Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curvatura Seccional Não-negativa em Grupos de Lie com Métrica Invariante

Dissertação de Mestrado

Gustavo Vinícius Viegas

Porto Alegre, 25 de junho de 2012

Dissertação submetida por Gustavo Vinícius Viegas como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll

Banca examinadora:
Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll (PPG-MAT - UFRGS, ORIENTADOR)
Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino (PPG-MAT - UFRGS)
Prof. Dr^{a} Cíntia Rodrigues de Araujo Peixoto (PUCRS)
Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietske (PPG-MAT - UFRGS)

Dedicatória

Para meu pai, minha mãe,
meu irmão e minha noiva.

Conteúdo

Resumo

Baseado no artigo *Curvatures of left invariant metrics on Lie Groups*, de John Milnor ([0]), demonstramos uma expressão para a curvatura seccional em Grupos de Lie com métrica invariante à esquerda e um teorema de caracterização dos Grupos de Lie com curvatura zero.

Abstract

Based on the paper *Curvatures of left invariant metrics on Lie Groups*, de John Milnor ([0]), we show a formula for seccional curvature on Lie Groups with left invariant metric and we describe flat Lie Groups.

Introdução

Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável G com uma estrutura de grupo tal que a função $(x, y) \in G \times G \to xy^{-1} \in G$ é diferenciável. Um exemplo interessante é o Grupo Linear Geral, $Gl(n, \mathbb{R})$. Os elementos desse grupo são matrizes $n \times n$ invertíveis com entradas reais.

A grande força da teoria de grupos de Lie está baseada na existência de álgebras de Lie associadas aos grupos. Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de uma função bilinear $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, satisfazendo

i. $[X, Y] = -[Y, X]$

ii. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

No caso de $GL(n, \mathbb{R})$, a álgebra de Lie é o espaço vetorial das matrizes $n \times n$, munido do colchete
$$[A, B] = BA - AB.$$

O vínculo entre o colchete na álgebra do grupo e o produto no grupo é estabelecido pela função exponencial.

Interessantes para nossos propósitos são os campos de vetores X invariantes à esquerda, ou seja, campos tais que para todo $g, h \in G$,

$$X(gh) = d(L_g)_h X(h)$$

pois o conjunto $\mathfrak{g}$ de todos os campos de vetores desse tipo num grupo de Lie munido com o colchete é uma álgebra de Lie.

Já uma métrica $\langle , \rangle$ é invariante à esquerda se

$$\langle d(L_g)_h X, d(L_g)_h Y \rangle_{gh} = \langle X, Y \rangle_h$$

para todo $g, h \in G$, $X, Y \in T_h G$.

Neste trabalho, estudamos a curvatura seccional em grupos de Lie com métrica invariante. Para tanto, fixada uma base ortonormal $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ de $\mathfrak{g}$, consideramos as constantes de estrutura α_{ijk}

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ijk} E_k$$

equivalentemente,
$$\alpha_{ijk} = \langle [E_i, E_j], E_k \rangle.$$

Na Proposição 15, provamos que num grupo de Lie G com métrica invariante à esquerda a curvatura seccional $\kappa(E_1, E_2)$ é

$$\begin{aligned}\kappa(E_1, E_2) &= \frac{1}{2}\sum_k \alpha_{12k}(\alpha_{k12} - \alpha_{12k} + \alpha_{2k1}) \\ &- \frac{1}{4}\sum_k (\alpha_{21k} - \alpha_{1k2} + \alpha_{k21})(\alpha_{1k2} - \alpha_{k21} + \alpha_{21k}) + \sum_k \alpha_{k11}\alpha_{2k2}.\end{aligned}$$

Essa fórmula se simplifica bastante quando $ad(X)Y = [X, Y]$ é anti-simétrica, ou seja,

$$\langle ad(X)Y, Z\rangle = -\langle Y, ad(X)Z\rangle.$$

Nessa situação, $\alpha_{ijk} = -\alpha_{ikj}$, e

$$\kappa(E_1, E_2) \geq 0,$$

Em busca de uma caracterização dos grupos de Lie com métrica invariante à esquerda e curvatura zero, na Proposição 16 provamos que uma métrica invariante à esquerda é invariante à direita se, e somente se, para todo $g \in G$,

$$\langle Ad(g)X, Ad(g)Y\rangle = \langle X, Y\rangle.$$

Na Proposição 17, provamos que um grupo de Lie compacto admite métrica bi-invariante. Para o Lema 8, que trata sobre a decomposição da álgebra de Lie de grupos com métrica bi-invariante, definimos a forma de Killing B sobre $\mathfrak{g}$, $B(X, Y) = tr(ad(X) \circ ad(Y))$. Provamos que se B é não-degenerada, então G é compacto se, e somente se, B é negativa definida.

Finalmente, no Teorema 16, estabelecemos que um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda tem curvatura zero se, e somente se, sua álgebra se decompõe em $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{b}$, com $\mathfrak{b}$ uma subálgebra comutativa de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{u}$ um ideal comutativo.

Capítulo 1

Noções básicas de geometria riemanniana

Neste capítulo, enunciamos todas as definições e teoremas de geometria riemanniana utilizados ao longo do texto. Os conceitos iniciais como variedades diferenciáveis, funções diferenciáveis entre variedades e espaço tangente são utilizados sem mais explicações. Os resultados não são demonstrados por já estarem presentes em do Carmo ([1]). Também aceitamos como já sabidos os conhecimentos de um curso de análise no $\mathbb{R}^n$.

Cabe ressaltar que não nos preocupamos quanto à suavidade de uma função e seguimos a tradição de chamar de diferenciável a uma função que seja infinitamente diferenciável.

1.1 Diferencial de uma função

Definição 1. *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $f : M \to N$ diferenciável. Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_pM$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Considere $\beta = f \circ \alpha$. A diferencial de f em p é a função $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ dada por $df_p(v) = \beta'(0)$.*

Observação 1. *Podemos mostrar que df_p é linear e que não depende da escolha da curva α.*

Definição 2. *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $f : M \to N$ diferenciável. Dizemos que f é uma imersão se df_p é injetiva para todo $p \in M$. Uma imersão f é um mergulho se $f : M \to f(M) \subset N$ é um homeomorfismo em que f(M) tem a topologia induzida por N.*

Definição 3. *Sejam M e N variedades diferenciáveis tais que $M \subset N$.*
Se $i : M \hookrightarrow N$ é uma imersão, dizemos que M é uma subvariedade imersa de N.
Se $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, dizemos que M é uma subvariedade de N.

Proposição 1. *Sejam M e N variedades diferenciáveis, P uma subvariedade de N e $f : M \to N$ diferenciável com $f(M) \subset P$. Defina $f_o : M \to P$ por $i \circ f_o = f$, em que $i : P \hookrightarrow N$ é mergulho. Então f_o é diferenciável.*

A prova dessa proposição pode ser encontrada em Alexandrino, Bettiol, ([2]).

Definição 4. *Sejam M e N variedades riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$ é uma isometria se*

$$\langle U, V \rangle_p = \langle df_p(U), df_p(V) \rangle_{f(p)}$$

para todo $p \in M, U, V \in T_pM$.

1.2 Campo de vetores, colchete e conexão

Definição 5. *Seja G uma variedade diferenciável. Um campo de vetores X em G é uma correspondência que a cada $p \in G$ associa um vetor $X_p \in T_pG$.*

O conjunto de todos os campos de vetores diferenciáveis em G é denotado por $\mathfrak{X}(G)$.

Proposição 2. *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$, existe um único $Z \in \mathfrak{X}(G)$ tal que*

$$Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \tag{1.1}$$

para toda f diferenciável.

Definição 6. *O único campo Z tal que vale (1.1), para toda f diferenciável, é o colchete de X e Y e é denotado por $[X, Y]$.*

Proposição 3. *Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G)$, a, b números reais e $f, g : G \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Então*

i. $[X, Y] = -[Y, X]$ *(anti-comutatividade)*

ii. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ *(linearidade)*

iii. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ *(identidade de Jacobi)*

iv. $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$

Definição 7. *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* G *é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(G)$$

denotada por $\nabla(X,Y) = \nabla_X Y$ *que satisfaz as seguintes propriedades*

i. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

ii. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

iii. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

com $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G)$ *e f, g funções diferenciáveis.*

Teorema 1 (Teorema de Levi-Civita)**.** *Dada uma variedade riemanniana G, existe uma única conexão afim* ∇ *em G, chamada conexão de Levi-Civita, que satisfaz*

i. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ *(simetria)*

ii. $X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$ *(compatibilidade com a métrica)*

Tal conexão é dada por

$$2\langle Z, \nabla_Y X\rangle = X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle \tag{1.2}$$

1.3 Curvatura

Definição 8. *Sejam G uma variedade riemanniana e* ∇ *a conexão de Levi-Civita. O tensor de curvatura R de G é*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) & \to & \mathfrak{X}(G) \\ R(X,Y)Z & = & \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \end{array}$$

Quando $R \equiv 0$ dizemos que a variedade é plana.

Observação 2. *Tensor significa que dado* $p \in G$ *o valor* $R(X,Y)Z$ *em* p *depende apenas dos valores de* X, Y *e* Z *em* p*. Precisamente, se* $U, V, W \in \mathfrak{X}(G)$ *são tais que* $U(p) = X(p), V(p) = Y(p)$*, e* $W(p) = Z(p)$ *então*

$$(R(U,V)(W))(p) = (R(X,Y)(Z))(p)$$

Em particular, dados $x \in G$ *e* $u, v, w \in T_xG$*, faz sentido falar em* $R(u,v)w \in T_xG$*.*

Definição 9. *Sejam G uma variedade riemanniana, $p \in G$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pG$. A curvatura seccional de σ em p é o número real*

$$\kappa(\sigma) = \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$$

em que $X, Y \in \sigma$ são linearmente independentes.

Proposição 4. *A curvatura seccional $\kappa(\sigma)$ não depende da escolha de $X, Y \in \sigma$.*

Definição 10. *Seja G uma variedade riemanniana. O tensor de Ricci é a aplicação bilinear*

$$\begin{array}{rcl} TG & \times & TG \to \mathbb{R} \\ (X,Y) & \mapsto & Ric(X,Y) = trR(X,Y)Z \end{array}$$

Dada uma base ortonormal $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ de T_pG,

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(E_i, X)Y, E_i\rangle.$$

A curvatura de Ricci na direção de um vetor unitário U em T_pG é

$$\begin{array}{rcl} Ric_p(U) & = & Ric(U,U) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle R(E_i, U)U, E_i\rangle \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(E_i, U)\rangle. \end{array}$$

1.4 Teoremas importantes

Definição 11. *Uma variedade riemanniana G é geodesicamente completa se para todo $p \in M$, a exponencial exp_p está definida para todo $v \in T_pG$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Teorema 2 (Teorema de Bonnet-Myers)**.** *Seja G uma variedade riemanniana completa. Suponhanhos que a curvatura de Ricci de G satisfaz*

$$Ric_p(v) \geq \frac{1}{r^2} > 0$$

para todo $p \in G$ e todo $v \in T_pG$, $|v| = 1$. Então G é compacto e o diâmetro $diam(G) \leq \pi r$.

