Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

HARMONICIDADE DA APLICAÇÃO NORMAL DE GAUSS E HIPERSUPERFÍCIES DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM VARIEDADES HOMOGÊNEAS

por

Fidelis Bittencourt

Porto Alegre, dezembro de 2005

Tese submetida por FIDELIS BITTENCOURT como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Jaime Bruck Ripoll

Banca Examinadora:
Dra. Elisabeth Ferreira da Costa
Dr. Jaime Bruck Ripoll
Dr. Renato Hyuda de Luna Pedrosa
Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior

Data de Defesa: 19/12/2005

à minha mãe Maria Elvira Nunes

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Prof. Jaime Bruck Ripoll.

Agradeço à Profa. Elisabeth Ferreira da Costa, ao Prof. Renato Hyuda de Luna Pedrosa e ao Prof. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior o pronto aceite em participar da banca.

Igualmente, quero expressar meu agradecimento aos colegas do Departamento de Matemática da UFSM, muito especialmente ao Ari, ao Denílson, ao Maurício e ao Pedro.

Resumo

Nesta tese definimos a aplicação de Gauss de uma hipersurfície orientada imersa em uma variedade homogênea munida de uma métrica Riemanniana invariante. Nosso principal objetivo é estender para este contexto alguns resultados conhecidos sobre a aplicação de Gauss de uma hipersuperfície de curvatura média constante do espaço Euclidiano, como o teorema de Ruh-Vilm que relaciona a harmonicidade da aplicação de Gauss e a constância da curvatura média, o teorema de Hoffman-Osserman-Schoen o qual caracteriza o plano e o cilindro como as únicas superfícies completas de curvatura média constante cujas imagens pela aplicação de Gauss estão contidas em um hemisfério da esfera.

Abstract

In this thesis we define a Gauss map of an orientable hypersurface in a homogeneous manifold with an invariant Riemannian metric. Our main objective is to extend to this setting some results on the Gauss map of a constant mean curvature hypersurface of an Euclidean space, as Ruh-Vilm's theorem relating the harmonicity of the Gauss map and the constancy of the mean curvature, Hoffman-Osserman-Schoen's theorem characterizing the plane and the circular cylinder as the only complete constant mean curvature surfaces whose Gauss image is contained in a hemisphere of the sphere.

Sumário

Introdução

Um dos resultados mais interessantes da teoria das hipersuperfícies de curvatura média constante no espaço Euclidiano, devido a Ruh-Vilms ([RV]), estabelece que uma hipersuperfície deste espaço tem curvatura média constante se, e somente se, a aplicação de Gauss da hipersuperfície é harmônica. Muitas investigações têm sido feitas procurando obter-se um resultado similar a este para hipersuperfíces de curvatura média constante em espaços mais gerais, notadamente nos espaços simplesmente conexos de curvatura seccional constante, e, de fato, muito tem sido obtido, mas quase que somente em espaços de curvatura não positiva, principalmente no espaço hiperbólico. Não temos conhecimento de resultados similares em espaços de curvatura positiva, mesmo em esferas (estamos nos referindo a resultados envolvendo extensões da aplicação de Gauss, já que resultados de outro tipo, mas bastante relacionados ao tema acima, existem muitos (veja, por exemplo, [AKMU])).

Nesta tese trabalhamos no problema acima citado, ou seja, o de estender a definição de aplicação de Gauss para hipersuperfícies de espaços mais gerais e de estabelecer uma equivalência entre a harmonicidade desta aplicação e a constância da curvatura média da hipersuperfície. Obtivemos então uma extensão do teorema de Ruh-Vilms para o caso em que o espaço ambiente é uma variedade homogênea munida de uma métrica Riemanniana invariante, dita métrica homogênea. Pudemos então obter, a partir deste teorema, diversos resultados novos sobre as hipersuperfícies de curvatura média constante. Entre eles, obtivemos uma extensão de um resultado conhecido de Hoffman-Osserman-Schoen (enunciamos abaixo tal resultado.)

A seguir enunciamos os teoremas que foram estendidos na tese:

a) Teorema de Ruh-Vilms: Uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^n$ tem curvatura média constante se e somente se a aplicaçãode Gauss da hipersuperfície é harmônica.

b) Teorema de Hoffman-Osserman-Schoen: Se a imagem da aplicação de Gauss de uma superfície completa de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$ está contida num hemisfério fechado da esfera, a superfície é um plano ou um cilindro circular.

O primeiro dos teoremas acima é demonstrado em [RV] (Teorema e Corolário 1 de [RV]). O Teorema de Hoffman-Osserman-Schoen é dado em [HOS]. Uma generalização deses teoremas para o caso de hipersuperfícies de grupos de Lie munidos de métrica bi-invariante foi obtida recentemente em [EFFR].

Vamos apresentar agora uma breve descrição da tese. Nas preliminares introduzimos as notações e estabelecemos os resultados básicos utilizados, quais sejam, submersões Riemannianas, variedades homogêneas e ações de grupos de Lie em variedades. Vejamos algumas dessas notações. Sejam $\mathbb{G}$ um grupo de Lie munido de métrica bi-invariante, $\mathbb{H}$ um subgrupo de Lie de $\mathbb{G}$. Suponhamos $\dim \mathbb{H} = k$ e $\dim \mathbb{G} = n + k + 1$. No quociente de classes residuais à esquerda $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ vamos considerar uma métrica Riemanniana de tal modo que a projeção $\pi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$ seja uma submersão Riemanniana. Denotamos por $\mathcal{G}$ a álgebra de Lie de $\mathbb{G}$, por $\mathcal{H}$ a álgebra de Lie de $\mathbb{H}$, e por $\mathbb{S}^{n+k}$ a esfera unitária centrada na origem de $\mathcal{G}$. Ainda, denotamos por M uma hipersuperfície orientável em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ orientada por um campo normal unitário η.

No Capítulo 2, introduzimos a aplicação de Gauss $N : M \to \mathbb{S}^{n+k}$ de M. Essa aplicação é definida tomando-se o levantamento horizontal $\widetilde{\eta}$ de η para $\mathbb{G}$ seguido pela translação à direita de $\widetilde{\eta}$ para o elemento identidade de $\mathbb{G}$, isto é, a translação à direita de $\widetilde{\eta}$ para $\mathcal{G}$. Observamos que para o espaço Euclidiano, considerando $\mathbb{G} = \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{H} = \{e\}$, N coincide com a aplicação de Gauss usual de M. Mais geralmente, N coincide com a aplicação de Gauss definida nos artigos [R1] e [EFFR] para hipersuperfícies de um grupo de Lie $\mathbb{G}$ munido de métrica invariante à esquerda (novamente, tomando $\mathbb{H} = \{e\}$).

No terceiro capítulo estudamos a aplicação N em hipersuperfícies imersas com curvatura média constante em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. O principal resultado obtido é a extensão do Teorema de Ruh-Vilms citado acima cuja demonstração é conseqüencia imediata da seguinte fórmula para o Laplaciano da aplicação N:

$$\Delta N(z) = -n\Gamma_z(\operatorname{grad} H(z)) - \left(\|B\|^2 + \left\|B^i\right\|^2 + (n+k)\operatorname{Ric}\left(l_x^{-1}(\eta(z))\right)\right) N(z) \quad (1)$$

onde H é a curvatura média de M e B é a segunda forma fundamental de M (damos a definição de Γ_z no Capítulo 2, e a de B^i no Capítulo 3). Observamos que (1) é uma extensão da fórmula

$$\Delta N = -\operatorname{grad} H - ||B||^2 N. \tag{2}$$

válida para o caso Euclidiano (ver [RV]).

Como uma aplicação da extensão do Teorema de Ruh-Vilms, para o caso em que $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ tem dimensão 3, obtivemos uma caracterização das superfícies de curvatura média constante imersas conformemente em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ em termos de uma forma quadrática associada a derivada da aplicação N.

No Capítulo 4 estudamos a imagem pela aplicação de Gauss de hipersuperfícies de curvatura média constante em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. Uma extensão do teorema de Hoffman-Osserman-Schoen é obtida (Teorema 4.6). Para os demais resultados vamos precisar da seguinte definição. Um subespaço vetorial de co-dimensão 1 de $\mathcal{G}$ separa $\mathcal{G}$ em duas componentes conexas; o fecho de qualquer dessas componentes é chamado um semi-espaço de $\mathcal{G}$ e a interseção destes com $\mathbb{S}^{n+k}$ é uma semi-esfera, denotada por $\mathbb{S}^{n+k}_+$. Dado $l \in \mathbb{N}$, uma $(1/2^l)-$ esfera $\mathbb{S}^{n+k,l}$ de $\mathbb{S}^{n+k}$ é a interseção de l semi-esferas linearmente independentes $(\mathbb{S}^{n+k}_1)_+, ..., (\mathbb{S}^{n+k}_l)_+$ de $\mathbb{S}^{n+k}$ (isto é, os vetores normais aos semi-espaços contendo $\partial(\mathbb{S}^{n+k}_i)_+$ são linearmente independentes). Demonstramos o seguinte teorema o qual generaliza parcialmente o teorema de Hoffman-Osserman-Schoen:

Teorema: *Seja M hipersuperfície compacta de curvatura média constante de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ e $N : M \to \mathbb{S}^{n+k}$ a aplicação de Gauss de M. Suponhamos que ou M não é totalmente geodésica ou $||B^i|| > 0$ (damos no Capítulo 2 a definição de B^i) ou que a curvatura de Ricci de $\mathbb{G}$ é positiva. Dado $l \in N$, seja*

$$\mathbb{S}^{n+k,l} = \bigcap_{i=1}^{l} (\mathbb{S}^{n+k}_i)_+$$

uma $(1/2^l)-$ esfera S^{n+k}. As seguintes alternativas são equivalentes:

i)

$$N(M) \subset \mathbb{S}^{n+k,l}$$

ii)

$$N(M) \subset \bigcap_{i=1}^{l} \partial \left(\mathbb{S}_i^{n+k}\right)_+$$

iii)

$$\mathcal{K} := ger \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^{l} \partial \left(\mathbb{S}_i^{n+k}\right)_+ \right)^{\perp} \right\}$$

é uma subalgebra de Lie de $\mathcal{G}$ e M é invariante pelo subgrupo de Lie $\mathbb{K}$ de $\mathbb{G}$ cuja álgebra de Lie é $\mathcal{K}$.

Segue do resultado acima que quando $l \geq n$, M é variedade extrinsecamente homogenênea (isto é, existe um subgrupo de Lie de isometrias de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ agindo transitivamente em M). Se M é somente completa então um resultado similar acontece quando $\dim(\mathbb{G}/\mathbb{H}) = 3$. Para mencionar uma aplicação mais explícita vamos considerar uma superfície completa, orientável imersa com curvatura média constante em $\mathbb{S}^3 = SO(4)/SO(3)$ e suponhamos que a imagem da aplicação de Gauss

$$N : M \to \mathbb{S}^5 \subset \mathfrak{so}(4)$$

está contida em um hemisfério $\mathbb{S}^5_+$ de $\mathbb{S}^5$. Segue-se dos resultados desta tese que, a menos de isometria de $\mathbb{S}^3$, M é invariante por um subgrupo a um parâmetro de isometrias $\{\phi_t^\alpha\}_{t\in\mathbb{R}}$ de $\mathbb{S}^3$ da forma

$$\phi_t^\alpha = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha t & \sin \alpha t \\ 0 & 0 & -\sin \alpha t & \cos \alpha t \end{bmatrix}$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Em particular, se $\alpha = 1$ então M é invariante pela ação de Hopf de $\mathbb{S}^3$ e é possível provar que M é um toro de Clifford. Se $\alpha = 0$ então M é uma superfície de revolução em $\mathbb{S}^3$ (superfícies de revolução com curvatura média constante são descritos explicitamente em um sistema de coordenadas especial, ver [FR] ou [R3]).

