

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

# Decaimentos de Mésons $\phi$ e $J/\psi$ no Modelo $C^3P_0$ \*

Joseima Neves de Quadros

Tese realizada sob orientação do Professor Dr. Dimiter Hadjimichef (IF-UFRGS) e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Porto Alegre  
2012

---

\* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

# Resumo

O modelo  $C^3P_0$  foi desenvolvido através do Formalismo de Fock-Tani, o qual trata de problemas envolvendo partículas compostas e seus constituintes.

Os operadores de criação e destruição de partículas compostas não obedecem relações de (anti)comutação canônicas devido à presença da estrutura interna. Após realizar a transformação unitária de Fock-Tani  $U$  sobre estes operadores, novos operadores ideais são obtidos de forma iterativa. Os operadores ideais contêm uma expansão em potências da função de onda e obedecem as relações de (anti)comutação canônicas. Com eles torna-se possível construir quantidades efetivas em termos das quantidades fundamentais. Uma destas quantidades efetivas importantes que podem ser construídas é o Hamiltoniano  $H_{efetivo} = U^{-1}HU$  que passa a conter a informação sobre a estrutura interna.  $H_{efetivo}$  possui, entre outras estruturas, diagramas correspondendo a espalhamentos hadrônicos com troca de constituintes, decaimentos hadrônicos, etc.

A partir do Hamiltoniano de decaimento mesônico modificado pela transformação de Fock-Tani é que obtem-se o Hamiltoniano do modelo  $C^3P_0$ ,  $H^{C^3P_0}$ . Com ele é possível encontrar amplitudes de decaimento e posteriormente taxas de decaimento.

Nesta tese de doutorado, consideramos quarkônios estranhos com misturas do tipo  $c_1 [u\bar{u} + d\bar{d}] + c_2 s\bar{s}$ . Calculamos as taxas de decaimento para os mésons  $\phi(1020)$ ,  $\phi(1680)$ ,  $\phi_3(1850)$  e para os ainda não observados experimentalmente  $\phi(2050)$ ,  $\phi_1(1850)$  e  $\phi_2(1850)$ , no contexto do modelo  $C^3P_0$ , e determinamos os coeficientes  $c_1$  e  $c_2$ .

Um outro estudo que realizamos foi com os mésons  $J/\psi$ , onde consideramos que eles são formados pela mistura  $c'_1 [u\bar{u} + d\bar{d}] + c'_2 s\bar{s} + c'_3 c\bar{c}$ . Considerar  $J/\psi$  dado por misturas é proveniente de estudos que tentam solucionar o “enigma  $\rho\pi$ ”. Novamente, com o auxílio do modelo  $C^3P_0$ , encontramos as taxas de decaimento.

# Abstract

The  $C^3P_0$  model was developed using the Fock-Tani formalism, which deals with problems involving composite particles and their constituents.

The creation and annihilation operators of composite particles do not obey canonical (anti) commutation relations, due to the presence of the internal structure. After performing the Fock-Tani unitary transformation  $U$  of these operators, new ideal operators are obtained iteratively. These operators contain an expansion in powers of the wave function and obey the canonical (anti) commutation relations. It is possible to construct effective quantities in accordance with the fundamental ones. One of these important effective quantities that can be built is the Hamiltonian  $H_{effective} = U^{-1}HU$  that will contain the information about the internal structure.  $H_{effective}$  has, among other structures, diagrams corresponding to exchange scattering with hadronic constituents, hadronic decays, etc..

From the meson decay Hamiltonian, modified by the Fock-Tani transformation, we obtain the Hamiltonian of the  $C^3P_0$  model,  $H^{C^3P_0}$ . With  $H^{C^3P_0}$  one can find decay amplitudes and subsequently decay rates.

In this thesis, we consider strange quarkonia mixtures of type  $c_1 [u\bar{u} + d\bar{d}] + c_2 s\bar{s}$ . We calculate the decay rates for the mesons  $\phi(1020)$ ,  $\phi(1680)$ ,  $\phi_3(1850)$  and  $\phi(2050)$ ,  $\phi_1(1850)$  and  $\phi_2(1850)$ , the not yet observed experimentally, in the context of  $C^3P_0$  model, and determine the coefficients  $c_1$  and  $c_2$ .

Another study was conducted with  $J/\psi$  mesons, where we consider that they are formed by mixing  $c'_1 [u\bar{u} + d\bar{d}] + c'_2 s\bar{s} + c'_3 c\bar{c}$ . To consider  $J/\psi$  given by mixtures comes from studies that attempt to solve the “ $\rho\pi$  puzzle”. Again, with the aid of  $C^3P_0$  model, we find the decay rates.

# Índice

<b>1. Introdução</b>	1
1.1 Modelo de Quarks	2
1.2 Mésons e seus Números Quânticos	4
1.3 Regra de Okubo-Zweig-Iizuka	5
1.4 Estranhônios	7
1.5 Charmônios	9
<b>2. Formalismo de Fock-Tani para Mésons</b>	14
2.1 O Formalismo de Fock-Tani	14
2.1.1 Espaço de Vetores de Estados Ideais	17
2.1.2 Representação de Mésons Elementares Ideais	19
2.2 A Transformação de Fock-Tani dos Operadores.	20
2.2.1 O Método Iterativo das “Equações de Movimento”	21
<b>3. Modelos de Decaimento de Mésons</b>	27
3.1 Modelo de Decaimento ${}^3P_0$	27
3.2 O modelo $C^3P_0$	30
<b>4. Decaimentos de Mésons <math>\phi</math></b>	37
4.1 Amplitudes de Decaimento	37
4.2 Resultados Numéricos das Taxas de Decaimento	44
4.3 Conclusão	54
<b>5. Decaimentos de Mésons <math>J/\psi</math></b>	55
5.1 Amplitudes de Decaimento	55
5.2 Resultados Numéricos das Taxas de Decaimento	57
5.3 Conclusão	62
<b>6. Conclusões e Perspectivas</b>	63
<b>A. Hamiltoniano de Decaimento Mesônico</b>	67

---

B. Resultados Algébricos das Amplitudes de Decaimento dos Mésons $\phi$ . . .	70
C. Resultados Algébricos das Amplitudes de Decaimento dos Mésons $J/\psi$ .	87
Referências . . . . .	90

## Capítulo 1

# Introdução

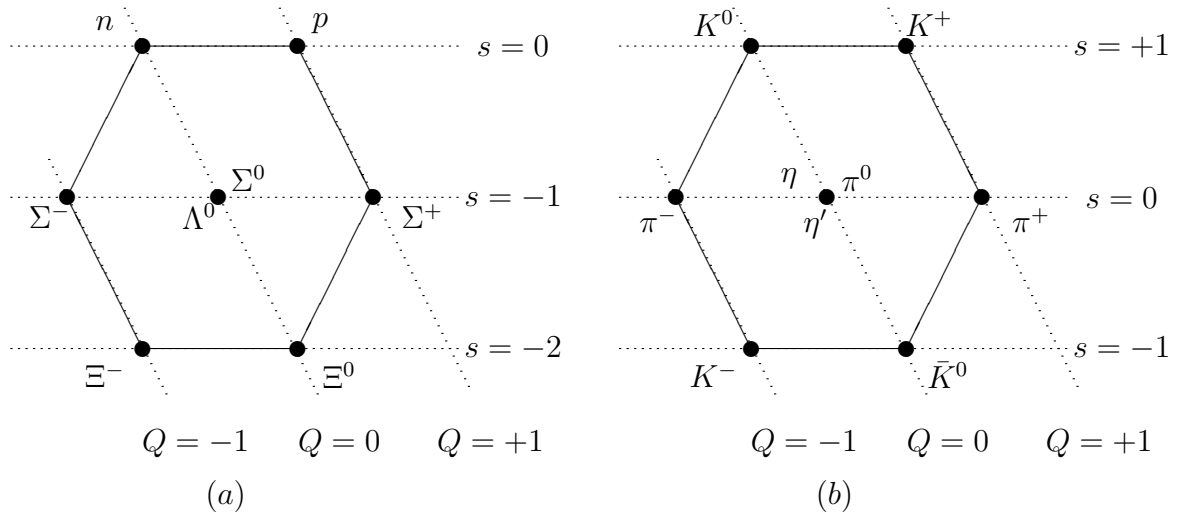
Na década de 30, os físicos acreditavam que o problema da estrutura básica da matéria estava muito próximo de ser resolvido. As partículas conhecidas ou postuladas na época eram: o elétron, o próton, o nêutron, o fóton, o neutrino e o pósitron. Essas partículas eram consideradas os constituintes fundamentais da matéria. Porém, os cientistas não eram capazes de responder porque os prótons, que se repelem fortemente uns aos outros devido a suas cargas de mesmo sinal, permaneciam muito próximos entre si dentro de um núcleo coeso. Foi na tentativa de explicar a natureza da força nuclear que, em 1935, Hideki Yukawa propôs a existência de uma nova partícula: o pión [1].

Com o propósito de verificar as previsões de Yukawa, os físicos começaram uma busca experimental. Em 1947, Cesar Lattes, Cecil Powell e Guisepe Occhialini obtiveram as primeiras medidas do pión ao estudarem os raios cósmicos que entravam na atmosfera da Terra. No ano seguinte, em 1948, Lattes e Gardner detectaram os primeiros píons nêutros. A medida foi feita no Laboratório de Radiações de Berkeley, onde estava em funcionamento um acelerador de partículas. Essa descoberta inaugurou a era dos grandes aceleradores, que surgiram em busca de novas partículas [2]-[3].

O número de partículas conhecidas na década de 50 era extraordinário, que os físicos passaram a classificá-las em dois grandes grupos: os hádrons e os léptons. Os léptons (como, por exemplo, o elétron e o neutrino) passam a ser considerados como realmente elementares, pois ocorrem em um número limitado de tipos, não apresentam tamanho mensurável e não parecem dividir-se em estruturas menores, o que não ocorre com os hádrons. Estes, por sua vez, são subdivididos em mésons e bárions. Os mésons são hádrons com spin inteiro, como o pión. Os bárions possuem spin fracionário, como o próton e nêutron.

Foi na busca por padrões nas partículas que, em 1961, Murray Gell-Mann e Yuval Ne'eman propuseram um esquema de classificação e ordenamento dos bárions e mésons conhecidos na natureza, denominado de *Eightfold Way* (Via Óctupla) [4]-[5]. A Fig. 1.1a mostra o método para os oito bárions de spin  $1/2$ . O padrão surge ao fazer o gráfico da estranheza em função da carga, usando um eixo oblíquo para a carga. Seis dos oito bárions

formam um hexágono, com os dois restantes no centro da figura. A Fig. 1.1b mostra o método para os nove mésons de spin 0. Fazendo o gráfico da estranheza em função da carga, usando novamente um eixo oblíquo para a carga, também surge um hexágono.



**Fig. 1.1:** Via Óctupla para: (a) os oito bárions de spin 1/2 e (b) os nove mésons de spin 0. As partículas estão representadas em um gráfico da estranheza (eixo horizontal) em função da carga (eixo oblíquo).

Além dos dois padrões representados pela Fig. 1.1, existem outros nos quais os mésons e bárions podem ser agrupados.

A Via Óctupla para a física de partículas tem a mesma importância que a tabela periódica para a química. Assim como a tabela periódica sugere que os átomos dos elementos não são partículas fundamentais, os padrões da Via Óctupla indicam que os hádrons devem possuir uma estrutura interna que é responsável pela regularidade de suas propriedades.

O grande número de hádrons e o fato que muitos deles decaem em outros hádrons também sugerem que os mésons e bárions possuem estrutura interna. Para descrever essa estrutura foi que surgiu o *modelo de quarks*.

## 1.1 Modelo de Quarks

Em 1963, Murray Gell-Mann e George Zweig [6] propuseram, independentemente, um modelo onde todos os hádrons são sistemas compostos de duas ou três partículas elementares, que Gell-Mann chamou de *quarks*. No modelo original havia três tipos de quarks, conhecidos como *sabores*: *up* (para cima), *down* (para baixo) e *strange* (estranho). Com símbolos *u*, *d*

e  $s$ , respectivamente. Todos com carga elétrica  $e$  fracionária, spin  $1/2$  e número bariônico  $1/3$ . O quark  $s$  com estranheza  $-1$  e os outros dois com estranheza  $0$ . Associado com cada quark existe um antiquark de carga, número bariônico e estranheza opostos. Essas e outras propriedades dos quarks e dos antiquarks são apresentadas na Tabela 1.1.

Sabor	Spin S	Carga Q	Nº Bariô- nico B	Estranheza s	Charm	Bottomness	Topness
<b>Quarks</b>							
$u$ (up)	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
$d$ (down)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
$s$ (strange)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-1$	0	0	0
$c$ (charm)	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$+1$	0	0
$b$ (bottom)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-1$	0
$t$ (top)	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$+1$
<b>Antiquarks</b>							
$\bar{u}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0
$\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0
$\bar{s}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+1$	0	0	0
$\bar{c}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-1$	0	0
$\bar{b}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$+1$	0
$\bar{t}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$-1$

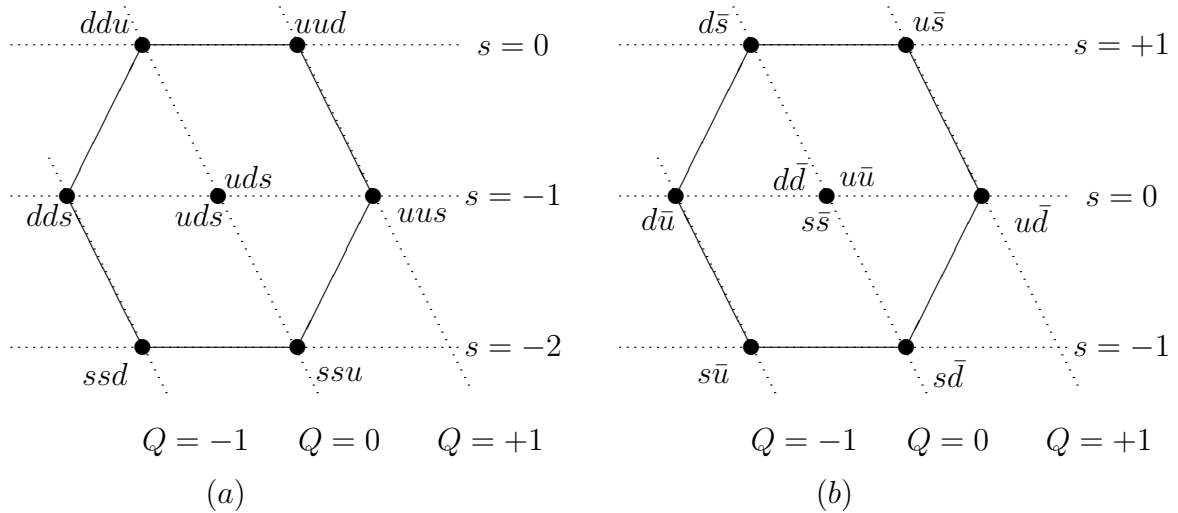
**Tab. 1.1:** Alguns números quânticos dos quarks e antiquarks.

O modelo especifica a composição dos hádrons (mésons e bárions), sendo possível identificar seus números quânticos através dos quarks constituintes, como vemos a seguir:

- **Bárions:** são combinações de três quarks. Possuem, portanto, número bariônico  $B = +1$  e spin fracionário ( $1/2$  ou  $3/2$ ). A Figura 1.2a mostra os bárions em termos de quarks, cujas propriedades aparecem na Fig. 1.1a. Como exemplo temos o próton que é composto pelos quarks  $uud$ .
- **Mésons:** são combinações de um quark e um antiquark. Logo possuem número bariônico  $B = 0$  e spin inteiro ( $0$  ou  $1$ ). A Figura 1.2b mostra os mésons em termos de quarks, cujas propriedades aparecem na Fig. 1.1b.

Os diferentes tipos (sabores) de quarks hoje conhecidos são:  $up$  (u),  $down$  (d),  $strange$  (s-estranho),  $charm$  (c-charme),  $bottom$  (b) e  $top$  (t). A Tabela 1.1 mostra alguns números





**Fig. 1.2:** (a) Via Óctupla com a composição de quarks para os oito bárions de spin 1/2 da Fig. 1.1a. Os dois bárions do centro da figura são formados pelos mesmos quarks, sendo o sigma um estado excitado do lambda. (b) Composição de quarks para os nove mésons de spin 0 da Fig. 1.1b. Os três mésons do centro são compostos por misturas dos quarks centrais.

quânticos dos quarks e antiquarks. Os quarks  $u$  e  $d$  compõe a matéria ordinária (formada por prótons e nêutrons), enquanto os outros quarks compõem uma enorme quantidade de outras partículas de vida curta encontradas nos raios cósmicos ou produzidas em reações de alta energia.

## 1.2 Mésons e seus Números Quânticos

Com a consolidação do modelo de quarks constituintes, tornou-se possível estudar a estrutura hadrônica. O estudo da chamada *espectroscopia mesônica* parte da identificação dos números quânticos relevantes dos mésons, considerados como partículas compostas por quarks constituintes.

Os quarks possuem spin  $S$  igual a  $1/2$  e número bariônico  $B$  igual a  $1/3$ ; os *antiquarks*, por sua vez, têm spin  $1/2$ , porém o seu número bariônico é  $-1/3$ . Desta forma os quarks e *antiquarks* podem se combinar para formar os chamados *mésons convencionais* (com  $B = 0$ ) e spin total 1 ou 0. O momento angular total  $\vec{J}$  é obtido obedecendo às regras usuais de soma de momento angular da Mecânica Quântica,  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ .

As relações básicas para mésons podem ser resumidas como

- **Momento angular Total:**  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  ;
- **Paridade:**  $P = (-1)^{L+1}$  ;
- **Conjugação de carga:**  $C = (-1)^{L+S}$  ;
- **Paridade-G:**  $G = (-1)^{L+S+I}$  ;

onde  $I$  é o isospin.

Estes operadores geram números quânticos que são importantes, pois representam quantidades conservadas em processos que envolvem a interação forte. Utilizando estas relações podemos construir os valores admissíveis da grandeza  $J^{PC}$ , pelo modelo de quarks, para os mésons:

$$0^{-+}, 0^{++}, 1^{--}, 1^{+-}, 1^{++}, 2^{--}, 2^{-+}, 2^{++}, 3^{--}, 3^{+-}, 3^{++}, \dots \quad (1.1)$$

Nota-se que há uma seqüência de valores de  $J^{PC}$  que não são admissíveis em um sistema do tipo  $q\bar{q}$

$$0^{--}, 0^{+-}, 1^{-+}, 2^{+-}, 3^{-+}, \dots \quad (1.2)$$

Mésons com estes números quânticos são chamados de mésons exóticos e são candidatos a ter um sistema diferente do tipo  $q\bar{q}$ . A Cromodinâmica Quântica, teoria que descreve a interação de quarks e glúons no interior dos hádrons, prevê a existência dos mésons exóticos chamados de *glueballs* (formados exclusivamente por glúons) e de mésons híbridos (formados por quarks, antiquarks e glúons). De um modo geral, pode-se escrever um méson como

$$|\text{méson}\rangle = |q\bar{q}\rangle + |\text{não-}q\bar{q}\rangle. \quad (1.3)$$

Podem existir, também, mésons exóticos com números quânticos iguais aos dos mésons  $q\bar{q}$ .

Experimentos com aceleradores de partículas de altas energias continuam descobrindo novos hádrons. Por este motivo, a física hadrônica teórica permanece criando novos modelos para descrever estas partículas.

### 1.3 Regra de Okubo-Zweig-Iizuka

Os decaimentos hadrônicos, segundo a *regra de Okubo-Zweig-Iizuka* [7]-[11], podem ser de dois tipos: OZI-permitidos ou OZI-proibidos. Um processo é dito ser OZI-permitido quando um diagrama de linha de quarks possui as linhas contínuas, Fig. 1.3. Caso contrário, quando o diagrama pode ser dividido em partes e estas partes conter apenas hádrons completos (singletos de cor), diz-se que o processo é OZI-proibido, Fig. 1.4. Os processos OZI-permitidos representam os principais canais de decaimento. Enquanto os OZI-proibidos são fortemente suprimidos, embora possam ser observados.

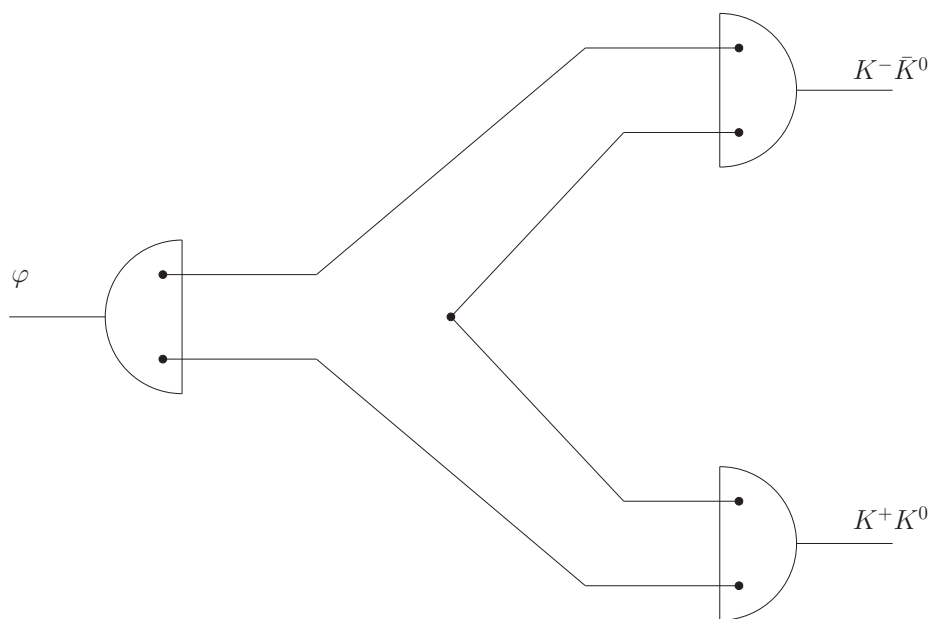


Fig. 1.3: Um processo OZI-permitido, exemplo:  $\phi \rightarrow K \bar{K}$

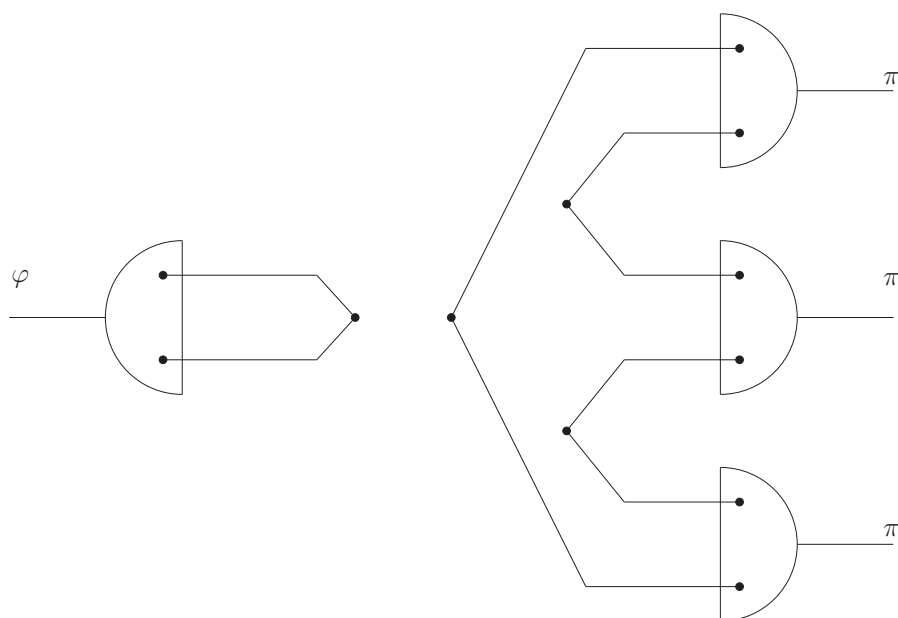


Fig. 1.4: Um processo OZI-proibido, exemplo:  $\phi \rightarrow \pi \pi \pi$

## 1.4 Estranhônios

O estudo dos estranhônios (mésons compostos por quarks  $s\bar{s}$ ) deve entrar numa nova era com o advento do experimento de fotoprodução GlueX, no *Thomas Jefferson National Accelerator Facility* (Jefferson Lab), Estados Unidos. No experimento, previsto para entrar em funcionamento em 2014, os elétrons vindos do acelerador CEBAF (Continuous Electron Beam Accelerator Facility) a uma energia de 12 GeV produzirão feixes de fótons linearmente polarizados com energia de 9 GeV. Nas interações com hádrons, um feixe de fótons pode ser considerado como uma sobreposição de mésons vetoriais, contendo um importante componente  $s\bar{s}$ . Portanto, os estudos de estados finais estranhos, em GlueX, deve levar a um aumento considerável no nosso conhecimento do espectro  $s\bar{s}$ .

A estrutura hadrônica representada pela chamada Via Óctupla revelou a existência da simetria SU(3). Nesta descrição, os mésons são caracterizados por seu conteúdo de sabor e pelos seus números quânticos  $J^{PC}$  (onde  $J$  é o momento angular total,  $P$  a paridade e  $C$  a conjugação de carga), sendo agrupados em multipletos. Por exemplo, no chamado *setor de mésons leves* os números quânticos dos mésons pseudo-escalares são  $J^{PC} = 0^{-+}$ . Utilizando a notação espectroscópica, originada na Física atômica, temos  $n^{2s+1}L_J = 1^1S_0$  (onde  $n$  é o número quântico principal,  $s$  o spin e  $L$  o momento angular). Segundo a simetria SU(3), há nove possibilidades de combinar quarks e anti-quarks mais leves  $u$ ,  $d$  e  $s$ . Estas nove possibilidades estão agrupadas numa estrutura de octeto e outra de singleto. Os seguintes estados podem ser construídos:

$$\begin{aligned}
|K^0\rangle &= -|d\bar{s}\rangle & |K^+\rangle &= -|u\bar{s}\rangle \\
|\pi^-\rangle &= |d\bar{u}\rangle & |\pi^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) & |\pi^+\rangle &= -|u\bar{d}\rangle \\
|K^-\rangle &= |s\bar{u}\rangle & |\bar{K}^0\rangle &= -|s\bar{d}\rangle \\
|\psi_8\rangle &= \sqrt{\frac{1}{6}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle) & |\psi_1\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle)
\end{aligned} \tag{1.4}$$

O estado de octeto e de singleto são auto-estados do SU(3). Eles possuem os mesmos números quânticos e podem ser misturados. O ângulo de mistura é chamado de *ângulo pseudo-escalar*  $\theta_P$ , sendo que os estados físicos resultantes desta mistura de  $\psi_1$  e  $\psi_8$  são os mésons  $\eta$  e  $\eta'$  dados por

$$\begin{aligned}
|\eta\rangle &= \cos\theta_P|\psi_8\rangle - \text{sen}\theta_P|\psi_1\rangle \\
|\eta'\rangle &= \text{sen}\theta_P|\psi_8\rangle + \cos\theta_P|\psi_1\rangle.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Os estados em (1.5) podem ser reescritos como

$$\begin{aligned} |\eta\rangle &= \left[ \frac{\cos\theta_P}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\text{sen}\theta_P \right] |n\bar{n}\rangle - \left[ \sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta_P + \frac{\text{sen}\theta_P}{\sqrt{3}} \right] |s\bar{s}\rangle \\ |\eta'\rangle &= \left[ \sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta_P + \frac{\text{sen}\theta_P}{\sqrt{3}} \right] |n\bar{n}\rangle + \left[ \frac{\cos\theta_P}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\text{sen}\theta_P \right] |s\bar{s}\rangle \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde

$$|n\bar{n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle ] \quad (1.7)$$

O valor do ângulo  $\theta_P$  pode ser medido pela comparação das larguras parciais de decaimentos radiativos do méson  $J/\psi$  em um méson vetorial e um pseudo-escalar; pelo decaimento radiativo do méson  $\phi(1020)$  num par  $\eta$  e  $\eta'$ ; ou pela aniquilação  $p\bar{p}$  resultando num par de mésons vetorial e escalar ou em dois pseudo-escalares [12]. O valor de  $\theta_P$  encontra-se na faixa de  $-10^\circ$  a  $-20^\circ$ . A grande mistura entre as componentes  $|n\bar{n}\rangle$  e  $|s\bar{s}\rangle$  nas funções de onda de  $\eta$  e  $\eta'$ , tem levado a considerar que estes mésons têm um conteúdo de glúon considerável. Portanto a mistura descrita em (1.6) precisaria ser ampliada para incluir um terceiro estado  $|G\rangle$ , de glueball, e de massa desconhecida.

Os mésons vetoriais, com  $J^{PC} = 1^{--}$ , são um outro exemplo do esquema de classificação com a estrutura de noneto. Semelhante ao caso dos mésons  $\eta$  e  $\eta'$ , agora as misturas de  $\psi_1$  e  $\psi_8$  dão origem aos mésons vetoriais  $\phi(1020)$  e  $\omega(782)$  com ângulo de mistura vetorial  $\theta_V$ :

$$\begin{aligned} |\phi(1020)\rangle &= \cos\theta_V |\psi_8\rangle - \text{sen}\theta_V |\psi_1\rangle \\ |\omega(782)\rangle &= \text{sen}\theta_V |\psi_8\rangle + \cos\theta_V |\psi_1\rangle. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Estes estados em (1.8) também podem ser escritos da seguinte forma

$$\begin{aligned} |\phi(1020)\rangle &= \left[ \frac{\cos\theta_V}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\text{sen}\theta_V \right] |n\bar{n}\rangle - \left[ \sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta_V + \frac{\text{sen}\theta_V}{\sqrt{3}} \right] |s\bar{s}\rangle \\ |\omega(782)\rangle &= \left[ \sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta_V + \frac{\text{sen}\theta_V}{\sqrt{3}} \right] |n\bar{n}\rangle + \left[ \frac{\cos\theta_V}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\text{sen}\theta_V \right] |s\bar{s}\rangle \end{aligned} \quad (1.9)$$

O méson  $\omega$  é um dos responsáveis pela repulsão de curto alcance da interação  $NN$  (nucleon-nucleon). Logo, está bem estabelecido experimentalmente [13], em baixas energias, como um estado

$$|\omega(782)\rangle \approx |n\bar{n}\rangle \quad (1.10)$$

Portanto, em (1.9) o termo  $|s\bar{s}\rangle$  do  $\omega$  deve ser nulo e isto implica que o coeficiente deste termo fica

$$\frac{\cos\theta_V}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\text{sen}\theta_V = 0, \quad (1.11)$$

ou seja,

$$\tan \theta_V = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \theta_V = 35,3^\circ. \quad (1.12)$$

Para este mesmo ângulo  $\theta_V$ , tem-se

$$|\phi(1020)\rangle \approx |s\bar{s}\rangle, \quad (1.13)$$

possibilitando interpretar  $\phi(1020)$ , em baixas energias, como um candidato a *estranhônio*.

## 1.5 Charmônios

Assim como os estranhônios, o estudo dos charmônios (mésons compostos por quarks  $c\bar{c}$ ) também deve entrar numa nova era. Muitos dos novos estados charmônios observados pelos laboratórios Belle, BaBar, CLEO e no detector BESII têm levado a novas especulações sobre espectroscopia charmônia e novos mecanismos de produção [14, 15].

Historicamente, uma das motivações para estudar misturas de quarks leves aos charmônios está relacionada ao *problema*  $\rho\pi$ . Os decaimentos OZI proibidos de  $J/\psi$  e  $\psi'$  ocorrem via três glúons ou um fóton. Para ambos os casos, a *Cromodinâmica Quântica perturbativa* (pQCD) fornece a relação

$$Q_h = \frac{\mathcal{B}_{\psi' \rightarrow h}}{\mathcal{B}_{J/\psi \rightarrow h}} = \frac{\mathcal{B}_{\psi' \rightarrow e^+e^-}}{\mathcal{B}_{J/\psi \rightarrow e^+e^-}} \approx 0.127, \quad (1.14)$$

onde  $\mathcal{B}$  é o *branching ratio* e  $h$  indica um dado canal hadrônico. Para  $h = \rho\pi$  esta relação não é satisfeita experimentalmente, como pode ser evidenciado no Particle Data Group [12]. Enquanto o branching ratio de  $\psi \rightarrow \rho\pi$  é muito pequeno,  $J/\psi \rightarrow \rho\pi$  tem o maior *branching ratio* de todos os decaimentos de  $J/\psi$  em dois hádrons. Este fato, que leva a violação da Eq. (1.14), é chamado de “ $\rho\pi$  puzzle” [16]-[22]. Outros canais PV (pseudoscalar-vetor) possuem comportamento similar.

Muitos trabalhos teóricos sobre este enigma têm sido formulados ao longo dos anos. Os mecanismos propostos são muito variados como, por exemplo: mistura  $J/\psi$ -glueball [19], mésons leves com componentes de charme intrínseco [18], mistura de mésons vetores [20], entre outros. Um destes trabalhos, desenvolvido por T. Feldmann e colaboradores [22], considera que os mésons  $J/\psi$ ,  $\phi$  e  $\omega$  são dados pela mistura  $n\bar{n}-s\bar{s}-c\bar{c}$ . A maneira de realizar este tipo de mistura pode ser encontrada na referência [23], do mesmo autor, onde é feita a mistura para  $\eta$ ,  $\eta'$  e  $\eta_c$ . A seguir, veremos, resumidamente, como ela é feita.

O ponto de partida é o esquema de mistura  $q\bar{q}-s\bar{s}$ :

Usualmente, as análises fenomenológicas dos processos de decaimento envolvem mistura de estados e constantes de decaimento fraco. Estas constantes são definidas por

$$\langle 0 | J_{\mu 5}^j | P(p) \rangle = i f_P^j p_\mu, \quad (j = 8, 1; P = \eta, \eta'), \quad (1.15)$$

onde  $J_{\mu 5}^8$  e  $J_{\mu 5}^1$  são as correntes axiais do octeto e do singlete, respectivamente. Considera-se que as constantes de decaimento são dadas pela mistura de estados

$$\begin{aligned} f_\eta^8 &= f_8 \cos \theta, & f_\eta^1 &= -f_1 \sin \theta, \\ f_{\eta'}^8 &= f_8 \sin \theta, & f_{\eta'}^1 &= f_1 \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.16)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de mistura do noneto e

$$\begin{aligned} f_8 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}), \\ f_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Feldmann [23] define novas constantes, análogas à Eq. (1.16):

$$\begin{aligned} f_\eta^q &= f_q \cos \phi, & f_\eta^s &= -f_s \sin \phi, \\ f_{\eta'}^q &= f_q \sin \phi, & f_{\eta'}^s &= f_s \cos \phi, \end{aligned} \quad (1.18)$$

onde  $\phi = \theta + \theta_{ideal}$  ( $\theta_{ideal} = 54, 7^\circ$ ). Assumindo, assim, que as constantes de decaimento na base de sabor dos quarks seguem o mesmo padrão de misturas de estado de partículas.