Teorema 3 (Teorema de Hopf-Rinow)**.** *Sejam M uma variedade riemanniana e $p \in G$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i. exp_p *está definida em todo o* $T_p(G)$

ii. *Os limitados e fechados de G são compactos*

iii. *G é completa como espaço métrico*

iv. *G é geodesicamente completa*

Teorema 4 (Teorema de Hadamard-Cartan)**.** *Seja G uma variedade riemanniana completa com curvatura seccional constante $K = 0$. Então G é isométrica a $\mathbb{R}^n/\Gamma$, em que Γ é um subgrupo das isometrias de $\mathbb{R}^n$ que opera de modo propriamente descontínuo em $\mathbb{R}^n$.*

Capítulo 2

Noções básicas de Grupos de Lie

Neste capítulo, definimos grupo de Lie G e desenvolvemos a teoria necessária para o restante do texto. De maneira a deixar o material auto-contido, a maior parte dos resultados é demonstrada.

Iniciamos com a definição de álgebra de Lie e mostramos que a álgebra de Lie de um grupo G é a álgebra $\mathfrak{g}$ dos campos invariantes à esquerda ou, equivalentemente, é T_eG com um colchete definido de maneira apropriada.

Nas seções posteriores, trabalhamos com homomorfismos de grupos de Lie e de álgebras de Lie e relacionamos os dois conceitos. Para conseguir uma inter-relação ainda mais forte, introduzimos a função exponencial e as fórmulas CBH. Com a função exponencial, conseguimos definir a representação adjunta e sua diferencial ad(X).

A maior parte das demonstrações omitidas é encontrada em (Alexandrino, Bettiol, [2]).

Definição 12. *Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável G com uma estrutura de grupo tal que*

$$(x, y) \in G \times G \to xy^{-1} \in G$$

é diferenciável.

Exemplo 1. $(\mathbb{R}^n, +)$ *é um grupo de Lie.*

Exemplos interessantes são os grupos de Lie clássicos, que formam famílias de matrizes. Para tanto, considere $M(n, \mathbb{R})$ o conjunto das matrizes de ordem n com entradas em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2. $GL(n, \mathbb{R}) = \{M \in M(n, \mathbb{R}); det(M) \neq 0\}$ *com a operação de multiplicação de matrizes é um grupo de Lie, chamado de grupo linear geral.*

$GL(n, \mathbb{R})$ é uma variedade de dimensão n^2, pois como det(M) é uma função contínua, o complementar do conjunto das matrizes com determinante não-nulo,

$U = \{M; det(M) = 0\}$ é fechado, por ser imagem inversa do fechado $\{0\}$. Logo $GL(n, \mathbb{R})$ é um aberto em $M(n, \mathbb{R})$.

Ainda, se A e B são matrizes não singulares então AB é uma matriz não singular, pois $det(A) \cdot det(B) = det(AB)$.

Finalmente, se A é não singular, A^{-1} também é, pois $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(b_{ij})$ em que b_{ij} é a matriz dos cofatores de A.

Exemplo 3. *Os seguintes grupos de matrizes são grupos de Lie.*

i. $SL(n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}); det(M) = 1\}$(grupo linear especial)

ii. $O(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}); M^t M = I\}$(grupo ortogonal)
$SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$

iii. $U(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}); \overline{M^t} M = I\}$(grupo unitário)
$SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$(grupo unitário especial)

Embora seja possível provar diretamente da definição que tais grupos são de fatos grupos de Lie, é mais fácil utilizar o Teorema 13 (seção 2.4).

Proposição 5. *Um grupo de Lie de matrizes G é compacto se*

i dada uma sequência A_m de matrizes em G que converge para uma matriz A, então $A \subset G$;

ii existe $C \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $A \in G, |A_{ij}| \leq C, i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

A demonstração pode ser encontrada em (Price, [5]).

Exemplo 4. *$O(n)$ é um grupo compacto.*

Com efeito, vale (i), pois limite de matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal e vale (ii), pois se A é uma matriz ortogonal, seus vetores coluna têm norma 1. Logo, para cada elemento de A, $| A_{ij} | \leq 1$.

2.1 Álgebra de Lie e campos invariantes à esquerda

Definição 13. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial munido com uma aplicação bilinear $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, chamada de colchete de Lie, satisfazendo*

i. $[X, Y] = -[Y, X]$(anti-simetria)

ii. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$(identidade de Jacobi)

Definição 14. *Uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é comutativa se* $[X, Y]$ *é identicamente nulo.*

Exemplo 5. *A álgebra de Lie de* $GL(n, \mathbb{R})$*, denotada por* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$*, tem o colchete dado por* $[A, B] = AB - BA$*.*

Exemplo 6. *A álgebra de Lie de O(n) é* $\mathfrak{o}(n) = \{X \in M(n, \mathbb{R}); X^t + X = 0\}$*.*

A demonstração pode ser encontrada em (Rodrigues, [3]).

Definição 15. *Sejam* G *um grupo de Lie e* $g \in G$*. A função* $L_g : G \to G$ *dada por* $L_g(h) = gh$ *é chamada translação à esquerda.*

Note, diretamente da definição de grupo, que L_g é um difeomorfismo.
A inversa é de L_g é $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$.
Analogamente se define a translação à direita $R_g : G \to G$ por $R_g(h) = hg$.

Definição 16. *Dizemos que um campo de vetores* X *sobre um grupo de Lie* G *é invariante à esquerda se, para todo* $g, h \in G$*,*

$$X(gh) = d(L_g)_h X(h) \tag{2.1}$$

em que dL_g *é o campo tal que para todo* $h \in G$*,*

$$\begin{array}{rcl} T_g G & \to & T_{gh} G \\ V & \mapsto & (dL_g)_h V. \end{array}$$

Analogamente, um campo de vetores é invariante à direita se $X = dR_g X$. Um campo é bi-invariante se for invariante à esquerda e à direita.

Observação 3. *Os campos invariantes à esquerda são completamente determinados por seus valores no elemento neutro* $e \in G$*, pois para todo* $g \in G$*,*

$$X(g) = d(L_g)_e X(e)$$

Definição 17. *Sejam M, N variedades e* $f : M \to N$ *diferenciável. Dizemos que os campos* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $Y \in \mathfrak{X}(N)$ *são f-relacionados se* $df(X) = Y \circ f$*.*

Lema 1. *Os campos* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $Y \in \mathfrak{X}(N)$ *são f-relacionados se, e somente se,* $(Yg) \circ f = X(g \circ f)$ *para todo g diferenciável.*

Lema 2. *Sejam M, N variedades e* $f : M \to N$ *diferenciável. Se* $X^1, X^2 \in \mathfrak{X}(M)$ *são, respectivamente, f-relacionados com* $Y^1, Y^2 \in \mathfrak{X}(N)$ *então* $[X^1, X^2]$ *é f-relacionado com* $[Y^1, Y^2]$*.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
([Y^1, Y^2]g) \circ f &= (Y^1(Y^2 g)) \circ f - (Y^2(Y^1 g)) \circ f \\
&= (X^1(Y^2 g)) \circ f - (X^2(Y^1 g)) \circ f \\
&= X^1(X^2(g \circ f) - (^2(X^1(g \circ f) \\
&= [X^1, X^2](g \circ f).
\end{aligned}$$

□

Lema 3. *Sejam G um grupo de Lie e X e Y campos invariantes à esquerda em G. Então o colchete de Lie $[X, Y]$ é invariante à esquerda.*

Demonstração. Seja g ∈ G. Note que X é L_g-relacionado consigo mesmo

$$\begin{aligned}
dL_g \circ X(h) &= dL_g X(h) \\
&= X(gh) \\
&= X \circ L_g(h).
\end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 2, [X, Y] é L_g relacionado com [X, Y],

$$dL_g[X, Y](h) = [X, Y] \circ L_g(h).$$

Logo,

$$dL_g[X, Y](h) = [X, Y](gh).$$

Portanto, [X, Y] é invariante à esquerda. □

Teorema 5. *Seja $\mathfrak{g}$ o conjunto de todos os campos de vetores invariantes à esquerda em um grupo de Lie G. Então $\mathfrak{g}$ munido com o colchete de Lie é uma álgebra de Lie.*

Demonstração. Pelo Lema 3, [X, Y] é invariante à esquerda.

Ainda, $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial, pois dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(X + \alpha Y)(gh) &= X(gh) + \alpha Y(gh) \\
&= dL_g X(h) + \alpha dL_g Y(h) \\
&= dL_g(X(h) + \alpha Y(h)) \\
&= dL_g(X + \alpha Y)(h)
\end{aligned}$$

e é fácil verificar o colchete de Lie de campos de vetores é anti-simétrico e satisfaz a identidade de Jacobi. □

Teorema 6. *Seja $\mathfrak{g}$ o conjunto de todos os campos de vetores invariantes à esquerda em um grupo de Lie G. Então*

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathfrak{g} & \to & T_eG \\ X & \mapsto & X(e) \end{array}$$

é isomorfismo de espaços vetoriais.

Demonstração. ψ é linear, pois

$$\begin{aligned} \psi(X + cY) &= (X + cY)(e) \\ &= X(e) + cY(e) \\ &= \psi(X) + c\psi(Y) \end{aligned}$$

ψ é injetiva, pois se $\psi(X) = \psi(Y)$ então $X(e) = Y(e)$ e

$$X(g) = dL_g X(e) = dL_g Y(e) = Y(g)$$

ψ é sobrejetiva, pois dado $Z \in T_eG$, considere o campo X tal que $X(g) = dL_g Z$. Note que

$$\psi(X) = X(e) = dL_e(Z) = Z$$

e que X $\in \mathfrak{g}$,

$$X(gh) = d(L_{gh})Z = dL_g(dL_h(Z)) = dL_g X(h)$$

□

Corolário 1. *Seja $\mathfrak{g}$ o conjunto de todos os campos de vetores invariantes à esquerda em um grupo de Lie G. Dado $X^i \in T_eG$, considere $\widetilde{X}^i$ o campo invariante à esquerda $\widetilde{X}^i = d(L_g)_e X^i$ e defina*

$$[X^1, X^2] = [\widetilde{X}^1, \widetilde{X}^2]_e$$

Então ψ definida no Teorema 6 é um isomorfismo de álgebras.

Demonstração. De fato,

$$[\psi X, \psi Y] = [X, Y]_e = \psi[X, Y]$$

Definição 18. *A álgebra de Lie de G é a álgebra $\mathfrak{g}$ dos campos de vetores invariantes à esquerda. Equivalentemente, $\mathfrak{g}$ é $(T_eG, [,]_e)$, com colchete definido de forma que dados $X^1, X^2 \in T_eG$, considere $\tilde{X}^i_g = d(L_g)_e X^i$. Então*

$$[X^1, X^2] = [\tilde{X}^1, \tilde{X}^2]_e$$

Teorema 7. *(Teorema de Lie) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então existe um único grupo de Lie simplesmente conexo com álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{g}$.*

A prova deste teorema escapa do objetivo deste trabalho.

2.2 Homomorfismo de Lie

Definição 19. *Um homomorfismo $f : G_1 \to G_2$ é um homomorfismo de Lie se f é diferenciável.*

Definição 20. *Um subgrupo de Lie H de um grupo de Lie G é um subgrupo que também é uma subvariedade imersa (Definição 3) de G tal que a função.*

$$\begin{array}{rcl} H \times H & \to & H \\ (a,b) & \mapsto & ab^{-1} \end{array}$$

é diferenciável.