Finalmente, demonstramos nesse capítulo o seguinte critério de estabilidade para domínios: Se D é um domínio de uma supefície M de curvatura média constante em

$\mathbb{G}/\mathbb{H}$ ($\dim(\mathbb{G}/\mathbb{H}) = 3$) tal que $N(D)$ está contido em um semi-espaço de $\mathcal{G}$, então D é estável.

Capítulo 1

Preliminares

Inicialmente vamos fixar algumas notações. Sejam $\mathbb{G}$ um grupo de Lie conexo munido de uma métrica bi-invariante $\langle\ ,\ \rangle$ e $\widetilde{\nabla}$ a conexão Riemanniana em $\mathbb{G}$ determinada por $\langle\ ,\ \rangle$. A álgebra de Lie de $\mathbb{G}$ será denotada $\mathcal{G}$. Dado $x \in \mathbb{G}$, as aplicações

$$L_x,\ R_x : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$$

definidas por

$$L_x(y) = xy,$$

e

$$R_x(y) = yx$$

são chamadas, respectivamente, translação à esquerda e translação à direita em $\mathbb{G}$. Observamos que tais aplicações são difeomorfismos. Como usual,

$$\exp : \mathcal{G} \to \mathbb{G}$$

é a aplicação exponencial de Lie. Dados $g \in \mathbb{G}$, e $X \in \mathcal{G}$, temos as aplicações

$$Ad_g,\ ad_X : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

definidas por

$$Ad_g = d(R_g^{-1} \circ L_g)_e$$

e
$$ad_X(Y) = [X, Y].$$
Observamos que
$$ad_X(Y) = \frac{d}{dt}\{Ad_{\exp X}(Y)\}_{t=0},$$
e que Ad_g é isomorfismo de grupo de Lie e uma isometria.

Lembramos que se X, Y, Z são campos de vetores invariantes à esquerda (à direita) de $\mathbb{G}$, então $\widetilde{\nabla}$ e o tensor de curvatura R em $\mathbb{G}$ são dados por
$$\widetilde{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$$
e
$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z].$$
Temos também a seguinte identidade $\langle [X, Y], Z\rangle = -\langle [Z, Y], X\rangle$. O tensor de Ricci de $\mathbb{G}$ é dado por
$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(u, v) &= \mathrm{trace}(X \mapsto R(u, X)v) \\ &= \sum_{i=1}^{n+k+1} \langle R(u, E_j)v, E_j\rangle , \end{aligned}$$
onde $\{E_j\}$ é uma base ortonormal de vetores tangentes à $\mathbb{G}$. A curvatura de Ricci de $\mathbb{G}$ na direção de u é $\mathrm{Ric}(u) = \mathrm{Ric}(u, u)$.

O próximo teorema é o Corolário 3 de [FS].

Teorema 1.1 *(Doris Fischer-Colbrie, Richard Schoen)***:** *Seja D o disco unitário munido de uma métrica Riemanniana tal que D é variedade Riemanniana completa. Seja K a curvatura Gaussiana de D. Se $a \geq 1$ e P é função não-negativa, então não existe solução positiva (equivalentemente negativa) g, em D, de*
$$\Delta g - aKg + Pg = 0.$$

Vejamos os principais resultados sobre submersão Riemanniana, variedades homogêneas e ações de grupos de Lie em variedades.

1.1 Submersões Riemannianas

Definição 1.2 Sejam $\overline{M}^{n+k}$, M^n variedades Riemannianas. Uma aplicação sobrejetiva $\pi : \overline{M} \to M$ é uma submersão Riemanniana se

1. Para todo $x \in \overline{M}$, $d\pi_x : T_x\overline{M}^{n+k} \to T_{\pi(x)}M^n$ tem posto n.

2. Por 1), para todo $z \in M$, $\pi^{-1}(z)$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Dados $z \in M$ e $x \in \pi^{-1}(z)$ tem-se que

$$l_x := d\pi_x \Big|_{T_x(\pi^{-1}(z))^\perp} : T_x\left(\pi^{-1}(z)\right)^\perp \to T_zM$$

é uma isometria, onde $T_x\left(\pi^{-1}(z)\right)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_x(\pi^{-1}(z))$ em $T_x\overline{M}$.

As subvariedades $\pi^{-1}(z)$, com $z \in M$, são chamadas fibras de $\overline{M}$. Observamos que para $x \in \pi^{-1}(z)$,

$$T_x\overline{M} = T_x\pi^{-1}(z) \oplus T_x\left(\pi^{-1}(z)\right)^\perp.$$

Se $u \in T_x\overline{M}$, escrevemos

$$u = u^v + u^h$$

sendo que $u^v \in T_x\pi^{-1}(z)$ é chamada a componente vertical de u e $u^h \in T_x\left(\pi^{-1}(z)\right)^\perp$ a componente horizontal. Se o vetor $u \in T_x\pi^{-1}(z)$ (respectivamente, $u \in T_x\left(\pi^{-1}(z)\right)^\perp$) ele é chamado vetor vertical (respectivamente, vetor horizontal). Um campo de vetores X em $\overline{M}$ é dito vertical (respectivamente, horizontal) se $X(x)$ é vetor vertical (respectivamente, vetor horizontal) para todo $x \in \overline{M}$. Denotemos por $\mathcal{X}(M)$ e por $\mathcal{X}(\overline{M})$ os espaços de campos de vetores C^∞ em M e em $\overline{M}$. Dado $\overline{X} \in \mathcal{X}(\overline{M})$, denotamos por $\overline{X}^v$ o campo vertical em $\overline{M}$ definido em $x \in \overline{M}$ como a componente vertical de $\overline{X}(x)$, e por $\overline{X}^h$ o campo horizontal em $\overline{M}$ dado em $x \in \overline{M}$ como a componente horizontal de $\overline{X}(x)$.

Seja $\pi : \overline{M} \to M$ submersão Riemanniana. Vejamos como se relacionam as respectivas conexões Riemannianas $\overline{\nabla}$, ∇ de $\overline{M}$ e M. Sejam $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, consideremos os campos $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathcal{X}(\overline{M})$ definidos por $\widetilde{X}(x) = l_x^{-1}(X(\pi(x)))$ $\widetilde{Y}(x) =$

$l_x^{-1}(Y(\pi(x)))$, $x \in \overline{M}$ e $[\,,\,]$ é o colchete de Lie de $\overline{M}$. Então

$$\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\widetilde{Y}\,(x) = l_x^{-1}\left(\nabla_X Y(\pi(x))\right) + \frac{1}{2}\left[\widetilde{X},\widetilde{Y}\right]^v(x).$$

Para a prova ver [O]. Pode-se mostrar também que $\left[\widetilde{X},\widetilde{Y}\right]^v(x)$ depende apenas de $\widetilde{X}(x), \widetilde{Y}(x)$.

1.2 Variedades homogêneas

Sejam $\mathbb{G}$ um grupo de Lie, $\mathbb{H}$ um subgrupo de Lie compacto de $\mathbb{G}$. Seja

$$\mathbb{G}/\mathbb{H} = \{x\mathbb{H} = L_x(\mathbb{H}) : x \in \mathbb{G}\}$$

o conjunto das classes residuais à esquerda de H. Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \pi &: \mathbb{G} \to \frac{\mathbb{G}}{\mathbb{H}}, \\ \pi(x) &= x\mathbb{H} \end{aligned}$$

dita projeção canônica de $\mathbb{G}$ em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. A próxima proposição estabelece que $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ é uma variedade diferenciável. A demonstração pode ser vista em [F].

Proposição 1.3 *Na notação acima, $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ tem uma única estrutura de variedade diferenciável tal que*

1. π é C^∞,

2. Existem seções locais diferenciáveis de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ em $\mathbb{G}$, isto é, se $x\mathbb{H} \in \mathbb{G}/\mathbb{H}$, existe uma vizinhança W de $x\mathbb{H}$ e uma aplicação diferenciável $\tau : W \to \mathbb{G}$ tal que $\pi \circ \tau = id_W$.

Definição 1.4 Variedades da forma $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ como na proposição anterior são chamadas variedades homogêneas.

Consideremos agora $\mathbb{G}$ grupo de Lie munido de métrica bi-invariante $\langle\,,\,\rangle$. Vamos introduzir em uma variedade homogênea $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ uma métrica Riemanniana, denotada também por $\langle\,,\,\rangle$, induzida pela projeção canônica

$$\begin{aligned} \pi \quad &: \quad \mathbb{G} \to \frac{\mathbb{G}}{\mathbb{H}}, \\ \pi(x) \quad &= \quad x\mathbb{H} \end{aligned}$$

como segue. Dado $z \in \mathbb{G}/\mathbb{H}$, seja $x \in \pi^{-1}(z)$. Definimos um produto interno $\langle\,,\,\rangle$ em $T_z(\mathbb{G}/\mathbb{H})$ de forma que

$$l_x := d\pi_x \Big|_{T_x(\pi^{-1}(z))^{\perp}} : T_x\left(\pi^{-1}(z)\right)^{\perp} \to T_z\left(\frac{\mathbb{G}}{\mathbb{H}}\right)$$

é uma isometria linear, onde $T_x\left(\pi^{-1}(z)\right)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de $T_x(\pi^{-1}(z))$ em $T_x\mathbb{G}$. Temos que $\langle\,,\,\rangle$, está bem definida em $T_z\left(\mathbb{G}\,/\,\mathbb{H}\right)$ e estabelece uma métrica Riemanniana em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, dita métrica homogênea. Segue que

$$\langle u,\, v\rangle_z = \left\langle l_x^{-1}(u),\, l_x^{-1}(v)\right\rangle_x.$$

Observamos que a métrica homogênea em $\mathbb{G}\,/\,\mathbb{H}$ torna a projeção $\pi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$ uma submersão Riemanniana. Assim,

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}(x) = l_x^{-1}\left(\nabla_X Y(\pi(x))\right) + \frac{1}{2}\left[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\right]^v(x) \tag{1.1}$$

onde $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{G}/\mathbb{H})$, e $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathcal{X}(\mathbb{G})$ são definidos por $\widetilde{X}(x) = l_x^{-1}(X(\pi(x)))$, $\widetilde{Y}(x) = l_x^{-1}(Y(\pi(x)))$, $x \in \mathbb{G}$ e $[\,,\,]$ é o colchete de Lie de $\mathbb{G}$.

1.3 Ações de grupos de Lie em variedades

Uma maneira equivalente de abordar as variedades homogêneas é dada pela teoria das ações de grupos de Lie em variedades diferenciáveis.

Definição 1.5 Seja M variedade diferenciável, $\mathbb{G}$ um grupo de Lie. Uma ação de $\mathbb{G}$ em M é uma aplicação C^∞ $\psi : \mathbb{G} \times M \to M$ satisfazendo

1. $\psi(e,\, x) = x$, para todo $x \in M$, onde e é o elemento unidade de $\mathbb{G}$,

2. $\psi\,(h,\, \psi\,(g,\, x)) = \psi\,(hg,\, x)$, para todo $h,\, g \in \mathbb{G}$, $x \in M$.