Os estados físicos estão relacionados aos estados  $\eta_q$  e  $\eta_s$  através da relação

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = U(\phi) \begin{pmatrix} \eta_q \\ \eta_s \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

onde  $U$  é a matriz unitária definida por

$$U(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

A Eq. (1.18) pode ser escrita na forma matricial

$$\begin{pmatrix} f_\eta^q & f_\eta^s \\ f_{\eta'}^q & f_{\eta'}^s \end{pmatrix} = U(\phi) \mathcal{F}, \quad (1.21)$$

sendo

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} f_q & 0 \\ 0 & f_s \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

A divergência da corrente axial é escrita da forma:

$$\partial^\mu J_{\mu 5}^s = \partial^\mu (\bar{s} \gamma_\mu \gamma_5 s) = 2m_s (\bar{s} i \gamma_5 s) + \frac{\alpha_s}{4\pi} G\tilde{G}, \quad (1.23)$$

onde  $G$  simboliza o tensor do campo de glúons,  $\tilde{G}$  é seu dual e  $m_i$  é a massa de corrente do quark. Os elementos da matriz de transição vácuo-méson da Eq. (1.23),  $\langle 0 | \partial^\mu J_{\mu 5}^s | \eta \rangle$ , são dados pelo produto da massa do méson ao quadrado,  $M_p^2$ , pela constante de decaimento apropriada.

$$\langle 0 | \partial^\mu J_{\mu 5}^s | \eta \rangle = M_\eta^2 f_\eta^s. \quad (1.24)$$

A massa quadrática do méson pode ser considerada como os elementos da matriz de massa

$$\mathcal{M}^2 = \begin{pmatrix} M_\eta^2 & 0 \\ 0 & M_{\eta'}^2 \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Com a ajuda das Eqs.(1.21) e (1.25), os elementos de matriz  $\partial^\mu J_{\mu 5}^i$  ( $i = q, s$ ) podem ser identificados como sendo o produto das matrizes  $\mathcal{M}^2 U(\phi) \mathcal{F}$ . Usando a Eq. (1.19), pode-se escrever este produto de matrizes na base de sabor de quarks. Resolvendo a matriz de massa

$$\mathcal{M}_{qs}^2 = U^\dagger \mathcal{M}^2 U(\phi), \quad (1.26)$$

encontra-se

$$\mathcal{M}_{qs}^2 = \begin{pmatrix} m_{qq}^2 + \frac{\sqrt{2}}{f_q} \langle 0 | \frac{\alpha_s}{4\pi} G\tilde{G} | \eta_q \rangle & \frac{1}{f_s} \langle 0 | \frac{\alpha_s}{4\pi} G\tilde{G} | \eta_q \rangle \\ \frac{\sqrt{2}}{f_q} \langle 0 | \frac{\alpha_s}{4\pi} G\tilde{G} | \eta_s \rangle & m_{ss}^2 + \frac{1}{f_s} \langle 0 | \frac{\alpha_s}{4\pi} G\tilde{G} | \eta_s \rangle \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

onde

$$\begin{aligned} m_{qq}^2 &= \frac{\sqrt{2}}{f_q} \langle 0 | m_u \bar{u} i \gamma_5 u + m_d \bar{d} i \gamma_5 d | \eta_q \rangle, \\ m_{ss}^2 &= \frac{2}{f_s} \langle 0 | m_s \bar{s} i \gamma_5 s | \eta_s \rangle. \end{aligned} \quad (1.28)$$

É conveniente introduzir as seguintes abreviações:

$$y = \sqrt{2} \frac{\langle 0 | \frac{\alpha_s}{4\pi} G\tilde{G} | \eta_s \rangle}{\langle 0 | \frac{\alpha_s}{4\pi} G\tilde{G} | \eta_q \rangle} = \frac{f_q}{f_s} \quad (1.29)$$

e

$$a^2 = \frac{1}{\sqrt{2} f_q} \langle 0 | \frac{\alpha_s}{4\pi} G\tilde{G} | \eta_q \rangle \quad (1.30)$$

para a contribuição anômala da matriz de massa. Assim, a matriz  $\mathcal{M}_{qs}^2$ , Eq. (1.27), pode ser reescrita da forma:



$$\mathcal{M}_{qs}^2 = \begin{pmatrix} m_{qq}^2 + 2a^2 & \sqrt{2} y a^2 \\ \sqrt{2} y a^2 & m_{ss}^2 + y^2 a^2 \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Esta matriz pode ser generalizada para o caso onde a base é  $q\bar{q} - s\bar{s} - c\bar{c}$ :

$$\mathcal{M}_{qsc}^2 = \begin{pmatrix} m_{qq}^2 + 2a^2 & \sqrt{2} y a^2 & \sqrt{2} z a^2 \\ \sqrt{2} y a^2 & m_{ss}^2 + y^2 a^2 & y z a^2 \\ \sqrt{2} z a^2 & y z a^2 & m_{cc}^2 + z^2 a^2 \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

onde

$$z = \frac{f_q}{f_c}, \quad (1.33)$$

A partir do resultado acima é possível estabelecer esquemas de mistura para  $\eta$ ,  $\eta'$  e  $\eta_c$ , sendo que Feldmann [23] encontrou:

$$\begin{aligned} |\eta\rangle &= 0.77|n\bar{n}\rangle - 0.63|s\bar{s}\rangle - 0.006|c\bar{c}\rangle \\ |\eta'\rangle &= 0.63|n\bar{n}\rangle + 0.77|s\bar{s}\rangle - 0.016|c\bar{c}\rangle \\ |\eta_c\rangle &= 0.015|n\bar{n}\rangle + 0.008|s\bar{s}\rangle + |c\bar{c}\rangle. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Uma mistura similar ocorre para  $J/\psi$ ,  $\phi$  e  $\omega$  [22]. As contribuições dos termos  $|n\bar{n}\rangle$ ,  $|s\bar{s}\rangle$  e  $|c\bar{c}\rangle$  são:

$$\begin{aligned} |\omega\rangle &= |n\bar{n}\rangle - 0.06|s\bar{s}\rangle - 1.5 \times 10^{-3}|c\bar{c}\rangle \\ |\phi\rangle &= 0.06|n\bar{n}\rangle + |s\bar{s}\rangle - 0.9 \times 10^{-3}|c\bar{c}\rangle \\ |J/\psi\rangle &= 1.5 \times 10^{-3}|n\bar{n}\rangle + 0.9 \times 10^{-3}|s\bar{s}\rangle + |c\bar{c}\rangle. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Neste trabalho de doutorado utilizamos as misturas dadas pelas Eqs. (1.34) e (1.35) para calcular as taxas de decaimento do  $J/\psi$  através do modelo  $C^3P_0$ .

Além do estudo do  $J/\psi$ , também utilizamos o modelo  $C^3P_0$  para obter as taxas de decaimento dos mésons  $\phi(1020)$ ,  $\phi(1680)$ ,  $\phi_3(1850)$  e para os ainda não observados experimentalmente  $\phi(2050)$ ,  $\phi_1(1850)$  e  $\phi_2(1850)$ .

O modelo  $C^3P_0$  foi obtido nas dissertações de mestrado de Daniel Tavares da Silva [24] e Joseima Neves de Quadros [25]. A dedução deste novo modelo foi publicada em [26]. Testes do  $C^3P_0$  foram realizados para o setor de mésons leves [25]-[27] e para mésons considerados como uma mistura quarks-glueball [28]. Nestes trabalhos, taxas de decaimentos foram obtidas através de dois modelos de decaimentos de mésons: “ $C^3P_0$ ” e “ $^3P_0$ ” (modelo usual conhecido na literatura) [29]-[33]. Comparações entre os resultados obtidos com os dois modelos indicaram que o  $C^3P_0$  descreveu melhor as taxas de decaimentos quando

comparadas com seus respectivos valores experimentais. Este resultado nos encorajou a prosseguir estudando decaimentos de mésons através do modelo  $C^3P_0$ . Depois de ter estudado o setor de mésons leves, o próximo passo seria estudar os quarkônios  $n\bar{n}$  com excitações radiais e orbitais, mésons com quarks estranhos e mésons com quarks charmosos.

Nesta tese, estudamos o setor de mésons estranhos e charmosos. Abordamos os mésons estranhos através do estudo dos  $\phi$ 's. A maior parte dos canais de decaimento analisados são previstos teoricamente [34], mas ainda não foram detectados experimentalmente. Um estudo destes decaimentos foi feito por Ted Barnes [34] através do modelo  $^3P_0$ , onde ele considerou os  $\phi$ 's como estranhônios, ou seja, formados por pares  $s\bar{s}$ . Em nosso trabalho, consideramos os  $\phi$ 's dados por misturas do tipo  $c_1 [u\bar{u} + d\bar{d}] + c_2 s\bar{s}$  e encontramos as taxas de decaimento utilizando o modelo  $C^3P_0$ .

No estudo do setor dos mésons charmosos, analisamos os decaimentos do  $J/\psi$ , novamente através do modelo  $C^3P_0$ , considerando que ele é formado pela mistura  $c'_1 [u\bar{u} + d\bar{d}] + c'_2 s\bar{s} + c'_3 c\bar{c}$ . A mistura utilizada foi obtida por T. Feldmann [22] como uma possível solução para o *enigma*  $\rho\pi$ .

A divisão dos capítulos deste trabalho de doutorado é a seguinte: no capítulo 2 é apresentada uma revisão do formalismo de Fock-Tani para mésons, que é a base do modelo que utilizamos.

O capítulo 3 é destinado à revisão dos modelos  $^3P_0$  e  $C^3P_0$ . Primeiramente, apresentamos o modelo  $^3P_0$  em sua forma usual, consagrada na literatura. Em seguida, mostramos como o modelo  $C^3P_0$  é obtido através do formalismo de Fock-Tani. Este modelo possui correções de estado ligado e em mais baixa ordem reproduz o modelo  $^3P_0$ .

Nos capítulos 4 e 5 está a parte inédita deste trabalho, onde obtemos as taxas de decaimento para os mésons  $\phi$  e  $J/\psi$ , respectivamente, com a utilização do modelo  $C^3P_0$ . Ajustes para os parâmetros livres são feitos de forma a obter as taxas de decaimento que mais se aproximam dos valores experimentais existentes. Desta forma, com o ajuste feito, é possível prever as taxas de decaimento para alguns mésons e canais específicos que ainda não foram detectados experimentalmente.

E por fim, apresentamos as conclusões e perspectivas futuras, apêndices e bibliografia consultada.

Um resultado inicial deste trabalho de doutorado para o estudo dos  $\phi$ 's foi publicado em [35]. Para  $J/\psi$  um resultado inicial foi aceito para publicação em [36]. Outros dois artigos estão em fase final de preparação [37] e [38].

## Capítulo 2

# Formalismo de Fock-Tani para Mésons

Neste capítulo será apresentada uma revisão dos aspectos gerais do formalismo de Fock-Tani e a sua aplicação às interações entre mésons. Inicialmente, este formalismo foi desenvolvido por M. Girardeau e colaboradores [39]-[49] nas décadas de '70 e '80 para estudar interações entre átomos para energias nas quais os seus graus de liberdade internos, de elétrons e prótons, não podiam ser desprezados.

Posteriormente, o formalismo de Fock-Tani foi estendido para a física dos hádrons [50]-[54], [24]-[27]. Outras aplicações foram para sistemas mistos com interações entre bósons e férmions como, por exemplo, no sistema káon-núcleon [55] e interações entre glueballs [56, 57].

A seguir, será apresentada a revisão extraída da dissertação de mestrado de Joseima Neves de Quadros [25], revisão esta baseada no trabalho de Sérgio Szpigel (tese de doutorado [51]).

## 2.1 O Formalismo de Fock-Tani

No formalismo de Fock-Tani (FT) partimos da representação do sistema no espaço de Fock usando operadores de criação e aniquilação para as partículas constituintes elementares.

Consideremos um sistema contendo quarks e antiquarks (constituintes elementares) que podem formar estados ligados (mésons compostos). Nesta representação, os estados de um méson podem ser construídos a partir de operadores de criação de mésons aplicados ao vácuo, operadores estes que podem ser definidos em termos de combinações lineares de produtos de operadores de criação de quarks e antiquarks.

Consideremos o estado de um méson composto por um quark e um antiquark. O vetor

de estado  $|\alpha\rangle$  no espaço de Fock  $\mathcal{F}$  que descreve esse méson, é dado por

$$|\alpha\rangle = M_\alpha^\dagger |0\rangle, \quad (2.1)$$

onde  $M_\alpha^\dagger$  é o operador de criação de um méson composto no estado  $\alpha$  e  $|0\rangle$  é o estado de vácuo, definido por:

$$q_\mu |0\rangle = \bar{q}_\nu |0\rangle = 0; \quad (2.2)$$

nesta representação  $q_\mu$  representa o operador aniquilação de um quark contendo números quânticos representados por  $\mu$ , e  $\bar{q}_\nu$  denota o operador aniquilação de um antiquark com números quânticos representados por  $\nu$ ; o operador  $M_\alpha^\dagger$  é definido como:

$$M_\alpha^\dagger = \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger, \quad (2.3)$$

onde  $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$  é a função de onda do estado ligado do méson, sendo  $q_\mu^\dagger$  e  $\bar{q}_\nu^\dagger$  os correspondentes conjugados hermitianos de  $q_\mu$  e  $\bar{q}_\nu$ . O índice  $\alpha$  representa, de uma maneira compacta, os números quânticos do méson:  $\alpha = \{\text{espacial, spin, isospin}\}$ . Os índices  $\mu$  e  $\nu$  identificam os números quânticos de quarks e antiquarks:  $\mu, \nu = \{\text{espacial, spin, sabor, cor}\}$ . É conveniente ademais trabalhar com funções de onda orto-normalizadas:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.4)$$

Os operadores de quark e antiquark satisfazem relações de anticomutação canônicas,

$$\begin{aligned} \{q_\mu, q_\nu\} &= \{q_\mu, \bar{q}_\nu\} = \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu\} = \{q_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = 0, \\ \{q_\mu, q_\nu^\dagger\} &= \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Utilizando estas relações de anticomutação, juntamente com a condição de orto-normalização apresentada na equação (2.4), obtemos as relações de comutação para os operadores de mésons compostos:

$$[M_\alpha, M_\beta] = 0 \quad , \quad [M_\alpha, M_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}, \quad (2.6)$$

onde

$$\Delta_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu + \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\rho\nu} q_\rho^\dagger q_\mu. \quad (2.7)$$

Adicionalmente, temos

$$\begin{aligned} [q_\mu, M_\alpha] &= [\bar{q}_\nu, M_\alpha] = 0, \\ [q_\mu, M_\alpha^\dagger] &= \Phi_\alpha^{\mu\nu} \bar{q}_\nu^\dagger, \\ [\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger] &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger. \end{aligned} \quad (2.8)$$

O termo  $\Delta_{\alpha\beta}$  apresentado na Eq. (2.7), e que aparece na relação não-canônica (2.6), é uma manifestação da natureza composta e da estrutura interna dos mésons. A presença deste termo é indicativo do alto nível de complexidade que surge no tratamento de problemas em que os graus de liberdade internos dos mésons não podem ser desprezados, pois as técnicas usuais da teoria de campos, tais como a utilização de funções de Green, do teorema de Wick, entre outros, aplicam-se a operadores que satisfazem relações de comutação (ou anticomutação) canônicas. Analogamente, o fato de que os comutadores  $[q_\mu, M_\alpha^\dagger]$  e  $[\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger]$  não se anulam expressa a dependência cinemática entre o operador de méson e os operadores de quark e antiquark. Assim, os operadores de méson,  $M_\alpha$  e  $M_\alpha^\dagger$ , não são variáveis dinâmicas convenientes.

A idéia do formalismo de Fock-Tani é fazer uma mudança de representação, de forma que os operadores das partículas compostas sejam substituídos por operadores que satisfazem relações de comutação canônicas. Naturalmente, as complicações da natureza composta dos mésons aparecerão em algum outro ponto do formalismo. A mudança de representação é realizada por meio de um operador unitário,  $U$ , de modo que os estados de um méson composto sejam substituídos por estados de um méson ideal, descritos por operadores de destruição e criação de partículas “ideais”,  $m_\alpha$  e  $m_\alpha^\dagger$ . Em outras palavras, queremos efetuar a seguinte substituição

$$\boxed{\begin{array}{ccc} M_\alpha^\dagger|0\rangle & \implies & m_\alpha^\dagger|0\rangle \\ \text{Méson} & & \text{méson} \\ \text{físico} & & \text{ideal} \end{array}} \quad (2.9)$$

Dessa forma, se  $|\alpha\rangle$  representa um estado de um méson composto, ele será redescrito por um méson elementar “ideal” sob a transformação

$$|\alpha\rangle \longrightarrow U^{-1}|\alpha\rangle \equiv |\alpha\rangle = m_\alpha^\dagger|0\rangle . \quad (2.10)$$

Na nova representação, os estados de mésons elementares ideais são representados por “bras” e “kets” circulares ao invés de angulares. O estado  $|0\rangle$  representa o vácuo para os graus de liberdade de quarks, antiquarks e mésons “ideais” na nova representação e operadores de méson “ideal”,  $m_\alpha^\dagger$  e  $m_\alpha$ , satisfazem, por definição, relações de comutação canônicas

$$\begin{aligned} [m_\alpha, m_\beta] &= 0 , \\ [m_\alpha, m_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} , \end{aligned} \quad (2.11)$$

e são cinematicamente independentes dos operadores de quarks e antiquarks

$$[q_\mu, m_\alpha] = [q_\mu, m_\alpha^\dagger] = [\bar{q}_\nu, m_\alpha] = [\bar{q}_\nu, m_\alpha^\dagger] = 0 . \quad (2.12)$$

### 2.1.1 Espaço de Vetores de Estados Ideais

Seja  $|\Omega\rangle$  um vetor de estado arbitrário em segunda quantização e  $O$  um operador arbitrário, ambos expressos em termos dos operadores de quarks e antiquarks,  $q, q^\dagger, \bar{q}, \bar{q}^\dagger$ , da representação de Fock original e  $|\Omega\rangle$  e  $O_{\text{FT}}$  as quantidades correspondentes na nova representação:

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &\longrightarrow |\Omega\rangle = U^{-1}|\Omega\rangle, \\ O &\longrightarrow O_{\text{FT}} = U^{-1}OU. \end{aligned} \quad (2.13)$$

O operador  $U$  deve ser unitário, pois assim as normas dos produtos escalares entre os vetores de estado bem como os elementos de matriz (valores esperados) dos operadores serão preservados sob a mudança de representação:

$$\begin{aligned} \langle\Omega|\Omega\rangle &= (\Omega|\Omega), \\ \langle\Omega|O|\Omega\rangle &= (\Omega|O_{\text{FT}}|\Omega). \end{aligned} \quad (2.14)$$

O operador unitário  $U$  é construído expandindo-se o espaço de Fock original de modo que os estados de méson “ideal” sejam incluídos. Consideremos o espaço de Fock físico, indicado por  $\mathcal{F}$ . Esse é o espaço de estados gerado por todas as combinações lineares de operadores de quarks e antiquarks, atuando no vácuo físico na forma

$$q_{\mu_1}^\dagger \cdots q_{\mu_l}^\dagger \bar{q}_{\nu_1}^\dagger \cdots \bar{q}_{\nu_m}^\dagger |0\rangle, \quad (2.15)$$

onde  $l$  e  $m$  são parâmetros arbitrários. Definimos um espaço de Hilbert  $\mathcal{M}$ , o espaço de mésons ideais, independente do espaço de Fock físico  $\mathcal{F}$ , como o espaço gerado por todas as combinações lineares de estados constituídos de operadores de “méson ideal”,

$$m_{\alpha_1}^\dagger \cdots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle_{\mathcal{M}}, \quad (2.16)$$

onde  $|0\rangle_{\mathcal{M}}$  é o vácuo de  $\mathcal{M}$ , definido por

$$m_\alpha |0\rangle_{\mathcal{M}} = 0. \quad (2.17)$$

Agora, define-se um novo espaço de Hilbert, chamado “espaço de estados ideais”, como o produto direto dos espaços de Fock físico  $\mathcal{F}$  e de mésons ideais  $\mathcal{M}$ ,

$$\mathcal{I} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{M}, \quad (2.18)$$

onde o símbolo  $\otimes$  representa produto direto.

As relações de comutação das Eqs. (2.6) e (2.8), inicialmente definidas em  $\mathcal{F}$ , como também as da Eq. (2.11), inicialmente definidas em  $\mathcal{M}$ , são válidas também em  $\mathcal{I}$ . Por

definição, os operadores de quark e de méson ideal são cinematicamente independentes e, portanto, também satisfazem a Eq. (2.12) em  $\mathcal{I}$ .

O vácuo de  $\mathcal{I}$  é dado pelo produto direto dos vácuos de  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{F}$ ,

$$|0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle_{\mathcal{M}}. \quad (2.19)$$

Dessa forma,  $|0\rangle$  é o vácuo dos graus de liberdade de quarks, antiquarks e mésons ideais:

$$q_\mu|0\rangle = \bar{q}_\nu|0\rangle = m_\alpha|0\rangle = 0. \quad (2.20)$$

Note, porém, que os operadores de quarks e antiquarks atuam no vácuo físico  $|0\rangle$  e os operadores de mésons ideais atuam no vácuo ideal de mésons  $|0\rangle_{\mathcal{M}}$  na Eq. (2.19).

Estabelecemos, assim, uma correspondência um-para-um entre os estados do espaço de Fock físico  $\mathcal{F}$  e os estados de um sub-espaço de  $\mathcal{I}$ . Em  $\mathcal{I}$ , existe um sub-espaço  $\mathcal{I}_0$  que é isomórfico ao espaço de Fock original  $\mathcal{F}$  e consiste dos estados  $|\Omega\rangle \in \mathcal{F}$  sem mésons ideais,

$$m_\alpha|\Omega\rangle = 0 \quad \forall \alpha, \quad (2.21)$$

A Eq. (2.21) passa a ser um vínculo a ser satisfeito pelos estados permitidos em  $\mathcal{I}$ .

A equação de vínculo, ou condição subsidiária, exige que em  $\mathcal{I}_0$  os mésons ideais sejam modos redundantes, ou seja, correspondam a estados totalmente desocupados. Esta condição é necessária para evitar múltipla contagem de graus de liberdade.

O operador unitário  $U$  atua sobre estados de  $\mathcal{I}$  e não pode ser definido apenas em  $\mathcal{F}$ . Contudo,  $U$  está definido em  $\mathcal{I}_0$ , que é isomórfico a  $\mathcal{F}$ . Definimos, então, o espaço de Fock-Tani  $\mathcal{F}_{\text{FT}}$  como o espaço imagem de  $\mathcal{I}_0$ :

$$\mathcal{F}_{\text{FT}} = U^{-1}\mathcal{I}_0. \quad (2.22)$$

Assim, o espaço  $\mathcal{F}_{\text{FT}}$  é o sub-espaço de  $\mathcal{I}$  cujos vetores de estado, representados por  $|\Omega\rangle$  na nova representação, estão relacionados aos vetores de estado de  $\mathcal{I}_0$  por

$$|\Omega\rangle = U|\Omega\rangle \Rightarrow |\Omega\rangle = U^{-1}|\Omega\rangle. \quad (2.23)$$

Qualquer cálculo efetuado no espaço físico  $\mathcal{F}$  é equivalente ao cálculo no espaço de Fock-Tani. Para dois vetores de estados quaisquer,  $|\Omega\rangle$  e  $|\Omega'\rangle$ , e para qualquer observável  $O \in \mathcal{F}$ , temos

$$\langle\Omega|O|\Omega'\rangle = (\Omega|U^{-1}OU|\Omega') = (\Omega|O_{\text{FT}}|\Omega'). \quad (2.24)$$

É claro que em  $\mathcal{F}_{\text{FT}}$ , a condição que garante que não há dupla contagem,

$$U^{-1}m_\alpha U|\Omega\rangle = 0, \quad (2.25)$$

deve sempre ser satisfeita.

A vantagem de trabalhar em  $\mathcal{F}_{\text{FT}}$  é que neste espaço todos os operadores de criação e aniquilação satisfazem relações de comutação ou anti-comutação canônicas. No entanto, a natureza composta dos mésons será transferida para outro lugar. Os operadores transformados,

$$O_{\text{FT}} = U^{-1}OU, \quad (2.26)$$

dão origem a séries infinitas que fisicamente representam, de algum modo, uma expansão na densidade do sistema [53].

O método apresentado será eficiente para cálculos práticos se forem necessários poucos termos da série para descrever as interações entre os mésons e os quarks. A obtenção de forças efetivas de muitos corpos entre os mésons requer uma expansão até altas ordens na função de onda do méson. No entanto, interações efetivas entre dois mésons podem ser obtidas em ordens relativamente baixas.

### 2.1.2 Representação de Mésons Elementares Ideais

Uma forma de implementar a substituição (2.9) consiste em definir um novo operador

$$f = m_\alpha^\dagger \tilde{M}_\alpha \quad (2.27)$$

que atua sobre o estado mesônico composto; onde

$$\tilde{M}_\alpha = M_\alpha + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}M_\beta + \frac{1}{2}M_\beta^\dagger[\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha]M_\gamma. \quad (2.28)$$

As relações de comutação para estes operadores são

$$\begin{aligned} [\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_\beta] &= \mathcal{O}(\Phi^4) \\ [\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^4). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Combinando as expressões (2.27)-(2.28) com (2.1) e (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} f | \beta \rangle &= m_\alpha^\dagger \tilde{M}_\alpha | \beta \rangle = m_\alpha^\dagger \tilde{M}_\alpha M_\beta^\dagger | 0 \rangle \\ &= m_\beta^\dagger | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Desta expressão vemos que a atuação de  $f$  sobre o estado composto produz efetivamente um estado elementar “ideal” na forma buscada.

Podemos construir, a partir de (2.27), um operador  $F$ , anti-hermitiano,  $F^\dagger = -F$ , da seguinte forma

$$F = f - f^\dagger = m_\alpha^\dagger \tilde{M}_\alpha - \tilde{M}_\alpha^\dagger m_\alpha, \quad (2.31)$$



onde a atuação de  $F$  sobre os estados composto e elementar resulta, respectivamente, em

$$\begin{aligned} F|\alpha\rangle &= m_\alpha^\dagger|0\rangle \\ F m_\alpha^\dagger|0\rangle &= -|\alpha\rangle. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Finalmente, podemos construir, a partir da definição (2.31) do operador anti-hermitiano  $F$ , uma transformação unitária capaz de implementar a substituição expressa na equação (2.9), isto é, podemos definir

$$U(t) = \exp(tF) \quad (2.33)$$

onde o operador  $F$ , o gerador da transformação buscada, depende de um parâmetro real,  $t$ , como será visto a seguir ( $t$  representa na realidade um ângulo de rotação no espaço de Hilbert). Utilizando (2.32), podemos obter as expressões para as potências de  $F$  aplicadas aos estados composto (físico) e elementar (ideal), respectivamente:

$$\begin{aligned} F^2 M_\alpha^\dagger|0\rangle &= -M_\alpha^\dagger|0\rangle & F^2 m_\alpha^\dagger|0\rangle &= -m_\alpha^\dagger|0\rangle \\ F^3 M_\alpha^\dagger|0\rangle &= -m_\alpha^\dagger|0\rangle & F^3 m_\alpha^\dagger|0\rangle &= M_\alpha^\dagger|0\rangle \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned} \quad (2.34)$$

Desta forma, podemos realizar a transformação unitária completa sobre o estado composto

$$\begin{aligned} U^{-1}(t) M_\alpha^\dagger|0\rangle &= \left(1 - tF + \frac{t^2}{2!}F^2 - \frac{t^3}{3!}F^3 + \dots\right) M_\alpha^\dagger|0\rangle \\ &= \left(1 + \frac{t^2}{2!}F^2 + \frac{t^4}{4!}F^4 + \dots\right) M_\alpha^\dagger|0\rangle \\ &\quad - \left(tF + \frac{t^3}{3!}F^3 + \frac{t^5}{5!}F^5 + \dots\right) M_\alpha^\dagger|0\rangle \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right) M_\alpha^\dagger|0\rangle - \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right) m_\alpha^\dagger|0\rangle \\ &= (\cos t) M_\alpha^\dagger|0\rangle - (\sin t) m_\alpha^\dagger|0\rangle \end{aligned} \quad (2.35)$$

Se tomarmos  $t = -\pi/2$  obtemos o estado transformado

$$U^{-1} M_\alpha^\dagger|0\rangle = m_\alpha^\dagger|0\rangle \equiv |\alpha\rangle. \quad (2.36)$$

## 2.2 A Transformação de Fock-Tani dos Operadores.

A seguir, mostraremos uma técnica chamada de *método das equações de movimento*, que servirá para construir a transformação de Fock-Tani dos operadores de maneira iterativa.

### 2.2.1 O Método Iterativo das “Equações de Movimento”

Os operadores básicos de um determinado modelo aplicado a física de mésons compostos, tais como o operador Hamiltoniano, correntes eletromagnéticas, entre outros, são expressos em termos de operadores de criação e destruição de quarks e antiquarks. Dessa forma, para obtermos os operadores do modelo na nova representação, aquela que envolve mésons ideais, necessitamos dos operadores de criação e destruição de quarks e antiquarks transformados. Apresentamos abaixo os operadores de destruição de quarks e antiquarks na nova representação, simbolizados respectivamente por  $q_{\text{FT}}$  e  $\bar{q}_{\text{FT}}$

$$\begin{aligned} q_{\text{FT}} &= U^{-1}qU \\ \bar{q}_{\text{FT}} &= U^{-1}\bar{q}U . \end{aligned} \quad (2.37)$$

Os operadores de criação correspondentes são obtidos de forma análoga, tomando o conjugado Hermitiano da Eq. (2.37) e lembrando que  $U^{-1} = U^\dagger$ .

As transformações destes operadores podem ser obtidas iterativamente através do método denominado de “equações de movimento”, sugerido por Girardeau[41]. Para qualquer operador  $O$ , define-se:

$$O(t) = \exp(-tF)O \exp(tF) . \quad (2.38)$$

Diferenciando a expressão acima com relação a  $t$ , obtemos a equação de movimento para o operador  $O$ :

$$\frac{dO(t)}{dt} = [O(t), F] , \quad (2.39)$$

com a “condição inicial”:

$$O(t=0) = O . \quad (2.40)$$

Os operadores transformados de Fock-Tani são obtidos das soluções das Eqs. (2.39)-(2.40) para  $t = -\frac{\pi}{2}$ :

$$O_{\text{FT}}(t) |_{t=-\pi/2} = U^{-1}(t)OU(t) |_{t=-\pi/2} = O(-\pi/2) . \quad (2.41)$$

Deste modo, usando a Eq. (2.39) e o gerador da transformação dado na Eq. (2.31), obtemos as equações de movimento para os operadores de quarks e antiquarks:

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu(t)}{dt} &= [q_\mu(t), F] \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ 2\Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger(t) m_\alpha(t) \right. \\ &\quad + \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} \left[ m_\alpha^\dagger(t) q_{\mu_2}(t) M_\gamma(t) - M_\alpha^\dagger(t) q_{\mu_2}(t) m_\gamma(t) \right] \\ &\quad + \Phi_\alpha^{\mu_1\sigma} \Phi_\gamma^{*\rho_1\sigma} \Phi_\delta^{\rho_1\sigma_1} M_\gamma^\dagger(t) \bar{q}_{\sigma_1}^\dagger(t) M_\delta(t) m_\alpha(t) \\ &\quad + \Phi_\alpha^{\rho\sigma} \Phi_\gamma^{*\rho\sigma_1} \Phi_\delta^{\mu_1\sigma_1} M_\gamma^\dagger(t) \bar{q}_{\sigma}^\dagger(t) M_\delta(t) m_\alpha(t) \\ &\quad \left. - \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger(t) \Delta_{\gamma\alpha}(t) m_\alpha(t) \right\} , \end{aligned} \quad (2.42)$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{q}_\nu(t)}{dt} &= [\bar{q}_\nu(t), F] \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ 2\Phi_\alpha^{\mu_1\nu} q_{\mu_1}^\dagger(t) m_\alpha(t) \right. \\
 &\quad + \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\rho\nu_1} \left[ m_\alpha^\dagger(t) \bar{q}_\sigma(t) M_\beta(t) - M_\alpha^\dagger(t) \bar{q}_\sigma(t) m_\beta(t) \right] \\
 &\quad - \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\rho\nu_1} \Phi_\gamma^{\rho_1\sigma} M_\alpha^\dagger(t) q_{\rho_1}^\dagger(t) M_\beta(t) m_\gamma(t) \\
 &\quad - \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\rho_1\sigma} \Phi_\gamma^{\rho\nu_1} M_\alpha^\dagger(t) q_{\rho_1}^\dagger(t) M_\beta(t) m_\gamma(t) \\
 &\quad \left. + \Phi_\gamma^{\rho\nu_1} q_\rho^\dagger(t) \Delta_{\gamma\beta}(t) m_\beta(t) \right\} . \tag{2.43}
 \end{aligned}$$

Uma vez que as equações de movimento para  $q$  e  $\bar{q}$  envolvem  $m_\alpha(t)$ , é necessário obter também a equação de movimento para  $m_\alpha(t)$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{dm_\alpha(t)}{dt} &= [m_\alpha(t), F] \\
 &= \tilde{M}_\alpha(t) . \tag{2.44}
 \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{M}_\alpha(t)}{dt} &= [\tilde{M}_\alpha(t), F] \\
 &= -m_\alpha(t) . \tag{2.45}
 \end{aligned}$$

As Eqs. (2.42)-(2.45), juntamente com suas equações conjugadas hermitianas, formam um conjunto de equações diferenciais não-lineares acopladas, e que apresentam um grau elevado de complexidade no que se refere a sua resolução . No entanto, essas equações podem ser resolvidas de maneira direta através do método de iteração.

Partindo de uma aproximação de ordem zero, onde é desprezado o termo  $\Delta_{\alpha\beta}$ , coletamos os termos de mesma ordem na função de onda do estado ligado,  $\Phi_\alpha$  e  $\Phi_\alpha^*$ . Dessa forma, escrevemos os operadores criação e destruição como uma expansão

$$\begin{aligned}
 q_\mu(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} q_\mu^{(i)}(t) , & \bar{q}_\mu(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \bar{q}_\mu^{(i)}(t) , \\
 m_\alpha(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} m_\alpha^{(i)}(t) , & \tilde{M}_\alpha(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{M}_\alpha^{(i)}(t) , \tag{2.46}
 \end{aligned}$$

onde  $(i)$  indica a ordem nas funções de onda. Para que se tenha uma contagem de potências consistente, como pode ser visto nas Eqs. (2.48) a seguir, a presença implícita das funções de onda na definição dos operadores  $M_\alpha$  e  $M_\alpha^\dagger$  via Eqs. (2.28) e (2.3), não devem entrar na contagem. Desta forma, as expansões da Eq. (2.46) podem ser entendidas como expansões na densidade do sistema[41].