Definição 21. *Seja G um grupo de Lie com álgebra $\mathfrak{g}$. Uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$ tal que para todo $X, Y \in \mathfrak{h}$, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.*

Proposição 6. *Sejam G um grupo de Lie e $H \subset G$ subvariedade de G que também é grupo com a operação de G. Então H é um subgrupo de Lie de G.*

Demonstração. Seja

$$\begin{array}{rcl} f : H \times H & \to & G \\ (a,b) & \mapsto & ab^{-1} \end{array}$$

Como G é grupo, f é diferenciável e como H é grupo, $f(H \times H) \subset H$. Ainda, do fato de H ser mergulho em G, pela Proposição 1, $f : H \times H \to H$ é diferenciável. Logo H é subgrupo de Lie de G. □

Lema 4. *Sejam G_1 e G_2 grupos de Lie e um homomorfismo $f : G_1 \to G_2$. Então dado um campo invariante à esquerda $X \in \mathfrak{g}_1$, existe um único campo invariante à esquerda $Y \in \mathfrak{g}_2$ que é f-relacionado com X.*

Demonstração. Defina $Y = d(L_g)_e(df_e(X(e)))$. Afirmamos que Y é f-relacionado com X. De fato, para todo $g \in G_1$

$$\begin{array}{rcl} df_g(X(g)) & = & df_g(d(L_g)_e X(e)) \\ & = & d(f \circ L_g)_e X(e) \\ & \overbrace{=}^{*} & d(L_{f(g)} \circ f)_e X(e) \\ & = & d(L_{f(g)})_e(df_e X(e)) \\ & = & Y(f(g)) \end{array}$$

(*) Como f é homomorfismo, $f \circ L_g(x) = f(g)f(x) = L_{f(g)} \circ f(x)$.

Quanto à unicidade, se $Y \in \mathfrak{g}_2$ é f-relacionado com X

$$df \circ X = Y \circ f$$

mas como f é homomorfismo,

$$df_e \circ X(e) = Y(e)$$

Daí, como Y é invariante à esquerda, pela Observação 3, vale a unicidade. $\square$

Proposição 7. *Sejam G_1 e G_2 grupos de Lie e $f : G_1 \to G_2$ um homomorfismo de grupos de Lie. Então $df_e : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.*

Demonstração. Pela Definição 18, basta provar que

$$df_e : (T_eG_1, [,]_e) \to (T_eG_2, [,]_e)$$

é homomorfismo. Para tanto, dados $X^1, X^2 \in T_eG_1$, considere $Y^i = df_eX^i \in T_eG_2$ e $\tilde{X}^i \in \mathfrak{X}(G_1), \tilde{Y}^i \in \mathfrak{X}(G_2)$ os campos invariantes à esquerda tais que $\tilde{Y}^i_g = (dL_g)_eY^i$ e $\tilde{X}^i_g = (dL_g)_eX^i$. Da Definição 18,

$$\begin{aligned} [df_eX^1, df_eX^2] &= [Y^1, Y^2] \\ &= [\tilde{Y}^1, \tilde{Y}^1]_e \end{aligned}$$

Ainda, pelo Lema 4, $\tilde{X}^i$ e $\tilde{Y}^i$ são f-relacionados. Isso implica, pelo Lema 2, que $[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2]$ é f-relacionado com $[\tilde{Y}^1, \tilde{Y}^2]$. Logo

$$\begin{aligned} [\tilde{Y}^1, \tilde{Y}^2]_e &= df_e[\tilde{X}^1, \tilde{X}^2]_e \\ &= df_e[X^1, X^2]. \end{aligned}$$

Juntando as duas últimas igualdades,

$$[df_eX^1, df_eX^2] = df_e[X^1, X^2]$$

e df_e é homomorfismo. $\square$

Teorema 8. *Sejam G um grupo de Lie com álgebra $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de $\mathfrak{g}$. Então existe um único grupo de Lie $H \subset G$ conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.*

A prova deste teorema escapa do objetivo deste trabalho.

A proposição a seguir mostra que um grupo de Lie é gerado por uma vizinhança da identidade.

Proposição 8. *Sejam G um grupo de Lie e G^0 a componente conexa que contém a identidade $e \in G$. Então G^0 é um subgrupo de Lie normal de G e as componentes conexas de G são da forma gG^0, para algum $g \in G$. Além disso, dada uma vizinhança aberta U de e,*

$$G^0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$$

com

$$U^n = \{g_1^{\pm 1} \cdots g_n^{\pm 1}; g_i \in U\}$$

Demonstração.

Afirmação 1. *G^0 é subgrupo de Lie normal de G.*

Seja $g_0 \in G^0$. Como L_{g_0} é um difeomorfismo e G^0 é aberto e fechado em G (já que é conexo), então $L_{g_0}(G^0) = g_0G^0$ é uma componente conexa de G.

Como $g_0 \in G^0 \cap g_0G^0$, segue da maximilidade da componente conexa que $g_0G = G_0$.

Como $g \mapsto g^{-1}$ é difeomorfismo, analogamente $G^0_{-1} = \{g_0^{-1}; g_0 \in G^0\}$ é conexo com $e \in G^0_{-1}$. Logo $G^0_{-1} = G^0$.

Portanto G^0 é um subgrupo de G e subvariedade de G. Pela Proposição 6, G^0 é um subgrupo de Lie de G.

Além disso, G^0 é normal em G. Para tanto, basta considerar o difeomorfismo $x \mapsto gxg^{-1}$, utilizar o mesmo argumento de maximilidade da componente conexa e concluir que gG^0g^{-1}, para todo $g \in G$.

Afirmação 2. $G^0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$

Já que G^0 é conexo, basta mostrar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ é aberto e fechado em G^0. É aberto por ser união dos abertos U. Para provar que é fechado, considere uma sequência $h_j \to h \in G^0$ com $h_j \in \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$.

Como $U^{-1} = \{u^{-1}; u \in U\}$ é uma vizinhança aberta de $e \in G$, hU^{-1} é uma vizinhança aberta de h. Como $h_j \to h$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $h_{j_0} \in hU^{-1}$, ou seja, existe $u \in U$ tal que

$$h_{j_0} = hu^{-1}$$

Logo

$$h = h_{j_0}u \in \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$$

Portanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ é fechado em G^0. □

Para continuar estudando as relações entre grupos de Lie e álgebras de Lie precisamos de um pouco de topologia.

Definição 22. *Uma função sobrejetora $\pi : E \to B$ diferenciável é um recobrimento se, para cada $p \in B$, existe um aberto $U \ni p$ tal que $\pi^{-1}(U)$ é a união disjunta de abertos $U_\alpha \subset E$ com*

$$\pi\mid_{U_\alpha}: U_\alpha \to U$$

difeomorfismo para cada α.

Teorema 9. *Seja G um grupo de Lie conexo. Então existem um único grupo de Lie $\tilde{G}$ simplesmente conexo e um homomorfismo de Lie $\pi : \tilde{G} \to G$ que é também um recobrimento.*

A prova deste teorema escapa do objetivo deste trabalho.

Teorema 10. *Sejam G_1 e G_2 grupos de Lie e $\pi : G_1 \to G_2$ um homomorfismo sobrejetivo. Então π é um recobrimento se, e somente se, $d\pi_e$ é um isomorfismo.*

A prova deste teorema escapa do objetivo deste trabalho.

Teorema 11. *Sejam G_1 e G_2 grupos de Lie e $\theta : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ homomorfismo de álgebras de Lie. Então existe um aberto $V \ni e$ e um homomorfismo local $f : V \to G_2$ com $df_e = \theta$.*

Demonstração. Considere a álgebra obtida pela soma direta $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ e a subálgebra dada por $\mathfrak{h} = \{(X, \theta(X)); X \in \mathfrak{g}_1\}$, ou seja, o gráfico da função $\theta : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$. Seja, ainda, $H \subset G_1 \times G_2$ o único grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, de acordo com o Teorema 8.

Considere a inclusão

$$i : H \hookrightarrow G_1 \times G_2$$

e as projeções

$$\pi_1 : G_1 \times G_2 \to G_1$$
$$\pi_2 : G_1 \times G_2 \to G_2$$

A função $\pi_1 \circ i : H \to G_1$ é um homomorfismo de Lie tal que, para todo $X \in T_eG_1$,

$$d(\pi_1 \circ i)(X, \theta(X)) = X$$

A igualdade vale, pois considerando uma curva $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ com $\alpha(0) = (p, q)$ e $\alpha'(0) = (X, Y)$

$$d(i)_{(p,q)}(X, Y) = \frac{d(i(\alpha(t)))}{dt}|_{t=0}$$

Como $i(\alpha(t)) = \alpha(t)$ e $\frac{d(\alpha(t))}{dt}|_{=0} = (X, Y)$, então

$$d(\pi_1 \circ i)_{(p,q)}(X, Y) = d(\pi_1)_{(p,q)}(X, Y)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} d(\pi_1)_{(p,q)}(X,Y) &= \frac{d(\pi_1(\alpha(t)))}{dt}|_{t=0} \\ &= \frac{d(\pi_1(\alpha_1(t),\alpha_2(t)))}{dt}|_{t=0} \\ &= \frac{d(\pi_1(\alpha_1(t)))}{dt}|_{t=0} = X \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da Função Inversa, existem abertos $U \ni e_H$ e $V \ni e_{G_1}, U \subset H$ e $V \subset G_1$, tais que

$$\pi_1 \circ i \,|_U \colon U \to V$$

é difeomorfismo. Assim

$$f = \pi_2 \circ (\pi_1 \circ i)^{-1} : V \to G_2$$

é homomorfismo e, para todo $X \in T_eG_2$,

$$\begin{aligned} df_e(X) &= d(\pi_2 \circ (\pi_1 \circ i)^{-1})_e(X) \\ &= d\pi_2 d((\pi_1 \circ i)^{-1})X \\ &= d\pi_2(X, \theta(X)) \\ &= \theta(X) \end{aligned}$$

ou seja, $df_e = \theta$. □

Corolário 2. *Sejam G_1 e G_2 grupos de Lie com G_1 simplesmente conexo. Considere ainda $\theta : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ homomorfismo de álgebras de Lie. Então existe um único homomorfismo $f : G_1 \to G_2$ com $df_e = \theta$.*

Demonstração. Com as notações do Teorema 11, $\pi_1 \circ i : H \to G_1$ é um recobrimento, já que é um homomorfismo sobrejetor e $d(\pi_1 \circ i)_e$ é isomorfismo (Teorema 10).

Como recobrimento de simplesmente conexo é difeomorfismo, $\pi_1 \circ i$ é um difeomorfismo e que pode ser invertido globalmente. Logo

$$f = \pi_2 \circ (\pi_1 \circ i)^{-1} : G_1 \to G_2$$

com $df_e = \theta$.

Quanto à unicidade, considere o homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \sigma : G_1 &\to G_1 \times G_2 \\ g &\mapsto (g, f(g)) \end{aligned}$$

e o homomorfismo de álgebras (Proposição 7)

$$\begin{aligned} d\sigma_e : \mathfrak{g}_1 &\rightarrow \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \\ X &\mapsto (X, \theta(X)) \end{aligned}$$

Note que $\sigma(G_1)$ é o gráfico de f e, portanto, é um mergulho em $G_1 \times G_2$. Pela Proposição 6, $\sigma(G_1)$ é um subgrupo de Lie de $G_1 \times G_2$ com álgebra de Lie $\mathfrak{h} = d\sigma_e(\mathfrak{g}_1)$. Pelo Teorema 8, $\sigma(G_1) = H$, ou seja, H é o gráfico de f. Daí, se $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ é homomorfismo com $d\phi_e = \theta$, a mesma construção nos levaria a f e ϕ serem ambas o gráfico de H, isto é, $f = \phi$. □

2.3 Definições adicionais

Definição 23. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ um subespaço de $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ se, para quaisquer $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{h}$, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.*

$\mathfrak{h}$ é dito simples se seus únicos ideais são ele mesmo e o trivial.