Vamos anotar simplesmente $\psi\left(g,\, x\right) = g.x$. Se $\psi : \mathbb{G} \times M \to M$ é uma ação de $\mathbb{G}$ em M dizemos que $\mathbb{G}$ age em M.

Por exemplo, a aplicação

$$\begin{aligned} \psi &: \mathbb{G} \times \mathbb{G}/\mathbb{H} \to \mathbb{G}/\mathbb{H} \\ \psi(g,\ x\mathbb{H}) &= (gx)\mathbb{H} \end{aligned}$$

é uma ação do grupo de Lie $\mathbb{G}$ na variedade homogênea $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. Mais geralmente, sendo $\mathbb{K} \subset \mathbb{G}$ subgrupo de Lie de $\mathbb{G}$, a aplicação

$$\begin{aligned} \phi &: \mathbb{K} \times \mathbb{G}/\mathbb{H} \to \mathbb{G}/\mathbb{H} \\ \phi\left(k,\, x\mathbb{H}\right) &= \left(kx\right)\mathbb{H} \end{aligned}$$

é uma ação do grupo de Lie $\mathbb{K}$ na variedade homogênea $\mathbb{G}/\mathbb{H}$.

Um exemplo importante é a ação de Hopf. Sejam $M = \mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ a esfera unitária, $\mathbb{G} = \mathbb{S}^1$, a ação de Hopf é a aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2n+1} &\to \mathbb{S}^{2n+1} \\ \left(e^{i\theta},\, x\right) &\to \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\,\theta & & & \\ -sen\,\theta & \cos\theta & & & \\ & & \ldots & & \\ & & & \cos\theta & sen\,\theta \\ & & & -sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{2n+1} \\ x_{2n+2} \end{pmatrix},\quad \theta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Uma ação chama-se efetiva se $g.x = x$ para todo $x \in M$ implica $g = e$. Uma ação é dita livre se $g.x = x$ para algum $x \in M$ implica $g = e$. Uma ação é transitiva se existe $x_0 \in M$ tal que

$$M = \left\{gx_0 : g \in \mathbb{G}\right\}.$$

Neste caso, diz-se que $\mathbb{G}$ age transitivamente em M. Temos que uma ação é transitiva se e somente se dados quaisquer $x_1,\, x_2 \in M$ existe $g \in \mathbb{G}$ tal que $x_1 = gx_2$. Por exemplo, a ação de $\mathbb{G}$ em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, $(g,\, x\mathbb{H}) \to (gx)\mathbb{H}$, é transitiva.

Definição 1.6 Sejam M variedade diferenciável, $\mathbb{G}$ um grupo de Lie e $\psi : \mathbb{G} \times M \to M$ uma ação de $\mathbb{G}$ em M. Dado $x \in M$ definem-se

1. A órbita de x
$$\mathbb{G}x = \{gx : g \in \mathbb{G}\}.$$

2. O subgrupo de isotropia de x
$$\mathbb{G}_x = \{g \in \mathbb{G} : gx = x\}.$$

Observamos que uma ação $\psi : \mathbb{G} \times M \to M$ é transitiva se e somente se todas as órbitas $\mathbb{G}x$ coincidem com M.

A próxima proposição relaciona ações de grupos de Lie em variedades com as variedades homogêneas.

Proposição 1.7 *Sejam M variedade diferenciável, $\mathbb{G}$ um grupo de Lie e $\psi : \mathbb{G} \times M \to M$ uma ação transitiva de $\mathbb{G}$ em M. Então M é difeomorfa a $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, onde $\mathbb{H}$ é o subgrupo de isotropia de algum (qualquer) x em M.*

Consideremos, agora, M uma variedade Riemanniana. Seja $\mathbb{ISO}(M)$ o grupo de isometrias de M. Temos que $\mathbb{ISO}(M)$ é um grupo de Lie. Se a ação de $\mathbb{ISO}(M)$ em M dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{ISO}(M) \times M & \to & M \\ (g,\, x) & \to & g(x) \end{array}$$

é transitiva dizemos que M é variedade *Riemanniana* homogênea.

Para a variedade homogênea $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ munida da métrica homogênea a ação de $\mathbb{G}$ em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ dada acima, $(g,\, x\mathbb{H}) \to (gx)\mathbb{H}$, é uma ação transitiva por isometrias. Podemos, então, considerar $\mathbb{G}$ como um subgrupo de Lie do grupo de isometrias de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ como segue
$$g(x\mathbb{H}) = (gx)\mathbb{H}$$
ou
$$g(\pi(x)) = \pi(R_x(g)). \tag{1.2}$$

Também precisaremos do conceito de variedade homogênea a dois pontos.

Definição 1.8 Sejam M uma variedade Riemanniana e $d : M \times M \to \mathbb{R}$ a distância definida em M. M é dita homogênea a dois pontos se para quaisquer dois pares de pontos $p_1,\, p_2 \in M$, $q_1, q_2 \in M$ satisfazendo $d(p_1,\, p_2) = d(q_1, q_2)$ existe uma isometria g de M tal que $g(p_1) = q_1$ e $g(p_2) = q_2$.

1.4 Campos de Killing em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$

Seja a variedade homogênea $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ munida da métrica homogênea $\langle\,,\,\rangle$. Sendo que podemos considerar, como vimos acima, $\mathbb{G} \subset \mathbb{ISO}(\mathbb{G}/\mathbb{H})$, qualquer vetor $w \in \mathcal{G}$ define em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ um campo de Killing, o qual denotamos $\zeta(w)$, como

$$\zeta(w)(z) = \frac{d}{dt}(\exp tw)(z)\bigg|_{t=0}, \;\; z \in \mathbb{G}/\mathbb{H}.$$

Agora, dado $z \in \mathbb{G}/\mathbb{H}$ e $x \in \pi^{-1}(z)$, temos, usando (1.2)

$$\begin{aligned} \zeta(w)(z) &= \frac{d}{dt}(\exp tw)(z)\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\exp tw)(\pi(x))\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\pi(R_x(\exp tw))\bigg|_{t=0} \\ &= d\pi_x(d(R_x)_e(w)), \end{aligned}$$

isto é,

$$\zeta(w)(z) = d\pi_x(d(R_x)_e(w)). \tag{1.3}$$

Pode-se demonstrar o seguinte

Lema 1.9 $\zeta : \mathcal{G} \to \mathcal{X}(\mathbb{G}/\mathbb{H})$, $w \mapsto \zeta(w)$, *é um monomorfismo de álgebras de Lie.*

Capítulo 2

A aplicação de Gauss de uma hipersuperfície em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$

Sejam $\mathbb{G}$ um grupo de Lie munido de uma métrica bi-invariante $\langle\,,\rangle$, $\mathbb{H}$ um subgrupo de Lie compacto de $\mathbb{G}$. Suponhamos $\dim \mathbb{H} = k$ e $\dim \mathbb{G} = n + k + 1$. Inicialmente vamos introduzir uma "translação" Γ em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. Dado $z \in \mathbb{G}/\mathbb{H}$, definimos a aplicação

$$\Gamma_z : T_z\left(\frac{\mathbb{G}}{\mathbb{H}}\right) \to \mathcal{G}$$

dada por

$$\Gamma_z(u) := d(R_x)_x^{-1}(l_x^{-1}(u)), \tag{2.1}$$

onde $x \in \pi^{-1}(z)$. A proposição seguinte mostra que Γ_z está bem definida e preserva a métrica.

Proposição 2.1 *A aplicação Γ_z está bem definida, isto é, (2.1) não depende de $x \in \pi^{-1}(z)$. Além disso, $\Gamma_z : T_z(\mathbb{G}/\mathbb{H}) \to \mathcal{G}$ é linear e preserva a métrica.*

Demonstração. Consideremos $x, y \in \pi^{-1}(z)$ e $u \in T_z(\mathbb{G}/\mathbb{H})$. Seja $h \in \mathbb{H}$ tal que $x = yh$. Temos obviamente que $d(R_h)_y(T_y\pi^{-1}(z)) = T_x\pi^{-1}(z)$ e, como R_h é uma isometria, $d(R_h)_y(T_y\pi^{-1}(z)^{\perp}) = T_x\pi^{-1}(z)^{\perp}$. Segue daí que $d\,(R_h)_y\,(l_x^{-1}(u)) \in$

$(T_x\pi^{-1}(z))^{\perp}$. Observando que

$$l_x\Big(d\,(R_h)_y\,(l_y^{-1}(u))\Big) = d\,(\pi\circ R_h)_y\,(l_y^{-1}(u))$$
$$= d\pi_y(l_y^{-1}(u)) = u = d\pi_x(l_x^{-1}(u)),$$

obtemos $d\,(R_h)_y\,(l_y^{-1}(u)) = l_x^{-1}(u)$. Logo,

$$\begin{aligned} d\,(R_x)_x^{-1}\,(l_x^{-1}(u)) &= d\,(R_{x^{-1}})_x\,(d\,(R_h)_y\,(l_y^{-1}(u))) \\ &= d\,(R_{x^{-1}}\circ R_h)_y\,(l_y^{-1}(u)) \\ &= d\,(R_{y^{-1}})_y\,(l_y^{-1}(u)), \end{aligned}$$

provando que Γ_z está bem definida. Além disso, Γ_z é obviamente linear e, sendo l_x e R_x^{-1} isometrias, Γ_z preserva a métrica, o que conclui a demonstração.

Definição 2.2 Seja M hipersuperfície orientável de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. Seja η campo unitário normal a M em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. Definimos a aplicação de Gauss N de M

$$N : M^n \to \mathbb{S}^{n+k} \subset T_e\mathbb{G}$$

por

$$N(z) = \Gamma_z(\eta(z)).$$

Seja $\widetilde{M} = \pi^{-1}(M)$ (observe $\widetilde{M}$ pode não ser conexo se $\mathbb{H}$ não o for). Temos que $\widetilde{M}$ é hipersuperfície orientável de $\mathbb{G}$. Dado o campo η unitário normal a M, seja $\widetilde{\eta}$ o campo unitário em $\widetilde{M}$ definido por

$$\widetilde{\eta}(x) = l_x^{-1}(\eta(\pi(x)).$$

Lema 2.3 *O campo $\widetilde{\eta}$ definido acima é unitário normal a $\widetilde{M}$.*

Demonstração. De fato, sejam $x \in \widetilde{M}$, $v \in T_x\widetilde{M}$ e $z = \pi(x) \in M$. Como

$$T_x\widetilde{M} = \big(T_x\,\pi^{-1}(z)\big) \oplus S$$

onde

$$S \subset T_x\left(\pi^{-1}(z)\right)^{\perp} \text{ e}$$
$$l_x(S) = T_z M,$$

segue que, se $v \in T_x\,\pi^{-1}(z)$,

$$\langle \widetilde{\eta}(x),\, v\rangle_x = 0$$

porque $\widetilde{\eta}(x) \in (T_x\,\pi^{-1}(z))^{\perp}$, e se $v \in S$, sendo l_x uma isometria,

$$\langle \widetilde{\eta}(x),\, v\rangle_x = \langle l_x(\widetilde{\eta}(x)),\ l_x(v)\rangle = \langle \eta(z), l_x(v)\,\rangle = 0,$$

como queríamos. .

