

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

O Gás de Elétrons Degenerado Não-Comutativo*

Fábio Sperotto Bemfica

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Horacio Oscar Girotti e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre, RS - Junho de 2005

* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Fábio Sperotto Bemfica

*O Gás de Elétrons Degenerado
Não-Comutativo*

Porto Alegre, RS

junho de 2005

DEDICATÓRIA

Aos meus pais e irmã.
À Viviane e Lorenzo,
com todo o meu amor.

AGRADECIMENTOS

- ao Professor Horacio Oscar Girotti, pelo apoio, paciência e paixão pela Física;
- a todos os colegas e amigos que participaram da minha jornada e que foram importantes cada um à sua maneira;
- ao colega Alysson Fábio Ferrari, por importantes discussões e colaboração no presente trabalho.

Resumo

A dinâmica quântica de sistemas de partícula única não-relativística envolvendo coordenadas não-comutativas, usualmente chamada mecânica quântica não-comutativa, tem sido objeto de numerosas investigações. Neste trabalho estendemos esses estudos para o caso de sistema de muitas partículas. Usamos como protótipo o modelo do gás de elétrons degenerado cuja dinâmica é bem conhecida no limite comutativo. Nosso objetivo principal aqui é entender qualitativamente, em vez de quantitativamente, as principais modificações induzidas pela presença de coordenadas não-comutativas. Primeiro veremos que a não-comutatividade modifica a energia de correlação de troca enquanto preserva a neutralidade elétrica do modelo. Logo, através da teoria de perturbações independente do tempo juntamente com o mapa de Seiberg-Witten mostramos que o potencial de ionização é modificado pela não-comutatividade e, também, que o parâmetro não-comutativo atua como uma temperatura de referência. Sendo assim, a não-comutatividade levanta a degenerescência do gás de elétrons a temperatura zero.

Palavras-chave: Mecânica quântica não-comutativa; gás de elétrons; teoria quântica de campo não-comutativa.

PACS Nos.: 03.65.Ca; 71.10.Ca; 11.10.Nx

Abstract

The quantum dynamics of nonrelativistic single particle systems involving noncommutative coordinates, usually referred to as noncommutative quantum mechanics, has lately been the object of several investigations. In this note we pursue these studies for the case of multi-particle systems. We use as a prototype the degenerate electron gas whose dynamics is well known in the commutative limit. Our central aim here is to understand qualitatively, rather than quantitatively, the main modifications induced by the presence of noncommutative coordinates. We shall first see that the noncommutativity modifies the exchange correlation energy while preserving the electric neutrality of the model. By employing time-independent perturbation theory together with the Seiberg-Witten map we show, afterwards, that the ionization potential is modified by the noncommutativity. It also turns out that the noncommutative parameter acts as a reference temperature. Hence, the noncommutativity lifts the degeneracy of the zero temperature electron gas. Keywords: Noncommutative quantum mechanics; electron gas; noncommutative quantum field theory.

PACS Nos.: 03.65.Ca; 71.10.Ca; 11.10.Nx

Sumário

1	Introdução	5
2	Espaço-tempo não-comutativo e o produto de Grönewold-Moyal	10
3	O modelo do gás de elétrons degenerado	14
4	O modelo do gás de elétrons em um espaço não-comutativo	23
5	Conclusão	38
	Apêndice A – Definições	40
	Apêndice B – Análise de Diagramas	43
	Apêndice C – Cálculos	47
	C.1 Cálculo do Elemento de Matriz em $\mathcal{E}_0^{(1)}$	47
	C.2 Cálculo de $\mathcal{E}_0^{(2)}$	49
	Referências	54

1 *Introdução*

Historicamente, a noção de coordenadas espaciais não-comutativas surgiu com Heisenberg quem, em uma carta a Peierls, sugeriu a existência de uma relação de incerteza no espaço-tempo como uma possível maneira de eliminar as singularidades que aparecem nos termos das auto-energias. Embora Heisenberg não tenha publicado algo a respeito, sua idéia não parou por aí e, seguindo a seqüência Peierls \rightarrow Pauli \rightarrow Oppenheimer \rightarrow Snyder¹, levou este último a escrever o primeiro artigo no assunto em 1947 [2]. Porém, talvez devido ao sucesso da teoria de renormalização, essa proposta foi esquecida até recentemente, quando reaparece através das teorias de corda e da gravitação quântica.

Muitos autores têm estudado efeitos causados por um espaço-tempo não-comutativo sob pontos de vista matemático e físico. Para isso foi sugerido promover as coordenadas do espaço-tempo (x_i e x_0) ao nível de operadores hermiteanos (Q_i e Q_0) que obedecem as relações de comutação

$$[Q_\mu, Q_\nu] = i\Theta_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

com $\mu, \nu = 0 \dots d - 1$, onde d é a dimensão do espaço-tempo e $\Theta_{\mu\nu}$ é uma matriz antissimétrica real e constante com unidades de área. Na Ref. [3], foi proposta uma teoria de Yang-Mills imersa em um torus não-comutativo. A presença do tensor constante $\Theta_{\mu\nu}$ implica na violação da simetria de Lorentz enquanto que causalidade requer $\Theta_{0i} = 0$. No entanto Connes et al.[4] provam que ela surge como um limite definido da teoria de corda

¹Para maiores detalhes históricos veja [1] e referências dentro desta.

– supostamente a teoria de corda não conteria tais “defeitos” –, onde a não-covariância surge a partir do valor esperado do campo de fundo. A teoria de Yang-Mills supersimétrica não-comutativa (NCSYM) também foi extraída por Seiberg & Witten [5] partindo de uma corda aberta na presença de um campo magnético constante.

Dessa maneira, a teoria de corda impulsionou a retomada de idéias de teorias físicas contidas em variedades do espaço-tempo não-comutativas, iniciando-se estudos detalhados sob vários aspectos da teoria de campos nessas variedades. Através de cálculos explícitos de laços para casos onde $\Theta^{0i} = 0$ (espaço não-comutativo), foi mostrado que a teoria ϕ^4 até dois laços [6, 7] e a Eletrodinâmica Quântica não-comutativa (NCQED) até um laço [8–10] são renormalizáveis. Já no caso $\Theta^{0i} \neq 0$, viu-se que a teoria não é unitária no que diz respeito a matriz S [11, 12] nem causal, não se apresentando atraente como uma teoria de campo. Como outro aspecto negativo também podemos citar o aparecimento das divergências infravermelhas em teorias massivas (mecanismo UV/IR) geradas pela não-comutatividade. Neste caso, após as divergências ultravioletas serem controladas através do processo de renormalização, surgem as infravermelhas como um problema adicional. A introdução de supersimetria em teorias de calibre Abelianas (NCSQED) e não-Abelianas (NCSYM) até um laço de perturbações foi estudada em [13–16], onde foi demonstrado que a presença da supersimetria leva ao desaparecimento das divergências UV/IR não-integráveis. Mais detalhes em assuntos relacionados podem ser encontrados nos já existentes artigos de revisão [17–21] e também na literatura especializada.

O reaparecimento de modelos envolvendo variedades do espaço-tempo não-comutativas também foi impulsionado pelo fato de serem de grande interesse para a formulação da teoria quântica da gravitação (QG). A idéia é que a comutatividade do espaço-tempo é perdida na escala de Planck [22] $(\lambda_P = (G\hbar/c^3)^{1/2} \approx 1.6 \times 10^{-33} \text{ cm})$. Isso levaria, talvez, a uma relação de comutação conforme a da Eq. (1.1), sendo $\Theta_{\mu\nu}$, neste caso, uma matriz constante da ordem do quadrado do comprimento de Planck. Essa relação impõe possíveis limitações na precisão da localização de eventos no espaço-tempo, o que de fato deve ser uma característica de uma teoria quântica da gravitação. Mesmo no âmbito da teoria da

gravitação de Einstein, quando combinada com o princípio de incerteza de Heisenberg, somos levados a concluir que o espaço-tempo ordinário (comutativo)² perde qualquer significado operacional em escalas muito pequenas. Basta pensarmos no caso de uma medição nas coordenadas espaço-temporais: quanto maior a precisão nas medidas do espaço-tempo (Δx_μ) maior será a incerteza na medição dos momenta (Δp_μ), que estão presentes no cálculo do tensor momentum-energia ($T_{\mu\nu}$). O efeito desta medida, por sua vez, em vista da equação de Einstein da Relatividade Geral para a métrica $\eta_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \eta_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

em coordenadas naturais ($\hbar = G = c = 1$), gerará um campo gravitacional cada vez mais intenso. Quando o campo gravitacional se torna tão forte a ponto de não deixar a luz ou qualquer outro sinal escapar, o significado operacional não pode mais ser relacionado a localização. Em [22] é investigado como restringir localidade de maneira a prevenir a formação de buracos negros no curso de uma medida, ou seja, os Δx_μ são restringidos de modo a não serem simultaneamente muito pequenos.

Ainda sob o ponto de vista de gravitação, resultados da gravitação quântica canônica³ mostram que a quantização do espaço-tempo deve causar pequenas violações na sua simetria, as quais poderiam ser diretamente observadas através do comportamento de partículas altamente energéticas ou de partículas que viajam longas distâncias. Uma possibilidade de violação, comum a vários (mas certamente não a todos) os modelos da gravitação quântica, é a quebra da invariância de Lorentz. Vale dizer que uma das formas dessa quebra ocorrer seria caso a geometria do espaço-tempo fosse não-comutativa. Em um modelo fenomenológico proposto [23], efeitos da violação de Lorentz são introduzidos na chamada relação de dispersão, que relaciona a energia e momentum da partícula. Como resultado, fótons de diferentes frequências viajariam com diferentes velocidades.

²Usaremos eventualmente o termo ordinário para se referir a espaços cujas coordenadas espaciais comutam.

³Também conhecida como *loop quantum gravity* ou gravitação quântica por laços.

Tal efeito poderia potencialmente deformar pulsos de radiação vindos de distantes γ -ray bursts (explosões de raios gama) de uma forma que seja observável. De outro modo, em [24] é considerada a radiação síncrotron emitida por elétrons circulando num campo magnético na nebulosa Crab. Estes devem mover-se próximos à velocidade da luz, atingindo altas energias. Se invariância de Lorentz é quebrada, a velocidade máxima dos fótons e elétrons podem ser diferentes, impondo assim um corte na frequência produzida pela radiação síncrotron. Assumindo um comportamento de fótons e elétrons em baixas energias descrito por uma “teoria de campos local efetiva” e através de observações de radiação com frequências além da frequência de corte, a análise feita por Jacobson et al. configura um novo limite rigoroso na invariância de Lorentz. Fenomenologia de efeitos apresentados na escala de Planck têm começado a surgir. Maiores detalhes nesse assunto podem ser encontrados no artigo de revisão [25] e em referências dentro deste.

Por outro lado, mecânica quântica não-comutativa (NCQM) também tem sido alvo de testes [26–29]. No caso de NCQM, estamos interessados em achar conseqüências fenomenológicas da presença de um espaço não-comutativo, conforme descrito em [26]: “...deixando de lado interesses de teoria de campos, que são mais acadêmicos.” O principal resultado, no caso de sistemas de partícula única, é o de que a modificação da álgebra simultânea obedecida pelos operadores de posição básicos age como uma fonte de novas interações que devem ou não preservar as simetrias originais. Um exemplo é o trabalho de Chaichian et al. [26], onde, para pequenos valores de Θ^{ij} , a não-comutatividade atua no caso do átomo de Hidrogênio como uma nova interação, introduzindo correções ao *Lamb Shift* (desvio Lamb) e selecionando uma direção preferencial ao sistema (desvio Lamb polarizado) devido à quebra de simetria introduzida pela não-comutatividade. Também em [29] é mostrado o efeito desse tipo de espaço no caso de um Oscilador Harmônico bidimensional, onde Girotti estuda diferentes casos limites da matriz Θ^{ij} , sendo de maior interesse para nós o caso de pequena não-comutatividade, em que esse parâmetro se apresenta, pela sua forma funcional, como uma temperatura de referência.

Corroborando o acima explanado, procuraremos estudar as conseqüências de intro-

duzir coordenadas espaciais não-comutativas para o caso de sistemas não-relativísticos de muitas partículas. Diferentemente da situação de partícula única [26] e devido ao fato de que a não-comutatividade apresenta-se apenas através dos termos de interação, contribuições locais (efeitos microscópicos) do sistema onde encontramos uma direção preferencial não serão estudados. Estaremos apenas interessados em desvendar as conseqüências fenomenológicas globais provocadas pela não-comutatividade. Casos limites como o de pequeno Θ^{ij} serão de grande interesse.

2 *Espaço-tempo não-comutativo e o produto de Grönewold-Moyal*

Como veremos no Capítulo 4, a maneira pela qual os efeitos da não-comutatividade, sentidas por meio das novas coordenadas na Eq. (1.1), aparecem no desenvolvimento do problema que estamos interessados se dá através do produto de Grönewold-Moyal [30, 31], ou produto- \star . Se torna então importante, aqui, fazer uma exposição que mostre as principais propriedades deste produto. Começamos por introduzir, ainda no âmbito de um espaço-tempo genérico d -dimensional, a definição do operador $T(k)$ como

$$T(k) \equiv e^{ik_\mu Q^\mu}, \quad (2.1)$$

onde os k 's são números complexos. A partir da Eq. (1.1) vemos que os operadores Q 's são auto-adjuntos, o que implica em

$$T^\dagger(k) = T(-k), \quad (2.2)$$

da mesma forma que o caráter constante da matriz $\Theta^{\mu\nu}$, cujo comutador $[Q^u, \Theta^{\lambda,\sigma}] = 0$, leva a

$$T(k)T(k') = T(k + k')e^{-\frac{i}{2}k_\mu k'_\nu \Theta^{\mu\nu}}, \quad (2.3)$$

quando invocamos a fórmula de Baker-Campbell-Housdorf: $e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$ para $[A, B]$ sendo um número complexo. Ainda obtemos

$$\text{tr}T(k) = (2\pi)^d \prod_{\mu=0}^{d-1} \delta(k_\mu) \quad (2.4)$$

como sendo o traço tomado com relação ao espaço de representação [32].

Associamos agora uma função clássica $\phi(x)$ com o operador Φ de acordo com a operação

$$\begin{aligned} \phi(x) \rightarrow \Phi = \Omega[\phi] &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int dx \int dk T(k) e^{ik_\mu x^\mu} \phi(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int dk T(k) \tilde{\phi}(k), \end{aligned} \quad (2.5)$$

sendo $d\xi = d^d\xi$ ($\xi = x, k$) e

$$\tilde{\phi}(k) \equiv \int dx e^{ik_\mu x^\mu} \phi(x), \quad (2.6)$$

igual a transformada de Fourier de $\phi(x)$. O mapeamento inverso $\Phi \rightarrow \phi(x) = \Omega^{-1}[\Phi]$ é obtido fazendo-se uso das Eqs. (2.2) e (2.3) e (2.4). Obtemos então

$$\phi(x) = \int \frac{dk}{(2\pi)^d} e^{-ik_\mu x^\mu} \text{tr} [\Phi T^\dagger(k)]. \quad (2.7)$$

Podemos, neste ponto, introduzir o produto- \star como sendo

$$\phi_1(x) \star \phi_2(x) = \int \frac{dk}{(2\pi)^d} e^{-ik_\mu x^\mu} \text{tr} [\Phi_1 \Phi_2 T^\dagger(k)], \quad (2.8)$$

e, de forma mais geral,

$$\phi_1(x) \star \phi_2(x) \star \cdots \star \phi_n(x) = \int \frac{dk}{(2\pi)^d} e^{-ik_\mu x^\mu} \text{tr} [\Phi_1 \Phi_2 \cdots \Phi_n T^\dagger(k)]. \quad (2.9)$$

Se integramos em x a Eq. (2.9), e ressaltando, a partir da Eq. (2.1), que $T^\dagger(0) = I$,

chegamos ao resultado

$$\int dx \phi_1(x) \star \phi_2(x) \star \cdots \star \phi_n(x) = \text{tr} [\Phi_1 \Phi_2 \cdots \Phi_n], \quad (2.10)$$

o que implica em dizer que a integral do produto- \star é invariante frente a permutações cíclicas entre as funções ϕ devido ao caráter invariante do traço com relação a permutações cíclicas dos operadores Φ .

