por construção, os ângulos $S\hat{A}B$ e $B\hat{C}L$, marcados em verde na Figura 3.2.10, são congruentes. Também por construção, os segmentos $\overline{AS}$, $\overline{AB}$ e $\overline{FC}$ são congruentes entre si, bem como os segmentos e $\overline{AF}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CL}$. Usando estes fatos vamos mostrar que os triângulos ASF e FLC são congruentes.

Da congruência dos segmentos, informada acima, temos que o quadrilátero $ABCF$ é um paralelogramo[7]. Então os ângulos opostos $S\hat{A}B$ e $B\hat{C}L$, marcados em laranja na Figura 3.2.10, são congruentes.

[7] Paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos paralelos. Mas outras são as propriedades equivalentes a esta e que usamos na argumentação: a) é um quadrilátero com lados opostos paralelos ou b) é um quadrilátero com ângulos opostos congruentes.

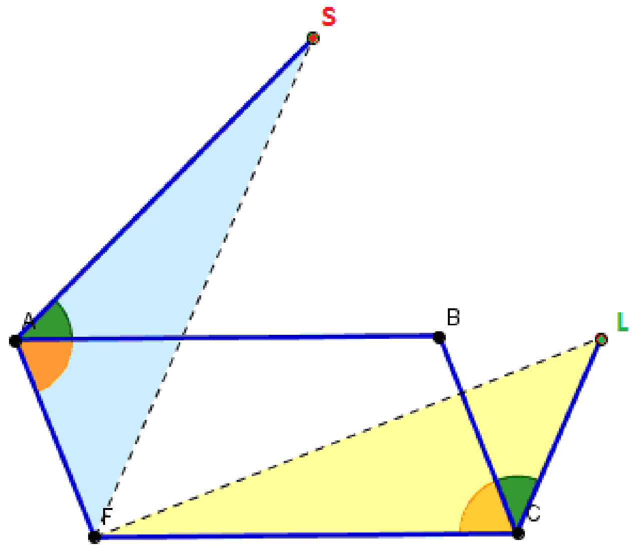


Figura 3.2.10: Esquema 2 da argumentação do Rotor
Fonte: Autor

Pelo critério de congruência de triângulos *Lado-Ângulo-Lado*, os triângulos *ASF* (azul) e *CFL* (amarelo) são congruentes. Assim, obtemos que os segmentos tracejados $\overline{FS}$ e $\overline{FL}$ são congruentes.

No que segue vamos mostrar que o ângulo $S\hat{F}L$ é congruente aos dois ângulos marcados em verde e portanto, junto com a congruência dos segmentos FS e FL temos as condições que garantem que o instrumento faz uma rotação.

Da congruência de triângulos estabelecida acima também temos a congruência dos os ângulos $A\hat{S}F$ e $L\hat{F}C$, marcados em rosa na Figura 3.2.11.

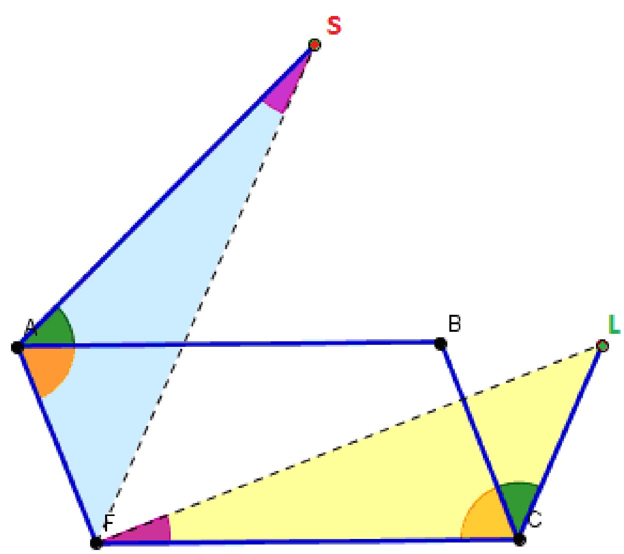


Figura 3.2.11: Esquema 3 da argumentação do Rotor
Fonte: Autor

Neste momento da argumentação, para facilitar o entendimento das ideias e a escrita, numeramos os ângulos, conforme indica a Figura 3.2.12.

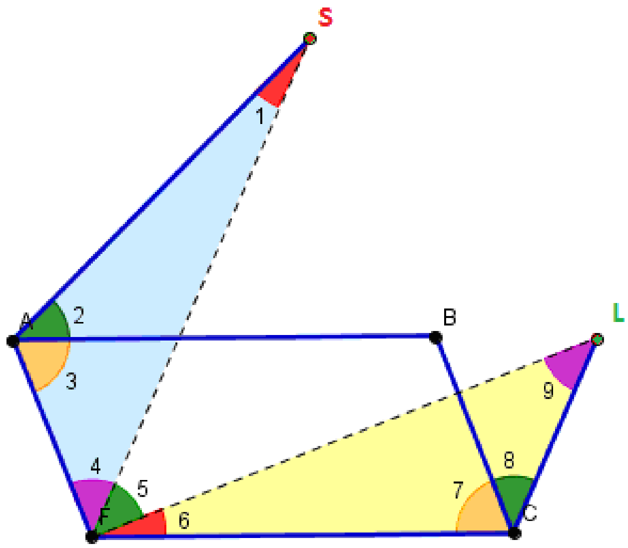


Figura 3.2.12: Esquema 4 da argumentação do Rotor
Fonte: Autor

Assim temos que a soma dos ângulos internos *1, 2, 3 e 4* do triângulo azul é 180°. Como os ângulos 1 e 6 são congruentes, a soma dos ângulos 2, 3, 4 e 6 é 180°. Também a soma dos ângulos consecutivos de um paralelogramo é 180°, assim a soma dos ângulos *3, 4, 5* e *6* é 180°. Então podemos escrever [medida dos ângulo (*2,3,4,6*) = medida dos ângulos (*3,4,**5**,6)*]. Fazendo na igualdade o cancelamento das medidas de ângulos congruentes obtemos que, os ângulos *2* e *5* são congruentes. Ou seja, o ângulo $S\hat{F}B$ é congruente ao ângulo marcado em verde e este é o ângulo de rotação do instrumento.

3.3 O instrumento de translação

O instrumento que realiza translações é denominado *Translatore del Kempe*[8]. Esse instrumento foi idealizado por Alfred Bray Kempe[9] (1849-1922), matemático e advogado que viveu em Londres, Inglaterra.

As maiores contribuições de Kempe foram na geometria, área em que trabalhou com ligações de linhas retas em movimento, debruçando-se sobre o planejamento de pistões em movimento para motores, tendo sido inspirado por uma palestra sobre *as recentes descobertas na conversão mecânica de movimento*, realizada por Sylvester, em janeiro de 1874, no Royal

[8] Link: http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/_00lab.htm , acesso em 16 de fevereiro de 2012).
[9] **The MacTutor History of Mathematics archive**. Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kempe.html . Acesso em16 de fevereiro de 2012.

Institution. Kempe trabalhou sobre o tema e apresentou uma série de palestras na Royal Institution sobre *como desenhar uma linha reta e ligações*, em 1877. As palestras apareceram na revista *Nature*. *Macmillan* publicou um livro de 51 páginas com o mesmo título, que se tornou um clássico sobre o tema [10].

Na figura a seguir podemos visualizar o instrumento que realiza translações. Esse instrumento está exposto no museu italiano virtual.

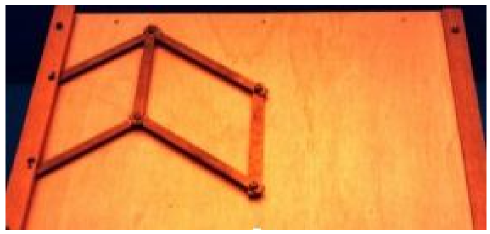


Figura 3.3.1: Translatore Del Kempe
Fonte: *Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica*

A noção de translação está relacionada ao conceito de vetor (do Latim "vehere" = transportar). O instrumento de translação faz translações de figuras, conservando o formato e o tamanho. Para maior compreensão do conceito da Transformação Geométrica Translação, apresentaremos, na subseção a seguir, a definição matemática de Translação.

3.3.1 Definição de translação

Encontramos, no livro de Lima (1992), a definição de uma translação, que apresentaremos a seguir.

Definição de Translação: Dado um vetor $v = \overrightarrow{AB}$ e um ponto *S*, a translação segundo o vetor $\vec{v}$ é a transformação que associa a cada ponto *S* o ponto *L*, tal que o quadrilátero *ABLS* seja um paralelogramo.

[10] **Museo Universitário di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica**. Universidade Universitá Degli Studi di Modena e Reggio Emilia. Disponível em: http://www.museo.unimo.it/theatrum/inizio.htm. Acesso em 14 de fevereiro de 2012.

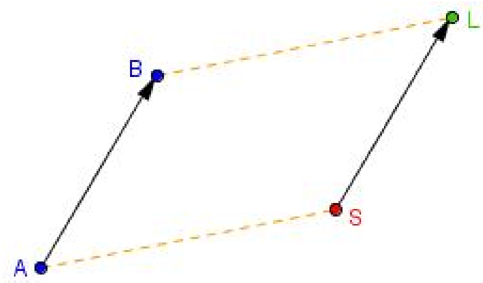


Figura 3.3.2: Translação de um ponto
Fonte: Autor

Com base na definição matemática formal de translação, podemos partir para o funcionamento do instrumento, que será tratado na subseção seguinte.

3.3.2 O funcionamento do instrumento

Para compreendermos o funcionamento deste instrumento, realizamos uma modelagem geométrica no *GeoGebra*, conforme podemos visualizar na figura a seguir:

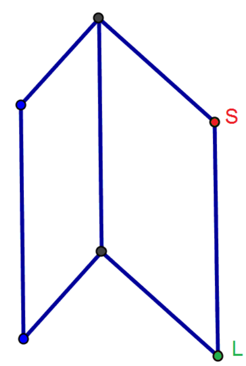


Figura 3.3.3: Modelagem geométrica do instrumento de Translação
Fonte: Autor

Como podemos perceber a partir da visualização do instrumento acima, esse instrumento é composto por sete varetas com três tamanhos diferentes. Três dessas varetas possuem o mesmo tamanho, outras duas de mesmo tamanho e mais duas de outro tamanho. Assim, com essas sete varetas, construímos o instrumento, formando dois paralelogramos que possuem um lado em comum.

O funcionamento desse instrumento é obtido com um dos lados fixo (segmento entre pontos azuis) e a ponta *Seca* em movimento, através de movimentos livres, mantendo os paralelogramos. Assim, a translação vai sendo construída pela ponta *Lápis*. Alguns exemplos podem ser visualizados na figura a seguir:

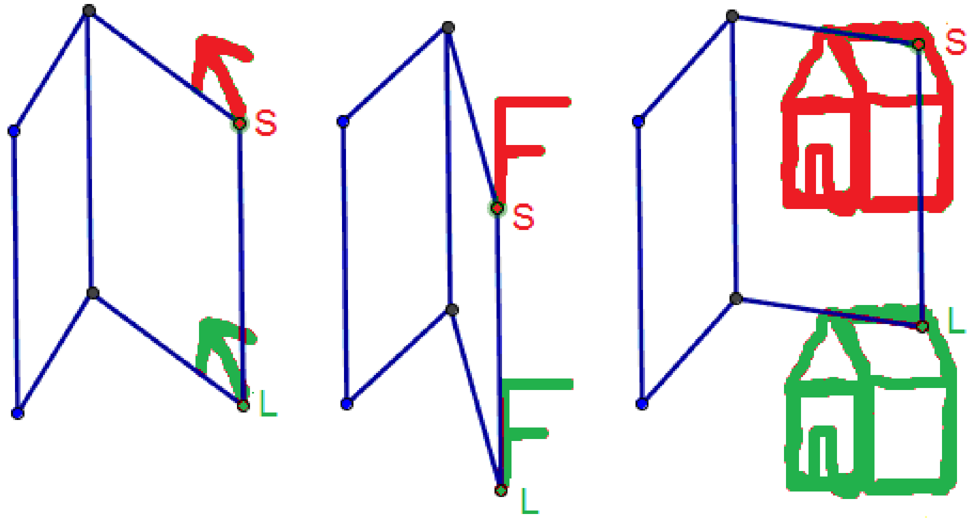


Figura 3.3.4: Exemplos de translações
Fonte: Autor

Para que esse instrumento funcione, é preciso que todo deslocamento feito pelo ponto *S* seja correspondido pelo ponto *L*, isto é, quando *S* é deslocado para a direita, *L* também o é. Veremos, mais adiante, a argumentação matemática do funcionamento desse instrumento.

3.3.3 A construção do instrumento

Para realizarmos a construção desse instrumento no *GeoGebra*, planejamos o protocolo passo a passo:

1º passo: Construa o ponto ***A***.

2º passo: Construa o ponto ***B***.

3º passo: Construa o segmento ***a*** de *A* até *B*.

4º passo: Construa uma ***circunferência C1*** com centro em *A*.

5º passo: Construa um ponto denominado ***S*** (será a ponta seca do instrumento).

6º passo: Construa uma circunferência ***C2*** com centro no ponto S e que interseccione a circunferência ***C1***.

7º passo: Construa a intersecção ***C*** entre as duas circunferências.

8º passo: Construa um segmento ***b*** de A até C.

9º passo: Construa uma reta ***r*** paralela ao segmento *a*, passando pelo ponto *C*.

10º passo: Construa uma reta ***s*** paralela ao segmento *b*, passando pelo ponto *B*.

11º passo: Construa um segmento ***c*** de *C* até *S*.

12º passo: Construa uma reta ***t*** paralela a reta *r*, passando por *S*.

13º passo: Construa o ponto de intersecção ***D*** entre a reta *s* e a reta *r*.

14º passo: Construa a reta ***u*** paralela ao segmento *c*, passando pelo ponto *D*.

15º passo: Construa o ponto ***L*** de intersecção entre as retas *t* e *u*.

16º passo: Construa o segmento de *B* até *D*, o segmento de *C* até *D*, o segmento de *S* até *L* e o segmento de *D* até *L*.

Após a construção do instrumento, podemos editar a cor e a espessura dos últimos segmentos construídos, destacando, assim, o instrumento. A seguir, apresentamos figuras que ilustram a construção do instrumento.

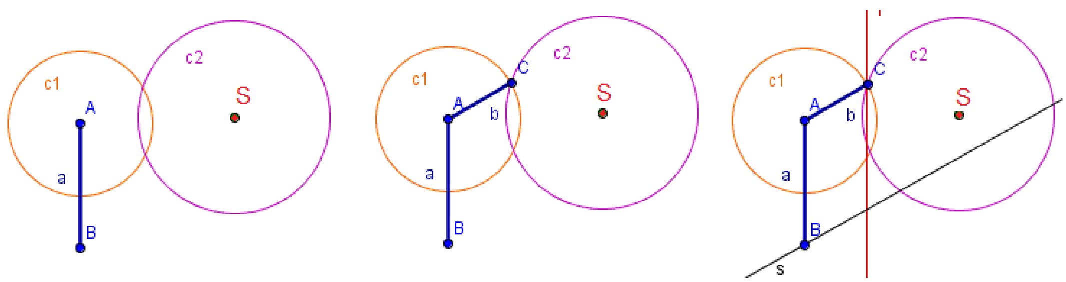


Figura 3.3.5: Construção do Translador (1º ao 10º passo)
Fonte: Autor

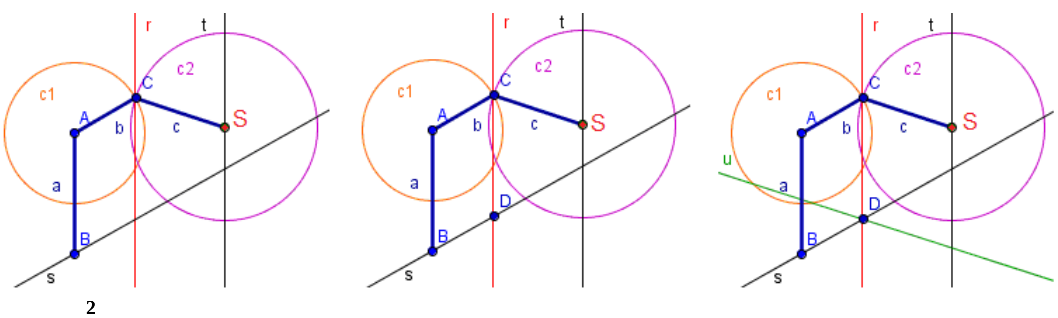


Figura 3.3.6: Construção do Translador (11º ao 14º)
Fonte: Autor

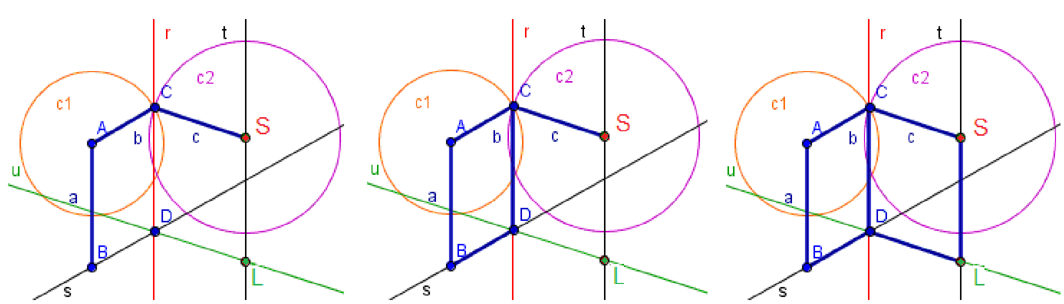


Figura 3.3.7: Construção do Translador (15º e 16º)
Fonte: Autor

3.3.4 A argumentação que explica a transformação do instrumento

Para que esse instrumento funcione, é preciso que o deslocamento feito pelo ponto *S* seja correspondido pelo ponto *L*, com o efeito de translação. Ou seja, precisamos mostrar que o quadrilátero *ABSL* é um paralelogramo e para isto vamos mostrar que os segmentos *BS* e *AL* são congruentes e paralelos.

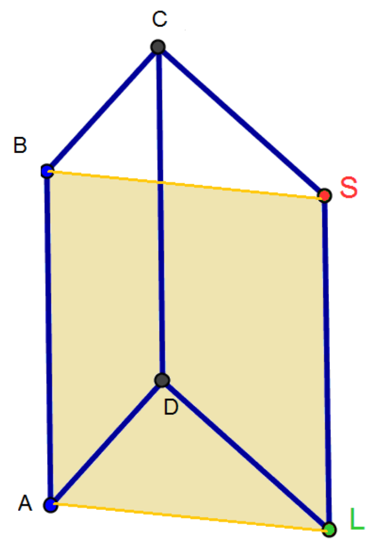


Figura 3.3.8: Esquema da argumentação do instrumento
Fonte: Autor

Da construção do instrumento, resulta que os lados *AB*, *CD* e *SL* são congruentes entre si, bem como os lados *BC* e *AD* e os lados *CS* e *DL*. Portanto, os quadriláteros *ABCD* e *DCSL* são paralelogramos. Portanto temos os segmentos *AB* e *LS* paralelos e congruentes, o que garante que o quadrilátero *ABSL* é paralelogramo. Isto diz que o ponto L é uma translação do ponto S segundo o vetor $v = \overrightarrow{AB}$

3.4 O instrumento de ampliação

Esse instrumento que faz ampliações (com a possibilidade de fazer reduções também) é chamado de *Pantografo di Scheiner*[11], muito utilizado por artistas para reproduzir obras de artes em tamanhos diferentes das originais. Também é conhecido por sua utilidade em construções de mapas em escalas e reproduções artísticas. Na escola, surge como um

11 Fonte: http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/_00lab.htm.

interessante instrumento para realizar figuras semelhantes, tanto nas aulas de artes, como nas de matemática.

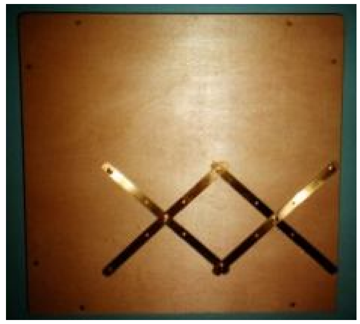


Figura 3.4.1: Pantógrafo de Scheiner
Fonte: *Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica*

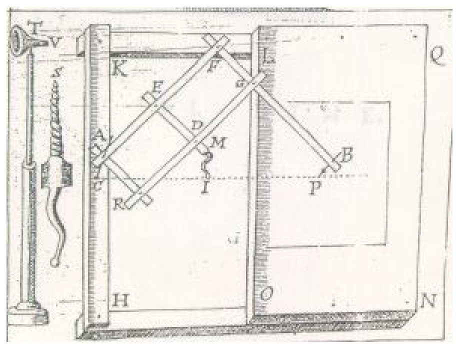


Figura 3.4.2: Pantógrafo de Scheiner
Fonte: *Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica*

Figura 3.4.3: Pantógrafo de Scheiner
Fonte: *Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica*

A história desse instrumento iniciou em 1603, quando Scheiner comunicou ao Mestre Gregorius, um excelente pintor, de que havia inventado uma ferramenta para desenhar.

Conta a história que Scheiner criou seu instrumento baseado na utilização de bússolas com um centro fixo. Assim, Scheiner trabalhou por conta própria e, após um período de intensos esforços, produziu um instrumento com ampla utilização para ampliar, reduzir e copiar desenhos[12].

Para entendermos reduções e ampliações do ponto de vista matemática, abordaremos, na subseção seguinte, a definição matemática de homotetia.

3.4.1 Definição de homotetia

Lima (1992) aborda em seu livro a definição matemática de homotetia, que estudamos a seguir.

Definição de homotetia: Seja r um número real positivo. A homotetia de centro O e razão r é a transformação que associa, a cada ponto S, o ponto L, tal que $\overrightarrow{OL} = r \cdot \overrightarrow{OS}$. Homotetia de razão negativa é uma homotetia com r real negativo, ou seja, $r < 0$ para todo r real. Assim, temos $\overrightarrow{OL} = -r \cdot \overrightarrow{OS}$.

Uma vez estabelecida a definição de homotetia, vamos tratar da explicação do funcionamento do instrumento.

3.4.2 O funcionamento do instrumento

Nesta subseção, trataremos da funcionalidade do instrumento. Assim, planejamos uma modelagem geométrica do instrumento no *GeoGebra*, a partir de um modelo exposto no museu italiano virtual.

Planejamos nossa construção a partir do seguinte modelo disponível no museu italiano:

---

[12] **Museo Universitário di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica**. Universidade Universitá Degli Studi di Modena e Reggio Emilia. Disponível em: http://www.museo.unimo.it/theatrum/inizio.htm. Acesso 14/02/2012.