Proposição 9. *Sejam $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$ álgebras de Lie e $f : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ um homomorfismo. Então ker(f) é um ideal de $\mathfrak{g}_1$.*

Demonstração. De fato, sejam $X \in \mathfrak{g}_1$ e $Y \in$ ker(f).

$$f([X, Y]) = [f(X), f(Y)] = [f(X), 0] = 0$$

Logo, $[X, Y] \in ker(f)$ e, por isso, ker(f) é um ideal de $\mathfrak{g}_1$. □

Definição 24. *O centro de um grupo de Lie G é o subgrupo dado por*

$$Z(G) = \{g \in G; gh = hg, \forall h \in G\}$$

Definição 25. *Seja G um grupo de Lie. O centro da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é*

$$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g}; [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}$$

2.4 Função exponencial

Definição 26. *Seja G um grupo de Lie. Um homomorfismo $f : \mathbb{R} \rightarrow G$ é chamado um subgrupo a 1-parâmetro de G.*

Observação 4. *Seja* $X \in \mathfrak{g}$ *e considere*

$$\begin{array}{rcl} \theta : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \cdot X \\ t & \mapsto & tX \end{array}$$

pelos Teorema 8 e Corolário 2, existe um único subgrupo a 1-parâmetro $\lambda_X : \mathbb{R} \to G$ *tal que* $\lambda'_X(0) = X$.

Definição 27. *A função exponencial em* G *é*

$$\begin{array}{rcl} exp : \mathfrak{g} & \to & G \\ X & \mapsto & \lambda_X(1) \end{array}$$

em que λ_X *é o único subgrupo a 1-parâmetro de* G *tal que* $\lambda'_X(0) = X$.

Proposição 10. *Sejam* $t \in \mathbb{R}$ *e* $X \in \mathfrak{g}$. *Então* $exp(tX) = \lambda_X(t)$.

Demonstração. Considere o subgrupo a 1-parâmetro $\lambda(s) = \lambda_X(st)$. Derivando em $s = 0$,

$$\begin{array}{rcl} \lambda'(0) & = & \frac{d}{ds}\lambda_X(st) \mid_{s=0} \\ & = & t\lambda'_X(0) \\ & = & tX \end{array}$$

Da unicidade da Definição 27, $\lambda_X(st) = \lambda_{tX}(s)$. Escolhendo $s = 1$,

$$\begin{array}{rcl} \lambda_X(t) & = & \lambda_{tX}(1) \\ & = & exp(tX) \end{array}$$

□

Corolário 3. *Sejam* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ *e* $X \in \mathfrak{g}$. *A função exponencial satisfaz as seguintes propriedades:*

i. $exp(-tX) = exp(tX)^{-1}$

ii. $exp(t_1 + t_2)X = exp(t_1X)exp(t_2X)$

Proposição 11. $exp : T_eG \to G$ *é um difeomorfismo de um aberto que contém* $0 \in T_eG$ *sobre um aberto que contém* $e \in G$.

Proposição 12. *Seja $GL(n, \mathbb{C})$ o grupo de Lie das matrizes invertíveis. Então a função exponencial*

$$exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \simeq M_n(\mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C})$$

coincide com a exponencial de matrizes

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

válida para toda $A \in M(n, \mathbb{C})$.

A demonstração pode ser encontrada em (Alexandrino, Bettiol, [2]).

Proposição 13. *Sejam G_1 e G_2 grupos de Lie e $f : G_1 \to G_2$ um homomorfismo de Lie. Considere ainda $exp^i : \mathfrak{g}_i \to G_i$. Então vale a igualdade*

$$f \circ exp^1 = exp^2 \circ df : \mathfrak{g}_1 \to G_2$$

Demonstração. Considere os subgrupos a 1-parâmetro de G_2

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= f \circ exp^1(tX) \\ \beta(t) &= exp^2 \circ df(tX) \end{aligned}$$

então $\alpha'(0) = \beta'(0) = df_e X$. Logo, pelo Teorema 10, $\alpha = \beta$. □

As fórmulas CBH, dadas a seguir, são uma forte ferramenta que relaciona um grupo de Lie com sua álgebra, através da função exponencial. Sua demonstração completa pode ser encontrada em (Price, [5]).

Teorema 12. *Fórmulas de Campbell-Baker-Hausdorff*

Sejam G um grupo de Lie e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $|t| < \varepsilon$:

i. $exp(tX)exp(tY) = exp[t(X + Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + O(t^3)]$

ii. $exp(tX)exp(tY)exp(-tX) = exp(tY + t^2[X, Y] + O(t^3))$

em que $\frac{O(t^3)}{t^3}$ é limitado.

O teorema a seguir é um resultado importante que utiliza as fórmulas CBH em sua demonstração. Não a damos aqui pois escapa do objetivo deste trabalho.

Teorema 13. *Sejam G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado de G. Então H é um subgrupo de Lie de G.*

2.5 Representação adjunta

Definição 28. *Sejam G um grupo e V um espaço vetorial. Uma representação linear de G em V é um homomorfismo de grupos $\varphi : G \to Aut(V)$, em que Aut(V) denota o grupo de todos os isomorfismos de espaços vetoriais de V em si mesmo.*

Considere a ação de G em si mesmo por conjugação, isto é,

$$\begin{aligned} a : G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto a_g(h) = ghg^{-1} \end{aligned}$$

Note que

$$a_g(h) = ghg^{-1} = L_g(hg^{-1}) = L_g R_{g^{-1}}(h)$$

Logo

$$a_g = L_g R_{g^{-1}}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} d(a_g)_e &= d(L_g R_{g^{-1}})_e \\ &= d(L_g)_{R_g^{-1}(e)} \circ d(R_{g^{-1}})_e \\ &= d(L_g)_{g^{-1}} \circ d(R_{g^{-1}})_e \end{aligned}$$

Definição 29. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. A representação linear*

$$\begin{aligned} Ad : G &\to Aut(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto Ad(g) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} Ad(g) = d(a_g)_e : T_eG &\to T_{a(g)(e)}G \\ v &\mapsto d(a_g)_e v \end{aligned}$$

é chamada de representação adjunta de G.

Note que, por definição,

$$Ad(g)X = \frac{d}{dt}(g(exp(tX))g^{-1})|_{t=0}$$

Definição 30. *Seja G um grupo de Lie. Definimos*

$$\begin{aligned} ad : T_eG &\to L(T_eG) \\ X &\mapsto ad(X) \end{aligned}$$

com

$$\begin{array}{rcl} ad(X): T_eG & \to & T_eG \\ Y & \mapsto & d(Ad)_e X(Y) \end{array}$$

Note que, por definição,

$$ad(X)Y = \frac{d}{dt} Ad(exp(tX))Y|_{t=0}$$

Observação 5. *Como $ad(X)$ é uma transformação linear de T_eG em T_eG, podemos definir*

$$e^{ad(X)} = \sum \frac{(ad(X))^n}{n!}$$

Daí, pela Proposição 13,

$$Ad(exp(tX)) = e^{(tad(X))}$$

e para $t = 1$,

$$Ad(exp(X)) = e^{(ad(X))} \tag{2.2}$$

Proposição 14. *Sejam G um grupo de Lie com álgebra $\mathfrak{g}$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Então $ad(X)Y = [X, Y]$.*

Demonstração. Do Teorema 12,

$$exp(tX)exp(tY)exp(-tX) = exp(tY + t^2[X, Y] + O(t^3)$$

Ainda, aplicando a Proposição 13 ao automorfismo a_g,

$$\begin{array}{rcl} exp(Ad(g)tX) & = & a_g(exp(tX)) \\ & = & gexp(tX)g^{-1} \end{array}$$

Assim, para $g = exp(tX)$,

$$exp(Ad(exp(tX))tY) = exp(tY + t^2[X, Y] + O(t^3))$$

Como para t pequeno os argumentos de *exp* são iguais,

$$Ad(exp(tX))tY = tY + t^2[X, Y] + O(t^3)$$

Portanto,

$$\begin{array}{rcl} Ad(exp(tX))tY & = & tY + t^2[X, Y] + O(t^3) \\ Ad(exp(tX))Y & = & Y + t[X, Y] + \dfrac{O(t^3)}{t} \\ \dfrac{Ad(exp(tX))Y - Ad(exp(0))Y}{t} & = & [X, Y] + \dfrac{O(t^3)}{t^2} \end{array}$$

Fazendo o limite com $t \to 0$

$$\begin{aligned} \frac{d(Ad(exp(tX))Y)}{dt}\Big|_{t=0} &= [X,Y] \\ ad(X)Y &= [X,Y] \end{aligned} \tag{2.3}$$

$\square$

Capítulo 3

Curvatura Seccional em Grupos de Lie

Baseando-se no artigo *Curvatures of left invariant metrics on Lie Groups* de Milnor, ([0]), neste capítulo estudamos a curvatura seccional em Grupos de Lie. A primeira seção refere-se a grupos com métrica invariante à esquerda e a segunda a grupos com métrica bi-invariante.

3.1 Grupos de Lie com métrica invariante à esquerda

Os principais resultados desta seção são a Proposição 15 que mostra ser possível estudar a curvatura seccional de um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda conhecendo apenas sua álgebra de Lie e o Corolário 4, o qual mostra que se a transformação linear ad(X) é anti-simétrica, então a curvatura seccional é sempre não-negativa.

Definição 31. *Seja G um grupo de Lie. Uma métrica riemanniana $\langle , \rangle$ é invariante à esquerda se L_g (Definição 15) é uma isometria para todo $g \in G$, ou seja,*

$$\langle d(L_g)_h X, d(L_g)_h Y \rangle_{gh} = \langle X, Y \rangle_h$$

para todo $g, h \in G$, $X, Y \in T_h G$.

Observação 6. *Note que dado um produto interno $\langle , \rangle_e$ em $T_e G$, é possível definir uma métrica invariante à esquerda em G por*

$$\langle X, Y \rangle_g = \langle d(L_{g^{-1}})_g X, d(L_{g^{-1}})_g Y \rangle_e \tag{3.1}$$

para todo $g \in G$, $X, Y \in T_e G$.

Como L_g depende diferencialmente de g em G, segue que $\langle , \rangle_g$ varia diferencialmente em G. Portanto, a métrica (3.1) define uma métrica riemanniana. Além disso $\langle , \rangle_g$ é de fato invariante à esquerda, pois

$$\begin{aligned}
\langle (dL_g)_h X, ((dL_g)_h Y) \rangle_{gh} &= \langle (dL_{(gh)^{-1}})_{gh}[(dL_g)_h X], (dL_{(gh)^{-1}})_{gh}[(dL_g)_h Y] \rangle_e \\
&= \langle (dL_{(gh)^{-1}} \circ L_g)_h X, (dL_{(gh)^{-1}} \circ L_g)_h Y \rangle_e \\
&= \langle (dL_{h^{-1}})_h X, (dL_{h^{-1}})_h Y \rangle_e \\
&= \langle X, Y \rangle_h
\end{aligned}$$

Observação 7. *Como o colchete de Lie é uma função bilinear (Proposição 3 itens i) e ii)), então fixada uma base ortonormal $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, o mesmo é completamente determinado pelos elementos $[E_i, E_j]$.*

Definição 32. *Seja $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$, ou seja, uma base de campos de vetores invariantes à esquerda (Definição 18). Definimos as constantes de estrutura α_{ijk} como*

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ijk} E_k$$

ou, equivalentemente,

$$\alpha_{ijk} = \langle [E_i, E_j], E_k \rangle \tag{3.2}$$

Lema 5. *Sejam G um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Então $\langle X, Y \rangle$ é constante.*

De fato, para todo $p \in G$,

$$\begin{aligned}
\langle X(p), Y(p) \rangle_p &= \langle d(L_p)_e(X(e)), d(L_p)_e Y(e) \rangle_p \\
&= \langle X(e), Y(e) \rangle_e
\end{aligned}$$

ou seja, a função $p \in G \mapsto \langle X(p), Y(p) \rangle_p$ é constante.