Consideremos agora a aplicação normal de Gauss $\widetilde{N}$ de $\widetilde{M}$ em $\mathbb{G}$ em relação ao campo $\widetilde{\eta}$ normal à hipersuperfície $\widetilde{M}$ dado acima (ver [EFFR] ou [R1])

$$\widetilde{N} : \widetilde{M} \to \mathbb{S}^{n+k} \subset T_e\mathbb{G}$$
$$\widetilde{N}(x) = d\left(R_x^{-1}\right)_x(\widetilde{\eta}(x)).$$

Temos

$$N(z) = \Gamma_z(\eta(z)) = d(R_x)_x^{-1}(\widetilde{\eta}(x)) = \widetilde{N}(x)$$

para todo $z \in M$ e para todo $x \in \pi^{-1}(z)$.

2.1 Uma família de exemplos

Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{G}$ subgrupo de Lie compacto e $\mathcal{K}$ sua álgebra de Lie. Consideremos a ação de $\mathbb{K}$ em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ por isometrias, $k(x\mathbb{H}) = (kx)\,\mathbb{H}$. Vamos supor que as órbitas de $\mathbb{K}$ de dimensão máxima têm co-dimensão 1 em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$.

Seja $g \in \mathbb{G}$ tal que

$$M_g := \mathbb{K}(g\mathbb{H}) := \{(kg)\,\mathbb{H} \mid k \in \mathbb{K}\}$$

é uma órbita de co-dimensão 1 de $\mathbb{K}$. Então M_g é uma hipersuperfície mergulhada compacta orientável de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$.

Lema 2.4 *O subespaço vetorial $Ad_{kg}(\mathcal{H}) + \mathcal{K}$ tem co-dimensão 1 em $\mathcal{G}$, para todo $k \in \mathbb{K}$.*

Demonstração. Considere $\widetilde{M}_g := \pi^{-1}(M_g)$. Então $\widetilde{M}_g$ é uma hipersuperfície mergulhada de $\mathbb{G}$. Notemos que

$$\widetilde{M}_g = \{kgh \mid k \in \mathbb{K},\ h \in \mathbb{H}\}$$

e segue que, dado $x \in \widetilde{M}_g$,

$$T_x(\widetilde{M}_g) = d(L_x)_e(\mathcal{H}) + d(R_x)_e(\mathcal{K})$$

e então

$$d(R_x^{-1})_x(T_x(\widetilde{M}_g)) = Ad_x(\mathcal{H}) + \mathcal{K} \tag{2.2}$$

é subespaço vetorial de codimensão 1 de $\mathcal{G}$. Como um elemento genérico x de $\widetilde{M}_g$ é da forma $x = kgh$, temos

$$Ad_x(\mathcal{H}) = (Ad_k \circ Ad_g \circ Ad_h)(\mathcal{H}) = Ad_{kg}(\mathcal{H})$$

e daí

$$Ad_{kg}(\mathcal{H}) + \mathcal{K} = d(R_x^{-1})_x(T_x(\widetilde{M}_g))$$

é subespaço vetorial de co-dimensão 1 de $\mathcal{G}$, como queríamos.

Podemos demonstrar agora:

Proposição 2.5 *Seja $N_0 = N(g\mathbb{H})$, onde*

$$N : M_g \to \mathbb{S}^{n+k}$$

é a aplicação de Gauss de M_g. Então

$$N(kg\mathbb{H}) = Ad_k(N_0),$$

para todo $k \in \mathbb{K}$.

Demonstração. Seja η campo unitário normal a M_g definindo a aplicação de Gauss N de M_g. Dado $z \in M_g$, $z = kg\mathbb{H}$, escolhemos $x \in \widetilde{M}_g = \pi^{-1}(M)$, $x = kgh$ (então

$\pi(x) = z$). Notemos então que $l_x^{-1}(\eta(z))$ é ortogonal a $T_x(\widetilde{M_g})$ e daí, por definição de N,

$$N(kg\mathbb{H}) = N(z) = d(R_x^{-1})_x(l_x^{-1}(\eta(z)))$$

é ortogonal a

$$d(R_x^{-1})_x(T_x(\widetilde{M_g})) = Ad_{kg}(\mathcal{H}) + \mathcal{K}.$$

Em particular, $N_0 = N(g\mathbb{H})$ é ortogonal a $Ad_g(\mathcal{H}) + \mathcal{K}$. Portanto, $Ad_k(N_0)$ é ortogonal a

$$\begin{aligned} Ad_k(Ad_g(\mathcal{H}) + \mathcal{K}) &= Ad_{kg}(\mathcal{H}) + Ad_k(\mathcal{K}) \\ &= Ad_{kg}(\mathcal{H}) + \mathcal{K} \end{aligned}$$

e temos que $N(kg\mathbb{H})$ e $Ad_k(N_0)$ são ambos ortogonais a $Ad_{kg}(\mathcal{H}) + \mathcal{K}$. Como, pelo lema anterior,

$$\dim(Ad_{kg}(\mathcal{H}) + \mathcal{K}) = \dim \mathcal{G} - 1$$

temos

$$N(z) = N(kg\mathbb{H}) = \pm Ad_k(N_0).$$

Por continuidade, sendo, em $k = e$, $N(g\mathbb{H}) = N_0 = Ad_e(N_0)$, temos

$$N(kg\mathbb{H}) = Ad_k(N_0).$$

como queríamos. .

Observação 2.6 Vemos da demonstração da Proposição 2.5 que o vetor N_0 dado no enunciado pode ser determinado facilmente pela condição de ser ortogonal ao subespaço de co-dimensão 1 $Ad_g(\mathcal{H}) + \mathcal{K}$ de $\mathcal{G}$.

O próximo resultado caracteriza subgrupos do grupo de isometrias de uma hipersuperfície de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ em termos da aplicação de Gauss. Esta proposição é importante para a caracterização das hipersuperfícies de curvatura média constante dada no Capítulo 4.

Proposição 2.7 *Seja M uma hipersuperfície orientável de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ e seja $N : M \to \mathcal{G}$*

a aplicação de Gauss de M. Então,

$$\mathcal{K} := N(M)^{\perp} = \{w \in \mathcal{G} \mid \langle w, v\rangle = 0,\ \forall v \in N(M)\}$$

é uma subalgebra de Lie de $\mathcal{G}$ e M é invariante pelo subgrupo de Lie de $\mathbb{G}$ cuja álgebra de Lie é $\mathcal{K}$. Em particular, se

$$\dim \mathcal{K} = n = \dim(\mathbb{G}/\mathbb{H}) - 1,$$

M é uma subvariedade extrinsecamente homogenênea de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. Reciprocamente, se M é invariante por um subgrupo de Lie $\mathbb{K}$ de $\mathbb{G}$, então $\mathcal{K} \subset N(M)^{\perp}$, onde $\mathcal{K}$ é a álgebra de Lie de $\mathbb{K}$.

Primeiramente, vamos provar um lema:

Lema 2.8 *Se $w \in N(z)^{\perp}$ então $\zeta(w)(z) \in T_zM$.*

Demonstração. Se $w \in N(z)^{\perp}$ então

$$\begin{aligned}
0 = \langle w, N(z)\rangle &= \left\langle d(R_x)_e w, l_x^{-1}(\eta(z))\right\rangle \\
&= \left\langle d\pi_x(d(R_x)_e)w, d\pi_x(l_x^{-1}(\eta(z)))\right\rangle = \langle \zeta(w)(z), \eta(z)\rangle
\end{aligned}$$

e daí, $\zeta(w)(z) \in T_zM$. ■ .

Demonstração. (da Proposição 2.7) Sejam $v, w \in N(M)^{\perp}$. Segue pelo Lema 2.8 que $\zeta(v)$ e $\zeta(w)$ são campos de vetores em M e daí $[\zeta(v), \zeta(w)]$ é campo de vetores em M. Sendo ζ um homomorfismo de álgebras de Lie $\zeta([v, w]) = [\zeta(v), \zeta(w)]$. Então, dado $z \in M$,

$$\begin{aligned}
0 = \langle \zeta([v, w]), \eta(z)\rangle &= \langle \Gamma_z(\zeta([v, w])), \Gamma_z(\eta(z))\rangle \\
&= \left\langle d(R_x^{-1})_x(l_x^{-1}(d\pi_x(d(R_x)_e([v, w])))), N(z)\right\rangle \\
&= \left\langle d(R_x^{-1})_x(d(R_x)_e([v, w])^h), d(R_x^{-1})_x(l_x^{-1}(\eta(z)))\right\rangle \\
&= \left\langle (d(R_x)_e([v, w]))^h, l_x^{-1}(\eta(z))\right\rangle \\
&= \left\langle d(R_x)_e([v, w]), l_x^{-1}(\eta(z))\right\rangle = \left\langle [v, w], d(R_x^{-1})_x l_x^{-1}(\eta(z))\right\rangle \\
&= \langle [v, w], N(z)\rangle .
\end{aligned}$$

Como z é arbitrário, $[v, w] \in N(M)^{\perp}$, provando que $N(M)^{\perp}$ é subálgebra de Lie de $\mathcal{G}$. Agora, a prova de que M é invariante pelo subgrupo de Lie de $\mathbb{G}$ cuja álgebra de Lie é $\mathcal{K}$ decorre do fato de que $\zeta(w)$ é tangente a M para todo $w \in N(M)^{\perp} = \mathcal{K}$. Reciprocamente, se M é $\mathbb{K}-$ invariante então, dado $w \in \mathcal{K}$, segue que $\zeta(w)$ é campo de vetores em M e daí $\langle \zeta(v), \eta \rangle = 0$ em M. Como acima,

$$0 = \langle \zeta(v), \eta \rangle = \langle \Gamma_z(\zeta(w)), \Gamma_z(\eta) \rangle = \langle w, N(z) \rangle$$

provando que $\mathcal{K} \subset N(M)^{\perp}$, como queríamos.

Capítulo 3

A harmonicidade da aplicação de Gauss e a curvatura média

Nosso principal objetivo neste capítulo é estender o Teorema de Ruh-Vilms para hipersuperfícies de uma variedade homogênea munida com métrica homogênea. Lembramos que em $\mathbb{R}^n$ o Teorema de Ruh-Vilms é um corolário imediato da fórmula:

$$\Delta N = -\operatorname{grad} H - ||B||^2 N. \tag{3.1}$$

Esta fórmula foi estendida para hipersuperfícies de um grupo de Lie em [EFFR] e, mais geralmente, usando campos de Killing, para uma variedade Riemanniana Killing paralelizával (ver [FR]). Nosso objetivo agora é estender (3.1) para uma variedade homogênea usando a aplicação de Gauss definida aqui. Primeiramente, vamos lembrar e provar alguns fatos básicos.

3.1 A extensão do Teorema de Ruh-Vilms

Sejam $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ como definidos no Capítulo 2 e seja M uma hipersuperfície orientável imersa em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. Considere a aplicação de Gauss $N : M \to \mathbb{S}^{n+k} \subset \mathcal{G}$. Seja

$$\{e_1, e_2, ..., e_{n+k+1}\} \subset \mathcal{G}$$

base ortonormal de $\mathcal{G}$, e escreva, para $z \in M$,

$$N(z) := \sum_{i=1}^{n+k+1} n_i(z) e_i.$$

O Laplaciano de N é definido por

$$\Delta N := \sum_{i=1}^{n+k+1} \Delta n_i \, e_i,$$

onde Δn_i é o Laplaciano usual da função $n_i : M \to \mathbb{R}$ na métrica de M induzida pela imersão de M em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, e N é harmônica se e somente se

$$\Delta_{\mathbb{S}^{n+k}} N = (\Delta N)^{\top} = 0,$$

onde $(\ \ )^{\top}$ denota a projeção ortogonal de $\mathcal{G}$ em $T\,\mathbb{S}^{n+k}$ (ver [ES]).