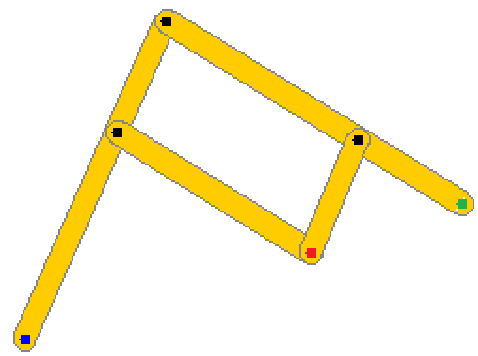


Figura 3.4.5: Modelagem Geométrica do instrumento
Fonte: *Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica*

O modelo é composto por quatro varetas, sendo duas maiores, de mesmo tamanho, e outras duas menores, de tamanhos diferentes. As duas varetas menores tem a soma de suas medidas igual a medida da vareta maior e estão articuladas com as varetas maiores de forma a ter-se um paralelogramos no instrumento. A seguir, apresentamos um modelo construído no *GeoGebra*.

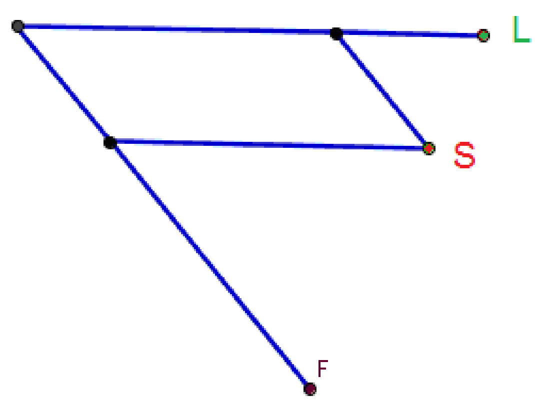


Figura 3.4.5: Modelagem do Pantógrafo de Scheiner
Fonte: Autor

O funcionamento do modelo é feito com o ponto *F* fixado e, movimentando do instrumento através do ponto *S* (ponta *seca)*. O ponto *L* (ponta *lápis*) acompanha o ponto *S*, fazendo ampliações.

A seguir, temos alguns exemplos de ampliações das figuras vermelhas desenhadas pelo ponto S, utilizando o pantógrafo construído no *GeoGebra*.

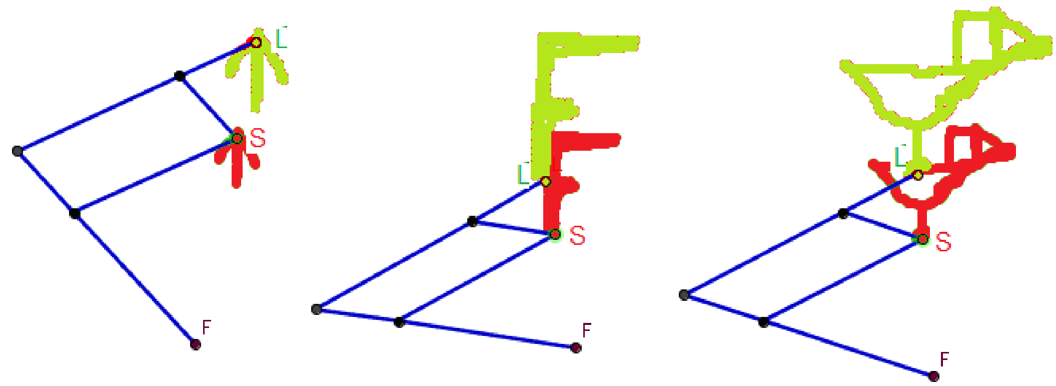


Figura 3.4.7: Exemplos de ampliação
Fonte: Autor

Um pergunta pertinente a ser respondida é: *por que o instrumento funciona*? Responderemos a essa pergunta observando a Figura 3.4.8.

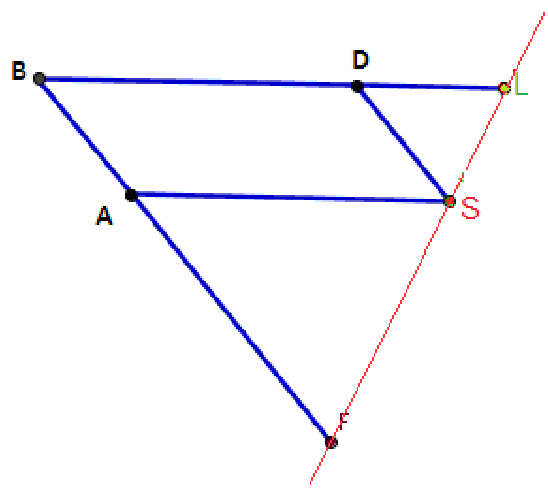


Figura 3.4.8: Alinhamento dos três pontos
Fonte: Autor

Vimos, anteriormente, que o funcionamento do pantógrafo é dado deslocando a ponta seca *S*, sendo que a ponta lápis *L* a acompanha. A figura verde desenhada por *L* é uma ampliação pelo fator r da figura vermelha desenhada por *S*.

Na seção a seguir, apresentamos a construção da modelagem geométrica do instrumento, seguida da argumentação dedutiva, atestando que o instrumento de fato realiza ampliações.

3.4.3 A construção do instrumento

O protocolo de construção do pantógrafo está organizado em 12 passos de construção, enumerados a seguir:

1º passo: Construa os pontos ***F*** e ***S***.

2º passo: Construa circunferência ***C1*** com centro em *F* com um raio fixo e circunferência ***C2*** com centro em *S* com um raio fixo *e* de forma tal que as circunferências se interseccionam.

3º passo: Construa um dos pontos A de intersecção das circunferências *C1* e *C2*.

4º passo: Construa uma circunferência ***C3*** com centro em *A* de raio fixo.

5º passo: Construa a reta que passa por *F* e *A*

6º passo: Construa o ponto ***B*** de intersecção da reta *FA* com *C3*, sendo que *A* deve ficar entre *F* e *B*.

7º passo: Construa o segmento ***AS***.

8º passo: Construa uma reta ***s*** paralela a *AS*, passando por *B*.

9º passo: Construa uma reta ***t*** passando por *F* e *S*.

10º passo: Construa ponto ***L*** de intersecção entre as retas *s* e *t*.

11º passo: Construa a reta ***u*** paralela a *AB* passando por *S*.

12º passo: Construa o ponto ***D*** de intersecção entre as retas *s* e *u*.

13º passo: Construa (destaque com cor diferente) os segmentos *FB*, *BL*, *AS* e *SD*.

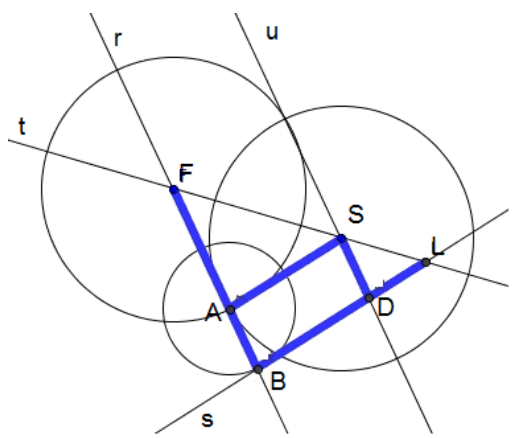


Figura 3.4.9: Construção do Pantógrafo
Fonte: Autor

3.4.4 A argumentação que explica a transformação do instrumento

Para a construção da argumentação do instrumento, precisamos mostrar que:

a) S pertence à reta FL.

b) $\dfrac{\overline{FL}}{\overline{FS}} = \dfrac{\overline{FB}}{\overline{FA}}$;

Para mostrar que o ponto S pertence à reta $\overleftrightarrow{FL}$, vamos mostrar que as semi-retas $\overrightarrow{SL}$ e $\overrightarrow{SF}$ são opostas, ou seja, elas formam um ângulo de 180 graus. Como $ABDS$ é paralelogramo, os ângulos opostos, destacados em verde na Figura 3.4.10, são congruentes.

O triângulo FAS é isósceles por construção, tendo então os dois ângulos da base, marcados em vermelho, congruentes entre si e ele tem o terceiro ângulo congruente ao ângulo $F\hat{B}L$, por serem estes dois ângulos correspondentes em retas paralelas. O triângulo SDL também é isósceles e tem um ângulo verde congruente ao ângulo $F\hat{B}L$ por serem também estes dois ângulos correspondentes em retas paralelas. Então os ângulos da base deste triângulo são congruentes aos ângulos da base do primeiro triângulo isósceles analisado e é assim que eles também estão marcados em vermelho na Figura 3.4.10.

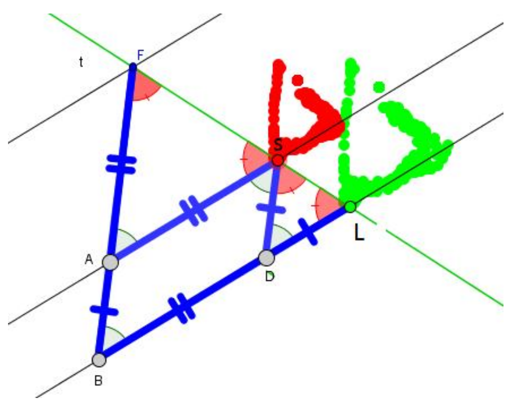


Figura 3.4.10: Esquema argumentação
Fonte: Autor

No triângulo FAS temos: *(2 ângulos vermelhos) + (1 ângulo verde) = 180º*. Estes ângulos também estão em torno do ponto S e são formados pelas semi-retas $\overrightarrow{SF}$, $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SD}$ e $\overrightarrow{SL}$, conforme ilustra a Figura 3.4.10. Assim, *(2 ângulos vermelhos) + (1 ângulo verde)* somam 180º, daí o alinhamento de *F,S e L.*

Para mostrar que $\frac{\overline{FL}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}$, utilizamos o Teorema de Tales, conforme observamos na Figura 3.4.10, onde estão representadas a reta suporte do segmento $\overline{BD}$, a reta suporte do segmento $\overline{AS}$ e uma paralela a essas passando por *F*.

Como temos três retas paralelas, e $\overline{FB}$ e $\overline{FL}$ são transversais, pelo Teorema de Tales temos $\frac{\overline{FL}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}$.

3.5 Os instrumentos de desenho e a geometria dinâmica

Com o advento da tecnologia digital, muitas são as possibilidades de uso de *softwares* para a aprendizagem de diferentes conteúdos escolares. No caso da geometria, temos os *softwares* que são referidos na literatura como os ambientes de geometria dinâmica. Um interessante exemplar é o *GeoGebra – Dynamic Mathematics for Everyone*[13] desenvolvido por Markus Hohenwarter (2001). Foi com o *GeoGebra* que fizemos as construções dos instrumentos virtuais de desenho, apresentadas na seção anterior. Nesta seção apresentamos, de forma breve, os recursos do *GeoGebra* e trazemos uma reflexão sobre as vantagens de se trabalhar com instrumentos de desenho em ambiente de geometria dinâmica. Os instrumentos mostrados neste capítulo foram todos construídos com o *GeoGebra*, que mostra sua funcionalidade e praticidade.

O software apresenta uma interface com recursos que oferecem praticidade e eficiência. Muitos recursos disponíveis no *GeoGebra* são bem intuitivos, permitindo que os alunos aprendam rapidamente os comandos. Além disso, todos os ícones de recursos, quando selecionados, apresentam uma mensagem simultânea na interface, explicando como o aluno deve proceder, por exemplo, para construir um ponto, reta etc.

---

13 Dowload disponível em http://www.geogebra.org/. Outros softwares similares são Régua e Compasso e Cabri-Geomètre.

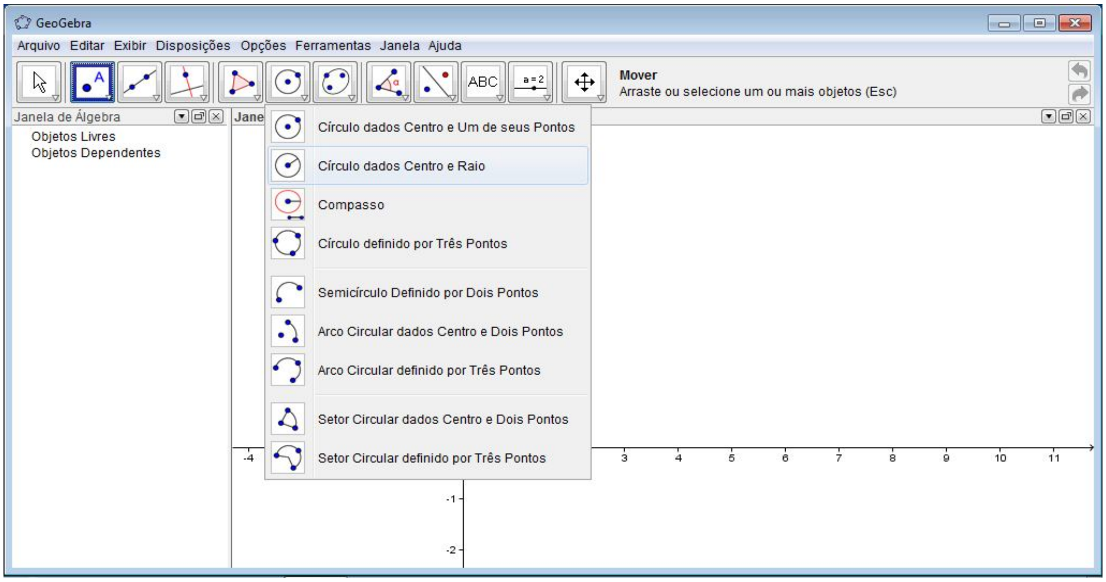


Figura 3.5.1: Interface do software *GeoGebra*
Fonte: Autor

O software apresenta a importante funcionalidade de permitir que sejam realizadas construções estáveis, ou seja, construções que podem ser movimentadas a partir de um ponto sem perder suas propriedades. Os protocolos de construção apresentados na seção anterior trazem os procedimentos que garantem a estabilidade dos instrumentos – eles podem ser manipulados e não sofrem deformações.

Vamos aqui entender a estabilidade das figuras da geometria dinâmica através de um exemplo bastante simples – trata-se da construção de um triângulo eqüilátero, ilustrada na Figura 3.5.2.

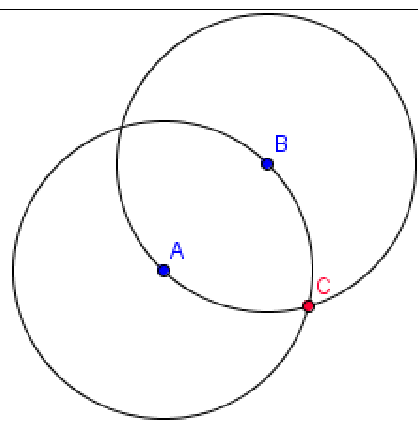


Figura 3.5.2: Construção do triângulo – etapa 1
Fonte: Autor

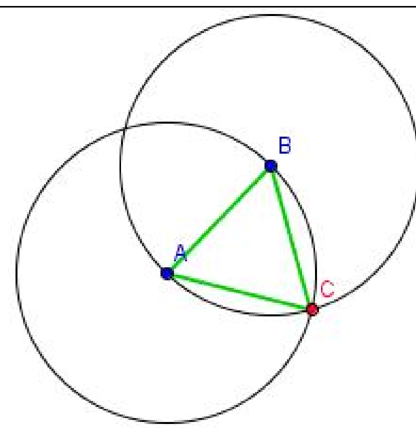


Figura 3.5.3: Construção do triângulo – etapa 2
Fonte: Autor

Os passos de construção são:

- com o menu *Novo Ponto* construir os pontos *A* e *B*;

- com o menu *Circulo dados centro e um de seus pontos* construir o círculo de centro em *A* passando por *B*; e depois o círculo de centro *B* passando por *A;*

- com o menu *Intersecção de dois objetos* construir o ponto *C* de intersecção dos dois círculos;

- com o menu *Segmento definido por dois pontos* construir os segmentos de reta *AB*, *BC* e *AC*, formando o triângulo.

Utilizamos a expressão "geometria dinâmica" para referir a software como o *GeoGebra* porque, feita a construção do triângulo com procedimento geométrico adequados, podemos movimentar os pontos *A* e *B* e o triângulo muda de posição e tamanho mas se mantém sempre do tipo eqüilátero (Figuras 3.5.4 e 3.5.5). É esta estabilidade da construção que caracteriza as figuras da geometria dinâmica.

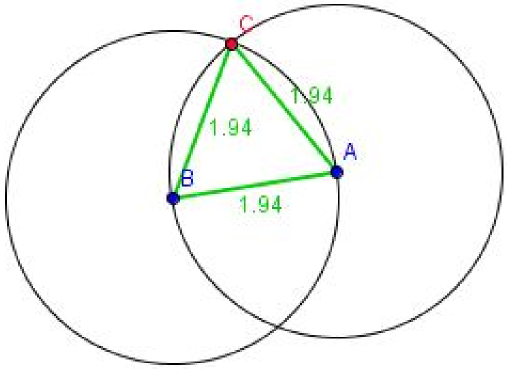


Figura 3.5.4: Triângulo equilátero menor
Fonte: Autor

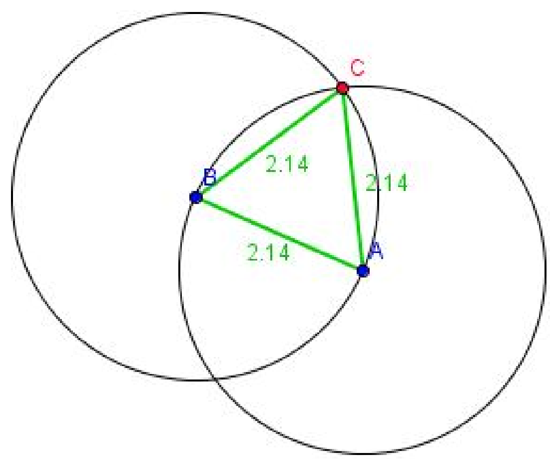


Figura 3.5.5: Triângulo equilátero maior
Fonte: Autor

Gravina (2001) destaca que a versatilidade das experimentações na geometria dinâmica provocam fluidez dos processos mentais, fazendo com que o aluno use formas de pensar que vão além do discurso oral (ou escrito) ou do desenho estático. Com a geometria dinâmica, o aluno passa a olhar para as figuras em movimento e é através do movimento que observa suas propriedades.

Voltamos agora aos instrumentos virtuais. Conforme já mencionado, eles foram construídos no *GeoGebra*. Eles são figuras dinâmicas – são as propriedades impostas na construção que garantem as diferentes transformações que são produzidas. Ao manipular o instrumento virtual, observando os rastros dos pontos *S* (ponta Seca) e *L* (Lápis), o aluno pode identificar que tipo de transformação é produzida. Assim, com esses recursos, o processo pedagógico apresenta ganhos, dentre eles, a facilidade de visualização de propriedades com a simples movimentações da *ponta seca* do instrumento e habilitando o menu *Rastro do Ponto* . Por exemplo, ao desenhar um quadrado vermelho com o ponto vermelho, o ponto verde desenha um novo quadrado verde em uma posição muito particular.

Na Figura 3.5.6 podemos visualizar a transformação (rotação) provocada pelo instrumento *rotor*.

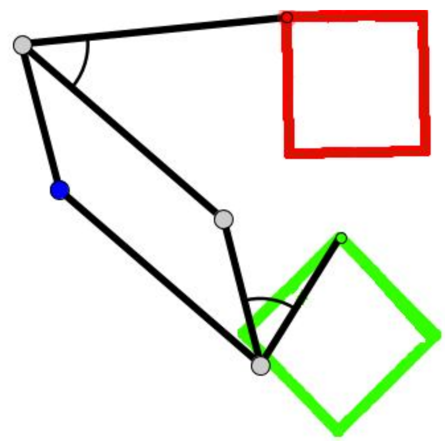


Figura 3.5.6: Rotação do quadrado vermelho
Fonte: Autor

Uma vez entendida a transformação produzida pelo instrumento, neste primeiro momento de forma empírica, é natural que seja feita a pergunta: *por que os instrumentos produzem tais transformações?* Para responder a pergunta, é preciso, inicialmente, entender como é construído o instrumento, ou seja, é preciso identificar as propriedades que estão impostas na construção. No caso do rotor, o ângulo formado pelos segmentos de retas laranja (Figura 3.5.7) é congruente aos ângulos laranja destacados no instrumento.

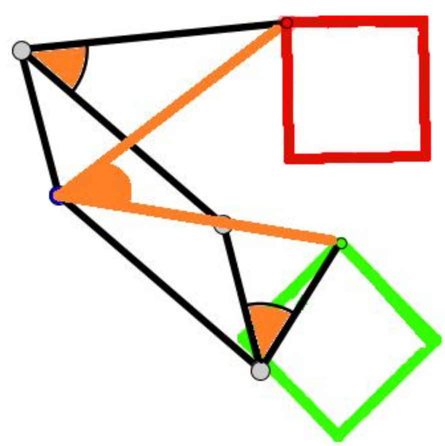


Figura 3.5.7: Ângulos congruentes
Fonte: Autor

Percebemos esta propriedade através da manipulação do instrumento. Visualizando a transformação, podemos procurar um argumento baseado em propriedades matemáticas presentes no instrumento que explique sua função de realizar rotações. No caso do rotor, basta verificar que tais ângulos destacados em laranja são congruentes, bem como os segmentos destacados em laranja.

Este momento de exploração mostra o importante uso da tecnologia: com a manipulação do instrumento podem ser identificadas as propriedades que garantem, por exemplo a transformação de rotação. Este é um ganho pedagógico quando se compara com aquilo que se pode fazer utilizando somente o recurso estático do giz e quadro negro ou do lápis e papel.

Um segundo momento de interessante trabalho é a experiência de construir o instrumento virtual. Nesse momento, referente ao aprendizado de geometria, destacamos o desenvolvimento da capacidade de visualização de propriedades em construções geométricas, o desenvolvimento da linguagem geométrica e a capacidade de articular entes geométricos (ponto, retas, circunferências etc.) em uma única construção. Novamente, temos ganhos pedagógicos com a tecnologia: com os menus do *GeoGebra* podemos ter inúmeras experiências de construção, e através da manipulação ir ajustando o funcionamento do instrumento.

Os instrumentos, originalmente, foram inventados e construídos com modelos físicos. Estas construções eram realizadas inicialmente com pedaços de madeira (varetas) e esses pedaços, fixados uns aos outros com parafusos. Com o advento da tecnologia, podemos modelar tais instrumentos com o programa *GeoGebra*, e assim temos um desafiador processo de construção virtual – a construção virtual exige muito mais dos raciocínios geométricos. Um software de geometria dinâmica permite um processo de construção com de “idas e vindas” de amadurecimento de idéias e procedimentos, até chegar-se ao modelo virtual do instrumento desejado. E o processo de construção pode ser finalizado com o prazer estético de produzir um instrumento fazendo uso de cor e espessura de linhas e pontos.

Na discussão feita acima, procuramos ilustrar de que forma os instrumentos virtuais de desenho podem provocar raciocínios geométricos. Trata-se de uma abordagem pedagógica muito diferente daquela que acontece em sala de aula tradicional.

No capítulo 5, vamos apresentar uma experiência de ensino dentro desta perspectiva. Acreditamos que, na modelagem geométrica do instrumento, temos um recurso para a compreensão da necessidade de uma demonstração, pois é ela que atesta o seu funcionamento.