Proposição 15. *Sejam G um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda e $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$. Então a curvatura seccional $\kappa(E_1, E_2)$ é dada por*

$$\begin{aligned}
\kappa(E_1, E_2) &= \frac{1}{2} \sum_k \alpha_{12k}(\alpha_{k12} - \alpha_{12k} + \alpha_{2k1}) \\
&- \frac{1}{4} \sum_k (\alpha_{21k} - \alpha_{1k2} + \alpha_{k21})(\alpha_{1k2} - \alpha_{k21} + \alpha_{21k}) + \sum_k \alpha_{k11}\alpha_{2k2}
\end{aligned}$$

Demonstração. Como $\{E_1, E_2\}$ é um conjunto ortonormal,

$$\kappa(E_1, E_2) = \langle \nabla_{[E_1,E_2]} E_1 - \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1 + \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1, E_2 \rangle \tag{3.3}$$

Queremos expressar esses termos utilizando as constantes de estrutura α_{ijk}. Para tanto, considere X, Y, Z campos de vetores invariantes à esquerda. Por (1.2),

$$2\langle Z, \nabla_Y X\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle$$

mas, pelo Lema 5,

$$X\langle Y, Z\rangle = Y\langle Z, X\rangle = Z\langle X, Y\rangle = 0$$

Logo,

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \{\langle [Z, X], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle\} \tag{3.4}$$

Ainda, escrevendo $\nabla_X Y$ na base ortonormal $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$,

$$\nabla_X Y = \sum_k \langle \nabla_X Y, E_k\rangle E_k \tag{3.5}$$

combinando (3.4) e (3.5),

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2} \sum_k (\langle [X, Y], E_k\rangle + \langle [E_k, X], Y\rangle + \langle [E_k, Y], X\rangle) E_k \tag{3.6}$$

Com α_{ijk} definidos em (3.2),

$$\nabla_{E_i} E_j = \frac{1}{2} \sum_k (\alpha_{ijk} - \alpha_{jki} + \alpha_{kij}) E_k$$

Como $\alpha_{ijk} = -\alpha_{jik}$ e $\alpha_{iik} = 0$,

$$\nabla_{E_1} E_1 = \frac{1}{2} \sum_k (\alpha_{11k} + \alpha_{k11} + \alpha_{k11}) E_k = \sum_k \alpha_{k11} E_k \tag{3.7}$$

$$\nabla_{E_2} E_1 = \frac{1}{2} \sum_k (\alpha_{21k} - \alpha_{1k2} + \alpha_{k21}) E_k \tag{3.8}$$

$$\nabla_{[E_1,E_2]} E_1 = \nabla_{\sum_k \alpha_{12k} E_k} E_1 = \sum_k \alpha_{12k} \nabla_{E_k} E_1 \tag{3.9}$$

$$\nabla_{E_1} E_k = \frac{1}{2} \sum_l (\alpha_{1kl} - \alpha_{kl1} + \alpha_{l1k}) E_l \tag{3.10}$$

$$\nabla_{E_k} E_1 = \frac{1}{2} \sum_l (\alpha_{k1l} - \alpha_{1lk} + \alpha_{lk1}) E_l \tag{3.11}$$

$$\nabla_{E_2} E_k = \frac{1}{2} \sum_l (\alpha_{2kl} - \alpha_{kl2} + \alpha_{l2k}) E_l \tag{3.12}$$

De (3.7) e (3.12)

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_1, E_2\rangle &= \langle \nabla_{E_2}\sum_k \alpha_{k11}E_k, E_2\rangle \\
&= \sum_k \alpha_{k11}\langle \nabla_{E_2}E_k, E_2\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_k \alpha_{k11}\langle \sum_l (\alpha_{2kl} - \alpha_{kl2} + \alpha_{l2k})E_l, E_2\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_k \alpha_{k11}(\alpha_{2k2} - \alpha_{k22} + \underbrace{\alpha_{22k}}_{=0}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_k \alpha_{k11}(\alpha_{2k2} + \alpha_{2k2}) \\
&= \sum_k \alpha_{k11}\alpha_{2k2} \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

De (3.8) e (3.10),

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_1, E_2\rangle &= \frac{1}{2}\langle \nabla_{E_1}\sum_k (\alpha_{21k} - \alpha_{1k2} + \alpha_{k21})E_k, E_2\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle [\sum_k (\alpha_{21k} - \alpha_{1k2} + \alpha_{k21})]\nabla_{E_1}E_k, E_2\rangle \\
&= \frac{1}{4}\langle \sum_k (\alpha_{21k} - \alpha_{1k2} + \alpha_{k21})[\sum_l (\alpha_{1kl} - \alpha_{kl1} + \alpha_{l1k})E_l], E_2\rangle \\
&= \frac{1}{4}\sum_k (\alpha_{21k} - \alpha_{1k2} + \alpha_{k21})(\alpha_{1k2} - \alpha_{k21} + \alpha_{21k}) \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

De (3.9) e (3.11),

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{[E_1,E_2]}E_1, E_2\rangle &= \langle \sum_k \alpha_{12k}\nabla_{E_k}E_1, E_2\rangle \\
&= \langle \sum_k \alpha_{12k}\frac{1}{2}\sum_l (\alpha_{k1l} + \alpha_{lk1} + \alpha_{l1k})E_l, E_2\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_k \alpha_{12k}(\alpha_{k12} - \alpha_{12k} + \alpha_{2k1}) \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Aplicando (3.15), (3.14) e (3.13) em (3.3),

$$\begin{aligned}
\kappa(E_1, E_2) &= \frac{1}{2}\sum_k \alpha_{12k}(\alpha_{k12} - \alpha_{12k} + \alpha_{2k1}) \\
&- \frac{1}{4}\sum_k (\alpha_{21k} - \alpha_{1k2} + \alpha_{k21})(\alpha_{1k2} - \alpha_{k21} + \alpha_{21k}) + \sum_k \alpha_{k11}\alpha_{2k2}
\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 7. *O Grupo de Lie $E(2)$, dos movimentos rígidos do plano, tem curvatura zero.*

Consideremos $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3\}$. O Grupo de Lie E(2) é

$$E(2) = \left\{ \begin{bmatrix} cos(t) & sen(t) & x \\ -sen(t) & cos(t) & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; t \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R} \right\}$$

Se $\mathfrak{e}(2)$ é a álgebra de Lie de $E(2)$, então $\mathfrak{e}(2) \simeq T_{id}E(2)$. Para encontrá-la, sejam $v \in T_{id}E(2)$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to E(2)$ tal que $\alpha(0) = Id$ e $\alpha'(0) = v$.

Com isso,

$$\alpha(s) = \begin{bmatrix} cos(t(s)) & sen(t(s)) & x(s) \\ -sen(t(s)) & cos(t(s)) & y(s) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

com $t(0) = 0, x(0) = 0, y(0) = 0$.

Então,

$$\alpha'(s) = \begin{bmatrix} -t'(s)sen(t(s)) & t'(s)cos(t(s)) & x'(s) \\ -t(s)cos(t(s)) & t'(s)sen(t(s)) & y'(s) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\alpha'(0) = \begin{bmatrix} 0 & t'(0) & x'(0) \\ -t(0) & 0 & y'(0) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\mathfrak{e}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & x \\ -a & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; a \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R} \right\}$$

e podemos considerar a base

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que nos permite calcular

$$[E_1, E_3] = -E_2$$

$$[E_2, E_3] = 0$$

$$[E_1, E_2] = -E_3$$

Com a métrica

$$\langle \begin{bmatrix} 0 & a & x \\ -a & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b & u \\ -b & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rangle = \text{ab + xu + yv}$$

obtemos $\alpha_{ijk} = 0$ exceto para os termos:

$$\begin{aligned} \alpha_{123} &= \langle [E_1, E_2], E_3 \rangle = -\langle E_3, E_3 \rangle = -1 \\ \alpha_{132} &= \langle [E_1, E_3], E_2 \rangle = -\langle E_2, E_2 \rangle = -1 \end{aligned}$$

Então, diretamente da Proposição 15 e eliminando os termos nulos,

$$\begin{aligned} \kappa(E_1, E_2) &= \frac{1}{2}\alpha_{123}(\alpha_{312} - \alpha_{123} + \alpha_{231}) \\ &- \frac{1}{4}(\alpha_{213} - \alpha_{132} + \alpha_{321})(\alpha_{132} - \alpha_{321} + \alpha_{213}) \\ &= \frac{1}{2}(-1)(1 - (-1) + 0) \\ &- \frac{1}{4}(1 - (-1) + 0)(-1 - 0 + (-1)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim, a curvatura seccional $\kappa(E_1, E_2) = 0$. Analogamente, $\kappa(E_1, E_3) = 0$ e $\kappa(E_2, E_3) = 0$.

Definição 33. *Sejam V e W espaços vetoriais com produto interno $\langle , \rangle$. A adjunta da transformação linear $A : V \to W$ é uma transformação $A^* : W \to V$ tal que para todo $v \in V$ e $w \in W$*

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, A^* w \rangle$$

Dizemos que A é anti-simétrica se $A^* = -A$.

Observação 8. *Se a transformação linear $ad(X)$ é anti-simétrica, então*

$$\langle ad(X)Y, Z \rangle = -\langle Y, ad(X)Z \rangle$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\langle [X,Y],Z\rangle &= -\langle Y,[X,Z]\rangle \\ &= -\langle [X,Z],Y\rangle\end{aligned}$$

e ainda, com a notação de (3.2),

$$\alpha_{ijk} = -\alpha_{ikj}$$

Corolário 4. *Sejam G um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda e suponha que a transformação linear ad(U) é anti-simétrica. Então*

$$\kappa(U,V) \geq 0$$

para todo V. A igualdade vale se, e somente se, U é ortogonal a $[V,\mathfrak{g}]$.

Demonstração. Sejam, sem perda de generalidade, U e V ortogonais. Considere, ainda, uma base ortogonal $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ com $E_1 = U$ e $E_2 = V$.

Pela Proposição 15,

$$\begin{aligned}
\kappa(E_1,E_2) &= \frac{1}{2}\sum_k \alpha_{12k}(\alpha_{k12} - \alpha_{12k} + \alpha_{2k1}) \\
&- \frac{1}{4}\sum_k (\alpha_{21k} - \alpha_{1k2} + \alpha_{k21})(\alpha_{1k2} - \alpha_{k21} + \alpha_{21k}) + \sum_k \alpha_{k11}\alpha_{2k2} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_k [\alpha_{21k}(-\alpha_{21k} + \alpha_{21k} + \alpha_{2k1}) \\
&- \sum \frac{1}{4}(-\alpha_{2k1} + \alpha_{k12} - \alpha_{2k1})(-\alpha_{2k1} + \alpha_{2k1} - \alpha_{2k1}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_k [\alpha_{2k1}(\alpha_{2k1} - \alpha_{2k1} + \alpha_{2k1}) \\
&- \sum \frac{1}{4}(-\alpha_{2k1} - \alpha_{k21} - \alpha_{2k1})(-\alpha_{2k1}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_k (\alpha_{2k1})^2 - \sum \frac{1}{4}(-\alpha_{2k1} + \alpha_{2k1} - \alpha_{2k1})(-\alpha_{2k1}) \\
&= \frac{1}{4}\sum_k (\alpha_{2k1})^2
\end{aligned}$$

Note ainda que a soma é zero se, para k $\in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$0 = \alpha_{2k1} = \langle [E_2, E_k], E_1\rangle = \langle [V, E_k], U\rangle$$

ou seja, U é ortogonal a $[V, E_k]$ para todo E_k. Logo U é ortogonal a [V,$\mathfrak{g}$]. □

Na Proposição 18, damos uma prova alternativa desse resultado para o caso de uma métrica bi-invariante (Definição 34).