Voltamos agora nossos esforços para exprimir a forma do produto- \star mostrado nas Eqs. (2.8) e (2.9) de forma que seja exibida, entre outras coisas, sua natureza não-local. Fazendo uso das Eqs. (2.3), (2.4) e (2.6) obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr} [\Phi_1 \Phi_2 T^\dagger(k)] &= \int \frac{dk_1}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(k_1) \int \frac{dk_2}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(k_2) \text{tr} [T(k_1) T(k_2) T^\dagger(k)] \\ &= \int dk_1 \tilde{\phi}(k_1) \int \frac{dk_2}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(k_2) e^{-\frac{i}{2} k_1^\mu k_2^\nu \Theta_{\mu\nu}} \delta^{(d)}(k_1 + k_2 - k), \end{aligned} \quad (2.11)$$

de forma que quando inserida na Eq. (2.8) equivale a escrever

$$\begin{aligned} \phi_1(x) \star \phi_2(x) &= \int \frac{dk}{(2\pi)^d} e^{-ik_\mu x^\mu} \text{tr} [\Phi_1 \Phi_2 T^\dagger(k)] \\ &= \int dk e^{-ik_\mu x^\mu} \int \frac{dk_1}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(k_1) \int \frac{dk_2}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(k_2) e^{-\frac{i}{2} k_1^\mu k_2^\nu \Theta_{\mu\nu}} \delta(k_1 + k_2 - k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{dk_1}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(k_1) e^{ik_1^\mu x_\mu} \int \frac{dk_2}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(k_2) e^{ik_2^\nu x_\nu} \left(-\frac{i}{2} k_1^\mu k_2^\nu \Theta_{\mu\nu} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2} \right)^n [\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \cdots \partial_{\mu_n} \phi_1(x)] \Theta^{\mu_1 \nu_1} \Theta^{\mu_2 \nu_2} \cdots \Theta^{\mu_n \nu_n} [\partial_{\nu_1} \partial_{\nu_2} \cdots \partial_{\nu_n} \phi_2(x)] \\ &= \phi_1(x) \exp \left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \Theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu \right) \phi_2(x), \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Esta é a forma explícita do produto- \star (produto de Grönewold-Moyal [30, 31]). Neste ponto podemos apresentar outra propriedade importante do produto- \star que usaremos no decorrer do trabalho. Esta envolve a integral do produto- \star entre duas funções

$\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$. Calculando a integral

$$\begin{aligned}
& \int dx [\partial_\mu \phi_1(x)] \Theta^{\mu\nu} [\partial_\nu \phi_2(x)] \\
&= \Theta^{\mu\nu} \int dx \partial_\mu \{ \phi_1(x) [\partial_\nu \phi_2(x)] \} - \int dx \phi_1(x) \underbrace{\Theta^{\mu\nu} [\partial_\mu \partial_\nu \phi_2(x)]}_{=0} \\
&= \Theta^{\mu\nu} \int_\Sigma d\Sigma_\mu \phi_1(x) [\partial_\nu \phi_2(x)] = 0,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

onde representamos uma foliação do espaço-tempo d -dimensional pela superfície infinita Σ de $d-1$ dimensões. Usamos, então, o fato de que ao menos uma das funções na Eq. (2.13) deve anular-se quando integrada nessa superfície infinita Σ por se tratar, geralmente, de um campo ou função convergente, como será o nosso caso. Desta forma, fazendo uso da Eq. (2.13) na Eq. (2.12) obtemos

$$\begin{aligned}
& \int dx \phi_1(x) \star \phi_2(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \cdots \partial_{\mu_n} \phi_1(x)] \Theta^{\mu_1 \nu_1} \Theta^{\mu_2 \nu_2} \cdots \Theta^{\mu_n \nu_n} [\partial_{\nu_1} \partial_{\nu_2} \cdots \partial_{\nu_n} \phi_2(x)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_{n-1}}] \Theta^{\mu_1 \nu_1} \cdots \Theta^{\mu_{n-1} \nu_{n-1}} [\partial_{\nu_1} \cdots \partial_{\nu_{n-1}}] \\
&\quad \times \int dx \partial_{\mu_n} \phi_1(x) \Theta^{\mu_n \nu_n} \partial_{\nu_n} \phi_2(x) \\
&= \int dx \phi_1(x) \phi_2(x),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

que é a segunda propriedade relevante do produto- \star para o presente trabalho.

3 O modelo do gás de elétrons degenerado

Consideramos o modelo idealizado do gás de elétrons de alta densidade o qual ocupa um volume $V = L^3$. Este é um modelo simples que equivale a uma primeira aproximação para um metal ou plasma. Como é geralmente assumido, os elétrons (carga elétrica $-e$) estão na presença de um fundo uniforme de ions positivos (carga elétrica $+e$), o que assegura a neutralidade do sistema total. Para que isso ocorra, o número de elétrons deve ser igual ao número de ions (N). Os ions são substancialmente mais pesados que os elétrons e serão, portanto, considerados como estáticos. Apesar de esse sistema ter sido extensivamente descrito em livros-textos [33], faremos um pequeno parêntese aqui para citar os principais resultados. Por escolha, os graus de liberdade dos elétrons (E) são as posições em coordenadas Cartesianas $\{X_{a,E}^j\}$ e momenta lineares $\{P_{a,E}^j\}$, juntamente com os spins $\{S_{a,E}^j\}$. Letras minúsculas do começo do alfabeto Latino (a, b, \dots) designam partículas, enquanto letras minúsculas do meio do alfabeto Latino (i, j, \dots) apenas tomam valores de 1 a 3 e identificam as componentes Cartesianas do correspondente observável. Observáveis associados aos elétrons comutam com aqueles associados com os ions. O espaço de fase dos graus de liberdade dos elétrons obedecem à álgebra de tempos iguais padrão

$$[X_{a,E}^i, X_{b,E}^j] = 0, \quad (3.1a)$$

$$[X_{a,E}^i, P_{b,E}^j] = i \hbar \delta^{ij} \delta_{ab}, \quad (3.1b)$$

$$[P_{a,E}^i, P_{b,E}^j] = 0. \quad (3.1c)$$

Enfatizamos que todos os observáveis de posição comutam entre si. A álgebra para as variáveis do espaço de fase dos ions podem ser obtidas a partir da Eq. (3.1) substituindo-se E por B . A álgebra dos componentes de spin não necessita ser mostrada explicitamente.

Estruturalmente, a forma mais geral do Hamiltoniano total resulta

$$H = H_E + H_B + H_{EB}. \quad (3.2)$$

O Hamiltoniano H_E descreve a dinâmica de elétrons livres na presença da interação Coulombiana existente entre eles. Portanto, na representação de posição $(X^i | \vec{x} \rangle = x^i | \vec{x} \rangle$, $P^i \rightarrow p^i = -i \hbar \partial / \partial x^i$,

$$H_E = \sum_{a=1}^N \frac{P_{a,E}^i P_{a,E}^i}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b=1}^N V(|\vec{x}_{a,E} - \vec{x}_{b,E}|), \quad (3.3)$$

onde

$$V(|\vec{r}|) = e^2 \frac{e^{-\mu |\vec{r}|}}{|\vec{r}|} \quad (3.4)$$

e μ é um fator necessário para assegurar, no limite termodinâmico, a convergência de cada termo presente no lado direito da Eq. (3.2) [33]. De fato, devido ao caráter de longo alcance do potencial coulombiano, cada um desses termos divergem individualmente no limite $N \rightarrow \infty$ e $V \rightarrow \infty$, com $n = N/V = \text{constante}$. Porém, a soma de todos os termos deve ser finita devido à neutralidade do sistema como um todo. Neste caso, então,

μ eventualmente toma o limite $\mu \rightarrow 0$. Como estaremos interessados nas propriedades elásticas do meio, como por exemplo a energia por partícula E/N , tomamos primeiro o limite $L \rightarrow \infty$ e então $\mu \rightarrow 0$ ou, de outra forma, $\mu^{-1} \ll L$.

Para H_B escrevemos

$$\begin{aligned} H_B &= \frac{1}{2} \sum_{a \neq b=1}^N V(|\vec{x}_{a,B} - \vec{x}_{b,B}|) \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \int d^3 x_{a,B} \int d^3 x_{b,B} n(\vec{x}_{a,B}) n(\vec{x}_{b,B}) V(|\vec{x}_{a,B} - \vec{x}_{b,B}|). \end{aligned} \quad (3.5)$$

A ausência do termo cinético na Eq. (3.5) reflete o fato de os ions serem estáticos. Além disso, a natureza contínua do fundo de ions é tomada em conta na troca da soma discreta pela integral contínua. Para isso é introduzida uma nova variável, $n(\vec{x}_{a,B})$, conhecida como densidade de ions. Finalmente, H_{EB} é dado por

$$\begin{aligned} H_{EB} &= - \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N V(|\vec{x}_{a,E} - \vec{x}_{b,B}|) \\ &\rightarrow - \sum_{a=1}^N \int d^3 x_{b,B} n(\vec{x}_{b,B}) V(|\vec{x}_{a,E} - \vec{x}_{b,B}|). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Deveremos estar sempre trabalhando na aproximação $n(\vec{x}_{a,B}) = \text{constante} = N/V$. Desta forma reescrevemos as Eqs. (3.5) e (3.6) como

$$\begin{aligned} H_B &= \frac{e^2}{2} \left(\frac{N}{V}\right)^2 \int d^3 x_{a,B} \int d^3 x_{b,B} \frac{e^{-\mu|\vec{x}_{a,B} - \vec{x}_{b,B}|}}{|\vec{x}_{a,B} - \vec{x}_{b,B}|} \\ &= \frac{e^2}{2} \left(\frac{N}{V}\right)^2 \int d^3 x_{a,B} \int d^3 z \frac{e^{-\mu z}}{z} \\ &= \frac{e^2 N^2 4\pi}{2 V \mu^2}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
H_{EB} &= -e^2 \frac{N}{V} \sum_{a=1}^N \int d^3 x_{b,B} \frac{e^{-\mu |\vec{x}_{a,E} - \vec{x}_{b,B}|}}{|\vec{x}_{a,E} - \vec{x}_{b,B}|} \\
&= -e^2 \frac{N}{V} \sum_{a=1}^N \int d^3 z \frac{e^{-\mu z}}{z} \\
&= -e^2 \frac{N^2}{V} \frac{4\pi}{\mu^2}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

onde tomamos vantagem da invariância translacional frente ao caráter uniforme e infinito do meio para passar da primeira para a segunda linha nas Eqs. (3.7) e (3.8). A divergência de cada termo da Eq. (3.2) é explicitamente mostrada nas duas últimas equações através do parâmetro μ . Somando-se os resultados dessas equações na Eq. (3.2) obtemos

$$H = -\frac{e^2}{2} \frac{N^2}{V} \frac{4\pi}{\mu^2} + H_E. \tag{3.9}$$

Basta, então, calcularmos o termo H_E . Para isso usamos o formalismo da segunda quantização [33], passando de H_E para H_E^{seg}

$$\begin{aligned}
H_E &\rightarrow H_E^{seg} \\
&= H_0 + V_E,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

com

$$H_0 = \sum_{\vec{k}_1 \lambda_1} \sum_{\vec{k}_2 \lambda_2} c_{\vec{k}_1 \lambda_1}^\dagger \left\langle \vec{k}_1 \lambda_1 \left| \frac{P_{a,E}^i P_{a,E}^i}{2m} \right| \vec{k}_2 \lambda_2 \right\rangle c_{\vec{k}_2 \lambda_2}, \tag{3.11}$$

representando o termo da energia cinética dos elétrons, e

$$\begin{aligned}
V_E &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}_1 \lambda_1} \sum_{\vec{k}_2 \lambda_2} \sum_{\vec{k}_3 \lambda_3} \sum_{\vec{k}_4 \lambda_4} c_{\vec{k}_1 \lambda_1}^\dagger c_{\vec{k}_2 \lambda_2}^\dagger \langle \vec{k}_1 \lambda_1 \vec{k}_2 \lambda_2 | V \left(| \vec{X}_{a,E} - \vec{X}_{b,E} | \right) | \vec{k}_3 \lambda_3 \vec{k}_4 \lambda_4 \rangle \\
&\times c_{\vec{k}_4 \lambda_4} c_{\vec{k}_3 \lambda_3}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

sendo o termo de interação. Aqui, $c_{\vec{k}\lambda}^\dagger$ ($c_{\vec{k}\lambda}$) são os operadores de criação (aniquilação) dos elétrons de momentum \vec{k} e spin λ ($\lambda = \pm 1$). Estes operadores, obviamente, obedecem uma álgebra de anticomutadores [33] devido a sua natureza fermiônica. Escrevemos agora

$$\Phi_{\vec{k}\lambda}(\vec{x}) \equiv \langle \vec{x} | \vec{k}\lambda \rangle = V^{-\frac{1}{2}} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} \eta_\lambda, \tag{3.13}$$

como sendo a função de onda do elétron livre, onde as duas funções de spin para *spin-up* e *spin-down* ao longo do eixo- z são escritas como

$$\eta_\uparrow = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \eta_\downarrow = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

Além disso,

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L}, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{and} \quad n_i = \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.15}$$

é o momentum periodicamente quantizado. Podemos então desenvolver o cálculo do elemento de matriz na Eq. (3.11)

$$\begin{aligned}
\langle \vec{k}_1 \lambda_1 | \frac{P_{a,E}^2}{2m} | \vec{k}_2 \lambda_2 \rangle &= (2mV)^{-1} \int d^3 x_{a,E} e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}_{a,E}} \eta_{\lambda_1}^\dagger (-\hbar^2 \nabla_{a,E}^2) e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}_{a,E}} \eta_{\lambda_2} \\
&= \frac{\hbar^2 k_2^2}{2mV} \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \underbrace{\int d^3 x_{a,E} e^{i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{x}_{a,E}}}_{V \delta_{\vec{k}_1 \vec{k}_2}} \\
&= \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m} \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\vec{k}_1 \vec{k}_2},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

que nos leva a

$$H_0 = \sum_{\vec{k}\lambda} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} c_{\vec{k}\lambda}^\dagger c_{\vec{k}\lambda}. \quad (3.17)$$

Para o caso do elemento de matriz na Eq. (3.12) obtemos

$$\begin{aligned} & \langle \vec{k}_1 \lambda_1 \vec{k}_2 \lambda_2 | V \left(| \vec{X}_{a,E} - \vec{X}_{b,E} | \right) | \vec{k}_3 \lambda_3 \vec{k}_4 \lambda_4 \rangle \\ &= [\eta_{\lambda_1}(a)^\dagger \otimes \eta_{\lambda_2}(b)^\dagger] [\eta_{\lambda_3}(a) \otimes \eta_{\lambda_4}(b)] \frac{e^2}{V^2} \int d^3 x_{a,E} \int d^3 x_{b,E} e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}_{a,E}} e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}_{b,E}} \\ & \times \frac{e^{-\mu|\vec{x}_{a,E} - \vec{x}_{b,E}|}}{|\vec{x}_{a,E} - \vec{x}_{b,E}|} e^{i\vec{k}_3 \cdot \vec{x}_{a,E}} e^{i\vec{k}_4 \cdot \vec{x}_{b,E}} \\ &= \frac{e^2}{V} \delta_{\lambda_1 \lambda_3} \delta_{\lambda_2 \lambda_4} \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2, \vec{k}_3 + \vec{k}_4} \frac{4\pi}{(\vec{k}_1 - \vec{k}_3)^2 + \mu^2}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

cujo resultado, substituído na Eq.(3.12) dá

$$V_E = \frac{e^2}{2V} \sum_{\vec{k}\vec{q}\vec{p}} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \frac{4\pi}{q^2 + \mu^2} c_{\vec{k} + \vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p} - \vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}\lambda_2} c_{\vec{k}\lambda_1}, \quad (3.19)$$

com $q \equiv |\vec{q}|$. Como prática comum, escolhemos \vec{q} para designar o momentum transferido da reação $\vec{p} + \vec{k} \rightarrow (\vec{p} - \vec{q}) + (\vec{k} + \vec{q})$, fazendo as mudanças $\vec{k}_4 \rightarrow \vec{p}$ e $\vec{k}_3 \rightarrow \vec{k}$ onde $\vec{q} \equiv \vec{p} - \vec{k}_2 = -\vec{k} + \vec{k}_1$. Para resolver as Eqs. (3.7), (3.8) e (3.18), temos usado o resultado

$$\int d^3 z V(|\vec{z}|) e^{i\vec{q} \cdot \vec{z}} = \frac{4\pi e^2}{q^2 + \mu^2}, \quad (3.20)$$

válido no limite termodinâmico ($N, V \rightarrow \infty$).