Vamos precisar do seguinte lema:

Lema 3.1 *Seja M uma hipersuperfície em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ e seja $\widetilde{M} = \pi^{-1}(M)$. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e considere*

$$\widetilde{f} = f \ \circ \pi : \widetilde{M} \to \mathbb{R}.$$

Então

$$\Delta_{\widetilde{M}} \widetilde{f} = (\Delta_M f) \circ \pi.$$

Demonstração. Escolhemos $x_0 \in \widetilde{M}$ e seja $z_0 = \pi(x_0)$. Seja $\{E_i\}$, $i = 1, ..., n$, referencial geodésico em uma vizinhança V de z_0 em M. Consideremos $W = \pi^{-1}(V)$ e definimos $\widetilde{E_i}$ em W, por

$$\widetilde{E_i}(x) = l_x^{-1}(E_i(\pi(x)), \ i = 1, \ ..., \ n.$$

Seja e_i, $i = n+1, ..., n+k$, base ortonormal de $\mathcal{H}$ e seja $\widetilde{E_i}$ campo invariante à esquerda em $\mathbb{G}$ tal que $\widetilde{E_i}(e) = e_i$. Temos que

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \widetilde{E_i} = \frac{1}{2}[\widetilde{E_i}, \widetilde{E_i}] = 0, \ i = n+1, ..., n+k$$

e que $\{\widetilde{E_i}\}_{i=1}^{n+k}$ é base é base ortonormal de $T_x\widetilde{M}$ para $x \in W$.

Pela definição de Laplaciano

$$\Delta_{\widetilde{M}}\widetilde{f}(x_0) = \sum_{i=1}^{n+k} \left\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \operatorname{grad} \widetilde{f}, \widetilde{E_i} \right\rangle.$$

Como

$$\widetilde{E_i}(\widetilde{f})(x) = \widetilde{E_i}(f \circ \pi)(x) = d\,(f \circ \pi)_x\,(\widetilde{E_i}(x)) = df_{\pi(x)}(d\pi_x(\widetilde{E}_i(x))$$

e, sendo $d\pi_x(\widetilde{E}_i(x)) = 0$ para $i = n+1, ..., n+k$, temos $df_{\pi(x)}(d\pi_x(\widetilde{E}_i(x))) = 0$, $i = n+1, ..., n+k$. Além disso, $d\pi_x(\widetilde{E}_i(x))) = E_i(\pi(x))$ para $i = 1, ..., n$ e então $\widetilde{E_i}(\widetilde{f})(x) = E_i(f)(\pi(x))$, $i = 1, ..., n$. Portanto,

$$\operatorname{grad} \widetilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{n+k} \widetilde{E_i}(\widetilde{f})(x)\widetilde{E_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} E_i(f)(\pi(x))\widetilde{E_i}(x)$$

e então

$$\operatorname{grad} \widetilde{f}(x) = l_x^{-1}(\operatorname{grad} f(\pi(x))). \tag{3.2}$$

Além disso, para $i = n+1, ..., n+k$,

$$\left\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \operatorname{grad} \widetilde{f}, \widetilde{E_i} \right\rangle = \widetilde{E_i} \left\langle \operatorname{grad} \widetilde{f}, \widetilde{E_i} \right\rangle - \left\langle \operatorname{grad} \widetilde{f}, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \widetilde{E_i} \right\rangle = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\widetilde{M}}\widetilde{f}\,(x_0) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \operatorname{grad} \widetilde{f}, \widetilde{E_i} \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle l_x^{-1}(\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f), \widetilde{E_i} \right\rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left\langle [\widetilde{E_i}, \operatorname{grad} \widetilde{f}]^v, \widetilde{E_i} \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_i \rangle = \Delta_M f\,(\pi(x_0)),
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração.

Para o que segue precisamos introduzir um invariante algébrico/geométrico de

M em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. Dado $z \in M$, definimos

$$B_z^i(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(ad_{N(z)}(\Gamma_z(u)))^v, \ u \in T_zM$$

sendo $()^v$ a projeção ortogonal em $\mathcal{H}$.

Lema 3.2 *Seja M uma hipersuperfície em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ e seja $\widetilde{M} = \pi^{-1}(M)$. Denotemos por $||B||$ ($||\widetilde{B}||$) a norma da segunda forma fundamental B ($\widetilde{B}$) de M ($\widetilde{M}$) em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ ($\mathbb{G}$), H ($\widetilde{H}$) a curvatura média de M ($\widetilde{M}$) e $\operatorname{grad} H$ ($\operatorname{grad} \widetilde{H}$) o gradiente de H ($\widetilde{H}$) com relação ao campo normal η ($\widetilde{\eta} = l_x^{-1}\eta$), $\dim \mathbb{G} = n + k + 1, \dim \mathbb{H} = k$. Então*
(i) $\widetilde{H}(x) = \frac{n}{n+k} H\,(z)$ para todo $z \in M$ e $x \in \pi^{-1}(z)$,
(ii) $\operatorname{grad} \widetilde{H}(x) = \frac{n}{n+k} l_x^{-1}(\operatorname{grad} H\,(z))$ para todo $z \in M$ e $x \in \pi^{-1}(z)$,
(iii) $||\widetilde{B}|| = \sqrt{||B||^2 + ||B^i||^2}$.

Demonstração. Escolhemos $z \in M$ e $x \in \pi^{-1}(z)$. Seja $E_i(z)$, $i = 1, ..., n$, base ortonormal de T_zM e definimos $\widetilde{E_i}(x) = l_x^{-1}(E_i(z))$, $i = 1, ..., n$. Sejam $\widetilde{E_i}$, $i = n+1, ..., n+k$, campos de vetores invariantes à esquerda em $\mathbb{G}$ tais que $\widetilde{E_i}(x) \in T_x\widetilde{M}$ e $\{\widetilde{E_i}(x)\}$, $i = 1, ..., n+k$ é base ortonormal de $T_x\widetilde{M}$. Note que, sendo $\widetilde{M}$ $\mathbb{H}-$invariante, $\widetilde{E_i}$ é campo de vetores em $\widetilde{M}$ para $i = n+1, ..., n+k$. Já vimos também que $\widetilde{\eta}$ é campo unitário normal a $\widetilde{M}$. Segue que, para $i, j = n+1, ..., n+k$,

$$\left\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \widetilde{\eta}(x), \widetilde{E_j}(x) \right\rangle = -\left\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \widetilde{E_j}\,(x), \widetilde{\eta}(x) \right\rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \widetilde{\eta}(x), [\widetilde{E_i}, \widetilde{E_j}] \right\rangle = 0$$

pois $[\widetilde{E_i}, \widetilde{E_j}]$ é campo de vetores em $\widetilde{M}$.

Vamos demonstrar (i). Por definição de curvatura média, temos:

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}(x) &= \frac{1}{n+k} \sum_{i=1}^{n+k} \left\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \widetilde{E_i}\,(x), \widetilde{\eta}(x) \right\rangle = \frac{1}{n+k} \sum_{i=1}^{n} \left\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \widetilde{E_i}\,(x), \widetilde{\eta}(x) \right\rangle \\
&= \frac{1}{n+k} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\langle l_x^{-1}(\nabla_{E_i} E_i\,(z)) + \frac{1}{2} \left(\left[\widetilde{E_i}, \widetilde{E_i} \right] (x) \right)^v, \widetilde{\eta}(x) \right\rangle \right) \\
&= \frac{1}{n+k} \sum_{i=1}^{n} \left\langle l_x^{-1}(\nabla_{E_i} E_i\,(z)), l_x^{-1}(\eta(z)) \right\rangle \\
&= \frac{1}{n+k} \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{E_i} E_i\,(z), \eta(z) \right\rangle = \frac{n}{n+k} H(z).
\end{aligned}$$

A prova de (ii) segue de (i) e de (3.2). Falta mostrar (iii). De fato, como vimos acima,

$$\left\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \widetilde{\eta}(x), \widetilde{E_j}(x) \right\rangle = 0$$

se $i,\ j \in \{n+1, ..., n+k\}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \widetilde{\eta}(x), \widetilde{E_j}(x) \right\rangle^2 &= \sum_{i,\,j=1}^{n} \left\langle l_x^{-1}(\nabla_{E_i}\eta(z)) + \frac{1}{2}\left(\left[\widetilde{E_i}, \widetilde{\eta}\right](x)\right)^v, \widetilde{E_j}(x) \right\rangle^2 \\
&= \sum_{i,\,j=1}^{n} \left\langle l_x^{-1}(\nabla_{E_i}\eta(z)), l_x^{-1}\left(E_j(z)\right) \right\rangle^2 \\
&= \sum_{i,\,j=1}^{n} \left\langle \nabla_{E_i}\eta, E_j \right\rangle^2 = ||B||^2.
\end{aligned}$$

Suponhamos que $i \in \{1, ..., n\}$ e $j \in \{n+1, ..., n+k\}$. Temos, sendo $\widetilde{E}_j$ um campo de vetores em $\widetilde{M}$,

$$\left\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \widetilde{\eta}(x), \widetilde{E_j}(x) \right\rangle = -\left\langle \widetilde{\eta}(x), \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \widetilde{E_j}(x) \right\rangle$$

Seja $F_l = d(L_x^{-1})_x(\widetilde{E}_l)$, $l = 1, ..., n+k$. Então

$$\begin{aligned}
\left\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \widetilde{\eta}(x), \widetilde{E_j}(x) \right\rangle &= -\left\langle \widetilde{\eta}(x), \widetilde{\nabla}_{d(L_x)_e(F_i)} d(L_x)_e(F_j) \right\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\left\langle \widetilde{\eta}(x), [d(L_x)_e(F_i), d(L_x)_e(F_j)](x) \right\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\left\langle N(\pi(x)), d(R_x^{-1})_x([d(L_x)_e(F_j), d(L_x)_e(F_j)](x)) \right\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\left\langle N(\pi(x)), [Ad_x(F_i), Ad_x(F_j)](x)) \right\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\left\langle [N(\pi(x), Ad_x(F_i)], Ad_x(F_j) \right\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\left\langle ad_{N(\pi(x))}(Ad_x(F_i)), Ad_x(F_j) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Notamos que

$$\begin{aligned}
Ad_x(F_l) &= d(R_x^{-1})_x d(L_x)_e(d(L_x^{-1})_x(\widetilde{E}_l) \\
&= d(R_x^{-1})_x(\widetilde{E}_l)
\end{aligned}$$

e então, se $l = i$,

$$Ad_x(F_l) = Ad_x(F_i) = \Gamma_z(E_i).$$

Temos então

$$\left\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \widetilde{\eta}(x), \widetilde{E_j}(x) \right\rangle = -\frac{1}{2} \left\langle ad_{N(\pi(x))}(\Gamma_z(E_i)), Ad_x(F_j) \right\rangle.$$

Além disso,

$$\{Ad_x(F_j)\} = \{d(R_x^{-1})_x(\widetilde{Ej})\},\ j = n+1, ..., n+k$$

é base ortonormal de $\mathcal{H}$. Segue, em particular, que

$$\left\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \widetilde{\eta}(x), \widetilde{E_j}(x) \right\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left\langle B_z^i(E_i), d(R_x^{-1})_x(\widetilde{Ej}) \right\rangle$$

e portanto

$$\sum_{i,j} \left\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \widetilde{\eta}(x), \widetilde{E_j}(x) \right\rangle^2 = \frac{1}{2} ||B_z^i||^2,$$

sendo que no somatório i varia em $\{1, ..., n\}$ e j em $\{n+1, ..., n+k\}$. Logo,

$$\begin{aligned} ||\widetilde{B}(x)||^2 &= \sum_{i,j=1}^{n+k} \left\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \widetilde{\eta}(x), \widetilde{E_j}(x) \right\rangle^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \widetilde{\eta}(x), \widetilde{E_j}(x) \right\rangle^2 + \sum_{i,j=n+1}^{n+k} \left\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \widetilde{\eta}(x), \widetilde{E_j}(x) \right\rangle^2 \\ &\quad +2 \sum_{i,j} \left\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}} \widetilde{\eta}(x), \widetilde{E_j}(x) \right\rangle^2 \\ &= ||B||^2 + ||B^i||^2, \end{aligned}$$

onde no último somatório i varia em $\{1, ..., n\}$ e j em $\{n+1, ..., n+k\}$, o que conclui a demonstração. .