O modelo construído que se apresenta na tela do computador deve se tornar subsídio para o avanço do pensamento argumentativo, que culmina com a demonstração. Mas, em que consiste essa demonstração? Consiste em explicar, sob o ponto de vista da geometria, o funcionamento do instrumento.

No próximo capítulo apresentamos o material didático digital com os instrumentos virtuais de desenho.

4 O MATERIAL DIDÁTICO DIGITAL

É visando, sobretudo, facilitar a leitura da dissertação que, antes de apresentar a experiência realizada, tratamos do material didático digital que foi construído e utilizado. O material didático principal se constitui de quatro páginas *web*, cada uma delas contendo um instrumento virtual de desenho. As páginas estão disponíveis na Internet no repositório de material *GeoGebra Tube*[14]. Esse *site* é um repositório digital da Internet, em que é possível publicar trabalhos produzidos no *GeoGebra.* Para a realização da experiência, também pensamos em materiais auxiliares e, assim, organizamos material a ser usado em projetor multimídia, em formato PowerPoint.

É importante dizer que, no uso do material, é de fundamental importância o papel do professor, pois, através do material, com explorações e análises, ele pode propor questões que promovem a participação dos alunos, criando, na sala de aula, uma atmosfera de curiosidade e de discussão.

4.1 Material principal: "Os instrumentos virtuais de desenho"

O material didático produzido está disponível virtualmente para professores e alunos no *GeoGebra Tube*, e contém instrumentos virtuais de desenho construídos com o software *GeoGebra*. Esse material foi projetado para ser usado nas diferentes etapas que organizam a sequência didática e, de forma, especial na "Atividade de Exploração".

Até a publicação daquilo que se constituiu como o material principal, passamos por diferentes etapas de pesquisa e desenvolvimento: a) a escolha do site para publicação; b) a construção dos instrumentos virtuais; c) a elaboração do texto explicativo e das atividades que deveriam acompanhar cada instrumento.

A escolha do *site* foi a tarefa mais simples, pois o repositório digital do *GeoGebra Tube* apresenta inúmeras facilidades, como de implementação e de publicação. É no próprio *site* que se cria a página em que será disponibilizado o instrumento virtual (de antemão, já construído no *GeoGebra*). Na página, existem, já programados, campos para a inserção de textos.

---

14 Página web 1: http://www.geogebratube.org/student/m6460;
Página web 2: http://www.geogebratube.org/student/m6468;
Página web 3: http://www.geogebratube.org/student/m10192;
Página web 4: http://www.geogebratube.org/student/m10196.

Construímos quatro páginas, uma para cada instrumento: refletor, rotor, translator e pantógrafo. A estrutura e as atividades das páginas são semelhantes, sendo distinto, apenas, o conteúdo, de acordo com o instrumento. A Figura 4.1 ilustra a página do pantógrafo.

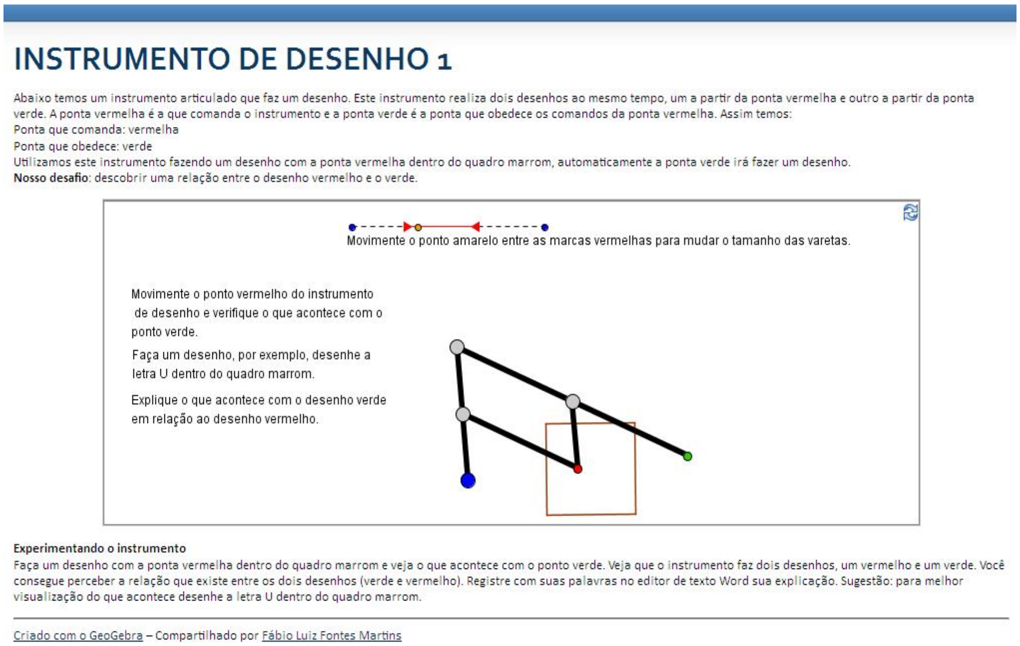


Figura 4.1: Página web do Pantógrafo
Fonte: *GeoGebra Tube*, compartilhado por Fábio Luiz Fontes Martins

A etapa de construção do instrumento virtual foi a que tomou mais tempo, pois diferentes podem ser o processos de construção. Nossa maior dificuldade foi encontrar uma maneira simples de fazer a construção e que mantivesse as propriedades do instrumento, quando ele fosse colocado sob movimento. Vamos voltar a esta questão mais adiante.

Construído o instrumento, passamos para o momento de organização da página *web* e a elaboração do texto explicativo e das atividades que deveriam acompanhar cada instrumento.

No primeiro campo da página, inserimos o texto que explica como usar o instrumento:

> *Abaixo, temos um instrumento articulado que faz um desenho. Este instrumento realiza dois desenhos ao mesmo tempo, um a partir da ponta vermelha e outro a partir da ponta verde. A ponta vermelha é a que comanda o instrumento e a ponta verde é a ponta que obedece aos comandos da ponta vermelha. Assim temos: a) Ponta que comanda: vermelha. b) Ponta que obedece: verde. Utilizamos este instrumento fazendo um desenho com a ponta vermelha dentro do quadro marrom, automaticamente a ponta verde irá fazer um desenho. Nosso desafio: descobrir uma relação entre o desenho vermelho e o verde.*

No segundo campo da página, inserimos instruções mais detalhadas sobre a manipulação a ser feita com o instrumento (Figura 4.2). As instruções contidas nesse campo dizem respeito às possibilidades de redimensionar o instrumento; trazem orientações sobre a manipulação do ponto vermelho e o resultado que produz no ponto verde.

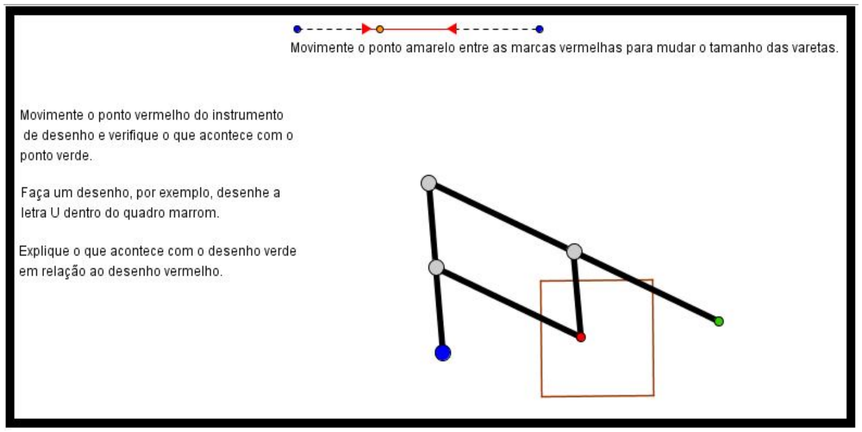


Figura 4.2: Modelagem do Pantógrafo
Fonte: Autor

No último campo da página, redigimos a atividade a ser realizada pelos alunos:

> ***Experimentando o instrumento:*** *Faça um desenho com a ponta vermelha dentro do quadro marrom e veja o que acontece com o ponto verde. Veja que o instrumento faz dois desenhos, um vermelho e um verde. Você consegue perceber a relação que existe entre os dois desenhos (verde e vermelho)? Registre com suas palavras no editor de texto Word sua explicação. Sugestão: para melhor visualização do que acontece, desenhe a letra U dentro do quadro marrom.*

Quanto à construção dos instrumentos no *GeoGebra*, um dos problemas encontrados é que, dependendo do movimento do ponto vermelho, o instrumento se corrompe. Este é um problema insolúvel, pois se refere à existência ou não de intersecções entre objetos geométricos. Assim, foi preciso encontrar uma solução para que, sob movimento, o instrumento não se corrompesse. O que fizemos, conforme ilustra a Figura 4.3, foi marcar o que chamamos de *quadro limite* (o quadrado marrom), este é o espaço de deslocamento para o ponto vermelho, que ativa o movimento do instrumento.

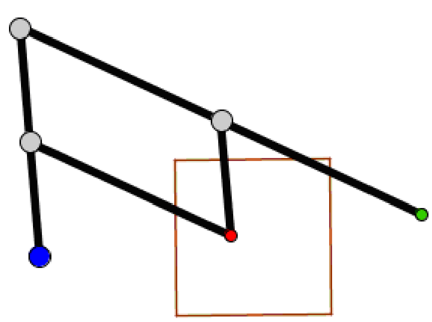


Figura 4.3: Quadro limite marrom
Fonte: Autor

Assim, o desenho gerado pelo ponto vermelho deve ficar dentro do *quadro limite*. Essa limitação do movimento faz com que as varetas do instrumento permaneçam articuladas e não há comprometimento quanto ao entendimento do seu funcionamento. Para maior entendimento e controle dos instrumentos, elaboramos um código de cores, em que o ponto vermelho é o que comanda a figura e o ponto verde é o que obedece: movimentando o ponto vermelho, desenha-se uma figura. O ponto verde desenha outra figura obedecendo a transformação geométrica que está no instrumento. O ponto azul no instrumento é o ponto fixo, ou seja, o ponto que fixa o instrumento na tela do computador (no instrumento físico seria o ponto que fixa o instrumento na mesa). Os pontos cinza são as articulações dos instrumentos que possibilitam a sua movimentação, sem corrompê-lo.

As páginas dos demais instrumentos são similares e estão ilustradas nas Figuras 4.4, 4.5 e 4.6 a seguir.

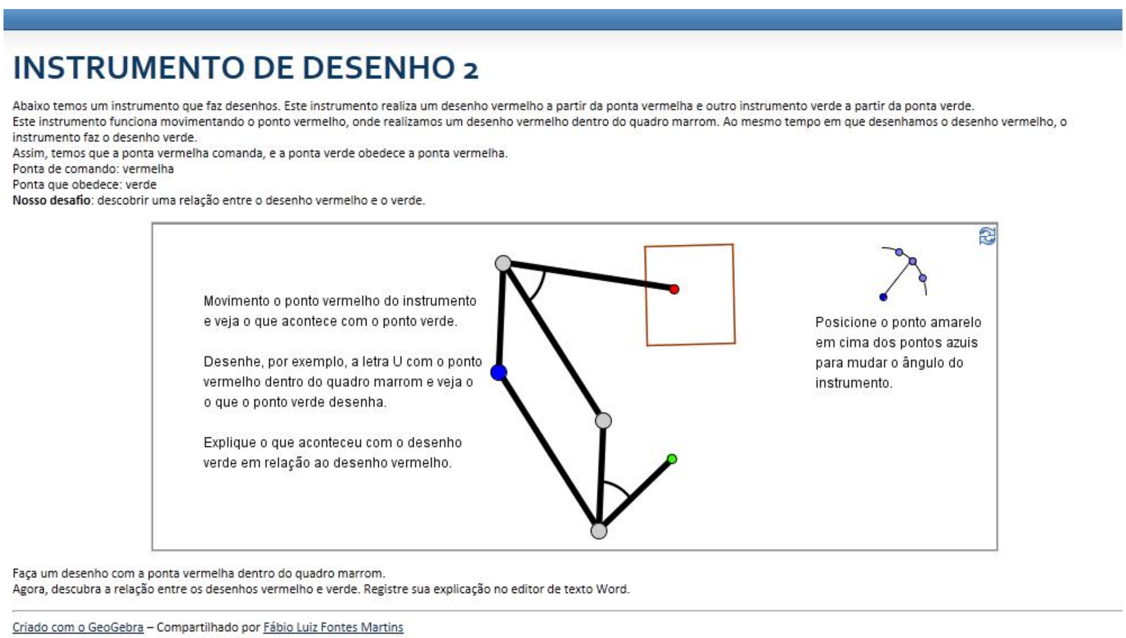


Figura 4.4: Página web do Rotor
Fonte: *GeoGebra Tube*, compartilhado por Fábio Luiz Fontes Martins

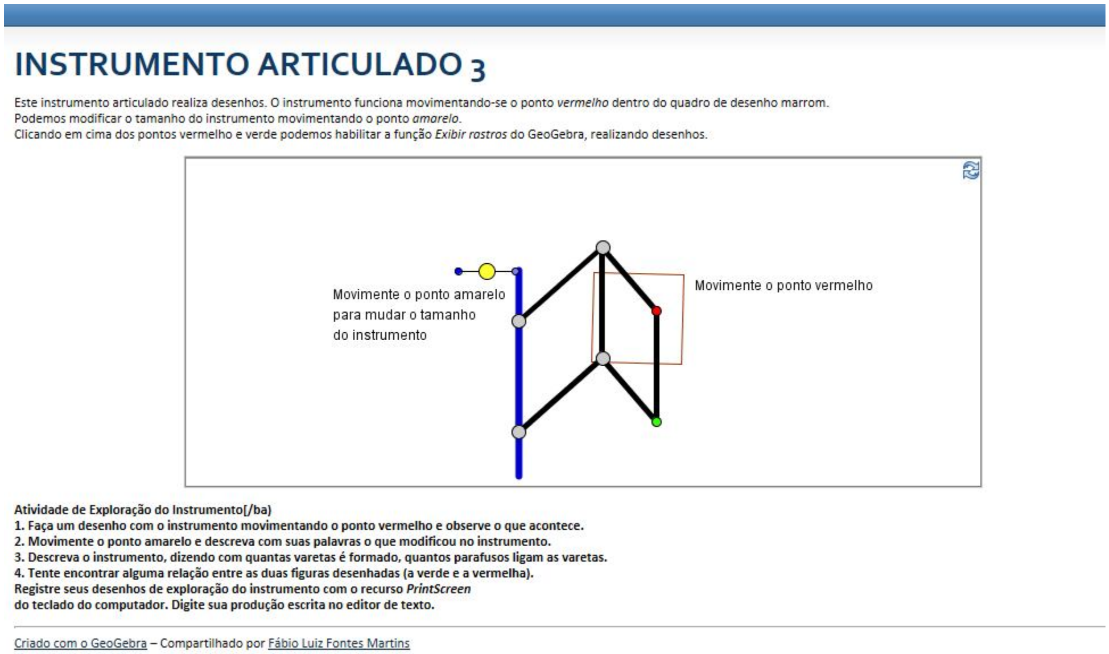


Figura 4.5: Página web do Translator
Fonte: *GeoGebra Tube*, compartilhado por Fábio Luiz Fontes Martins

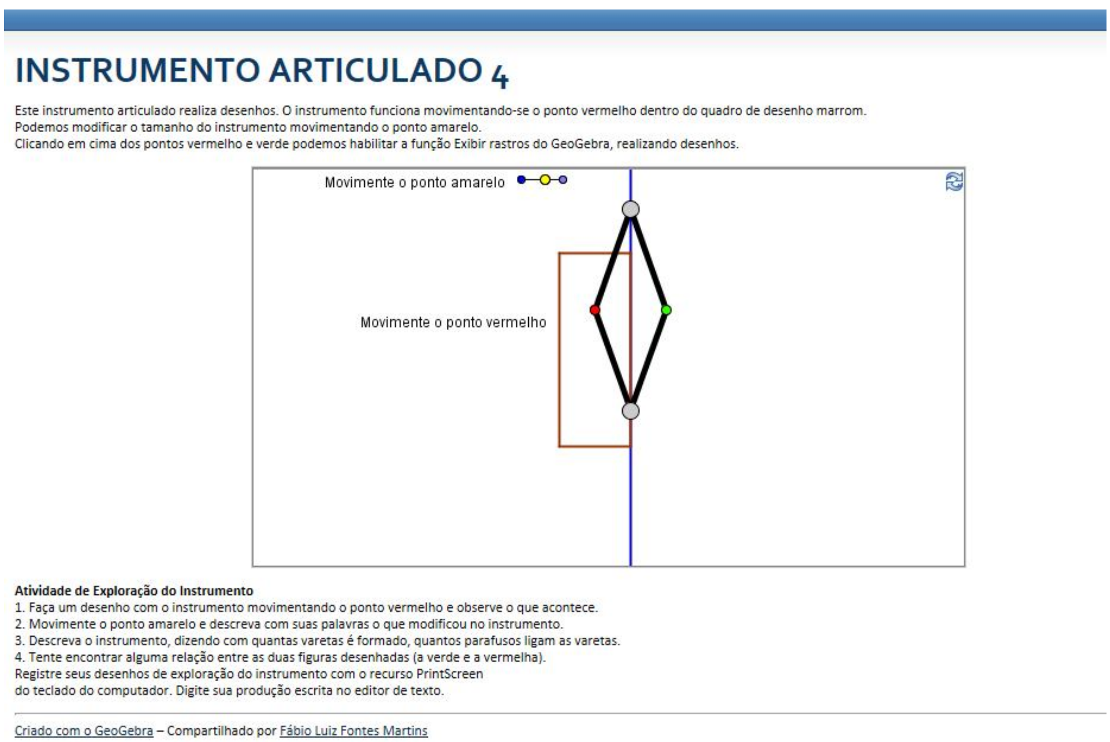


Figura 4.6: Página web do Refletor
Fonte: *GeoGebra Tube*, compartilhado por Fábio Luiz Fontes Martins

Nas próximas subseções, tratamos dos materiais auxiliares, elaborados para serem utilizados em diferentes momentos da experiência.

4.2 Material Auxiliar: “Instrumentos físicos de desenho”

O material auxiliar “Instrumentos físicos de desenho”, em formato *PowerPoint,* foi desenvolvido para ser utilizado no primeiro momento do trabalho, ainda antes da “Atividade de Exploração”. Planejamos uma apresentação de tal forma que cada slide mostrasse a foto do instrumento construído fisicamente[15], com seu nome original, porém, sem maiores explicações sobre as transformações geométricas. O objetivo foi facilitar, para os alunos, o entendimento do instrumento, durante a “Atividade de Exploração”.

A apresentação é formada por onze slides e começa mostrando um instrumento de desenho que é bem conhecido dos alunos – o compasso. A seguir, temos a sequência de slides.

Figura 4.7: Slide 1 – Instrumentos
Fonte: Autor

Figura 4.8: Slide 2 – Instrumentos
Fonte: Autor

A partir do *Slide 3*, são apresentados os instrumentos articulados. Cabe ao professor descrever, ainda que de forma breve, cada um dos instrumentos.

No *translator de Kempe*, tem-se seis varetas, articuladas em quatro pontos e com dois pontos fixos em uma base. Ao se mover o ponto do canto direito superior do instrumento, tem-se o movimento sincronizado do ponto do canto direito inferior. Esse instrumento realiza a transformação de translação.

No *pantógrafo de Scheiner,* tem-se quatro varetas, articuladas em quatro pontos e com um ponto fixo do canto esquerdo inferior do instrumento. Ao se mover o ponto do canto inferior direito, tem-se o movimento sincronizado do ponto articulado central inferior do instrumento. Esse instrumento realiza a transformação de ampliação.

[15] As fotos dos instrumentos físicos foram retiradas do site italiano de Instrumentação Científica, mencionado no Capítulo 3.

Figura 4.9: Slide 3 – Instrumentos
Fonte: Autor

Figura 4.10 Slide 4 – Instrumentos
Fonte: Autor

No *refletor*, tem-se um trilho fixo por onde se deslocam, para a direita e para a esquerda, dois dos vértices do losango que constitui o instrumento; os outros dois vértices se movem de forma sincronizada, se aproximando e se afastando do trilho, fazendo um movimento de "abre e fecha" no losango. Esse instrumento realiza a transformação de reflexão.

No *pantógrafo de Sylvester*, tem-se oito varetas articuladas em seis pontos, onde o ponto inferior do instrumento da Figura 4.12 é fixo à base. Movimentando o ponto direito superior do instrumento, o ponto esquerdo superior apresenta movimento sincronizado. Este instrumento realiza a transformação rotação.

Figura 4.11: Slide 5 – Instrumentos
Fonte: Autor

Figura 4.12 Slide 6 – Instrumentos
Fonte: Autor

A apresentação dos slides segue com os instrumentos virtuais correspondentes e procura situar o contexto do trabalho a ser realizado quanto à modelagem geométrica do instrumento físico. Os slides servem para provocar a identificação dos elementos geométricos a serem considerados no momento de se fazer a construção no *GeoGebra*.

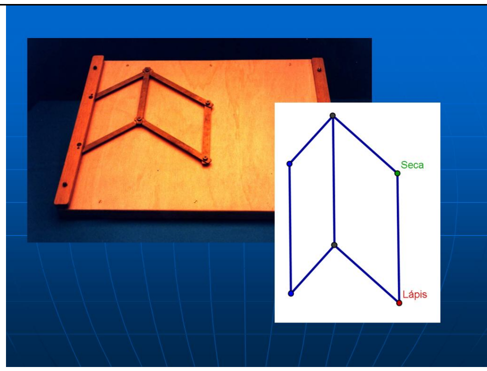


Figura 4.13: Slide 7 – Instrumentos
Fonte: Autor

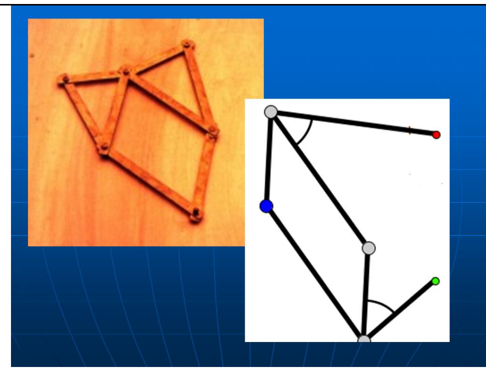


Figura 4.14 Slide 8 – Instrumentos
Fonte: Autor

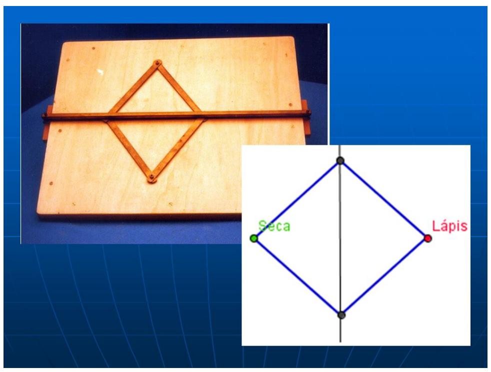


Figura 4.15 Slide 9 – Instrumentos
Fonte: Autor

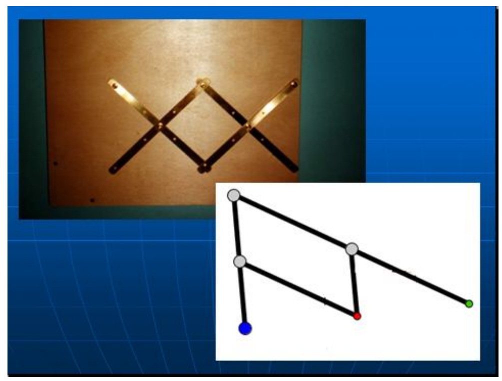


Figura 4.16: Slide 10 – Instrumentos
Fonte: Autor

4.3 Material Auxiliar: "Algumas propriedades básicas de geometria"

O segundo material auxiliar foi elaborado para relembrar algumas propriedades geométricas a serem utilizadas na terceira etapa da sequência didática – a "Atividade de Argumentação". São propriedades, em princípio, já estudadas no ensino fundamental e que são necessárias para explicar matematicamente o funcionamento dos instrumentos. A seguir, apresentamos os slides que tratam das seguintes propriedades: a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180 graus; ângulos correspondentes em duas retas paralelas cortadas por uma transversal são congruentes; o teorema de tales; a condição para semelhança entre dois triângulos.