Assim, as equações de movimento em ordem zero nas funções de onda são obtidas desprezando-se os termos  $\Delta_{\alpha\beta}(t)$  e  $\Phi_\alpha$  nas Eqs. (2.42)-(2.45):

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu^{(0)}(t)}{dt} &= 0 \quad ; \quad \frac{d\bar{q}_\nu^{(0)}(t)}{dt} = 0 \quad ; \\ \frac{d\tilde{M}_\alpha^{(0)}(t)}{dt} &= -m_\alpha^{(0)}(t) \quad ; \quad \frac{dm_\alpha^{(0)}(t)}{dt} = \tilde{M}_\alpha^{(0)}(t) . \end{aligned} \quad (2.47)$$

Usando as condições iniciais da Eq. (2.40), as soluções resultam em

$$\begin{aligned} q_\mu^{(0)}(t) &= q_\mu \quad ; \quad \bar{q}_\nu^{(0)}(t) = \bar{q}_\nu \quad ; \\ m_\alpha^{(0)}(t) &= m_\alpha \cos t + M_\alpha \sin t \quad ; \quad \tilde{M}_\alpha^{(0)}(t) = M_\alpha \cos t - m_\alpha \sin t . \end{aligned} \quad (2.48)$$

Para que a expansão da Eq. (2.46) seja consistente com a Eq. (2.40), devemos ter como condições iniciais para os termos de ordem  $i \geq 1$  que:

$$q_\mu^{(i)}(t=0) = \bar{q}_\nu^{(i)}(t=0) = m_\alpha^{(i)}(t=0) = 0$$

e

$$\tilde{M}_\alpha^{(i)}(t=0) = \tilde{M}_\alpha^{(i)} , \quad \text{para } i \geq 1 . \quad (2.49)$$

Uma vez que os termos com  $\Delta_{\alpha\beta}$  e aqueles com duas ou mais funções de onda do estado ligado,  $\Phi_\alpha$  e  $\Phi_\alpha^*$ , não contribuem para as equações de movimento em primeira ordem, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu^{(1)}(t)}{dt} &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \quad ; \quad \frac{d\bar{q}_\nu^{(1)}(t)}{dt} = \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} q_{\mu_1}^{\dagger(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \quad ; \\ \frac{d\tilde{M}_\alpha^{(1)}(t)}{dt} &= -m_\alpha^{(1)}(t) \quad ; \quad \frac{dm_\alpha^{(1)}(t)}{dt} = \tilde{M}_\alpha^{(1)}(t) . \end{aligned} \quad (2.50)$$

Com as condições iniciais da Eq. (2.49), ao integrar as expressões da Eq. (2.50) combinadas com as expressões da Eq. (2.48), obtemos:

$$\begin{aligned} q_\mu^{(1)}(t) &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger} [m_\alpha \sin t + M_\alpha (1 - \cos t)] , \\ \bar{q}_\nu^{(1)}(t) &= \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} q_{\mu_1}^{\dagger} [m_\alpha \sin t + M_\alpha (1 - \cos t)] , \\ m_\alpha^{(1)}(t) &= 0 , \\ \tilde{M}_\alpha^{(1)}(t) &= 0 . \end{aligned} \quad (2.51)$$

As equações de movimento em segunda ordem são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{dm_\alpha^{(2)}(t)}{dt} &= [m_\alpha^{(2)}(t), F] = \tilde{M}_\alpha^{(2)}(t) , \\ \frac{d\tilde{M}_\alpha^{(2)}(t)}{dt} &= [\tilde{M}_\alpha^{(2)}(t), F] = -m_\alpha^{(2)}(t) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dq_\mu^{(2)}(t)}{dt} = [q_\mu^{(2)}(t), F] &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger(t) m_\alpha^{(0)}(t) - \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} m_\alpha^{\dagger(0)}(t) q_{\mu_2}^{(0)}(t) M_\gamma^{(0)}(t) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \Phi_\gamma^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu\nu_1} M_\gamma^{\dagger(0)}(t) q_{\mu_2}^{(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) , \\
 \frac{d\bar{q}_\nu^{(2)}(t)}{dt} = [\bar{q}_\nu^{(2)}(t), F] &= \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} q_{\mu_1}^\dagger(t) m_\alpha^{(0)}(t) + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} m_\alpha^{\dagger(0)}(t) M_\gamma^{(0)}(t) \bar{q}_{\nu_2}^{(0)}(t) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} M_\alpha^{\dagger(0)}(t) m_\gamma^{(0)}(t) \bar{q}_{\nu_2}^{(0)}(t) . \tag{2.52}
 \end{aligned}$$

Sendo  $\tilde{M}_\alpha^{(2)}(t=0) = \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta$  e, integrando as Eqs. (2.52) obtemos

$$\begin{aligned}
 m_\alpha^{(2)}(t) &= \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta \sin t , \\
 \tilde{M}_\alpha^{(2)}(t) &= \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta \cos t ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_\mu^{(2)}(t) &= \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\beta^{\mu\nu_1} \left[ m_\alpha^\dagger M_\beta \sin t \cos t - m_\alpha^\dagger m_\beta \sin^2 t - M_\alpha^\dagger M_\beta (2 - 2 \cos t \right. \\
 &\quad \left. - \sin^2 t) - M_\alpha^\dagger m_\beta (2 \sin t - \sin t \cos t) \right] q_{\mu_2} \\
 \bar{q}_\nu^{(2)}(t) &= \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2} \Phi_\beta^{\mu_1\nu} \left[ m_\alpha^\dagger M_\beta \sin t \cos t - m_\alpha^\dagger m_\beta \sin^2 t - M_\alpha^\dagger M_\beta (2 - 2 \cos t \right. \\
 &\quad \left. - \sin^2 t) - M_\alpha^\dagger m_\beta (2 \sin t - \sin t \cos t) \right] \bar{q}_{\nu_2} . \tag{2.53}
 \end{aligned}$$

As equações de movimento em terceira ordem para os operadores de quarks e antiquarks são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \frac{dq_\mu^{(3)}(t)}{dt} = [q_\mu^{(3)}(t), F] &= -\frac{1}{2} \left\{ 2\Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \left[ \bar{q}_{\nu_1}^\dagger(t) m_\alpha^{(0)}(t) + \bar{q}_{\nu_1}^\dagger(t) m_\alpha^{(2)}(t) \right] \right. \\
 &\quad + \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} \left[ m_\alpha^{\dagger(0)}(t) q_{\mu_2}^{(1)}(t) M_\gamma^{(0)}(t) - M_\alpha^{\dagger(0)}(t) q_{\mu_2}^{(1)}(t) m_\gamma^{(0)}(t) \right] \\
 &\quad + \Phi_\alpha^{\mu_1\sigma} \Phi_\gamma^{*\rho_1\sigma} \Phi_\delta^{\rho_1\sigma_1} M_\gamma^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_{\sigma_1}^\dagger(t) M_\delta^{(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \\
 &\quad + \Phi_\alpha^{\rho\sigma} \Phi_\gamma^{*\rho\sigma_1} \Phi_\delta^{\mu_1\sigma_1} M_\gamma^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_\sigma^\dagger(t) M_\delta^{(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \\
 &\quad \left. - \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger(t) \Delta_{\gamma\alpha}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \right\} , \tag{2.54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{q}_\nu^{(3)}(t)}{dt} = [\bar{q}_\nu^{(3)}(t), F] &= \frac{1}{2} \left\{ 2\Phi_\alpha^{\mu_1\nu} \left[ q_{\mu_1}^\dagger(t) m_\alpha^{(2)}(t) + q_{\mu_1}^\dagger(t) m_\alpha^{(0)}(t) \right] \right. \\
 &\quad + \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\rho\nu_1} \left[ m_\alpha^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_\sigma^{(1)}(t) M_\beta^{(0)}(t) - M_\alpha^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_\sigma^{(1)}(t) m_\beta^{(0)}(t) \right] \\
 &\quad - \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\rho\nu_1} \Phi_\gamma^{\rho_1\sigma} M_\alpha^{\dagger(0)}(t) q_{\rho_1}^\dagger(t) M_\beta^{(0)}(t) m_\gamma^{(0)}(t) \\
 &\quad - \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\rho\nu_1} \Phi_\gamma^{\rho_1\sigma} M_\alpha^{\dagger(0)}(t) q_{\rho_1}^\dagger(t) M_\beta^{(0)}(t) m_\gamma^{(0)}(t) \\
 &\quad \left. + \Phi_\gamma^{\rho\nu_1} q_\rho^\dagger(t) \Delta_{\gamma\beta}(t) m_\beta^{(0)}(t) \right\} . \tag{2.55}
 \end{aligned}$$

Integrando estas equações, obtemos:

$$\begin{aligned}
 q_\mu^{(3)}(t) &= \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\mu\sigma} \Phi_\gamma^{\rho\sigma_1} \bar{q}_{\sigma_1}^\dagger \left[ m_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma \sin^3 t + M_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma (\sin t - \sin^3 t) \right. \\
 &\quad + M_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma (2 \sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \\
 &\quad + (M_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma + m_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma) (-\cos t + \cos^3 t) \\
 &\quad + m_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma (-\cos t + \cos^3 t + \sin^2 t) \\
 &\quad + M_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma (2 - \cos t - \cos^3 t - \sin^2 t) \\
 &\quad \left. + m_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma (\sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \right] \\
 &\quad + \delta_{\mu\mu_1} \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \Phi_\beta^{\rho\sigma_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger \bar{q}_{\sigma_1}^\dagger \bar{q}_\sigma [2M_\beta (\cos t - 1) - m_\beta \sin t] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \Phi_\beta^{\rho_1\sigma} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger q_{\rho_1}^\dagger q_\rho [2M_\beta (\cos t - 1) - m_\beta \sin t] \\
 \bar{q}_\nu^{(3)}(t) &= -\frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\rho\nu} \Phi_\gamma^{\rho_1\sigma} q_{\rho_1}^\dagger \left[ m_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma \sin^3 t + M_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma (\sin t - \sin^3 t) \right. \\
 &\quad + M_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma (2 \sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \\
 &\quad + (M_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma + m_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma) (-\cos t + \cos^3 t) \\
 &\quad + m_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma (-\cos t + \cos^3 t + \sin^2 t) \\
 &\quad + M_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma (2 - \cos t - \cos^3 t - \sin^2 t) \\
 &\quad \left. + m_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma (\sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} \Phi_\beta^{\rho\sigma_1} q_{\mu_1}^\dagger \bar{q}_{\sigma_1}^\dagger \bar{q}_\sigma [2M_\beta (1 - \cos t) + m_\beta \sin t] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} \Phi_\beta^{\rho_1\sigma} q_{\mu_1}^\dagger q_{\rho_1}^\dagger q_\rho [2M_\beta (1 - \cos t) + m_\beta \sin t] . \tag{2.56}
 \end{aligned}$$

Com a utilização destes operadores de quarks (antiquarks) transformados, podemos obter o Hamiltoniano na representação de Fock-Tani.

Partindo do Hamiltoniano microscópico, que descreve a interação entre quarks e antiquarks, expresso em termos dos operadores dos constituintes fundamentais

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, q^\dagger, \bar{q}, \bar{q}^\dagger), \tag{2.57}$$

podemos obter o Hamiltoniano exato e transformado, que na nova representação é dado por

$$\mathcal{H}_{\text{FT}} \equiv U^{-1} \mathcal{H} U , \tag{2.58}$$

isto é, o Hamiltoniano é avaliado em todas as ordens na função de onda do méson e descreve todos os processos possíveis envolvendo quarks e mésons. Tais processos incluem interações de dois corpos do tipo (anti)quark-(anti)quark, méson- (anti)quark, méson-méson, bem

como outros processos de muitos corpos envolvendo interações em que várias partículas (quarks, antiquarks e mésons) participam. Até a ordem em que os operadores de quark e antiquark foram determinados (ordem três), é possível obter-se um Hamiltoniano efetivo truncado, que descreve apenas interações de poucas partículas. O Hamiltoniano na representação de Fock-Tani  $\mathcal{H}_{\text{FT}}$  tem, assim, a seguinte estrutura geral:

$$\mathcal{H}_{\text{FT}} = \mathcal{H}_{\text{q}} + \mathcal{H}_{\text{mq}} + \mathcal{H}_{\text{m}} , \quad (2.59)$$

onde  $\mathcal{H}_{\text{q}}$  indica termos contendo somente operadores de quarks e antiquarks,  $\mathcal{H}_{\text{mq}}$  indica termos contendo operadores de mésons e quarks e  $\mathcal{H}_{\text{m}}$  contém apenas operadores de mésons. O procedimento para obter a Eq. (2.59) é substituir na Eq. (2.57) os operadores de quarks transformados, fazendo em seguida o ordenamento normal dos operadores.

Em princípio, este processo pode ser estendido até qualquer ordem, ainda que a complexidade das expressões obtidas aumente muito com a ordem considerada. Sabe-se, no entanto, que para obter uma interação efetiva méson-méson, necessita-se ir somente até a terceira ordem nos operadores de quarks transformados [53]. Para o estudo dos decaimentos mesônicos do tipo  $A \rightarrow B + C$ , que é o objetivo deste trabalho, operadores de quarks (antiquarks) de até terceira ordem são suficientes. No entanto, vamos utilizar o modelo desenvolvido nos trabalhos de mestrado de Daniel T. da Silva [24] e Joseima N. de Quadros [25], os quais incluem efeitos relacionados com o fato dos mésons não serem partículas sem estrutura. Este modelo mais completo para estudar os processos de decaimentos foi chamado de  $C^3P_0$ , o modelo  ${}^3P_0$  corrigido. A obtenção deste modelo corrigido implica em obter os operadores de quarks (antiquarks) transformados até quarta e quinta ordem. Os detalhes desta dedução e algumas aplicações do modelo  $C^3P_0$  podem ser encontrados em [24]-[27]. Uma versão resumida, destes resultados, será apresentada no capítulo seguinte.

## Capítulo 3

# Modelos de Decaimento de Mésons

Neste capítulo faremos uma revisão dos modelos  ${}^3P_0$  e  $C^3P_0$ , que descrevem o setor de quarks microscopicamente. Primeiramente vamos mostrar a forma usual do *modelo*  ${}^3P_0$  obtida na literatura. A seguir, veremos como obter este modelo através do formalismo de Fock-Tani (FFT). Como vimos no capítulo anterior, o FFT faz surgir correções de estado ligado. Em ordem mais baixa da teoria transformada, o modelo  ${}^3P_0$  é reproduzido. Considerando esta ordem mais baixa e as correções, um novo modelo é obtido. Este modelo corrigido foi chamado de  $C^3P_0$ .

### 3.1 Modelo de Decaimento ${}^3P_0$

O modelo  ${}^3P_0$  foi introduzido há mais de quarenta anos por Micu [29] e aplicado em decaimento de mésons, na década de setenta, por LeYaouanc *et al* [30]. É um modelo de *criação de pares* para decaimentos hadrônicos fortes que considera apenas decaimentos do tipo OZI-permitidos.

O modelo  ${}^3P_0$  descreve a criação de um par quark-antiquark adicional na presença do méson do estado inicial. O par quark-antiquark criado tem os números quânticos do vácuo e em relação aos números quânticos aditivos, deve ser neutro. Em outras palavras, o par deve ser um singlete de cor e sabor, deve ter paridade positiva, enquanto o momento linear e angular total iguais a zero. Um par férmion-antiférmion que possui estas propriedades deve ter  $J^{PC} = 0^{++}$ , isto é,  $L = 1$  (onda-P) e  $S = 1$ .

As mais extensas aplicações para o decaimento de mésons foram obtidas por Kokoski e Isgur [31]. Estes autores além de calcularem quase 400 amplitudes diferentes (das quais aproximadamente 60 já foram medidas) também colocaram o modelo numa base teórica mais firme, mostrando que ele podia ser deduzido a partir de uma formulação de tubo de fluxo (*flux-tube*) baseada na QCD na rede.



A formulação do  ${}^3P_0$  que adotaremos neste trabalho foi deduzida por E. S. Ackleh, T. Barnes e E. S. Swanson [32]. Esta formulação do  ${}^3P_0$  considera os decaimentos como sendo originados pelo limite não-relativístico do Hamiltoniano abaixo

$$H_I = g \int d\vec{x} \bar{\psi}(\vec{x}) \psi(\vec{x}). \quad (3.1)$$

Os decaimentos estudados são do tipo

$$(q\bar{q})_A \rightarrow (q\bar{q})_B + (q\bar{q})_C, \quad (3.2)$$

isto é, um méson que decai em dois. Note que este tipo de decaimento exige a criação de um par quark-antiquark, que do Hamiltoniano (3.1) será obtido através de um termo  $b^\dagger d^\dagger$  (ver apêndice A). O acoplamento  $g$  é substituído pelo parâmetro  $\gamma$  relacionado com a massa do quark constituinte  $m_q$  por

$$\gamma = \frac{g}{2m_q}. \quad (3.3)$$

Neste modelo não se faz referência a cor, a qual se incluída simplesmente mudará a definição da força de interação  $\gamma$ , pois o fator de cor é um fator global. Visto que  $\gamma$  é ajustado para os dados experimentais, a inclusão da cor não mudará as previsões para os decaimentos de mésons.

Para determinar uma taxa de decaimento, é necessário avaliar o elemento de matriz do Hamiltoniano de decaimento, o qual é da forma

$$\langle BC|H_I|A\rangle = \delta(\vec{P}_A - \vec{P}_B - \vec{P}_C) h_{fi}, \quad (3.4)$$

onde  $h_{fi}$  é a amplitude de decaimento.

A definição geral de uma taxa de decaimento é

$$\Gamma = 2\pi P(\text{EF}) \int d\Omega |h_{fi}|^2 \quad (3.5)$$

onde EF é o elemento do espaço de fase e P o momento do decaimento. Em muitos modelos de decaimento os cálculos são não-relativísticos, já em outras situações o momento de decaimento é muito grande e o EF deve ser relativístico [34]. Assim temos

$$(\text{EF}) = \frac{M_B M_C}{M_A} \longrightarrow \text{não - relativístico} \quad (3.6)$$

$$(\text{EF}) = \frac{E_B E_C}{M_A} \longrightarrow \text{relativístico.} \quad (3.7)$$

A amplitude de decaimento  $h_{fi}$  pode ser combinada com o espaço de fase relativístico para dar a taxa de decaimento, a qual é

$$\Gamma_{A \rightarrow BC} = 2\pi P \frac{E_B E_C}{M_A} \int d\Omega |h_{fi}|^2 \quad (3.8)$$

onde

$$\begin{aligned}\vec{p}_A &= 0 \\ P &= |\vec{p}_B| = |\vec{p}_C|.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Um resultado equivalente é obtido por Geiger e Swanson [33]. O momento  $P$  de decaimento pode ser avaliado de forma simples. Ele é o momento do sistema dos mésons B e C vistos do referencial (em repouso) do méson A. Assim por conservação da energia relativística temos

$$\sqrt{p_A^2 + m_A^2} = \sqrt{p_B^2 + m_B^2} + \sqrt{p_C^2 + m_C^2}. \quad (3.10)$$

Usando (3.9) e isolando  $P$ , obtemos

$$P = \frac{\sqrt{[m_A^2 - (m_B + m_C)^2][m_A^2 - (m_B - m_C)^2]}}{2m_A}. \quad (3.11)$$

A parte espacial das funções de onda dos mésons A, B e C a ser utilizada no cálculo do elemento de matriz (3.4) é do tipo oscilador harmônico

$$\Phi_{nl}(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu) = \delta(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu) \phi_{nl}(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu), \quad (3.12)$$

onde  $\phi_{nl}(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)$  é dada por

$$\begin{aligned}\phi_{nl}(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu) &= \left(\frac{1}{2\beta}\right)^l N_{nl} |\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu|^l \exp\left[-\frac{(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)^2}{8\beta^2}\right] \\ &\times \mathcal{L}_{n-1}^{l+\frac{1}{2}}\left[\frac{(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)^2}{4\beta^2}\right] Y_{lm}(\Omega_{\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu}),\end{aligned}\quad (3.13)$$

sendo  $p_{\mu(\nu)}$  o momento interno,  $Y_{lm}$  o harmônico esférico e  $\beta$  a largura das gaussianas. A constante de normalização  $N_{nl}$  e os polinômios de Laguerre  $\mathcal{L}_{n-1}^{l+\frac{1}{2}}(p)$  dependem dos números quânticos radial  $n$  e orbital  $l$

$$N_{nl} = \left[\frac{2(n-1)!}{\beta^3 \Gamma(n+l+1/2)}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.14)$$

$$\mathcal{L}_{n-1}^{l+\frac{1}{2}}(p) = \sum_{k=0}^n \frac{(-)^k \Gamma(n+l+1/2)}{k! (n-k-1)! \Gamma(k+l+3/2)} p^k, \quad (3.15)$$

onde  $n = 1, 2, \dots$  e  $l = 0, 1, \dots$ . Funções de onda deste tipo são usadas pois descrevem a confinamento de cor, além de fornecerem amplitudes analíticas.

Usualmente, os resultados para decaimentos são expressos em termos da amplitude  $\mathcal{M}_{L_{BC}S_{BC}}$  e desta forma a taxa  $\Gamma_{A \rightarrow BC}$  fica reescrita

$$\Gamma_{A \rightarrow BC} = 2\pi P \frac{E_B E_C}{M_A} \sum_{LS} |\mathcal{M}_{LS}|^2. \quad (3.16)$$

Em geral,  $\mathcal{M}_{L_{BC}S_{BC}}$  é a amplitude  $\langle JM(L_{BC}S_{BC})|BC\rangle$  no estado final de  $BC$ . Visto que o modelo  ${}^3P_0$  envolve uma força de interação fenomenológica, a comparação com o experimento requer um ajuste para taxas distintas (para determinar  $\gamma$  e o parâmetro  $\beta$  da função de onda espacial).

Uma amplitude de decaimento  $\mathcal{M}_{LS}$  no modelo  ${}^3P_0$  com funções de onda do oscilador harmônico simples (OHS) é proporcional a um polinômio  $\mathcal{P}_{LS}(x)$  com  $x = P/\beta$  vezes uma exponencial [32]

$$\mathcal{M}_{LS} = \frac{\gamma}{\pi^{1/4}\beta^{1/2}} \mathcal{P}_{LS}(x) e^{-x^2/12}. \quad (3.17)$$

Neste modelo,  $\beta$  e  $\gamma$  são considerados parâmetros livres [32]. O ajuste é feito minimizando

$$\sum_i \left( \frac{\Gamma_i^{teo.} - \Gamma_i^{exp.}}{\Gamma_i^{exp.}} \right)^2, \quad (3.18)$$

onde a soma é feita sobre os canais de decaimento que estão sendo estudados. Para mésons leves, uma descrição precisa das taxas de decaimento é obtida com o parâmetro  $\gamma$  ficando próximo à 0.5 e  $\beta$  situado numa faixa 0.35 - 0.4 GeV [27, 32].

## 3.2 O modelo $C^3P_0$

Nesta seção vamos revisar o modelo  $C^3P_0$  [24]-[27], o qual é obtido com a utilização do formalismo de Fock-Tani para decaimentos mesônicos. O modelo  $C^3P_0$  engloba o modelo  ${}^3P_0$  mais correções de estado ligado. Como é usual no formalismo de Fock-Tani, o ponto de partida sempre é um Hamiltoniano microscópico que descreve a interação entre os constituintes. No nosso estudo, este Hamiltoniano será o  $H_I$  da Eq. (3.1). Inicia-se o cálculo escrevendo  $H_I$  na representação de momento. Lembrando que para o decaimento mesônico o termo relevante é aquele onde aparece  $b^\dagger d^\dagger$ , pois este é o termo que efetivamente cria um par quark-antiquark a partir do vácuo,  $H_I$  pode ser reduzido a

$$H_{q\bar{q}} = V_{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger, \quad (3.19)$$

onde  $V_{\mu\nu}$  é uma notação compacta para o potencial de criação de pares, definida por

$$V_{\mu\nu} \equiv g \delta_{f_\mu f_\nu} \delta_{c_\mu c_\nu} \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) u_{s_\mu}^\dagger(\vec{p}_\mu) \gamma^0 v_{s_\nu}(\vec{p}_\nu). \quad (3.20)$$

Na expressão (3.19) usamos a convenção da soma sobre índices repetidos (soma e/ou integração). Os detalhes do cálculo podem ser encontrados no apêndice A.

A aplicação da transformação de Fock-Tani sobre o Hamiltoniano (3.19),

$$H_{FT} = U^{-1} H_{q\bar{q}} U, \quad (3.21)$$

irá produzir uma expansão na função de onda do méson. Esta expansão, obtida através dos operadores de quark e antiquark transformados, possui inúmeras contribuições para os processos que envolvem quarks e mésons. Para decaimentos do tipo  $A \rightarrow B + C$ , deve-se reter termos com a seguinte estrutura operatorial

$$m^\dagger m^\dagger m. \quad (3.22)$$

Em ordem mais baixa na expansão em potências da função de onda, deve-se truncar esta expansão em terceira ordem. Surgirá um Hamiltoniano transformado  $H_m$  que envolverá apenas mésons. Desta forma, a contribuição da Eq. (3.21) que dará origem a este Hamiltoniano será

$$H_m = V_{\mu\nu} q_\mu^{\dagger(3)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} + V_{\mu\nu} q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(2)}. \quad (3.23)$$

Das eqs. (2.48), (2.51), (2.53) e (2.56), temos que as contribuições destes termos são

$$\begin{aligned} q_\mu^{\dagger(3)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} &\sim (m^\dagger m^\dagger m \bar{q}) \bar{q}^\dagger \\ q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(2)} &\sim (m^\dagger \bar{q}) \bar{q}^\dagger m^\dagger m. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Desta forma, considerando as Eqs. dadas e inserindo no Hamiltoniano, Eq. (3.23), obtemos

$$\begin{aligned} H_m &= V_{\mu\nu} \left[ -\frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\nu_1} \Phi_\beta^{\rho\nu_1} \Phi_\gamma^{*\rho\sigma} m_\gamma^\dagger m_\alpha^\dagger m_\beta \bar{q}_\sigma \right] \bar{q}_\nu^\dagger + V_{\mu\nu} \left[ \Phi_\alpha^{*\mu\nu_1} m_\alpha^\dagger \bar{q}_{\nu_1} \right] \left[ -\frac{1}{2} \Phi_\beta^{\mu_1\nu_2} \Phi_\gamma^{*\mu_1\nu} \bar{q}_{\nu_2}^\dagger m_\gamma^\dagger m_\beta \right] \\ &= -\frac{1}{2} V_{\mu\nu} \Phi_\alpha^{*\mu\nu_1} \Phi_\beta^{\rho\nu_1} \Phi_\gamma^{*\rho\sigma} m_\gamma^\dagger m_\alpha^\dagger m_\beta \bar{q}_\sigma \bar{q}_\nu^\dagger - \frac{1}{2} V_{\mu\nu} \Phi_\alpha^{*\mu\nu_1} \Phi_\beta^{\mu_1\nu_2} \Phi_\gamma^{*\mu_1\nu} m_\alpha^\dagger \bar{q}_{\nu_1} \bar{q}_{\nu_2}^\dagger m_\gamma^\dagger m_\beta \end{aligned} \quad (3.25)$$

Após o ordenamento normal dos quarks, obtemos o termo que nos interessa para o processo de decaimento

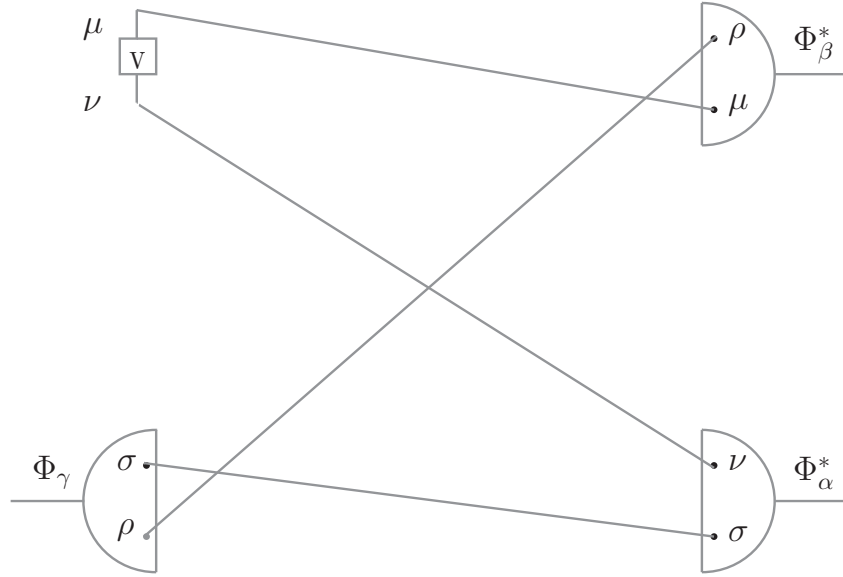
$$H_m = -\Phi_\alpha^{*\sigma\nu} \Phi_\beta^{*\mu\rho} \Phi_\gamma^{\sigma\rho} V_{\mu\nu} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma \quad (3.26)$$

que é o Hamiltoniano de Fock-Tani para decaimentos de mésons em ordem mais baixa da expansão em potências da função de onda, ou seja, é o modelo  ${}^3P_0$  que foi reproduzido.

Uma representação diagramática de  $H_m$  pode ser vista na Figura 3.1. Nessa representação, as posições do quark e do antiquark na  $\Phi^*$  são invertidas em relação a  $\Phi$ . Além disso, algumas regras de sinais devem ser observadas:

1. Cada cruzamento das linhas de quarks gera um sinal negativo;
2. Cada  $\Phi^*$  também origina um sinal negativo.

Desta forma, o produto dos cinco sinais negativos em Fig. 3.1 (três cruzamentos de linhas mais duas  $\Phi^*$ 's) gera o sinal negativo da Eq. (3.26).



**Fig. 3.1:** Representação diagramática de  $H_m$  em (3.26).

Os demais termos da expansão em potências da função de onda introduzem correções de estado ligado que corrigem o modelo de “ordem zero”. Estes termos possuem potências no *kernel de estado ligado*  $\Delta(\mu\nu; \rho\sigma)$ , que é definido por

$$\Delta(\mu\nu; \rho\sigma) = \Phi_{\alpha'}^{\mu\nu} \Phi_{\alpha'}^{*\rho\sigma}. \quad (3.27)$$

O Hamiltoniano do modelo  $C^3P_0$ ,  $H^{C3P_0}$ , considera o termo de ordem zero, que é dado por  $H_m$ , e os termos que dependem apenas de uma  $\Delta(\mu\nu; \rho\sigma)$ , denominados por  $\delta H_m$ . Ou seja,

$$H^{C3P_0} = H_m + \delta H_m, \quad (3.28)$$

onde o Hamiltoniano sem correção  $H_m$  é dado pela Eq. (3.26), e o Hamiltoniano da correção de estado ligado  $\delta H_m$  é obtido por

$$\delta H_m = V_{\mu\nu} [q_{\mu}^{\dagger(3)} \bar{q}_{\nu}^{\dagger(2)} + q_{\mu}^{\dagger(1)} \bar{q}_{\nu}^{\dagger(4)} + q_{\mu}^{\dagger(5)} \bar{q}_{\nu}^{\dagger(0)}], \quad (3.29)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \delta H_m = & \left[ -\frac{1}{4} \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\mu\tau} \Delta(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} + \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau; \mu\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \Phi_{\alpha}^{*\sigma\tau} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} \Delta(\rho\tau; \mu\lambda) \Phi_{\gamma}^{\sigma\lambda} \right] V_{\mu\nu} m_{\alpha}^{\dagger} m_{\beta}^{\dagger} m_{\gamma}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

A expressão (3.30) contém todas as possíveis conexões das linhas de quarks entre  $V_{\mu\nu}$  e o *kernel de estado ligado*  $\Delta$ , e sua forma diagramática está descrita nas Figuras 3.2, 3.3 e 3.4.

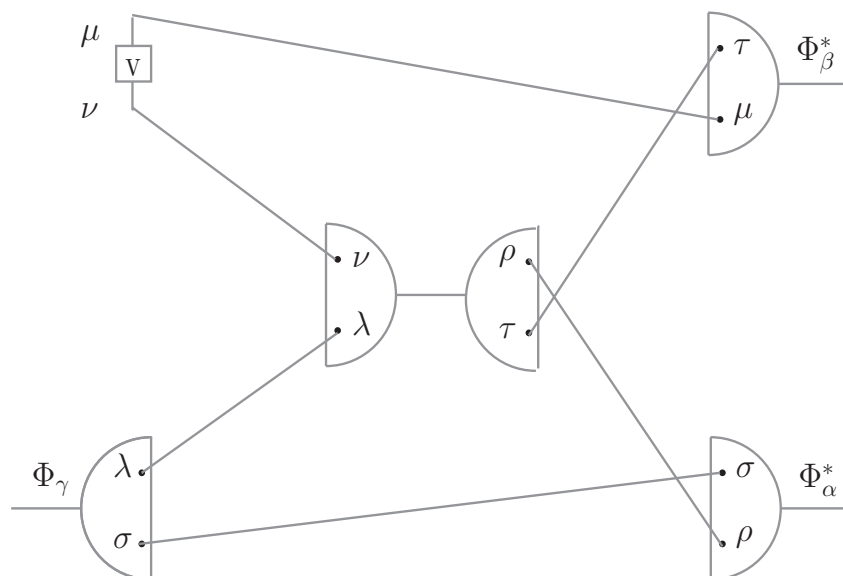


Fig. 3.2: Primeiro diagrama de  $\delta H_m$ .

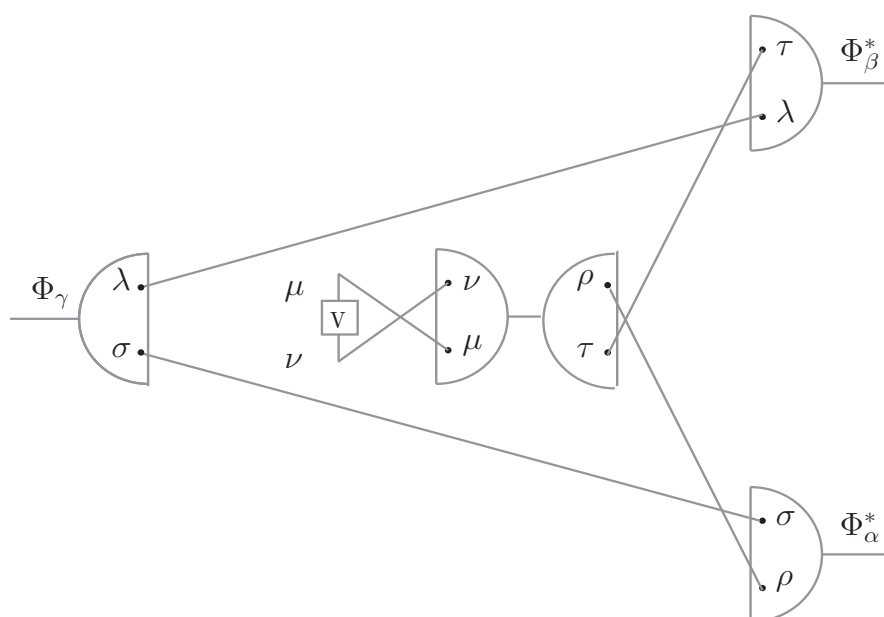
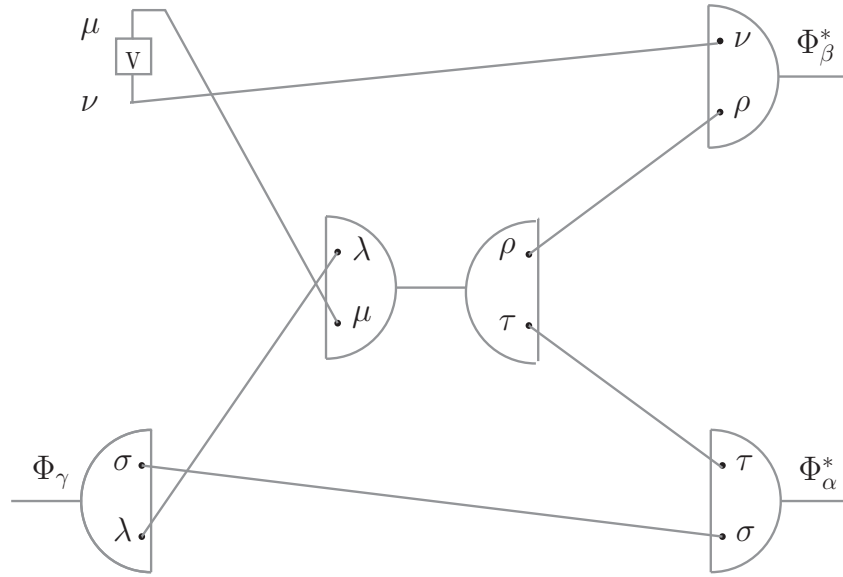
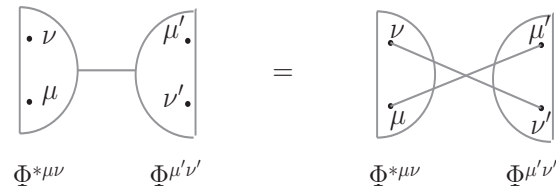


Fig. 3.3: Segundo diagrama de  $\delta H_m$ .



**Fig. 3.4:** Terceiro diagrama de  $\delta H_m$ .

As regras diagramáticas mostradas para a Fig. 3.1 continuam válidas para a correção. Deve ser observada a existência de um cruzamento de linhas de quark implícito dentro do kernel de estado ligado  $\Delta$  (ver Fig. 3.5), fazendo com que ele gere um sinal positivo (um cruzamento de linhas mais uma  $\phi^*$ ).



**Fig. 3.5:** Representação diagramática do kernel de estado ligado  $\Delta(\mu'\nu'; \mu\nu) = \Phi^{\mu'\nu'} \Phi^{*\mu\nu}$ .

Semelhante ao que ocorre no modelo  ${}^3P_0$ , para determinar a taxa de decaimento no modelo  $C^3P_0$  é necessário avaliar o elemento de matriz do Hamiltoniano  $H^{C3P0}$

$$\langle BC | H^{C3P0} | A \rangle = \delta(\vec{P}_A - \vec{P}_B - \vec{P}_C) h_{fi}, \quad (3.31)$$

onde, agora,  $h_{fi}$  é a amplitude de decaimento corrigida.

Combinando esta amplitude com o espaço de fase relativístico, obtemos a taxa de decaimento

$$\Gamma_{A \rightarrow BC} = 2\pi P \frac{E_B E_C}{M_A} \int d\Omega |h_{fi}|^2 \quad (3.32)$$

onde

$$\begin{aligned}\vec{p}_A &= 0 \\ P &= |\vec{p}_B| = |\vec{p}_C|.\end{aligned}\quad (3.33)$$

Novamente os resultados para decaimentos podem ser expressos em função da amplitude  $\mathcal{M}_{LBCS_{BC}}$  e desta forma a taxa  $\Gamma_{A \rightarrow BC}$  fica reescrita

$$\Gamma_{A \rightarrow BC} = 2\pi P \frac{E_B E_C}{M_A} \sum_{LS} |\mathcal{M}_{LS}|^2. \quad (3.34)$$

Sendo que no modelo  $C^3P_0$

$$\mathcal{M}_{LS} = \frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \left[ \mathcal{P}_{LS}(x) e^{-x^2/12} + \mathcal{C}_{LS}(x) e^{-(9x^2)/28} \right], \quad (3.35)$$

onde o primeiro termo corresponde à amplitude do modelo  ${}^3P_0$  e o segundo é a amplitude proveniente da correção de estado ligado, sendo  $\mathcal{C}_{LS}(x)$  um polinômio.

O modelo  $C^3P_0$  foi deduzido em detalhes em [24]-[27], onde foram obtidos os operadores transformados em mais alta ordem e aplicados aos mésons leves. A Tabela 3.1 mostra os resultados para os decaimentos de sete mésons leves [25, 27]. O canal  $b_1 \rightarrow \omega\pi$  é experimentalmente bem conhecido e foi usado, em ambos modelos, como calibrador. Os parâmetros livres foram ajustados para esse decaimento e utilizados no cálculo dos demais canais. O melhor ajuste para o modelo  ${}^3P_0$  foi com  $\gamma = 0.506$  e  $\beta = 0.397$  GeV . Para o  $C^3P_0$ :  $\gamma = 0.535$  e  $\beta = 0.387$  GeV .

Decaimento	$\Gamma$ (MeV)			D/S		
	Exp [58]	${}^3P_0$	$C^3P_0$	Exp [58]	${}^3P_0$	$C^3P_0$
$\rho \rightarrow \pi\pi$	149.4	81	111			
$f_2 \rightarrow \pi\pi$	156.7	170	181			
$a_2 \rightarrow \rho\pi$	75 (modo $3\pi$ )	52	47			
$a_1 \rightarrow \rho\pi$	250 to 600	543	536	-0.108(16)	-0.149	-0.121
$b_1 \rightarrow \omega\pi$	142	143	143	0.277(27)	0.288	0.288
$h_1 \rightarrow \rho\pi$	360	378	374	-	0.215	0.214
$f_0(1370) \rightarrow \pi\pi$	126 - 460	225	198			

**Tab. 3.1:** Taxas de decaimento:  ${}^3P_0$  ( $\gamma = 0.506$  ;  $\beta = 0.397$  GeV ) e  $C^3P_0$  ( $\gamma = 0.535$  ;  $\beta = 0.387$  GeV )

Na Tab. 3.1, o único canal onde o modelo  ${}^3P_0$  estimou melhor os resultados quando comparado com o  $C^3P_0$  foi para o decaimento do  $f_2$ . O valor experimental da taxa de



decaimento total do  $a_2$  para o modo  $3\pi$  é 75 MeV. Esse resultado compreende três canais:  $a_2 \rightarrow \rho(770)\pi$ ,  $a_2 \rightarrow f_2(1270)\pi$  e  $a_2 \rightarrow \rho(1450)\pi$ . Em nosso cálculo, consideramos apenas o primeiro canal, não sendo possível definir qual modelo corresponde ao melhor ajuste. Uma importante melhora com a correção foi obtida para a taxa de decaimento do  $\rho \rightarrow \pi\pi$  e na razão entre as ondas parciais D e S para  $a_1 \rightarrow \rho\pi$ . Os resultados encontrados foram encorajadores, fato que nos levou a estudar setores mais pesados com mesóns que possuem quarks  $s$  e/ou  $c$  em sua composição.

No próximo capítulo começa a parte inédita deste trabalho de doutorado, onde estudaremos os decaimentos de mésons  $\phi$  com a utilização do modelo  $C^3P_0$ .