Lembremos que o tensor de Ricci de $\mathbb{G}$ é dado por

$$\begin{aligned} \text{Ric}(u, v) &= \text{trace}(X \mapsto \widetilde{R}(u, X)v) \\ &= \sum_{i=1}^{n+k+1} \left\langle \widetilde{R}(u, E_j)v, E_j \right\rangle, \end{aligned}$$

onde $\{E_j\}$ é uma base ortonormal dos vetores tangentes de $\mathbb{G}$. A curvatura de Ricci de $\mathbb{G}$ na direção de u é $\mathrm{Ric}(u) = \mathrm{Ric}(u, u)$.

Vamos obter agora a fórmula que relaciona o Laplaciano da aplicação N com a geometria da hipersuperfície M.

Teorema 3.3 *Seja M uma hipersuperfície orientável de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, e seja $N : M \to \mathbb{S}^{n+k}$ a aplicação de Gauss de M. Então,*

$$\Delta N(z) = -n\Gamma_z(\mathrm{grad}\, H(z)) - \left(\|B\|^2 + \left\|B^i\right\|^2 + (n+k)\,\mathrm{Ric}\left(l_x^{-1}(\eta(z))\right)\right) N(z) \tag{3.3}$$

para todo $z \in M$ e $x \in \pi^{-1}(z)$, onde η é um campo unitário normal a M e $\mathrm{Ric}\,(l_x^{-1}(\eta(z)))$ é a curvatura de Ricci de $\mathbb{G}$ na direção de $l_x^{-1}(\eta(z))$.

Demonstração. Seja como antes $\widetilde{\eta} = l_x^{-1}(\eta)$. Já demonstramos que $\widetilde{\eta}$ é um campo unitário normal a $\widetilde{M} = \pi^{-1}(M)$. Seja

$$\widetilde{N} : \widetilde{M} \to \mathbb{S}^{n+k}$$

a aplicação de Gauss de $\widetilde{M}$, isto é,

$$\widetilde{N}(x) = d(R_x^{-1})_x(\widetilde{\eta}(x)).$$

Observamos, primeiramente, que se $z = \pi(x)$,

$$\Delta_M N\,(z) = \Delta_{\widetilde{M}} \widetilde{N}\,(x). \tag{3.4}$$

De fato, temos que

$$N(z) = \widetilde{N}(x).$$

Então, se $e_i,\ i = 1.\dots, n+k+1$, é uma base ortonormal de $\mathcal{G}$, escrevendo

$$N\,(z) = \sum_{i=1}^{n+k+1} n_i(z) e_i$$

e

$$\widetilde{N}(x) = \sum_{i=1}^{n+k+1} \widetilde{n}_i(x) e_i$$

temos $\widetilde{n}_i(x) = n_i(z) = (n_i \circ \pi)(x)$, onde $x \in \pi^{-1}(z)$. Pelo Lema 3.1, temos

$$\begin{aligned}\Delta_{\widetilde{M}} \widetilde{n}_i\,(x) &= (\Delta_M n_i) \circ \pi\,(x)\\ &= \Delta_M n_i\,(z),\end{aligned}$$

provando (3.4). Segue pelo Teorema 1 de [EFFR] que

$$\Delta_{\widetilde{M}} \widetilde{N}(x) = -\,(n+k)\,d\left(R_x^{-1}\right)_x \left(\operatorname{grad} \widetilde{H}(x)\right) - \left(||\widetilde{B}||^2 + (n+k)\operatorname{Ric}(\widetilde{\eta}(x))\right) \widetilde{N}(x)$$

e então, aplicando o Lema 3.2, obtemos

$$\begin{aligned}\Delta N\,(z) &= -\,(n+k)\,d\left(R_x^{-1}\right)_x \left(\frac{n}{n+k} l_x^{-1} (\operatorname{grad} H\,(z))\right)\\ &\quad - \left(||\widetilde{B}||^2 + (n+k)\operatorname{Ric}(\widetilde{\eta}(x))\right) N(z)\\ &= -n\Gamma_z(\operatorname{grad} H(z)) - \left(\|B\|^2 + \left\|B^i\right\|^2 + (n+k)\operatorname{Ric}(l_x^{-1}\,(\eta(z)))\right) N(z)\end{aligned}$$

como queríamos. .

O Teorema 3.3 tem a seguinte aplicação à teoria das hipersuperfícies de curvatura média constante:

Corolário 3.4 *Seja M uma hipersuperfície orientável em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ e $N : M \to \mathcal{G}$ a aplicação de Gauss de M. Então as seguintes alternativas são equivalentes:*

(i) *M tem curvatura média constante*

(ii) $N : M^n \to \mathbb{S}^{n+k}$ é *harmônica*

(iii) *N satisfaz a equação*

$$\Delta N\,(z) = -\left(||B||^2 + ||B^i||^2 + (n+k)\operatorname{Ric}(l_x^{-1}\,(\eta(z)))\right) N(z). \tag{3.5}$$

Nos casos mais comuns $\mathbb{G}$ tem curvatura de Ricci constante, fato que ocorre se a forma de Cartan-Killing de $\mathbb{G}$ é negativa definida, como mostramos abaixo. A forma de Cartan-Killing é negativa definida, por exemplo, quando $\mathbb{G}$ é compacto e tem centro finito.

Lema 3.5 *Suponhamos que a forma de Cartan-Killing de $\mathbb{G}$ é negativa definida. Então, qualquer métrica bi-invariante $\langle\, ,\, \rangle$ satisfaz*

$$\operatorname{Ric}(u,\, v) = \frac{1}{4}\,\langle u,\, v\rangle$$

onde u e v são vetores tangentes em $\mathbb{G}$. Em particular, $\mathbb{G}$ tem curvatura de Ricci constante $Ric = 1/4$.

Demonstração. Consideremos a forma de Cartan-Killing B sobre a álgebra de Lie $\mathcal{G}$, isto é,

$$B(u,v) = tr\,(ad_u \circ ad_v)\,,\ \ u,v \in \mathcal{G}$$

a qual supomos negativa definida. Consideremos qualquer métrica bi-invariante $\langle\, ,\ \rangle$ em $\mathbb{G}$ e seja E_j, $j = 1, ..., n{+}k{+}1$ base ortonormal de $\mathcal{G}$ com em relação à tal métrica. Dados $x \in \mathbb{G}$ e $u, v \in \mathcal{G}$, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ric}(u,v) &= \sum_{j=1}^{n+k+1} \langle R(u,E_j)v, E_j\rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n+k+1} \langle [[u,E_j]\,, v]\,, E_j\rangle \qquad (3.6)\\
&= -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n+k+1} \langle [E_j,v]\,, [u,E_j]\rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n+k+1} \langle [E_j,v]\,, [E_j,u]\rangle\\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n+k+1} \left\langle ad_{E_j}(v), ad_{E_j}(u)\right\rangle = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n+k+1} \left\langle \left(ad_{E_j}\right)^2(v), u\right\rangle\\
&= -\frac{1}{4}\left\langle \sum_{j=1}^{n+k+1} \left(ad_{E_j}\right)^2(v), u\right\rangle,
\end{aligned}$$

onde na terceira e sexta igualdades usamos que ad_X é anti-simétrica com relação a $\langle\, ,\ \rangle$, isto é,

$$\langle ad_X(u), v\rangle = -\,\langle ad_X(v), u\rangle\,.$$

Considerando a transformação linear simétrica

$$T := \sum_{j=1}^{n+k+1} \left(ad_{E_j}\right)^2$$

obtemos, para todo $u,\, v \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}\langle T(u),\, v\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n+k+1} \left(ad_{E_j}\right)^2 (u), v \right\rangle = -\sum_{j=1}^{n+k+1} \left\langle ad_{E_j}(u), ad_{E_j}(v)\right\rangle \\ &= -\sum_{j=1}^{n+k+1} \langle ad_u(E_j), ad_v(E_j)\rangle = \sum_{j=1}^{n+k+1} \langle E_j, ad_u \circ ad_v(E_j)\rangle \\ &= tr(\, ad_u \circ ad_v) = B(u,v).\end{aligned}$$

Agora, sendo $-B$ positiva definda, considerando uma base u_i de $\mathcal{G}$, $i = 1, ..., n+k+1$, ortonormal com relação a $-B$, obtemos $\langle T(u_i),\, u_j\rangle = -\delta_{ij}$ e daí $T = -I$, onde I denota a idetidade em $\mathcal{G}$. Segue de (3.6) que

$$\mathrm{Ric}\,(u,\, v) = \frac{1}{4}\,\langle u, v\rangle\,,$$

como queríamos. .

Segue então do Teorema 3.3 e do lema precedente:

Corolário 3.6 *Nas mesmas hipóteses do Teorema 3.3, suponhamos também que a forma de Cartan-Killing de $\mathbb{G}$ seja negativa definida. Então*

$$\Delta N(z) = -n\Gamma_z(\mathrm{grad}\, H(z)) - \left(\|B\|^2 + \left\|B^i\right\|^2 + \frac{1}{4}\,(n+k)\right) N(z).$$

3.2 Formas quadráticas holomorfas e curvatura média

Consideremos agora $\dim\,(\mathbb{G}/\mathbb{H}) = 3$. Para uma aplicação interessante do Corolário 3.4 vamos associar uma forma quadrática à derivada da aplicação N.

Seja $z \in M$, temos

$$dN_z : T_zM \to T_{N(z)}\mathbb{S}^{n+k} = \{N(z)\}^\perp \subset \mathcal{G}.$$

Definição 3.7 Dado $z \in M$, temos definida a forma bilinear

$$\begin{aligned} N^* (\langle \, , \, \rangle) &: T_z M \times T_z M \to \mathbb{R} \\ N^* (\langle \, , \rangle) (u, \, v) &= \langle dN_z(u), \, dN_z(v) \rangle \, . \end{aligned}$$

e sua extensão bilinear a $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \sigma &: T_z M^{\mathbb{C}} \times T_z M^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C} \\ \sigma(u + iv, \, z + iw) &= \langle dN_z(u), \, dN_z(z) \rangle - \langle dN_z(v), \, dN_z(w) \rangle \\ &\quad + \left(\langle dN_z(u), \, dN_z(w) \rangle + \langle dN_z(v), \, dN_z(z) \rangle \right) i \end{aligned}$$

onde $T_z M^{\mathbb{C}} = \{u + iv : u, \, v \in T_z M\}$ é o complexificado de $T_z M$.