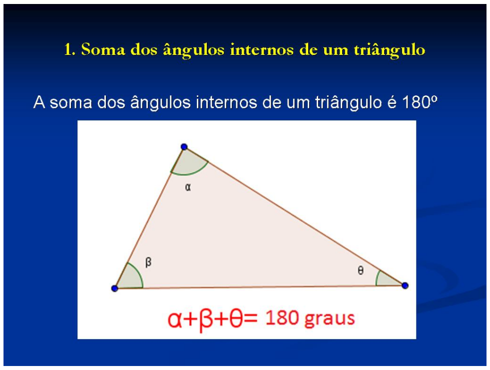


Figura 4.17: Primeira propriedade
Fonte: Autor

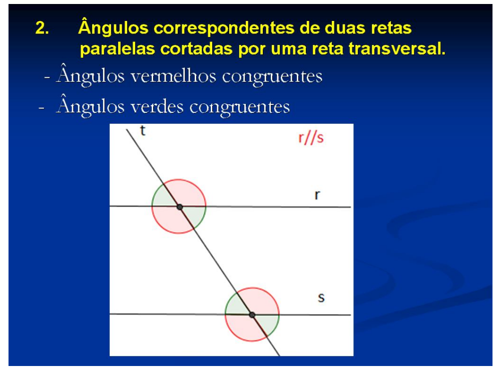


Figura 4.18: Segunda propriedade
Fonte: Autor

Quanto ao teorema, a soma dos ângulos de um triângulo, o slide mostra a propriedade e uma figura ilustrativa.

O *slide* que trata da relação entre os ângulos em situação de retas paralelas e transversais ilustra que os ângulos marcados em vermelho possuem a mesma medida e que o mesmo acontece com os ângulos marcados em verde. Nesse momento, não se faz necessário abordar nomenclaturas como *ângulos alternos internos*, *ângulos correspondentes* e assim por diante.

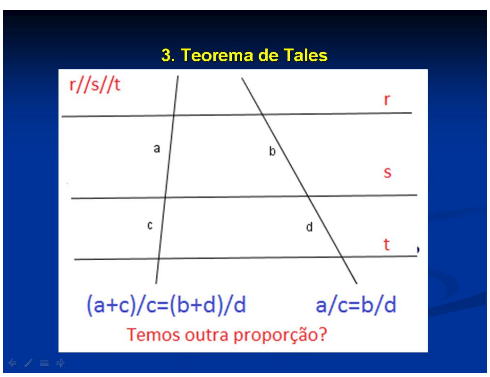


Figura 4.19: Terceira propriedade
Fonte: Autor

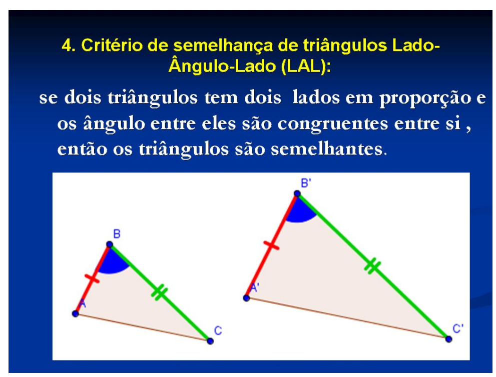


Figura 4.20: Quarta propriedade
Fonte: Autor

No slide que trata do teorema de Tales, têm-se, em destaque, três retas paralelas cortadas por duas transversais e duas proporções. Neste momento, questionamos os alunos se podemos obter outras proporções. No último *slide* (Figura 4.20), é apresentado um dos critérios de semelhança de triângulos. Apresentamos dois triângulos semelhantes com destaque dos ângulos congruentes (em azul) e dois lados correspondentes que são proporcionais (um em vermelho e outro em verde).

4.3.4 Material Auxiliar: “Construção da argumentação”

Este material auxiliar traz as argumentações que explicam as transformações produzidas pelos instrumentos virtuais e foi elaborado a partir do Capítulo 3, que fundamenta, matematicamente, os instrumentos. O material é apenas uma sugestão de possibilidade para facilitar o trabalho em sala de aula. É composto por quatro arquivos PowerPoint, sendo que, em cada arquivo, temos a argumentação relativa a um dos instrumentos. Apresentamos, nesta seção, os *slides* relativos à argumentação do instrumento de rotação.

O arquivo “Argumentação do Instrumento de Rotação” é composto por quatro *slides*, apresentados a seguir.

Figura 4.21: Slide 1 – Argumentação do Rotor
Fonte: Autor

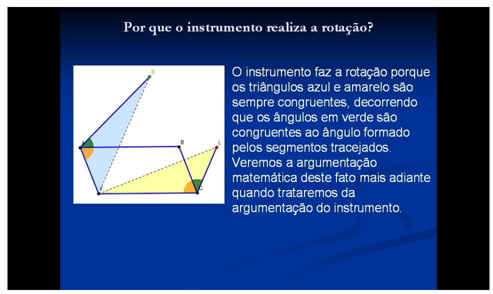


Figura 4.22: Slide 2 – Argumentação do Rotor
Fonte: Autor

O segundo *slide* (Figura 4.22) apresenta uma figura esquemática ressaltando a congruência de triângulos, explicando que o instrumento realiza transformação de rotação. Realçamos os triângulos azul e amarelo no instrumento, pois esses devem ser colocados sob atenção. Assim, o uso de boas figuras que destacam aspectos do instrumento deve ser observado, pois possibilita uma melhor visualização do processo de argumentação.

A seguir, encontram-se o princípio de construção e a argumentação.

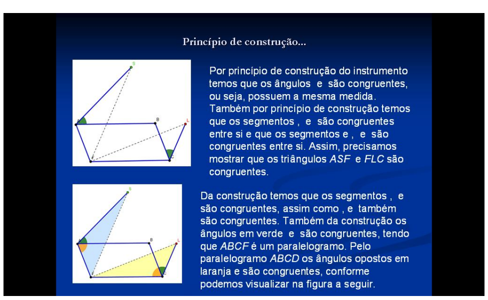


Figura 4.23: Slide 3 – Argumentação do Rotor
Fonte: Autor

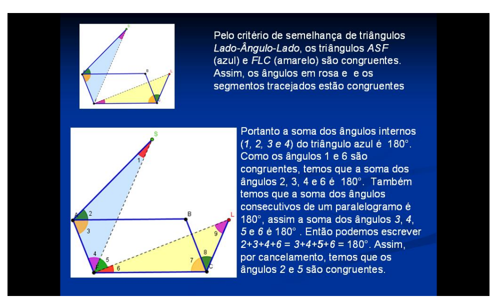


Figura 4.24: Slide 4 – Argumentação do Rotor
Fonte: Autor

No *slide* 3, destacamos o princípio de construção do instrumento, pois precisamos entender esse princípio para elaborarmos a argumentação. No *slide* 4, temos a argumentação, na qual destacamos os ângulos congruentes com cores diferentes, facilitando a visualização do que deve ser argumentado: que os ângulos em verde são congruentes.

5 ARGUMENTAÇÃO DEDUTIVA NA ESCOLA: UMA EXPERIÊNCIA

Neste capítulo, tratamos da experiência que validou o material didático produzido para o trabalho com argumentação dedutiva na escola. De início, apresentamos os princípios norteadores da experiência, depois o seu cenário de realização e, então, nos concentramos na análise da produção dos alunos participantes. Finalizamos o capítulo com algumas reflexões sobre o trabalho com argumentação dedutiva na escola, a partir desta nossa vivência.

5.1 Os princípios norteadores

A argumentação na escola, muitas vezes, não é acessível para a grande maioria dos alunos, devido ao fato de não terem maior familiaridade com a linguagem formal da matemática, ou, mesmo, devido a dificuldades para organizar encadeamentos lógicos dedutivos a partir de hipóteses. Uma primeira dificuldade que se apresenta é quanto à clareza sobre quando uma afirmação requer uma argumentação. Em seguida, vem a dificuldade quanto aos encadeamentos lógicos a serem feitos.

O estudo da geometria no qual o professor propõe demonstrações formais de propriedades, sem discutir sobre o propósito das demonstrações, não ajuda os alunos no desenvolvimento de habilidades para argumentações. A simples justificativa de que em matemática se tem que provar que certos fatos são verdades não é convincente para os alunos e, assim, grande é a possibilidade de fracasso no ensino de argumentações dedutivas. Tal justificativa pode ser convincente para um aluno de graduação, que provavelmente é interessado e curioso quanto à natureza da matemática. Porém, no ensino básico, a questão não é tão simples. Na escola nos deparamos com alunos que não gostam de matemática (mesmo que empírica) e, consequentemente, para esses alunos, não faz nenhum sentido argumentar sobre a veracidade de certos fatos. Assim, os alunos tomam a decisão de se livrar da dificuldade, dizendo, simplesmente, que acreditam no fato, já que o professor ou o livro estão garantindo a veracidade. Essa situação é comum na escola básica e isso nos inquieta. É preciso mudar esta atitude dos alunos, e foi com esse propósito que decidimos fazer uma experiência com um pequeno grupo de alunos, trabalhando com as argumentações dedutivas.

Partimos do pressuposto de que o despertar da curiosidade nos alunos, em situações intrigantes, pode ser uma estratégia para atrair sua atenção. Todo ser humano é curioso, e nesta situação de curiosidade, busca o conhecimento. Escolhemos situações em que os alunos vão explorar instrumentos de desenho e vão ser provocados na apresentação de razões que explicam o funcionamento dos instrumentos. Parece-nos que compreender como a matemática está presente nesses instrumentos de desenhos pode ser algo intrigante. Podemos nos fazer algumas perguntas, como, quanto de matemática a pessoa que projetou o instrumento precisava saber? Ou, podemos fazer uma pergunta mais ingênua: será que primeiro se pensou em propriedades matemáticas para construir o instrumento, ou essas propriedades foram detectadas depois do instrumento construído?

Quanto à construção dos instrumentos: uma primeira possibilidade seria usar varetas de madeira articuladas, com parafusos de metal. Mas, aqui, teríamos dificuldades quanto à aquisição do material e quanto ao acabamento final. Também teríamos, provavelmente, alunos sem maior interesse nesse tipo de construção. Assim, optamos pela modelagem virtual dos instrumentos (construção no *GeoGebra*) e apostamos nos ganhos de aprendizagem que se pode ter quando agregamos, ao ensino da matemática, as tecnologias digitais: os alunos ficam visivelmente mais motivados; pode-se fazer uma matemática diferente da usual, ao se manipular, na tela do computador, os objetos geométricos; e, o mais importante, os alunos têm espaço para seus experimentos de pensamento, um momento fundamental do processo de aprendizagem (GRAVINA, 2001).

Para o trabalho de modelagem vamos usar o software *GeoGebra*, porque ele apresenta uma interface de fácil entendimento e manipulação, e, também, porque é um *software* de domínio público.

5.2 A organização da experiência

No capítulo 3 apresentamos a construção e as argumentações dedutivas que explicam as transformações realizadas por quatro instrumentos de desenho. Na experiência, vamos trabalhar com somente três deles: o *pantógrafo* (ampliação), o *rotor* (rotação) e *translator* (translação). Escolhemos esses três instrumentos, pois contemplam o objetivo da experiência e atendem o cronograma que foi previsto para os encontros. Acreditamos que, em um primeiro momento com os alunos, a apresentação de quatros instrumentos diferentes poderia comprometer seu entendimento, devido às muitas informações concomitantes.

Implementamos uma experiência de forma que pudéssemos analisar a eficácia do material no trabalho com argumentação dedutiva, sendo um estudo de caso. Não é nossa expectativa que, com o uso do material didático, os alunos produzam demonstrações com autonomia, mas, sim, que desenvolvam a compreensão do significado e da necessidade de uma demonstração. O desenvolvimento da autonomia para produzir demonstrações é um processo demorado, conforme discutido no capítulo 2. De acordo com teoria da Van Hiele (GRAVINA, 2001), esta autonomia se constrói a partir do trabalho no qual, inicialmente, o professor conduz a cadeia lógica de argumentos, em conjunto com os alunos. Assim, adiantamos que o processo de aprendizagem a ser contemplado na experiência se concentra no nível 2 da teoria de Van Hielle – o nível da dedução informal.

A sequência didática que organizou a experiência está dividida em três etapas:

Etapa "Atividade de Exploração": nessa etapa, os alunos manipulam o instrumento virtual, visando entender o seu funcionamento e a transformação geométrica que realiza, e são solicitados a escreverem sobre este entendimento, com suas próprias palavras. Num primeiro momento, os alunos manipulam os instrumentos; no final dessa etapa, o professor promove uma discussão, a partir das produções dos alunos, sobre os instrumentos, o funcionamento e as transformações geométricas realizadas.

Etapa "Atividade de Construção": nessa etapa, após a construção coletiva de um dos instrumentos, conduzida pelo professor, os alunos são convidados a construir, no GeoGebra, um dos outros instrumentos, seguindo um protocolo de construção. O momento de construção coletiva é necessário para que os alunos se familiarizem com a linguagem geométrica do protocolo de construção e, após este processo, além de ter o contato com a linguagem geométrica, o aluno pode manipular o instrumento construído, verificando a validade da construção. Então, ele pode proceder da mesma forma na construção de um segundo instrumento.

Etapa "Atividade de Argumentação": essa etapa trata da argumentação, que explica por que os instrumentos fazem as transformações que são observadas nos desenhos. O professor inicia discutindo sobre a transformação realizada pelo instrumento e, então, avança na argumentação, que explica por que, de fato, tal transformação é realizada. A argumentação é baseada em propriedades geométricas que, normalmente, fazem parte do programa de geometria escolar. Assim, para desenvolver essa etapa, é preciso retomar, inicialmente, as propriedades básicas a serem utilizadas na argumentação. Após a discussão conduzida pelo professor, os alunos são provocados a repensar a argumentação apresentada, escrevendo, com suas próprias palavras, por que o instrumento realiza tal transformação. Aqui, o interesse não está na reprodução de uma demonstração impecável, mas, sim, na verificação da capacidade do aluno de trabalhar no nível da dedução informal, ao fazer uma reflexão sobre a argumentação apresentada pelo professor.

A sequência didática, assim organizada, é uma possibilidade para o trabalho com argumentação dedutiva na escola – ela inicia com a exploração empírica dos instrumentos, avança com a construção que provoca a análise das propriedades dos instrumentos e finaliza com uma explicação que se caracteriza como uma demonstração, sem que haja maiores preocupações quanto ao formalismo da linguagem.

5.3 A experiência

Nesta sessão, vamos tratar da implementação da experiência. Apresentamos a turma, relatamos os encontros, falamos sobre o material produzido pelos alunos e fazemos uma análise dos resultados obtidos. Nas análises, procuramos observar o quanto foi possível introduzir os alunos no mundo das argumentações. Alem disso, procuramos realçar o papel dos registros figurais e discursivos da teoria de Duval no processo de desenvolvimento do pensamento geométrico de natureza argumentativa. A teoria de Van Hiele também nos ajudou para acompanhar as atitudes dos alunos nas diferentes etapas da sequência de atividades.

5.3.1 O cenário

A experiência didática foi realizada no Colégio de Aplicação da UFRGS, no primeiro semestre de 2012, com uma turma de primeiro ano do Ensino Médio. As aulas, num total de seis, aconteceram duas vezes na semana e tiveram a duração de duas horas, cada um.

A turma era formada por alunos repetentes, totalizando 16 alunos. Dentre as possibilidades de turmas que foram colocadas à disposição para realização da experiência, o professor titular sugeriu, de forma especial, essa turma, pois os alunos, em sua maioria, apresentavam pouca motivação para o estudo de matemática. O professor observou que uma atividade com uso de tecnologia poderia ser um fator de interesse para os alunos dessa turma.

Este cenário tornou mais desafiadora a experiência que estávamos propondo. O resultado da experiência poderia ser a "prova de fogo", quanto à pertinência de nossa proposta e do material projetado para tal. Os alunos não possuíam domínio das ferramentas do *software GeoGebra*, sendo que alguns disseram não conhecer o *software* e outros comentaram que não lembravam mais dos seus comandos básicos.

O professor titular esteve presente em diferentes momentos da atividade como observador, mas a condução da experiência ficou sob nossa inteira responsabilidade. No que segue, o professor referido é o autor desta dissertação.

5.3.2 O andamento das aulas

As atividades foram realizadas, em sua totalidade, no laboratório de informática. O laboratório apresenta dois ambientes, separados por divisórias: um dos ambientes tem computadores mais antigos com sistema *Windows*, o outro ambiente tem com computadores atuais com sistema *Linux*.

Devido à disposição dos computadores, lado a lado ao longo da parede, divididos em dois ambientes, preferimos concentrar os alunos em um único ambiente para os momentos de apresentação da proposta e de discussões coletivas. Isso criou certo transtorno, pois era necessário que os alunos carregassem cadeiras de um ambiente para outro.

O professor possibilitou que as tarefas fossem realizadas individualmente ou em duplas. Devido ao fato de um aluno ter faltado no primeiro dia, a partir do segundo dia, ele se sentou com uma dupla, formando o único trio. Apenas dois alunos trabalharam individualmente.

Referente à primeira e segunda atividades – a de exploração e a de construção – todos os alunos participaram e mostraram interesse, porém, na terceira – a de argumentação – dois alunos não participaram.

Conforme já mencionado anteriormente, em função do tempo dedicado a experiência didática, foram escolhidos três instrumentos para serem explorados pelos alunos: o pantógrafo, o rotor e o translator. Os três instrumentos foram trabalhados na *Atividade de Exploração* e na *Atividade de Construção*; a *Atividade de Argumentação* fez uso do rotor e do pantógrafo, pois optamos por não exceder o período de experiência combinado com o professor titular para não interferir nos seus planos quanto ao encerramento do trimestre. No que segue, descrevemos o desenrolar de cada um dos encontros e, na seção 5.3.3, tratamos da análise da produção dos alunos.

O primeiro encontro

No primeiro encontro, apresentamos o *PowerPoint* "*Instrumentos articulados de desenho"* e explicamos a proposta de trabalho e seus objetivos: identificar que tipo de transformação o instrumento realiza, construir o instrumento e explicar, com argumentos matemáticos, por que o instrumento realiza determinada transformação. Falamos sobre o Museu Italiano de Instrumentação Científica e sua coleção de instrumentos, salientando que tais instrumentos tiveram importante aplicação no passado, principalmente o pantógrafo na reprodução de mapas e obras de artes.

Após esse primeiro momento, os alunos iniciaram a etapa de "Atividade de Exploração" dos três instrumentos virtuais disponibilizados no *GeoGebra Tube – o pantógrafo, o rotor e o translator* (material apresentado na seção 4.1). Nesse segundo momento, procuramos não apresentar maiores explicações, pois queríamos ver a eficácia das orientações contidas no material quanto ao modo de utilizar o instrumento e realizar desenhos.

A "Atividade de Exploração", realizada no primeiro encontro, solicitava que os alunos descrevessem, com palavras, os instrumentos e as transformações por eles produzidas. Para isso, deveriam realizar, inicialmente, algum desenho com o ponto vermelho (por exemplo, uma letra ou figura geométrica) e observar que desenho fora produzido pelo ponto verde. O professor incentivou os alunos a descobrirem uma relação entre os dois desenhos – o vermelho e o verde – e que procurassem escrever, com clareza, as suas observações. Para coleta do material escrito, solicitamos aos alunos que escrevessem no editor de texto suas respostas e, para a coleta dos desenhos, sugerimos a tecla *PrintScreen* do teclado, que captura a tela do computador. Então, salvaram a tela capturada usando um editor de imagens. Solicitamos aos alunos que enviassem seus dois arquivos via *e-mail*.

O segundo encontro

O segundo encontro tratou da "Atividade de Construção". Iniciamos com a apresentação de alguns dos recursos do software *GeoGebra*: a construção de pontos, retas, segmentos de retas, circunferência com centro em um ponto; pontos de intersecção entre dois objetos, reta perpendicular a uma reta dada, e reta paralela a uma reta dada. Também foram apresentados os recursos para editar cores e espessuras de linhas e pontos.

Após esta breve apresentação do *GeoGebra* , foi feita, coletivamente, a construção do Rotor. Um aluno se apresentou como voluntário para proceder, no computador, a construção, conforme a discussão de procedimentos a serem feitos ia avançando. Outros alunos também se manifestaram para manipular no *GeoGebra*.

Para realizar essa construção, os alunos receberam uma folha contendo o protocolo de "passo a passo" da construção (o material "Protocolo de Construção" foi apresentado no capítulo3) e, em conjunto, lendo em voz alta, foi-se procedendo com a construção. Nossa intenção, com este procedimento, era facilitar a compreensão da linguagem geométrica e ajudar na familiarização com os comandos do GeoGebra. Assim, quando os alunos fossem solicitados a construir o instrumento pantógrafo sem ajuda maior do professor, não teriam problemas quanto aos aspectos operacionais.

Para a construção do Pantógrafo, os alunos se organizaram em duplas, um trio e alguns se mantiveram sozinhos, conforme suas preferências. Alguns alunos tiveram dificuldades na construção, pois o protocolo apresentado possibilitava, a partir de certo ponto, dois caminhos de construção diferentes, dependendo da escolha feita entre dois pontos. Alguns alunos escolheram o ponto que deveria ser escolhido e conseguiram finalizar o instrumento, porém, outros alunos escolheram o outro ponto, o que complicou a finalização da construção. A indicação de escolha do ponto deveria ter sido bem esclarecida e assim foi preciso reformular o protocolo de construção. Estando a aula no seu término, foi acordado entre professor e alunos que o trabalho seria retomado no encontro seguinte.

O terceiro encontro

Foi com o protocolo de construção do pantógrafo que todos os alunos retomaram a construção. Nas duplas que apresentaram maiores dificuldades, foi necessária a intervenção e a ajuda do professor. Para os alunos que acabavam a construção do pantógrafo, o professor sugeriu que retomassem a construção do rotor, agora sozinhos. Alguns alunos aceitaram o desafio e construíram o rotor novamente.