Corolário 5. *Seja X pertencente ao centro da Álgebra de Lie (Definição 25). Então, para toda métrica invariante à esquerda,* $\kappa(X,Y) \geq 0$*, para todo* $Y \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. Se X é central então $[X,Y] = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Logo,

$$ad(X)(Y) = [X,Y] = 0$$

Assim, sendo $ad(X)$ a transformação nula, é anti-simétrica e basta aplicar o Corolário 4. □

Corolário 6. *Seja G um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda e suponha que a transformação linear* $ad(U)$ *é anti-simétrica. Então*

$$Ric_p(U) \geq 0$$

O caso em que a curvatura seccional é estritamente positiva é bastante restrito, conforme o teorema a seguir. Sua prova Wallach ([4]) envolve um grande número de conceitos não desenvolvidos neste trabalho, portanto preferimos apenas enunciá-lo.

Teorema 14 (Teorema de Wallach)**.** *Seja G um grupo de Lie simplesmente conexo. Se G admite uma métrica invariante à esquerda com curvatura seccional estritamente positiva, então G é isomorfo a SU(2), o conjunto das matrizes* 2×2 *unitárias com determinante 1.*

O seguinte teorema é um resultado clássico a respeito de variedades planas.

Teorema 15. *Seja M uma variedade riemanianna completa. Então M é plana se, e somente se, seu recobrimento universal é isométrico a* $\mathbb{R}^n$.

Todavia, no caso de grupos de Lie com métrica invariante à esquerda, o Teorema 16 fornece um critério explícito para caracterizar variedades planas.

Lema 6. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *comutativa (Definição 14). Então G é uma variedade plana.*

Demonstração. Basta considerar a Proposição 15. □

3.2 Grupos de Lie com métrica bi-invariante

Alguns grupos de Lie possuem métrica não somente invariante pelas translações à esquerda L_g (Definição 31), mas também pelas translações à direita R_g.

Definição 34. *Uma métrica bi-invariante em um grupo de Lie G é uma métrica riemanniana que é simultaneamente invariante à esquerda e à direita.*

Lema 7. *Seja G um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda. Essa métrica é invariante à direita se, e somente se, para todo $g \in G$, $Ad(g)$ é uma isometria com respeito a métrica induzida em $\mathfrak{g}$, ou seja,*

$$\langle Ad(g)X, Ad(g)Y \rangle = \langle X, Y \rangle$$

Demonstração. ($\Leftarrow$) Com efeito,

$$\begin{aligned} \langle Ad(g)X, Ad(g)Y \rangle &= \langle d(L_g R_{g^{-1}})_e X, d(L_g R_{g^{-1}})_e Y \rangle \\ &= \langle dL_g (dR_{g^{-1}})_e X, dL_g (d_{g^{-1}})_e Y \rangle \\ &= \langle (dR_{g^{-1}})_e X, (dR_{g^{-1}})_e Y \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

($\Rightarrow$)

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \langle Ad(g)X, Ad(g)Y \rangle \\ &= \langle d(L_g R_{g^{-1}})_e X, d(L_g R_{g^{-1}})_e Y \rangle \\ &= \langle d(R_{g^{-1}})_e X, d(R_{g^{-1}})_e Y \rangle \end{aligned}$$

□

Proposição 16. *Seja G um grupo de Lie conexo com métrica invariante à esquerda. Então a métrica é invariante à direita se, e somente se, $ad(X)$ é anti-simétrica para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$)

Considere uma métrica bi-invariante. Pelo Lema 7, Ad(g) é uma isometria. Assim,

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \langle Ad(g)(X), Ad(g)(Y) \rangle \\ &= \langle X, Ad^*(g) Ad(g)(Y) \rangle \end{aligned}$$

Logo

$$[Ad(g)]^* = [Ad(g)]^{-1}$$

Como, para g ∈ G suficientemente perto da identidade, $g = exp(X)$ para algum X perto de 0 em $\mathfrak{g}$ (Proposição 11),

$$\begin{aligned} [Ad(g)]^* &= [Ad(g)]^{-1} \\ [Ad(exp(X))]^* &= [Ad(exp(X))]^{-1} \end{aligned}$$

Por (2.2),

$$\left[e^{(ad(X))}\right]^* = \left[e^{(ad(X))}\right]^{-1}$$

$$e^{(ad(X))^*} = e^{(ad(X))-1}$$

$$e^{(ad(X))^*} = e^{-ad(X)}$$

$$(ad(X))^* = -ad(X)$$

Logo, $ad(X)$ é anti-simétrica.
(⇐)
Se ad(X) é anti-simétrica para todo X, então $Ad(exp(X))$ atua como isometria em $\mathfrak{g}$. Logo, para todo $g \in exp(\mathfrak{g})$, $Ad(g)$ é uma isometria em $\mathfrak{g}$.

Pela Proposição 8, todo elemento de G pode ser escrito como um produto de elementos de vizinhança aberta U em $exp(\mathfrak{g})$ tal que $e \in U$. Daí, como o produto de isometrias é isometria, $Ad(g)$ é uma isometria para todo $g \in G$.

Pelo Lema 7, a métrica é bi-invariante. □

Definição 35. *Dizemos que uma k-forma $\omega \in \Omega^k(G)$ é invariante à esquerda se o pull-back de L_g satisfaz $L_g^*\omega = \omega$.*

Similarmente, uma k-forma é invariante à direita se $R_g^*\omega = \omega$ e é bi-invariante se for invariante à esquerda e à direita.

Observação 9. *Note que dada uma k-forma ω_e em T_eG, à maneira da Observação 6, podemos definir uma k-forma em G invariante à esquerda por*

$$\omega(g)(X_1, \ldots, X_k) = \omega_e((dL_{g^{-1}})_g X_1, \ldots, (dL_{g^{-1}})_g X_n)$$

para todo $g \in G$, $X_i \in T_gG$.

A k-forma é invariante à esquerda, pois

$$\begin{aligned} L_g^*\omega(h)(X_1, \ldots, X_k) &= \omega(L_g(h))((dL_g)_h X_1, \ldots (dL_g)_h X_n) \\ &= \omega(gh)((dL_g)_h X_1, \ldots (dL_g)_h X_n) \\ &= \omega_e((dL_{gh^{-1}})_{gh}[(dL_g)_h X_1], \ldots, (dL_{gh^{-1}})_{gh}[(dL_g)_h X_n]) \\ &= \omega_e((dL_{(gh)^{-1}} \circ L_g)_h X_1, \ldots, (dL_{(gh)^{-1}} \circ L_g)_h X_n) \\ &= \omega_e((dL_{h^{-1}})_h X_1, \ldots, (dL_{h^{-1}})_h X_n) \\ &= \omega(h)(X_1, \ldots, X_k) \end{aligned}$$

Proposição 17. *Seja G um grupo de Lie compacto. Então G admite métrica bi-invariante.*

Demonstração. Sejam $\omega \in \Omega^n(G)$ uma n-forma invariante à direita em G e $\langle , \rangle$ uma métrica invariante à direita. Defina

$$\langle\langle U, V\rangle\rangle_x = \int_G \langle (dL_y)_x U, (dL_y)_x V)_{gx}\rangle \omega$$

para todo $U, V \in T_xG$, $x, y \in G$.

Note que $\langle\langle , \rangle\rangle_x$ é uma métrica riemanniana por ser diferenciável, positiva e definida.

Inicialmente note que $\langle\langle , \rangle\rangle_x$ é de fato invariante à direita, pois

$$\begin{aligned}
\langle\langle (dR_z)_x U, (dR_z)_x V\rangle\rangle_{zx} &= \int_G \langle (dL_y)_{zx}[(dR_z)_x U], (dL_y)_{zx}[(dR_z)_x V]\rangle_{yzx} \omega \\
&= \int_G \langle (d(L_y \circ R_z))_x U, (d(L_y \circ R_z))_x V\rangle_{yxz} \omega \\
&= \int_G \langle (d(R_z \circ L_y)_x U, (d(R_z \circ L_y))_x V\rangle_{yzx} \omega \\
&= \int_G \langle (d(R_z)_{yx} (dL_y)_x U, (d(R_z))_{yx} (dL_y)_x V\rangle_{yzx} \omega \\
&= \int_G \langle (d(L_y)_x U, (d(L_y))_x V\rangle_{yx} \omega \\
&= \langle\langle U, V\rangle\rangle_x
\end{aligned}$$

E note que $\langle\langle , \rangle\rangle_x$ é invariante à esquerda, pois dados $x, y, z \in G$,

$$\begin{aligned}
\langle\langle (dL_z)_x U, (dL_z)_x V\rangle\rangle_{zx} &= \int_G \langle (dL_y)_{zx}[(dL_z)_x U], (dL_y)_{zx}[(dL_z)_x V]\rangle_{yzx} \omega \\
&= \int_G \langle (d(L_y \circ L_z))_x U, (d(L_y \circ L_z))_x V\rangle_{yzx} \omega \\
&= \int_G \langle (dL_{yz})_x U, (dL_{yz})_x V\rangle_{yzx} \omega
\end{aligned}$$

e fixados $X, Y \in T_xG$, considere $f(y) = \langle (dL_y)_x U, (dL_y)_x V\rangle_{yx}$. Então

$$
\begin{aligned}
\int_G \langle (dL_{yz})_x U, (dL_{yz})_x V\rangle_{yzx}\omega &= \int_G f(yz)\omega \\
&= \int_G f\circ R_z(y) R_z^*\omega \\
&= \int_G R_z^*(f\omega) \\
&= \int_{R_z^*(G)=G} f\omega \\
&= \int_G f(y)\omega \\
&= \int_G \langle (dL_y)_x U, (dL_y)_x V\rangle_{yx}\omega \\
&= \langle\langle U, V\rangle\rangle_x
\end{aligned}
$$

□

Corolário 7. *Seja G um grupo de Lie compacto. Então todas as curvaturas seccionais satisfazem* $\kappa \geq 0$.

Demonstração. Com efeito, pela Proposição 17, a métrica é bi-invariante. Logo ad(X) é anti-simétrica, pela Proposição 16. Assim, basta considerar a Proposição 4. □

Proposição 18. *Sejam G um grupo de Lie com métrica bi-invariante e* $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. *Então*

i. $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$

ii. $R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z]$

Demonstração. i) Inicialmente, note que $\langle \nabla_X Y, X\rangle = 0$

De fato, por (3.4)

$$
\begin{aligned}
2\langle \nabla_X Y, X\rangle &= \langle [X, X], Y\rangle - \langle [Y, X], X\rangle + \langle [X, Y], X\rangle \\
&= \langle [X, Y], X\rangle + \langle [X, Y], X\rangle \\
&\overbrace{=}^{prop16} -2\langle [X, X], Y\rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

E note que $\nabla_X X = 0$

Com efeito, sejam $x \in X$, $v \in T_xG$ e considere V a extensão de v em um campo invariante à esquerda.