## Capítulo 4

# Decaimentos de Mésons $\phi$

No capítulo anterior vimos como o modelo  $C^3P_0$  é obtido através do Formalismo de Fock-Tani, onde o hamiltoniano  $H^{C^3P_0}$  foi deduzido. Neste capítulo, vamos utilizar esse hamiltoniano fenomenológico para obter as taxas de decaimento dos mésons  $\phi(1020)$ ,  $\phi(1680)$ ,  $\phi(2050)$ ,  $\phi_1(1850)$ ,  $\phi_2(1850)$  e  $\phi_3(1850)$ . Para isso, é necessário primeiramente encontrar as amplitudes de decaimento. O ajuste numérico dos parâmetros livres do modelo será feito para  $\phi(1020)$ ,  $\phi(1680)$  e  $\phi_3(1850)$ , pois somente estes  $\phi$ 's possuem dados experimentais. Com o ajuste feito será possível fazer estimativas para as taxas de decaimento de  $\phi(2050)$ ,  $\phi_1(1850)$ ,  $\phi_2(1850)$ , os quais ainda não foram detectados experimentalmente.

Um estudo destes decaimentos foi feito por Ted Barnes [34] através do modelo  $^3P_0$ , onde ele considerou os  $\phi$ 's como estranhônios, ou seja, formados por pares  $s\bar{s}$ . Em nosso trabalho, consideramos os  $\phi$ 's dados por misturas do tipo  $c_1 [u\bar{u} + d\bar{d}] + c_2 s\bar{s}$  e encontramos as taxas de decaimento utilizando o modelo  $C^3P_0$ . Os coeficientes de mistura  $c_1$  e  $c_2$  serão determinados durante o ajuste numérico.

## 4.1 Amplitudes de Decaimento

Nesta seção vamos expor detalhes do cálculo das amplitudes de decaimento dos seguintes canais teóricos [34]:

$$\begin{array}{c}
 \phi(1020) \rightarrow KK \\
 \\
 \phi(1680) \rightarrow \begin{cases} KK \\ KK^* \\ \eta\phi \end{cases} \\
 \\
 \phi(2050) \rightarrow \begin{cases} KK \\ KK^* \\ K^*K^* \\ KK_1(1270) \\ KK_1(1400) \\ KK_0^*(1430) \\ KK_2^*(1430) \\ KK^*(1410) \\ KK(1460) \\ \eta\phi \\ \eta'\phi \\ \eta h_1(1380) \end{cases} \\
 \\
 \phi_1(1850) \rightarrow K^*K^* \\
 \\
 \phi_2(1850) \rightarrow \begin{cases} KK \\ KK^* \\ K^*K^* \\ \eta\phi \end{cases} \\
 \\
 \phi_3(1850) \rightarrow \begin{cases} KK \\ KK^* \\ K^*K^* \\ KK_1(1270) \\ \eta\phi \end{cases}
 \end{array} \quad (4.1)$$

Para obter as amplitudes de decaimento, devemos partir do elemento de matriz (3.31), ou seja,

$$\langle f | H^{C3P0} | i \rangle = \delta(\vec{p}_\gamma - \vec{p}_\beta - \vec{p}_\alpha) h_{fi}$$

$$\langle f | (H_m + \delta H_m) | i \rangle = \delta(\vec{p}_\gamma - \vec{p}_\beta - \vec{p}_\alpha) h_{fi}, \quad (4.2)$$

onde consideramos a transição  $m_\gamma \rightarrow m_\alpha + m_\beta$  e os estados inicial e final

$$\begin{aligned}
 |i\rangle &= m_\gamma^\dagger |0\rangle \\
 |f\rangle &= m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger |0\rangle.
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Para resolver o elemento de matriz (4.2) separamos a equação em duas partes. A primeira delas, que contém  $H_m$ , chamamos de termo *sem correção* de estado ligado e é dado por

$$\langle f | H_m | i \rangle = -\Phi_{\alpha'}^{*\mu\lambda} \Phi_{\beta'}^{*\rho\nu} \Phi_{\gamma'}^{\rho\lambda} V_{\mu\nu} \langle 0 | m_\alpha m_\beta m_{\alpha'}^\dagger m_{\beta'}^\dagger m_{\gamma'} m_\gamma^\dagger | 0 \rangle \quad (4.4)$$

que resulta em

$$\langle f | H_m | i \rangle = -d_1 - d_2 \quad (4.5)$$

onde

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \Phi_\alpha^{*\rho\nu} \Phi_\beta^{*\mu\lambda} \Phi_\gamma^{\rho\lambda} V_{\mu\nu} \\
 d_2 &= \Phi_\alpha^{*\mu\lambda} \Phi_\beta^{*\rho\nu} \Phi_\gamma^{\rho\lambda} V_{\mu\nu}.
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

A segunda parte de (4.2), que contém  $\delta H_m$ , chamamos de termo *com correção* de estado ligado. Este por sua vez pode ser subdividido em três outros termos, como veremos a seguir

$$\begin{aligned} \langle f | \delta H_m | i \rangle &= -\frac{1}{4} V_{\mu\nu} \left\{ \Phi_{\alpha'}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta'}^{*\mu\tau} \Delta(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_{\gamma'}^{\lambda\sigma} \right\} \langle 0 | m_\alpha m_\beta m_{\alpha'}^\dagger m_{\beta'}^\dagger m_{\gamma'} m_{\gamma'}^\dagger | 0 \rangle \\ &+ \frac{1}{2} V_{\mu\nu} \left\{ \Phi_{\alpha'}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta'}^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau; \mu\nu) \Phi_{\gamma'}^{\lambda\sigma} \right\} \langle 0 | m_\alpha m_\beta m_{\alpha'}^\dagger m_{\beta'}^\dagger m_{\gamma'} m_{\gamma'}^\dagger | 0 \rangle \\ &- \frac{1}{4} V_{\mu\nu} \left\{ \Phi_{\alpha'}^{*\rho\nu} \Phi_{\beta'}^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau; \mu\sigma) \Phi_{\gamma'}^{\lambda\sigma} \right\} \langle 0 | m_\alpha m_\beta m_{\alpha'}^\dagger m_{\beta'}^\dagger m_{\gamma'} m_{\gamma'}^\dagger | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (4.7)$$

que resulta em

$$\begin{aligned} \langle f | \delta H_m | i \rangle &= -d_1^1 - d_2^1 \\ &\quad -d_1^2 - d_2^2 \\ &\quad -d_1^3 - d_2^3, \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde introduzimos a seguinte notação

$$\begin{aligned} d_1^1 &= \frac{1}{4} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\mu\tau} \Delta(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} V_{\mu\nu} \\ d_2^1 &= \frac{1}{4} \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Phi_\beta^{*\rho\sigma} \Delta(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} V_{\mu\nu} \\ d_1^2 &= -\frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau; \mu\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} V_{\mu\nu} \\ d_2^2 &= -\frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\lambda\tau} \Phi_\beta^{*\rho\sigma} \Delta(\rho\tau; \mu\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} V_{\mu\nu} \\ d_1^3 &= \frac{1}{4} \Phi_\alpha^{*\rho\nu} \Phi_\beta^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau; \mu\sigma) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} V_{\mu\nu} \\ d_2^3 &= \frac{1}{4} \Phi_\alpha^{*\lambda\tau} \Phi_\beta^{*\rho\nu} \Delta(\rho\tau; \mu\sigma) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} V_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Em  $d_{1(2)}^i$ , o índice  $i = 1, 2, 3$  representa o primeiro, segundo e terceiro termo da correção, respectivamente.

Das Eqs.(4.2)-(4.9) nota-se que para obter os elementos de matriz  $h_{fi}$  é necessário definir as funções de onda  $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$  e o potencial  $V_{\mu\nu}$  (A.19). Considerando os graus de liberdade cor  $C$ , sabor  $f$ , spin  $\chi$  e espaço  $\Phi$ , cada função de onda do méson pode ser escrita na forma

$$\Phi_\alpha^{\mu\nu} = C^{c_\mu c_\nu} f_{f_\alpha}^{f_\mu f_\nu} \chi_{S_\alpha}^{s_\mu s_\nu} \Phi_{nl}(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu), \quad (4.10)$$

possibilitando calcular cor, sabor e spin-espaço separadamente. Podemos, então, redefinir as Eqs.(4.6) e (4.9) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} d_1 &= d_1^c d_1^f d_1^{s-e} \\ d_2 &= d_2^c d_2^f d_2^{s-e} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
 d_1^1 &= \frac{1}{4} d_1^{1c} d_1^{1f} d_1^{1s-e} \\
 d_2^1 &= \frac{1}{4} d_2^{1c} d_2^{1f} d_2^{1s-e} \\
 d_1^2 &= -\frac{1}{2} d_1^{2c} d_1^{2f} d_1^{2s-e} \\
 d_2^2 &= -\frac{1}{2} d_2^{2c} d_2^{2f} d_2^{2s-e} \\
 d_1^3 &= \frac{1}{4} d_1^{3c} d_1^{3f} d_1^{3s-e} \\
 d_2^3 &= \frac{1}{4} d_2^{3c} d_2^{3f} d_2^{3s-e}.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

No lado direito da Eq. (4.11), cada  $d_{1(2)}^a$  possui três funções de onda (uma para o estado inicial e duas para o estado final). Já em (4.12), cada  $d_{1(2)}^{ia}$  é formado por cinco funções de onda. Além daquelas dos estados inicial e final, há mais duas originárias do kernel de estado ligado  $\Delta$ .

A função de onda de cor, idêntica para todos os mésons, é dada por

$$C^{c_\mu c_\nu} = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{c_\mu c_\nu} \quad ; \quad c_k = 1, 2, 3. \tag{4.13}$$

As componentes de sabor para os mésons (4.1) dependem do isospin  $I$  e da estranheza  $s$

$I = 0$

$$\phi, \eta, \eta', h_1 \rightarrow c_1 (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle) + c_2 |s\bar{s}\rangle \tag{4.14}$$

$I = 1/2, s = +1$

$$\begin{aligned}
 K^+ &\rightarrow -|u\bar{s}\rangle \quad ; \quad I_z = +1/2 \\
 K^0 &\rightarrow -|d\bar{s}\rangle \quad ; \quad I_z = -1/2
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

$I = 1/2, s = -1$

$$\begin{aligned}
 \bar{K}^0 &\rightarrow -|s\bar{d}\rangle \quad ; \quad I_z = +1/2 \\
 K^- &\rightarrow |s\bar{u}\rangle \quad ; \quad I_z = -1/2.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

As Eqs. (4.15)-(4.16) também são válidas para os mésons  $K_1, K^*, K_0^*$  e  $K_2^*$ . Os coeficientes  $c_1$  e  $c_2$ , em (4.14), serão fixados no momento do cálculo numérico, assumindo valores diferentes para cada méson.

As funções de onda de spin podem ser de singlete ou tripleto

Singlete ( $S = 0$ )

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad ; \quad S_z = 0 \tag{4.17}$$

Tripleto ( $S = 1$ )

$$\begin{aligned}
 & | \uparrow \uparrow \rangle && ; && S_z = +1 \\
 & \frac{1}{\sqrt{2}} (| \uparrow \downarrow \rangle + | \downarrow \uparrow \rangle) && ; && S_z = 0 \\
 & | \downarrow \downarrow \rangle && ; && S_z = -1.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Na parte espacial utilizamos funções de onda do tipo oscilador harmônico, pois elas descrevem o confinamento de cor e fornecem amplitudes analíticas

$$\Phi_{nl}(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu) = \delta(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu) \phi_{nl}(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu), \tag{4.19}$$

onde  $\phi_{nl}(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)$  é dada por

$$\begin{aligned}
 \phi_{nl}(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu) &= \left(\frac{1}{2\beta}\right)^l N_{nl} |\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu|^l \exp\left[-\frac{(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)^2}{8\beta^2}\right] \\
 &\times \mathcal{L}_{n-1}^{l+\frac{1}{2}}\left[\frac{(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)^2}{4\beta^2}\right] Y_{lm}(\Omega_{\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu}),
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

sendo  $p_{\mu(\nu)}$  o momento interno,  $Y_{lm}$  o harmônico esférico e  $\beta$  a largura das gaussianas. A constante de normalização  $N_{nl}$  e os polinômios de Laguerre  $\mathcal{L}_{n-1}^{l+\frac{1}{2}}(p)$  dependem dos números quânticos radial  $n$  e orbital  $l$

$$N_{nl} = \left[ \frac{2(n-1)!}{\beta^3 \Gamma(n+l+1/2)} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.21}$$

$$\mathcal{L}_{n-1}^{l+\frac{1}{2}}(p) = \sum_{k=0}^n \frac{(-)^k \Gamma(n+l+1/2)}{k! (n-k-1)! \Gamma(k+l+3/2)} p^k, \tag{4.22}$$

onde  $n = 1, 2, \dots$  e  $l = 0, 1, \dots$

Para a determinação das funções de onda de spin e espaço a serem utilizadas, é necessário saber a notação espectroscópica  $n^{2S+1}L_J$  dos mésons. Estes números quânticos estão listados na Tab. (4.1). Completam a tabela os mésons  $K_1(1270)$  e  $K_1(1400)$  que são dados pela mistura

$$\begin{aligned}
 |K_1(1270)\rangle &= +\cos\theta |1^1P_1\rangle + \sin\theta |1^3P_1\rangle \\
 |K_1(1400)\rangle &= -\sin\theta |1^1P_1\rangle + \cos\theta |1^3P_1\rangle.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Se forem antikáons há uma mudança de sinal

$$\begin{aligned}
 |\bar{K}_1(1270)\rangle &= -\cos\theta |1^1P_1\rangle + \sin\theta |1^3P_1\rangle \\
 |\bar{K}_1(1400)\rangle &= +\sin\theta |1^1P_1\rangle + \cos\theta |1^3P_1\rangle.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

$n \ 2S+1 L_J$	méson
$1 \ 1S_0$	$\eta, \eta', K$
$1 \ 3S_1$	$\phi(1020), K^*$
$1 \ 1P_1$	$h_1(1380)$
$1 \ 3P_0$	$K_0^*(1430)$
$1 \ 3P_2$	$K_2^*(1430)$
$1 \ 3D_1$	$\phi_1(1850)^\ddagger$
$1 \ 3D_2$	$\phi_2(1850)^\ddagger$
$1 \ 3D_3$	$\phi_3(1850)$
$2 \ 1S_0$	$K(1460)$
$2 \ 3S_1$	$\phi(1680), K^*(1410)$
$3 \ 3S_1$	$\phi(2050)^\ddagger$

**Tab. 4.1:** Notação espectroscópica  $n^{2S+1}L_J$  dos mésons (4.1).

$\ddagger$  não detectados experimentalmente.

Para o cálculo da cor utilizamos a função de onda e o potencial dados pelas Eqs. (4.13) e (A.15). No termo sem correção de estado ligado temos

$$\begin{aligned}
 d_1^c &= C^{c\rho c\nu} C^{c\mu c\lambda} C^{c\rho c\lambda} V_{c\mu c\nu}^c \\
 &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \delta^{c\rho c\nu} \delta^{c\mu c\lambda} \delta^{c\rho c\lambda} \delta^{c\mu c\nu} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 d_2^c &= C^{c\mu c\lambda} C^{c\rho c\nu} C^{c\rho c\lambda} V_{c\mu c\nu}^c \\
 &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \delta^{c\mu c\lambda} \delta^{c\rho c\nu} \delta^{c\rho c\lambda} \delta^{c\mu c\nu} = \frac{1}{\sqrt{3}}.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Procedendo de maneira análoga, encontramos para os termos com correção de estado ligado

$$\begin{aligned}
 d_1^{1c} &= d_2^{1c} = d_1^{3c} = d_2^{3c} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \\
 d_1^{2c} &= d_2^{2c} = \frac{1}{\sqrt{3}}.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Como o cálculo independe dos mésons envolvidos, as Eqs. (4.25) e (4.26) são válidas para todos os processos de decaimentos.

Já para os fatores de sabor e spin-espaco, o cálculo está intimamente ligado aos mésons envolvidos no processo em estudo. Mas de forma geral, sabemos que a maneira de calcular os fatores de sabor é semelhante à empregada no cálculo da cor. Sabemos também que as integrais spin-espaco partem sempre de uma forma padrão, que mostraremos a seguir.

O elemento de matriz (4.2) é proporcional a uma  $\delta$  de conservação de momento. Por ser um termo global e não fazer parte da amplitude  $h_{fi}$ , a delta não está incluída no cálculo spin-espaco. As integrais do cálculo spin-espaco, com e sem correção de estado ligado, são da forma

Sem correção

$$d_1^{s-e} = -2 a_{ij} \gamma \int d^3 K \chi_i^* (\vec{\sigma} \cdot \vec{K}) \chi_j^c \phi^* (2\vec{K} + \vec{P}) \phi^* (2\vec{K} + \vec{P}) \phi (2\vec{K} + 2\vec{P}) \quad (4.27)$$

1º termo da correção

$$\begin{aligned} d_1^{1s-e} &= -2 a_{1ij} \gamma \int d^3 K d^3 q \chi_i^* (\vec{\sigma} \cdot \vec{K}) \chi_j^c \\ &\times \phi^* (2\vec{q} + \vec{P}) \phi^* (2\vec{K} + \vec{P}) [\phi (\vec{q} + \vec{K} + 2\vec{P}) \phi^* (\vec{q} + \vec{K})] \phi (2\vec{q}) \end{aligned} \quad (4.28)$$

2º termo da correção

$$\begin{aligned} d_1^{2s-e} &= -2 a_{2ij} \gamma \int d^3 K d^3 q \chi_i^* (\vec{\sigma} \cdot \vec{K}) \chi_j^c \\ &\times \phi^* (2\vec{q} + \vec{P}) \phi^* (2\vec{q} + \vec{P}) [\phi (2\vec{q} + 2\vec{P}) \phi^* (2\vec{K})] \phi (2\vec{q}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

3º termo da correção

$$\begin{aligned} d_1^{3s-e} &= -2 a_{3ij} \gamma \int d^3 K d^3 q \chi_i^* (\vec{\sigma} \cdot \vec{K}) \chi_j^c \\ &\times \phi^* (2\vec{q} - \vec{P}) \phi^* (2\vec{K} - \vec{P}) [\phi (\vec{q} + \vec{K} - 2\vec{P}) \phi^* (\vec{q} + \vec{K})] \phi (2\vec{q}), \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde  $a_{ij} = \chi_\alpha^{s\rho s\nu} \chi_\beta^{s\mu s\lambda} \chi_\gamma^{s\rho s\lambda}$  é um número resultante do produto das funções de onda de spin dos mésons envolvidos no decaimento. Os coeficientes  $a_{1ij}$ ,  $a_{2ij}$  e  $a_{3ij}$  são obtidos de maneira semelhante para o primeiro, segundo e terceiro termo da correção, respectivamente. As funções de onda entre colchetes são do kernel de estado ligado.

As matrizes de Pauli são dadas por

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

e os espinores

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \chi_1^c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \chi_2^c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Para obter as expressões  $d_2^{is-e}$  basta trocar  $\vec{P} \rightarrow -\vec{P}$  em (4.27)-(4.30).

Para as resoluções dos fatores de sabor e spin-espaco é essencial notar que na definição do kernel de estado ligado, Eq. (3.27), há uma contração implícita no índice  $\alpha'$  que implica



numa *soma sobre espécies*. Como a função de onda  $\Phi$  que é contraída nesta expressão é do estado ligado do espectro mesônico, qualquer méson do respectivo multiplete pode ser considerado nesta soma. Em nossos cálculos, devido à simetria do problema, os estados possíveis de pertencer à correção devem ter  $|n^{2S+1}L_J\rangle$  e isospin

$$|1^1S_0\rangle \quad \text{e} \quad I = 0 \quad (\text{tipo } \eta, \eta') \quad (4.33)$$

ou

$$|1^3S_1\rangle \quad \text{e} \quad I = 0 \quad (\text{tipo } \phi, \omega). \quad (4.34)$$

Adotamos a nomenclatura relativa aos mésons  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\phi$  e  $\omega$  para designar estes estados do kernel  $\Delta(\mu\nu; \rho\sigma)$ , que passa a ser escrito como

$$\Delta(\mu\nu; \rho\sigma) = \Delta_\eta(\mu\nu; \rho\sigma) + \Delta_{\eta'}(\mu\nu; \rho\sigma) + \Delta_\phi(\mu\nu; \rho\sigma) + \Delta_\omega(\mu\nu; \rho\sigma). \quad (4.35)$$

Os fatores de sabor, com e sem correção, são obtidos com o uso das Eqs. (4.14)-(4.16) e (A.14). Os resultados estão incluídos nas amplitudes (B.2)-(B.27), onde os coeficientes de mistura dos mésons da correção estão diferenciados dos demais pela notação  $c_1^{\eta\Delta}$ ,  $c_2^{\eta\Delta}$ , ...,  $c_2^{\omega\Delta}$ .

As funções de onda espaciais são caracterizadas pelo parâmetro  $\beta$ , que é a largura das gaussianas. Consideramos que cada partícula envolvida no decaimento tem seu próprio  $\beta$ . Assim o  $\phi(1020)$  tem a largura  $\beta_\phi$ , o  $\phi(1680)$  tem  $\beta_{\phi_{1680}}$  e assim por diante. Os mésons virtuais, que fazem parte do kernel de estado ligado, também têm suas próprias larguras, sendo diferenciados dos demais pela notação  $\beta_{\eta_\Delta}$ ,  $\beta_{\eta'_\Delta}$ ,  $\beta_{\phi_\Delta}$  e  $\beta_{\omega_\Delta}$ .

Os resultados algébricos das amplitudes de decaimento  $h_{fi}$ , que obtivemos para os mésons  $\phi$ , encontram-se no apêndice B.

## 4.2 Resultados Numéricos das Taxas de Decaimento

Nesta seção, apresentamos os resultados numéricos para as taxas de decaimento dos mésons  $\phi(1020)$ ,  $\phi(1680)$ ,  $\phi(2050)$ ,  $\phi_1(1850)$ ,  $\phi_2(1850)$  e  $\phi_3(1850)$  e como eles foram obtidos.

Com as amplitudes (B.2)-(B.27), obtemos as taxas de decaimento para os subprocessos de forma algébrica através da Eq.(3.32). Para que todos os subprocessos estejam incluídos nos resultados, é necessário multiplicar a taxa de decaimento  $\Gamma$  por seu respectivo fator de multiplicidade  $\mathcal{F}$ . Por exemplo, para o decaimento  $\phi \rightarrow KK$  os subprocessos possíveis são:  $\phi \rightarrow K^+K^-$  e  $\phi \rightarrow K^0\bar{K}^0$ . Devemos, portanto, multiplicar a taxa de decaimento  $\Gamma_{\phi \rightarrow K^+K^-}$  por seu fator de multiplicidade  $\mathcal{F}=2$  para que tenhamos a taxa de decaimento total  $\Gamma_{\phi \rightarrow KK}$ . Os valores de  $\mathcal{F}$  estão relacionados com o sabor dos mésons do decaimento, como mostra a tabela (4.2).

Decaimento Genérico	Exemplo	$\mathcal{F}$
$\phi \rightarrow (n\bar{s})(s\bar{n})$	$\phi_3(1850) \rightarrow KK$	2
$\phi \rightarrow (n\bar{s})(s\bar{n})'$	$\phi(1680) \rightarrow KK^*$	4
$\phi \rightarrow (m)_{I=0}(m)_{I=0}^{(1)}$	$\phi(2050) \rightarrow \eta\phi$	1

**Tab. 4.2:** Fator de multiplicidade  $\mathcal{F}$ .

$$(1) \quad (m)_{I=0} = c_1(u\bar{u} + d\bar{d}) + c_2(s\bar{s}).$$

Para ajustar os resultados numéricos aos dados experimentais é necessário fazer a escolha adequada dos parâmetros da teoria. Os valores experimentais que utilizamos foram extraídos do Review of Particle Physics-2010, elaborado pelo Particle Data Group (PDG) [12]. Como podemos ver nas Tabs.(4.3)-(4.4) existem poucos dados experimentais para estes mésons. Na realidade, os mésons  $\phi(2050)$ ,  $\phi_1(1850)$ ,  $\phi_2(1850)$  são apenas teóricos [34].

$\phi(1020)$		$\phi(1680)$		$\phi_3(1850)$	
Decaimento	$\Gamma$ (MeV)	Decaimento	$\Gamma$ (MeV)	Decaimento	$\Gamma$ (MeV)
$K^+K^-$	$2.08 \pm 0.04$	$KK^*$	dominante	$KK^*$	observado
		$KK$	observado	$KK$	observado
		$\eta\phi$			
Total	$4.26 \pm 0.04$		$150 \pm 50$		$87^{+28}_{-23}$

**Tab. 4.3:** Valores experimentais [12] das taxas de decaimento para  $\phi(1020)$ ,  $\phi(1680)$  e  $\phi_3(1850)$ .

$\phi(1680)$		$\phi_3(1850)$
$\Gamma_{KK}/\Gamma_{KK^*}$	$\Gamma_{\eta\phi}/\Gamma_{KK^*}$	$\Gamma_{KK^*}/\Gamma_{KK}$
$0,07 \pm 0,01$	$\approx 0,37$	$0,55^{+0,85}_{-0,45}$

**Tab. 4.4:** Valores experimentais das razões entre as taxas de decaimento [12] para  $\phi(1680)$  e  $\phi_3(1850)$ .

As massas que assumimos foram obtidas em [12], com exceção das massas do  $\phi(2050)$ ,  $\phi_1(1850)$ ,  $\phi_2(1850)$  obtidas em [34]. São elas:

$$\begin{aligned}
 M_{\phi(1020)} &= 1.01945 \text{ GeV}, & M_{\phi(1680)} &= 1.680 \text{ GeV}, & M_{\phi(2050)} &= 2.050 \text{ GeV}, \\
 M_{\phi_1(1850)} &= 1.850 \text{ GeV}, & M_{\phi_2(1850)} &= 1.850 \text{ GeV}, & M_{\phi_3(1850)} &= 1.854 \text{ GeV}, \\
 M_{\eta} &= 0.54785 \text{ GeV}, & M_{\eta'} &= 0.95778 \text{ GeV}, & M_K &= 0.49367 \text{ GeV},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{K^*} &= 0.89166 \text{ GeV}, \quad M_{K_1(1270)} = 1.272 \text{ GeV}, \quad M_{K_1(1400)} = 1.403 \text{ GeV}, \\
 M_{K_0^*(1430)} &= 1.425 \text{ GeV}, \quad M_{K_2^*(1430)} = 1.4256 \text{ GeV}, \quad M_{K^*(1410)} = 1.414 \text{ GeV}, \\
 M_{K(1460)} &= 1.460 \text{ GeV}, \quad M_{h_1(1380)} = 1.386 \text{ GeV}.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Optamos por usar o valor característico do parâmetro das gaussianas para mésons leves  $\beta_i = 0.4 \text{ GeV}$  [34] para todos os mésons reais, ou seja, todos aqueles pertencentes ao estado inicial ou final. O valor de  $\gamma$  e o ângulo  $\theta$  em (4.23) também foram fixados de acordo com [34]:  $\gamma = 0.4$  e  $\theta \simeq 35.3^\circ$  ( $\cos \theta = \sqrt{2/3}$ ,  $\sin \theta = \sqrt{1/3}$ ). Os coeficientes do méson  $h_1(1380)$ , que é considerado um puro  $n\bar{n}$ , são tomados como  $c_1^{h_1} = 1/\sqrt{2}$  e  $c_2^{h_1} = 0$ . Restaram ainda, como parâmetros livres, as larguras das gaussianas  $\beta_i$  para os mésons virtuais, aqueles que fazem parte da correção, e os coeficientes  $c_1^i$  e  $c_2^i$  para os mésons da Eq. (4.14), com exceção dos coeficientes do  $h_1$  que já foram fixados.

Os coeficientes dos mésons pseudo-escalares  $\eta$  e  $\eta'$  estão relacionados através do ângulo de mistura  $\theta_p$

$$\begin{aligned}
 \eta &= \left[ \frac{\cos \theta_P}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \theta_P \right] \frac{1}{\sqrt{2}} [u\bar{u} + d\bar{d}] - \left[ \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \theta_P + \frac{\sin \theta_P}{\sqrt{3}} \right] s\bar{s} \\
 \eta' &= \left[ \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \theta_P + \frac{\sin \theta_P}{\sqrt{3}} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} [u\bar{u} + d\bar{d}] + \left[ \frac{\cos \theta_P}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \theta_P \right] s\bar{s}.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

De maneira análoga, os coeficientes dos mésons vetoriais  $\phi(1020)$  e  $\omega$  estão relacionados através do ângulo  $\theta_v$ .

Os parâmetros foram ajustados para os mésons  $\phi(1020)$ ,  $\phi(1680)$  e  $\phi_3(1850)$ , que possuem dados experimentais, e utilizados para fazer uma estimativa das taxas de decaimento dos mésons  $\phi(2050)$ ,  $\phi_1(1850)$  e  $\phi_2(1850)$ , que são teóricos.

Em nosso ajuste, consideramos que  $c_i^{\eta(\eta')}$  e  $c_i^{\eta_\Delta(\eta'_\Delta)}$  são dados por um mesmo ângulo de mistura  $\theta_p$ . O mesmo acontecendo com  $c_i^{\phi(\omega)}$  e  $c_i^{\phi_\Delta(\omega_\Delta)}$  dados por um ângulo  $\theta_v$ . Desta forma, os parâmetros livres a serem ajustados são:  $\theta_p$ ,  $\theta_v$ ,  $\theta_{v(1680)}$ ,  $\theta_{v_3}$ ,  $\beta_{\eta_\Delta}$ ,  $\beta_{\eta'_\Delta}$ ,  $\beta_{\phi_\Delta}$  e  $\beta_{\omega_\Delta}$ . Onde  $\theta_v$ ,  $\theta_{v(1680)}$  e  $\theta_{v_3}$  são os ângulos de mistura de  $\phi(1020)$ ,  $\phi(1680)$  e  $\phi_3(1850)$ , respectivamente.

De acordo com os valores previstos para os ângulos de mistura [12], variamos  $\theta_p$  entre  $-20^\circ$  e  $-10^\circ$  e  $\theta_v$  entre  $26^\circ$  e  $35^\circ$ . Os  $\beta_{i_\Delta}$ 's foram variados na faixa  $0.3 - 0.6 \text{ GeV}$ . O melhor ajuste que obtivemos para  $\phi(1020)$  foi com  $\theta_p = -10^\circ$ ,  $\theta_v = 26^\circ$ ,  $\beta_{\eta_\Delta} = 0.3 \text{ GeV}$  e  $\beta_{\eta'_\Delta} = 0.4 \text{ GeV}$ , como mostra a tabela 4.5. Neste caso não há correção em  $\phi$  e  $\omega$ . Para o méson  $\phi(1680)$ , além dos ângulos  $\theta_p = -10^\circ$  e  $\theta_v = 26^\circ$  já definidos, o melhor ajuste foi com os valores:  $\theta_{v(1680)} = 35^\circ$ ,  $\beta_{\eta_\Delta} = 0.6 \text{ GeV}$ ,  $\beta_{\eta'_\Delta} = 0.3 \text{ GeV}$ ,  $\beta_{\phi_\Delta} = 0.4 \text{ GeV}$  e  $\beta_{\omega_\Delta} = 0.6 \text{ GeV}$ . Os resultados estão nas tabelas 4.6 e 4.7. Para o  $\phi_3(1850)$  os parâmetros que resultaram no melhor ajuste, mostrados nas tabelas 4.8 e 4.9, foram:  $\theta_p = -10^\circ$ ,  $\theta_v = 26^\circ$ ,  $\theta_{v_3} = 35^\circ$ ,  $\beta_{\eta_\Delta} = 0.6 \text{ GeV}$ ,  $\beta_{\eta'_\Delta} = 0.4 \text{ GeV}$ ,  $\beta_{\phi_\Delta} = 0.6 \text{ GeV}$  e  $\beta_{\omega_\Delta} = 0.3 \text{ GeV}$ . Com os parâmetros

definidos, foi possível estimar as taxas de decaimento para os demais mésons:  $\phi(2050)$ ,  $\phi_1(1850)$ ,  $\phi_2(1850)$ . Estas estimativas estão nas tabelas 4.10– 4.12.

Decaimento	$\Gamma_{C^3P_0}$ (MeV)	$\Gamma_{exp}$ (MeV)
$K^+K^-$	2,06	$2,08 \pm 0.04$

**Tab. 4.5:** Taxa de decaimento de  $\phi(1020)$  para  $\theta_p = -10^\circ$ ,  $\theta_v = 26^\circ$ ,  $\beta_{\eta_\Delta} = 0.3$  GeV,  $\beta_{\eta'_\Delta} = 0.4$  GeV.

Decaimento	$\Gamma_{C^3P_0}$ (MeV)	$\Gamma_{exp}$ (MeV)
$KK$	87,42	observado
$KK^*$	122,38	dominante
$\eta\phi$	23,49	
$\Gamma^{tot}$ (MeV)	233,29	$150 \pm 50$

**Tab. 4.6:** Taxas de decaimento de  $\phi(1680)$  para  $\theta_p = -10^\circ$ ,  $\theta_v = 26^\circ$ ,  $\theta_{v(1680)} = 35^\circ$ ,  $\beta_{\eta_\Delta} = 0.6$  GeV,  $\beta_{\eta'_\Delta} = 0.3$  GeV,  $\beta_{\phi_\Delta} = 0.4$  GeV e  $\beta_{\omega_\Delta} = 0.6$  GeV.

$\Gamma_{KK}/\Gamma_{KK^*}$		$\Gamma_{\eta\phi}/\Gamma_{KK^*}$	
$C^3P_0$	Exp	$C^3P_0$	Exp
0,71	$0,07 \pm 0,01$	0,19	$\approx 0,37$

**Tab. 4.7:** Razões entre taxas de decaimento de  $\phi(1680)$ .

Na tabela 4.5, para  $\phi(1020)$ , vemos que a taxa de decaimento encontra-se dentro da faixa de valores experimentais. O mesmo não pode ser afirmado para  $\phi(1680)$ , como mostra a Tab. 4.6. Neste caso, a taxa de decaimento total ficou acima do valor experimental<sup>1</sup>. As razões  $\Gamma_{KK}/\Gamma_{KK^*}$  e  $\Gamma_{\eta\phi}/\Gamma_{KK^*}$ , na tabela 4.7, apresentaram resultados muito ruins, principalmente no primeiro caso. A explicação para essa discrepância pode estar no fato que os mésons vetoriais entre  $1^3D_1$  e  $2^3S_1$  (ver Tab. 4.1) podem ser misturas de  $1^3D_1$  e  $2^3S_1$ , ou ter componentes híbridos [12].

<sup>1</sup> Publicações recentes indicam valores experimentais mais altos para  $\Gamma^{tot}$  de  $\phi(1680)$ :  $211 \pm 14 \pm 19$  MeV em [59] e  $322 \pm 77 \pm 160$  MeV em [60].

Decaimento	$\Gamma_{C^3P_0}$ (MeV)	$\Gamma_{exp}$ (MeV)
$KK$	45,76	observado
$KK^*$	6,08	observado
$K^*K^*$	33,58	—
$KK_1(1270)$	0,92	—
$\eta\phi$	0,72	—
$\Gamma^{tot}$ (MeV)	87,06	$87^{+28}_{-23}$

**Tab. 4.8:** Taxas de decaimento de  $\phi_3(1850)$  para  $\theta_p = -10^\circ$ ,  $\theta_v = 26^\circ$ ,  $\theta_{v_3} = 35^\circ$ ,  $\beta_{\eta_\Delta} = 0.6$  GeV,  $\beta_{\eta'_\Delta} = 0.4$  GeV,  $\beta_{\phi_\Delta} = 0.6$  GeV e  $\beta_{\omega_\Delta} = 0.3$  GeV.

Nota: Sinais convencionais utilizados:

— não possui dados experimentais

$\Gamma_{KK^*}/\Gamma_{KK}$	
$C^3P_0$	Exp
0,13	$0,55^{+0,85}_{-0,45}$

**Tab. 4.9:** Razões das taxas de decaimento de  $\phi_3(1850)$ .

Ao analisarmos as tabelas 4.8 e 4.9, para  $\phi_3(1850)$ , vemos que o modelo apresentou resultados dentro da faixa de valores experimentais.

Nas tabelas 4.10, 4.11 e 4.12 temos estimativas das taxas de decaimento de  $\phi(2050)$ ,  $\phi_1(1850)$  e  $\phi_2(1850)$ , respectivamente. Em (1) e (3) utilizamos os  $\beta_{i_\Delta}$ 's definidos anteriormente para  $\phi(1680)$ , sendo que no primeiro caso consideramos o ângulo de mistura  $\theta_{v_i} = 26^\circ$  e no segundo  $\theta_{v_i} = 35^\circ$ . Em (2) e (4) os  $\beta_{i_\Delta}$ 's utilizados são aqueles ajustados para  $\phi_3(1850)$ , onde novamente temos para o primeiro caso o ângulo  $\theta_{v_i} = 26^\circ$  e no segundo  $\theta_{v_i} = 35^\circ$ .