Os arquivos de construção do pantógrafo produzidos pelos alunos no *GeoGebra* foram salvos e enviados por e-mail para o professor.

O quarto encontro

No quarto encontro, tratamos da *Atividade de Argumentação*. No primeiro momento, apresentamos o *PowerPoint* “Algumas propriedades básicas de geometria” (material didático apresentado na seção 4.3.4), necessárias no desenvolvimento das argumentações que explicam as transformações produzidas pelos instrumentos. Salientamos que essas propriedades básicas seriam úteis para explicar e comprovar que os instrumentos, de fato, realizam transformações geométricas. Ainda, reforçamos que as propriedades básicas seriam nossa base para a construção da explicação (argumentação).

Após a discussão sobre as propriedades básicas, iniciamos a “Atividade de Argumentação” do instrumento que achamos ser a mais difícil para encadear os raciocínios dedutivos: o Rotor. Com esta argumentação, tínhamos, por objetivo, possibilitar um momento de discussão com os alunos referente à linguagem geométrica e aos encadeamentos dedutivos. Esses últimos seriam feitos a partir da constatação de propriedades básicas. Notamos que o assunto *argumentação* não é comum para os alunos, havendo momentos em que precisamos enfatizar o propósito da argumentação, que neste caso é de explicar que o instrumento realmente realiza transformações geométricas.

Após a discussão com os alunos sobre a argumentação, comentamos que, no próximo encontro, trataríamos da argumentação do pantógrafo.

O quinto encontro

Julgando que a argumentação relativa ao instrumento pantógrafo seria mais fácil de ser acompanhada pelos alunos, pois os raciocínios lógicos poderiam ser mais evidentes, propusemos que, após a discussão sobre a argumentação, que explica a transformação do instrumento, eles tentassem reescrever a argumentação, utilizando palavras e esquema próprios. Foi enfatizado que não queríamos uma cópia da argumentação apresentada, e, sim, que pensassem e vivessem um processo de construção de argumentação. Para esta atividade, foi entregue uma folha contendo a figura do pantógrafo, na qual os alunos registraram seus argumentos e possíveis esquemas de uso do desenho.

Ressaltamos que essa atividade não tinha por objetivo que o aluno construísse sozinho sua argumentação, visto que o processo de construção de uma argumentação é complexo, conforme discutido no Capítulo 2. O objetivo dessa atividade era inserir os alunos no processo de construção de argumentação, para posterior análise de suas facilidades e dificuldades. Essa atividade se justifica mais do ponto de vista cognitivo, pois não estávamos interessados em ver se os alunos iriam apresentar a argumentação igual àquela discutida coletivamente, pois isso seria uma mera cópia e estaríamos observando, sobretudo, a capacidade de memorização. Estávamos interessados nas colocações, nos esquemas e nas argumentações próprias dos alunos, a serem produzidas a partir da apresentação do professor.

5.3.3 Análise da produção dos alunos

A partir do material coletado e das observações feitas pelo professor é que vamos analisar os resultados obtidos nas três atividades que constituíram a sequência didática. Quanto ao material coletado, fizemos uma escolha referente as produções que apresentassem aspectos diferentes, pois haviam produções semelhantes. Ainda, escolhemos produções que julgássemos mais completas e outras incompletas Quanto às observações, foram registrados os momentos e perguntas que chamaram a atenção do professor no andamento dos trabalhos. Na “Atividade de Exploração” vamos analisar a linguagem geométrica que os alunos utilizaram na explicação da transformação. Na “Atividade de Construção” vamos analisar a construção produzida a partir do protocolo “passo-a-passo” que foi entregue aos alunos. E na “Atividade de Argumentação” vamos analisar a desenvoltura dos alunos para a articulação dos raciocínios dedutivos que foram apresentados pelo professor, no momento de explicar a transformação produzida pelo pantógrafo.

- Análise da “Atividade de Exploração”

Nesta atividade os alunos exploraram três instrumentos: o rotor, o pantógrafo e o translator. No que segue trazemos a produção dos alunos relativas aos dois primeiros instrumentos; devido aos diferentes ritmos de trabalho dos alunos, o terceiro instrumento foi explorado por poucos e, assim sendo, concentramos a análise no material que é mais substancial.

Quanto à exploração do rotor, nos desenhos apresentados algumas duplas contornaram o *quadro limite* com o ponto vermelho para analisar o comportamento do instrumento. Na Figura 5.1, temos a produção da dupla A&B.

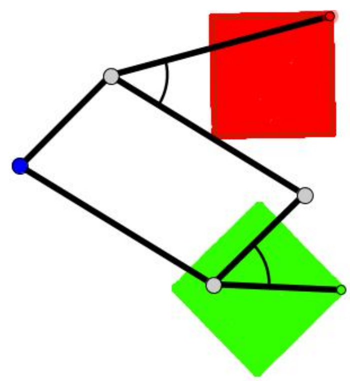


Figura 5.1: Atividade de exploração – dupla A&B

Fonte: Autor

Esta dupla pintou o *quadro limite* no momento de explorar o instrumento, explicando a relação entre as figuras produzidas: “*No instrumento de desenho percebemos que os desenhos reproduzidos pelos pontos vermelho e verde são os mesmos, porém em posições diferentes, pois os ângulos que o fazem são os mesmos, porém em posições distintas”*. Não encontramos na escrita dos alunos a palavra rotação, porém podemos perceber um certo entendimento da rotação quando falam sobre *mesmos ângulos* e *posições distintas.* Quando utilizam a expressão *mesmos ângulos,* interpretamos que queriam expressar que o ângulo determinado pela vareta que tem como extremidade o ponto vermelho e a vareta correspondente a lado do paralelogramo é igual ao ângulo determinado pela vareta que tem o ponto verde como extremidade e a vareta correspondente a outro lado do paralelogramo. Quando utilizam a expressão “*posições distintas*”, interpretamos que queriam expressar que o desenho verde está em uma posição diferente do desenho vermelho, e que esta posição diferente foi obtida através de uma rotação.

A dupla C&D desenhou a letra U (Figura 5.2) e utilizou uma linguagem informal de geometria para descrever a transformação realizada pelo instrumento, porém mostrou algum entendimento. A dupla salienta que não há variação de tamanho entre a figura vermelha e verde, percebendo que “*muda o ângulo*”, e que “*a verde está virada*” e a “*vermelha está reta*”. Em nenhum momento é mencionada a palavra “rotação”, talvez porque esta palavra não está em seu vocabulário; para expressar a rotação se referem a “*figura virada*”. A dupla também menciona que “*muda o ângulo*”. Temos uma segunda situação na qual, a partir da exploração do instrumento e da visualização dos desenhos, os alunos não mencionam a palavra rotação, mas mencionam a palavra ângulo.

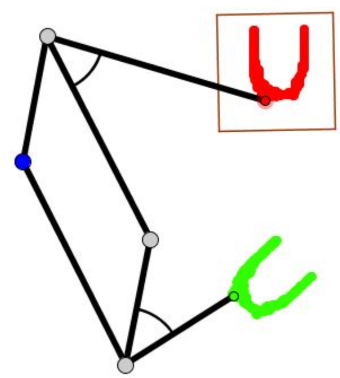


Figura 5.2: Atividade de exploração – dupla C&D
Fonte: Autor

A aluna E desenhou uma espécie de círculo (Figura 5.3) primeiramente, destacando que o desenho “*verde desce para baixo*” em relação ao desenho vermelho Neste sentido, interpretamos que a aluna visualizou a transformação erroneamente como uma translação. Este fato ocorreu devido ao tipo de desenho que a aluna realizou, sendo de difícil percepção visual observar que um “círculo” sofre uma rotação. Então, durante a experiência, sugerimos a aluna que desenhasse uma figura que não tivesse a forma semelhante de um círculo. Então a aluna desenhou um triângulo (Figura 5.4), registrando que o “*triângulo verde vira e desce para baixo*”. Com esta frase a aluna indica que visualizou uma rotação do triângulo verde em relação ao vermelho, em torno de um de seus vértices, pois ao dizer que o triângulo “desce para baixo” não está identificando o ponto azul como sendo o centro da rotação em questão.

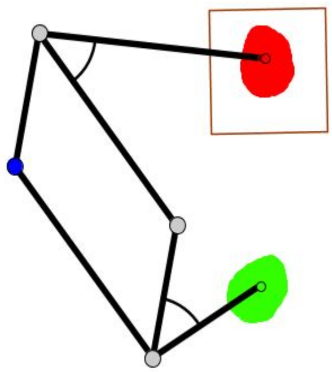


Figura 5.3: Atividade de exploração – aluna E

Fonte: Autor

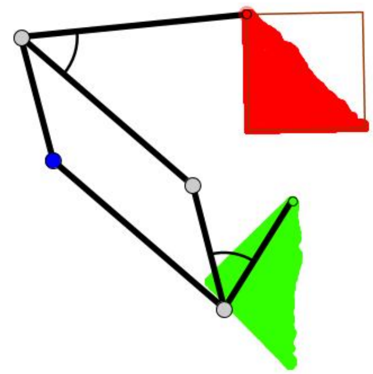


Figura 5.4: Atividade – aluna E (triângulo)

Fonte: Autor

Na exploração do pantógrafo os alunos mostraram mais desenvoltura para expressar a transformação que é produzida com o instrumento. Acreditamos que esse fato aconteceu porque, a partir da visualização, a ampliação é mais fácil de ser percebida e explicada.

A dupla F&G expressou o conceito de ampliação com as palavras "o *ponto verde repete o desenho numa proporção maior em relação ao ponto vermelho"(Figura 5.5).* Outra dupla disse que *"os pontos verde e vermelho fazem o mesmo desenho, mas o verde é mais ampliado"*. Está claro que quando dizem "*mesmo desenho*" estão pensando em mesma forma, ou seja, a figura continua com suas propriedades. A dupla H&I desenhou uma figura circular (Figura 5.6) registrando que "o desenho verde aumenta de tamanho", embora com uma linguagem informal.

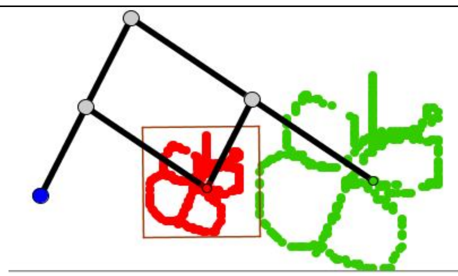


Figura 5.5: Atividade de exploração – dupla F&G
Fonte: Autor

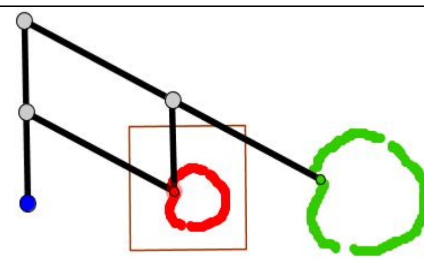


Figura 5.6: Atividade de exploração – dupla H&I
Fonte: Autor

As produções dos alunos indicam explorações na direção de entendimento das transformações, porém percebe-se o quão difícil é, para eles, expressarem as ideias com alguma precisão de linguagem matemática. Os alunos quase não fizeram referências às palavras "rotação" ou ampliação", e isto indica que dificilmente chegariam à redação matemática que expressa estas transformações. Mas eles fizeram referências, por exemplo, à "retas", "triângulos" e "ângulos", mostrando que identificam formas geométricas básicas – característica do *nível zero* de teoria de Van Hiele. Quanto aos registros de representação de Duval: os alunos trabalharam com o registro geométrico dinâmico, ao manipularem o instrumento virtual; quanto ao trabalho com registro discursivo, este aconteceu no momento da explicação referente a transformação geométrica realizada pelo instrumento.

- Análise da "Atividade de Construção"

Esta atividade, conforme já mencionado, iniciou com a construção coletiva do rotor, para que os alunos pudessem se familiarizar com a linguagem geométrica e com os recursos do software *GeoGebra*. Após a construção deste primeiro instrumento, os alunos foram convidados a fazer a construção do pantógrafo. A experiência com o protocolo de construção não teve o resultado esperado, pois algumas duplas tiveram sucesso e outras não, e foi preciso reformular o protocolo[16]. Vamos analisar a produção dos alunos feita com os dois protocolos. Quanto às duplas que, com o primeiro protocolo, tiveram sucesso na construção, observamos atitudes de antecipação quanto ao aspecto visual do instrumento. Ou seja, a construção não estava sendo controlada só pelo "passo-a-passo" do protocolo, mas sim pela sua estrutura global – os alunos sabiam a onde queriam chegar, indicando uma maior autonomia para avançar na construção, com controle para além do simples "passo-a-passo" dado no protocolo. Interpretamos que esse êxito de algumas duplas é decorrente da visualização do instrumento como um todo, no momento da "Atividade de Exploração".

O resultado apresentado pelos alunos, ao usarem o segundo protocolo de construção do pantógrafo, foi muito bom; todos conseguiram construir o instrumento e alguns até fizeram um melhor acabamento visual ao colorir as varetas. Na Figura 5.7, temos a construção da dupla G&H.

[16] O protocolo reformulado encontra-se no Capítulo 3. No primeiro protocolo, em certo passo da construção era dada a possibilidade do aluno escolher um dentre dois pontos já construídos. Se escolhesse o ponto inadequado, tomaria caminho que não conclui com a construção do instrumento. No protocolo reformulado, o texto apresenta-se mais claro quanto à escolha do ponto adequado.

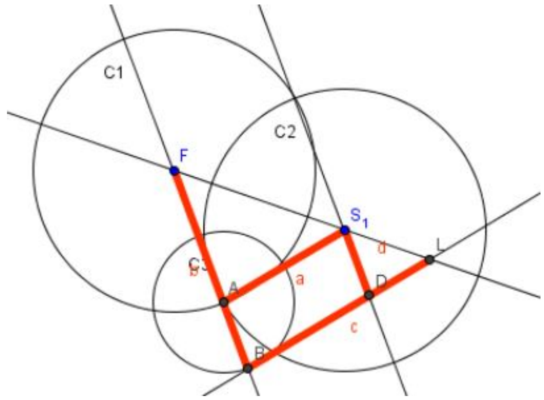


Figura 5.7: Atividade de construção – dupla G&H
Fonte: Autor

Já a dupla I&J, além de apresentar a construção, registrou com desenho as ampliações feitas pelo pantógrafo (Figura 5.8) .

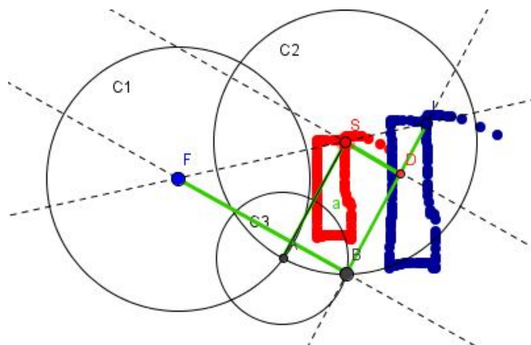


Figura 5.8: Atividade de construção – dupla I&J
Fonte: Autor

As duas duplas deixaram visíveis os objetos geométricos que participam da construção e destacaram as varetas do instrumento em vermelho (dupla G&H) e verde (dupla I&J).

A dupla K&L preferiu esconder os elementos que são auxiliares na construção e só deixou visíveis as varetas; para isso utilizaram o recurso "*esconder objeto*" do *GeoGebra*.

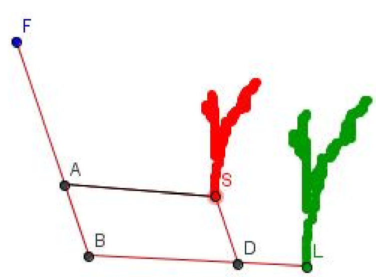


Figura 5.9: Atividade de construção – dupla K&L
Fonte: Autor

A dupla M&N conseguiu construir e testar o instrumento, fazendo um desenho com a ponta “azul” e, observou a ponta “cinza” fazendo a figura ampliada, conforme mostra a Figura 5.10.

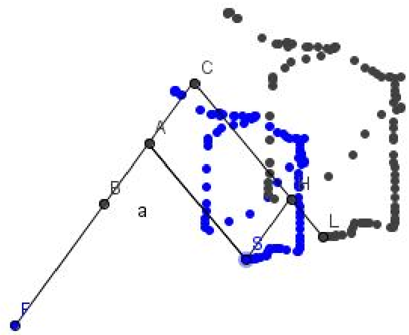


Figura 5.10: Atividade de construção – dupla M&N
Fonte: Autor

Na “Atividade de Construção”, os alunos trabalharam com a leitura e interpretação da linguagem geométrica, retomando conceitos de geometria referente a pontos, retas e circunferência. Além disso, aprenderam a utilizar os recursos básicos de construção do *GeoGebra*. Diante da produção dos alunos, podemos inferir que eles realizaram um trabalho no *nível um* de teoria de Van Hiele – o *nível da análise*. Os alunos compreenderam, a partir da linguagem geométrica, o que deve ser construído e, ainda, como deve ser construído no software *GeoGebra*. Identificaram na construção as retas paralelas, as intersecções entre retas, os círculos a partir de centro e raio.

No processo de construção no *GeoGebra*, os registros discursivo e geométrico da teoria de Duval se fizeram presentes no trabalho de conversão do protocolo de construção para figuras geométricas dinâmicas e manipuláveis na tela do computador. Ou seja, o processo de interpretação do registro discursivo – o texto do protocolo – e a implementação no registro geométrico – a construção no *GeoGebra* – contempla as conversões que, segundo Duval, são habilidades que devem ser valorizadas no processo de aprendizagem da matemática. Diferentemente da “Atividade de Exploração”, na “Atividade de Construção” observamos maior facilidade dos alunos na realização da tarefa, o que pode explicar, em parte, o maior entusiasmo dos alunos neste segundo momento da sequência didática. Na conversão do registro discursivo para o geométrico os alunos já têm, de antemão, a explicitação dos elementos geométricos a serem considerados; já na conversão do registro geométrico para o discursivo, os alunos precisam tomar iniciativas quanto à escolha de uma adequada linguagem geométrica para comunicar as ideias e aqui, segundo Duval (2003), as exigências cognitivas são, de fato, maiores.

- Análise da “Atividade de Argumentação”

Na terceira etapa da sequência didática, o professor iniciou conduzindo, frente ao grande grupo, a apresentação da argumentação que explica a transformação produzida pelo rotor e aqui foi utilizado o material auxiliar “Algumas propriedades básicas da geometria” (apresentado na seção 4.3).

É importante ressaltar, novamente, que a argumentação deve ser feita a partir de propriedades básicas de geometria e que o ponto de partida é o entendimento do que deve ser demonstrado, para então serem desenvolvidos os encadeamentos lógicos, a partir das hipóteses de construção do instrumento. Por exemplo, no caso só pantógrafo, se sabemos que na construção do instrumento existem retas paralelas e duas retas transversais a estas, podemos usar na argumentação o *Teorema de Tales*; da mesma forma – no caso do rotor – se três retas da construção estão determinando um triângulo, podemos usar na argumentação a propriedade que diz que a “*soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus*”. No momento da apresentação da argumentação sobre o rotor, o professor estabeleceu uma discussão com o grande grupo para esclarecer esta forma de produzir argumentos, nada familiar aos alunos que estavam participando da experiência.

A segunda argumentação apresentada pelo professor foi sobre o funcionamento do instrumento pantógrafo, que já havia sido construído pelos alunos, no *GeoGebra*, no momento da “Atividade de Construção”. Considerando esta familiaridade dos alunos com o pantógrafo e considerando que a argumentação sobre o seu funcionamento poderia ser mais facilmente acompanhada (por ser mais simples o encadeamento lógico), o professor combinou com o grande grupo que acompanhariam com atenção a argumentação e que depois redigiriam, com suas palavras, as suas explicações, sem a preocupação de fazer uma copia da “fala” do professor, mas sim, procurando mostrar entendimento sobre a transformação que o instrumento realiza. O objetivo desta atividade foi observar o quanto os alunos conseguiriam articular as ideias que produzem uma argumentação, aqui pensando-se no nível 2 de desenvolvimento do pensamento geométrico da teoria de Van Hiele – o da *dedução informal*, quando os alunos conseguem acompanhar uma demonstração feita pelo professor. Coletamos a produção dos alunos em uma folha que foi entregue contendo o desenho do instrumento com destaque indicando ângulos e congruências de segmentos

(Figura 5.11). Foi sugerido que individualmente fizessem a redação do texto com a explicação.

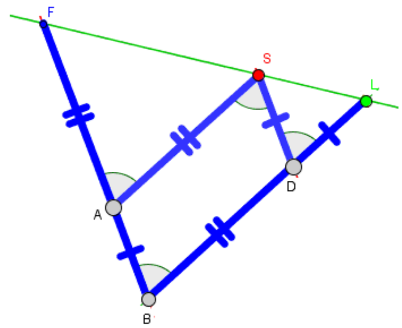


Figura 5.11: Instrumento presente na folha entregue aos alunos
Fonte: Autor

Nesta atividade o comportamento dos alunos foi bem diversificado; algumas duplas mostraram-se muito empolgadas para fazer a argumentação, porém outras não tiveram tanto entusiasmo. Não era nossa expectativa que os alunos conseguissem construir uma argumentação impecável e sem erros de linguagem; queríamos que eles expressassem suas argumentações tomando como subsídio a apresentação feita pelo professor.

Na análise da produção dos alunos não identificamos textos que possam ser classificados como de argumentações dedutivas. No pantógrafo, de acordo com a notação da Figura 5.11, são duas as propriedades que garantem que ele faz uma ampliação: a) o ponto *S* sempre pertence à reta determinada pelos pontos *F* e *L*, ou seja, os pontos *F*, *S* e *L* estão sempre alinhados; b) a razão *FL/FS* é sempre igual à *FB/FA* e esta é a razão de ampliação. Estas propriedades foram demonstradas pelo professor frente ao grande grupo, mas nenhum aluno redigiu texto que explicasse porque o pantógrafo tem estas propriedades. Na sua grande maioria os alunos fizeram referencia à propriedade b) que está diretamente relacionada com o teorema de Tales; somente alguns alunos fizeram referencia à propriedade a) que diz respeito ao alinhamento de três pontos. Mas do grupo de dezesseis alunos, somente três alunos apresentaram redação que ficou aquém desta referencia às propriedades do pantógrafo. Abaixo transcrevemos produções dos alunos que ilustram nossas constatações.

Na produção do aluno A, temos novos elementos no desenho: o aluno registrou no desenho, de forma empírica, o tamanho das varetas (tamanho 1 e 2), indicando que a vareta

FB apresenta tamanho 3 e registra o fator de ampliação 1,5 dado pela razão $\frac{3}{2}$. O aluno também indica a congruência de ângulos ao nomeá-los *y* e *z*.