Demonstração. Consideremos a forma quadrática associada a $N^* (\langle \, , \rangle)$

$$\begin{aligned} (N^*)^{2,0} (\langle \, , \rangle) &: T_z M \to \mathbb{R} \\ & N^* (\langle \, , \rangle) (u \,) \\ & = \langle dN_z(u), \, dN_z(u) \rangle \end{aligned}$$

e sua extensão a $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} (N^*)^{2,0} &: T_z M^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C} \\ (N^*)^{2,0}(u + iv) &= \langle dN_z(u), \, dN_z(u) \rangle - \langle dN_z(v), \, dN_z(v) \rangle \\ &\quad + \left(\langle dN_z(u), \, dN_z(v) \rangle + \langle dN_z(v), \, dN_z(u) \rangle \right) i \\ &= |dN_z(u)|^2 - |dN_z(v)|^2 + 2i \, \langle dN_z(u), dN_z(v) \rangle \, . \end{aligned}$$

Provamos no Corolário 3.4 que N é harmônica se, e somente se M tem curvatura média constante. Temos então, para o caso $\dim(\mathbb{G}/\mathbb{H}) = 3$ (ver §10 de [EL]):

Teorema 3.8 *Seja M uma superfície de Riemann orientável imersa conformemente em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. Então M tem curvatura média constante se, e somente se, $(N^*)^{2,0}$ é forma quadrática holomorfa.*

Capítulo 4

A imagem pela aplicação de Gauss de hipersuperfícies de curvatura média constante

Vejamos novamente a definição de $(1/2^l)$-esfera mencionada na introdução. Um subespaço de co-dimensão um da álgebra de Lie $\mathcal{G}$ separa-a em duas componentes conexas; o fecho de qualquer dessas componentes é chamado um semi-espaço de $\mathcal{G}$ e sua intersecção com $\mathbb{S}^{n+k}$ é uma semi-esfera, denotada por $\mathbb{S}_+^{n+k}$. Dado $l \in \mathbb{N}$, uma $(1/2^l)-$ esfera $\mathbb{S}^{n+k,l}$ de $\mathbb{S}^{n+k}$ é a intersecção de l semi-esferas linearmente independentes $(\mathbb{S}_1^{n+k})_+, ..., (\mathbb{S}_l^{n+k})_+$, de $\mathbb{S}^{n+k}$ (semi-esferas linearmente independentes significa aqui que os vetores normais aos semi-espaços $\partial(\mathbb{S}_i^{n+k})_+$ são linearmente independentes).

O próximo resultado é uma extensão do Corolário 3 de [EFFR]. Continuamos usando as mesmas notações do capítulo anterior.

Teorema 4.1 *Seja M uma hipersuperfície compacta de curvatura média constante de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ e $N : M \to \mathbb{S}^{n+k}$ a aplicação de Gauss de M. Suponhamos que ou M não é totalmente geodésica ou* $||B^i|| > 0$ *ou* $\mathrm{Ric} > 0$. *Dado $l \in \mathbb{N}$, seja*

$$\mathbb{S}^{n+k,l} = \bigcap_{i=1}^{l} (\mathbb{S}_i^{n+k})_+$$

uma $(1/2^l)-$ esfera de $\mathbb{S}^{n+k}$. Então, as seguintes alternativas são equivalentes:

i)

$$N(M) \subset \mathbb{S}^{n+k,l}$$

ii)

$$N(M) \subset \bigcap_{i=1}^{l} \partial \left(\mathbb{S}_i^{n+k}\right)_+$$

iii)

$$\mathcal{K} := ger \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^{l} \partial \left(\mathbb{S}_i^{n+k}\right)_+ \right)^{\perp} \right\}$$

é subálgebra de Lie de $\mathcal{G}$ e M é invariante pelo subgrupo de Lie $\mathbb{K}$ de $\mathbb{G}$ cuja álgebra de Lie é $\mathcal{K}$.

Demonstração. Primeiramente vamos provar que (i) implica (ii). Dado i, temos $N(M) \subset H_i$, onde H_i é o semi-espaço de $\mathcal{G}$ tal que $\left(\mathbb{S}_i^{n+k}\right)_+ = H_i \cap \mathbb{S}^{n+k}$. Então, existe $v \in \mathbb{S}^{n+k}$ ortogonal a ∂H_i tal que

$$\langle N(z), v \rangle \leq 0$$

para todo $z \in M$. Usando (3.5), e considerando que Ric ≥ 0, obtemos

$$\Delta \langle N, v \rangle = \langle \Delta N, v \rangle = -\left(\|B\|^2 + ||B^i|| + (n+k)\,\mathrm{Ric}(l_x^{-1}(\eta(z)))\right) \langle N(z), v \rangle \geq 0$$

e então $\langle N, v \rangle$ é uma função subharmônica definida na variedade compacta M. Segue que $\langle N, v \rangle$ é constante e então $\Delta \langle N, v \rangle = 0$. Portanto, sendo ou $||B|| > 0$, ou $||B^i|| > 0$, ou $\mathrm{Ric}(l_x^{-1}(\eta(z))) > 0$, temos $\langle N, v \rangle = 0$ e daí $N(M) \subset \partial H_i$, o que prova a implicação (i) $\rightarrow$ (ii). A implicação (iii) $\rightarrow$ (ii) segue da Proposição 2.7 e a implicação (ii) $\rightarrow$ (i) é óbvia. ■ .

Observação 4.2 Se M é totalmente geodésica, $||B^i|| = 0$, e $\mathrm{Ric}(l_x^{-1}(\eta(z))) = 0$, o teorema é falso. Planos em $\mathbb{R}^3$ são contra-exemplos para o teorema.

Corolário 4.3 *Seja M uma hipersuperfície compacta de curvatura média constante de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ e $N : M \rightarrow \mathbb{S}^{n+k}$ a aplicação de Gauss de M. Suponhamos que ou M não é* *totalmente geodésica ou* $||B^i|| > 0$ *ou* $\mathrm{Ric} > 0$. *Seja* $\mathbb{S}_l^{n+k}$ *uma* $(1/2^l)$*-esfera de* $\mathbb{S}^{n+k}$. *Suponhamos ademais que* $l \geq n$ *e*

$$N(M) \subset \mathbb{S}_l^{n+k}.$$

Então M *é subvariedade extrinsecamente homogênea de* $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ *(* $\dim(\mathbb{G}/\mathbb{H}) = n+1$*).*

Para investigar se uma hipersuperfície compacta de curvatura média constante M é invariante por um dado subgrupo de Lie de isometrias podemos fazer uso do seguinte resultado:

Corolário 4.4 *Seja* M *hipersuperfície compacta de curvatura média constante de* $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ *e* $N : M \to \mathbb{S}^{n+k}$ *a aplicação de Gauss de* M. *Suponhamos que ou* M *não é totalmente geodésica ou* $||B^i|| > 0$, *ou* $\mathrm{Ric} > 0$. *Seja* $\mathbb{K}$ *um subgrupo de Lie de* $\mathbb{G}$ *de dimensão* l *e* $\mathcal{K}$ *a álgebra de Lie de* $\mathbb{K}$. *Seja* $\mathcal{M}$ *o complemento ortogonal de* $\mathcal{K}$ *em* $\mathcal{G}$. *Sejam* $\left(\mathbb{S}_1^{n+k}\right)_+, ..., \left(\mathbb{S}_l^{n+k}\right)_+$ l *semi-esferas de* $\mathbb{S}^{n+k}$ *tais que* $\mathcal{M} \cap \mathbb{S}^{n+k} \subset \left(\mathbb{S}_i^{n+k}\right)_+$, $i = 1, ..., l$, *isto é,*

$$\mathcal{M} \cap \mathbb{S}^{n+k} = \bigcap_{i=1}^{l} \partial \left(\mathbb{S}_i^{n+k}\right)_+ .$$

Então temos: M *é* $\mathbb{K}$*-invariante se e somente se*

$$N(M) \subset \bigcap_{i=1}^{l} \left(\mathbb{S}_i^{n+k}\right)_+ .$$

Corolário 4.5 *Suponhamos que* $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ *é uma variedade homogênea a dois pontos (com* $\mathbb{G} = ISO(\mathbb{G}/\mathbb{H})$*). Seja* M *hipersuperfície compacta de curvatura média constante de* $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ *e* $N : M \to \mathbb{S}^{n+k}$ *a aplicação de Gauss de* M. *Seja* $\mathcal{M}$ *o complemento ortogonal da álgebra de Lie* $\mathcal{H}$ *de* $\mathbb{H}$ *em* $\mathcal{G}$. *Sejam* $\left(\mathbb{S}_1^{n+k}\right)_+, ..., \left(\mathbb{S}_l^{n+k}\right)_+$ l *semi-esferas de* $\mathbb{S}^{n+k}$ *tais que* $\mathcal{M} \cap \mathbb{S}^{n+k} \subset \left(\mathbb{S}_i^{n+k}\right)_+$, $i = 1, ..., l$. *Então*

$$N(M) \subset \bigcap_{i=1}^{l} \left(\mathbb{S}_i^{n+k}\right)_+$$

se e somente se M *é uma esfera geodésica.*

Demonstração. É suficiente observar que em um espaço homogêneo a dois pontos o subgrupo de isotropia $\mathbb{H}$ de $\mathbb{G}$ age transitivamente nas esferas geodésicas do espaço e então aplicar o Corolário 4.4. ■ .

O próximo resultado é a extensão do Teorema de Hoffman-Osserman-Schoen para as variedades homogêneas munidas de métrica homogênea para o caso de superfícies completas.

Teorema 4.6 *Suponhamos que* $\dim(\mathbb{G}/\mathbb{H}) = 3$. *Seja M superfície completa de curvatura média constante de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ e $N : M \to \mathbb{S}^{2+k}$ a aplicação de Gauss de M. Suponhamos que ou* $\mathrm{Ric} > 0$ *ou* $||B^i|| > 0$ *ou M não é totalmente geodésica. Então $N(M)$ está contida em um hemisfério da esfera unitária em $\mathcal{G}$ se e somente se M é invariante por um subgrupo a um parâmetro de isometrias de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$.*

Demonstração. Se M é invariante por um subgrupo a um parâmetro de isometrias de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ determinado por $X \in \mathcal{G}$ então $N(M)$ está contido em um hemisfério cujo hiperplano do bordo é ortogonal a X. A outra implicação segue do Corolário 2 de [FR], pois dado $w \in N(M)^{\perp}$, $\zeta(w)$ é campo de Killing de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ tal que

$$f(z) := \langle \zeta(w)(z), \eta(z) \rangle$$

não muda de sinal em M; entretanto, por completude, vamos dar os detalhes da demonstração. Primeiro observamos que a demonstração é de fato, essencialmente, a mesma que a do Teorema 1 de [HOS]. Seja $(\widehat{M}, \pi)$ o recobrimento universal de M. Suponhamos que $\widehat{M}$ é o disco e vamos considerar $f \leq 0$. Então, notando que

$$f(z) = \langle w, N(z) \rangle$$

obtemos de (3.5)

$$\begin{aligned} \Delta f &= \langle w, \Delta N \rangle \\ &= -(\|B\|^2 + \left\|B^i\right\|^2 + (n+k)\,\mathrm{Ric}(l_x^{-1}(\eta(z))))f \geq 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

e então f é subharmônica. Portanto, se $f = 0$ em algum ponto de M então, pelo princípio do máximo, $f \equiv 0$ e daí M é invariante por $\zeta(w)$. Mas não é difícil ver que isto implica M homeomorfa ao cilindro, toro ou uma esfera e então não é recoberta pelo disco, uma contradição. Então $f < 0$. Observamos que, pela equação de Gauss,

$$||B||^2 = 4H^2 - 2(K - \widetilde{K}) \tag{4.2}$$

onde K é a curvatura de Gauss de M e $\widetilde{K}$ a curvatura seccional de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ no plano tangente de M. Da segunda igualdade em (4.1) e de (4.2) obtemos

$$\Delta f - 2Kf + (\left\|B^i\right\|^2 + (n+k)\,\mathrm{Ric}(l_x^{-1}\,(\eta(z))) + 2\widetilde{K} + 4H^2)f = 0. \tag{4.3}$$