Decaimento	$\Gamma$ (MeV)		$\Gamma$ (MeV)	
	$C^3P_0^{(1)}$	$C^3P_0^{(2)}$	$C^3P_0^{(3)}$	$C^3P_0^{(4)}$
$KK$	0,08	0,08	0,06	0,06
$KK^*$	7,59	7,60	9,89	9,90
$K^*K^*$	71,36	67,52	59,27	56,08
$KK_1(1270)$	5,90	6,02	6,37	6,51
$KK_1(1400)$	16,51	16,82	14,79	15,09
$KK_0^*(1430)$	0,00	0,00	0,00	0,00
$KK_2^*(1430)$	2,54	2,47	2,11	2,05
$KK^*(1410)$	36,33	34,91	47,34	45,50
$KK(1460)$	32,23	33,91	26,77	28,17
$\eta\phi$	9,49	9,57	10,11	10,20
$\eta'\phi$	4,52	4,56	4,48	4,52
$\eta h_1(1380)$	0,08	0,07	0,00	0,00
$\Gamma^{tot}$ (MeV)	186,63	183,53	181,19	178,08

**Tab. 4.10:** Taxas de decaimento de  $\phi(2050)$  para  $\theta_p = -10^\circ$ ,  $\theta_v = 26^\circ$  e

- (1)  $\theta_{v(2050)} = 26^\circ$ ,  $\beta_{\phi_\Delta} = 0,4$  GeV,  $\beta_{\omega_\Delta} = 0,6$  GeV,  $\beta_{\eta_\Delta} = 0,6$  GeV,  $\beta_{\eta'_\Delta} = 0,3$  GeV.
- (2)  $\theta_{v(2050)} = 26^\circ$ ,  $\beta_{\phi_\Delta} = 0,6$  GeV,  $\beta_{\omega_\Delta} = 0,3$  GeV,  $\beta_{\eta_\Delta} = 0,6$  GeV,  $\beta_{\eta'_\Delta} = 0,4$  GeV.
- (3)  $\theta_{v(2050)} = 35^\circ$ ,  $\beta_{\phi_\Delta} = 0,4$  GeV,  $\beta_{\omega_\Delta} = 0,6$  GeV,  $\beta_{\eta_\Delta} = 0,6$  GeV,  $\beta_{\eta'_\Delta} = 0,3$  GeV.
- (4)  $\theta_{v(2050)} = 35^\circ$ ,  $\beta_{\phi_\Delta} = 0,6$  GeV,  $\beta_{\omega_\Delta} = 0,3$  GeV,  $\beta_{\eta_\Delta} = 0,6$  GeV,  $\beta_{\eta'_\Delta} = 0,4$  GeV.

Decaimento	$\Gamma$ (MeV)		$\Gamma$ (MeV)	
	$C^3P_0^{(1)}$	$C^3P_0^{(2)}$	$C^3P_0^{(3)}$	$C^3P_0^{(4)}$
$K^*K^*$	0,67	0,63	0,56	0,52

**Tab. 4.11:** Taxas de decaimento de  $\phi_1(1850)$  para  $\theta_v = 26^\circ$  e

- (1)  $\theta_{v_1} = 26^\circ$ ,  $\beta_{\phi_\Delta} = 0,4$  GeV,  $\beta_{\omega_\Delta} = 0,6$  GeV.
- (2)  $\theta_{v_1} = 26^\circ$ ,  $\beta_{\phi_\Delta} = 0,6$  GeV,  $\beta_{\omega_\Delta} = 0,3$  GeV.
- (3)  $\theta_{v_1} = 35^\circ$ ,  $\beta_{\phi_\Delta} = 0,4$  GeV,  $\beta_{\omega_\Delta} = 0,6$  GeV.
- (4)  $\theta_{v_1} = 35^\circ$ ,  $\beta_{\phi_\Delta} = 0,6$  GeV,  $\beta_{\omega_\Delta} = 0,3$  GeV.

A figura 4.1 mostra as taxas de decaimento de  $\phi(1020) \rightarrow K^+K^-$  como uma função de  $\beta_{\phi(1020)}$ . A faixa de valores experimentais está evidenciada. É possível notar que o valor  $\beta_{\phi(1020)} \simeq 0,4$  GeV resulta em um bom ajuste, estando de acordo com nossa opção

Decaimento	$\Gamma$ (MeV)		$\Gamma$ (MeV)	
	$C^3P_0^{(1)}$	$C^3P_0^{(2)}$	$C^3P_0^{(3)}$	$C^3P_0^{(4)}$
$KK$	0,00	0,00	0,00	0,00
$KK^*$	104,31	103,83	135,94	135,31
$K^*K^*$	16,82	16,32	13,97	13,56
$\eta\phi$	45,14	46,05	48,12	49,05
$\Gamma^{tot}$ (MeV)	166,27	166,20	198,03	197,92

**Tab. 4.12:** Taxas de decaimento de  $\phi_2(1850)$  para  $\theta_p = -10^\circ$ ,  $\theta_v = 26^\circ$  e

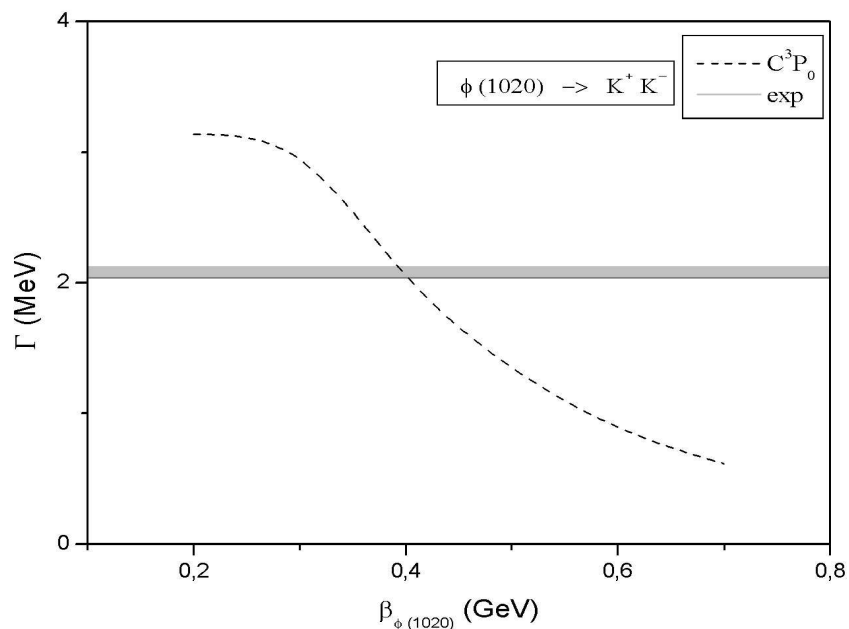
- (1)  $\theta_{v_2} = 26^\circ$ ,  $\beta_{\phi_\Delta} = 0,4$  GeV,  $\beta_{\omega_\Delta} = 0,6$  GeV,  $\beta_{\eta_\Delta} = 0,6$  GeV,  $\beta_{\eta'_\Delta} = 0,3$  GeV.
- (2)  $\theta_{v_2} = 26^\circ$ ,  $\beta_{\phi_\Delta} = 0,6$  GeV,  $\beta_{\omega_\Delta} = 0,3$  GeV,  $\beta_{\eta_\Delta} = 0,6$  GeV,  $\beta_{\eta'_\Delta} = 0,4$  GeV.
- (3)  $\theta_{v_2} = 35^\circ$ ,  $\beta_{\phi_\Delta} = 0,4$  GeV,  $\beta_{\omega_\Delta} = 0,6$  GeV,  $\beta_{\eta_\Delta} = 0,6$  GeV,  $\beta_{\eta'_\Delta} = 0,3$  GeV.
- (4)  $\theta_{v_2} = 35^\circ$ ,  $\beta_{\phi_\Delta} = 0,6$  GeV,  $\beta_{\omega_\Delta} = 0,3$  GeV,  $\beta_{\eta_\Delta} = 0,6$  GeV,  $\beta_{\eta'_\Delta} = 0,4$  GeV.

de tomar todos os  $\beta_i$ 's dos mésons reais iguais a 0,4 GeV. Na figura 4.2 temos as taxas de decaimento, total e em diversos canais, para  $\phi(1680)$  em função do ângulo de mistura  $\theta_{v(1680)}$ . Este ângulo é que define a quantidade de estranheza de  $\phi(1680)$ . Como podemos ver, a alteração em  $\theta_{v(1680)}$  não resolveu as discrepâncias existentes nas tabelas 4.6 e 4.7. Com o aumento do ângulo conseguimos baixar a taxa de decaimento total para dentro da faixa de valores experimentais ( $150 \pm 50$  GeV). A razão  $\Gamma_{KK}/\Gamma_{KK^*}$  também melhorou. Entretanto a razão  $\Gamma_{\eta\phi}/\Gamma_{KK^*}$  ficou pior. Essa inconsistência nos resultados pode ser um indício de que a composição de  $\phi(1680)$  não está bem descrita, podendo ele ser uma mistura de estados  $1^3D_1$  e  $2^3S_1$ , ou ter componentes híbridos [12]. A figura 4.3 mostra que o ângulo de mistura  $\theta_{v_3} = 35^\circ$  é um bom ajuste para as taxas de decaimento de  $\phi_3(1850)$ .

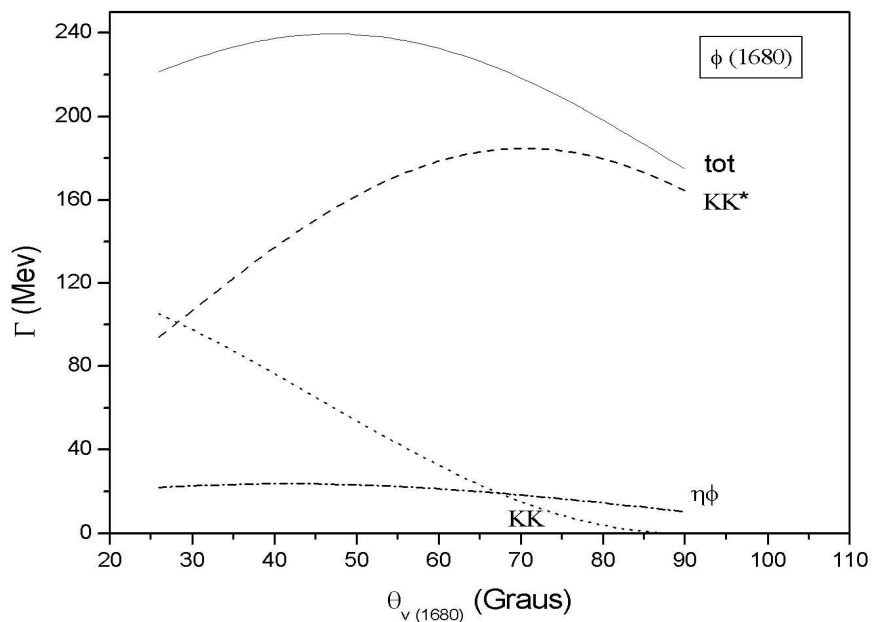
Como uma última análise a ser realizada, temos a observação do comportamento de  $\Gamma$  para diferentes valores dos parâmetros do modelo. As figuras 4.4, 4.5 e 4.6 mostram as taxas de decaimento total para  $\phi(2050)$ ,  $\phi_1(1850)$  e  $\phi_2(1850)$ , respectivamente. As curvas tracejadas possuem os parâmetros  $\beta_{\omega_\Delta} = 0,6$  GeV,  $\beta_{\eta_\Delta} = 0,6$  GeV e  $\beta_{\eta'_\Delta} = 0,3$  GeV e as curvas pontilhadas  $\beta_{\omega_\Delta} = 0,3$  GeV,  $\beta_{\eta_\Delta} = 0,6$  GeV e  $\beta_{\eta'_\Delta} = 0,4$  GeV. Nas curvas (1) e (2) temos  $\theta_{v_i} = 26^\circ$  e nas curvas (3) e (4)  $\theta_{v_i} = 35^\circ$ .

Na Fig. 4.4, vemos que as formas das curvas mudam sensivelmente dependendo dos parâmetros  $\beta_{i\Delta}$ 's definidos, o que não acontece em Fig. 4.5 e Fig. 4.6. Para  $\theta_{v_i} = 26^\circ$  as taxas de decaimento possuem valores um pouco mais elevados do que para  $\theta_{v_i} = 35^\circ$  em Fig. 4.4 e Fig. 4.5. No entanto, em Fig. 4.6 ocorre o oposto. O ângulo  $\theta_{v_2} = 26^\circ$  faz com que as taxas de decaimento diminuam sensivelmente seus valores.

Um resultado inicial deste trabalho de doutorado foi publicado em [35], onde consideramos  $\phi(1020)$  como um estado  $s\bar{s}$  puro ( $\theta_v \simeq 35,3^\circ$ ).

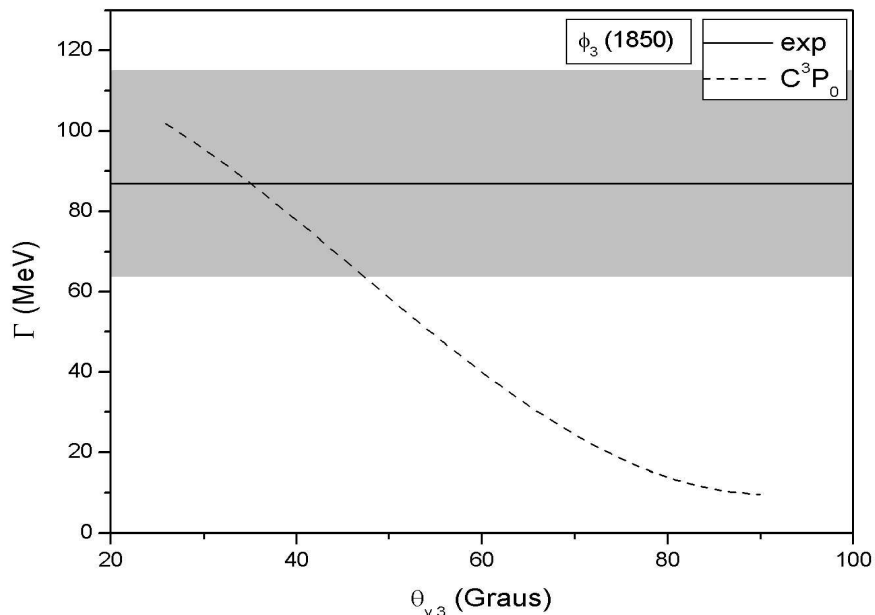


**Fig. 4.1:** Taxa de decaimento, experimental e no modelo  $C^3P_0$ , em função da largura da gaussiana  $\beta_{\phi(1020)}$  para o canal  $\phi(1020) \rightarrow K^+ K^-$ .

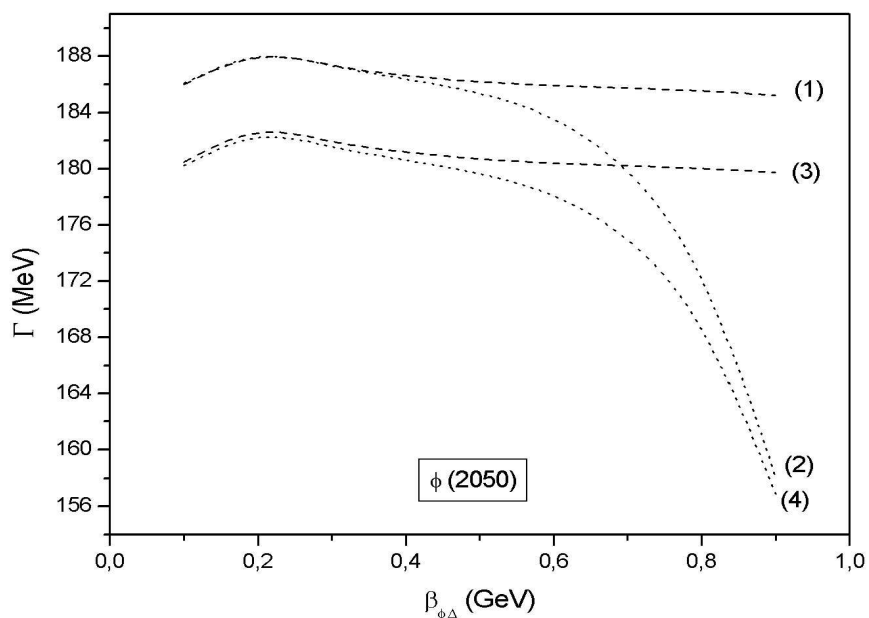


**Fig. 4.2:** Taxas de decaimento, total e em diversos canais, para  $\phi(1680)$  em função de seu ângulo de mistura  $\theta_{v(1680)}$ .

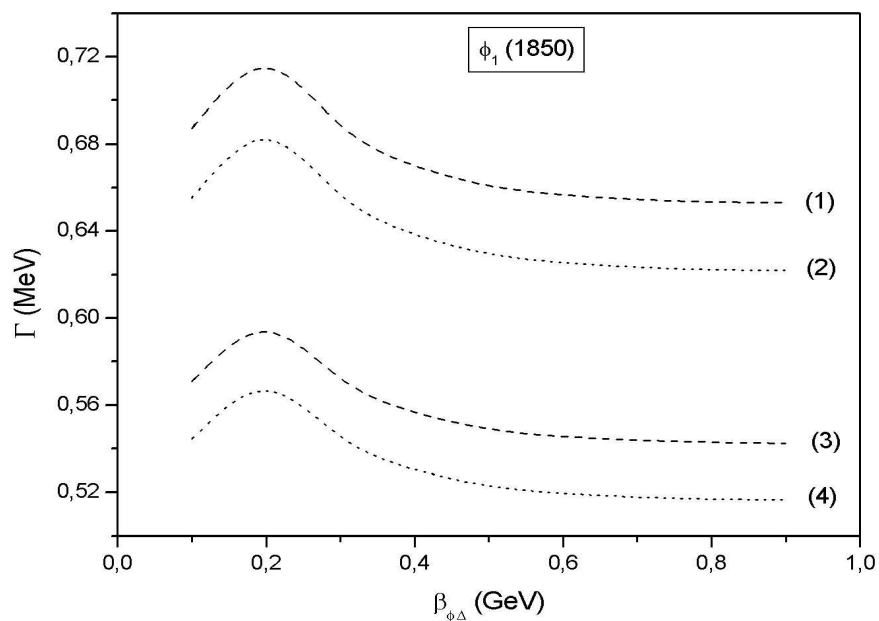




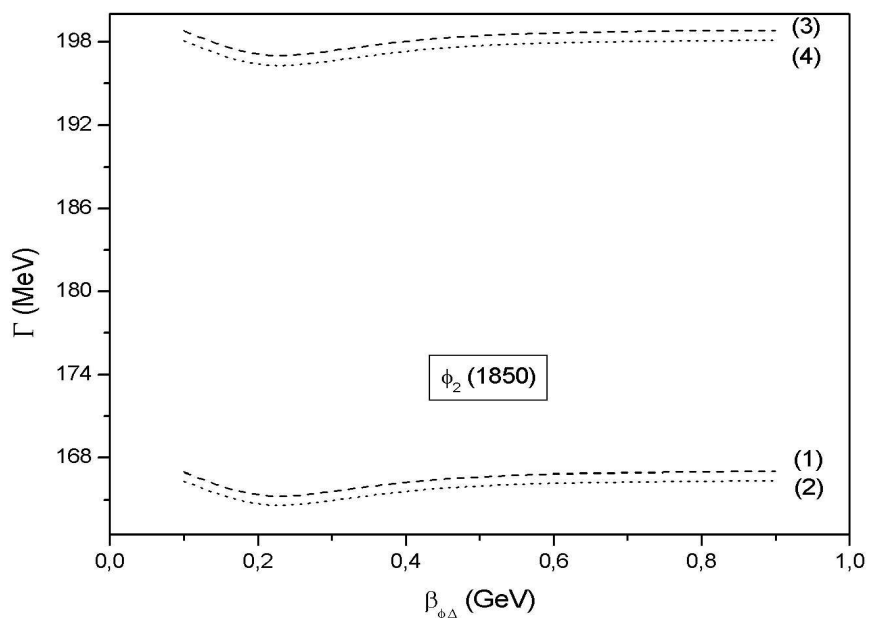
**Fig. 4.3:** Taxas de decaimento total de  $\phi_3(1850)$  em função de seu ângulo de mistura  $\theta_{\nu_3}$ , para os parâmetros definidos na Tab. 4.8.



**Fig. 4.4:** Taxas de decaimento total de  $\phi(2050)$  em função de  $\beta_{\phi\Delta}$ , para os parâmetros definidos na Tab. 4.10.



**Fig. 4.5:** Taxas de decaimento total de  $\phi_1(1850)$  em função de  $\beta_{\phi\Delta}$ , para os parâmetros definidos na Tab. 4.11.



**Fig. 4.6:** Taxas de decaimento total de  $\phi_2(1850)$  em função de  $\beta_{\phi\Delta}$ , para os parâmetros definidos na Tab. 4.12.

### 4.3 Conclusão

Neste capítulo, utilizamos o modelo  $C^3P_0$  para obter taxas de decaimento para os mésons  $\phi$ 's, em diferentes canais. O ajuste foi realizado para  $\phi(1020)$ ,  $\phi(1680)$ ,  $\phi_3(1850)$ , sendo que os resultados encontrados para  $\phi(1020)$  e  $\phi_3(1850)$  ficaram dentro da faixa de valores experimentais. Para  $\phi(1680)$  não conseguimos ajustar simultaneamente a taxa de decaimento total e as razões entre as taxas parciais  $\Gamma_{KK}/\Gamma_{KK^*}$  e  $\Gamma_{\eta\phi}/\Gamma_{KK^*}$ . Este fato pode indicar que a composição de  $\phi(1680)$  não está bem definida. Mas, analisando trabalhos anteriores [28], verificamos que a presença dos mésons  $\eta$  e  $\eta'$  no estado final do decaimento faz com que o ajuste fique ruim. Isto pode ser um indício de que o problema em nosso cálculo do  $\phi(1680)$  não está em sua composição e sim na composição do  $\eta$  presente no estado final de um dos decaimentos.

Com o ajuste do modelo realizado, fizemos estimativas das taxas de decaimento para  $\phi(2050)$ ,  $\phi_1(1850)$  e  $\phi_2(1850)$ .

## Capítulo 5

# Decaimentos de Mésons $J/\psi$

No capítulo anterior, vimos como calcular as taxas de decaimento para os  $\phi$ 's. Neste capítulo, vamos proceder de maneira semelhante para obter as taxas de decaimento dos mésons  $J/\psi$  para os seguintes canais:

$$J/\psi \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho\pi \\ \omega\eta \\ \omega\eta' \\ K^{*+}K^{-} \\ K^{*0}\bar{K}^0 \\ \phi\eta \\ \phi\eta' \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Consideramos que  $J/\psi$  é dado pela mistura  $n\bar{n}$ ,  $s\bar{s}$  e  $c\bar{c}$ . Historicamente, uma das motivações para estudar misturas de quarks leves aos charmônios está relacionada com *enigma*  $\rho\pi$ . Nesta tese, vamos utilizar a mistura obtida por T. Fedmann [22], a qual é proposta como uma possível solução para o *problema*  $\rho\pi$ . Novamente, utilizamos o modelo  $C^3P_0$  para obter as taxas de decaimento.

## 5.1 Amplitudes de Decaimento

Para calcular as taxas sabemos que, primeiramente, é necessário obter as amplitudes de decaimento. Para tanto, além das componentes de sabor, devemos saber as funções de onda de spin e espaço a serem utilizadas.

Nesta parte do trabalho, ou seja, para os decaimentos de  $J/\psi$ , consideramos que os

mésons  $J/\psi$ ,  $\phi$  e  $\omega$  são dados pela seguinte mistura [22], ou seja,

$$\begin{aligned} |\omega\rangle &= |n\bar{n}\rangle - 0.06|s\bar{s}\rangle - 1.5 \times 10^{-3}|c\bar{c}\rangle \\ |\phi\rangle &= 0.06|n\bar{n}\rangle + |s\bar{s}\rangle - 0.9 \times 10^{-3}|c\bar{c}\rangle \\ |J/\psi\rangle &= 1.5 \times 10^{-3}|n\bar{n}\rangle + 0.9 \times 10^{-3}|s\bar{s}\rangle + |c\bar{c}\rangle. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Em trabalhos anteriores, não conseguimos ajustar os dados quando  $\eta$  ou  $\eta'$  fazem parte do estado final de decaimentos. Este fato pode indicar que a mistura  $n\bar{n}$  e  $s\bar{s}$ , que utilizamos para esses mésons, pode não estar bem descrita. Desta forma, utilizamos uma mistura similar àquela usada para  $J/\psi$  para descrever  $\eta$ ,  $\eta'$  e  $\eta_c$  [23]. As contribuições dos termos  $|n\bar{n}\rangle$ ,  $|s\bar{s}\rangle$  e  $|c\bar{c}\rangle$  são:

$$\begin{aligned} |\eta\rangle &= 0.77|n\bar{n}\rangle - 0.63|s\bar{s}\rangle - 0.006|c\bar{c}\rangle \\ |\eta'\rangle &= 0.63|n\bar{n}\rangle + 0.77|s\bar{s}\rangle - 0.016|c\bar{c}\rangle \\ |\eta_c\rangle &= 0.015|n\bar{n}\rangle + 0.008|s\bar{s}\rangle + |c\bar{c}\rangle. \end{aligned} \quad (5.3)$$

As componentes de sabor para os outros mésons envolvidos nos decaimentos (5.1), e que dependem do isospin  $I$  e da estranheza  $s$ , são:

$$\underline{I = 1}$$

$$\begin{aligned} \rho^+, \pi^+ &\rightarrow -|u\bar{d}\rangle \quad ; \quad I_z = +1 \\ \rho^0, \pi^0 &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [ |u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle ] \quad ; \quad I_z = 0 \\ \rho^-, \pi^- &\rightarrow |d\bar{u}\rangle \quad ; \quad I_z = -1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\underline{I = 1/2, s = +1}$$

$$\begin{aligned} K^+ &\rightarrow -|u\bar{s}\rangle \quad ; \quad I_z = +1/2 \\ K^0 &\rightarrow -|d\bar{s}\rangle \quad ; \quad I_z = -1/2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\underline{I = 1/2, s = -1}$$

$$\begin{aligned} \bar{K}^0 &\rightarrow -|s\bar{d}\rangle \quad ; \quad I_z = +1/2 \\ K^- &\rightarrow |s\bar{u}\rangle \quad ; \quad I_z = -1/2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

As Eqs. (5.5)-(5.6) também são válidas para  $K^*$ .

As notações espectroscópicas  $n^{2S+1}L_J$  dos mésons (5.1) estão apresentadas na tabela 5.1. Com elas é possível determinar as funções de onda de spin e espaço que devem ser utilizadas no cálculo.

$n \ ^{2S+1}L_J$	méson
$1 \ ^1S_0$	$\pi, \eta, \eta', K$
$1 \ ^3S_1$	$\rho, J/\psi, \phi(1020), \omega, K^*$

**Tab. 5.1:** Notação espectroscópica  $n^{2S+1}L_J$  dos mésons (5.1).

Nos resta, agora, determinar os fatores de sabor e spin- espaço do kernel de estado ligado, Eq. (3.27), lembrando que há uma contração implícita no índice  $\alpha'$  que implica numa *soma sobre espécies*. Em nossos cálculos, devido à simetria do problema, os estados possíveis de pertencer à correção devem ter  $|n \ ^{2S+1}L_J\rangle$  e isospin

$$|1 \ ^3S_1\rangle \quad \text{e} \quad I = 0 \quad (\text{tipo } J/\psi, \phi, \omega). \quad (5.7)$$

Utilizamos a nomenclatura relativa aos mésons  $J/\psi$ ,  $\phi$  e  $\omega$  para designar estes estados do kernel  $\Delta(\mu\nu; \rho\sigma)$ , que passa a ser escrito como

$$\Delta(\mu\nu; \rho\sigma) = \Delta_{J/\psi}(\mu\nu; \rho\sigma) + \Delta_{\phi}(\mu\nu; \rho\sigma) + \Delta_{\omega}(\mu\nu; \rho\sigma). \quad (5.8)$$

Os fatores de sabor, com e sem correção, são obtidos com o uso das Eqs. (5.2)-(5.6) e (A.14). Os resultados estão incluídos nas amplitudes (C.1)-(C.7).

Com o auxílio da tabela 5.1 e das equações (4.17)-(4.22) é possível encontrar a contribuição spin-espaço resolvendo as integrais (4.27)-(4.30). Consideramos que cada méson envolvido no decaimento, inclusive os do kernel de estado ligado  $\Delta$ , tem sua própria largura das gaussianas  $\beta$ . Usamos a notação  $\beta_{J/\psi\Delta}$ ,  $\beta_{\phi\Delta}$  e  $\beta_{\omega\Delta}$  para designar as larguras dos mésons virtuais, ou seja, aqueles que fazem parte do kernel.

Os resultados algébricos das amplitudes de decaimento  $h_{fi}$ , que obtivemos para os mésons  $J/\psi$ , encontram-se no apêndice C.

## 5.2 Resultados Numéricos das Taxas de Decaimento

Nesta seção, apresentamos os resultados numéricos das taxas de decaimento dos mésons  $J/\psi$ .

Por meio da Eq. (3.32), ou seja,

$$\Gamma_{A \rightarrow BC} = 2\pi P \frac{E_B E_C}{M_A} \int d\Omega |h_{fi}|^2 \quad (5.9)$$

e das amplitudes (C.1)-(C.7), obtemos as taxas de decaimento para os subprocessos de forma algébrica. O próximo passo agora é fazer o ajuste numérico.

Os valores utilizados para as massas foram retirados do Review of Particle Physics-2010 [12]. Sendo eles:

$$\begin{aligned}
 M_{J/\psi} &= 3.096916 \text{ GeV}, & M_{\phi(1020)} &= 1.019455 \text{ GeV}, & M_\omega &= 0.78265 \text{ GeV}, \\
 M_\eta &= 0.547853 \text{ GeV}, & M_{\eta'} &= 0.95778 \text{ GeV}, & M_{K^\pm} &= 0.493677 \text{ GeV}, \\
 M_{K^0} &= 0.497614 \text{ GeV}, & M_{K^{*\pm}} &= 0.89166 \text{ GeV}, & M_{K^{*0}} &= 0.89594 \text{ GeV}, \\
 M_\rho &= 0.77549 \text{ GeV}, & M_\pi &= 0.13957018 \text{ GeV}.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

O fator de multiplicidade  $\mathcal{F}$ , necessário para que todos os subprocessos estejam incluídos nos resultados, estão listados na tabela 5.2.

Decaimento Genérico	Exemplo	$\mathcal{F}$
$J/\psi \rightarrow (n\bar{n})_{I=1} (n\bar{n})'_{I=1}$	$J/\psi \rightarrow \rho\pi$	3
$J/\psi \rightarrow (n\bar{s})^+ (s\bar{n})'^-$	$J/\psi \rightarrow K^{*+}K^-$	2
$J/\psi \rightarrow (n\bar{s})^0 (s\bar{n})'^0$	$J/\psi \rightarrow K^{*0}\bar{K}^0$	2
$J/\psi \rightarrow (m)_{I=0} (m)_{I=0}^{(1)}$	$J/\psi \rightarrow \omega\eta$	1

**Tab. 5.2:** Fator de multiplicidade  $\mathcal{F}$  para os decaimentos de  $J/\psi$ , onde  $I$  indica o isospin.

$$(1) \quad (m)_{I=0} = c_1(n\bar{n}) + c_2(s\bar{s}) + c_3(c\bar{c}).$$

Para fazer o ajuste, devemos variar os treze parâmetros livres até encontrar o conjunto deles que melhor aproxime nosso resultado aos valores experimentais das taxas de decaimento. Porém, estes parâmetros não são totalmente livres. Para cada tipo existe uma faixa de valores característicos. Sendo assim, variamos os parâmetros das gaussianas,  $\beta_i$ , para mésons leves de 0.30 GeV à 0.60 GeV. O valor de  $\gamma$  entre 0.30 - 0.50 [32]. Para  $J/\psi$ , que é um méson mais pesado, alteramos  $\beta_{J/\psi}$  de 0.10 GeV à 0.40 GeV.

Foram realizados três ajustes distintos. No primeiro deles usamos tentativas livres na escolha dos parâmetros, ou seja, escolhemos manualmente valores para  $\gamma$ ,  $\beta_{J/\psi}$ ,  $\beta_\rho, \dots$ , e fomos comparando a taxa de decaimento obtida,  $\Gamma_i^{teo.}$ , com a respectiva taxa experimental,  $\Gamma_i^{exp.}$ . Assim, por tentativa e erro, chegamos ao ajuste:  $\gamma = 0.3$ ,  $\beta_{J/\psi} = 0.182$  GeV,  $\beta_\rho = \beta_\pi = 0.6$  GeV,  $\beta_\omega = 0.36$  GeV,  $\beta_\eta = 0.35$  GeV,  $\beta_{\eta'} = 0.3$  GeV,  $\beta_K = 0.4$  GeV,  $\beta_{K^*} = \beta_\phi = 0.34$  GeV,  $\beta_{\phi_\Delta} = 0.3$  GeV,  $\beta_{\omega_\Delta} = 0.6$  GeV e  $\beta_{J\psi_\Delta} = 0.3$  GeV. As taxas de decaimento obtidas, assim como os valores experimentais correspondentes, estão na tabela 5.3.

Para os decaimentos que possuem  $\eta'$  como um dos mésons do estado final, os valores que obtivemos para as taxas de decaimento ficaram acima dos valores experimentais. A mistura dada pela Eq. (5.3) não foi suficiente para resolver este problema. Na tabela 5.4 temos algumas razões entre taxas de decaimentos de  $J/\psi$ . Como podemos observar, o resultado para  $\Gamma_{\rho^0\pi^0}/\Gamma_{\rho\pi}$  ficou dentro da faixa de valores experimentais, mas para  $\Gamma_{K^{*0}\bar{K}^0+c.c.}/\Gamma_{K^{*+}K^-+c.c.}$

Decaimento	$\Gamma^{Exp}$ (keV) [12]	$\Gamma^{C^3P_0}$ (keV)
$\rho\pi$	$1.57 \pm 0.19$	1.26
$\omega\eta$	$0.16 \pm 0.02$	0.16
$\omega\eta'$	$0.017 \pm 0.002$	0.12
$K^{*+}K^- + c.c.$	$0.48 \pm 0.04$	0.47
$K^{*0}\bar{K}^0 + c.c.$	$0.41 \pm 0.04$	0.48
$\phi\eta$	$0.07 \pm 0.01$	0.07
$\phi\eta'$	$0.037 \pm 0.007$	0.23

**Tab. 5.3:** Taxas de decaimento, experimentais [12] e no modelo  $C^3P_0$ , para  $J/\psi$ . Onde *c.c.* significa a conjugação de carga.

isto não ocorreu. Neste caso, encontramos a razão maior que um, o que está em desacordo com os dados experimentais.

$\Gamma_{\rho^0\pi^0}/\Gamma_{\rho\pi}$		$\Gamma_{K^{*0}\bar{K}^0+c.c.}/\Gamma_{K^{*+}K^-+c.c.}$	
Exp	$C^3P_0$	Exp	$C^3P_0$
$0.328 \pm 0.005 \pm 0.027$	0.33	$0.82 \pm 0.05 \pm 0.09$	1.02

**Tab. 5.4:** Razões entre taxas de decaimento de  $J/\psi$ .

Para tentar solucionar as discrepâncias em alguns de nossos resultados, realizamos um segundo tipo de ajuste. Ele consiste em uma maneira mais sistemática de encontrar a combinação dos treze parâmetros livres que fazem o melhor ajuste, simultâneo, para as diferentes taxas de decaimento teóricas  $\Gamma_i^{teo.}$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) com seu respectivo ponto (valor) experimental. O melhor ajuste para os diferentes canais de decaimento é obtido minimizando uma quantidade adimensional, que chamamos de  $R^2$ , dada por

$$\sum_{i=1}^7 \left( \frac{\Gamma_i^{teo.}(\gamma, \beta_a, \beta_b, \dots) - \Gamma_i^{exp.}}{\Gamma_i^{exp.}} \right)^2 = R^2. \quad (5.11)$$

Buscamos, então, os valores de  $\gamma$  e  $\beta_a, \beta_b, \dots$  que minimizam a equação (5.11). O melhor resultado que obtivemos foi com  $R = 1.1$ , e:  $\gamma = 0.3$ ,  $\beta_{J/\psi} = 0.12$  GeV,  $\beta_\rho = 0.6$  GeV,  $\beta_\pi = 0.6$  GeV,  $\beta_\omega = 0.6$  GeV,  $\beta_\eta = 0.5$  GeV,  $\beta_{\eta'} = 0.3$  GeV,  $\beta_K = 0.5$  GeV,  $\beta_{K^*} = 0.5$  GeV,  $\beta_\phi = 0.6$  GeV,  $\beta_{\phi_\Delta} = 0.6$  GeV,  $\beta_{\omega_\Delta} = 0.6$  GeV e  $\beta_{J\psi_\Delta} = 0.3$  GeV. Os valores encontrados para as taxas de decaimento dos canais (5.1) estão na tabela 5.5.



Decaimento	$\Gamma^{Exp}$ (keV) [12]	$\Gamma^{C^3P_0}$ (keV)
$\rho\pi$	$1.57 \pm 0.19$	0.41
$\omega\eta$	$0.16 \pm 0.02$	0.10
$\omega\eta'$	$0.017 \pm 0.002$	0.02
$K^{*+}K^- + c.c.$	$0.48 \pm 0.04$	0.25
$K^{*0}\bar{K}^0 + c.c.$	$0.41 \pm 0.04$	0.26
$\phi\eta$	$0.07 \pm 0.01$	0.04
$\phi\eta'$	$0.037 \pm 0.007$	0.05

**Tab. 5.5:** Taxas de decaimento, experimentais [12] e no modelo  $C^3P_0$ , para  $J/\psi$ . O ajuste foi feito minimizando  $R$ .