Faremos agora a seguinte separação:

$$V_E = V_E(\vec{q} = 0) + H_I, \quad (3.21)$$

onde

$$\begin{aligned}
V_E(\vec{q} = 0) &= \frac{e^2}{2V} \frac{4\pi}{\mu^2} \sum_{\vec{k}\vec{p}} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} c_{\vec{k}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}\lambda_2} c_{\vec{k}\lambda_1} \\
&= \frac{e^2}{2V} \frac{4\pi}{\mu^2} \sum_{\vec{k}\vec{p}} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} c_{\vec{k}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{k}\lambda_1} \left(c_{\vec{p}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}\lambda_2} - \delta_{\vec{p}\vec{k}} \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \right) \\
&= \frac{e^2}{2V} \frac{4\pi}{\mu^2} \left(\hat{N}^2 - \hat{N} \right) \rightarrow \frac{e^2}{2V} \frac{4\pi}{\mu^2} (N^2 - N)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

contém apenas o modo $\vec{q} = 0$ da soma em \vec{q} e, por sua vez,

$$H_I = \frac{2\pi}{V} \sum'_{\vec{k}\vec{p}\vec{q}} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \frac{e^2}{q^2} c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} c_{\vec{k}, \lambda_1} \tag{3.23}$$

contém a soma nos modos $\vec{q} \neq 0$, sendo \hat{N} o operador número de ocupação reconhecido como

$$\hat{N} = \sum_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}\lambda}^\dagger c_{\vec{k}\lambda}. \tag{3.24}$$

Como deveremos estar sempre lidando com estados onde o número total de partículas N é fixo, trocamos os operadores \hat{N} pelos seu autovalor N . Além disso, a linha ao lado do símbolo \sum indica que o momentum $\vec{q} = 0$ não é incluído na soma. Podemos então reescrever o hamiltoniano total em segunda quantização (H) coletando os dados das Eqs.(3.9), (3.17), (3.23), resulta

$$H = -N \frac{e^2}{2V} \frac{4\pi}{\mu^2} + H_0 + H_I. \tag{3.25}$$

Conforme já argumentamos, estamos interessados apenas em propriedades do meio para cada partícula, ou por partícula, que devem ser finitas, de forma que na Eq. (3.25), pela condição de tomarmos primeiro o limite $L \rightarrow \infty$ e após $\mu \rightarrow 0$, chegamos finalmente à

$$H = H_0 + H_I, \quad (3.26)$$

sendo H_0 dado pela Eq. (3.17) e H_I pela Eq. (3.23), as quais são finitas no limite $\mu \rightarrow 0$, mantendo a neutralidade do sistema como um todo.

Dentro do formalismo da teoria de perturbações independente do tempo, os principais resultados, incluindo contribuições até segunda ordem, podem ser resumidas da seguinte forma. A energia do estado fundamental não perturbado (energia de Fermi $E_0^{(0)}$) é dada por [33]

$$E_0^{(0)} = \frac{e^2}{2a_0} N \frac{2.21}{r_s^2}, \quad (3.27)$$

onde a_0 é o raio de Bohr, $r_s \equiv r_0/a_0$ e $\frac{4}{3}\pi r_0^3 = V/N$. A primeira e segunda correções perturbativas deste resultado são, respectivamente [33–36],

$$E_0^{(1)} = -\frac{e^2}{2a_0} N \frac{0.916}{r_s}, \quad (3.28)$$

e

$$E_0^{(2)} = \frac{e^2}{2a_0} N \left[\epsilon_0^{(2)r} + \epsilon_0^{(2)b} \right] = \frac{e^2}{2a_0} N [0.0622 \ln r_s - 0.094]. \quad (3.29)$$

Aqui [37],

$$\begin{aligned} \epsilon_0^{(2)b} &= \frac{3}{16\pi^5} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2} \int_{|\vec{\mathbf{k}}+\vec{\mathbf{q}}|>1} d^3\mathbf{k} \int_{|\vec{\mathbf{p}}-\vec{\mathbf{q}}|>1} d^3\mathbf{p} \frac{\xi(1-\mathbf{k})\xi(1-\mathbf{p})}{[\vec{\mathbf{q}}\cdot(\vec{\mathbf{q}}+\vec{\mathbf{k}}-\vec{\mathbf{p}})](\vec{\mathbf{q}}+\vec{\mathbf{k}}-\vec{\mathbf{p}})^2} \\ &= \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{3}{2\pi^2} \zeta(3) \approx 0.048, \end{aligned} \quad (3.30)$$

é a energia de correlação de troca em unidades de Rydberg. Designaremos por $\xi(x)$ a função degrau de Heaviside. De forma a trabalhar com os vetores adimensionais ($\vec{\mathbf{p}}$)

definimos $k_F \vec{\mathbf{p}} \equiv \vec{p}$, onde $k_F \equiv \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\frac{1}{3}} r_0^{-1}$ é o número de onda de Fermi. Também, $\mathbf{p} \equiv |\vec{\mathbf{p}}|$. Neste ponto acaba nosso breve resumo sobre o gás de elétron degenerado.

4 *O modelo do gás de elétrons em um espaço não-comutativo*

Vamos, enfim, ao estudo das implicações da troca $X_{a,E}^i \rightarrow Q_{a,E}^i$, $P_{a,E}^i \rightarrow P_{a,E}^i$, com o espaço de fase agora obedecendo a álgebra de tempos iguais¹

$$[Q_{a,E}^i, Q_{b,E}^j] = 2i \delta_{ab} \Theta_E^{ij}, \quad (4.1a)$$

$$[Q_{a,E}^i, P_{b,E}^j] = i \hbar \delta^{ij} \delta_{ab}, \quad (4.1b)$$

$$[P_{a,E}^i, P_{b,E}^j] = 0. \quad (4.1c)$$

A característica distinta dos novos observáveis de posição ($Q_{a,E}^i$) é que eles não comutam entre si. Esse tipo de não-comutatividade é caracterizada pela matriz antisimétrica constante (Θ_E^{ij}). Uma representação explícita para esta álgebra já foi obtida [26–29] a partir do fato que (veja as Eqs. (3.1) e (4.2))

$$Q_{a,E}^i = X_{a,E}^i - \frac{1}{\hbar} \Theta_E^{ij} P_{a,E}^j. \quad (4.2)$$

Uma modificação similar poderia ser introduzida para os ions. No entanto, por estes serem estáticos, a Eq. (4.2) se reduz a $Q_{a,B}^i = X_{a,B}^i$.

O primeiro passo para introduzirmos essa nova álgebra de comutadores no desenvolvimento do problema consiste em fazermos algumas considerações com respeito ao espaço

¹Por motivo de conveniência adicionamos um fator 2 na relação de comutação das coordenadas espaciais a fim de não carregar o fator $\frac{1}{2}$ dentro do produto- \star visto na Eq. (2.12).

onde representaremos o estado do sistema $|\Psi\rangle$ e ao próprio estado. Assumimos, então, que o espaço de Hilbert do sistema onde os operadores correspondentes às variáveis do espaço de fase obedecem a Eq. (4.1a) pode ser consistentemente tomado igual ao espaço de Hilbert do seu contraponto comutativo [26]. Assim, a equação dinâmica que descreve um estado $|\Psi\rangle$ é dada pela equação de Schrödinger $H|\Psi\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi\rangle$. Desta forma, no que diz respeito aos Hamiltonianos na Eq. (3.2), a troca $X_{a,E}^i \rightarrow Q_{a,E}^i, P_{a,E}^i \rightarrow P_{a,E}^i$ induz a mudança $H \rightarrow \mathcal{H}$, de forma tal que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_E + \mathcal{H}_B + \mathcal{H}_{EB}, \quad (4.3)$$

onde

$$\mathcal{H}_E = \sum_{a=1}^N \frac{p_{a,E}^i p_{a,E}^i}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b=1}^N V \left(\left| \vec{\phi}_{a,E} - \vec{\phi}_{b,E} \right| \right), \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_B &= \frac{1}{2} \int d^3x_{a,B} \int d^3x_{b,B} n(\vec{x}_{a,B}) n(\vec{x}_{b,B}) V(|\vec{x}_{a,B} - \vec{x}_{b,B}|) \\ &= H_B, \end{aligned} \quad (4.5)$$

e

$$\mathcal{H}_{EB} = - \sum_{a=1}^N \int d^3x_{b,B} n(\vec{x}_{b,B}) V \left(\left| \vec{\phi}_{a,E} - \vec{x}_{b,B} \right| \right). \quad (4.6)$$

Por razões de simplicidade, foi introduzida, a partir da Eq. (4.4), a notação

$$\phi_{a,E}^i \equiv x_{a,E}^i - \frac{1}{\hbar} \Theta_E^{ij} p_{a,E}^j. \quad (4.7)$$

Como já foi declarado, $\{x_{a,E}^i\}$ denota o conjunto de autovalores do operador $X_{a,E}^i$, ao passo que $p_{a,E}^i \equiv -i\hbar\partial/\partial x_{a,E}^i$ representa $P_{a,E}^i$ na base definida pelos autovetores comuns

de $\{X_{a,E}^i\}$.

Investigamos agora a ação do termo $V\left(\left|\vec{\phi}_{a,E} - \vec{x}_{b,B}\right|\right)$ atuando sobre uma função arbitrária, porém diferenciável, $\Psi(x_{a,E}^i, x_{b,B}^i)$. Ao levarmos em conta a Eq. (4.7) é possível verificar que

$$\begin{aligned}
& V\left(\left|x_{a,E}^i - \frac{1}{\hbar}\Theta_E^{ij}p_{a,E}^j - x_{b,B}^i\right|\right)\Psi(x_{a,E}^i, x_{b,B}^i) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\tilde{V}(\vec{k})e^{ik^i(x_{a,E}^i - \frac{1}{\hbar}\Theta_E^{ij}p_{a,E}^j - x_{b,B}^i)}\Psi(x_{a,E}^i, x_{b,B}^i) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\tilde{V}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_{a,E} - \vec{x}_{b,B})}e^{-k^i\Theta_E^{ij}\partial_{x_{a,E}^j}}\Psi(x_{a,E}^i, x_{b,B}^i) \\
&= V\left(\left|x_{a,E}^i - x_{b,B}^i\right|\right)e^{i\overleftarrow{\partial}^i_{x_{a,E}}\Theta_E^{ij}\overrightarrow{\partial}^j_{x_{a,E}}}\Psi(x_{a,E}^i, x_{b,B}^i) \\
&= V\left(\left|x_{a,E}^i - x_{b,B}^i\right|\right)\star_{a,E}\Psi(x_{a,E}^i, x_{b,B}^i). \tag{4.8}
\end{aligned}$$

onde $\tilde{V}(\vec{k})$ é a transformada de Fourier da função $V(|\vec{x}|)$ e

$$\begin{aligned}
& V\left(\left|\vec{x}_{a,E} - \vec{x}_{b,B}\right|\right)\star_a\Psi(x_{a,E}^i, x_{b,B}^i) \\
&\equiv V\left(\left|\vec{x}_{a,E} - \vec{x}_{b,B}\right|\right)e^{i\overleftarrow{\partial}^i_{x_{a,E}}\Theta^{ij}\overrightarrow{\partial}^j_{x_{a,E}}}\Psi(x_{a,E}^i, x_{b,B}^i) \tag{4.9}
\end{aligned}$$

é o produto de Grönwald-Moyal ou produto- \star o qual trabalhamos no Capítulo 2. Note que $x_{a,E}^i$ não comuta com $p_{a,E}^i$ mas, no entanto, comuta com $\Theta_E^{ij}p_{a,E}^j$ devido à antisimetria de Θ_E^{ij} . Essa observação é de extrema importância para que se chegue na última igualdade da Eq. (4.8). Além do mais, já que apenas as coordenadas dos elétrons são sensíveis ao produto- \star eliminamos o subscrito E ao passar da Eq. (4.8) para a Eq. (4.9). Chamamos novamente a atenção para

$$\int d^3x \phi_1(\mathbf{x}) \star \phi_2(\mathbf{x}) = \int d^3x \phi_1(\mathbf{x})\phi_2(\mathbf{x}), \quad (4.10a)$$

$$\begin{aligned} \int d^3x \phi_1(\mathbf{x}) \star \phi_2(\mathbf{x}) \star \phi_3(\mathbf{x}) &= \int d^3x \phi_3(\mathbf{x}) \star \phi_1(\mathbf{x}) \star \phi_2(\mathbf{x}) \\ &= \int d^3x \phi_2(\mathbf{x}) \star \phi_3(\mathbf{x}) \star \phi_1(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4.10b)$$

como as propriedades mais relevantes do produto- \star [18–21] a que terão um papel chave nos desenvolvimentos que estão por vir. Aqui, a função convergente no infinito a que mencionamos no Capítulo 2 para que a Eq. (4.10a) seja satisfeita será sempre dada pelo potencial $V(|\vec{x}|)$ da Eq. (3.4) que tende a zero no limite ($L \rightarrow \infty$).

Direcionamo-nos, agora, ao cálculo de \mathcal{H}_{EB} . Substituindo a Eq. (4.8) na Eq. (4.6) obtém-se,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{EB} \Psi(x_{c,E}^i, x_{d,B}^i) &= -\sum_{a=1}^N \int d^3x_{b,B} n(\vec{x}_{b,B}) V \left(\left| x_{a,E}^i - \frac{1}{\hbar} \Theta_E^{ij} p_{a,E}^j - x_{b,B}^i \right| \right) \\ &\times \Psi(x_{c,E}^i, x_{d,B}^i) \\ &= -\frac{N}{V} \sum_{a=1}^N \int d^3x_{b,B} V(|x_{a,E}^i - x_{b,B}^i|) \star_a \Psi(x_{c,E}^i, x_{d,B}^i) \\ &= -\frac{N}{V} \sum_{a=1}^N \left[\int d^3z V(|\vec{z}|) \right] \star_a \Psi(x_{c,E}^i, x_{d,B}^i) \\ &= H_{EB} \Psi(x_{c,E}^i, x_{d,B}^i), \end{aligned} \quad (4.11)$$

o qual, em vista da arbitrariedade de $\Psi(x_{c,E}^i, x_{d,B}^i)$, equivale a escrever

$$\mathcal{H}_{EB} = H_{EB}, \quad (4.12)$$

como uma identidade operatorial. Assim, a não-comutatividade dos observáveis de posição dos elétrons não afeta o Hamiltoniano H_{EB} . Essa é uma consequência da estrutura contínua assumida para os íons de fundo.

Para completar o Hamiltoniano total restou estudar as modificações induzidas pela não-comutatividade em H_E . Da mesma forma como no caso comutativo, representado pelas Eqs. (3.17) e (3.23), através do formalismo de segunda quantização obtemos

$$\mathcal{H}_E = H_0 + \mathcal{V}_E, \quad (4.13)$$

onde H_0 é dado na Eq. (3.17), enquanto

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_E &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}_1 \lambda_1} \sum_{\vec{k}_2 \lambda_2} \sum_{\vec{k}_3 \lambda_3} \sum_{\vec{k}_4 \lambda_4} c_{\vec{k}_1 \lambda_1}^\dagger c_{\vec{k}_2 \lambda_2}^\dagger \langle \vec{k}_1 \lambda_1 \vec{k}_2 \lambda_2 | V \left(| \vec{Q}_{a,E} - \vec{Q}_{b,E} | \right) | \vec{k}_3 \lambda_3 \vec{k}_4 \lambda_4 \rangle \\ &\times c_{\vec{k}_4 \lambda_4} c_{\vec{k}_3 \lambda_3}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Note que na Eq. (4.13) usamos diretamente a igualdade $\mathcal{H}_0 = H_0$ devido ao fato de se tratar da parte puramente cinética dos elétrons, que não sente as modificações provocadas pela não-comutatividade (veja as Eqs. (4.1)).