Entretanto (4.3) contradiz o Corolário 3 de [FS] o qual estabelece que quando K é a curvatura de Gauss de uma métrica conforme completa no disco unitário não existe solução negativa da equação (4.3) se

$$\left\|B^i\right\|^2 + (n+k)\,\mathrm{Ric}(l_x^{-1}\,(\eta(z))) + 2\widetilde{K} + 4H^2 \geq 0$$

(observamos que $\widetilde{K} \geq 0$ e $\mathrm{Ric} \geq 0$). Segue então que $\widehat{M}$ é a esfera ou o plano, provando a afirmação estabelecida acima. Temos então que $f \circ \pi$ é subharmônica e limitada em $\mathbb{R}^2$; portanto $f \circ \pi$ e então f é constante. Assim $\Delta f = 0$ e daí

$$(\|B\|^2 + \left\|B^i\right\|^2 + (n+k)\,\mathrm{Ric}(l_x^{-1}\,(\eta(z))))f = 0.$$

A conclusão da demonstração é agora imediata. .

Uma aplicação do teorema precedente no caso especial

$$\mathbb{S}^3 = \frac{SO(4)}{S0(3)}$$

dá o seguinte resultado. Lembramos que a álgebra Lie $\mathfrak{so}(4)$ de $SO(4)$ é dada pelas matrizes 4×4 Z satisfazendo $Z^t = -Z$. Podemos considerar em $\mathfrak{so}(4)$ a forma de Cartan-Killing

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4} tr(XY^t)$$

$X, Y \in \mathfrak{so}(4)$, porém o resultado é independente da métrica bi-invariante considerada.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, seja $\{\phi_t^\alpha\}_{t\in\mathbb{R}}$ o subgrupo a um parâmetro de isometrias de $\mathbb{S}^3$

definido por

$$\phi_t^\alpha = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha t & \sin \alpha t \\ 0 & 0 & -\sin \alpha t & \cos \alpha t \end{bmatrix}.$$

Corolário 4.7 *Seja M superfície orientável completa imersa com curvatura média constante em $\mathbb{S}^3 = SO(4)/SO(3)$ com aplicação de Gauss $N : M \to \mathbb{S}^5$. Então $N(M) \subset \mathbb{S}^5_+$ se, e somente se, a menos de isometria de $\mathbb{S}^3$, M é ϕ_t^a- invariante para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Uma direção é óbvia. Para a outra, observamos que o Teorema 4.6 implica M invariante por um subgrupo ϕ_t de isometrias de $\mathbb{S}^3$ o qual pode ser escrito como

$$\phi_t = \exp(tX)$$

para algum vetor não-nulo $X \in so(4)$. Pelo Teorema do toro maximal, existem $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$ e $g \in SO(4)$ tais que

$$Ad_g X = \begin{bmatrix} 0 & \delta & 0 & 0 \\ -\delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 0 \end{bmatrix}.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\delta \neq 0$ e então que a subálgebra de Lie gerada por $Ad_g X$ é a mesma que a gerada por

$$X_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

cujo subgrupo de Lie associado é ϕ_t^α. Segue que M é congruente a $g(M)$ e $g(M)$ é ϕ_t^α-invariante, como queríamos. .

Lembremos que a superfície $\mathbb{T}$ de $\mathbb{S}^3$ dada por

$$\mathbb{T} = \left\{ (x,\, y,\, z,\, w) : x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \text{ e } z^2 + w^2 = \frac{1}{2} \right\}$$

é chamada toro de Clifford. Pode-se mostrar que o toro de Clifford é superfície mínima de $\mathbb{S}^3$. Uma questão aberta no estudo das superfícies mínimas na esfera $\mathbb{S}^3$ é a existência ou não de toros mínimos mergulhados em $\mathbb{S}^3$ além do toro de Clifford. B. Lawson conjecturou que a resposta é não. Podemos aplicar o corolário acima para obter a seguinte caracterização do toro de Clifford bem como das superfícies de revolução.

Observamos que ϕ_t^0 é um subgrupo a um parâmetro rotacional de isometrias de $\mathbb{S}^3$ e que ϕ_t^1 é a ação de Hopf. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, denotamos por $\mathbb{S}^5_\alpha$ a semi-esfera de $\mathbb{S}^5$ em $so(4)$ cujo bordo é ortogonal a X_α.

Corolário 4.8 *Seja M superfície orientável completa imersa com curvatura média constante em $\mathbb{S}^3 = SO(4)/SO(3)$ e seja $N : M \to \mathbb{S}^5$ a aplicação de Gauss de M. Então:*

a) se, a menos de isometria de $\mathbb{S}^3$, $N(M) \subset \mathbb{S}^5_1$, então M é um toro de Clifford

b) se, a menos de isometria de $\mathbb{S}^3$, $N(M) \subset \mathbb{S}^5_0$, então M é superfície de revolução.

Para a prova do item a) do corolário precedente usamos o fato que uma superfície completa de curvatura média constante em $\mathbb{S}^3$ invariante pela ação de Hopf é um toro de Clifford. Isso não é difícil de provar usando um argumento da chamada geometria equivariante (ver a demonstração do Teorema 4 de [EFFR]).

Observação 4.9 Uma breve descrição das superfícies de revolução com cmc em $\mathbb{S}^3$ é dada em [FR].

Finalmente, temos o seguinte critério de estabilidade para domínios (ver referências [BdoC1], [BdoC2] e [FS] para o conceito e principais fatos sobre estabilidade em hipersuperfícies).

Teorema 4.10 *Suponhamos* $\dim(\mathbb{G}/\mathbb{H}) = 3$ *e seja M superfície de curvatura média constante em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. Seja $D \subset M$ um domínio tal que $\overline{D} \subset int(M)$, onde denota* *o interior de M. Se $N(\overline{D})$, a imagem esférica de $\overline{D}$, está contida num hemisfério aberto da esfera unitária em $\mathcal{G}$, então $\overline{D}$ é estável.*

Demonstração. Pelo Corolário 3.4 temos

$$\Delta N_j(z) = -\left(||B||^2 + ||B^i||^2 + (n+k)\,\mathrm{Ric}(l_x^{-1}\,(\eta(z)))\right) N_j(z),\ j = 1,\, 2,\, 3$$

onde $N = N_1 e_1 + N_2 e_2 + N_3 e_3$, sendo $\{e_1,\, e_2,\, e_3\}$ base ortomormal de $\mathcal{G}$. Como $N(\overline{D})$ está contida num hemisfério podemos supor que $N_1\,|_{\overline{D}} > 0$. Então, pelo Corolário 1 de [FS], $\lambda_1(\overline{D}) \geq 0$ onde $\lambda_1(\overline{D})$ é o primeiro autovalor do operador Laplaciano sobre $\overline{D}$. Vamos mostrar que $\lambda_1(\overline{D}) > 0$. Como $\overline{D} \subset int(M\,)$ existe um domínio $D' \subset M$ tal que $\overline{D} \subset D'$, $D' \backslash \overline{D} \neq \phi$ e $N_1\,|_{D'} > 0$. Novamente pelo Corolário 1 de [FS], $\lambda_1(D') \geq 0$. Mas, pelo Lema de [FS], $\lambda_1(D') < \lambda_1(\overline{D})$ e então $\lambda_1(\overline{D}) > 0$, provando o teorema.

Referências Bibliográficas

[AKMU] R. Aiyama; K. Akutagawa; R. Miyaoka; M. Umehara: "A global correspondence between CMC-surfaces in Sˆ3 and pairs of non-conformal harmonic maps into Sˆ2*",* Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), 939-941.

[BdoC1] J. L. Barbosa, M. P. do Carmo: "*Stability of hypersurfaces with constant mean curvature",* Math. Z., 185, 1984, 339 - 353.

[BdoC2] J. L. Barbosa, M. P. do Carmo: "*On the size of a stable minimal surface in* $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$", American Journal of Math, Vol 98, N. 2, 1974, 515-528.

[BdoC3] J. L. Barbosa, M. P. do Carmo: "*Stability of minimal surfaces and eigenvalues of the Laplacian",* Math. Z., 173, 1980, 13 - 28.

[BR1] F. Bittencourt, J. Ripoll: "*Gauss map harmonicity and mean curvature of a hypersurface in a homogeneous manifold", a ser publicado* no Pacific Journal of Mathematics, (2006).

[EFFR] N. do Espírito-Santo, S. Fornari, K. Frensel, J. Ripoll: "*Constant mean curvature hypersurfaces in a Lie Group with a bi-invariant metric",* Manuscripta Mathematica, 111, 459-470, (2003).

[EL] J. Eells Jr., L. Lemaire: "A report on harmonic maps", Bull. London Math. Soc., 10 (1978), 1 - 68

[ES] J. Eells Jr., J . H. Sampson: "*Harmonic mappings of Riemannian manifolds",* Amer. J. of Math., 86, 1964, 109 - 160.

[F] Frank W. Warner: "Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*", Scott, Foresman and Compay, Glenview, Ilinois, 1971.*

[FR] S. Fornari, J. Ripoll: "*Killing fields, mean curvature and translations map*", Illinois Journal of Mathematics, Volume 48, 2004, 1385-1403.

[FS] D. Fisher-Colbrie, R. Schoen: "*The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature*", Comm. of Pure and Applied Math, 1980, 199 - 211.

[HOS] D. Hoffman, R. Osserman, R. Schoen: "*On the Gauss map of complete constant mean curvature surfaces in* $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ *and* $\mathbb{R}^{\mathbf{4}}$", Comm. Math. Helv. 57, 1982, 519 - 531.

[O] B. O'Neil, "*The fundamental equations of a submersion*", *Michigan Math. J. 13*, 1966, 459 - 469.

[PD] P. Piccione, D. V. Tausk "On the geometry of grassmannians and the simpletic group: The Maslov index and its applications", *XI Escola de Geometria Diferencial, Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática, Niteroi, RJ, Brasil.*

[R1] J. Ripoll: "*On hypersurfaces of Lie groups*", Illinois Journal of Mathematics, Vol 35, N. 1, 1991.

[R2] J. Ripoll: "*Hypersurfaces With Positive Principal Curvatures In Symmetric Spaces*", Proceedings of the AMS, Vol 126, N. 8, 2505 - 2506, 1998

[R3] J. Ripoll: "*Superfícies invariantes de curvatura média constante*", *Tese de* Doutorado, IMPA, Brasil, 1986

[RS] J. Ripoll, M. Sebastiani: "*The generalized Gauss map and applications*", Rocky Mountain J. Math. 23 (1993), no. 2, 767–780.

[RV] E. Ruh, J.Vilms: "*The tension field of the Gauss map*", Trans. of the Am. Math. Soc., Vol 149, 1970, 569-573.