Podemos observar que, para os canais que possuem  $\eta'$  como um dos mésons do estado final, os resultados melhoraram quando comparados ao primeiro ajuste, tabela 5.3. Por outro lado, os canais  $\rho\pi$ ,  $K^{*+}K^-$ ,  $K^{*0}\bar{K}^0$  pioraram consideravelmente. Para as razões, tabela 5.6, os resultados obtidos com o segundo ajuste são praticamente iguais aos encontrados anteriormente.

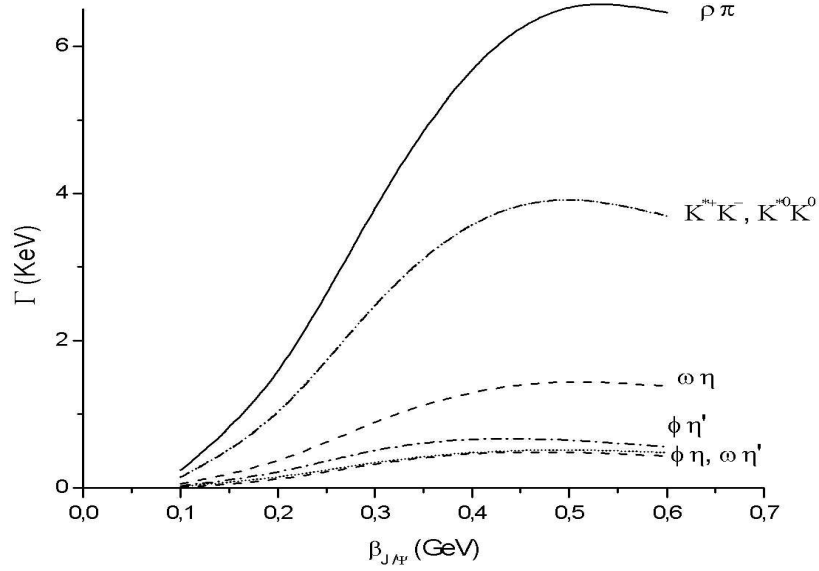
$\Gamma_{\rho^0\pi^0}/\Gamma_{\rho\pi}$		$\Gamma_{K^{*0}\bar{K}^0+c.c.}/\Gamma_{K^{*+}K^-+c.c.}$	
Exp	$C^3P_0$	Exp	$C^3P_0$
$0.328 \pm 0.005 \pm 0.027$	0.33	$0.82 \pm 0.05 \pm 0.09$	1.04

**Tab. 5.6:** Razões entre taxas de decaimento de  $J/\psi$  para o segundo ajuste.

Na figura 5.1, temos as taxas de decaimento de  $J/\psi$  em função da largura da gaussiana  $\beta_{J/\psi}$ . Os outros parâmetros utilizados são aqueles referentes à  $R = 1.1$ , ou seja, os obtidos no segundo ajuste.

Como os resultados encontrados não foram muito satisfatórios, um terceiro ajuste foi realizado. Novamente usamos a Eq. (5.11) para encontrar os valores adequados para os parâmetros que minimizam a equação. A diferença, agora, é que não consideramos os canais que possuem  $\eta'$  no estado final. Desta forma, a soma na Eq. (5.11) deve ser de 1 à 5. O melhor resultado foi com  $R = 0.12$ , e:  $\gamma = 0.3$ ,  $\beta_{J/\psi} = 0.21$  GeV,  $\beta_\rho = 0.6$  GeV,  $\beta_\pi = 0.44$  GeV,  $\beta_\omega = 0.3$  GeV,  $\beta_\eta = 0.6$  GeV,  $\beta_K = 0.3$  GeV,  $\beta_{K^*} = 0.6$  GeV,  $\beta_\phi = 0.3$  GeV,  $\beta_{\phi_\Delta} = 0.3$  GeV,  $\beta_{\omega_\Delta} = 0.52$  GeV e  $\beta_{J\psi_\Delta} = 0.55$  GeV. As taxas de decaimento obtidas e as razões entre as taxas estão nas tabelas 5.7 e 5.8, respectivamente.

Podemos ver na tabela 5.7 que, quando desprezamos os decaimentos que possuem  $\eta'$  no



**Fig. 5.1:** Taxas de decaimento em função da largura da gaussiana  $\beta_{J/\psi}$  para os canais (5.1) obtidas com o modelo  $C^3P_0$ . Os parâmetros utilizados são os do segundo ajuste, onde  $R = 1.1$ .

Decaimento	$\Gamma^{Exp}$ (keV) [12]	$\Gamma^{C^3P_0}$ (keV)
$\rho\pi$	$1.57 \pm 0.19$	1.56
$\omega\eta$	$0.16 \pm 0.02$	0.16
$K^{*+}K^- + c.c.$	$0.48 \pm 0.04$	0.45
$K^{*0}\bar{K}^0 + c.c.$	$0.41 \pm 0.04$	0.45
$\phi\eta$	$0.07 \pm 0.01$	0.07

**Tab. 5.7:** Taxas de decaimento, experimentais [12] e no modelo  $C^3P_0$ , para  $J/\psi$ . Ajuste com  $R = 0.12$ .

$\Gamma_{\rho^0\pi^0}/\Gamma_{\rho\pi}$		$\Gamma_{K^{*0}\bar{K}^0+c.c.}/\Gamma_{K^{*+}K^-+c.c.}$	
Exp	$C^3P_0$	Exp	$C^3P_0$
$0.328 \pm 0.005 \pm 0.027$	0.33	$0.82 \pm 0.05 \pm 0.09$	1.00

**Tab. 5.8:** Razões entre taxas de decaimento de  $J/\psi$  para o ajuste com  $R=0.12$ .

estado final, os resultados obtidos para as taxas de decaimento ficaram muito próximos, ou iguais, aos valores experimentais. Este resultado nos leva a concluir que é necessário

modificar a mistura dada pela equação (5.3). A inclusão de um quarto estado  $|G\rangle$ , com conteúdo de glúon, pode vir a resolver o problema. Para a razão  $\Gamma_{K^*0 \bar{K}^0+c.c.}/\Gamma_{K^{*+} K^-+c.c.}$  o resultado também ficou melhor com este terceiro ajuste.

### 5.3 Conclusão

Neste capítulo, utilizamos o modelo  $C^3P_0$  para obter taxas de decaimento para os mésons  $J/\psi$ . Consideramos que esses mésons são dados por misturas  $n\bar{n}$ ,  $s\bar{s}$  e  $c\bar{c}$ . Misturas similares foram usadas para  $\eta$  e  $\eta'$  na tentativa de solucionar problemas recorrentes quando estudamos canais com estes mésons no estado final de decaimentos. Como podemos observar, a mistura  $n\bar{n}$ ,  $s\bar{s}$  e  $c\bar{c}$  para  $\eta$  e  $\eta'$  não foi suficiente para resolver o problema. Os ajustes só ficaram dentro da faixa de valores experimentais quando desprezamos canais com  $\eta'$  no estado final. Este resultado nos leva a concluir que é necessário modificar a mistura dada pela equação (5.3), o que pode ser feito pela inclusão de um quarto estado  $|G\rangle$ , com conteúdo de glúon.

A seguir, mostraremos a conclusão geral deste trabalho de doutorado, além das perspectivas futuras.

## Capítulo 6

# Conclusões e Perspectivas

Nesta tese de doutorado, obtivemos as taxas de decaimento dos mésons  $\phi(M)$  e  $J/\psi$  através do modelo  $C^3P_0$ . Este modelo teve seus estudos iniciais em [24] e [25] e foi desenvolvido aplicando o formalismo de Fock-Tani a um Hamiltoniano de criação de pares de quarks.

Os mésons  $\phi(M)$  e  $J/\psi$  são partículas compostas por constituintes elementares: quarks e antiquarks. Os operadores de criação e destruição destes mésons compostos não obedecem relações de comutação canônicas. Por isso, se faz necessário a utilização do formalismo de Fock-Tani, que consiste em realizar a transformação unitária de Fock-Tani  $U$  sobre o operador de criação do estado ligado e obter um novo estado ligado, onde agora os operadores ideais obedecem relações de comutação canônicas. Além de se transformar o estado também se realiza a transformação dos operadores da teoria (operadores de quarks, antiquarks e mésons) obtendo-se, de forma iterativa, uma expansão em potências da função de onda. Assim, em nosso estudo de doutorado, partimos de um hamiltoniano de criação de pares quark-antiquark e aplicamos a transformação de Fock-Tani sobre este hamiltoniano, obtendo um hamiltoniano efetivo  $H^{C^3P_0}$ . O hamiltoniano efetivo é dado pela soma  $H_m + \delta H_m$ , onde o primeiro termo fornece a mesma amplitude de decaimento  $h_{fi}$  do modelo  $^3P_0$  e o segundo inclui a primeira correção de estado ligado.

Comparando as taxas de decaimento obtidas no modelo  $C^3P_0$  aos dados experimentais, para os mésons  $\phi(M)$  (capítulo 4), podemos concluir que:

1. As taxas de decaimento de  $\phi(1020)$  e  $\phi_3(1850)$  apresentaram resultados dentro da faixa de valores experimentais. O mesmo acontecendo com a razão  $\Gamma_{KK^*}/\Gamma_{KK}$  de  $\phi_3(1850)$ .
2. Para  $\phi(1680)$  não foi possível ajustar simultaneamente a taxa de decaimento total e as razões  $\Gamma_{KK}/\Gamma_{KK^*}$  e  $\Gamma_{\eta\phi}/\Gamma_{KK^*}$ . Enquanto  $\Gamma_{\eta\phi}/\Gamma_{KK^*}$  apresentou resultados abaixo do valor experimental,  $\Gamma^{tot}$  e  $\Gamma_{KK}/\Gamma_{KK^*}$  ficaram acima do esperado, sendo que este último ficou cerca de dez vezes maior do que os dados experimentais. Com as várias tentativas de solucionar o problema, observamos que:
  - (a) A diminuição da constante de acoplamento  $\gamma$  faz com que a taxa de decaimento

total também diminua mas as razões permanecem inalteradas, visto que neste caso as constantes se cancelam.

- (b) O aumento do ângulo de mistura  $\theta_{v(1680)}$  faz com que a taxa de decaimento total e as razões  $\Gamma_{KK}/\Gamma_{KK^*}$  e  $\Gamma_{\eta\phi}/\Gamma_{KK^*}$  diminuam. Para os dois primeiros casos essa redução faz com que passamos a ter valores dentro da faixa experimental, mas para  $\Gamma_{\eta\phi}/\Gamma_{KK^*}$  nos afastamos ainda mais do valor que é esperado.
- (c) Dados experimentais recentes [59]-[60] indicam valores mais elevados para  $\Gamma^{tot}$ . Assim, nosso resultado para a taxa de decaimento total passa a estar dentro da faixa experimental, mas permanecem as divergências das razões.

Estes resultados podem ser um indício de que a composição de  $\phi(1680)$  ou de  $\eta$  não está bem descrita, necessitando a inclusão de uma nova forma de abordar a física do problema. Em trabalhos anteriores [28], problemas semelhantes surgiram em decaimentos envolvendo  $\eta$  e  $\eta'$  no estado final.

A observação do comportamento da taxa de decaimento para diferentes valores dos parâmetros do modelo nos leva a concluir que:

1. A curva que descreve a taxa de decaimento total pode ter sua forma modificada para diferentes valores de  $\beta_{i\Delta}$ 's. Como exemplo, mostramos  $\Gamma^{tot}$  para  $\phi(2050)$  em função de  $\beta_{\phi\Delta}$  para diferentes valores de  $\beta_{\eta\Delta}$ ,  $\beta_{\eta'\Delta}$  e  $\beta_{\omega\Delta}$ .
2. Em alguns casos, o ângulo de mistura  $\theta_{v_i} = 26^\circ$  faz com que a taxa de decaimento total fique um pouco mais elevada quando comparada àquela com  $\theta_{v_i} = 35^\circ$ . Isto ocorreu com  $\phi(2050)$  e  $\phi_1(1850)$ . No entanto, para  $\phi_2(1850)$ ,  $\theta_{v_2} = 26^\circ$  fez com que a taxa diminuísse sensivelmente seu valor.

Um artigo, com os resultados obtidos para os decaimentos dos mésons  $\phi(M)$ , está sendo preparado [37]. Um resultado inicial foi publicado em [35], onde consideramos  $\phi(1020)$  como um estado  $s\bar{s}$  puro ( $\theta_v \simeq 35, 3^\circ$ ).

Na segunda parte do trabalho estudamos os decaimentos de  $J/\psi$ . Um artigo com estes resultados parciais irá aparecer em [36] e um outro, com os resultados completos, está em preparação [38]. Como este méson é um charmônio, isto é,  $c\bar{c}$  puro, decaimentos do tipo OZI-permitidos não são possíveis. Entretanto, por razões históricas, as misturas de quarks leves aos charmônios passaram a ser estudadas no contexto do chamado *problema*  $\rho\pi$  ( $\rho\pi$  puzzle). Desta forma, nesta tese, consideramos que os mésons  $J/\psi$ ,  $\phi$  e  $\omega$  são descritos pela mistura discutida na referência [22], ou seja,

$$\begin{aligned}
 |\omega\rangle &= |n\bar{n}\rangle - 0.06|s\bar{s}\rangle - 1.5 \times 10^{-3}|c\bar{c}\rangle \\
 |\phi\rangle &= 0.06|n\bar{n}\rangle + |s\bar{s}\rangle - 0.9 \times 10^{-3}|c\bar{c}\rangle \\
 |J/\psi\rangle &= 1.5 \times 10^{-3}|n\bar{n}\rangle + 0.9 \times 10^{-3}|s\bar{s}\rangle + |c\bar{c}\rangle.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

De forma similar, uma mistura ocorre para  $\eta$ ,  $\eta'$  e  $\eta_c$  [23]. As contribuições dos termos  $|n\bar{n}\rangle$ ,  $|s\bar{s}\rangle$  e  $|c\bar{c}\rangle$  são:

$$\begin{aligned} |\eta\rangle &= 0.77|n\bar{n}\rangle - 0.63|s\bar{s}\rangle - 0.006|c\bar{c}\rangle \\ |\eta'\rangle &= 0.63|n\bar{n}\rangle + 0.77|s\bar{s}\rangle - 0.016|c\bar{c}\rangle \\ |\eta_c\rangle &= 0.015|n\bar{n}\rangle + 0.008|s\bar{s}\rangle + |c\bar{c}\rangle. \end{aligned} \quad (6.2)$$

A partir do nosso estudo podemos concluir que:

1. Para os decaimentos que possuem  $\eta'$  como um dos mésons do estado final, os valores que obtivemos para as taxas de decaimento ficaram acima dos valores experimentais e o efeito da mistura dada pela Eq. (6.2) não foi suficiente para resolver este problema.
2. No estudo das razões entre taxas de decaimentos de  $J/\psi$ , para alguns canais específicos, constantou-se que o resultado para  $\Gamma_{\rho^0\pi^0}/\Gamma_{\rho\pi}$  ficou dentro da faixa de valores experimentais, mas para  $\Gamma_{K^{*0}\bar{K}^0+c.c.}/\Gamma_{K^{*+}K^-+c.c.}$  isto não ocorreu.
3. Quando desprezamos os decaimentos que possuem  $\eta'$  no estado final, os resultados obtidos para as taxas de decaimento ficaram muito próximos, ou iguais, aos valores experimentais. Este resultado nos leva a concluir que é necessário modificar a mistura dada pela equação (6.2).

\* Como perspectivas futuras:

1. Tanto no estudo do decaimento do  $\phi$  quanto do  $J/\psi$  aparecem os mésons  $\eta$  e  $\eta'$ . Considerar uma mistura que possui, além da estrutura das eqs. (6.2), uma componente  $|gg\rangle$ , onde  $g$  representa o glúon.
2. Considerar  $\phi(1680)$  composto por uma mistura  $|n\bar{n}\rangle$ ,  $|s\bar{s}\rangle$  e  $|gg\rangle$ , onde  $g$  representa o glúon.
3. A inclusão de termos com duas  $\Delta$ 's de correção de estado ligado na transformação. O Hamiltoniano de criação de par transformado pode ser expandido da seguinte forma

$$\delta\mathcal{H}^{(2\Delta)} = V_{\mu\nu} \left[ q_{\mu}^{\dagger(3)} \bar{q}_{\nu}^{\dagger(4)} + q_{\mu}^{\dagger(1)} \bar{q}_{\nu}^{\dagger(6)} + q_{\mu}^{\dagger(5)} \bar{q}_{\nu}^{\dagger(2)} + q_{\mu}^{\dagger(7)} \bar{q}_{\nu}^{\dagger(0)} \right], \quad (6.3)$$

por exemplo, calculando o primeiro termo da Eq. (6.3) obtemos

$$\frac{1}{16} \Phi_{\alpha}^{*\rho\epsilon} \Phi_{\beta}^{*\mu\tau} \Delta(\rho\tau; \chi\sigma) \Delta(\chi\epsilon; \lambda\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} V_{\mu\nu} m_{\alpha}^{\dagger} m_{\beta}^{\dagger} m_{\gamma}. \quad (6.4)$$

Este Hamiltoniano de correção poderia ter influência nos canais onde a correção com uma  $\Delta$  é pequena. A figura (6.1) mostra a forma diagramática para a Eq. (6.4).

4. Estudar os quarkônios  $n\bar{n}$  com excitações radiais e orbitais.

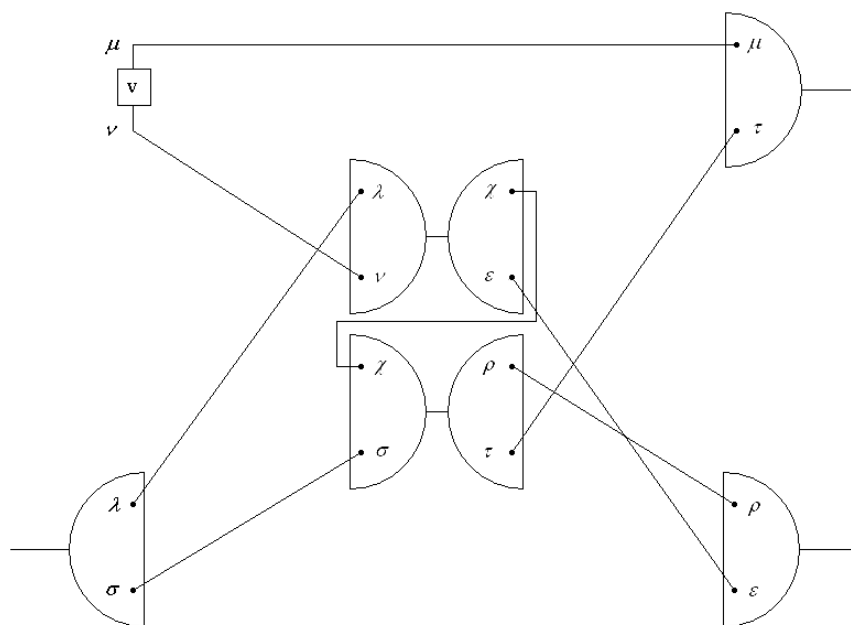


Fig. 6.1: Termo com duas  $\Delta$ 's de correção de estado ligado.

## Apêndice A

# Hamiltoniano de Decaimento Mesônico

O ponto de partida é o Hamiltoniano microscópico que descreve a interação entre os constituintes escrito na representação de momento, isto é, partindo de

$$H_I = g \int d\vec{x} \bar{\psi}(\vec{x}) \psi(\vec{x}), \quad (\text{A.1})$$

substituímos as expressões para os campos de Dirac dos quarks. Estes são expandidos, para um dado instante de tempo ( $t = 0$ ), em termos de contribuições de frequências positivas e negativas (onde foram suprimidos os índices de sabor e cor, para simplificar)

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{p} \sum_s e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \left[ u_s(\vec{p}) b_s(\vec{p}) + v_s(-\vec{p}) d_s^\dagger(-\vec{p}) \right] \quad (\text{A.2})$$

com a seguinte normalização

$$u_s^\dagger(\vec{p}) u_r(\vec{p}) = v_s^\dagger(\vec{p}) v_r(\vec{p}) = \delta_{sr}. \quad (\text{A.3})$$

Sendo os espinores dados por

$$u_s(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} \begin{bmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p + m} \chi_s \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$v_s(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p + m} \chi_s^c \\ \chi_s^c \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Como  $\bar{\psi}(\vec{x}) = \psi^\dagger(\vec{x}) \gamma^0$ , a Eq. (A.1) pode ser escrita assim

$$\begin{aligned} H_I &= g \int d\vec{x} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} d\vec{p}' \sum_{ss'} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')} \left[ u_{s'}^\dagger(\vec{p}') b_{s'}^\dagger(\vec{p}') + v_{s'}^\dagger(-\vec{p}') d_{s'}^\dagger(-\vec{p}') \right] \gamma^0 \\ &\times \left[ u_s(\vec{p}) b_s(\vec{p}) + v_s(-\vec{p}) d_s^\dagger(-\vec{p}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$



Para o decaimento mesônico o termo relevante é aquele onde aparece  $b^\dagger d^\dagger$ , pois este é o termo que efetivamente cria um par quark-antiquark a partir do vácuo. Assim, a Eq. (A.6) pode ser reduzida a

$$\begin{aligned} H_{q\bar{q}} &= g \int d\vec{x} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} d\vec{p}' \sum_{ss'} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')} \left[ u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma^0 v_s(-\vec{p}) b_{s'}^\dagger(\vec{p}') d_s^\dagger(-\vec{p}) \right] \\ &= g \int d\vec{p} d\vec{p}' \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{x} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')} \sum_{ss'} u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma^0 v_s(-\vec{p}) b_{s'}^\dagger(\vec{p}') d_s^\dagger(-\vec{p}) \\ &= g \int d\vec{p} d\vec{p}' \delta(\vec{p}-\vec{p}') \sum_{ss'} u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma^0 v_s(-\vec{p}) b_{s'}^\dagger(\vec{p}') d_s^\dagger(-\vec{p}), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{x} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')} = \delta(\vec{p}-\vec{p}'). \quad (\text{A.8})$$

Trocando  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$  obtemos

$$H_{q\bar{q}} = g \delta_{ff'} \delta_{cc'} \int d\vec{p} d\vec{p}' \delta(\vec{p}+\vec{p}') \sum_{ss'} u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma^0 v_s(\vec{p}) b_{s'}^\dagger(\vec{p}') d_s^\dagger(\vec{p}), \quad (\text{A.9})$$

onde  $\delta_{ff'}$  e  $\delta_{cc'}$  são as deltas de sabor e cor, respectivamente. Introduzindo a seguinte notação

$$b \rightarrow q, \quad d \rightarrow \bar{q}, \quad \left. \begin{array}{c} \vec{p}' \\ s' \\ c' \\ f' \end{array} \right\} \rightarrow \mu, \quad \left. \begin{array}{c} \vec{p} \\ s \\ c \\ f \end{array} \right\} \rightarrow \nu, \quad (\text{A.10})$$

obtemos uma nova representação para  $H_{q\bar{q}}$ , isto é,

$$H_{q\bar{q}} = V_{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger, \quad (\text{A.11})$$

onde  $V_{\mu\nu}$  é uma notação compacta para o potencial de criação de pares, definida por

$$V_{\mu\nu} \equiv g \delta_{f_\mu f_\nu} \delta_{c_\mu c_\nu} \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) u_{s_\mu}^\dagger(\vec{p}_\mu) \gamma^0 v_{s_\nu}(\vec{p}_\nu) \quad (\text{A.12})$$

Na expressão (A.11) usamos novamente a convenção da soma sobre índices repetidos (soma e/ou integração).

Podemos reescrever a Eq. (A.12) da seguinte forma

$$V_{\mu\nu} \equiv g V_{f_\mu f_\nu}^f V_{c_\mu c_\nu}^c \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) u_{s_\mu}^\dagger(\vec{p}_\mu) \gamma^0 v_{s_\nu}(\vec{p}_\nu) \quad (\text{A.13})$$

onde

$$V_{f_\mu f_\nu}^f = \delta_{f_\mu f_\nu} \quad (\text{A.14})$$

e

$$V_{c_\mu c_\nu}^c = \delta_{c_\mu c_\nu}, \quad (\text{A.15})$$

sendo  $V_{f_\mu f_\nu}^f$  e  $V_{c_\mu c_\nu}^c$ , respectivamente, a parte de sabor e cor do potencial  $V_{\mu\nu}$ . Eles são representados por uma  $\delta$  pois não há interação que mude o sabor e nem a cor.

Substituindo as Eqs. (A.4) e (A.5) na Eq. (A.13), obtemos

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu} &= g V_{f_\mu f_\nu}^f V_{c_\mu c_\nu}^c \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \left[ \frac{(E_{p_\mu} + m)(E_{p_\nu} + m)}{4E_{p_\mu} E_{p_\nu}} \right]^{1/2} \\ &\times \left[ \chi_{s_\mu}^* \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_\nu}{E_{p_\nu} + m} \chi_{s_\nu}^c - \chi_{s_\mu}^* \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_\mu}{E_{p_\mu} + m} \chi_{s_\nu}^c \right] \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Tomando o limite não-relativístico, onde  $E \rightarrow m$ , encontramos

$$V_{\mu\nu} = -\frac{g}{2m_q} V_{f_\mu f_\nu}^f V_{c_\mu c_\nu}^c \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \left[ \chi_{s_\mu}^* \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_\mu \chi_{s_\nu}^c - \chi_{s_\mu}^* \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_\nu \chi_{s_\nu}^c \right]. \quad (\text{A.17})$$

Lembrando da Eq. (3.3) que  $\gamma = g/(2m_q)$ , podemos escrever

$$V_{\mu\nu} = -\gamma V_{f_\mu f_\nu}^f V_{c_\mu c_\nu}^c \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \chi_{s_\mu}^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)] \chi_{s_\nu}^c \quad (\text{A.18})$$

Finalmente podemos escrever o potencial  $V_{\mu\nu}$  de uma forma mais compacta

$$V_{\mu\nu} = V_{f_\mu f_\nu}^f V_{c_\mu c_\nu}^c V_{s_\mu s_\nu}^{s-e} \quad (\text{A.19})$$

onde

$$V_{s_\mu s_\nu}^{s-e} = -\gamma \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \chi_{s_\mu}^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)] \chi_{s_\nu}^c \quad (\text{A.20})$$

é a parte spin-espaço do potencial  $V_{\mu\nu}$ .

## Apêndice B

# Resultados Algébricos das Amplitudes de Decaimento dos Mésons $\phi$

Neste apêndice, apresentamos os resultados algébricos das amplitudes de decaimento  $h_{fi}$ , para subprocessos de (4.1), obtidos com o modelo  $C^3P_0$ .

Definindo

$$\begin{aligned} e_1(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C) &= e^{-\frac{(\beta_B^2 + \beta_C^2)p^2}{8(\beta_C^2\beta_A^2 + \beta_B^2(\beta_C^2 + \beta_A^2))}} \\ e_2(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= e^{-\frac{((2\beta_A^2 + \beta^2)(\beta_B^2 + 2\beta^2) + \beta_C^2(2(\beta_A^2 + \beta_B^2) + 5\beta^2))p^2}{8\beta^2(\beta_C^2(\beta_B^2 + 2\beta^2) + \beta_A^2(\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2))}}, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

onde  $\beta_A$  é a largura da gaussiana do méson do estado inicial,  $\beta_B$  e  $\beta_C$  dos mésons do estado final e  $\beta$  dos mésons virtuais da correção. As amplitudes são:

$\phi(1020) \rightarrow K^+K^-$  :

$$\begin{aligned} h_{fi} &= \frac{\gamma(c_1^\phi - c_2^\phi)}{\pi^{1/4}} \left\{ f_1(p_{KK}, \beta_\phi, \beta_K) e_1(p_{KK}, \beta_\phi, \beta_K, \beta_K) \right. \\ &\quad - c_1^{\eta_\Delta} c_2^{\eta_\Delta} f_2(p_{KK}, \beta_\phi, \beta_K, \beta_{\eta_\Delta}) e_2(p_{KK}, \beta_\phi, \beta_K, \beta_K, \beta_{\eta_\Delta}) \\ &\quad \left. - c_1^{\eta'_\Delta} c_2^{\eta'_\Delta} f_2(p_{KK}, \beta_\phi, \beta_K, \beta_{\eta'_\Delta}) e_2(p_{KK}, \beta_\phi, \beta_K, \beta_K, \beta_{\eta'_\Delta}) \right\} Y_{11} \\ f_1(p, \beta_A, \beta_B) &= \frac{8p\beta_A^{3/2}(\beta_B^2 + \beta_A^2)}{\sqrt{3}(\beta_B^2 + 2\beta_A^2)^{5/2}} \\ f_2(p, \beta_A, \beta_B, \beta) &= \frac{16p\beta_A^{3/2}\beta_B^3(\beta_B^2 + \beta_A^2)(\beta_B^2 + \beta^2)}{3\sqrt{3}(\beta_B^4 + 2\beta^2\beta_A^2 + 2\beta_B^2(\beta^2 + \beta_A^2))^{5/2}} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$\phi(1680) \rightarrow K^+K^-$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= \frac{\gamma (c_1^{\phi_{1680}} - c_2^{\phi_{1680}})}{\pi^{1/4}} \left\{ f_3(p_{KK}, \beta_{\phi_{1680}}, \beta_K) e_1(p_{KK}, \beta_{\phi_{1680}}, \beta_K, \beta_K) \right. \\
 &\quad + c_1^{\eta_\Delta} c_2^{\eta_\Delta} f_4(p_{KK}, \beta_{\phi_{1680}}, \beta_K, \beta_{\eta_\Delta}) e_2(p_{KK}, \beta_{\phi_{1680}}, \beta_K, \beta_K, \beta_{\eta_\Delta}) \\
 &\quad \left. + c_1^{\eta'_\Delta} c_2^{\eta'_\Delta} f_4(p_{KK}, \beta_{\phi_{1680}}, \beta_K, \beta_{\eta'_\Delta}) e_2(p_{KK}, \beta_{\phi_{1680}}, \beta_K, \beta_K, \beta_{\eta'_\Delta}) \right\} Y_{11} \\
 f_3(p, \beta_A, \beta_B) &= \frac{4\sqrt{2} p \beta_A^{3/2} [-3\beta_B^6 + \beta_B^4 \beta_A^2 + 20\beta_B^2 \beta_A^4 + 12\beta_A^6 - 2\beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_A^2) p^2]}{3 (\beta_B^2 + 2\beta_A^2)^{9/2}} \\
 f_4(p, \beta_A, \beta_B, \beta) &= \frac{8\sqrt{2} p \beta_B^3 \beta_A^{3/2} (\beta_B^2 + \beta^2)}{9 (\beta_B^4 + 2\beta^2 \beta_A^2 + 2\beta_B^2 (\beta^2 + \beta_A^2))^{9/2}} \\
 &\quad \left[ (3\beta_B^4 (\beta_B^2 + 2\beta^2) - 7\beta_B^4 \beta_A^2 - 6 (\beta_B^2 + \beta^2) \beta_A^4) (\beta_B^4 + 2\beta^2 \beta_A^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2\beta_B^2 (\beta^2 + \beta_A^2)) + 2 (\beta_B^2 + \beta^2)^2 \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_A^2) p^2 \right]
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

$\phi(1680) \rightarrow K^+K^{*-}$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= -\frac{\gamma (c_1^{\phi_{1680}} + c_2^{\phi_{1680}})}{\pi^{1/4}} \\
 &\quad \left\{ f_5(p_{KK^*}, \beta_{\phi_{1680}}, \beta_K, \beta_K^*) e_1(p_{KK^*}, \beta_{\phi_{1680}}, \beta_K, \beta_K^*) \right. \\
 &\quad + c_1^{\phi_\Delta} c_2^{\phi_\Delta} f_6(p_{KK^*}, \beta_{\phi_{1680}}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) e_2(p_{KK^*}, \beta_{\phi_{1680}}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) \\
 &\quad + c_1^{\omega_\Delta} c_2^{\omega_\Delta} f_6(p_{KK^*}, \beta_{\phi_{1680}}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) \\
 &\quad \left. \times e_2(p_{KK^*}, \beta_{\phi_{1680}}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) \right\} Y_{10} \\
 f_5(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C) &= \frac{\sqrt{2} p \beta_B^{3/2} \beta_C^{3/2} \beta_A^{3/2}}{3 (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2))^{9/2}} \left[ 12\beta_B^6 \beta_C^6 - 2\beta_B^4 \beta_C^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2 \right. \\
 &\quad - 20\beta_B^2 \beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 \beta_A^4 - 6 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^3 \beta_A^6 \\
 &\quad \left. + p^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 \beta_A^2 (2\beta_B^2 \beta_C^2 + (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2) \right] \\
 f_6(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= \frac{2\sqrt{2} p \beta_B^{3/2} \beta_C^{3/2} \beta_A^{3/2}}{9 (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2) + 2 (\beta_C^2 + \beta_A^2) \beta^2)^{9/2}} \left[ 2 (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 \right. \\
 &\quad \times (\beta_C^2 + \beta_A^2) + 2 (\beta_C^2 + \beta_A^2) \beta^2) (\beta_B^4 (6\beta_C^4 - 7\beta_C^2 \beta_A^2 - 3\beta_A^4) \\
 &\quad - \beta_B^2 (7\beta_C^4 \beta_A^2 + 6\beta_C^2 \beta_A^4 + 2 (-9\beta_C^4 + 7\beta_C^2 \beta_A^2 + 6\beta_A^4) \beta^2) - 3 (4\beta_C^2 \\
 &\quad \times \beta_A^4 \beta^2 + 4\beta_A^4 \beta^4 + \beta_C^4 (\beta_A^4 - 4\beta^4))) + \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^2 \\
 &\quad \left. \times (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (2\beta_C^2 + \beta_A^2) + 2 (\beta_C^2 + \beta_A^2) \beta^2) p^2 \right]
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

$\phi(1680) \rightarrow \eta\phi$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= -\frac{\gamma}{\pi^{1/4}} \left\{ \left[ 2c_1^\eta c_1^{\phi_{1680}} c_1^\phi + c_2^\eta c_2^{\phi_{1680}} c_2^\phi \right] f_7(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_{1680}}, \beta_\eta, \beta_\phi) \right. \\
 &\quad e_1(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_{1680}}, \beta_\eta, \beta_\phi) + \left[ 2c_1^\eta c_1^{\phi_{1680}} c_1^\phi (c_1^{\phi_\Delta})^2 + c_2^\eta c_2^{\phi_{1680}} c_2^\phi (c_2^{\phi_\Delta})^2 \right] \\
 &\quad \times f_8(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_{1680}}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\phi_\Delta}) e_2(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_{1680}}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\phi_\Delta}) \\
 &\quad + \left[ 2c_1^\eta c_1^{\phi_{1680}} c_1^\phi (c_1^{\omega_\Delta})^2 + c_2^\eta c_2^{\phi_{1680}} c_2^\phi (c_2^{\omega_\Delta})^2 \right] f_8(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_{1680}}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\omega_\Delta}) \\
 &\quad \left. \times e_2(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_{1680}}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\omega_\Delta}) \right\} Y_{10} \\
 f_7(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C) &= \frac{2\sqrt{2} p \beta_B^{3/2} \beta_A^{3/2} \beta_C^{3/2}}{3(\beta_A^2 \beta_C^2 + \beta_B^2 (\beta_A^2 + \beta_C^2))^{9/2}} \left[ 2(3\beta_A^2 \beta_C^2 + \beta_B^2 (3\beta_A^2 - 2\beta_C^2)) \right. \\
 &\quad \times (\beta_A^2 \beta_C^2 + \beta_B^2 (\beta_A^2 + \beta_C^2)) (\beta_A^2 \beta_C^2 + \beta_B^2 (\beta_A^2 + 3\beta_C^2)) \\
 &\quad \left. - \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 (\beta_A^2 \beta_C^2 + \beta_B^2 (\beta_A^2 + 2\beta_C^2)) p^2 \right] \\
 f_8(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= \frac{4\sqrt{2} p \beta_B^{3/2} \beta_A^{3/2} \beta_C^{3/2}}{9(\beta_B^2 (\beta_A^2 + \beta_C^2) + 2\beta_C^2 \beta_{\phi_\Delta}^2 + \beta_A^2 (\beta_C^2 + 2\beta_{\phi_\Delta}^2))^{9/2}} \left[ 2(\beta_A^2 \beta_C^2 + \beta_B^2 \right. \\
 &\quad \times (\beta_A^2 + \beta_C^2) + 2(\beta_A^2 + \beta_C^2) \beta^2) (\beta_B^4 (3\beta_A^4 + 7\beta_A^2 \beta_C^2 - 6\beta_C^4) + 3 \\
 &\quad \times (-4\beta_C^4 \beta^4 + \beta_A^4 (\beta_C^2 + 2\beta^2)^2) + \beta_B^2 (-18\beta_C^4 \beta^2 + 6\beta_A^4 (\beta_C^2 \\
 &\quad + 2\beta^2) + 7\beta_A^2 (\beta_C^4 + 2\beta_C^2 \beta^2))) - \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^2 \\
 &\quad \left. \times (\beta_A^2 \beta_C^2 + \beta_B^2 (\beta_A^2 + 2\beta_C^2) + 2(\beta_A^2 + \beta_C^2) \beta^2) p^2 \right] \quad (B.5)
 \end{aligned}$$

