

245

O PARADOXO DOS ANIVERSÁRIOS E OS NÚMEROS DE BERNOULLI. *Lucas Henrique Backes, Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (orient.) (UFRGS)*

O cálculo de probabilidades tem aplicações práticas em diversas áreas e pode nos dar resultados de certa forma surpreendentes, por exemplo: assumindo que os aniversários das pessoas distribuem-se uniformemente ao longo do ano, qual é a probabilidade de que em grupo de k pessoas existam pelo menos duas que aniversariem na mesma data? Este problema é conhecido como paradoxo dos aniversários já que seu resultado é de certa forma surpreendente:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

pois se tomarmos, por exemplo, $k = 23$ a probabilidade de que pelo menos duas pessoas aniversariem na mesma data é superior a 50%. Existem maneiras relativamente simples de se solucionar este tipo de problema quando k e n são números relativamente pequenos, sendo k o tamanho da amostra e n o tamanho do espaço amostral. Por exemplo $f(n, k) = \dots$, onde $f(n, k)$ é a probabilidade de todos os elementos da amostra serem distintos. Note que quanto maiores n e k mais complicados se tornam os cálculos, por exemplo se $n = 2^{128}$ e $k = 2^{32}$ e os mesmos, quando feitos com auxílio de uma máquina, acabam acumulando erros que neste caso são de difícil controle. Neste trabalho apresentar-se-á um “algoritmo” que possibilita o cálculo aproximado desta probabilidade com um erro tão pequeno quanto se queira e o melhor, de maneira relativamente simples. Para o desenvolvimento de tal “algoritmo” primeiramente fez-se uso do logaritmo natural e sua expansão de Taylor aplicando-os em $f(n, k)$. Encontramos então uma série cujos coeficientes são somas de potências as quais podem ser encontradas recursivamente usando os números de Bernoulli, para tanto fez-se também um estudo sobre tais números. Trabalhando mais um pouco com estes resultados acabamos finalmente por encontrar o “algoritmo” acima citado.