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X X, v\rangle &= \langle \nabla_X X, V\rangle \\ &= X\langle X, V\rangle - \underbrace{\langle X, \nabla_X V\rangle}_{=0} \\ &= X\langle X, V\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Como o resultado foi obtido para todo $v \in T_xG$, então $\nabla_X X = 0$.
Finalmente, sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$. Como $X + Y \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}0 = \nabla_{X+Y}(X+Y) &= \nabla_X X + \nabla_X Y + \nabla_Y X + \nabla_Y Y \\ &= \nabla_X Y + \nabla_Y X \\ &= \nabla_X Y + \nabla_X Y - \nabla_X Y + \nabla_Y X \\ &= 2\nabla_X Y + [Y, X]\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$$

ii)

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= \frac{1}{2}\nabla_Y [X, Z] - \frac{1}{2}\nabla_X [Y, Z] + \frac{1}{2}[[X, Y], Z] \\ &= \frac{1}{4}[Y, [X, Z]] - \frac{1}{4}[X, [Y, Z]] + \frac{1}{2}[[X, Y], Z] \qquad (3.16)\end{aligned}$$

Como, pela Identidade de Jacobi,

$$[[X, Y], Z] = [[X, Z], Y] + [[Z, Y], X]$$

Então

$$\begin{aligned}[Z, [X, Y]] &= [Y, [X, Z]] + [X, [Z, Y]] \\ &= [Y, [X, Z]] - [X, [Y, Z]] \qquad (3.17)\end{aligned}$$

Juntando (3.16) e (3.17),

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z &= \frac{1}{4}[Z, [X, Y]] + \frac{1}{2}[[X, Y], Z] \\ &= \frac{1}{4}[[X, Y], Z]\end{aligned}$$

□

Corolário 8. *Sejam G um grupo de Lie com métrica bi-invariante e $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Então*

i. $\langle R(X,Y)X, Y\rangle = \frac{1}{4}||[X,Y]||^2$

ii. $Ric(X,Y) = -\frac{1}{4}tr[Y,[X,\cdot]]$

Demonstração. i)

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)X,Y\rangle &= \frac{1}{4}\langle[[X,Y],X],Y\rangle \\ &= -\frac{1}{4}\langle[X,[X,Y]],Y\rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle[X,Y],[X,Y]\rangle \\ &= \frac{1}{4}||[X,Y]||^2\end{aligned}$$

Observe que obtivemos uma prova alternativa para a Proposição 4 no caso de uma métrica bi-invariante. De fato, se $E_1, E_2 \in \mathfrak{g}$ formam uma base ortonormal de um plano $\sigma \subseteq T_pG$,

$$\begin{aligned}\kappa(\sigma) &= \frac{\langle R(E_1,E_2)E_1,E_2\rangle}{|E_1|^2|E_2|^2 - \langle E_1,E_2\rangle^2} \\ &= \frac{1}{4}||[E_1,E_2]||^2 \geq 0\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}Ric(X,Y) &= \sum\langle R(X,E_i)Y,E_i\rangle \\ &= trR(X,\cdot)Y \\ &= tr\frac{1}{4}[[X,\cdot],Y] \\ &= -\frac{1}{4}tr[Y,[X,\cdot]] \qquad (3.18)\end{aligned}$$

□

Definição 36. *Sejam G um grupo de Lie com álgebra $\mathfrak{g}$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$. A forma de Killing B sobre $\mathfrak{g}$ é $B(X,Y) = tr(ad(X) \circ ad(Y))$.*

Observe que a forma de Killing é simétrica, pois

$$\begin{aligned}
\langle [X,[Y,E_i]],E_i\rangle &= \langle X,[[Y,E_i],E_i],\rangle \\
&= \langle X,[E_i,[E_i,Y]]\rangle \\
&= \langle [X,E_i],[E_i,Y]\rangle \\
&= \langle [E_i,X],[Y,E_i]\rangle \\
&= \langle [[E_i,X],Y],E_i\rangle \\
&= \langle [Y,[X,E_i]],E_i\rangle
\end{aligned}$$

Proposição 19. *Seja B a forma de Killing sobre $\mathfrak{g}$. Então $B(X,Y) = B(Ad(g)X, Ad(g)Y)$*

Demonstração. Seja $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ um homomorfismo de álgebras. Observe que

$$\begin{aligned}
ad(f(X)(f(Y)) &= [f(X), f(Y)] \\
&= f([X,Y]) \\
&= f \circ ad(X)Y
\end{aligned}$$

Logo

$$ad(f(X)) = f \circ ad(X) \circ f^{-1}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
B(f(X), f(Y)) &= tr[ad(f(X)) \circ ad(f(Y))] \\
&= tr[f \circ ad(X) \circ f^{-1} \circ f \circ ad(Y) \circ f^{-1}] \\
&= tr[f \circ ad(X) \circ ad(Y) \circ f^{-1}] \\
&= \sum \langle [f(X), f[(Y, f^{-1}(E_i)]], E_i\rangle \\
&= \sum \langle f[X, [(Y, f^{-1}(E_i)]], E_i\rangle \\
&= \sum \langle [X, [(Y, f^{-1}(E_i)]], f(E_i)\rangle \\
&= tr[ad(X) \circ ad(Y)]
\end{aligned}$$

Como Ad(g) é um homomorfismo, segue o resultado. □

Corolário 9. *Seja G um grupo de Lie com uma forma de Killing B não-degenerada e negativa definida. Então -B é uma métrica bi-invariante.*

Com efeito, basta considerar o Lema 7.

Proposição 20. *Um grupo de Lie G com métrica bi-invariante é um espaço simétrico.*

A prova pode ser encontrada em (Petersen, [6]).

Corolário 10. *Sejam G um grupo de Lie e $\alpha : \mathbb{R} \to G$ uma geodésica com $\alpha(0) = e$ e $\alpha'(0) = X$. Então $\alpha(t) = exp(tX)$.*

Demonstração. Para t fixado, considere $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(t+s)$. Note que $\tilde{\alpha}$ é geodésica com $\tilde{\alpha}(0) = \alpha(0)$. Daí,

$$\begin{aligned} I^{\alpha(t)} \circ I^{e}(\alpha(s)) &= I^{\alpha(t)}(\alpha(-s)) \\ &= I^{\alpha(t)}(\tilde{\alpha}(-s-t)) \\ &= \tilde{\alpha}(s+t) \\ &= \alpha(s+t+s) \\ &= \alpha(t+2s) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} I^{\alpha(t)} I^{e}(g) &= I^{\alpha(t)}(g^{-1}) \\ &= \alpha(t) g \alpha(t) \end{aligned}$$

então

$$I^{\alpha(t)} I^{e}(\alpha(t)) = [\alpha(t)]^3 = \alpha(t+2s)$$

Por indução, $\alpha(nt) = [\alpha(t)]^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Com isso, α é um homomorfismo para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{Q}$. De fato, tomando $t_1 = nt$ e $t_2 = mt$ com $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \alpha(t_1 + t_2) &= \alpha(t(n+m)) \\ &= [\alpha(t)]^{n+m} \\ &= [\alpha(t)]^m [\alpha(t)]^n \\ &= \alpha(tm)\alpha(tn) \\ &= \alpha(t_1)\alpha(t_2) \end{aligned}$$

Por continuidade, $\alpha : \mathbb{R} \to G$ é homomorfismo com $\alpha'(0) = X$. Pela unicidade da Definição 27,

$$\alpha(t) = exp(tX)$$

$\square$

Proposição 21. *Seja G um grupo de Lie com forma de Killing B não-degenerada. Então G é compacto se, e somente se, B é negativa definida.*

Demonstração. (⇒) Se G é compacto, então admite métrica bi-invariante e, por isso, ad(X) é anti-simétrica.

Considerando $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ uma base ortogonal de $\mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} B(X,X) &= tr(ad(X) \circ ad(X)) \\ &= \sum \langle ad(X) \circ ad(X)E_i, E_i \rangle \\ &= -\sum \langle ad(X)E_i, ad(X)E_i \rangle \\ &= -\sum ||ad(X)E_i||^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Mas note que se existir $X \neq 0$ tal que $||ad(X)E_i||^2 = 0$ para todo i, então $||ad(X)Y|| = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Em particular, valeria que $||ad(X)X||^2 = 0$, ou seja, $B(X,X) = 0$, absurdo. Logo $B(X,X) < 0$.

(⇐) Seja B negativa definida. Então -B é uma métrica bi-invariante em G. Pelo Corolário 10, $\alpha(t) = exp(tX)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo $(G, -B)$ é uma variedade geodesicamente completa e, por Hopf-Rinow, é uma variedade riemanniana completa.

Como

$$\begin{aligned} Ric(X,X) &= -\frac{1}{4} tr[X, [X, \cdot]] \\ &= -\frac{1}{4} B(X,X) \end{aligned}$$

e como $B(X,X) < 0$,

$$Ric(X,X) > 0$$

Seja

$$\delta = inf\{-B(X,X), |X| = 1\}$$

e considere uma sequência $X_n \in \mathfrak{g}$ tal que $\delta = limB(X_n, X_n)$. Como $X_n \in S^k(1) \in \mathfrak{g}$, e $S^k(1)$ é compacto, existe subsequência $x_{n_j} \in S^k(1)$ tal que $x_{n_j} \to X \in S^k(1)$. Logo

$$-B(X_n, X_n) \to \delta$$

e

$$-B(X_n, X_n) \to -B(X,X)$$

Assim,

$$\delta = -B(X,X) > 0$$

e por Bonnet-Myers segue o resultado. $\square$

Lema 8. *Seja G um grupo de Lie com álgebra $\mathfrak{g}$ e métrica bi-invariante.*
[i] $\mathfrak{g}$ pode ser expresso como soma direta de ideais simples (Definição 9)

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_i \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_n$$

[ii] Se $\tilde{G}$ é um grupo de Lie simplesmente conexo com álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{g}$, então $\tilde{G}$ é isomorfo ao produto de subgrupos de Lie

$$G_1 \times \ldots \times G_n$$

tais que a álgebra de Lie de G_i é g_i. Ainda, se g_i é comutativo então $G_i = \mathbb{R}$. Caso contrário, G_i é compacto.

Demonstração. i) Para provar que $\mathfrak{g}$ é soma direta de ideais simples, basta mostrar que se $\mathfrak{h}$ é ideal, então $\mathfrak{h}^\perp$ também é ideal. Com efeito, se $X \in \mathfrak{h}^\perp, Y \in \mathfrak{g}$ e $Z \in \mathfrak{h}$,

$$\begin{aligned} \langle [X,Y], Z\rangle &= -\langle [Y,X], Z\rangle \\ &= \langle X, [Y,Z]\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

ou seja, $[X,Y] \in \mathfrak{h}^\perp$.

ii) Pelo Teorema 7, dado $\mathfrak{g}_i$, existe um único grupo de Lie G_i com álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{g}_i$. Portanto, $G_1 \times \ldots \times G_n$ é um grupo de Lie simplesmente conexo com álgebra $\mathfrak{g}_i \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$.

Pela unicidade garantida pelo mesmo teorema, $\tilde{G} = G_1 \times \ldots \times G_n$.