$\phi(2050) \rightarrow K^+K^-$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= \frac{\gamma(c_1^{\phi_{2050}} - c_2^{\phi_{2050}})}{\pi^{1/4}} \left\{ f_9(p_{KK}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K) e_1(p_{KK}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_K) \right. \\
 &\quad + c_1^{\eta_\Delta} c_2^{\eta_\Delta} f_{10}(p_{KK}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{\eta_\Delta}) e_2(p_{KK}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_K, \beta_{\eta_\Delta}) \\
 &\quad \left. + c_1^{\eta'_\Delta} c_2^{\eta'_\Delta} f_{10}(p_{KK}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{\eta'_\Delta}) e_2(p_{KK}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_K, \beta_{\eta'_\Delta}) \right\} Y_{11} \\
 f_9(p, \beta_A, \beta_B) &= \frac{2\sqrt{2} p \beta_A^{3/2}}{3\sqrt{5} (\beta_B^2 + 2\beta_A^2)^{13/2}} \left[ 5(\beta_B^2 + 2\beta_A^2)^2 \right. \\
 &\quad \times (3\beta_B^6 - 17\beta_B^4 \beta_A^2 + 16\beta_B^2 \beta_A^4 + 12\beta_A^6) - 4\beta_A^2 (\beta_B^2 + 2\beta_A^2) \\
 &\quad \left. \times (-5\beta_B^4 + 9\beta_B^2 \beta_A^2 + 10\beta_A^4) p^2 + 4\beta_A^4 (\beta_B^2 + \beta_A^2) p^4 \right] \\
 f_{10}(p, \beta_A, \beta_B, \beta) &= \frac{4\sqrt{2} p \beta_A^{3/2} \beta_B^3 (\beta_B^2 + \beta^2)}{9\sqrt{5} (\beta_B^4 + 2\beta^2 \beta_A^2 + 2\beta_B^2 (\beta^2 + \beta_A^2))^{13/2}} \left[ 5(\beta_B^4 + 2\beta_B^2 \beta^2 - 2\beta_A^2 \right. \\
 &\quad \left. \times (\beta_B^2 + \beta^2)) (3\beta_B^4 (\beta_B^2 + 2\beta^2) - 11\beta_B^4 \beta_A^2 - 6(\beta_B^2 + \beta^2) \beta_A^4) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left( \beta_B^4 + 2\beta^2 \beta_A^2 + 2\beta_B^2 (\beta^2 + \beta_A^2) \right)^2 + 4p^2 (\beta_B^2 + \beta^2)^2 \beta_A^2 \\
 & \times \left( 5 (\beta_B^6 + 2\beta_B^4 \beta^2) - 9\beta_B^4 \beta_A^2 - 10 (\beta_B^2 + \beta^2) \beta_A^4 \right) \\
 & \times \left( \beta_B^4 + 2\beta^2 \beta_A^2 + 2\beta_B^2 (\beta^2 + \beta_A^2) \right) + 4p^4 (\beta_B^2 + \beta^2)^4 \beta_A^4 (\beta_B^2 + \beta_A^2) \Big] \\
 & \hspace{15em} (B.6)
 \end{aligned}$$

$\underline{\phi(2050) \rightarrow K^+ K^{*-}}$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= \frac{\gamma(c_1^{\phi_{2050}} + c_2^{\phi_{2050}})}{\pi^{1/4}} \{ f_{11}(p_{KK^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K^*}) \\
 & \times e_1(p_{KK^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K^*}) + c_1^{\phi_\Delta} c_2^{\phi_\Delta} f_{12}(p_{KK^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) \\
 & \times e_2(p_{KK^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) + c_1^{\omega_\Delta} c_2^{\omega_\Delta} \\
 & \times f_{12}(p_{KK^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) e_2(p_{KK^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) \} Y_{10} \\
 f_{11}(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C) &= \frac{p \beta_B^{3/2} \beta_C^{3/2} \beta_A^{3/2}}{6\sqrt{10} (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2))^{13/2}} \left[ 20 (6\beta_B^{10} \beta_C^{10} - 5\beta_B^8 \beta_C^8 (\beta_B^2 + \beta_C^2)) \right. \\
 & \times \beta_A^2 - 20\beta_B^6 \beta_C^6 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 \beta_A^4 + 2\beta_B^4 \beta_C^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^3 \beta_A^6 + 14\beta_B^2 \\
 & \times \beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^4 \beta_A^8 + 3 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^5 \beta_A^{10} \Big) + 4p^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 \beta_A^2 \\
 & \times \left( 10\beta_B^6 \beta_C^6 + \beta_B^4 \beta_C^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2 - 14\beta_B^2 \beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 \beta_A^4 - 5 \right. \\
 & \left. \times (\beta_B^2 + \beta_C^2)^3 \beta_A^6 \Big) + p^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^4 \beta_A^4 (2\beta_B^2 \beta_C^2 + (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2) \Big] \\
 f_{12}(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= \frac{p \beta_B^{3/2} \beta_C^{3/2} \beta_A^{3/2}}{9\sqrt{10} (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2) + 2 (\beta_C^2 + \beta_A^2) \beta^2)^{13/2}} \\
 & \times \left[ 20 (-\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (\beta_C^2 - \beta_A^2) + 2 (\beta_C^2 - \beta_A^2) \beta^2) \right. \\
 & \times (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2) + 2 (\beta_C^2 + \beta_A^2) \beta^2)^2 (\beta_B^4 (6\beta_C^4 - 11\beta_C^2 \\
 & \times \beta_A^2 - 3\beta_A^4) - \beta_B^2 (11\beta_C^4 \beta_A^2 + 6\beta_C^2 \beta_A^4 + 2\beta^2 (-9\beta_C^4 + 11\beta_C^2 \beta_A^2 \\
 & + 6\beta_A^4)) - 3 (4\beta_C^2 \beta_A^4 \beta^2 + 4\beta_A^4 \beta^4 + \beta_C^4 (\beta_A^4 - 4\beta^4))) \Big) + 4\beta_B^2 \\
 & \times (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^2 (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2) + 2 (\beta_C^2 + \beta_A^2) \beta^2) \\
 & (\beta_B^4 (10\beta_C^4 - 9\beta_C^2 \beta_A^2 - 5\beta_A^4) - \beta_B^2 (20\beta_A^4 \beta^2 + \beta_C^4 (9\beta_A^2 - 30\beta^2) \\
 & + 2\beta_C^2 \beta_A^2 (5\beta_A^2 + 9\beta^2))) - 5 (4\beta_C^2 \beta_A^4 \beta^2 + 4\beta_A^4 \beta^4 + \beta_C^4 \\
 & \times (\beta_A^4 - 4\beta^4)) \Big) p^2 + \beta_A^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^4 (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 \\
 & \times (2\beta_C^2 + \beta_A^2) + 2 (\beta_C^2 + \beta_A^2) \beta^2) p^4 \Big] \\
 & \hspace{15em} (B.7)
 \end{aligned}$$

$\underline{\phi(2050) \rightarrow K^{*+} K^{*-}}$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} = & \frac{2\gamma(c_1^{\phi_{2050}} - c_2^{\phi_{2050}})}{\pi^{1/4}} \left\{ -f_9(p_{K^*K^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_{K^*}) e_1(p_{K^*K^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_{K^*}, \beta_{K^*}) \right. \\
 & + 2c_1^{\phi_{\Delta}} c_2^{\phi_{\Delta}} f_{10}(p_{K^*K^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_{\Delta}}) e_2(p_{K^*K^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_{K^*}, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_{\Delta}}) \\
 & \left. + 2c_1^{\omega_{\Delta}} c_2^{\omega_{\Delta}} f_{10}(p_{K^*K^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_{\Delta}}) e_2(p_{K^*K^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_{K^*}, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_{\Delta}}) \right\} Y_{1-1}
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

$\phi(2050) \rightarrow K^+K_1^-(1270)$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} = & \frac{\gamma}{2\pi^{1/4}} \left\{ a_1(\beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}) e_1(p_{KK_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}) \left[ 2(c_1^{\phi_{2050}} + c_2^{\phi_{2050}}) \right. \right. \\
 & \times \left( -b_1(p_{KK_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}) Y_{00} + b_2(p_{KK_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}) Y_{20} \right) \cos \theta \\
 & \left. + \sqrt{2}(c_1^{\phi_{2050}} - c_2^{\phi_{2050}}) \left( 2b_1(p_{KK_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}) Y_{00} + b_2(p_{KK_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}) Y_{20} \right) \right. \\
 & \times \sin \theta \left. \right] - (c_1^{\phi_{2050}} + c_2^{\phi_{2050}}) \left[ c_1^{\eta_{\Delta}} c_2^{\eta_{\Delta}} a_2(\beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta_{\Delta}}) \right. \\
 & \times e_2(p_{KK_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta_{\Delta}}) \left( -b_3(p_{KK_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta_{\Delta}}) Y_{00} \right. \\
 & \left. \left. + b_4(p_{KK_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta_{\Delta}}) Y_{20} \right) + c_1^{\eta'_{\Delta}} c_2^{\eta'_{\Delta}} a_2(\beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta'_{\Delta}}) \right. \\
 & \times e_2(p_{KK_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta'_{\Delta}}) \left( -b_3(p_{KK_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta'_{\Delta}}) Y_{00} \right. \\
 & \left. \left. + b_4(p_{KK_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta'_{\Delta}}) Y_{20} \right) \right] \cos \theta + \frac{(c_1^{\phi_{2050}} - c_2^{\phi_{2050}})}{\sqrt{2}} \left[ c_1^{\phi_{\Delta}} c_2^{\phi_{\Delta}} \right. \\
 & \times a_2(\beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\phi_{\Delta}}) e_2(p_{KK_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\phi_{\Delta}}) \\
 & \times \left( b_3(p_{KK_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\phi_{\Delta}}) Y_{00} + 2b_4(p_{KK_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\phi_{\Delta}}) Y_{20} \right) \\
 & \left. + c_1^{\omega_{\Delta}} c_2^{\omega_{\Delta}} a_2(\beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\omega_{\Delta}}) e_2(p_{KK_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\omega_{\Delta}}) \right. \\
 & \left. \times \left( b_3(p_{KK_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\omega_{\Delta}}) Y_{00} + 2b_4(p_{KK_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\omega_{\Delta}}) Y_{20} \right) \right] \sin \theta \left. \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_1(\beta_A, \beta_B, \beta_C) &= \frac{\beta_B^{7/2} \beta_C^{5/2} \beta_A^{3/2}}{12\sqrt{15} (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2))^{15/2}} \\
 a_2(\beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= \frac{\beta_B^{3/2} \beta_C^{5/2} \beta_A^{3/2}}{9\sqrt{15} (\beta_C^2 (\beta_B^2 + 2\beta^2) + (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) \beta_A^2)^{15/2}} \\
 b_1(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C) &= 240\beta_A^2 \left( 11\beta_B^4 \beta_C^4 - 14\beta_B^2 \beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2 + 3(\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 \beta_A^4 \right) \\
 & \quad (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2))^3 \\
 & \quad + 20p^2 \left( 6\beta_B^6 \beta_C^6 - 33\beta_B^4 \beta_C^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2 + 44\beta_B^2 \beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \beta_A^4 - (\beta_B^2 + \beta_C^2)^3 \beta_A^6 \Big) (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2))^2 \\
 & + 4p^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 \beta_A^2 (10\beta_B^6 \beta_C^6 - 7\beta_B^4 \beta_C^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2 - 23\beta_B^2 \\
 & \beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 \beta_A^4 - 6 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^3 \beta_A^6) \\
 & + p^6 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^4 \beta_A^4 (2\beta_B^2 \beta_C^2 + (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2) \\
 b_2(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C) = & \frac{1}{\sqrt{5}} p^2 \left[ 120\beta_B^{10} \beta_C^{10} - 420\beta_B^8 \beta_C^8 (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2 - 752\beta_B^6 \beta_C^6 \right. \\
 & (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 \beta_A^4 + 456\beta_B^4 \beta_C^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^3 \beta_A^6 + 888\beta_B^2 \beta_C^2 \\
 & (\beta_B^2 + \beta_C^2)^4 \beta_A^8 + 220 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^5 \beta_A^{10} \\
 & + 4p^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 \beta_A^2 (10\beta_B^6 \beta_C^6 - 7\beta_B^4 \beta_C^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2 \\
 & - 26\beta_B^2 \beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 \beta_A^4 - 9 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^3 \beta_A^6) \\
 & \left. + p^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^4 \beta_A^4 (2\beta_B^2 \beta_C^2 + (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2) \right] \\
 b_3(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) = & 240\beta_B^2 \beta_A^2 (\beta_C^2 (\beta_B^2 + 2\beta^2) + (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) \beta_A^2)^3 \\
 & (11\beta_C^4 (\beta_B^2 + 2\beta^2)^2 - 14\beta_C^2 (\beta_B^2 + 2\beta^2) (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) \beta_A^2 \\
 & + 3 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^2 \beta_A^4) \\
 & + 20p^2 (\beta_C^2 (\beta_B^2 + 2\beta^2) + (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) \beta_A^2)^2 (6\beta_C^6 (\beta_B^2 + \beta^2) \\
 & (\beta_B^2 + 2\beta^2)^3 - 11\beta_C^4 (\beta_B^2 + 2\beta^2)^2 (3\beta_B^2 + 2\beta^2) (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) \beta_A^2 \\
 & + 2\beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^2 (22\beta_B^4 + 41\beta_B^2 \beta^2 - 6\beta^4) \beta_A^4 - (\beta_B^2 - 22\beta^2) \\
 & (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^3 \beta_A^6) \\
 & + 4p^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^2 \beta_A^2 (10\beta_C^6 (\beta_B^2 + \beta^2) (\beta_B^2 + 2\beta^2)^3 - \beta_C^4 \\
 & (7\beta_B^2 - 2\beta^2) (\beta_B^2 + 2\beta^2)^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) \beta_A^2 - \beta_C^2 \\
 & (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^2 (23\beta_B^4 + 72\beta_B^2 \beta^2 + 52\beta^4) \beta_A^4 \\
 & - 6 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^3 (\beta_B^2 + 3\beta^2) \beta_A^6) \\
 & + p^6 (\beta_B^2 + 2\beta^2) (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^4 \beta_A^4 (2\beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta^2) \\
 & + (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) \beta_A^2) \\
 b_4(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) = & \frac{p^2}{\sqrt{5}} (\beta_B^2 + 2\beta^2) \left[ 4 (30\beta_C^{10} (\beta_B^2 + \beta^2) (\beta_B^2 + 2\beta^2)^4 - 5\beta_C^8 \beta_A^2 \right. \\
 & (\beta_B^2 + 2\beta^2)^3 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) (21\beta_B^2 + 10\beta^2) - 4\beta_C^6 (\beta_B^2 + 2\beta^2)^2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \left( \beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2 \right)^2 \left( 47\beta_B^2 + 55\beta^2 \right) \beta_A^4 + 6\beta_C^4 \left( \beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2 \right)^3 \\
 & \left( 19\beta_B^4 + 28\beta_B^2\beta^2 - 20\beta^4 \right) \beta_A^6 + 2\beta_C^2 \left( \beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2 \right)^4 \\
 & \left( 111\beta_B^2 + 95\beta^2 \right) \beta_A^8 + 55 \left( \beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2 \right)^5 \beta_A^{10} \\
 & + 4p^2 \left( \beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2 \right)^2 \beta_A^2 \left( 10\beta_C^6 \left( \beta_B^2 + \beta^2 \right) \left( \beta_B^2 + 2\beta^2 \right)^2 - \beta_C^4 \right. \\
 & \left. \left( \beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2 \right) \left( 7\beta_B^4 + 12\beta_B^2\beta^2 - 4\beta^4 \right) \beta_A^2 - 26\beta_C^2 \left( \beta_B^2 + \beta^2 \right) \right. \\
 & \left. \left( \beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2 \right)^2 \beta_A^4 - 9 \left( \beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2 \right)^3 \beta_A^6 \right) \\
 & \left. + p^4 \left( \beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2 \right)^4 \beta_A^4 \left( 2\beta_C^2 \left( \beta_B^2 + \beta^2 \right) + \left( \beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2 \right) \beta_A^2 \right) \right] \\
 & \tag{B.9}
 \end{aligned}$$

$\phi(2050) \rightarrow K^+K_1^-(1400)$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} = & \frac{\gamma}{2\pi^{1/4}} \left\{ a_1(\beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}) e_1(p_{KK_1}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}) \left[ -2(c_1^{\phi 2050} + c_2^{\phi 2050}) \right. \right. \\
 & \times \left( -b_1(p_{KK_1}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}) Y_{00} + b_2(p_{KK_1}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}) Y_{20} \right) \sin \theta \\
 & \left. + \sqrt{2}(c_1^{\phi 2050} - c_2^{\phi 2050}) \left( 2b_1(p_{KK_1}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}) Y_{00} + b_2(p_{KK_1}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}) Y_{20} \right) \right. \\
 & \times \cos \theta \left. \right] + (c_1^{\phi 2050} + c_2^{\phi 2050}) \left[ c_1^{\eta\Delta} c_2^{\eta\Delta} a_2(\beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta\Delta}) \right. \\
 & \times e_2(p_{KK_1}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta\Delta}) \left( -b_3(p_{KK_1}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta\Delta}) Y_{00} \right. \\
 & \left. + b_4(p_{KK_1}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta\Delta}) Y_{20} \right) + c_1^{\eta'\Delta} c_2^{\eta'\Delta} a_2(\beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta'\Delta}) \\
 & \times e_2(p_{KK_1}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta'\Delta}) \left( -b_3(p_{KK_1}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta'\Delta}) Y_{00} \right. \\
 & \left. + b_4(p_{KK_1}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta'\Delta}) Y_{20} \right) \left. \right] \sin \theta + \frac{(c_1^{\phi 2050} - c_2^{\phi 2050})}{\sqrt{2}} \left[ c_1^{\phi\Delta} c_2^{\phi\Delta} \right. \\
 & \times a_2(\beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\phi\Delta}) e_2(p_{KK_1}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\phi\Delta}) \\
 & \times \left( b_3(p_{KK_1}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\phi\Delta}) Y_{00} + 2b_4(p_{KK_1}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\phi\Delta}) Y_{20} \right) \\
 & \left. + c_1^{\omega\Delta} c_2^{\omega\Delta} a_2(\beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\omega\Delta}) e_2(p_{KK_1}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\omega\Delta}) \right. \\
 & \left. \times \left( b_3(p_{KK_1}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\omega\Delta}) Y_{00} + 2b_4(p_{KK_1}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\omega\Delta}) Y_{20} \right) \right] \cos \theta \left. \right\} \\
 & \tag{B.10}
 \end{aligned}$$

$\phi(2050) \rightarrow K^+K_0^{*-}(1430)$  :

$$h_{fi} = \frac{\gamma (c_1^{\phi 2050} - c_2^{\phi 2050})}{\sqrt{3} \pi^{1/4}} \left\{ c_1^{\phi\Delta} c_2^{\phi\Delta} a_3(p_{KK_0^*}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K_0^*}, \beta_{\phi\Delta}) \right.$$

$$\begin{aligned}
 & e_2(p_{KK_0^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_0^*}, \beta_{\phi_\Delta}) b_5(p_{KK_0^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_0^*}, \beta_{\phi_\Delta}) \\
 & + c_1^{\omega\Delta} c_2^{\omega\Delta} a_3(p_{KK_0^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_0^*}, \beta_{\omega_\Delta}) e_2(p_{KK_0^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_0^*}, \beta_{\omega_\Delta}) \\
 & b_5(p_{KK_0^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_0^*}, \beta_{\omega_\Delta}) \} Y_{21} \\
 a_3(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= \frac{p^2 \beta_B^{3/2} \beta_C^{5/2} \beta_A^{3/2} (\beta_B^2 + 2\beta^2)}{90 (\beta_B^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2) + 2\beta_A^2 \beta^2 + \beta_C^2 (\beta_A^2 + 2\beta^2))^{15/2}} \\
 b_5(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= 4 \left( \beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2) + 2 (\beta_C^2 + \beta_A^2) \beta^2 \right)^2 \left( \beta_B^6 (30\beta_C^6 - 165\beta_C^4 \beta_A^2 \right. \\
 & + 112\beta_C^2 \beta_A^4 + 55\beta_A^6) + \beta_B^4 (-165\beta_C^6 \beta_A^2 + 224\beta_C^4 \beta_A^4 + 165\beta_C^2 \beta_A^6 + 2 \\
 & (75\beta_C^6 - 385\beta_C^4 \beta_A^2 + 209\beta_C^2 \beta_A^4 + 165\beta_A^6) \beta^2) + 5 (\beta_C^2 \beta_A^2 + 2 \\
 & (\beta_C^2 + \beta_A^2) \beta^2) (22\beta_A^2 \beta^2 + \beta_C^2 (11\beta_A^2 - 6\beta^2)) (2\beta_A^2 \beta^2 + \beta_C^2 \\
 & (\beta_A^2 - 2\beta^2)) + \beta_B^2 (660\beta_A^6 \beta^4 + 8\beta_C^6 (14\beta_A^4 - 55\beta_A^2 \beta^2 + 30\beta^4) + \beta_C^4 \\
 & (165\beta_A^6 + 388\beta_A^4 \beta^2 - 1100\beta_A^2 \beta^4) + 4\beta_C^2 (165\beta_A^6 \beta^2 + 82\beta_A^4 \beta^4)) \\
 & + 4p^2 \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^2 (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2) + 2 \\
 & (\beta_C^2 + \beta_A^2) \beta^2) (\beta_B^4 (10\beta_C^4 - 17\beta_C^2 \beta_A^2 - 9\beta_A^4) - (\beta_C^2 \beta_A^2 + 2 \\
 & (\beta_C^2 + \beta_A^2) \beta^2) (9\beta_C^2 \beta_A^2 + 2 (-5\beta_C^2 + 9\beta_A^2) \beta^2) - \beta_B^2 \\
 & (17\beta_C^4 \beta_A^2 + 18\beta_C^2 \beta_A^4 + 6 (-5\beta_C^4 + 7\beta_C^2 \beta_A^2 + 6\beta_A^4) \beta^2)) \\
 & \left. + p^4 \beta_A^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^4 (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (2\beta_C^2 + \beta_A^2) + 2 (\beta_C^2 + \beta_A^2) \beta^2) \right) \\
 & \tag{B.11}
 \end{aligned}$$

$\phi(2050) \rightarrow K^+ K_2^{*-} (1430) :$

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= \frac{\gamma (c_1^{\phi_{2050}} - c_2^{\phi_{2050}})}{\pi^{1/4}} \left\{ -a_4(p_{KK_2^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_2^*}) \right. \\
 & e_1(p_{KK_2^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_2^*}) b_6(p_{KK_2^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_2^*}) + c_1^{\phi\Delta} c_2^{\phi\Delta} \\
 & a_3(p_{KK_2^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_2^*}, \beta_{\phi_\Delta}) e_2(p_{KK_2^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_2^*}, \beta_{\phi_\Delta}) \\
 & b_5(p_{KK_2^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_2^*}, \beta_{\phi_\Delta}) + c_1^{\omega\Delta} c_2^{\omega\Delta} a_3(p_{KK_2^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_2^*}, \beta_{\omega_\Delta}) \\
 & \left. e_2(p_{KK_2^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_2^*}, \beta_{\omega_\Delta}) b_5(p_{KK_2^*}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_K, \beta_{K_2^*}, \beta_{\omega_\Delta}) \right\} Y_{2-1} \\
 a_4(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C) &= \frac{p^2 \beta_B^{7/2} \beta_C^{5/2} \beta_A^{3/2}}{60 (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2))^{15/2}} \\
 b_6(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C) &= \left( 120\beta_B^{10} \beta_C^{10} - 420\beta_B^8 \beta_C^8 (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2 - 752\beta_B^6 \beta_C^6 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 \beta_A^4 + 456 \right. \\
 & \beta_B^4 \beta_C^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^3 \beta_A^6 + 888\beta_B^2 \beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^4 \beta_A^8 + 220 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^5 \beta_A^{10} \\
 & \left. + 4p^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 \beta_A^2 (10\beta_B^6 \beta_C^6 - 7\beta_B^4 \beta_C^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2 - 26\beta_B^2 \beta_C^2 \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 \beta_A^4 - 9 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^3 \beta_A^6 \\
 & + p^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^4 \beta_A^4 (2\beta_B^2 \beta_C^2 + (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2)
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

$\phi(2050) \rightarrow K^+ K^{*-}(1410)$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= \frac{\gamma(c_1^{\phi 2050} + c_2^{\phi 2050})}{\pi^{1/4}} \{ a_5(p_{KK^*}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K^*}) e_1(p_{KK^*}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K^*}) \\
 & b_7(p_{KK^*}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K^*}) - c_1^{\phi \Delta} c_2^{\phi \Delta} a_6(p_{KK^*}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\phi \Delta}) \\
 & e_2(p_{KK^*}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\phi \Delta}) b_8(p_{KK^*}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\phi \Delta}) \\
 & - c_1^{\omega \Delta} c_2^{\omega \Delta} a_6(p_{KK^*}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\omega \Delta}) e_2(p_{KK^*}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\omega \Delta}) \\
 & b_8(p_{KK^*}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\omega \Delta}) \} Y_{10} \\
 a_5(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C) &= \frac{p \beta_A^{3/2} \beta_B^{3/2} \beta_C^{3/2}}{24\sqrt{15} (\beta_B^2 \beta_C^2 + \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2))^{17/2}} \\
 a_6(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= \frac{p \beta_A^{3/2} \beta_B^{3/2} \beta_C^{3/2}}{36\sqrt{15} (\beta_C^2 (\beta_B^2 + 2\beta^2) + \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2))^{17/2}} \\
 b_7(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C) &= 40 (\beta_B^2 \beta_C^2 + \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2))^3 (18\beta_B^8 \beta_C^8 + \beta_A^4 \beta_B^4 \beta_C^4 (275\beta_B^2 - 27\beta_C^2) \\
 & (\beta_B^2 + \beta_C^2) - 11\beta_A^6 \beta_B^2 \beta_C^2 (\beta_B^2 - 3\beta_C^2) (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 - 9\beta_A^8 (\beta_B^2 - \beta_C^2) \\
 & (\beta_B^2 + \beta_C^2)^3 - 11\beta_A^2 \beta_B^6 \beta_C^6 (19\beta_B^2 + 3\beta_C^2)) \\
 & - 4p^2 (\beta_B^2 \beta_C^2 + \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2))^2 (30\beta_B^{10} \beta_C^8 + 2\beta_A^4 \beta_B^4 \beta_C^4 \\
 & (265\beta_B^2 - 3\beta_C^2) (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 + 30\beta_A^8 (-\beta_B^2 + \beta_C^2) \\
 & (\beta_B^2 + \beta_C^2)^4 - 5\beta_A^2 \beta_B^6 \beta_C^6 (\beta_B^2 + \beta_C^2) (61\beta_B^2 + 12\beta_C^2) + \beta_A^6 \beta_B^2 \beta_C^2 \\
 & (\beta_B^2 + \beta_C^2)^3 (79\beta_B^2 + 84\beta_C^2)) \\
 & - 2p^4 \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 (20\beta_B^{10} \beta_C^8 + 3\beta_A^8 (\beta_B^2 - \beta_C^2) (\beta_B^2 + \beta_C^2)^4 \\
 & - 15\beta_A^4 \beta_B^4 \beta_C^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 (5\beta_B^2 + \beta_C^2) - 4\beta_A^6 \beta_B^2 \beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^3 \\
 & (4\beta_B^2 + 3\beta_C^2) - 6\beta_A^2 \beta_B^6 \beta_C^6 (6\beta_B^4 + 7\beta_B^2 \beta_C^2 + \beta_C^4)) \\
 & - p^6 \beta_A^4 \beta_B^4 \beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^4 (2\beta_B^2 \beta_C^2 + \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2)) \\
 b_8(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= 40 (\beta_C^2 (\beta_B^2 + 2\beta^2) + \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2))^3 (18\beta_C^8 (\beta_B^2 + \beta^2) \\
 & (\beta_B^2 + 2\beta^2)^3 - 9\beta_A^8 (\beta_B^2 - \beta_C^2 + 2\beta^2) (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^3 + 11\beta_A^6 \beta_C^2 \\
 & (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^2 (-\beta_B^4 + 24\beta^4 + \beta_B^2 (3\beta_C^2 + 10\beta^2)) - 11\beta_A^2 \beta_C^6 \\
 & (\beta_B^2 + 2\beta^2)^2 (19\beta_B^4 + 24\beta^4 + \beta_B^2 (3\beta_C^2 + 50\beta^2)) + \beta_A^4 \beta_C^4 (\beta_B^2 + 2\beta^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) (275\beta_B^4 - 36\beta_C^2\beta^2 + \beta_B^2 (-27\beta_C^2 + 550\beta^2))) \\
& -4p^2 (\beta_C^2 (\beta_B^2 + 2\beta^2) + \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2))^2 (30\beta_C^8 (\beta_B^2 + \beta^2) \\
& (\beta_B^2 + 2\beta^2)^4 - 30\beta_A^8 (\beta_B^2 - \beta_C^2 + 2\beta^2) (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^4 - 5\beta_A^2\beta_C^6 \\
& (\beta_B^2 + 2\beta^2)^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) (61\beta_B^4 + 4\beta^2 (3\beta_C^2 + 25\beta^2) + 4\beta_B^2 \\
& (3\beta_C^2 + 43\beta^2))) + \beta_A^6\beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^3 (79\beta_B^4 + 60\beta_C^2\beta^2 + 820\beta^4 \\
& + \beta_B^2 (84\beta_C^2 + 568\beta^2)) + 2\beta_A^4\beta_C^4 (\beta_B^2 + 2\beta^2) (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^2 \\
& (265\beta_B^4 - 30\beta_C^2\beta^2 + 190\beta^4 + \beta_B^2 (-3\beta_C^2 + 625\beta^2))) \\
& -2p^4\beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^2 (\beta_C^2 (\beta_B^2 + 2\beta^2) + \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)) \\
& (20\beta_C^6 (\beta_B^2 + \beta^2) (\beta_B^2 + 2\beta^2)^3 + 3\beta_A^6 (\beta_B^2 - \beta_C^2 + 2\beta^2) \\
& (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^3 - 2\beta_A^2\beta_C^4 (\beta_B^2 + 2\beta^2) (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) (28\beta_B^4 \\
& + 3\beta_C^2\beta^2 + 38\beta^4 + 3\beta_B^2 (\beta_C^2 + 25\beta^2)) - \beta_A^4\beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^2 \\
& (19\beta_B^4 + 9\beta_B^2 (\beta_C^2 + 10\beta^2) + 4\beta^2 (3\beta_C^2 + 26\beta^2))) \\
& -p^6\beta_A^4\beta_C^2 (\beta_B^2 + 2\beta^2)^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^4 (2\beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta^2) + \beta_A^2 \\
& (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)) \tag{B.13}
\end{aligned}$$

$\phi(2050) \rightarrow K^+K^-(1460)$  :

$$\begin{aligned}
h_{fi} = & -\frac{\gamma(c_1^{\phi 2050} - c_2^{\phi 2050})}{\pi^{1/4}} \{ a_5(p_{KK1460}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K1460}) e_1(p_{KK1460}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K1460}) \\
& b_7(p_{KK1460}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K1460}) - c_1^{\eta\Delta} c_2^{\eta\Delta} a_6(p_{KK1460}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K1460}, \beta_{\eta\Delta}) \\
& e_2(p_{KK1460}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K1460}, \beta_{\eta\Delta}) b_8(p_{KK1460}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K1460}, \beta_{\eta\Delta}) \\
& -c_1^{\eta'\Delta} c_2^{\eta'\Delta} a_6(p_{KK1460}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K1460}, \beta_{\eta'\Delta}) e_2(p_{KK1460}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K1460}, \beta_{\eta'\Delta}) \\
& b_8(p_{KK1460}, \beta_{\phi 2050}, \beta_K, \beta_{K1460}, \beta_{\eta'\Delta}) \} Y_{11} \tag{B.14}
\end{aligned}$$

$\phi(2050) \rightarrow \eta\phi$  :

$$\begin{aligned}
h_{fi} = & \frac{\gamma}{\pi^{1/4}} \left\{ [2c_1^\eta c_1^\phi c_1^{\phi 2050} + c_2^\eta c_2^\phi c_2^{\phi 2050}] a_7(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi 2050}, \beta_\eta, \beta_\phi) \right. \\
& e_1(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi 2050}, \beta_\eta, \beta_\phi) b_9(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi 2050}, \beta_\eta, \beta_\phi) \\
& - [2c_1^\eta c_1^\phi c_1^{\phi 2050} (c_1^{\phi\Delta})^2 + c_2^\eta c_2^\phi c_2^{\phi 2050} (c_2^{\phi\Delta})^2] a_8(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi 2050}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\phi\Delta}) \\
& e_2(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi 2050}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\phi\Delta}) b_{10}(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi 2050}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\phi\Delta}) \\
& \left. - [2c_1^\eta c_1^\phi c_1^{\phi 2050} (c_1^{\omega\Delta})^2 + c_2^\eta c_2^\phi c_2^{\phi 2050} (c_2^{\omega\Delta})^2] a_8(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi 2050}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\omega\Delta}) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. e_2(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\omega_\Delta}) b_{10}(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\omega_\Delta}) \right\} Y_{10} \\
 a_7(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C) &= \frac{p \beta_A^{3/2} \beta_B^{3/2} \beta_C^{3/2}}{3\sqrt{10} (\beta_B^2 \beta_C^2 + \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2))^{13/2}} \\
 a_8(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= \frac{p \sqrt{2} \beta_A^{3/2} \beta_B^{3/2} \beta_C^{3/2}}{9\sqrt{5} (\beta_A^2 (2\beta^2 + \beta_B^2) + (2\beta^2 + \beta_A^2 + \beta_B^2) \beta_C^2)^{13/2}} \\
 b_9(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C) &= 20 (\beta_B^2 \beta_C^2 + \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2))^2 (6\beta_B^6 \beta_C^6 - 17\beta_A^2 \beta_B^4 \beta_C^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2) + 8 \\
 & \quad \beta_A^4 \beta_B^2 \beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 + 3\beta_A^6 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^3) \\
 & \quad + 4p^2 \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 (10\beta_B^6 \beta_C^6 + \beta_A^2 \beta_B^4 \beta_C^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2) - 14\beta_A^4 \beta_B^2 \beta_C^2 \\
 & \quad (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 - 5\beta_A^6 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^3) \\
 & \quad + p^4 \beta_A^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2)^4 (2\beta_B^2 \beta_C^2 + \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2)) \\
 b_{10}(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= 20 (-\beta_A^2 (2\beta^2 + \beta_B^2) + (2\beta^2 - \beta_A^2 + \beta_B^2) \beta_C^2) (\beta_A^2 (2\beta^2 + \beta_B^2) \\
 & \quad + (2\beta^2 + \beta_A^2 + \beta_B^2) \beta_C^2)^2 (-3\beta_A^4 (2\beta^2 + \beta_B^2)^2 - \beta_A^2 (2\beta^2 + \beta_B^2) \\
 & \quad (6\beta_A^2 + 11\beta_B^2) \beta_C^2 + (12\beta^4 - 3\beta_A^4 + (18\beta^2 - 11\beta_A^2) \beta_B^2 + 6\beta_B^4) \beta_C^4) \\
 & \quad + 4p^2 \beta_A^2 (2\beta^2 + \beta_B^2 + \beta_C^2)^2 (\beta_A^2 (2\beta^2 + \beta_B^2) + (2\beta^2 + \beta_A^2 + \beta_B^2) \beta_C^2) \\
 & \quad (-5\beta_A^4 (2\beta^2 + \beta_B^2)^2 - \beta_A^2 (2\beta^2 + \beta_B^2) (10\beta_A^2 + 9\beta_B^2) \beta_C^2 \\
 & \quad + (20\beta^4 - 5\beta_A^4 + 30\beta^2 \beta_B^2 - 9\beta_A^2 \beta_B^2 + 10\beta_B^4) \beta_C^4) + p^4 \beta_A^4 \\
 & \quad \times (2\beta^2 + \beta_B^2 + \beta_C^2)^4 (2\beta_B^2 \beta_C^2 + 2\beta^2 (\beta_A^2 + \beta_C^2) + \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2))
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

$\phi(2050) \rightarrow \eta' \phi :$

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= \frac{\gamma}{\pi^{1/4}} \left\{ [2c_1^{\eta'} c_1^\phi c_1^{\phi_{2050}} + c_2^{\eta'} c_2^\phi c_2^{\phi_{2050}}] a_7(p_{\eta'\phi}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_{\eta'}, \beta_\phi) \right. \\
 & \quad e_1(p_{\eta'\phi}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_{\eta'}, \beta_\phi) b_9(p_{\eta'\phi}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_{\eta'}, \beta_\phi) \\
 & \quad - [2c_1^{\eta'} c_1^\phi c_1^{\phi_{2050}} (c_1^{\phi_\Delta})^2 + c_2^{\eta'} c_2^\phi c_2^{\phi_{2050}} (c_2^{\phi_\Delta})^2] a_8(p_{\eta'\phi}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_{\eta'}, \beta_\phi, \beta_{\phi_\Delta}) \\
 & \quad e_2(p_{\eta'\phi}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_{\eta'}, \beta_\phi, \beta_{\phi_\Delta}) b_{10}(p_{\eta'\phi}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_{\eta'}, \beta_\phi, \beta_{\phi_\Delta}) \\
 & \quad - [2c_1^{\eta'} c_1^\phi c_1^{\phi_{2050}} (c_1^{\omega_\Delta})^2 + c_2^{\eta'} c_2^\phi c_2^{\phi_{2050}} (c_2^{\omega_\Delta})^2] a_8(p_{\eta'\phi}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_{\eta'}, \beta_\phi, \beta_{\omega_\Delta}) \\
 & \quad \left. e_2(p_{\eta'\phi}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_{\eta'}, \beta_\phi, \beta_{\omega_\Delta}) b_{10}(p_{\eta'\phi}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_{\eta'}, \beta_\phi, \beta_{\omega_\Delta}) \right\} Y_{10}
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