Através de manipulação padrão [33], o lado direito da Eq. (4.14) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} &\langle \vec{k}_1 \lambda_1 \vec{k}_2 \lambda_2 | V \left(| \vec{Q}_{a,E} - \vec{Q}_{b,E} | \right) | \vec{k}_3 \lambda_3 \vec{k}_4 \lambda_4 \rangle \\ &= V^{-2} [\eta_{\lambda_1}(a)^\dagger \otimes \eta_{\lambda_2}(b)^\dagger] [\eta_{\lambda_3}(a) \otimes \eta_{\lambda_4}(b)] \int d^3 x_{a,E} \int d^3 x_{b,E} e^{-i \vec{k}_1 \cdot \vec{x}_{a,E}} e^{-i \vec{k}_2 \cdot \vec{x}_{b,E}} \\ &\times \left[V(| \vec{x}_{a,E} - \vec{x}_{b,E} |) \star_a \star_b e^{i \vec{k}_3 \cdot \vec{x}_{a,E}} e^{i \vec{k}_4 \cdot \vec{x}_{b,E}} \right], \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde trazemos à tona, novamente, as Eqs. (3.13) e (3.14). O uso das Eqs. (4.10) nos permitem encontrar

$$\begin{aligned}
& \left\langle \vec{k}_1 \lambda_1 \vec{k}_2 \lambda_2 \left| V \left(\left| \vec{Q}_{a,E} - \vec{Q}_{b,E} \right| \right) \right| \vec{k}_3 \lambda_3 \vec{k}_4 \lambda_4 \right\rangle \\
&= V^{-2} \delta_{\lambda_1 \lambda_3} \delta_{\lambda_2 \lambda_4} \int d^3 x_{a,E} \int d^3 x_{b,E} V(|\vec{x}_{a,E} - \vec{x}_{b,E}|) \left[e^{i \vec{k}_3 \cdot \vec{x}_{a,E}} \star_a e^{-i \vec{k}_1 \cdot \vec{x}_{a,E}} \right] \\
&\times \left[e^{i \vec{k}_4 \cdot \vec{x}_{b,E}} \star_b e^{-i \vec{k}_2 \cdot \vec{x}_{b,E}} \right] \\
&= V^{-1} \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2, \vec{k}_3 + \vec{k}_4} \delta_{\lambda_1 \lambda_3} \delta_{\lambda_2 \lambda_4} e^{i(\vec{k}_3 \wedge \vec{k}_1 + \vec{k}_4 \wedge \vec{k}_2)} \int d^3 z V(|\vec{z}|) e^{i \vec{z} \cdot (\vec{k}_4 - \vec{k}_2)}, \quad (4.16)
\end{aligned}$$

onde o produto "wedge" (\wedge) é definido como

$$\vec{k} \wedge \vec{p} \equiv k^i \Theta_E^{ij} p^j. \quad (4.17)$$

Para chegar ao último termo no lado direito da Eq. (4.16) tomamos vantagem da relação

$$e^{i \vec{x} \cdot \vec{k}} \star e^{-i \vec{x} \cdot \vec{p}} = e^{i \vec{k} \wedge \vec{p}} e^{i \vec{x} \cdot \vec{k}} e^{-i \vec{x} \cdot \vec{p}}. \quad (4.18)$$

A inserção da Eq. (4.16) na Eq. (4.14) leva a

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_E &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}_1 \lambda_1} \sum_{\vec{k}_2 \lambda_2} \sum_{\vec{k}_3 \lambda_3} \sum_{\vec{k}_4 \lambda_4} c_{\vec{k}_1 \lambda_1}^\dagger c_{\vec{k}_2 \lambda_2}^\dagger V^{-1} \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2, \vec{k}_3 + \vec{k}_4} \delta_{\lambda_1 \lambda_3} \delta_{\lambda_2 \lambda_4} e^{i(\vec{k}_3 \wedge \vec{k}_1 + \vec{k}_4 \wedge \vec{k}_2)} \\
&\times \int d^3 z V(|\vec{z}|) e^{i \vec{z} \cdot (\vec{k}_4 - \vec{k}_2)} c_{\vec{k}_4 \lambda_4} c_{\vec{k}_3 \lambda_3} \\
&= \frac{4\pi e^2}{2V} \sum_{\vec{k} \vec{p} \vec{q}} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \frac{e^{-i \vec{q} \wedge (\vec{k} - \vec{p})}}{q^2 + \mu^2} c_{\vec{k} + \vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p} - \vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p} \lambda_2} c_{\vec{k} \lambda_1}. \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Esta é a forma desejada de \mathcal{V}_E em termos dos operadores de criação e aniquilação. Este resultado exhibe explicitamente a não-comutatividade. Como feito no Capítulo 3, escolhemos \vec{q} para designar o momentum transferido da reação $\vec{p} + \vec{k} \rightarrow (\vec{p} - \vec{q}) + (\vec{k} + \vec{q})$, fazendo as mudanças $\vec{k}_4 \rightarrow \vec{p}$ e $\vec{k}_3 \rightarrow \vec{k}$.

Assim como no caso comutativo [33], a contribuição do modo $\vec{q} = 0$ no lado direito da Eq. (4.19) cancela aquelas vindas de \mathcal{H}_B e \mathcal{H}_{EB} , exatamente como visto no Capítulo 3.

Isso significa que a não-comutatividade não destrói a neutralidade elétrica. Portanto, o sistema total modificado colapsa em

$$\mathcal{H} = H_0 + \mathcal{H}_I, \quad (4.20)$$

onde H_0 é dado pela Eq. (3.17), enquanto \mathcal{H}_I lê-se

$$\mathcal{H}_I = \frac{2\pi e^2}{V} \sum_{\vec{k}\vec{p}\vec{q}}' \sum_{\lambda_1\lambda_2} \frac{e^{-i\vec{q}\wedge(\vec{k}-\vec{p})}}{q^2} c_{\vec{k}+\vec{q},\lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}-\vec{q},\lambda_2}^\dagger c_{\vec{p},\lambda_2} c_{\vec{k},\lambda_1}. \quad (4.21)$$

Vamos agora construir diagramas que representem o operador Hamiltoniano de interação \mathcal{H}_I fazendo uma ligação com a teoria dependente do tempo. Como prática usual, as linhas de férmions são desenhadas com setas. Operadores de criação (aniquilação) são representados por linhas saindo (entrando) em um dos vértices. Das Eqs. (4.14) e (4.15) vemos que os vértices os quais interagem através do potencial Coulombiano estão associados, cada um separadamente, a um operador de criação e a outro de aniquilação. Os operadores $c_{\vec{k}_1\lambda_1}^\dagger$ e $c_{\vec{k}_3}$ estão ligados ao ponto de interação $\vec{x}_{a,E}$ no vértice que chamaremos V_1 enquanto os operadores $c_{\vec{k}_2\lambda_2}^\dagger$ e $c_{\vec{k}_4\lambda_4}$ no vértice que chamaremos V_2 são localizados pela coordenada $\vec{x}_{b,E}$. A interação entre os vértices é mostrada por linhas onduladas com o respectivo momentum transferido. Para chegar à Eq. (4.21), como já mencionado, fizemos as mudanças $\vec{k}_4 \rightarrow \vec{p}$ e $\vec{k}_3 \rightarrow \vec{k}$ e definimos o momentum transferido $\vec{q} = \vec{k}_3 - \vec{k}_1 = -(\vec{k}_4 - \vec{k}_2)$. Desta forma, no vértice V_2 teremos linhas de férmions relacionadas aos operadores $c_{\vec{p}-\vec{q},\lambda_2}^\dagger$ e $c_{\vec{p},\lambda_2}$. Por outro lado no vértice V_1 teremos as linhas $c_{\vec{k}+\vec{p},\lambda_1}^\dagger$ e $c_{\vec{k},\lambda_1}$. O passo seguinte é a construção de um diagrama representando o Hamiltoniano de interação \mathcal{H}_I . Seguindo a construção feita para o caso de um vértice na Fig. 4 do Apêndice B, na Fig. 1 chegamos diretamente à mesma exponencial obtida na Eq (4.21). A vantagem é que daqui para a frente basta localizar em que termos aparecerão essas exponenciais e, então, conhecendo o contraponto comutativo, acrescentá-las no cálculo.

Neste ponto abrimos um parêntese. Note que, em contraposição com o caso relati-

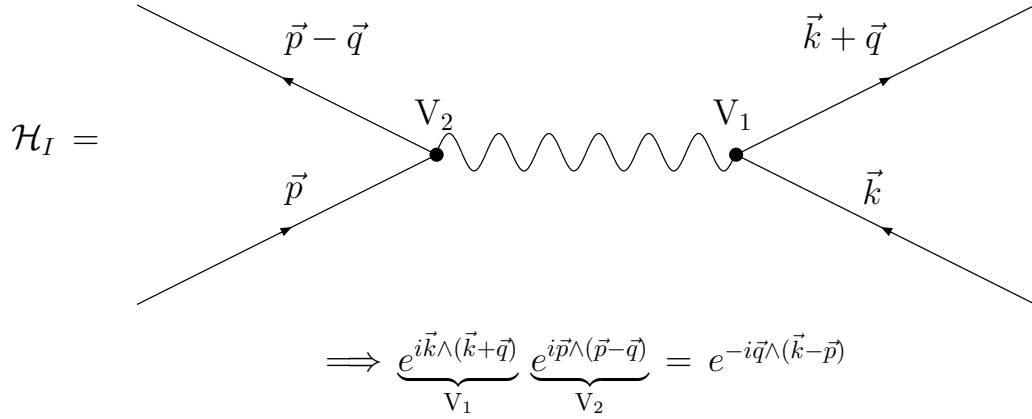


Figura 1: Construção do Hamiltoniano de interação \mathcal{H}_I na forma de diagramas. Através da disposição das linhas de férmions obtemos a exponencial contendo o parâmetro não-comutativo, o qual entra diretamente na expressão do caso comutativo dada pelas Eqs. (3.17) e (3.23), reproduzindo a Eq. (4.21).

vístico, o limite comutativo ($\Theta_E^{ij} \rightarrow 0$) na Eq. (4.21) existe e é bem definido. Em outras palavras, o mecanismo UV/IR [38], que contamina as teorias de campo relativísticas, não surge no presente caso. Isso se dá claramente devido à ausência de divergências ultravioletas no caso não-relativístico.

É um exercício simples verificar que \mathcal{H}_I é Hermiteano. Via de regra basta tomar o complexo conjugado juntamente com o transposto do operador \mathcal{H}_I ,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I^\dagger &= \frac{2\pi e^2}{V} \sum'_{\vec{k}\vec{p}\vec{q}} \sum_{\lambda_1\lambda_2} \frac{e^{i\vec{q}\wedge(\vec{k}-\vec{p})}}{q^2} c_{\vec{k}\lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}\lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}-\vec{q},\lambda_2} c_{\vec{k}+\vec{q},\lambda_1} \\ &= \frac{2\pi e^2}{V} \sum'_{\vec{k}'\vec{p}'\vec{q}'} \sum_{\lambda_1\lambda_2} \frac{e^{-i\vec{q}'\wedge(\vec{k}'-\vec{p}')}}{q'^2} c_{\vec{k}'+\vec{q}',\lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}'-\vec{q}',\lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}'\lambda_2} c_{\vec{k}'\lambda_1} = \mathcal{H}_I, \end{aligned} \quad (4.22)$$

sendo necessárias as mudanças de variáveis $\vec{k} \rightarrow \vec{k}' - \vec{q}$, $\vec{p} \rightarrow \vec{p}' + \vec{q}$ e finalmente $\vec{q} \rightarrow -\vec{q}'$, mantendo $\vec{q}' \neq 0$.

Temos até agora desenvolvido as ferramentas para calcular alguns dos efeitos físicos induzidos pela não-comutatividade no gás de elétrons. Focaremos nos autovalores de energia do estado fundamental e empregaremos, assim como na situação comutativa, a

teoria de perturbações independente do tempo. Começamos escrevendo

$$\mathcal{E}_0 = E_0^{(0)} + \left\langle E_0^{(0)} \left| \mathcal{H}_I \right| E_0^{(0)} \right\rangle + \sum_{i \neq 0} \frac{\left| \left\langle E_0^{(0)} \left| \mathcal{H}_I \right| E_i^{(0)} \right\rangle \right|^2}{E_0^{(0)} - E_i^{(0)}} + \dots, \quad (4.23)$$

onde $\{E_i^{(0)}\}$ são os auto estados excitados de H_0 . Como H_0 não sente a presença da não-comutatividade, seus autoestados e correspondentes autovalores permanecem inalterados. Portanto, Eq. (3.27) ainda permanece verdadeira.

O que vem depois é o cálculo de $\mathcal{E}_0^{(1)}$ o qual, de acordo com a Eq. (4.23), lê-se

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0^{(1)} &= \left\langle E_0^{(0)} \left| \mathcal{H}_I \right| E_0^{(0)} \right\rangle \\ &= \frac{2\pi e^2}{V} \sum_{\vec{k}\vec{p}\vec{q}}' \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \frac{e^{-i\vec{q} \wedge (\vec{k} - \vec{p})}}{q^2} \left\langle E_0^{(0)} \left| c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} c_{\vec{k}, \lambda_1} \right| E_0^{(0)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Como já mencionado, o modo $\vec{q} = 0$ não contribui para o lado direito da Eq. (4.24). Então, manipulações diretas mostradas em detalhe no Apêndice C.1 nos levam a

$$\left\langle E_0^{(0)} \left| c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} c_{\vec{k}, \lambda_1} \right| E_0^{(0)} \right\rangle = -\xi(k_F - p) \xi(k_F - k) \delta_{\vec{p}-\vec{q}, \vec{k}} \delta_{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (4.25)$$

Observamos que, quando substituímos a Eq. (4.25) na Eq. (4.24), o fator $\delta_{\vec{p}-\vec{q}, \vec{k}}$ anula os efeitos da não comutatividade e, portanto,

$$\mathcal{E}_0^{(1)} = E_0^{(1)}. \quad (4.26)$$

Construindo o diagrama correspondente ao termo $\mathcal{E}_0^{(1)}$, mostrado na Fig. 2, e levando em conta as análises feitas no Apêndice B por meio das Figs. (4) e (5) e anteriormente por meio da Fig. (1), podemos automaticamente ver que a exponencial contendo o parâmetro não-comutativo desaparece. Da Fig. 2 temos

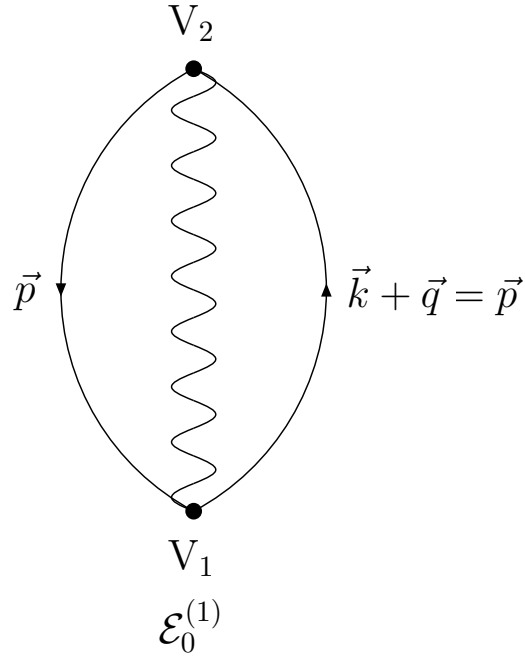


Figura 2: Diagrama representando o valor esperado do estado de Fermi de \mathcal{H}_I . Neste caso dois laços fechados por dois vértices. Esse tipo de diagrama onde duas linhas são fechadas por dois vértices leva o produto das exponenciais envolvendo o parâmetro não-comutativo à igualdade.

$$V_1 \implies e^{i\vec{p}\wedge(\vec{k}+\vec{q})}, \quad (4.27a)$$

$$V_2 \implies e^{i(\vec{k}+\vec{q})\wedge\vec{p}}, \quad (4.27b)$$

de modo que

$$V_1 V_2 \implies I. \quad (4.28)$$

O motivo por que a não-comutatividade não está presente em diagramas do tipo da Fig. 2 é discutido ao longo do Apêndice B.