Afirmação 3. *Se g_i é comutativo então $G_i = \mathbb{R}$.*

Seja $\mathfrak{g}_i$ simples e comutativo. Considere $X \in \mathfrak{g}_i, X \neq 0$ e

$$\mathbb{R}X = \{\alpha X; \alpha \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}X$ é ideal, pois dados αX e $Y \in \mathfrak{g}_i$,

$$[\alpha X, Y] = \alpha[X,Y] = 0 \in \mathbb{R}X$$

Logo $\mathbb{R}X$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}_i$. Assim, $0 \neq \mathbb{R}X \subseteq \mathfrak{g}_i$ e como $\mathfrak{g}_i$ é ideal simples, $\mathfrak{g}_i = \mathbb{R}X$.

Como G_i é simplesmente conexo, $G_i \simeq \mathbb{R}$.

Afirmação 4. *Se g_i é não-comutativo então G_i é compacto.*

Considere a forma de Killing para $X \in \mathfrak{g}_i$

$$\begin{aligned} B(X,X) &= tr(ad(X) \circ ad(X)) \\ &= \sum ||ad(X)E_i||^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Observe que $||ad(X)E_i||^2 \neq 0$ para algum i. De fato, suponhamos que exista $X_0 \in \mathfrak{g}_i$ tal que $[X_0, Y] = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}_i$. Feito isso, defina

$$\mathbb{R}X = \{\alpha X_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

e perceba que $\mathbb{R}X$ é um ideal comutativo, pois se $X \in \mathbb{R}X$ e $Y \in G$

$$[X,Y] = [\alpha X_0, Y] = \alpha[X_0, Y] = 0 \in \mathbb{R}X$$

Como $\mathfrak{g}_i$ é não-comutativo, $\mathbb{R}X \neq \mathfrak{g}_i$. Com isso, $\mathbb{R}X \subseteq \mathfrak{g}_i$ é ideal não trivial. Absurdo, pois $\mathfrak{g}_i$ é simples.

Portanto, para todo $X_0 \in \mathfrak{g}_i$, existe $Y \in \mathfrak{g}_i$ tal que $[X_0, Y] \neq 0$. Logo, $||ad(X)E_i||^2 \neq 0$ para algum E_i, caso contrário $[X,Y] = 0$ para todo Y.

Então, a forma de Killing de G_i é negativa definida e, pela Proposição 21, G_i é compacto. □

Lema 9. *Seja G um grupo de Lie simplesmente conexo com métrica invariante à esquerda e curvatura zero. Então então todo subgrupo compacto de G é trivial.*

Demonstração. Um Grupo de Lie simplesmente conexo com métrica invariante à esquerda e curvatura zero é isométrico ao $\mathbb{R}^n$ pelo Teorema 4. Segue de (Milnor, [?]), que todo subgrupo compacto de G é trivial. □

Vejamos o teorema de decomposição que classifica os grupos de Lie com métrica invariante à esquerda e curvatura zero.

Teorema 16. *Um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda tem curvatura zero se, e somente se, sua álgebra se decompõe em uma soma direta ortogonal $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{b}$, com $\mathfrak{b}$ uma subálgebra comutativa de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{u}$ um ideal comutativo e $ad(b)$ é anti-simétrico para todo $b \in \mathfrak{b}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$)

Vejamos como construir o ideal $\mathfrak{u}$.

Inicialmente, note que dados $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} 0 &= X\langle Z, Y\rangle \\ &= \langle \nabla_X Z, Y\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \nabla_X Z, Y\rangle = -\langle Z, \nabla_X Y\rangle$$

ou seja, ∇_X é anti-simétrica.

Com isso, considere a função

$$\begin{array}{rcl} f : \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{o}(n) \subset \mathfrak{g} \\ X & \mapsto & \nabla_X \end{array}$$

lembrando que $\mathfrak{o}(n)$ foi visto no Exemplo 6.

É fácil notar que f é linear. Além disso, note que é um homomorfismo de álgebras, pois como a curvatura é nula,

$$0 = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} \nabla_{[X,Y]} & = & \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X \\ & = & [\nabla_X, \nabla_Y] \end{array}$$

Pela Proposição 9, o núcleo $\mathfrak{u}$ do homomorfismo f é um ideal.

Note que $\mathfrak{u}$ é comutativo, pois para todo $X, Y \in \mathfrak{u}$

$$[X, Y] = \underbrace{\nabla_X}_{0} Y + \underbrace{\nabla_Y}_{0} X = 0$$

Considere $\mathfrak{b}$ o complemento ortogonal de $\mathfrak{u}$. Afirmamos que dados $X, Y \in \mathfrak{b}$, então $[X, Y] \in \mathfrak{b}$.

Para tanto, considere $U \in \mathfrak{u}$.

$$\begin{array}{c} \langle X, U\rangle = 0 \\ \langle Y, U\rangle = 0 \end{array}$$

Daí,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & Y\langle X, U\rangle = \langle \nabla_Y X, U\rangle + \langle \nabla_Y U, X\rangle \\ 0 & = & X\langle Y, U\rangle = \langle \nabla_X Y, U\rangle + \langle Y, \nabla_X U\rangle \end{array}$$

Subtraindo as igualdades,

$$0 = \langle [X, Y], U\rangle + \langle \nabla_Y U, X\rangle - \langle Y, \nabla_X U\rangle$$

Mas

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_Y U, X\rangle - \langle Y, \nabla_X U\rangle &= \langle [U,Y] + \nabla_U Y, X\rangle - \langle Y, [U,X] + \nabla_U X\rangle \\
&= \langle [U,Y], X\rangle + \langle \nabla_U Y, X\rangle - \langle Y, [U,X]\rangle - \langle Y, \nabla_U X\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo, para $U \in \mathfrak{u}$,

$$\langle [X,Y], U\rangle = 0$$

o que implica $[X,Y] \in \mathfrak{b}$.

Para verificar que $\mathfrak{b}$ é uma subálgebra comutativa, note que $\mathfrak{b}$ é isomorfo a uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{o}(n)$. Como $\mathfrak{o}(n)$ é a álgebra de Lie do grupo compacto $O(n)$, pela Proposição 17, $\mathfrak{o}(n)$ admite métrica bi-invariante. Como consequência, $\mathfrak{b}$ possui métrica bi-invariante $\langle\langle , \rangle\rangle$ (em princípio essa métrica não é a mesma invariante pela esquerda dada inicialmente).

Pela Proposição 16, $ad(b)$ é anti-simétrica para todo $b \in \mathfrak{b}$.

Pelo Lema 8 $\mathfrak{b}$ pode ser escrito como soma direta de ideais simples.

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{b}_k$$

Se algum dos $\mathfrak{b}_i$ for não-comutativo, pelo mesmo Lema 8, o correspondente grupo de Lie B_i é compacto.

Assim a inclusão $\mathfrak{b}_i \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ induz um homomorfismo não-trivial $B_i \to G$. Logo G possui um subgrupo compacto-não trivial. Absurdo pelo Lema 9,

Portanto, cada $\mathfrak{b}_i$ é comutativo, e como $\mathfrak{b}_i$ é ideal, $\mathfrak{b}$ é comutativo.

$(\Leftarrow)$

Seja G um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda tal que álgebra se decompõe como $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}$, com $\mathfrak{b}$ uma subálgebra comutativa, $\mathfrak{u}$ um ideal comutativo e ad(Z) anti-simétriva para todo $Z \in \mathfrak{b}$. Afirmamos que curvatura é de G nula.

Para tanto, sejam $A \in \mathfrak{g}$, X, Y $\in \mathfrak{u}$ e Z, W $\in \mathfrak{b}$. Vejamos todas as possibilidades de combinações desses campos em (3.4).

i)

$$\begin{aligned}
2\langle \nabla_Z W, A\rangle &= \langle \underbrace{[Z,W]}_{=0}, A\rangle - \langle [A,Z], W\rangle + \langle [A,W], Z\rangle \\
&= \langle [A,Z], W\rangle - \langle [A,Z], W\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

ii)

$$2\langle \nabla_Z X, W\rangle = \langle \underbrace{[Z,X]}_{\in \mathfrak{u}}, W\rangle - \langle \underbrace{[W,Z]}_{=0}, X\rangle + \langle \underbrace{[W,X]}_{\in \mathfrak{u}}, Z\rangle = 0$$

iii)

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_Z X, Y\rangle &= \langle [Z,X],Y\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle + \langle \underbrace{[Y,X]}_{=0}, Z\rangle \\ &= \langle [Z,X],Y\rangle - \langle [Z,Y],X\rangle \\ &= \langle [Z,X],Y\rangle + \langle [Z,X],Y\rangle \\ &= 2\langle [Z,X],Y\rangle \end{aligned}$$

Nesse caso, portanto, $\nabla_Z = \text{ad(Z)}$

iv)

$$2\langle \nabla_X Y, A\rangle = \langle \underbrace{[X,Y]}_{=0}, A\rangle + \langle \underbrace{[A,X]}_{=0}, Y\rangle + \langle \underbrace{[A,Y]}_{=0}, X\rangle \ = 0$$

v)

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Z, A\rangle &= \langle \underbrace{[X,Z]}_{=0}, A\rangle + \langle \underbrace{[A,X]}_{=0}, Z\rangle + \langle [A,Z],X\rangle \\ &= -\langle [Z,A],X\rangle \\ &= \langle [Z,X],A\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, $\nabla_X = 0$.

Substituindo todas as possibilidades em (8), obtemos

i)

$$\begin{aligned} R(X,Y) &= \underbrace{\nabla_Y}_{=0} \nabla_X - \underbrace{\nabla_X}_{=0} \nabla_Y + \nabla_{\underbrace{[X,Y]}_{=0}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} R(X,Z) &= \nabla_Z \underbrace{\nabla_X}_{=0} - \underbrace{\nabla_X}_{=0} \nabla_Z + \nabla_{\underbrace{[X,Z]}_{=0}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} R(Z,W)A &= \nabla_W \nabla_Z A - \nabla_Z \nabla_W A + \nabla_{[Z,W]} A \\ &= \nabla_W ad(Z)(A) - \nabla_Z ad(W)(A) + ad([Z,W])(A) \\ &= ad(W)([Z,A]) - ad(Z)[(W,A]) + [[Z,W],A] \\ &= [W,[Z,A]] - [Z,[W,A]] + [A,[Z,W]] \\ &= -[[Z,A],W] + [W,[A,Z]] + [[Z,W],A] \\ &= [[A,Z],W] + [W,[A,Z]] + [[Z,W],A] \\ &= 0 \end{aligned}$$

em que a última igualdade deve-se à Identidade de Jacobi.

$\square$

Exemplo 8. *Existem grupos de Lie com métrica invariante à esquerda e com curvatura zero que não são comutativos. O exemplo mais simples é $E(2)$, visto no Exemplo 7.*

Bibliografia

Milnor J. Milnor, *Curvatures of left invariant metrics on Lie Groups*. Advances in Math. 21 (1976)

[0] [1] M. do Carmo, *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides (2005)

[2] Marcos Alexandrino, Renato Bettiol, *Introduction to Lie Groups, Adjoint Action and its Generalizations*. Ufscar (2009)

[3] Alexandre Rodrigues, *Introdução à Teoria dos Grupos de Lie*. IMPA(1967)

[4] Wallach, *Compact Homogeneous Riemannian Manifolds with Strictly Positive Curvature*. Ann. Math. 96 (1972)

[5] John Price, *Lie Groups and Compact Groups*. Cambridge University Press (1977)

[6] Peter Petersen, *Riemannian Geometry*. Springer (2008)