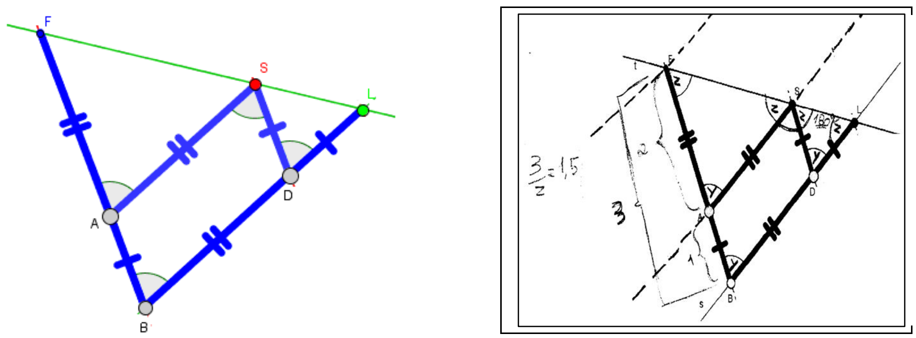
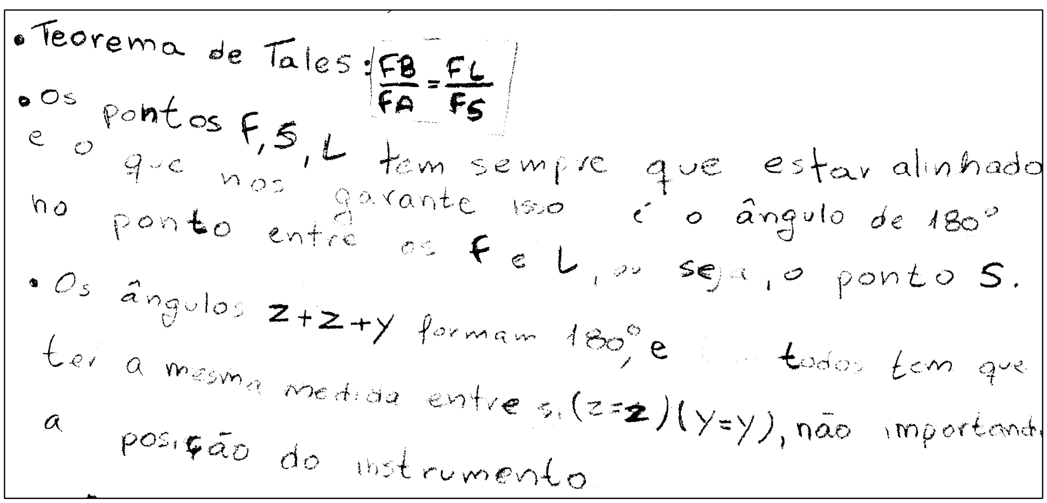


Figura 5.12: Atividade de argumentação – aluno A
Fonte: Autor

O aluno inicia mencionando o Teorema de Tales e apresenta a relação de proporção através de linguagem simbólica que faz uso da notação *FB, FA, FL e FS* que identifica os diferentes segmentos (Figura 5.12). Mas ele não chega a explicitar as retas paralelas e transversais que garantem a hipótese do teorema.



• Teorema de Tales: $\frac{FB}{FA} = \frac{FL}{FS}$

• Os pontos F, S, L tem sempre que estar alinhado e o que nos garante isso é o ângulo de 180° no ponto entre os F e L, ou seja, o ponto S.

• Os ângulos z+z+y formam 180°, e todos tem que ter a mesma medida entre si (z=z)(y=y), não importando a posição do instrumento

Figura 5.13: Produção da demonstração – aluno A
Fonte: Autor

No segundo item da explicação, o aluno faz referência ao alinhamento dos pontos e apresenta a condição que garante este alinhamento, a saber, que $z+z+y=180$ tomando-se os ângulos que tem como vértice comum o ponto S (mencionado na sua redação). Mas ele não chega a apresentar o argumento que explica porque $z+z+y=180$.

O texto do aluno iniciou com a descrição das duas propriedades do pantógrafo e finalizou com a descrição da transformação (Figura 5.14).

• O ponto "L" reproduz o movimento do ponto "S" na mesma proporção de: $\frac{FB}{FA}$, que no caso é 1,5 (porque $\frac{3}{2}$ = 1,5).

Figura 5.14: Continuação da produção do aluno A
Fonte: Autor

O aluno A utilizou pensamento empírico ao indicar, no instrumento, as medidas dos segmentos e a correspondente razão de ampliação *1,5*; mas não fez o mesmo para os ângulos ao utilizar letras para expressar suas medidas, o que interpretamos como discernimento quanto à mudança de medida do ângulo, de acordo com o movimento do instrumento. O aluno usou tanto dados empíricos (medidas das varetas) quando dados generalizadores (medidas dos ângulos). Quanto aos diferentes registros: ele utilizou registro geométrico ao fazer um desenho esquemático do pantógrafo e também registro com a linguagem natural e com escrita simbólica para descrever as propriedades do instrumento. A produção do aluno A, mesmo não sendo do tipo "argumentação dedutiva", mostra um bom entendimento da linha de raciocínio apresentada pelo professor ao fazer referência às duas propriedades do instrumento e, ao final, ao trazer a descrição da transformação; o texto mostra segurança na organização das ideias, em especial, quando faz uso de notação diferente daquela usada pelo professor no momento da apresentação da demonstração.

Identificamos a produção do aluno A como a que melhor reflete o entendimento do funcionamento do pantógrafo.

A produção do aluno B (Figura 5.15) apresenta outros aspectos, mencionando as duas condições de argumentação – Teorema de Tales e condição de alinhamento de três pontos.

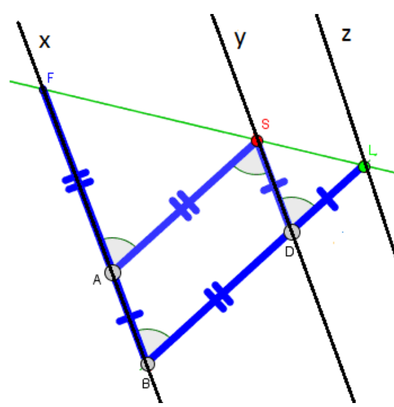


Figura 5.15: Atividade de argumentação – aluno F
Fonte: Autor

Transcrevemos a produção do aluno: *"Para que o instrumento funcione é necessário que haja 3 retas paralelas x, y, z e F, S, L precisam estar alinhados com B, D, L e F, A, B. Também é necessário que o tamanho de FA seja igual a AS e BD e que o tamanho de AB seja igual a SD e DL. E o ângulo formado pelos triângulos entre F, S, A seja igual a 180º. Assim como o triângulo formado por S, L, D a soma dos ângulos é 180º."* O aluno menciona o fato da soma dos ângulos do triângulo ser 180º, tratando-se de uma obviedade matemática, porém para o aluno esta fato não mostra-se como óbvio – o aluno procura recuperar a informação discutida pelo professor sobre o fato da soma dos ângulos do triângulo ser 180º.

Os demais alunos essencialmente fizeram referência ao Teorema de Tales; eles não chegaram a considerar a questão do alinhamento dos pontos. No geral, colocaram em destaque, na figura, as retas paralelas que garantem a aplicação do Teorema de Tales embora não façam referência a tal fato no momento da redação do teorema. Na redação, no geral, não colocam em relação o Teorema de Tales e a transformação de ampliação realizada pelo pantógrafo.

Na Figura 5.16 temos o desenho do aluno C. Ele nomeou os segmentos determinados pelas retas paralelas com as letras *a*, *b*, *c* e *d* e sua produção escrita foi: *"Os triângulos têm que apresentar semelhança (LAL). O tamanho da ampliação é encontrado pela soma de FAB e depois dividi por FA, assim como a soma em FSL dividido por FS. 2 retas transversais passam por 3 paralelas formando segmentos. A relação entre eles é o teorema de Tales, tendo* $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$ *."*

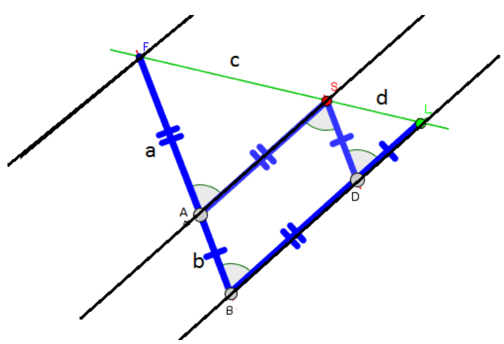


Figura 5.16: Atividade de argumentação – aluno C
Fonte: Autor

O texto do aluno C apresenta ideias pouco articuladas, pois inicia falando de semelhança de triângulos, depois fala de ampliação e finaliza mencionando o teorema de Tales, mas não existe nenhuma articulação entre as três ideias. Também se vê imprecisão de linguagem quando menciona "*soma de FAB*" ou "*soma em FSL*" para referir, respectivamente, ao "*comprimento dos segmentos FB e FL*".

O aluno D destacou, na sua figura, uma outra configuração de retas paralelas diferente daquela considerada pelo professor no momento de sua argumentação – aqui foram utilizadas as retas determinadas pelos segmentos AS e BL (Figura 5.17). A escolha das retas paralelas feitas pelo aluno D, diferentes das escolhidas pelo professor, indica maior segurança o aluno para expressar o teorema de Tales. A sua redação foi: "*Teorema de Tales: com a soma do lado (a) com mais (b) dividido por (a) é igual a soma de (c) com mais (d) dividido por (c). Exemplo: a=2, b=1, c=3,56 e d= 1,78.* $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$; $\frac{2+1}{2}=\frac{3,56+1,78}{3,56}$; $1,5=1,5$ *(iguais).*"

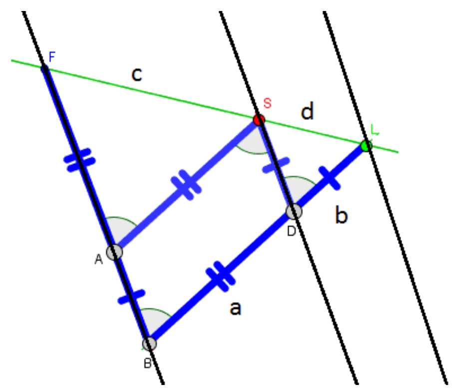


Figura 5.17: Atividade de argumentação – aluno D
Fonte: Autor

O aluno, na redação, não fala do paralelismo das retas; só menciona a conclusão do teorema. Ele também apresenta a conclusão de forma empírica, ao atribuir valores. Na sua redação não identificamos maiores problemas quanto à linguagem utilizada.

Na Figura 5.18 temos o desenho do aluno E, com destaque para as retas paralelas a serem consideradas no Teorema de Tales. O aluno essencialmente trata de escrever o enunciado do Teorema de Tales, e não faz nenhuma relação com o instrumento. Transcrevemos seu texto: "*O Teorema de Tales consiste que o ponto FB dividido por FA tem que ser igual à FL dividido por FS, ou seja,* $\frac{FB}{FA}=\frac{FL}{FS}$ *. E a linha de F é paralela as retas AS e BL.*"

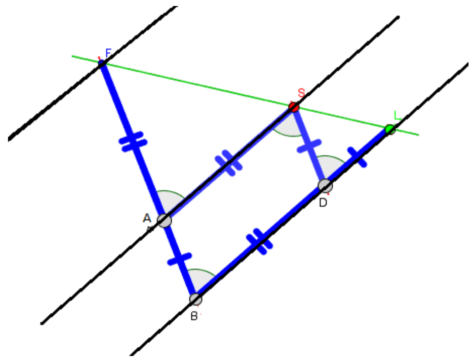


Figura 5.18: Atividade de argumentação – aluno E
Fonte: Autor

O texto do aluno D também tem problemas na linguagem matemática quando escreve "*o ponto FB ...*" em lugar de "*o segmento FB...*"; ou quando utiliza a expressão "*a linha de F*" para fazer referencia a "*a reta que passa por F*". Uma tal redação nos permite inferir, mais uma vez, o quão difícil é para os alunos a elaboração de um texto que faz uso de linguagem natural e simbólica. Nos parece que ao fazer referencia ao "ponto FB" ou a "*linha de F* ", o aluno tem dificuldades é na redação.

Até aqui temos os alunos A, B, C, D e E que falam das propriedades do instrumento, e cinco produções é o suficiente para dar uma panorâmica do grupo que se saiu, melhor.

A seguir trazemos dois exemplos (aluno F e aluno G) de produção que não chegam a mencionar as propriedades que garantem a transformação de ampliação do instrumento.

O aluno F apenas descreveu o instrumento, como podemos ver na figura a seguir.

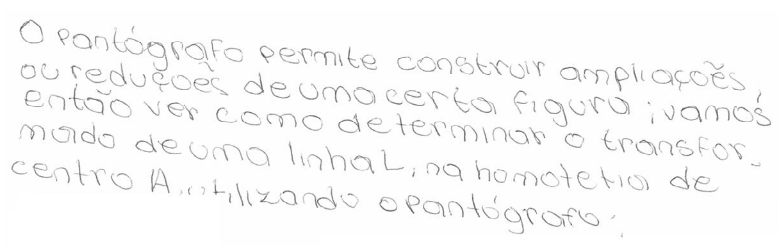

O pantógrafo permite construir ampliações
ou reduções de uma certa figura; vamos
então ver como determinar o transfor-
mado de uma linha L, na homotetia de
centro A, utilizando o pantógrafo.

Figura 5.19: Atividade de argumentação – aluno F (parte 1)
Fonte: Autor

Percebemos que o aluno menciona a palavra *homotetia*, relacionando-a com o conceito de ampliação. A seguir, o aluno explica como o instrumento funciona, dizendo que "*fixa-se o pantógrafo no ponto A (centro da homotetia)"* (Figura 5.20). Vimos que o aluno confunde-se com os pontos, sendo que o ponto fixo do pantógrafo é o ponto *F* e não o *A*.

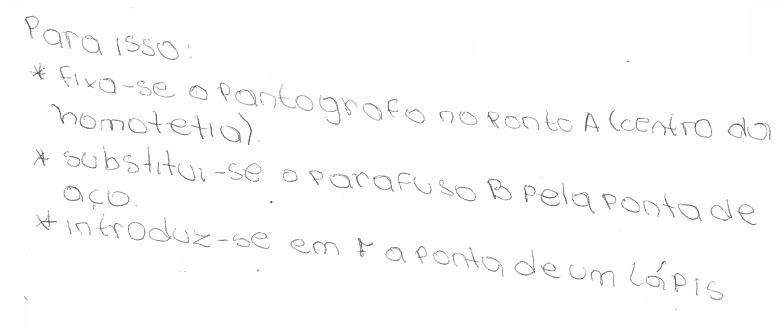

Para isso:
* fixa-se o pantografo no ponto A (centro da homotetia).
* substitui-se o parafuso B pela ponta de aço.
* introduz-se em F a ponta de um lápis

Figura 5.20: Parte 2 da produção do aluno F
Fonte: Autor

Novamente percebemos que o aluno confunde-se com as letras que representam os vértices, sendo que relacionou a letra *F* com a ponta *lápis,* quando *F* é o ponto *fixo* do instrumento. Na figura a seguir, podemos perceber que as ideias do aluno são confusas, utilizando uma linguagem que não corresponde ao real funcionamento do instrumento.

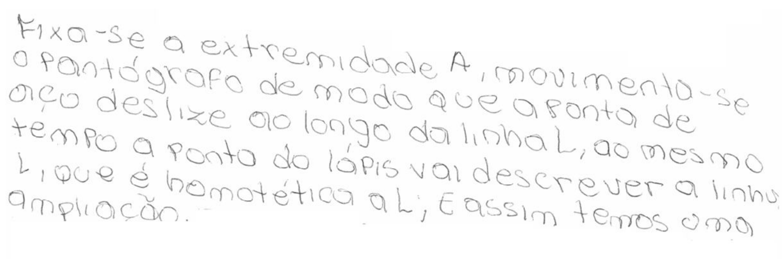

Fixa-se a extremidade A, movimento-se o pantógrafo de modo que a ponta de aço deslize ao longo da linha L, ao mesmo tempo a ponta do lápis vai descrever a linha L, que é homotética a L; E assim temos uma ampliação.

Figura 5.21: Parte 3 da produção do aluno F
Fonte: Autor

Na produção do aluno F não identificamos menção às propriedades que garantem o funcionamento do pantógrafo; percebe-se mais uma descrição, com algumas ideias confusas e equivocadas. O aluno não apresentou nenhum desenho esquemático em sua produção, fazendo uso apenas da linguagem natural.

O aluno G construiu as retas paralelas denominado-as de *r*, *u* e *x* (Figura 5.22) e apresentou o seguinte texto: “*Para a experiência funcionar tem que haver simetria, retas paralelas (r, u, x), ângulos coesos, um ponto fixo (F), dois pontos que não variam (A e B) e dois pontos que variam (S e L).*”

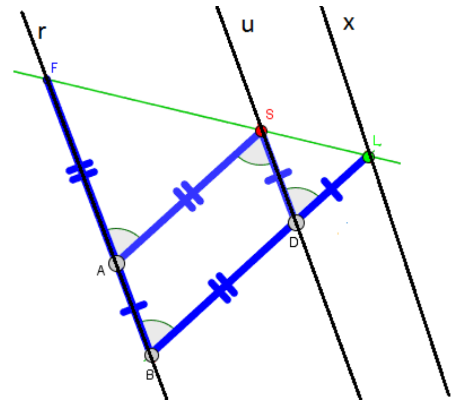


Figura 5.22: Atividade de argumentação – aluno G
Fonte: Autor

Não conseguimos interpretar o que o aluno pensou com a expressão "*ângulos coesos*", porém acreditamos que pensou em "ângulos congruentes". Podemos observar que utiliza a expressão "não variam" para os pontos A e B, e "variam" para os pontos S e L. Interpretamos essa afirmação do aluno como que "os pontos A e B não desenham", visto que são as articulações do instrumento – fato facilmente observado pela visualização do instrumento em movimento.

Este conjunto de produções é uma boa amostra do trabalho realizado pela turma de dezesseis alunos. No material coletado ficou muito claro o quão difícil é para os alunos expressarem sua ideias na forma esperada. Mesmo no grupo que apresentou um melhor domínio sobre as características do instrumento pantógrafo (alunos A, B, C, D e E), imprecisões de linguagem foram frequentes no texto – e este foi o desempenho da grande maioria dos alunos. Quanto aos argumentos de natureza dedutiva, mesmo tendo acompanhado a argumentação do professor em dois momentos – as explicações para o rotor e pantógrafo – os alunos não conseguiram produzir textos com encadeamento de ideias que explicassem o funcionamento dos instrumentos. Somente o aluno A conseguiu apresentar uma redação organizada das propriedades do instrumento, mas que não se caracteriza como uma argumentação dedutiva – o aluno redigiu propriedades, mas não chegou a explicar porque o pantógrafo realiza a transformação de ampliação. Podemos dizer que a turma que participou da experiência se apresenta, ainda de forma bastante incipiente, com as habilidades de pensamento geométrico que são do nível 2 da teoria de Van Hiele – o nível da dedução informal. A "Atividade de Argumentação" ofereceu os alunos a oportunidade de acompanharem as conversões entre registros geométrico e discursivo feitas pelo professor no desenvolvimento da argumentação dedutiva. Mas uma tal apresentação não foi suficiente para que os alunos produzissem conversões similares nos seus textos escritos.

Na última sessão deste capítulo, levando em consideração os resultados obtidos em nossa experiência, fazemos uma reflexão sobre as dificuldades e possibilidades relativas ao ensino e aprendizagem de demonstrações e argumentações dedutivas na matemática escolar.

5.3.4 Uma reflexão sobre a experiência

A sequência didática que organizou a experiência foi composta por três momentos: Atividades de *Exploração*, *Construção* e *Argumentação*. A característica de cada uma das atividades provocou variados índices de motivação e engajamento dos alunos. Percebemos alunos motivados nas três atividades; outros motivados em apenas duas delas. Porém, ao apresentar uma proposta de ensino diferenciada – uma aula que faz uso de tecnologia e que coloca os alunos em ativa aprendizagem – percebemos os alunos já motivados na primeira atividade – a "*Atividade de Exploração*".[17] Todos os alunos participaram, apresentaram suas ideias sobre as transformações produzidas pelos instrumentos. Nesta atividade foi trabalhada a conversão de registros – do geométrico (a figura) para o discursivo (o texto escrito em linguagem natural e simbólica), pois os alunos tiveram que explicar, com suas palavras, a transformação geométrica produzida pelo instrumento pantógrafo.

Os alunos apresentaram mais interesse nas duas primeiras atividades, pois elas se diferenciavam daquelas que são tradicionais na sala de aula. Na segunda atividade - a "*Atividade de Construção*"- observamos que o trabalho de construção foi provocador e desafiador para os alunos e todos se engajaram na atividade decididos a completar a construção do instrumento. Nestas atividades mobilizamos os registros discursivo e o geométrico, sendo que a conversão se deu do primeiro (protocolo de construção) para o segundo (figura dinâmica na tela do computador).

Na "*Atividade de Argumentação*", quando trabalhamos com as propriedades básicas de geometria necessárias à argumentação que explica a transformação produzida pelos instrumentos, alguns alunos se distanciaram do assunto, perdendo a atenção. Também identificamos o mesmo comportamento no momento que abordamos, em conjunto, as argumentações dos instrumentos; alguns alunos não prestaram a atenção e mantiveram-se

---

[17] Conforme já mencionado, estes alunos não frequentam o laboratório de informática nos momentos de aula de matemática, pois o professor titular não tem o hábito de utilizar as novas tecnologias.

dispersos, mesmo diante das indagações do professor com a intenção de motivá-los e de agregá-los a atividade de argumentação em grande grupo. Tal comportamento dos alunos indica o quão difícil pode ser o trabalho com argumentação na escola. Também percebemos que os alunos mantém certa dependência do professor para estabelecer uma linha de pensamento baseado em deduções. Raros foram os alunos que levantaram hipóteses de como iniciar a argumentação; no geral assumiram a postura de esperar que o professor apontasse os caminhos.

Na "*Atividade de Argumentação*" mobilizamos dois registros – discursivo e geométrico – nos dois sentidos simultaneamente, visto que utilizamos os dois registros para a construção da argumentação. Observou-se durante a experiência que a geometria dinâmica pode muito ajudar no processo de ensino e aprendizagem da geometria. Os alunos puderam manipular os instrumentos virtuais e produzir desenhos que estavam associados com as transformações geométricas no plano; os alunos construíram os instrumentos e através da manipulação trataram de conferir o apropriado funcionamento do instrumento construído; e finalmente, com a manipulação do instrumento puderam observar, neste momento com o acompanhamento do professor, as propriedades geométricas que estão no instrumento, como por exemplo: o alinhamento dos pontos F (Fixo), S (ponta Seca) e L (Lápis) no pantógrafo, independente da movimentação do instrumento; ou então o paralelismo que é dado pelo quadrilátero com lados opostos congruentes (um paralelogramo). No caso do desenho estático do pantógrafo, estas regularidades não saltam aos olhos da mesma forma. Este dinamismo das figuras é um interessante recurso da geometria dinâmica, pois assim o aluno percebe que o instrumento tem uma propriedade geométrica a ser explicada.