O cálculo de $\mathcal{E}_0^{(2)}$,

$$\mathcal{E}_0^{(2)} = \sum_{i \neq 0} \frac{|\langle E_0^{(0)} | \mathcal{H}_I | E_i^{(0)} \rangle|^2}{E_0^{(0)} - E_i^{(0)}}, \quad (4.29)$$

é cansativo. Os detalhes se encontram no Apêndice C.1. Por isso, simplesmente, mencionamos que este é dado por

$$\mathcal{E}_0^{(2)} = \frac{e^2}{2a_0} N \left[\epsilon_0^{(2)r} + \epsilon_0^{(2)b}(\Theta) \right]. \quad (4.30)$$

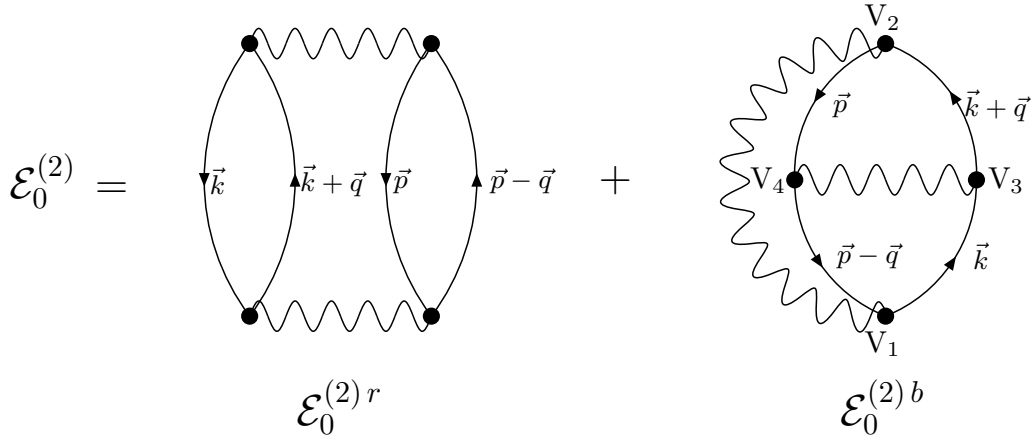


Figura 3: Diagrama contendo segunda ordem de perturbação, ilustrando o termo de troca $\mathcal{E}_0^{(2)b}$ e o termo direto $\mathcal{E}_0^{(2)r}$.

Da construção dos diagramas representando os termos de troca ($\mathcal{E}_0^{(2)b}$) e direto ($\mathcal{E}_0^{(2)r}$) para segunda ordem de perturbação, ilustrados na Fig. 3, é possível, sem precisarmos carregar todo o cálculo operatorial feito no Apêndice C.2 porém conhecendo seu contraponto comutativo, chegar diretamente no resultado da Eq. (4.30), pois, como podemos ver, o termo direto cancela a não-comutatividade devido aos laços fechados entre vértices². Já no caso do termo de troca, temos que, da configuração no espaço de momentum para as linhas de férmions mostrado na Fig. 3,

²Note que não foram desenhados todos os diagramas topologicamente diferentes, descartando os que não contribuem. No Apêndice B discutimos quando isso ocorre.

$$V_1 \implies e^{i(\vec{p}-\vec{q})\wedge\vec{k}}, \quad (4.31a)$$

$$V_2 \implies e^{i(\vec{k}+\vec{q})\wedge\vec{p}}, \quad (4.31b)$$

$$V_3 \implies e^{i\vec{k}\wedge(\vec{k}+\vec{q})}, \quad (4.31c)$$

$$V_4 \implies e^{i\vec{p}\wedge(\vec{p}-\vec{q})}, \quad (4.31d)$$

e, então, juntando a contribuição de cada um desses vértices correspondentes à $\mathcal{E}_0^{(2)b}$ obtemos:

$$V_1 V_2 V_3 V_4 \implies e^{i(\vec{p}-\vec{q})\wedge\vec{k}} e^{i(\vec{k}+\vec{q})\wedge\vec{p}} e^{i\vec{k}\wedge(\vec{k}+\vec{q})} e^{i\vec{p}\wedge(\vec{p}-\vec{q})} = e^{-2i\vec{q}\wedge(\vec{k}-\vec{p})}, \quad (4.32)$$

que é a modificação introduzida pela não-comutatividade, também obtida por cálculo direto no Apêndice C.2 para o termo de troca. A expressão final de $\epsilon_0^{(2)b}(\Theta)$ é dada por

$$\begin{aligned} \epsilon_0^{(2)b} &\rightarrow \epsilon_0^{(2)b}(\Theta) \\ &= \frac{3}{16\pi^5} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2} \int_{|\vec{k}+\vec{q}|>1} d^3\mathbf{k} \int_{|\vec{p}-\vec{q}|>1} d^3\mathbf{p} \frac{\xi(1-\mathbf{k})\xi(1-\mathbf{p}) e^{-2ik_F^2 \vec{q}\wedge(\vec{k}-\vec{p})}}{[\vec{q}\cdot(\vec{q}+\vec{k}-\vec{p})](\vec{q}+\vec{k}-\vec{p})^2}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

É instrutivo comparar esse resultado com seu contraponto comutativo, explicitado nas Eqs. (3.29) e (3.30). Como se vê, $\epsilon_0^{(2)r}$ permanece inalterado pela não-comutatividade enquanto que o termo de energia de correlação de troca, $\epsilon_0^{(2)b}$, é modificado como visto na Eq.(4.33). É de fácil verificação que $\epsilon_0^{(2)b}(\Theta)$ é real, como exige o caráter hermiteano de \mathcal{H}_I . Isso permite a substituição da exponencial pela sua parte real, i.e.,

$$\begin{aligned} \epsilon_0^{(2)b}(\Theta) &= \frac{3}{16\pi^5} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2} \int_{|\vec{k}+\vec{q}|>1} d^3\mathbf{k} \int_{|\vec{p}-\vec{q}|>1} d^3\mathbf{p} \frac{\xi(1-\mathbf{k})\xi(1-\mathbf{p})}{[\vec{q}\cdot(\vec{q}+\vec{k}-\vec{p})](\vec{q}+\vec{k}-\vec{p})^2} \\ &\times \cos \left[2k_F^2 \vec{q}\wedge(\vec{k}-\vec{p}) \right]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Obviamente, a equivalência entre as Eqs. (4.33) e (4.34) pode também ser mostrada por cálculo direto. Notamos que o argumento da função trigonométrica depende de k_F e, portanto, de V , por isso a energia de correlação de troca não é mais constante. Como consequência, as propriedades termodinâmicas como pressão e módulo de elasticidade, que são obtidos através da primeira e segunda derivada da energia com relação ao volume, são modificadas pela não-comutatividade.

Não fomos capazes de calcular analiticamente a integral na Eq. (4.34). De maneira a proceder, assumimos que características globais do sistema não são sensíveis à direção do vetores $\theta^i \equiv 1/2\epsilon^{ijk}\Theta_E^{jk}$. Podemos, então, trocar o lado direito da Eq. (4.34) por sua média sobre todas as direções possíveis do vetor $\vec{\theta}$. Isto é efetivamente implementado integrando sobre os ângulos de $\vec{\theta}$ o qual permite reescrever

$$\begin{aligned} \epsilon_0^{(2)b}(\theta) &\equiv \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{\vec{\theta}} \epsilon_0^{(2)b}(\vec{\theta}) \\ &= \frac{3}{16\pi^5} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2} \int_{|\vec{\mathbf{k}}+\vec{\mathbf{q}}|>1} d^3\mathbf{k} \int_{|\vec{\mathbf{p}}-\vec{\mathbf{q}}|>1} d^3\mathbf{p} \frac{\xi(1-\mathbf{k})\xi(1-\mathbf{p})}{[\vec{\mathbf{q}} \cdot (\vec{\mathbf{q}} + \vec{\mathbf{k}} - \vec{\mathbf{p}})](\vec{\mathbf{q}} + \vec{\mathbf{k}} - \vec{\mathbf{p}})^2} \\ &\times \frac{\sin(k_F^2\theta|\vec{\mathbf{q}} \times (\vec{\mathbf{k}} - \vec{\mathbf{p}})|)}{k_F^2\theta|\vec{\mathbf{q}} \times (\vec{\mathbf{k}} - \vec{\mathbf{p}})|}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Vamos nos concentrar na análise de diferentes casos limites. Para $\theta = |\vec{\theta}| = 0$ voltamos sem ambigüidade para o modelo comutativo. Por outro lado, quando $\theta \rightarrow \infty \implies \epsilon_0^{(2)b} \rightarrow 0$ implicando que $\mathcal{E}_0^{(2)} < E_0^{(2)}$. No entanto, quantidades termodinâmicas, tais como pressão e módulo de elasticidade, permanecerão inalteradas porque a diferença $\mathcal{E}_0^{(2)} - E_0^{(2)}$ é apenas uma constante.

O próximo passo consiste em invocar a aproximação feita no mapa de Seiberg-Witten [5]. Expandindo a função trigonométrica na Eq. (4.35) em torno de $\theta = 0$ se chega a

$$\epsilon_0^{(2)b}(\theta) = \epsilon_0^{(2)b} - \frac{1}{32\pi^5} k_F^4 R \theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4), \quad (4.36)$$

onde

$$R = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{q^2} \int_{|\vec{k}+\vec{q}|>1} d^3\mathbf{k} \int_{|\vec{p}-\vec{q}|>1} d^3\mathbf{p} \frac{\xi(1-\mathbf{k})\xi(1-\mathbf{p})|\vec{q}\times(\vec{k}-\vec{p})|^2}{[\vec{q}\cdot(\vec{q}+\vec{k}-\vec{p})](\vec{q}+\vec{k}-\vec{p})^2}. \quad (4.37)$$

A convergência das integrais em \mathbf{k} e \mathbf{p} é assegurada pelo fato de que os correspondentes intervalos de integração são finitos. Por outro lado, contagem de potências nos diz que a integral imprópria em \mathbf{q} também converge. Portanto, R existe e é bem definida. A situação muda drasticamente para aquelas integrais que agem como coeficientes para ordens maiores em θ . Lá, contagem de potência nos diz que essas outras divergem. O modo como sair do problema consiste em carregar a integral em \mathbf{q} entre 0 e Λ , sendo Λ um corte tal que, assim que $\theta \rightarrow 0$, $1/k_F^2\theta$ vai a infinito mais rapidamente que Λ .

Coletando todos os resultados, a Eq. (4.23) leva a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \frac{e^2}{2a_0} N \left[\frac{2.21}{r_s^2} - \frac{0.916}{r_s} + 0.0622 \ln r_s - 0.094 - \frac{1}{32\pi^5} k_F^4 \theta^2 R + \mathcal{O}(\theta^4, r_s \ln r_s) \right] \\ &= E_0 - N \frac{m}{\hbar} \frac{3}{32\pi^5} k_F^4 e^2 R \theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4). \end{aligned} \quad (4.38)$$

A não-comutatividade certamente modifica a energia do estado fundamental e, como consequência, também modifica o potencial de ionização do material tratado como um gás de elétrons. Além disso, comparando a Eq. (4.38) com o resultado obtido para o gás de elétron comutativo em uma temperatura finita diferente de zero [36], é possível concluir que θ atua como uma temperatura de referência [29]. Gell-Mann mostrou que, para temperaturas muito pequenas

$$C_V = N^{-1} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right) \Big|_V \rightarrow \frac{T}{m} \left(\frac{\hbar K \alpha r_s}{e^2} \right)^2 [1 + 0.083 r_s (-\ln r_s - 0.203 + \dots)]^{-1}, \quad (4.39)$$

que é linear em T . Aqui $\alpha \equiv \sqrt{4/9\pi}$ e K é a constante de Boltzmann. Como $N^{-1}\partial\mathcal{E}_0/\partial\theta$

é uma função linear em θ definimos a quantidade \tilde{C}_V no limite $\theta \rightarrow 0$

$$\tilde{C}_V \equiv N^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \theta} \right) \Big|_V \rightarrow - \frac{m}{\hbar} \frac{3}{16\pi^5} k_F^4 e^2 R \theta, \quad (4.40)$$

podemos interpretar o parâmetro θ como uma temperatura de referência a qual levanta a degenerescência do modelo funcionalmente da mesma forma que a temperatura, porém, ao invés de aumentar a energia essa temperatura de referência diminui a energia do sistema. Outros efeitos os quais levantam a degenerescência do modelo dessa forma funcional não estão descartados e podem ser estudados.

5 *Conclusão*

Impulsionadas pelo grande número de trabalhos realizados em teoria quântica de campo não-comutativa, pesquisas envolvendo problemas de física quântica numa variedade do espaço-tempo não-comutativa também começaram a ser realizadas. O grande esforço tem sido o de gerar fenomenologia para que tais efeitos possam ser medidos. De certa forma, mecânica quântica não-comutativa é um campo de teste mais acessível com respeito a experimentação. No presente trabalho, ao invés de seguir os estudos já vastamente realizados em teoria quântica de campo ou mesmo em mecânica quântica não-relativística, optou-se por ingressar no estudo de teoria quântica não relativística de muitos corpos envolvendo segunda quantização que até então mostrava-se não explorado pelas teorias não-comutativas. Neste ponto está o caráter inédito do trabalho desenvolvido aqui, que foi publicado em parte em [39].

O modelo do gás de elétrons degenerado serviu como base para o nosso estudo de um espaço não-comutativo. Primeiro reconhecemos o produto- \star como a maneira pela qual a álgebra de um espaço não-comutativo se apresenta no Hamiltoniano total do sistema. Por uma análise diagramática vimos como as exponenciais não-comutativas aparecem tanto no Hamiltoniano quanto nos termos que contribuem para o cálculo da energia do sistema. Desta forma, correções perturbativas da energia foram calculadas, aparecendo efeitos da nova geometria espacial a partir de segunda ordem de perturbação. Para o termo de correlação de troca da energia, onde primeiro a exponencial não-comutativa aparece, levando em conta apenas efeitos globais do espaço, estudamos possíveis limites do parâmetro não-comutativo θ , o qual não mostrou grande interesse exceto no limite

$\theta \rightarrow 0$, onde relacionamos o parâmetro não-comutativos com a temperatura. Conforme vimos, essa relação nos definir um calor específico modificado, chegando a um resultado funcionalmente igual encontrado por Gell-Mann[36] para um gás de elétrons ordinário a temperatura $T \rightarrow 0$, porém negativo.

Com o objetivo principal de abordar problemas onde fenomenologia possa ser feita de forma que efeitos não-comutativos sejam testados, o gás de elétrons mostrou-se um modelo interessante. Por um lado este modelo já foi extensamente estudado e muitos experimentos já forma realizados, chegando a valores muito próximos ao predito pela teoria¹. Por outro lado não havia nenhum estudo de uma álgebra não-comutativa aplicada em um modelo de teoria quântica não relativística de muitos corpos. No caso do gás de elétrons não-comutativo conseguimos com êxito introduzir uma álgebra não-comutativa e calcular, por teoria de perturbação, correções da energia onde a não-comutatividade está presente, chegando a proposição de que o parâmetro não-comutativo θ atua, de fato, como uma temperatura de referência, onde o efeito é inverso da temperatura real, diminuindo a energia total.

¹Veja, por exemplo, páginas 29 e 30 em [33]

APÊNDICE A – Definições

Para trabalhar com o formalismo de Teoria Quântica de Campos (TQC), usaremos algumas definições que facilitarão o desenvolvimento de cálculos de teoria de perturbação. Como é prática usual [33], fazemos uma analogia entre o estado de vácuo da TQC relativística com o estado fundamental não perturbado (estado de Fermi). Começamos separando os operadores de criação (aniquilação) em duas partes

$$c_{\vec{k}\lambda} (c_{\vec{k}\lambda}^\dagger) = \begin{cases} b_{\vec{k}\lambda}^\dagger (b_{\vec{k}\lambda}), & k < k_F \\ a_{\vec{k}\lambda}^\dagger (a_{\vec{k}\lambda}), & k > k_F \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

onde os operadores $a_{\vec{k}\lambda}^\dagger (a_{\vec{k}\lambda})$ criam (aniquilam) partículas com energia acima da energia de Fermi ($E_F = E_0^{(0)}$), de forma que $b_{\vec{k}\lambda}^\dagger (b_{\vec{k}\lambda})$ criam (aniquilam) “buracos” com energia menor que E_F . O estado fundamental não perturbado $|E_0^{(0)}\rangle$ é descrito como

$$|E_0^{(0)}\rangle = \prod_{i=1}^N c_{\vec{k}_i\lambda_i}^\dagger |0\rangle \begin{cases} \vec{k}_i\lambda_i \neq \vec{k}_j\lambda_j \forall i \neq j \\ k_i < k_F \end{cases}, \quad (\text{A.2})$$

obedecendo sempre $|\vec{k}_i| < k_F \forall i$, já que todos os estados de menor energia devem estar preenchidos a partir do estado de vácuo ($|0\rangle$) até a energia de Fermi. A desigualdade $\vec{k}_i\lambda_i \neq \vec{k}_j\lambda_j$ é necessária para que não sejam criadas duas partículas com mesmos números quânticos, seguindo o princípio de exclusão de Pauli. Podemos também escrever os operadores $c_{\vec{k}\lambda}^\dagger (c_{\vec{k}\lambda})$ como

$$c_{\vec{k}\lambda} = \tilde{b}_{\vec{k}\lambda}^\dagger + \tilde{a}_{\vec{k}\lambda}, \quad (\text{A.3a})$$

$$c_{\vec{k}\lambda}^\dagger = \tilde{b}_{\vec{k}\lambda} + \tilde{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger, \quad (\text{A.3b})$$

onde

$$\tilde{b}_{\vec{k}\lambda} \equiv \xi(k_F - k) b_{\vec{k}\lambda}, \quad (\text{A.4a})$$

$$\tilde{b}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \equiv \xi(k_F - k) b_{\vec{k}\lambda}^\dagger, \quad (\text{A.4b})$$

$$\tilde{a}_{\vec{k}\lambda} \equiv \xi(k - k_F) a_{\vec{k}\lambda}, \quad (\text{A.4c})$$

$$\tilde{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \equiv \xi(k - k_F) a_{\vec{k}\lambda}^\dagger. \quad (\text{A.4d})$$

Note que ao trabalharmos com $c_{\vec{k}\lambda}$ e $c_{\vec{k}\lambda}^\dagger$, ambos operadores podem ou não aniquilar o estado fundamental, dependendo do valor de $|\vec{k}|$. No caso das novas definições dadas na Eq. (A.1), os únicos operadores que sempre aniquilarão este estado serão $a_{\vec{k}\lambda}$ e $b_{\vec{k}\lambda}$, pois no estado $|E_0^{(0)}\rangle$ não há buracos (todos os estados com energia menor que a de Fermi estão preenchidos) nem partículas com energia maiores que a energia de Fermi. Escrevemos, portanto,

$$a_{\vec{k}\lambda} |E_0^{(0)}\rangle = 0, \quad (\text{A.5a})$$

$$b_{\vec{k}\lambda} |E_0^{(0)}\rangle = 0. \quad (\text{A.5b})$$

A álgebra obedecida por esses novos operadores é dada por

$$\{a_{\vec{k}\lambda}^\dagger, a_{\vec{k}'\lambda'}\} = \delta_{\vec{k}'\vec{k}} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (\text{A.6a})$$

$$\{b_{\vec{k}'\lambda'}, b_{\vec{k}\lambda}^\dagger\} = \delta_{\vec{k}'\vec{k}} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (\text{A.6b})$$

sendo igual a zero para as outras relações de comutação.

Na seqüência definimos a contração de operadores. Sejam A e B dois operadores, uma contração entre eles é definida como

$$A \cdot B \equiv AB - :AB: . \quad (\text{A.7})$$

O produto normal reconhecido como $:AB:$ re-ordena os operadores de forma a deixar o que aniquila o estado fundamental sempre do lado direito. Conforme as Eqs. (A.3), (A.4) e (A.5), juntamente com as relações de comutação nas Eqs. (A.6) é fácil obter as possíveis contrações não nulas que relacionam os operadores $c_{\vec{k}\lambda}^\dagger$ e $c_{\vec{k}\lambda}$. Reconhecemos então

$$\left\langle E_0^{(0)} \left| c_{\vec{k}\lambda}^\dagger c_{\vec{k}'\lambda'} \right| E_0^{(0)} \right\rangle = \tilde{b}_{\vec{k}\lambda} \tilde{b}_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger = \xi(k_F - k) \xi(k_F - k') \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'} , \quad (\text{A.8a})$$

$$\left\langle E_0^{(0)} \left| c_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger \right| E_0^{(0)} \right\rangle = \tilde{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \tilde{a}_{\vec{k}'\lambda'} = \xi(k - k_F) \xi(k' - k_F) \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'} . \quad (\text{A.8b})$$

Estas são as relações que servirão de base para cálculos de valor esperado do estado fundamental. Na maioria das vezes essas relações envolverão combinações com mais de dois operadores, sendo necessário o uso do Teorema de Wick [33,40]. No presente caso, tal teorema nos possibilita usar, no lugar do produto comum de um conjunto de operadores, a soma de produtos normais desse conjunto contendo todas as combinações possíveis de contrações entre pares de operadores. Para N operadores, podemos escrever

$$\begin{aligned} A_1 A_2 A_3 A_4 \cdots A_N &= :A_1 A_2 A_3 A_4 \cdots A_N: + A_1 A_2 :A_3 A_4 \cdots A_N: + \cdots \\ &+ :A_1 A_2 A_3 A_4 \cdots A_N: + :A_1 A_2 A_3 A_4 \cdots A_N: + \cdots . \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Notemos que para o valor esperado do estado fundamental só contribuirão aqueles termos onde todos os operadores estão contraídos.

APÊNDICE B – Análise de Diagramas

Vamos aqui implementar a idéia de diagramas de Feynman no espaço de momentum de forma a localizar quais dentre os termos que contribuem para a expansão perturbativa da Eq. (4.25) apresentam a exponencial não-comutativa. Como é usual, associamos uma linha de férmion entrando em um vértice a um operador de destruição, ao passo que um operador de criação é desenhado como uma linha de férmion saindo de um vértice. Como exemplo, na Fig. 4 construímos um diagrama contendo um vértice V qualquer com linhas de férmions relacionadas a operadores $c_{\vec{p}\lambda}^\dagger$ e $c_{\vec{k}\lambda}$, com uma linha ondulada representando a interação coulombiana, responsável pelo momentum transferido na reação. Desse gráfico vamos desenvolver uma forma sistemática de chegar a exponencial não-comutativa, bem como reconhecer termos onde ela está presente. Olhando para a Fig. 4, a linha de férmion entrando no vértice representa um operador de aniquilação com momentum \vec{k} e a linha saindo o operador de criação de uma partícula com momentum \vec{p} . O argumento da exponencial é construído de forma a ordenar o momentum da linha entrando \vec{k} sempre primeiro, logo após vindo o produto- \wedge e então o momentum da partícula criada \vec{p} , tudo multiplicado por i .

Seguimos então para a construção de diagramas que representam os termos perturbativos da Eq. (4.25). Para começar, devemos ter em mente que a cada ordem de perturbação existe um número específico de vezes que o operador \mathcal{H}_I aparece. Conforme foi dito no Apêndice A, ao utilizarmos o teorema de Wick para calcular efetivamente o valor esperado de um conjunto de operadores do estado fundamental não-perturbado, somente interessam aqueles termos onde todos os operadores estão contraídos. Na linguagem de diagramas,

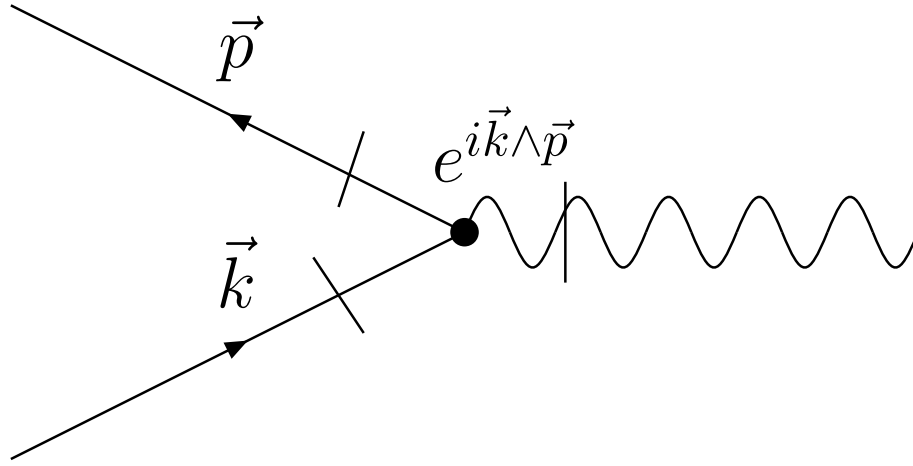


Figura 4: Diagrama correspondente a um vértice com duas linhas de férmions amputadas, uma delas representando um operador que aniquila uma partícula com momentum \vec{k} e a outra um operador que cria uma partícula com momentum \vec{p} . A linha ondulada amputada simboliza a interação coulombiana entre dois vértices, sendo responsável pela transferência de momentum na reação. O produto- \wedge entre os momenta das linhas de férmions segue a ordem: momentum seta entrando \rightarrow produto- \wedge \rightarrow momentum seta saindo, multiplicado por i .

representamos uma contração por uma linha de férmion ligando dois vértices, de modo que o vértice onde a linha entra está relacionado ao operador de aniquilação, sendo, o operador de criação, a linha que sai. Para o termo perturbativo contendo um operador \mathcal{H}_I , devemos juntar todas as “pernas” das linhas de férmions que não estão conectadas, mostradas na Fig. 1, formando todas as figuras topologicamente distintas onde não sobram ‘pernas soltas’ (operadores não contraídos). Na Fig. 5 vemos todas as possíveis figuras para o primeiro termo de perturbação. O que devemos então ver é se todos os gráficos topologicamente distintos contribuem. No caso da Fig. 5 (b), o diagrama contém laços fechados por um vértice, o que exige que o momentum transferido (\vec{q}) seja igual a zero. Sendo assim, diagramas contendo ao menos um laço fechado não contribuem para a Eq. (4.25).

Diagramas do tipo da Fig. 5 (a) não são modificados pela não-comutatividade. Isso se deve ao fato de que duas linhas estão fechadas por dois vértices. Da mesma forma que criamos um fator exponencial com uma determinada ordem no produto- \wedge entre os

Figura 5: Diagramas topologicamente distintos para o caso de valor esperado do estado fundamental não perturbado de \mathcal{H}_I . Correspondente ao termo de perturbação $E_0^{(1)}$, embora a figura em (b) não contribua.

momenta de um vértice, no outro vértice a ordem deste produto nos momenta é inversa, e portanto os fatores se cancelam entre si.

Para o caso de dois operadores \mathcal{H}_I , ilustramos na Fig. 6 os possíveis diagramas que contribuirão para segunda ordem de perturbação. Note que diagramas com laços fechados por um vértice não foram desenhados, já que um ou ambos momenta transferidos \vec{q} e \vec{q}' são zero nesses casos. Os diagramas das Figs. 6 (c) e (d) correspondem aos termos conhecidos por $E_0^{(2)c}$ e $E_0^{(2)d}$, os quais, como veremos no Apêndice C.2, se anulam individualmente. Mesmo que contribuíssem para o termo perturbativo eles não conteriam a exponencial não-comutativa pois são termos do tipo “direto” e não de “troca”. De certo modo, pela forma de construção do argumento da exponencial, duas linhas fechadas por meio de dois vértices sempre matam esse argumento. E também que mais de duas linhas fechadas por mais de dois vértices matam esse argumento caso esses vértices não sejam de “troca”.

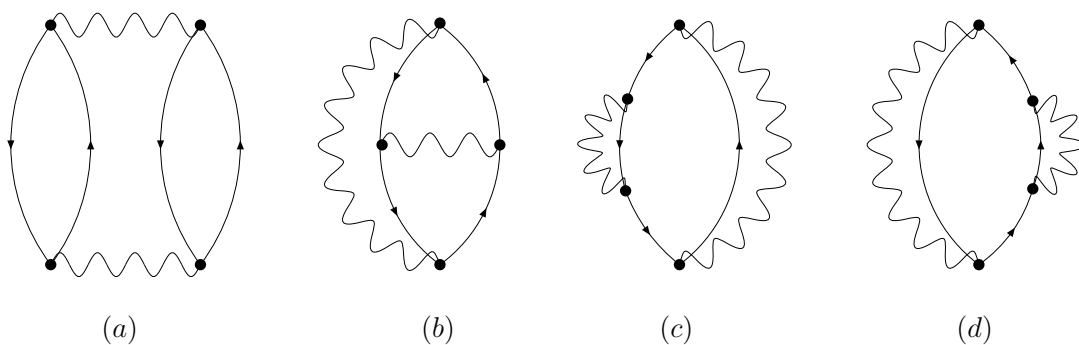


Figura 6: Diagramas topologicamente distintos para o caso de segunda ordem de perturbação. Designamos (a) como $E_0^{(2)r}$, (b) como $E_0^{(2)b}$, (c) como $E_0^{(2)c}$ e (d) como $E_0^{(2)d}$ mostrados em [33]. Note que diagramas desconectados ou com laços fechados por um vértice não foram contados, pois não contribuem.

APÊNDICE C – Cálculos

C.1 Cálculo do Elemento de Matriz em $\mathcal{E}_0^{(1)}$

Para ilustrarmos o Teorema de Wick que nos referimos no Apêndice A na Eq. (A.9), o elemento de matriz na Eq. (4.24) será calculado em detalhe. Começamos abrindo o produto comum de operadores

$$\begin{aligned}
& c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} c_{\vec{k}, \lambda_1} \\
&= : c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} c_{\vec{k}, \lambda_1} : + : c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} c_{\vec{k}, \lambda_1} : \\
&+ : c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} c_{\vec{k}, \lambda_1} : + : c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} c_{\vec{k}, \lambda_1} : \\
&+ c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} c_{\vec{k}, \lambda_1} + : c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} c_{\vec{k}, \lambda_1} : \\
&+ : c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} c_{\vec{k}, \lambda_1} : \\
&= : c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} c_{\vec{k}, \lambda_1} : - c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} : c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{k}, \lambda_1} : \\
&+ c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{k}, \lambda_1} : c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} : - c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{k}, \lambda_1} \\
&+ c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{k}, \lambda_1} c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} + c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} : c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{k}, \lambda_1} : \\
&- : c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} : c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{k}, \lambda_1} . \tag{C.1}
\end{aligned}$$

Contrações nulas não foram escritas. Cada contração é um número (não um operador) e, portanto, retiradas de dentro do produto normal. Vamos então tomar o valor esperado do estado fundamental não-perturbado dos operadores na Eq.(C.1), levando em conta o fato de que os termos onde restam operadores ordenados de acordo com o produto normal aniquilaram o estado de Fermi, restando

$$\begin{aligned}
& \left\langle E_0^{(0)} \left| c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} c_{\vec{k}, \lambda_1} \right| E_0^{(0)} \right\rangle \\
&= - \left\langle E_0^{(0)} \left| c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{k}, \lambda_1} \right| E_0^{(0)} \right\rangle \\
&+ \left\langle E_0^{(0)} \left| c_{\vec{k}+\vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{k}, \lambda_1} c_{\vec{p}-\vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}, \lambda_2} \right| E_0^{(0)} \right\rangle \\
&= -\xi(k_F - p) \xi(k_F - k) \delta_{\vec{p}-\vec{q}, \vec{k}} \delta_{\lambda_1 \lambda_2} + \xi(k_F - p) \xi(p - k_F) \xi(k_F - k) \xi(k - k_F) \delta_{\vec{q}} \\
&= -\xi(k_F - p) \xi(k_F - k) \delta_{\vec{p}-\vec{q}, \vec{k}} \delta_{\lambda_1 \lambda_2}. \tag{C.2}
\end{aligned}$$

O resultado da Eq. (C.2) leva em conta o fato de que $\vec{q} \neq 0$ na Eq. (4.24).