Notamos no decorrer da experiência que a linguagem geométrica dos alunos é muito precária, mesmo sendo eles alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Isto indica que as habilidades para usar o registro discursivo precisam ser mais trabalhadas no Ensino Fundamental, pois este registro é necessário na articulação de ideias e na produção de argumentos. Observamos que para transmitir uma ideia geométrica, o aluno utiliza uma linguagem que, em seu entendimento, julga adequada, porém quando o professor ouve o discurso do aluno, num primeiro momento, não consegue nem mesmo compreender a sua ideia. Assim, nesse processo em que o aluno explicita no discurso suas ideias, o professor precisa assumir um especial papel de ouvinte, no sentido de ajudar o aluno a elaborar um discurso mais cuidadoso para bem comunicar suas ideias. A teoria de Duval aponta para a importância do trabalho com as conversões de registros, no processo de aprendizagem; e nos parece que pouca tem sido a atenção explícita dada a este trabalho, na escola.

Os resultados de nossa experiência reforçam nossa concepção de que a argumentação em geometria na escola básica deve ser mais trabalhada. E também precisa ser trabalhada com atividades que possam motivar o aluno. Se possível com o auxílio da tecnologia, pois atividades assim planejadas propiciam ao aluno o papel de sujeito ativo no seu aprendizado – em atividades como as aqui apresentadas de exploração de instrumentos virtuais de desenho, o aluno pensa, reflete e elabora suas ideias, e avança com a mediação do professor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi motivado pela preocupação e interesse do autor em levar para a sala de aula as argumentações dedutivas em geometria, não só pela importância que ela tem na formação matemática dos alunos, mas também para lhes mostrar que o processo de demonstração em matemática não precisa ser penoso e, às vezes, quase impossível.

Nesse sentido, pensou-se trabalhar com a argumentação dedutiva via instrumentos virtuais de desenhos, nisso fazendo uso de tecnologia digital, no caso o software *GeoGebra*. A vontade de levar, para a sala de aula, uma proposta de ensino de matemática diferente da tradicional, também se origina em nossa inquietação quanto a necessidade de mudar e inovar a sala de aula, procurando acompanhar as demandas de alunos que vivem em sociedade repleta de tecnologias.

Escolhida a questão central da pesquisa, passamos para o estudo da compreensão de tais instrumentos de desenhos, a construção da modelagem geométrica e a explicação matemática dos funcionamentos. Pouco é o material disponível referente ao assunto e o que encontramos são as duas fontes: o *Museo Universitário di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica* (http://www.museo.unimo.it/theatrum/inizio.htm) e o site Edumatec (http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/index.php). Estas foram nossas fontes de pesquisa para elaborar o material didático digital: encontramos a modelagem geométrica dos instrumentos e adaptamos as instruções para o procedimento de construção. A fase mais complexa da elaboração do material didático foi aquela da modelagem geométrica dos instrumentos. Esse período foi marcado por muita aprendizagem e descoberta em relação à geometria presente nos instrumentos; muitos caminhos foram tomados, seguindo diferentes tentativas de construção, algumas pouco eficientes, sendo necessário repensar e criar novo procedimento de construção.

Esse processo de tentativas propiciou ao autor um maior entendimento sobre a natureza da geometria; e mais, propiciou um maior entendimento sobre a natureza da pesquisa em matemática. O processo de construção, calcado na criação de hipótese e tentativas, foi um dos aspectos mais desafiadores desta dissertação; a oportunidade de criar ou recriar uma modelagem de um instrumento, por si só, traz grande desenvolvimento e aprendizagem em geometria. E foi com esta vivência que nos engajamos na experiência com os alunos.

Durante a experiência em sala de aula, vimos que as tentativas da construção da modelagem geométrica do instrumento, por si só, se constituem em significativa tarefa para o desenvolvimento do pensamento e da linguagem geométrica. Na modelagem é preciso estabelecer relações entre objetos geométricos e desenvolver o raciocínio lógico e a capacidade de generalizar, abstrair, conjecturar e testar hipóteses. Estes aspectos todos são contemplados e sugeridos nos Parâmetros Curriculares Nacionais, e ainda, condizem do que seja matemática.

Durante a experiência, ficou muito claro que os alunos até acompanham a argumentação matemática dos instrumentos, mas eles não conseguem reelaborar esta mesma argumentação, nas suas palavras. Um resultado positivo observado ao longo da experiência, foi quanto as ações e atitudes dos alunos que resultaram no desenvolvimento do pensamento geométrico - inicialmente foi a manipulação dos instrumentos, depois a construção e finalmente as argumentações dedutivas.

Outra possibilidade de trabalho referente ao processo de aprendizagem diz respeito à forma de conduzir a Atividade de Construção, pois poderíamos solicitar que os alunos tentassem construir o instrumento virtual sem o protocolo de construção disponibilizado pelo professor. Tal construção poderia ser motivada a partir da observação do instrumento publicado no GeoGebra Tube. Porém esta abordagem demandaria mais tempo, visto que os alunos precisariam de tempo para suas tentativas de construção, até chegar na construção correta do instrumento.

Nossa experiência nos leva a concluir que o trabalho com argumentação dedutiva deve ser inserido, gradativamente no ensino básico, pois este trabalho envolve linguagem geométrica e percepção visual. Observamos que para iniciar um raciocínio dedutivo, o aluno precisa visualizar na figura as propriedades que fazem parte da hipótese e também visualizar as propriedades que são decorrentes das hipóteses que estão sendo consideradas.

Acreditamos que o ensino e aprendizagem de geometria, muito mais do que entender o mundo físico e resolver problemas, propicia um ótimo trabalho para desenvolver a capacidade de raciocinar e para estimular a criatividade. Contudo, pensamos que um tal trabalho de reflexão e organização de ideias precisa ser iniciado no Ensino Fundamental, pois de feito só no Ensino Médio pode ser tardio, no que diz respeito ao desenvolvimento da linguagem matemática e as habilidades de dedução.

Também acreditamos que o ensino da geometria deva iniciar com momentos onde o aluno possa explorar, passando por momentos onde vivencia o processo de construção, para aí sim, atingir ao patamar da argumentação. Observamos que a organização da sequência didática através das etapas de exploração, construção e argumentação pode ser uma forma de conduzir o processo de aprendizagem da geometria.

Esta pesquisa – através dos estudos teóricos realizados e da experiência implementada – propiciou momentos de reflexão e análise importantes para a formação do autor, sobretudo quanto ao entendimento do complexo processo de introdução da argumentação na escola básica. A partir desta pesquisa, concepções sobre o trabalho com argumentações no ensino básico se consolidaram e agora estamos seguros de que na educação é preciso ter-se espaços onde o aluno possa criar, articular e comunicar suas ideias, competências indispensáveis na sociedade moderna.

Nossa posição ao terminar o trabalho de dissertação é de que o processo de ensino e aprendizagem de argumentações em geometria precisa ser assumido como algo que propicie aos alunos o desenvolvimento de habilidades para criar, de habilidades para articular ideias, de habilidades para propor hipóteses, de habilidades para desenvolver raciocínios lógicos. Para que este desenvolvimento aconteça, o professor precisa apontar caminhos, pois caso contrário corre-se o risco de o aluno não conseguir avançar nas suas ideias. Foi com este espírito que foi feita a concepção do material didático e que foi concebida e implementada a experiência que validou o material. O material é o produto didático "Instrumentos Virtuais de Desenho" e está disponível na forma de quatro páginas web no endereço no *GeoGebra Tube*[18]. Estando na web, é com facilidade que outros professores podem fazer uso deste material e realizar experiências que também venham a contribuir para o trabalho com argumentações dedutivas na escola.

---

[18] Links para acessar o material: http://geogebratube.org/material/show/id/6460, http://geogebratube.org/material/show/id/6468, http://geogebratube.org/material/show/id/10192, http://geogebratube.org/material/show/id/10196.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, I. B. **Uma abordagem para a prova com construções geométricas e Cabri-Géomètre**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ARBACH, N. **O Ensino de Geometria Plana: o saber do aluno e o saber escolar.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

BALACHEFF, N. **Processus de Preuve et Situations de Validation**. Educational Studies in Mathematics, 18, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1987.

BOYER, C.B.; MERZBACH, U.C. **História da Matemática**. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2012. Tradução de Helena Castro da 3ª edição americana.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (5ª a 8ª séries). Brasília: Ministério da Educação, 1998.

CURY, H.N. **Análise de erros em demonstrações de geometria plana – um estudo com alunos do terceiro grau.** Dissertação de Mestrado, FACED/UFRGS, Porto Alegre RS, 1994.

DAMM, R.F. **Registros de Representação.** In: Machado, S. D. A. (org.) Educação Matemática: uma (nova) introdução. São Paulo, SP: educ, 2008, 3ª Edição.

DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática**. In Aprendizagem em Matemática. Machado, S. D. A. (org.). Campinas, SP: Papirus, 2003.

EDUMATEC. Coordenação de Maria Alice Gravina. Desenvolvido pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2000. Apresenta materiais que trata do potencial da tecnologia informática no âmbito da educação matemática escolar. Disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/index.php>. Acessado em: 10 janeiro de 2012.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5ª edição. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. Tradução de Hygino H. Domingues.

FERREIRA, R. C. **Orientações curriculares para o ensino de geometria: do período da Matemática Moderna ao momento Atual**. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP, 2008.

FETISSOV, A.I. **A demonstração em geometria**. Coleção Matemática: Aprendendo e Ensinando. São Paulo: Atual, 1994.

GRAVINA, M. A; CONTIERO, L. de O. **Modelagem com o GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinas.** Renote - Revista Novas Tecnologias na Educação. V.9, n.1, 2011, UFRGS.

GRAVINA, M.A.; SANTAROSA, L. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados**. Revista Informática na Educação: teoria e prática. v.1, n.2, 1998.CINTED/UFRGS.

GRAVINA, M. A.. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Tese de Doutorado, Programa de Pós-graduação em Informática na Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, RS, 2001.

HAJNAL, F. **O estudo do paralelismo no ensino da Geometria Analítica Plana: do empírico ao dedutivo**. Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

LIMA, E.L. **Coordenadas no Plano. Coleção do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 1992a.

LIMA, E.L. **Isometrias**. **Coleção do Professor de Matemática.** Rio de Janeiro: SBM, 1992b.

Museo Universitário di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica. Universidade Universitá Degli Studi di Modena e Reggio Emilia. Disponível em: http://www.museo.unimo.it/theatrum/inizio.htm. Acesso 14/02/2012.

PAVANELLO, R. M. **O Abandono do Ensino da Geometria: Uma Visão Histórica**.Dissertação de Mestrado.Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

PEREIRA, M. R. de O**. A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática.Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

PIETROPAOLO, R.C. **Demonstrações nos currículos de matemática da Educação Básica: Pontos de vista de pesquisadores e professores e implicações para os cursos de formação**. Dissertação de Doutorado.PUC/SP, 2005.

ROSA, K. C. **Ambientes computacionais no contexto da Geometria: Panorama das teses e dissertações do Programa de Educação Matemática da PUC-SP de 1994 a 2007**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP, 2009.

The MacTutor History of Mathematics archive. Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kempe.html . Acessado em: 16 de fevereiro de 2012.

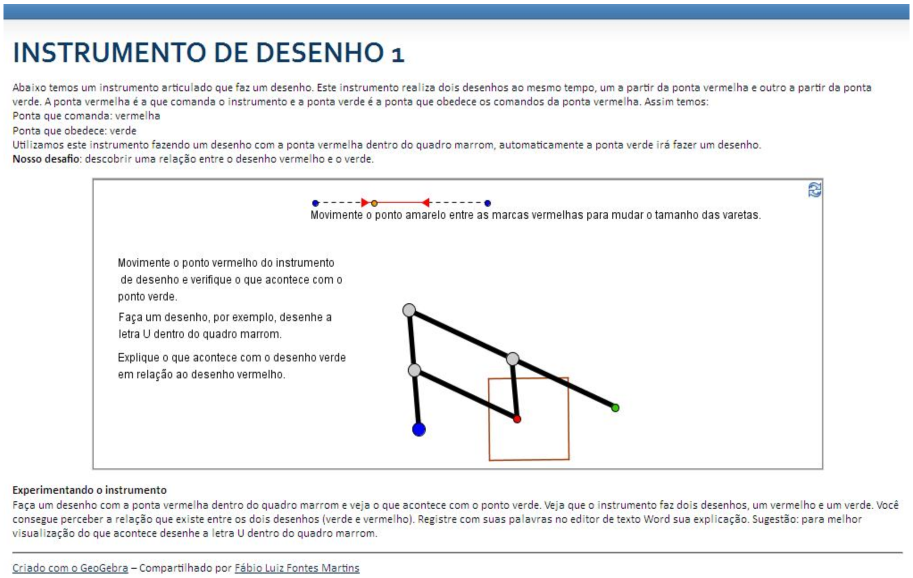
VAZ, R. de L. **O uso das isometrias do software Cabri-Géomètre como recurso no processo de prova e demonstração**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC/SP, 2004.

VIEIRA, W. Z. V. **Argumentação e Prova: uma experiência em geometria espacial no ensino médio**. Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

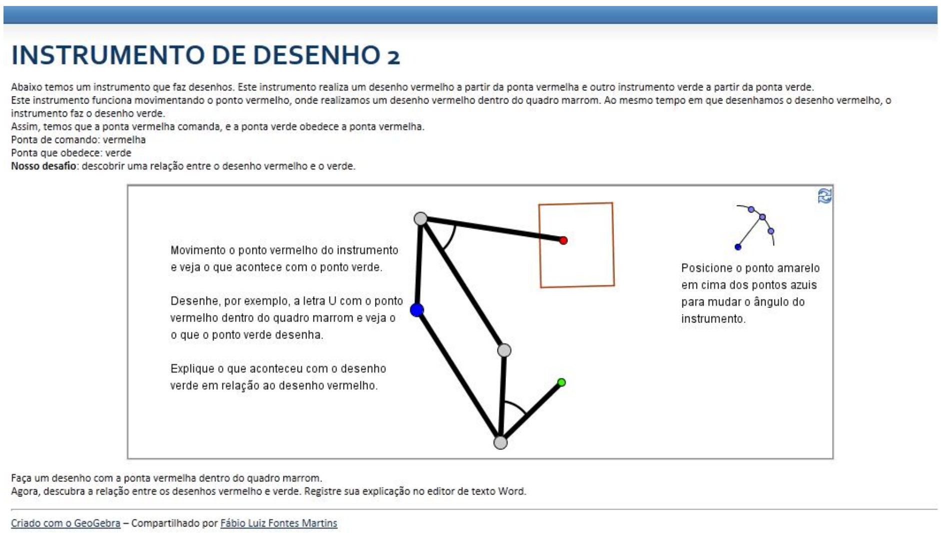
APÊNDICES

Apêndice 1: Os instrumentos virtuais no GeoGebra Tube

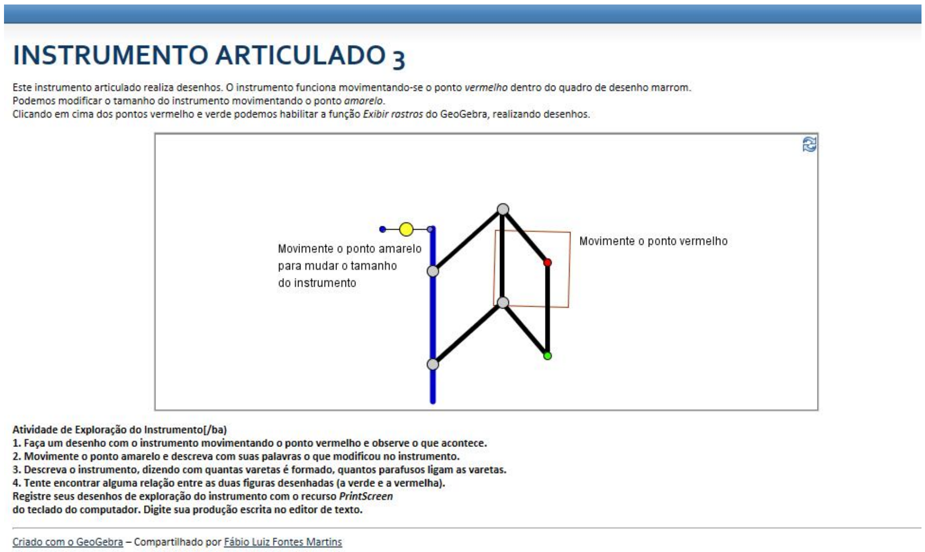
Link da página web 1: http://www.geogebratube.org/student/m6460



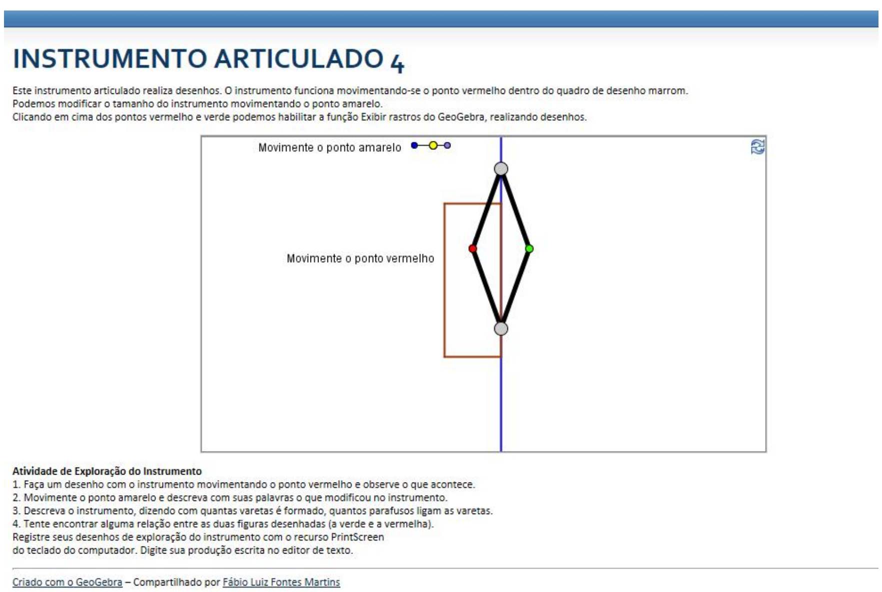
Link da página web 2: http://www.geogebratube.org/student/m6468



Link da página web 3: http://www.geogebratube.org/student/m10192



Link da página web 4: http://www.geogebratube.org/student/m10196



Apêndice 2: Slides do material apresentado aos alunos

Slides do material: “INSTRUMENTOS ARTICULADOS DE DESENHOS”