C.2 Cálculo de $\mathcal{E}_0^{(2)}$

Na expressão de $\mathcal{E}_0^{(2)}$ dada na Eq. (4.29) inserimos a expressão completa de \mathcal{H}_I dada na Eq. (4.21), tendo

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_0^{(2)} &= \sum_{i \neq 0} \frac{\left| \langle E_0^{(0)} | \mathcal{H}_I | E_i^{(0)} \rangle \right|^2}{E_0^{(0)} - E_i^{(0)}} = \langle E_0^{(0)} | \mathcal{H}_I \frac{\sum_{i \neq 0} | E_i^{(0)} \rangle \langle E_i^{(0)} |}{E_0^{(0)} - H_0} \mathcal{H}_I^\dagger | E_0^{(0)} \rangle \\
&= \left(\frac{2\pi e^2}{V} \right)^2 \sum'_{\vec{k}\vec{p}\vec{q}} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \frac{e^{-i\vec{q}\wedge(\vec{k}-\vec{p})}}{q^2} \sum'_{\vec{k}'\vec{p}'\vec{q}'} \sum_{\lambda'_1 \lambda'_2} \frac{e^{i\vec{q}'\wedge(\vec{k}'-\vec{p}')}}{q'^2} \\
&\times \underbrace{\langle E_0^{(0)} | c_{\vec{k}'\lambda'_1}^\dagger c_{\vec{p}'\lambda'_2}^\dagger c_{\vec{p}'-\vec{q}',\lambda'_2} c_{\vec{k}'+\vec{q}',\lambda'_1} }_{\equiv \langle E_{m'}^{(0)} | C_{m'}^\dagger} \frac{\sum_{i \neq 0} | E_i^{(0)} \rangle \langle E_i^{(0)} |}{E_0^{(0)} - H_0} c_{\vec{k}+\vec{q},\lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}-\vec{q},\lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}\lambda_2} c_{\vec{k}\lambda_1} }_{\equiv C_m | E_m^{(0)} \rangle} \\
&= \left(\frac{2\pi e^2}{V} \right)^2 \sum'_{\vec{k}\vec{p}\vec{q}} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \frac{e^{-i\vec{q}\wedge(\vec{k}-\vec{p})}}{q^2} \sum'_{\vec{k}'\vec{p}'\vec{q}'} \sum_{\lambda'_1 \lambda'_2} \frac{e^{i\vec{q}'\wedge(\vec{k}'-\vec{p}')}}{q'^2} \frac{C_{m'}^\dagger C_m}{E_0^{(0)} - E_m^{(0)}} \\
&\times \underbrace{\langle E_{m'}^{(0)} | \left(\sum_{i \neq 0} | E_i^{(0)} \rangle \langle E_i^{(0)} | \right) | E_m^{(0)} \rangle}_{i \neq 0 \Rightarrow m, m' \neq 0} \\
&= \left(\frac{2\pi e^2}{V} \right)^2 \sum'_{\vec{k}\vec{p}\vec{q}} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \frac{e^{-i\vec{q}\wedge(\vec{k}-\vec{p})}}{q^2} \sum'_{\vec{k}'\vec{p}'\vec{q}'} \sum_{\lambda'_1 \lambda'_2} \frac{e^{i\vec{q}'\wedge(\vec{k}'-\vec{p}')}}{q'^2} C_{m'}^\dagger C_m \\
&\times \left(\frac{\langle E_{m'}^{(0)} | E_m^{(0)} \rangle}{E_0^{(0)} - E_m^{(0)}} - \frac{\langle E_{m'}^{(0)} | E_0^{(0)} \rangle \langle E_0^{(0)} | E_m^{(0)} \rangle}{E_0^{(0)} - E_m^{(0)}} \right) \\
&= \left(\frac{2\pi e^2}{V} \right)^2 \sum'_{\vec{k}\vec{p}\vec{q}} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \sum'_{\vec{k}'\vec{p}'\vec{q}'} \sum_{\lambda'_1 \lambda'_2} \frac{e^{-i\vec{q}\wedge(\vec{k}-\vec{p})}}{q^2} \frac{e^{i\vec{q}'\wedge(\vec{k}'-\vec{p}')}}{q'^2} \frac{C_{m'}^\dagger C_m \overbrace{\langle E_{m'}^{(0)} | E_m^{(0)} \rangle}^{\delta_{mm'}}}{E_0^{(0)} - E_m^{(0)}}, \quad (C.3)
\end{aligned}$$

onde definimos os estados excitados

$$| E_m^{(0)} \rangle \equiv (C_m)^{-1} c_{\vec{k}+\vec{q},\lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}-\vec{q},\lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}\lambda_2} c_{\vec{k}\lambda_1} | E_0^{(0)} \rangle, \quad (C.4a)$$

$$| E_{m'}^{(0)} \rangle \equiv (C_{m'})^{-1} c_{\vec{k}'+\vec{q}',\lambda'_1}^\dagger c_{\vec{p}'-\vec{q}',\lambda'_2}^\dagger c_{\vec{p}'\lambda'_2} c_{\vec{k}'\lambda'_1} | E_0^{(0)} \rangle, \quad (C.4b)$$

sendo C_m e $C_{m'}$ constantes de normalização. Por se tratar de um conjunto completo de autovetores $\left\{ \left| E_i^{(0)} \right\rangle \right\}$, usamos a relação $\sum_{i \neq 0} \left| E_i^{(0)} \right\rangle \left\langle E_i^{(0)} \right| \equiv I - \left| E_0^{(0)} \right\rangle \left\langle E_0^{(0)} \right|$ ao passarmos da segunda para a terceira igualdade na Eq. (C.3). Como vimos, $m, m' \neq 0$, o que nos leva a dizer que $\left| E_m^{(0)} \right\rangle$ e $\left| E_{m'}^{(0)} \right\rangle$ são estados excitados, então $\langle E_0^{(0)} | E_m^{(0)} \rangle = \langle E_0^{(0)} | E_{m'}^{(0)} \rangle = 0$.

O cálculo de $C_{m'}^\dagger C_m \langle E_{m'}^{(0)} | E_m^{(0)} \rangle$ requer o uso das ferramentas mostradas no Apêndice A. Consideramos apenas termos que contribuirão na Eq. (C.3). Desta forma desprezamos automaticamente termos que exijam $\vec{q} = 0$ ou $\vec{q}' = 0$. Contrações onde apenas termos linha contraem entre si, obrigando termos não contendo linha a também contraírem entre si (correspondentes aos diagramas desconectados)¹, correspondem a estados $m = m' = 0$ e, portanto, não são contados. Podemos dizer mais ainda, que nenhuma contração entre termos linha ou entre termos não linha podem ocorrer, pois no caso do valor esperado do estado fundamental de uma contração, por exemplo, entre $c_{\vec{k}+\vec{q},\lambda_1}^\dagger c_{\vec{p},\lambda_2}$ exigem que $\vec{k}+\vec{q} = \vec{p}$ e $\lambda_1 = \lambda_2$. Porém, nessas circunstâncias, $m = 0$ pois

$$\begin{aligned} C_m \left| E_m^{(0)} \right\rangle &= c_{\vec{p},\lambda_1}^\dagger c_{\vec{k},\lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}\lambda_1} c_{\vec{k}\lambda_1} \left| E_0^{(0)} \right\rangle = - \underbrace{c_{\vec{p},\lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}\lambda_1}}_{\equiv \hat{n}_{\vec{k}}} \underbrace{c_{\vec{k}\lambda_1}^\dagger c_{\vec{k}\lambda_1}}_{\equiv \hat{n}_{\vec{p}}} \left| E_0^{(0)} \right\rangle \\ &= -\hat{n}_{\vec{k}} \hat{n}_{\vec{p}} \left| E_0^{(0)} \right\rangle = -\xi(k_F - k)\xi(k_F - p) \left| E_0^{(0)} \right\rangle, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

o que implica $\left| E_m^{(0)} \right\rangle = \left| E_0^{(0)} \right\rangle$, portanto $m = 0$ e $C_0 = -\xi(k_F - k)\xi(k_F - p)$. Foi usado o fato de que $\hat{n}_{\vec{p}} \equiv c_{\vec{k}\lambda}^\dagger c_{\vec{k}\lambda}$ é o operador densidade de número de ocupação, o qual equivale a unidade para todos os estados com energia abaixo da energia de Fermi. Vale frisar que esse tipo de contração contendo apenas m ou $m' = 0$ equivale aos diagramas das Figs. (6c) e (6d). Desta forma

¹No formalismo de teoria de perturbação dependente do tempo esses diagramas desconectados desaparecem por meio de normalização no cálculo da matriz S

$$\begin{aligned}
C_m^\dagger C_m \delta_{mm'} &= C_m^\dagger C_m \langle \Phi_{m'} | \Phi_m \rangle \\
&= \left\langle E_0^{(0)} \left| c_{\vec{k}', \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p}', \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p}' - \vec{q}', \lambda_2'} c_{\vec{k}' + \vec{q}', \lambda_1'} c_{\vec{k} + \vec{q}, \lambda_1}^\dagger c_{\vec{p} - \vec{q}, \lambda_2}^\dagger c_{\vec{p} \lambda_2} c_{\vec{k} \lambda_1} \right| E_0^{(0)} \right\rangle \\
&= \left\langle E_0^{(0)} \left| \tilde{b}_{\vec{k}', \lambda_1} \tilde{b}_{\vec{p}', \lambda_2} \tilde{a}_{\vec{p}' - \vec{q}', \lambda_2'} \tilde{a}_{\vec{k}' + \vec{q}', \lambda_1'} \tilde{a}_{\vec{k} + \vec{q}, \lambda_1}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p} - \vec{q}, \lambda_2}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}, \lambda_2}^\dagger \tilde{b}_{\vec{k}, \lambda_1}^\dagger \right| E_0^{(0)} \right\rangle \\
&+ \left\langle E_0^{(0)} \left| \tilde{b}_{\vec{k}', \lambda_1} \tilde{b}_{\vec{p}', \lambda_2} \tilde{a}_{\vec{p}' - \vec{q}', \lambda_2'} \tilde{a}_{\vec{k}' + \vec{q}', \lambda_1'} \tilde{a}_{\vec{k} + \vec{q}, \lambda_1}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p} - \vec{q}, \lambda_2}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}, \lambda_2}^\dagger \tilde{b}_{\vec{k}, \lambda_1}^\dagger \right| E_0^{(0)} \right\rangle \\
&+ \left\langle E_0^{(0)} \left| \tilde{b}_{\vec{k}', \lambda_1} \tilde{b}_{\vec{p}', \lambda_2} \tilde{a}_{\vec{p}' - \vec{q}', \lambda_2'} \tilde{a}_{\vec{k}' + \vec{q}', \lambda_1'} \tilde{a}_{\vec{k} + \vec{q}, \lambda_1}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p} - \vec{q}, \lambda_2}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}, \lambda_2}^\dagger \tilde{b}_{\vec{k}, \lambda_1}^\dagger \right| E_0^{(0)} \right\rangle \\
&+ \left\langle E_0^{(0)} \left| \tilde{b}_{\vec{k}', \lambda_1} \tilde{b}_{\vec{p}', \lambda_2} \tilde{a}_{\vec{p}' - \vec{q}', \lambda_2'} \tilde{a}_{\vec{k}' + \vec{q}', \lambda_1'} \tilde{a}_{\vec{k} + \vec{q}, \lambda_1}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p} - \vec{q}, \lambda_2}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}, \lambda_2}^\dagger \tilde{b}_{\vec{k}, \lambda_1}^\dagger \right| E_0^{(0)} \right\rangle \\
&= \xi(k_F - k') \xi(k_F - p') \xi(|\vec{p}' - \vec{q}'| - k_F) \xi(|\vec{k}' + \vec{q}'| - k_F) \\
&\times \xi(|\vec{k} + \vec{q}| - k_F) \xi(|\vec{p} - \vec{q}| - k_F) \xi(k_F - p) \xi(k_F - k) \\
&\times \left(\delta_{\vec{k}' \vec{p}} \delta_{\vec{p}' \vec{k}} \delta_{\vec{p}' - \vec{q}', \vec{k} + \vec{q}} \delta_{\vec{k}' + \vec{q}', \vec{p} - \vec{q}} \delta_{\lambda_1' \lambda_2} \delta_{\lambda_2' \lambda_1} \delta_{\lambda_2 \lambda_1} \delta_{\lambda_1' \lambda_2} \right. \\
&- \delta_{\vec{k}' \vec{p}} \delta_{\vec{p}' \vec{k}} \delta_{\vec{p}' - \vec{q}', \vec{p} - \vec{q}} \delta_{\vec{k}' + \vec{q}', \vec{k} + \vec{q}} \delta_{\lambda_1' \lambda_2} \delta_{\lambda_2' \lambda_1} \delta_{\lambda_2 \lambda_1} \delta_{\lambda_1' \lambda_2} \\
&- \delta_{\vec{k}' \vec{k}} \delta_{\vec{p}' \vec{p}} \delta_{\vec{p}' - \vec{q}', \vec{k} + \vec{q}} \delta_{\vec{k}' + \vec{q}', \vec{p} - \vec{q}} \delta_{\lambda_1' \lambda_1} \delta_{\lambda_2' \lambda_2} \delta_{\lambda_2 \lambda_1} \delta_{\lambda_1' \lambda_2} \\
&\left. + \delta_{\vec{k}' \vec{k}} \delta_{\vec{p}' \vec{p}} \delta_{\vec{p}' - \vec{q}', \vec{p} - \vec{q}} \delta_{\vec{k}' + \vec{q}', \vec{k} + \vec{q}} \delta_{\lambda_1' \lambda_1} \delta_{\lambda_2' \lambda_2} \delta_{\lambda_2 \lambda_2} \delta_{\lambda_1' \lambda_1} \right) \\
&= \xi(k_F - k') \xi(k_F - p') \xi(|\vec{p}' - \vec{q}'| - k_F) \xi(|\vec{k}' + \vec{q}'| - k_F) \\
&\times \xi(|\vec{k} + \vec{q}| - k_F) \xi(|\vec{p} - \vec{q}| - k_F) \xi(k_F - p) \xi(k_F - k) \\
&\times \left(\delta_{\vec{k}' \vec{p}} \delta_{\vec{p}' \vec{k}} \delta_{\vec{p}' - \vec{q}', \vec{q}} \delta_{\lambda_1' \lambda_2} \delta_{\lambda_2' \lambda_1} - \delta_{\vec{k}' \vec{p}} \delta_{\vec{p}' \vec{k}} \delta_{\vec{p}' - \vec{q}', \vec{k} - \vec{p} + \vec{q}} \delta_{\lambda_1' \lambda_2} \delta_{\lambda_2' \lambda_1} \delta_{\lambda_2 \lambda_2} \delta_{\lambda_1' \lambda_1} \right. \\
&\left. - \delta_{\vec{k}' \vec{k}} \delta_{\vec{p}' \vec{p}} \delta_{\vec{p}' - \vec{q}', \vec{p} - \vec{k} - \vec{q}} \delta_{\lambda_1' \lambda_1} \delta_{\lambda_2' \lambda_2} \delta_{\lambda_2 \lambda_1} \delta_{\lambda_1' \lambda_2} + \delta_{\vec{k}' \vec{k}} \delta_{\vec{p}' \vec{p}} \delta_{\vec{p}' - \vec{q}', -\vec{q}} \delta_{\lambda_1' \lambda_1} \delta_{\lambda_2' \lambda_2} \right). \quad (\text{C.6})
\end{aligned}$$

Podemos ver que as únicas combinações de contrações não nulas possíveis mostram que o estado $\left| E_m^{(0)} \right\rangle$ deve ser dado como:

$$\left| E_m^{(0)} \right\rangle = (C_m)^{-1} \tilde{a}_{\vec{k} + \vec{q}, \lambda_1}^\dagger \tilde{a}_{\vec{p} - \vec{q}, \lambda_2}^\dagger \tilde{b}_{\vec{p}, \lambda_2}^\dagger \tilde{b}_{\vec{k}, \lambda_1}^\dagger \left| E_0^{(0)} \right\rangle. \quad (\text{C.7})$$

Tendo em mente a Eq. (C.7), podemos calcular o valor de $E_m^{(0)}$. Os operadores de criação de buracos aniquilam partículas que estão abaixo do nível de Fermi, o que diminui a energia do estado fundamental não perturbado por um valor correspondente a energia de

uma partícula com momentum \vec{k} e outra com momentum \vec{p} . Por outro lado são criadas duas partículas acima do nível de Fermi o que acarreta somar a energia de partículas com momentum acima de k_F que são $\vec{p} - \vec{q}$ e $\vec{k} + \vec{q}$. Sendo assim

$$\begin{aligned} E_m^{(0)} &= E_0^{(0)} + \frac{\hbar^2}{2m} \left((\vec{k} + \vec{q})^2 + (\vec{p} - \vec{q})^2 - k^2 - p^2 \right) \\ &= E_0^{(0)} + \frac{\hbar^2}{m} \vec{q} \cdot (\vec{k} + \vec{q} - \vec{p}). \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Por meio de trocas de variáveis e, juntando resultados das Eqs. (C.3), (C.6) e (C.8) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0^{(2)} &= -\frac{m}{\hbar^2} \left(\frac{2\pi e^2}{V} \right)^2 \sum'_{\vec{k}\vec{p}\vec{q}} \sum_{\lambda_1\lambda_2} \sum'_{\vec{k}'\vec{p}'\vec{q}'} \sum_{\lambda'_1\lambda'_2} \frac{e^{-i\vec{q}\wedge(\vec{k}-\vec{p})}}{q^2} \frac{e^{i\vec{q}'\wedge(\vec{k}'-\vec{p}')}}{q'^2} \frac{\xi(k_F - k')\xi(k_F - p')}{\vec{q} \cdot (\vec{k} + \vec{q} - \vec{p})} \\ &\times \xi(|\vec{p}' - \vec{q}'| - k_F)\xi(|\vec{k}' + \vec{q}'| - k_F)\xi(|\vec{k} + \vec{q}| - k_F)\xi(|\vec{p} - \vec{q}| - k_F)\xi(k_F - p) \\ &\times \xi(k_F - k) \left(\delta_{\vec{k}'\vec{p}}\delta_{\vec{p}'\vec{k}}\delta_{-\vec{q}',\vec{q}}\delta_{\lambda'_1\lambda_2}\delta_{\lambda'_2\lambda_1} - \delta_{\vec{k}'\vec{p}}\delta_{\vec{p}'\vec{k}}\delta_{\vec{q},\vec{k}+\vec{q}-\vec{p}}\delta_{\lambda'_1\lambda_2}\delta_{\lambda'_2\lambda_1}\delta_{\lambda'_2\lambda_2}\delta_{\lambda'_1\lambda_1} \right. \\ &\left. - \delta_{\vec{k}'\vec{k}}\delta_{\vec{p}'\vec{p}}\delta_{\vec{q},\vec{p}-\vec{k}-\vec{q}}\delta_{\lambda'_1\lambda_1}\delta_{\lambda'_2\lambda_2}\delta_{\lambda'_2\lambda_1}\delta_{\lambda'_1\lambda_2} + \delta_{\vec{k}'\vec{k}}\delta_{\vec{p}'\vec{p}}\delta_{\vec{q},-\vec{q}}\delta_{\lambda'_1\lambda_1}\delta_{\lambda'_2\lambda_2} \right) \\ &= -2\frac{m}{\hbar^2} \left(\frac{2\pi e^2}{V} \right)^2 \sum'_{\vec{k}\vec{p}\vec{q}} \sum_{\lambda_1\lambda_2} \frac{1}{q^2} \frac{\xi(|\vec{q} - \vec{p}| - k_F)\xi(|\vec{k} + \vec{q}| - k_F)\xi(k_F - k')}{\vec{q} \cdot (\vec{k} + \vec{q} - \vec{p})} \\ &\times \xi(k_F - p') \left(\sum_{\lambda_1\lambda_2} \frac{1}{q^2} - \sum_{\lambda} \frac{e^{-2i\vec{q}\wedge(\vec{k}-\vec{p})}}{(\vec{q} + \vec{k} - \vec{p})^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Tomando o limite termodinâmico e fazendo uso das definições já mencionadas para k_F e a_0 , juntamente com a troca para variáveis adimensionais \mathbf{q} ($k_F\mathbf{q} = \vec{q}$), reescrevemos $\mathcal{E}_0^{(2)}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_0^{(2)} &= -2 \frac{m}{\hbar^2} \left(\frac{2\pi e^2}{V} \right)^2 \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right)^3 \frac{1}{k_F^3} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{q^2} \int_{|\vec{k}+\vec{q}|>1} d^3 \mathbf{k} \\
&\times \int_{|\vec{q}-\vec{p}|>1} d^3 \mathbf{p} \frac{\xi(1-\mathbf{k})\xi(1-\mathbf{p})}{\vec{q} \cdot (\vec{q} + \vec{k} - \vec{p})} \left(4 \frac{1}{q^2} - 2 \frac{e^{-2i\vec{q}\wedge(\vec{k}-\vec{p})}}{(\vec{q} + \vec{k} - \vec{p})^2} \right) \\
&= \frac{N e^2}{2a_0} \left(\epsilon_0^{(2)r} + \epsilon_0^{(2)b}(\Theta) \right), \tag{C.10}
\end{aligned}$$

onde reconhecemos

$$\epsilon_0^{(2)r} \equiv -\frac{3}{8\pi^5} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{q^4} \int_{|\vec{k}+\vec{q}|>1} d^3 \mathbf{k} \int_{|\vec{q}-\vec{p}|>1} d^3 \mathbf{p} \frac{\xi(1-\mathbf{k})\xi(1-\mathbf{p})}{\vec{q} \cdot (\vec{q} + \vec{k} - \vec{p})} \tag{C.11}$$

como o termo direto de energia $\epsilon_0^{(2)r}$, que não é modificado pela não-comutatividade, ao passo que encontramos o termo de troca da energia

$$\epsilon_0^{(2)b}(\Theta) \equiv \frac{3}{16\pi^5} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{q^2} \int_{|\vec{k}+\vec{q}|>1} d^3 \mathbf{k} \int_{|\vec{q}-\vec{p}|>1} d^3 \mathbf{p} \frac{\xi(1-\mathbf{k})\xi(1-\mathbf{p}) e^{-2i\vec{q}\wedge(\vec{k}-\vec{p})}}{\vec{q} \cdot (\vec{q} + \vec{k} - \vec{p})} \tag{C.12}$$

que, de fato, sente o efeito da nova geometria espacial através da exponencial dentro da integral na Eq. (C.12), diferindo do resultado comutativo mostrado na Eq. (3.30).

Referências

- 1 JACKIW, R. Physical instances of noncommuting coordinates. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, Amsterdam, v. 108, p. 30–36, Apr. 2002. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/0110057>>.
- 2 SNYDER, H. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, New York, v. 71, n. 1, p. 38–41, Jan. 1947.
- 3 CONNES, A.; RIEFFEL, M. A. Yang-Mills for noncommutative two-tori. In: *Operator algebras and mathematical physics (Iowa City, Iowa, 1985)*. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1987, (Contemp. Math., v. 62). p. 237–266.
- 4 CONNES, A.; DOUGLAS, M. R.; SCHWARZ, A. Noncommutative geometry and matrix theory. *J. High Energy Phys.*, Trieste, n. 02, 003 34p., Feb. 1998.
- 5 SEIBERG, N.; WITTEN, E. String theory and noncommutative geometry. *J. High Energy Phys.*, Trieste, n. 09, 032 92p., Jan. 1999. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/9908142>>.
- 6 MICU, A.; SHEIKH-JABBARI, M. M. Noncommutative ϕ^4 theory at two loops. *J. High Energy Phys.*, Trieste, n. 1, 025 44p., Jan. 2001. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/0008057> and 999>.
- 7 AREF'EVA, Y.; BELOV, D. M.; KOSHELEV, A. S. Two-lopp diagrams in noncommutative ϕ_4^4 theory. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 476, n. 3/4, p. 431–436, Mar. 2000. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/>>.
- 8 RIAD, I. F.; SHEIKH-JABBARI, M. M. Noncommutative QED and anomalous dipole moments. *J. High Energy Phys.*, Trieste, n. 08, 045 21p., Sept. 2000.
- 9 HAYAKAWA, M. Perturbative analysis on infrared and ultraviolet aspects of noncommutative QED on ϕ^4 1999. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/9912167>>. Acesso em: 08 jul. 2005.
- 10 MARTIN, C. P.; RUIZ, F. R. Paramagnetic dominance, the sign of the beta function and UV/IR mixing in noncommutative U(1). *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 597, n. 1/3, p. 197–227, Mar. 2001. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/0007131>>.
- 11 GOMIS, J.; MEHEN, T. Space-time noncommutative field theories and unitarity. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 591, n. 1/2, p. 265–276, Dec. 2000. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/0005129>>.

- 12 CHAICHIAN, M.; DEMICHEV, A.; PREŠNAJDER, P.; TUREANU, A. Space-time noncommutativity, discreteness of time and unitarity. *Eur. Phys. J. C*, Heidelberg, v. 20, n. 4, p. 767–772, May 2001. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/0007156>>.
- 13 FERRARI, A. F.; GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIBEIRO, A. A.; RIVELLES, V. O.; SILVA, A. J. da. On the finiteness of noncommutative supersymmetric QED₃ in the covariant superfield formulation. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 577, n. 1/2, p. 83–92, Dec. 2003.
- 14 FERRARI, A. F.; GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIBEIRO, A. A.; RIVELLES, V. O.; SILVA, A. J. da. Superfield covariant analysis of the divergence structure of noncommutative supersymmetric QED₄. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 69, n. 2, 025008 15p., Jan. 2004.
- 15 FERRARI, A. F.; GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIBEIRO, A. A.; RIVELLES, V. O.; SILVA, A. J. da. Towards a consistent noncommutative supersymmetric Yang-Mills theory: superfield covariant analysis. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 70, n. 8, 085012 11p., Oct. 2004.
- 16 FERRARI, A. F.; GIROTTI, H. O.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIBEIRO, A. A.; RIVELLES, V. O.; SILVA, A. J. da. On the consistency of the three-dimensional noncommutative supersymmetric Yang-Mills theory. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 601, n. 1/2, p. 88–92, Nov. 2004.
- 17 RIVELLES, V. O. Noncommutative supersymmetric field theories. *Braz. J. Phys.*, São Paulo, v. 31, n. 2, p. 255–262, June 2001.
- 18 DOUGLAS, M. R.; NEKRASOV, N. A. Noncommutative field theory. *Rev. Mod. Phys.*, Melville, v. 73, n. 4, p. 977–1029, Oct. 2001.
- 19 SZABO, R. J. Quantum field theories on noncommutative spaces. *Phys.Rep.*, Amsterdam, v. 378, n. 4, p. 207–299, May 2003. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/0109162>>.
- 20 GOMES, M. Renormalization in noncommutative field theory. *São Paulo 2001, Particles and fields*, p. 251–290, Jan. 2001. Prepared for 11th Jorge Andre Swieca Summer School on Particle and Fields, Campos do Jordão, Brazil, 14-27 Jan. 2001. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/ver>>.
- 21 GIROTTI, H. O. Noncommutative Quantum Field Theories. In: JORGE ANDRE SWIECA SUMMER SCHOOL ON PARTICLE AND FIELDS, 12., 2003, Campos do Jordão. Lectures on ... Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/0301237>>. Acesso em: 08 jul. 2005.
- 22 DOPLICHER, S.; FREDENHAGEN, K.; ROBERTS, J. E. The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields. *Comm. Math. Phys.*, Berlin, v. 172, n. 1, p. 187-220, Aug. 1995. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/0303037>>. Acesso em: 08 jul. 2005.

- 23 AMELINO-CAMELIA, G.; ELLIS, J.; MAVROMATOS, N. E.; NANOPOULOS, D. V. Tests of quantum gravity from observations of γ -ray bursts. *Nature*, London, v. 393, n. 6687, p. 763–765, June 1998.
- 24 JACOBSON, T.; LIBERATI, S.; MATTINGLY, D. A strong astrophysical constraint on the violation of special relativity by quantum gravity. *Nature*, London, v. 424, n. 6952, p. 1019–1021, Aug. 2003.
- 25 COLLINS, J.; PEREZ, A.; SUDARSKY, D.; URRUTIA, L.; VUCETICH, H. Lorentz invariance and quantum gravity: an additional fine-tuning problem? *Phys. Rev. Lett.*, Melville, v. 93, n. 19, 191301 4p., Nov. 2004. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0403053>>.
- 26 CHAICHIAN, M.; SHEIKH-JABBARI, M. M.; TUREANU, A. Non-commutativity of space-time and the hydrogen atom spectrum. *Eur. Phys. J. C*, Heidelberg, v. 36, n. 2, p. 251–252, Aug. 2004.
- 27 GAMBOA, J.; LOEWE, M.; ROJAS, J. C. Noncommutative quantum mechanics. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 64, n. 6, 067901 3p., Sept. 2001. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/0010220>>.
- 28 GAMBOA, J.; LOEWE, M.; MENDEZ, F.; ROJAS, J. C. Noncommutative quantum mechanics: the two-dimensional central field. *Int. J. Mod. Phys. A*, Singapore, v. 17, n. 19, p. 2555–2566, July 2002. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/0106125>>.
- 29 GIROTTI, H. O. Noncommutative quantum mechanics. *Am. J. Phys.*, College Park, v. 72, n. 5, p. 608–612, May 2004.
- 30 GRÖNEWOLD, H. J. On the principles of elementary quantum mechanics. *Physica*, Amsterdam, v. 12, n. 7, p. 405–460, Oct. 1946.
- 31 MOYAL, J. E. Quantum mechanics as a statistical theory. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, London, v. 45, n. 1, p. 99–124, Jan. 1949.
- 32 FILK, T. Divergencies in a field theory on quantum space. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 376, n. 1/3, p. 53–58, May 1996.
- 33 FETTER, A. L.; WALECKA, J. D. *Quantum theory of many-particle systems*. Mineola: Dover Publications, 2003. 601 p.
- 34 WIGNER, E. On the interaction of electrons in metals. *Phys. Rev.*, New York, v. 46, n. 11, p. 1002–1011, Dec. 1934.
- 35 GELL-MANN, M.; BRUECKNER, K. A. Correlation energy of an electron gas at high density. *Phys. Rev.*, New York, v. 106, n. 2, p. 364–368, Apr. 1957.
- 36 GELL-MANN, M. Specific heat of a degenerate electron gas at high density. *Phys. Rev.*, New York, v. 106, n. 2, p. 369–372, Apr. 1957.
- 37 ONSAGER, L.; MITTAG, L.; STEPHEN, M. J. Integrals in the theory of electron correlations. *Ann. Physik*, Berlin, v. 18, n. 1/2, p. 71–77, Aug. 1966.

- 38 MINWALLA, S.; RAAMSDONK, M. V.; SEIBERG, N. Noncommutative perturbative dynamics. *J. High Energy Phys.*, Trieste, n. 02, 020 30p., Mar. 2000.
- 39 BEMFICA, F. S.; GIROTTI, H. O. The noncommutative degenerate electron gas. *J. Phys. A: Math. Gen.*, London, v. 38, n. 30, p. L539–L547, Jul. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0506191>>.
- 40 WICK, G. C. The evaluation of the collision matrix. *Phys. Rev.*, New York, v. 80, n. 2, p. 268–272, Oct. 1950.