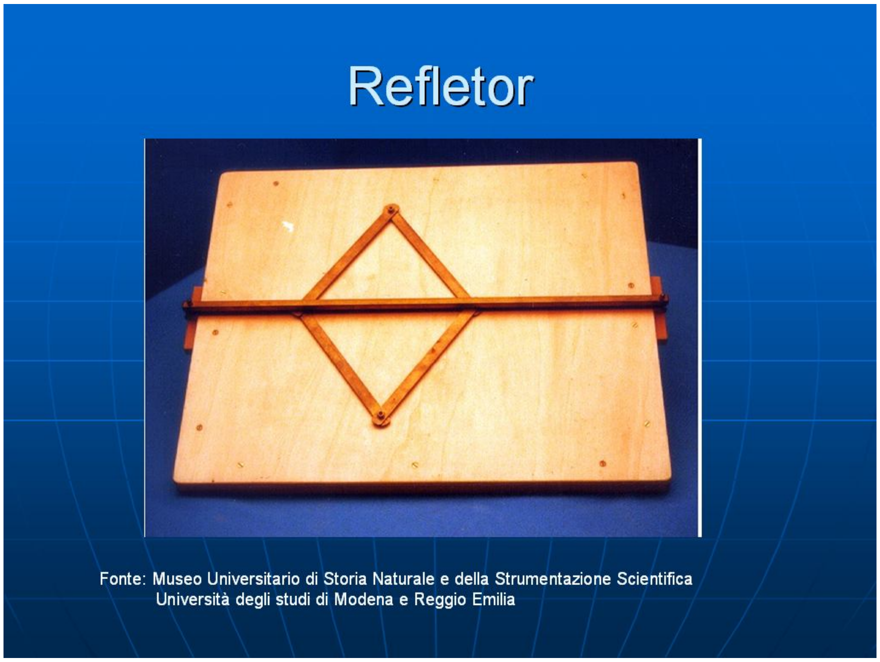
Slide 1

Slide2

Slide 3

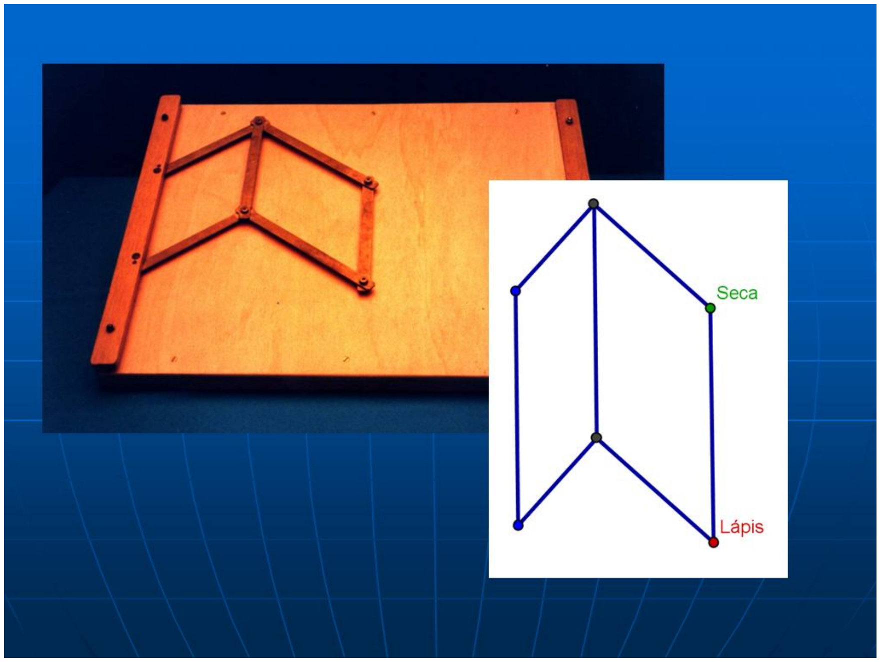
Slide 4

Slide 5

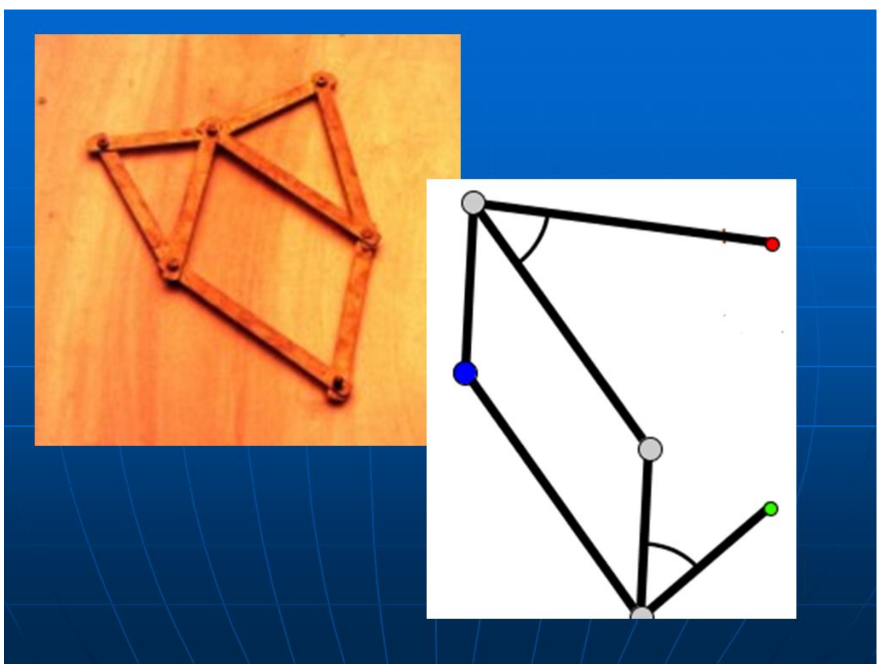


Slide 6

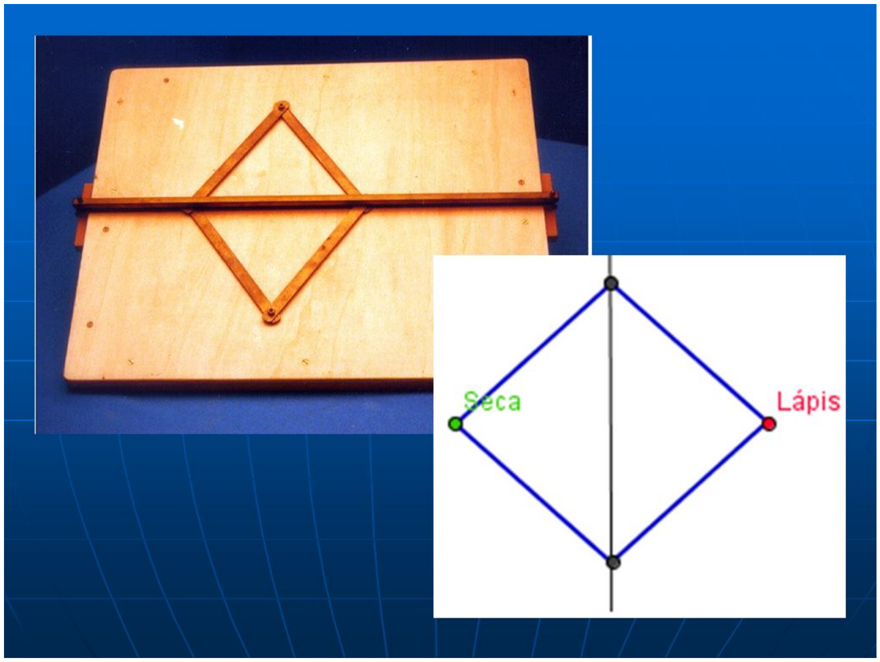
Slide 7



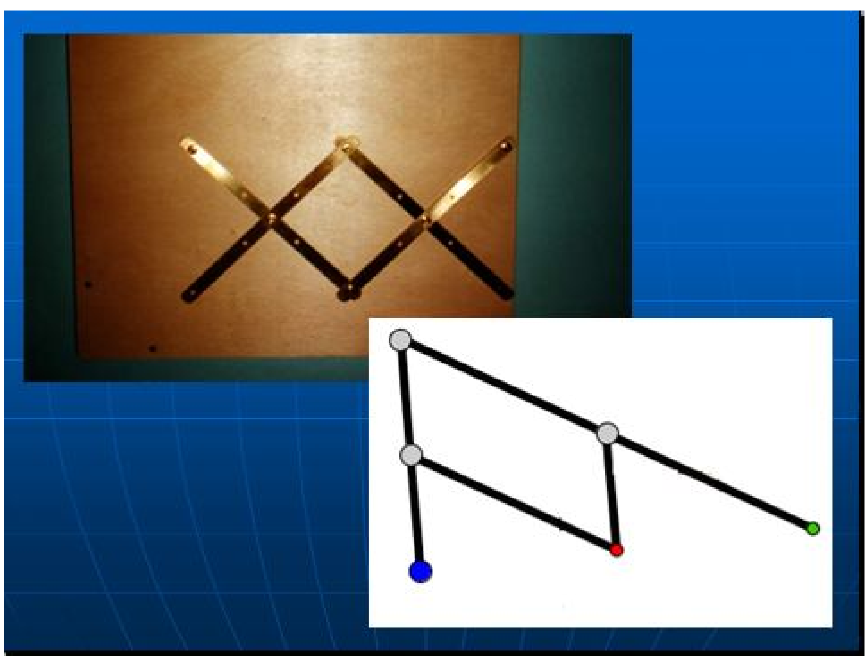
Slide 8



Slide 9

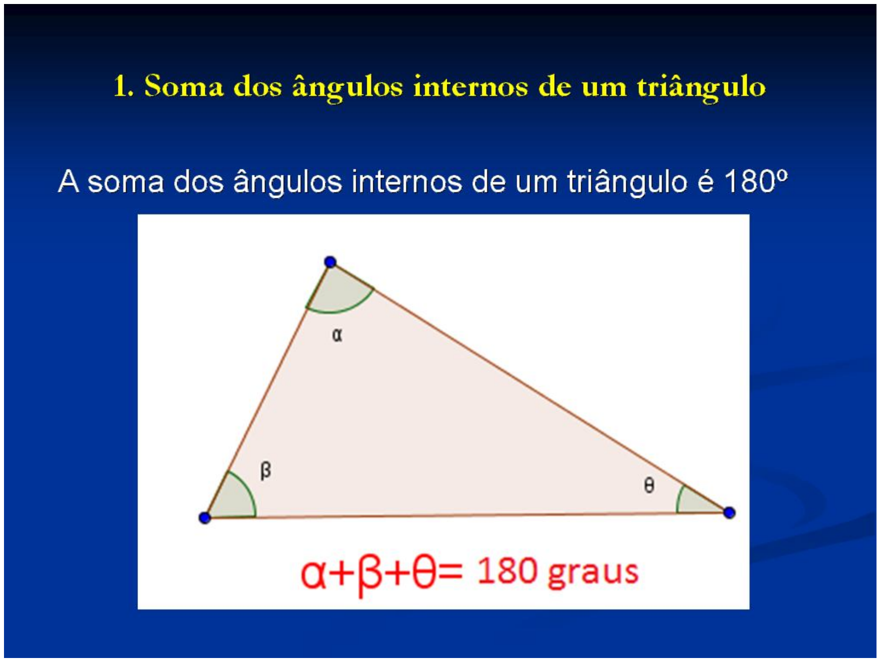


Slide 10

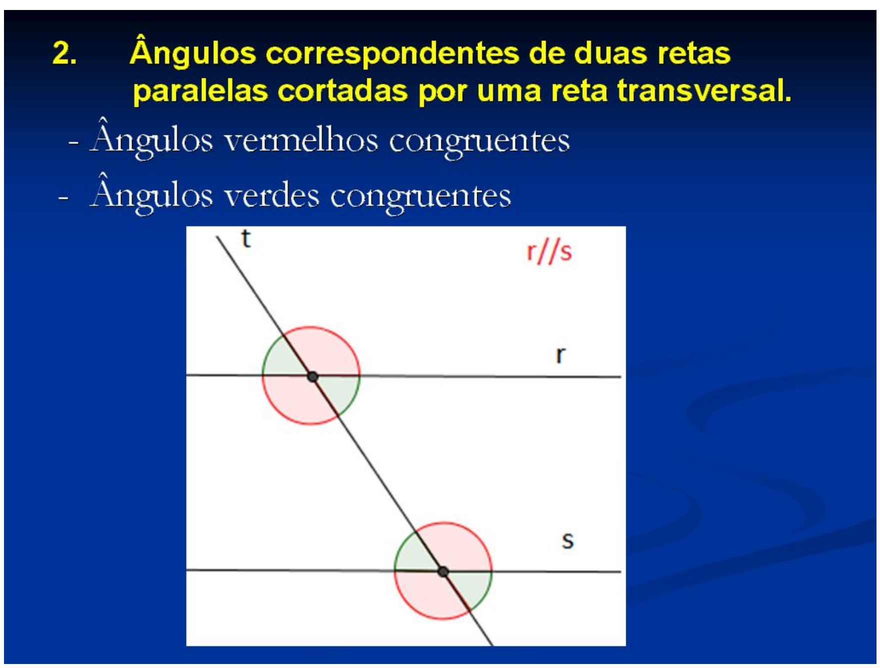


Slides do material: “ALGUMAS PROPRIEDADES BÁSICAS DE GEOMETRIA”

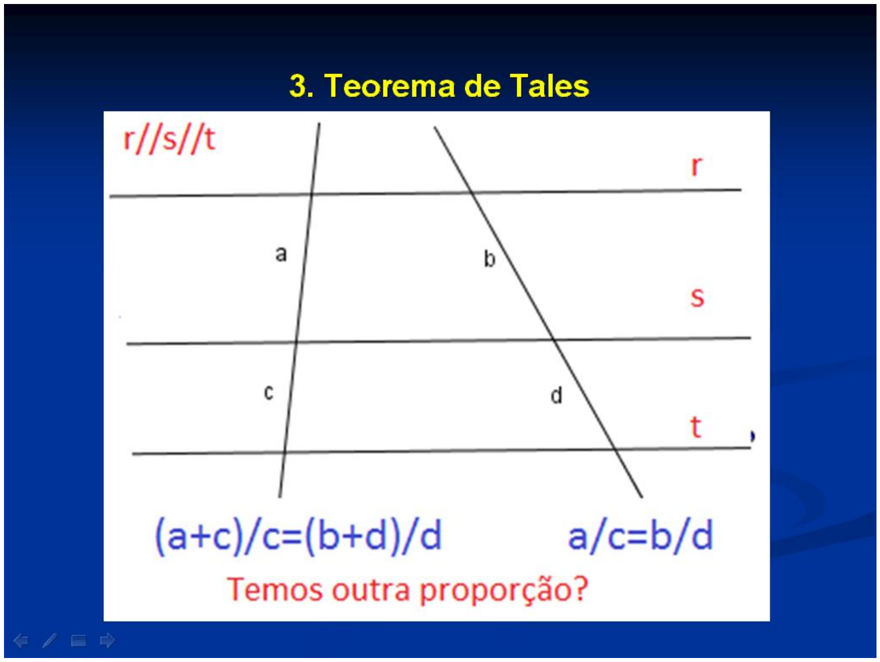
Slide 1



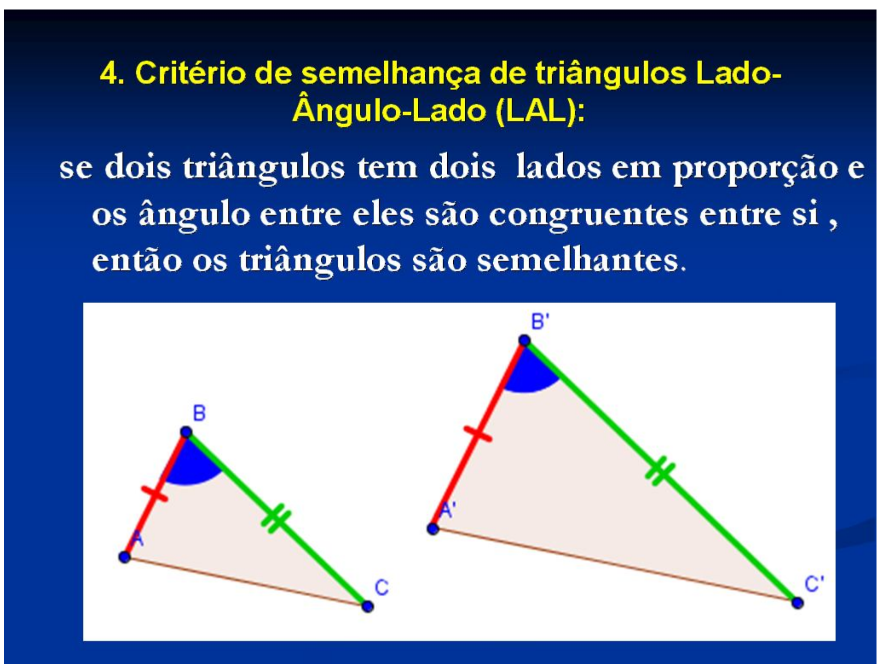
Slide 2



Slide 3



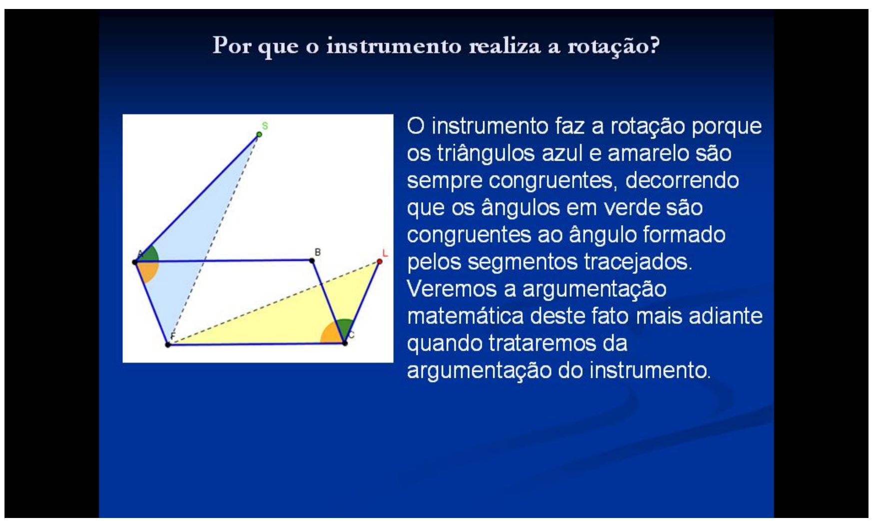
Slide 4



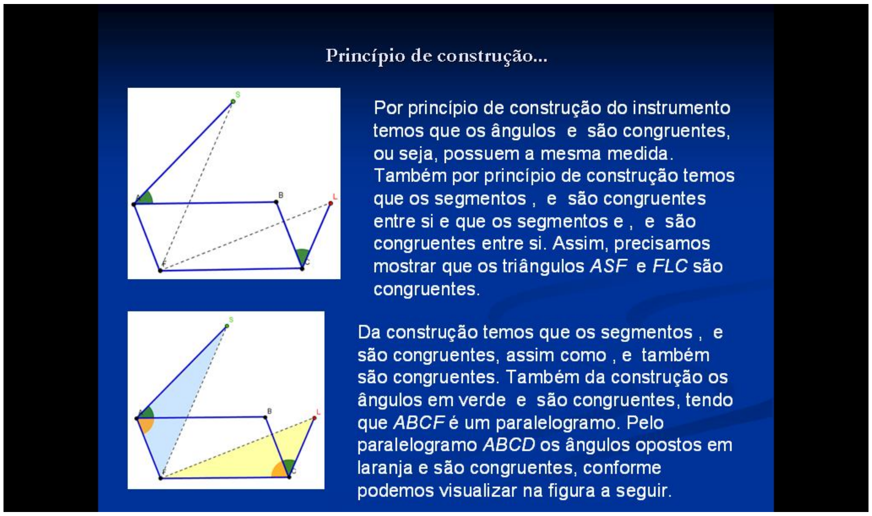
Slides do material: “ARGUMENTAÇÃO DO INSTRUMENTO DE ROTAÇÃO”

Slide 1

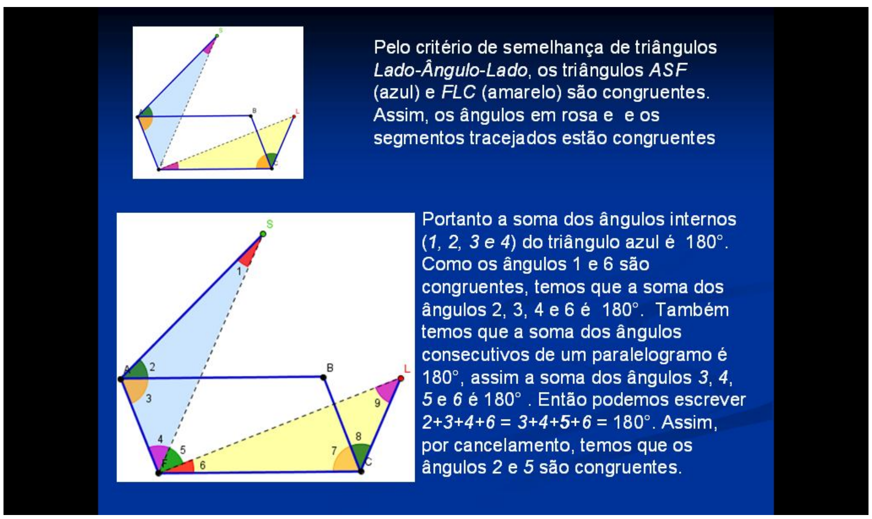
Slide 2



Slide 3



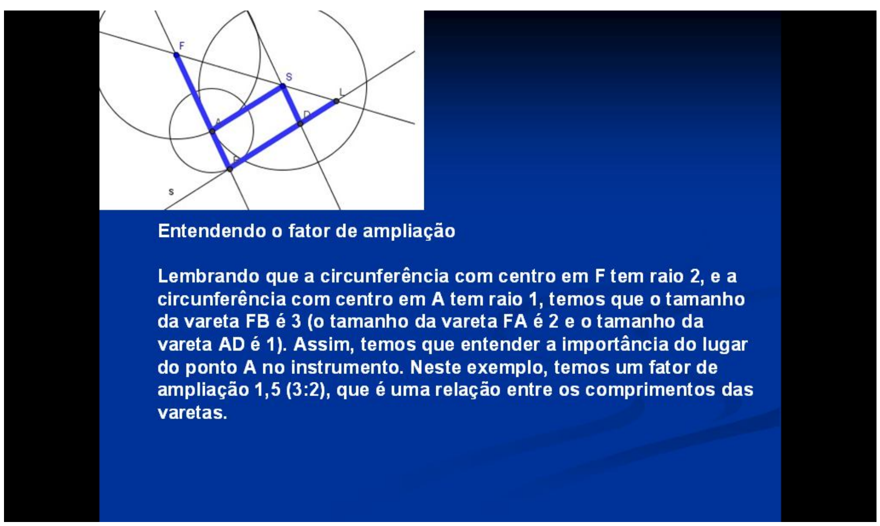
Slide 4



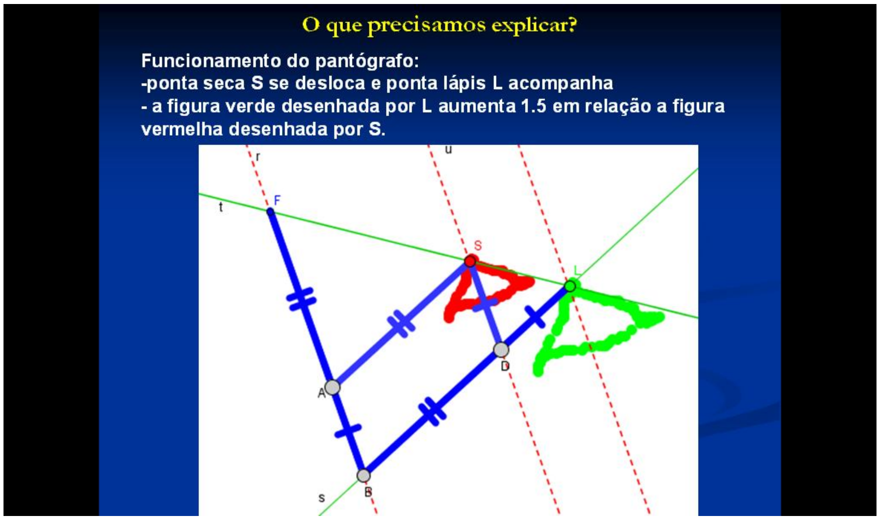
Slides do material: “ARGUMENTAÇÃO DO INSTRUMENTO DE AMPLIAÇÃO”

Slide 1

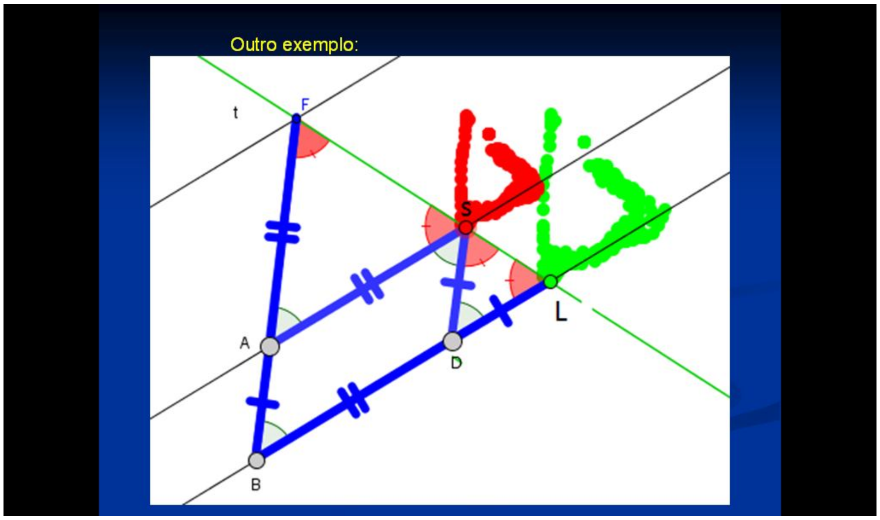
Slide 2



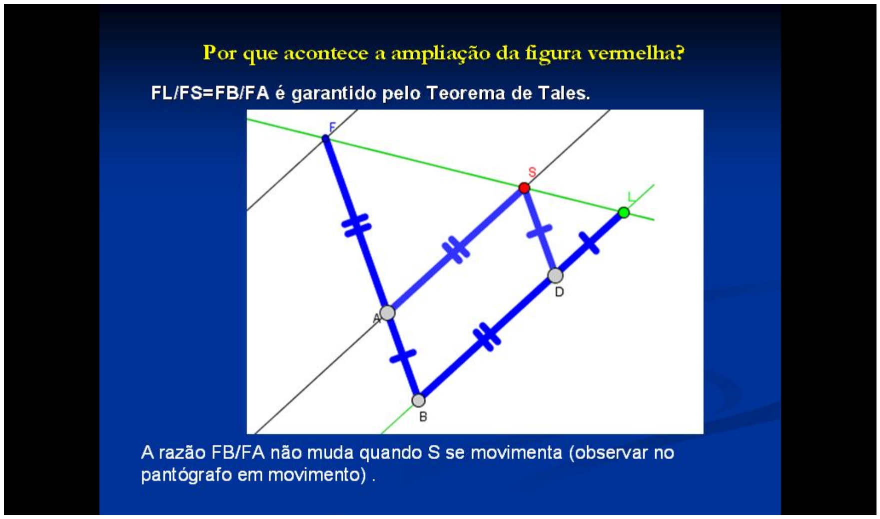
Slide 3



Slide 4



Slide 5



Slide 6