$\phi(2050) \rightarrow \eta h_1(1380) :$

$$\begin{aligned}
 h_{fi} = & -\frac{\gamma}{\pi^{1/4}} \left\{ (2c_1^{h_1} c_1^\eta c_1^{\phi_{2050}} + c_2^{h_1} c_2^\eta c_2^{\phi_{2050}}) 2 a_1(\beta_{\phi_{2050}}, \beta_\eta, \beta_{h_1}) e_1(p_{\eta h_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_\eta, \beta_{h_1}) \right. \\
 & \left[ b_1(p_{\eta h_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_\eta, \beta_{h_1}) Y_{00} - b_2(p_{\eta h_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_\eta, \beta_{h_1}) Y_{20} \right] \\
 & + \left( 2c_1^{h_1} c_1^\eta (c_1^{\eta\Delta})^2 c_1^{\phi_{2050}} + c_2^{h_1} c_2^\eta (c_2^{\eta\Delta})^2 c_2^{\phi_{2050}} \right) \\
 & a_2(\beta_{\phi_{2050}}, \beta_\eta, \beta_{h_1}, \beta_{\eta\Delta}) e_2(p_{\eta h_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_\eta, \beta_{h_1}, \beta_{\eta\Delta}) \\
 & \left[ b_3(p_{\eta h_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_\eta, \beta_{h_1}, \beta_{\eta\Delta}) Y_{00} - b_4(p_{\eta h_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_\eta, \beta_{h_1}, \beta_{\eta\Delta}) Y_{20} \right] \\
 & + \left( 2c_1^{h_1} c_1^\eta (c_1^{\eta'\Delta})^2 c_1^{\phi_{2050}} + c_2^{h_1} c_2^\eta (c_2^{\eta'\Delta})^2 c_2^{\phi_{2050}} \right) \\
 & a_2(\beta_{\phi_{2050}}, \beta_\eta, \beta_{h_1}, \beta_{\eta'\Delta}) e_2(p_{\eta h_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_\eta, \beta_{h_1}, \beta_{\eta'\Delta}) \\
 & \left. \left[ b_3(p_{\eta h_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_\eta, \beta_{h_1}, \beta_{\eta'\Delta}) Y_{00} - b_4(p_{\eta h_1}, \beta_{\phi_{2050}}, \beta_\eta, \beta_{h_1}, \beta_{\eta'\Delta}) Y_{20} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

$\phi_1(1850) \rightarrow K^{*+} K^{*-}$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} = & \frac{\gamma}{\pi^{1/4}} (c_1^{\phi_1} - c_2^{\phi_1}) \left\{ a_9(\beta_{\phi_1}, \beta_{K^*}) e_1(p_{K^* K^*}, \beta_{\phi_1}, \beta_{K^*}, \beta_{K^*}) \right. \\
 & \left[ b_{11}(p_{K^* K^*}, \beta_{\phi_1}, \beta_{K^*}) Y_{1-1} + b_{12}(p_{K^* K^*}, \beta_{\phi_1}, \beta_{K^*}) Y_{3-1} \right] \\
 & + c_1^{\phi_1\Delta} c_2^{\phi_1\Delta} a_{10}(\beta_{\phi_1}, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) e_2(p_{K^* K^*}, \beta_{\phi_1}, \beta_{K^*}, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) \\
 & \left[ b_{13}(p_{K^* K^*}, \beta_{\phi_1}, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) Y_{1-1} + b_{14}(p_{K^* K^*}, \beta_{\phi_1}, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) Y_{3-1} \right] \\
 & + c_1^{\omega\Delta} c_2^{\omega\Delta} a_{10}(\beta_{\phi_1}, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) e_2(p_{K^* K^*}, \beta_{\phi_1}, \beta_{K^*}, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) \\
 & \left. \left[ b_{13}(p_{K^* K^*}, \beta_{\phi_1}, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) Y_{1-1} + b_{14}(p_{K^* K^*}, \beta_{\phi_1}, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) Y_{3-1} \right] \right\} \\
 a_9(\beta_A, \beta_B) = & -\frac{16\beta_A^{7/2}}{105\sqrt{5}(\beta_B^2 + 2\beta_A^2)^{9/2}} \\
 a_{10}(\beta_A, \beta_B, \beta) = & \frac{64\beta_B^3 \beta_A^{7/2} (\beta_B^2 + \beta^2)}{315\sqrt{5}(\beta_B^4 + 2\beta_A^2\beta^2 + 2\beta_B^2(\beta_A^2 + \beta^2))^{9/2}} \\
 b_{11}(p, \beta_A, \beta_B) = & 7\sqrt{2} p \left( 5\beta_B^2 (\beta_B^2 + 2\beta_A^2) - (\beta_B^2 + \beta_A^2) p^2 \right) \\
 b_{12}(p, \beta_A, \beta_B) = & 6\sqrt{7} p^3 (\beta_B^2 + \beta_A^2) \\
 b_{13}(p, \beta_A, \beta_B, \beta) = & 7\sqrt{2} p \left[ 5(\beta_B^8 + 2\beta_B^4\beta_A^2\beta^2 + 2\beta_B^6(\beta_A^2 + \beta^2)) \right. \\
 & \left. - (\beta_B^2 + \beta_A^2) (\beta_B^2 + \beta^2)^2 p^2 \right] \\
 b_{14}(p, \beta_A, \beta_B, \beta) = & 6\sqrt{7} p^3 (\beta_B^2 + \beta_A^2) (\beta_B^2 + \beta^2)^2
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

$\phi_2(1850) \rightarrow K^+ K^-$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= \frac{\gamma}{\pi^{1/4}} (c_1^{\phi_2} - c_2^{\phi_2}) \left\{ c_1^{\phi_\Delta} c_2^{\phi_\Delta} b_{15}(p_{KK}, \beta_{\phi_2}, \beta_K, \beta_{\phi_\Delta}) e_2(p_{KK}, \beta_{\phi_2}, \beta_K, \beta_{\phi_\Delta}) \right. \\
 &\quad \left. + c_1^{\omega_\Delta} c_2^{\omega_\Delta} b_{15}(p_{KK}, \beta_{\phi_2}, \beta_K, \beta_{\omega_\Delta}) e_2(p_{KK}, \beta_{\phi_2}, \beta_K, \beta_{\omega_\Delta}) \right\} Y_{32} \\
 b_{15}(p, \beta_A, \beta_B, \beta) &= \frac{32\sqrt{2} \beta_B^3 \beta_A^{7/2} (\beta_B^2 + \beta_A^2) (\beta_B^2 + \beta^2)^3 p^3}{9\sqrt{35} (\beta_B^4 + 2\beta_A^2 \beta^2 + 2\beta_B^2 (\beta_A^2 + \beta^2))^{9/2}} \quad (\text{B.19})
 \end{aligned}$$

$\phi_2(1850) \rightarrow K^+ K^{*-}$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= \frac{\gamma}{\pi^{1/4}} (c_1^{\phi_2} + c_2^{\phi_2}) \left\{ a_{11}(\beta_{\phi_2}, \beta_K, \beta_{K^*}) e_1(p_{KK^*}, \beta_{\phi_2}, \beta_K, \beta_{K^*}) \right. \\
 &\quad \left[ b_{16}(p_{KK^*}, \beta_{\phi_2}, \beta_K, \beta_{K^*}) Y_{11} - b_{17}(p_{KK^*}, \beta_{\phi_2}, \beta_K, \beta_{K^*}) Y_{31} \right] \\
 &\quad - c_1^{\phi_\Delta} c_2^{\phi_\Delta} a_{12}(\beta_{\phi_2}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) e_2(p_{KK^*}, \beta_{\phi_2}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) \\
 &\quad \left[ b_{18}(p_{KK^*}, \beta_{\phi_2}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) Y_{11} + b_{19}(p_{KK^*}, \beta_{\phi_2}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) Y_{31} \right] \\
 &\quad - c_1^{\omega_\Delta} c_2^{\omega_\Delta} a_{12}(\beta_{\phi_2}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) e_2(p_{KK^*}, \beta_{\phi_2}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) \\
 &\quad \left. \left[ b_{18}(p_{KK^*}, \beta_{\phi_2}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) Y_{11} + b_{19}(p_{KK^*}, \beta_{\phi_2}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) Y_{31} \right] \right\} \\
 a_{11}(\beta_A, \beta_B, \beta_C) &= \frac{2 \beta_B^{3/2} \beta_C^{3/2} (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^{7/2}}{105 (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2))^{9/2}} \\
 a_{12}(\beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= \frac{2\sqrt{2} \beta_B^{3/2} \beta_C^{3/2} \beta_A^{7/2} (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)}{315 (\beta_C^2 (\beta_B^2 + 2\beta^2) + \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2))^{9/2}} \\
 b_{16}(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C) &= 21 p \left[ 20 (\beta_B^2 \beta_C^4 \beta_A^2 + \beta_B^4 \beta_C^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2)) - (\beta_B^2 + \beta_C^2) \right. \\
 &\quad \left. (2\beta_B^2 \beta_C^2 + (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2) p^2 \right] \\
 b_{17}(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C) &= \sqrt{14} p^3 (\beta_B^2 + \beta_C^2) (2\beta_B^2 \beta_C^2 + (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2) \\
 b_{18}(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= 7\sqrt{2} p \left[ 20\beta_B^2 \beta_C^2 (\beta_C^2 (\beta_B^2 + 2\beta^2) + \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)) \right. \\
 &\quad \left. - (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) (2\beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta^2) + \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)) p^2 \right] \\
 b_{19}(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= 6\sqrt{7} p^3 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) (2\beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta^2) + \beta_A^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)) \quad (\text{B.20})
 \end{aligned}$$

$\phi_2(1850) \rightarrow K^{*+} K^{*-}$  :

$$h_{fi} = \frac{\gamma}{\pi^{1/4}} (c_1^{\phi_2} - c_2^{\phi_2}) \left\{ -2 \sqrt{\frac{5}{3}} a_9(\beta_{\phi_2}, \beta_{K^*}) e_1(p_{KK^*}, \beta_{\phi_2}, \beta_{K^*}) \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \sqrt{\frac{3}{2}} b_{11}(p_{KK^*}, \beta_{\phi_2}, \beta_{K^*}) Y_{10} + \frac{1}{2} b_{12}(p_{KK^*}, \beta_{\phi_2}, \beta_{K^*}) Y_{30} \right] \\
 & - c_1^{\phi\Delta} c_2^{\phi\Delta} 2 \sqrt{\frac{5}{3}} a_{10}(\beta_{\phi_2}, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) e_2(p_{KK^*}, \beta_{\phi_2}, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) \\
 & \left[ \sqrt{\frac{3}{2}} b_{13}(p_{KK^*}, \beta_{\phi_2}, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) Y_{10} + \frac{1}{2} b_{14}(p_{KK^*}, \beta_{\phi_2}, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) Y_{30} \right] \\
 & - c_1^{\omega\Delta} c_2^{\omega\Delta} 2 \sqrt{\frac{5}{3}} a_{10}(\beta_{\phi_2}, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) e_2(p_{KK^*}, \beta_{\phi_2}, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) \\
 & \left. \left[ \sqrt{\frac{3}{2}} b_{13}(p_{KK^*}, \beta_{\phi_2}, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) Y_{10} + \frac{1}{2} b_{14}(p_{KK^*}, \beta_{\phi_2}, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) Y_{30} \right] \right\} \quad (B.21)
 \end{aligned}$$

$\phi_2(1850) \rightarrow \eta\phi$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} = & -\frac{2\gamma}{\pi^{1/4}} \left\{ (2c_1^\eta c_1^\phi c_1^{\phi_2} + c_2^\eta c_2^\phi c_2^{\phi_2}) a_{11}(\beta_{\phi_2}, \beta_\eta, \beta_\phi) e_1(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_2}, \beta_\eta, \beta_\phi) \right. \\
 & \left[ b_{16}(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_2}, \beta_\eta, \beta_\phi) Y_{11} - b_{17}(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_2}, \beta_\eta, \beta_\phi) Y_{31} \right] \\
 & - \left( 2c_1^\eta c_1^\phi c_1^{\phi_2} (c_1^{\phi\Delta})^2 + c_2^\eta c_2^\phi c_2^{\phi_2} (c_2^{\phi\Delta})^2 \right) a_{12}(\beta_{\phi_2}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\phi_\Delta}) \\
 & e_2(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_2}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\phi_\Delta}) \left[ b_{18}(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_2}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\phi_\Delta}) Y_{11} \right. \\
 & \left. + b_{19}(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_2}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\phi_\Delta}) Y_{31} \right] \\
 & - \left( 2c_1^\eta c_1^\phi c_1^{\phi_2} (c_1^{\omega\Delta})^2 + c_2^\eta c_2^\phi c_2^{\phi_2} (c_2^{\omega\Delta})^2 \right) a_{12}(\beta_{\phi_2}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\omega_\Delta}) \\
 & e_2(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_2}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\omega_\Delta}) \left[ b_{18}(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_2}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\omega_\Delta}) Y_{11} \right. \\
 & \left. + b_{19}(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_2}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\omega_\Delta}) Y_{31} \right] \left. \right\} \quad (B.22)
 \end{aligned}$$

$\phi_3(1850) \rightarrow K^+K^-$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} = & \frac{\gamma}{\pi^{1/4}} (c_1^{\phi_3} - c_2^{\phi_3}) \left\{ b_{20}(\beta_{\phi_3}, \beta_K) e_1(p_{KK}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_K) \right. \\
 & - c_1^{\eta\Delta} c_2^{\eta\Delta} b_{21}(p_{KK}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{\eta_\Delta}) e_2(p_{KK}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_K, \beta_{\eta_\Delta}) \\
 & \left. - c_1^{\eta'\Delta} c_2^{\eta'\Delta} b_{21}(p_{KK}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{\eta'\Delta}) e_2(p_{KK}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_K, \beta_{\eta'\Delta}) \right\} Y_{33} \\
 b_{20}(p, \beta_A, \beta_B) = & \frac{16\beta_A^{7/2} (\beta_B^2 + \beta_A^2) p^3}{\sqrt{35} (\beta_B^2 + 2\beta_A^2)^{9/2}} \\
 b_{21}(p, \beta_A, \beta_B, \beta) = & \frac{32\beta_B^3 (\beta_B^2 + \beta^2)^3 \beta_A^{7/2} (\beta_B^2 + \beta_A^2) p^3}{3\sqrt{35} (\beta_B^4 + 2\beta^2\beta_A^2 + 2\beta_B^2 (\beta^2 + \beta_A^2))^{9/2}} \quad (B.23)
 \end{aligned}$$



$\phi_3(1850) \rightarrow K^+K^{*-}$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= \frac{\gamma}{\pi^{1/4}} (c_1^{\phi_3} + c_2^{\phi_3}) \left\{ b_{22}(p_{KK^*}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K^*}) e_1(p_{KK^*}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K^*}) \right. \\
 &\quad + c_1^{\phi_\Delta} c_2^{\phi_\Delta} b_{23}(p_{KK^*}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) e_2(p_{KK^*}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) \\
 &\quad \left. + c_1^{\omega_\Delta} c_2^{\omega_\Delta} b_{23}(p_{KK^*}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) e_2(p_{KK^*}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) \right\} \\
 &\quad Y_{32} \\
 b_{22}(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C) &= \frac{2\beta_B^{3/2} \beta_C^{3/2} (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 \beta_A^{7/2} (2\beta_B^2 \beta_C^2 + (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2)}{\sqrt{105} (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2))^{9/2}} p^3 \\
 b_{23}(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= 4 p^3 \beta_B^{3/2} \beta_C^{3/2} \beta_A^{7/2} \\
 &\quad \frac{(\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^2 (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (2\beta_C^2 + \beta_A^2) + 2(\beta_C^2 + \beta_A^2) \beta^2)}{3\sqrt{105} (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2) + 2(\beta_C^2 + \beta_A^2) \beta^2)^{9/2}}
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

$\phi_3(1850) \rightarrow K^{*+}K^{*-}$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= \frac{6\sqrt{5}\gamma}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} (c_1^{\phi_3} - c_2^{\phi_3}) \left\{ a_9(\beta_{\phi_3}, \beta_{K^*}) e_1(p_{K^*K^*}, \beta_{\phi_3}, \beta_{K^*}, \beta_{K^*}) \right. \\
 &\quad \left[ b_{11}(p_{K^*K^*}, \beta_{\phi_3}, \beta_{K^*}) Y_{11} + \frac{1}{6} b_{12}(p_{K^*K^*}, \beta_{\phi_3}, \beta_{K^*}) Y_{31} \right] \\
 &\quad + c_1^{\phi_\Delta} c_2^{\phi_\Delta} a_{10}(\beta_{\phi_3}, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) e_2(p_{K^*K^*}, \beta_{\phi_3}, \beta_{K^*}, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) \\
 &\quad \left[ b_{13}(p_{K^*K^*}, \beta_{\phi_3}, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) Y_{11} + \frac{1}{6} b_{14}(p_{K^*K^*}, \beta_{\phi_3}, \beta_{K^*}, \beta_{\phi_\Delta}) Y_{31} \right] \\
 &\quad + c_1^{\omega_\Delta} c_2^{\omega_\Delta} a_{10}(\beta_{\phi_3}, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) e_2(p_{K^*K^*}, \beta_{\phi_3}, \beta_{K^*}, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) \\
 &\quad \left. \left[ b_{13}(p_{K^*K^*}, \beta_{\phi_3}, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) Y_{11} + \frac{1}{6} b_{14}(p_{K^*K^*}, \beta_{\phi_3}, \beta_{K^*}, \beta_{\omega_\Delta}) Y_{31} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

$\phi_3(1850) \rightarrow K^+K_1^-(1270)$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= \frac{\gamma}{\pi^{1/4}} \left\{ a_{13}(\beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}) e_1(p_{KK_1}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}) \left[ \sqrt{2}(c_1^{\phi_3} + c_2^{\phi_3}) \right. \right. \\
 &\quad (b_{24}(p_{KK_1}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}) Y_{22} + b_{25}(p_{KK_1}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}) Y_{42}) \cos \theta \\
 &\quad + (c_1^{\phi_3} - c_2^{\phi_3}) (b_{26}(p_{KK_1}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}) Y_{22} - b_{25}(p_{KK_1}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}) \\
 &\quad \left. \left. Y_{42}) \sin \theta \right] - (c_1^{\phi_3} + c_2^{\phi_3}) \left[ c_1^{\eta_\Delta} c_2^{\eta_\Delta} a_{14}(\beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta_\Delta}) \right. \right. \\
 &\quad e_2(p_{KK_1}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta_\Delta}) (b_{27}(p_{KK_1}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta_\Delta}) Y_{22} \\
 &\quad + b_{28}(p_{KK_1}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta_\Delta}) Y_{42}) + c_1^{\eta'_\Delta} c_2^{\eta'_\Delta} a_{14}(\beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta'_\Delta}) \\
 &\quad \left. \left. e_2(p_{KK_1}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta'_\Delta}) (b_{27}(p_{KK_1}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta'_\Delta}) Y_{22} \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + b_{28}(p_{KK_1}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\eta'_\Delta}) Y_{42} \right] \cos \theta - (c_1^{\phi_3} - c_2^{\phi_3}) \\
 & \left[ c_1^{\phi_\Delta} c_2^{\phi_\Delta} a_{15}(\beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\phi_\Delta}) e_2(p_{KK_1}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\phi_\Delta}) \right. \\
 & (b_{29}(p_{KK_1}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\phi_\Delta}) Y_{22} + b_{30}(p_{KK_1}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\phi_\Delta}) Y_{42}) \\
 & + c_1^{\omega_\Delta} c_2^{\omega_\Delta} a_{15}(\beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\omega_\Delta}) e_2(p_{KK_1}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\omega_\Delta}) \\
 & (b_{29}(p_{KK_1}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\omega_\Delta}) Y_{22} \\
 & \left. + b_{30}(p_{KK_1}, \beta_{\phi_3}, \beta_K, \beta_{K_1}, \beta_{\omega_\Delta}) Y_{42}) \right] \sin \theta \} \\
 a_{13}(\beta_A, \beta_B, \beta_C) &= \frac{\beta_B^{7/2} \beta_C^{5/2} (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^{7/2}}{21\sqrt{5} (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2))^{11/2}} \\
 a_{14}(\beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= \frac{2\sqrt{2} \beta_B^{3/2} \beta_C^{5/2} (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) \beta_A^{7/2}}{63\sqrt{5} (\beta_C^2 (\beta_B^2 + 2\beta^2) + (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) \beta_A^2)^{11/2}} \\
 a_{15}(\beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= \frac{2\beta_B^{3/2} \beta_C^{5/2} \beta_A^{7/2} (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^2}{63\sqrt{5} (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2) + 2(\beta_C^2 + \beta_A^2) \beta^2)^{11/2}} \\
 b_{24}(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C) &= \sqrt{3} p^2 \left[ 28 \left( 4\beta_B^4 \beta_C^4 + 5\beta_B^2 \beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2 + (\beta_B^2 + \beta_C^2)^2 \beta_A^4 \right) \right. \\
 & \left. - 3 (\beta_B^2 + \beta_C^2) (2\beta_B^2 \beta_C^2 + (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2) p^2 \right] \\
 b_{25}(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C) &= p^4 (\beta_B^2 + \beta_C^2) (2\beta_B^2 \beta_C^2 + (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2) \\
 b_{26}(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C) &= 4\sqrt{3} p^2 \left[ 28 (\beta_B^2 \beta_C^4 \beta_A^2 + \beta_B^4 \beta_C^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2)) \right. \\
 & \left. - (\beta_B^2 + \beta_C^2) (2\beta_B^2 \beta_C^2 + (\beta_B^2 + \beta_C^2) \beta_A^2) p^2 \right] \\
 b_{27}(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= \sqrt{3} p^2 \left[ 28 \left( 4\beta_C^4 (\beta_B^2 + \beta^2) (\beta_B^2 + 2\beta^2)^2 + \beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) \right. \right. \\
 & \left. \left( 5\beta_B^4 + 18\beta_B^2 \beta^2 + 16\beta^4 \right) \beta_A^2 + (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2)^2 (\beta_B^2 + 4\beta^2) \beta_A^4 \right. \\
 & \left. - 3 (\beta_B^2 + 2\beta^2) (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) \right. \\
 & \left. \left( 2\beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta^2) + (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) \beta_A^2 \right) p^2 \right] \\
 b_{28}(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= p^4 (\beta_B^2 + 2\beta^2) (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) \\
 & \left( 2\beta_C^2 (\beta_B^2 + \beta^2) + (\beta_B^2 + \beta_C^2 + 2\beta^2) \beta_A^2 \right) \\
 b_{29}(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= \sqrt{3} p^2 \left[ 28\beta_B^2 \beta_A^2 (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (\beta_C^2 + \beta_A^2) + 2(\beta_C^2 + \beta_A^2) \beta^2) \right. \\
 & \left. + (\beta_B^2 + 2\beta^2) (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (2\beta_C^2 + \beta_A^2) + 2(\beta_C^2 + \beta_A^2) \beta^2) p^2 \right] \\
 b_{30}(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= 2p^4 (\beta_B^2 + 2\beta^2) (\beta_C^2 \beta_A^2 + \beta_B^2 (2\beta_C^2 + \beta_A^2) + 2(\beta_C^2 + \beta_A^2) \beta^2)
 \end{aligned} \tag{B.26}$$

$\phi_3(1850) \rightarrow \eta\phi :$

$$\begin{aligned}
 h_{fi} = & -\frac{2\gamma}{\pi^{1/4}} \left\{ (2c_1^\eta c_1^\phi c_1^{\phi_3} + c_2^\eta c_2^\phi c_2^{\phi_3}) b_{22}(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_3}, \beta_\eta, \beta_\phi) e_1(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_3}, \beta_\eta, \beta_\phi) \right. \\
 & + \left[ 2c_1^\eta c_1^\phi c_1^{\phi_3} (c_1^{\phi_\Delta})^2 + c_2^\eta c_2^\phi c_2^{\phi_3} (c_2^{\phi_\Delta})^2 \right] b_{23}(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_3}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\phi_\Delta}) \\
 & e_2(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_3}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\phi_\Delta}) \\
 & + \left[ 2c_1^\eta c_1^\phi c_1^{\phi_3} (c_1^{\omega_\Delta})^2 + c_2^\eta c_2^\phi c_2^{\phi_3} (c_2^{\omega_\Delta})^2 \right] b_{23}(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_3}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\omega_\Delta}) \\
 & \left. e_2(p_{\eta\phi}, \beta_{\phi_3}, \beta_\eta, \beta_\phi, \beta_{\omega_\Delta}) \right\} Y_{32} \tag{B.27}
 \end{aligned}$$

## Apêndice C

# Resultados Algébricos das Amplitudes de Decaimento dos Mésons $J/\psi$

Neste apêndice, apresentamos os resultados algébricos das amplitudes de decaimento  $h_{fi}$ , para subprocessos de (5.1), obtidos com o modelo  $C^3P_0$ .

Usando a definição dada pela equação (B.1), temos que as amplitudes são:

$J/\psi \rightarrow \rho^+\pi^-$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= -\frac{8\gamma c_1^{J/\psi}}{3\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left\{ g_1(p_{\rho\pi}, \beta_{J/\psi}, \beta_\rho, \beta_\pi) e_1(p_{\rho\pi}, \beta_{J/\psi}, \beta_\rho, \beta_\pi) \right. \\
 &\quad + (c_1^{J/\psi\Delta})^2 g_2(p_{\rho\pi}, \beta_{J/\psi}, \beta_\rho, \beta_\pi, \beta_{J/\psi\Delta}) e_2(p_{\rho\pi}, \beta_{J/\psi}, \beta_\rho, \beta_\pi, \beta_{J/\psi\Delta}) \\
 &\quad + (c_1^{\phi\Delta})^2 g_2(p_{\rho\pi}, \beta_{J/\psi}, \beta_\rho, \beta_\pi, \beta_{\phi\Delta}) e_2(p_{\rho\pi}, \beta_{J/\psi}, \beta_\rho, \beta_\pi, \beta_{\phi\Delta}) \\
 &\quad \left. + (c_1^{\omega\Delta})^2 g_2(p_{\rho\pi}, \beta_{J/\psi}, \beta_\rho, \beta_\pi, \beta_{\omega\Delta}) e_2(p_{\rho\pi}, \beta_{J/\psi}, \beta_\rho, \beta_\pi, \beta_{\omega\Delta}) \right\} Y_{10} \\
 g_1(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C) &= \frac{3p\beta_A^{3/2}\beta_C^{3/2}\beta_B^{3/2}(2\beta_C^2\beta_B^2 + \beta_A^2(\beta_C^2 + \beta_B^2))}{(\beta_C^2\beta_B^2 + \beta_A^2(\beta_C^2 + \beta_B^2))^{5/2}} \\
 g_2(p, \beta_A, \beta_B, \beta_C, \beta) &= \frac{2p\beta_A^{3/2}\beta_C^{3/2}\beta_B^{3/2}(2\beta_C^2(\beta^2 + \beta_B^2) + \beta_A^2(2\beta^2 + \beta_C^2 + \beta_B^2))}{(\beta_C^2(2\beta^2 + \beta_B^2) + \beta_A^2(2\beta^2 + \beta_C^2 + \beta_B^2))^{5/2}} \quad (C.1)
 \end{aligned}$$

$J/\psi \rightarrow \omega\eta$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= \frac{8\gamma}{3\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left\{ (2c_1^{J/\psi}c_1^\omega c_1^\eta + c_2^{J/\psi}c_2^\omega c_2^\eta + c_3^{J/\psi}c_3^\omega c_3^\eta) \right. \\
 &\quad g_1(p_{\omega\eta}, \beta_{J/\psi}, \beta_\omega, \beta_\eta) e_1(p_{\omega\eta}, \beta_{J/\psi}, \beta_\omega, \beta_\eta) \\
 &\quad \left. + (2c_1^{J/\psi}c_1^\omega c_1^\eta (c_1^{J/\psi\Delta})^2 + c_2^{J/\psi}c_2^\omega c_2^\eta (c_2^{J/\psi\Delta})^2 + c_3^{J/\psi}c_3^\omega c_3^\eta (c_3^{J/\psi\Delta})^2) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & g_2(p_{\omega\eta}, \beta_{J/\psi}, \beta_\omega, \beta_\eta, \beta_{J/\psi_\Delta}) e_2(p_{\omega\eta}, \beta_{J/\psi}, \beta_\omega, \beta_\eta, \beta_{J/\psi_\Delta}) \\
 & + \left( 2c_1^{J/\psi} c_1^\omega c_1^\eta (c_1^{\phi_\Delta})^2 + c_2^{J/\psi} c_2^\omega c_2^\eta (c_2^{\phi_\Delta})^2 + c_3^{J/\psi} c_3^\omega c_3^\eta (c_3^{\phi_\Delta})^2 \right) \\
 & g_2(p_{\omega\eta}, \beta_{J/\psi}, \beta_\omega, \beta_\eta, \beta_{\phi_\Delta}) e_2(p_{\omega\eta}, \beta_{J/\psi}, \beta_\omega, \beta_\eta, \beta_{\phi_\Delta}) \\
 & + \left( 2c_1^{J/\psi} c_1^\omega c_1^\eta (c_1^{\omega_\Delta})^2 + c_2^{J/\psi} c_2^\omega c_2^\eta (c_2^{\omega_\Delta})^2 + c_3^{J/\psi} c_3^\omega c_3^\eta (c_3^{\omega_\Delta})^2 \right) \\
 & g_2(p_{\omega\eta}, \beta_{J/\psi}, \beta_\omega, \beta_\eta, \beta_{\omega_\Delta}) e_2(p_{\omega\eta}, \beta_{J/\psi}, \beta_\omega, \beta_\eta, \beta_{\omega_\Delta}) \left. \right\} Y_{10} \tag{C.2}
 \end{aligned}$$

$J/\psi \rightarrow \omega\eta'$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= \frac{8\gamma}{3\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left\{ (2c_1^{J/\psi} c_1^\omega c_1^{\eta'} + c_2^{J/\psi} c_2^\omega c_2^{\eta'} + c_3^{J/\psi} c_3^\omega c_3^{\eta'}) \right. \\
 & g_1(p_{\omega\eta'}, \beta_{J/\psi}, \beta_\omega, \beta_{\eta'}) e_1(p_{\omega\eta'}, \beta_{J/\psi}, \beta_\omega, \beta_{\eta'}) \\
 & + \left( 2c_1^{J/\psi} c_1^\omega c_1^{\eta'} (c_1^{J/\psi_\Delta})^2 + c_2^{J/\psi} c_2^\omega c_2^{\eta'} (c_2^{J/\psi_\Delta})^2 + c_3^{J/\psi} c_3^\omega c_3^{\eta'} (c_3^{J/\psi_\Delta})^2 \right) \\
 & g_2(p_{\omega\eta'}, \beta_{J/\psi}, \beta_\omega, \beta_{\eta'}, \beta_{J/\psi_\Delta}) e_2(p_{\omega\eta'}, \beta_{J/\psi}, \beta_\omega, \beta_{\eta'}, \beta_{J/\psi_\Delta}) \\
 & + \left( 2c_1^{J/\psi} c_1^\omega c_1^{\eta'} (c_1^{\phi_\Delta})^2 + c_2^{J/\psi} c_2^\omega c_2^{\eta'} (c_2^{\phi_\Delta})^2 + c_3^{J/\psi} c_3^\omega c_3^{\eta'} (c_3^{\phi_\Delta})^2 \right) \\
 & g_2(p_{\omega\eta'}, \beta_{J/\psi}, \beta_\omega, \beta_{\eta'}, \beta_{\phi_\Delta}) e_2(p_{\omega\eta'}, \beta_{J/\psi}, \beta_\omega, \beta_{\eta'}, \beta_{\phi_\Delta}) \\
 & + \left( 2c_1^{J/\psi} c_1^\omega c_1^{\eta'} (c_1^{\omega_\Delta})^2 + c_2^{J/\psi} c_2^\omega c_2^{\eta'} (c_2^{\omega_\Delta})^2 + c_3^{J/\psi} c_3^\omega c_3^{\eta'} (c_3^{\omega_\Delta})^2 \right) \\
 & g_2(p_{\omega\eta'}, \beta_{J/\psi}, \beta_\omega, \beta_{\eta'}, \beta_{\omega_\Delta}) e_2(p_{\omega\eta'}, \beta_{J/\psi}, \beta_\omega, \beta_{\eta'}, \beta_{\omega_\Delta}) \left. \right\} Y_{10} \tag{C.3}
 \end{aligned}$$

$J/\psi \rightarrow K^{*+}K^-$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= -\frac{4\gamma (c_1^{J/\psi} + c_2^{J/\psi})}{3\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left\{ g_1(p_{K^*K}, \beta_{J/\psi}, \beta_{K^*}, \beta_K) e_1(p_{K^*K}, \beta_{J/\psi}, \beta_{K^*}, \beta_K) \right. \\
 & + c_1^{J/\psi_\Delta} c_2^{J/\psi_\Delta} g_2(p_{K^*K}, \beta_{J/\psi}, \beta_{K^*}, \beta_K, \beta_{J/\psi_\Delta}) e_2(p_{K^*K}, \beta_{J/\psi}, \beta_{K^*}, \beta_K, \beta_{J/\psi_\Delta}) \\
 & + c_1^{\phi_\Delta} c_2^{\phi_\Delta} g_2(p_{K^*K}, \beta_{J/\psi}, \beta_{K^*}, \beta_K, \beta_{\phi_\Delta}) e_2(p_{K^*K}, \beta_{J/\psi}, \beta_{K^*}, \beta_K, \beta_{\phi_\Delta}) \\
 & \left. + c_1^{\omega_\Delta} c_2^{\omega_\Delta} g_2(p_{K^*K}, \beta_{J/\psi}, \beta_{K^*}, \beta_K, \beta_{\omega_\Delta}) e_2(p_{K^*K}, \beta_{J/\psi}, \beta_{K^*}, \beta_K, \beta_{\omega_\Delta}) \right\} Y_{10} \tag{C.4}
 \end{aligned}$$

$J/\psi \rightarrow K^{*0}\bar{K}^0$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= \frac{4\gamma (c_1^{J/\psi} + c_2^{J/\psi})}{3\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left\{ g_1(p_{K^*K}, \beta_{J/\psi}, \beta_{K^*}, \beta_K) e_1(p_{K^*K}, \beta_{J/\psi}, \beta_{K^*}, \beta_K) \right. \\
 & + c_1^{J/\psi_\Delta} c_2^{J/\psi_\Delta} g_2(p_{K^*K}, \beta_{J/\psi}, \beta_{K^*}, \beta_K, \beta_{J/\psi_\Delta}) e_2(p_{K^*K}, \beta_{J/\psi}, \beta_{K^*}, \beta_K, \beta_{J/\psi_\Delta}) \\
 & + c_1^{\phi_\Delta} c_2^{\phi_\Delta} g_2(p_{K^*K}, \beta_{J/\psi}, \beta_{K^*}, \beta_K, \beta_{\phi_\Delta}) e_2(p_{K^*K}, \beta_{J/\psi}, \beta_{K^*}, \beta_K, \beta_{\phi_\Delta}) \\
 & \left. + c_1^{\omega_\Delta} c_2^{\omega_\Delta} g_2(p_{K^*K}, \beta_{J/\psi}, \beta_{K^*}, \beta_K, \beta_{\omega_\Delta}) e_2(p_{K^*K}, \beta_{J/\psi}, \beta_{K^*}, \beta_K, \beta_{\omega_\Delta}) \right\} Y_{10} \tag{C.5}
 \end{aligned}$$

$J/\psi \rightarrow \phi\eta$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} = & \frac{8\gamma}{3\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left\{ (2c_1^{J/\psi} c_1^\phi c_1^\eta + c_2^{J/\psi} c_2^\phi c_2^\eta + c_3^{J/\psi} c_3^\phi c_3^\eta) \right. \\
 & g_1(p_{\phi\eta}, \beta_{J/\psi}, \beta_\phi, \beta_\eta) e_1(p_{\phi\eta}, \beta_{J/\psi}, \beta_\phi, \beta_\eta) \\
 & + \left( 2c_1^{J/\psi} c_1^\phi c_1^\eta (c_1^{J/\psi\Delta})^2 + c_2^{J/\psi} c_2^\phi c_2^\eta (c_2^{J/\psi\Delta})^2 + c_3^{J/\psi} c_3^\phi c_3^\eta (c_3^{J/\psi\Delta})^2 \right) \\
 & g_2(p_{\phi\eta}, \beta_{J/\psi}, \beta_\phi, \beta_\eta, \beta_{J/\psi\Delta}) e_2(p_{\phi\eta}, \beta_{J/\psi}, \beta_\phi, \beta_\eta, \beta_{J/\psi\Delta}) \\
 & + \left( 2c_1^{J/\psi} c_1^\phi c_1^\eta (c_1^{\phi\Delta})^2 + c_2^{J/\psi} c_2^\phi c_2^\eta (c_2^{\phi\Delta})^2 + c_3^{J/\psi} c_3^\phi c_3^\eta (c_3^{\phi\Delta})^2 \right) \\
 & g_2(p_{\phi\eta}, \beta_{J/\psi}, \beta_\phi, \beta_\eta, \beta_{\phi\Delta}) e_2(p_{\phi\eta}, \beta_{J/\psi}, \beta_\phi, \beta_\eta, \beta_{\phi\Delta}) \\
 & + \left( 2c_1^{J/\psi} c_1^\phi c_1^\eta (c_1^{\omega\Delta})^2 + c_2^{J/\psi} c_2^\phi c_2^\eta (c_2^{\omega\Delta})^2 + c_3^{J/\psi} c_3^\phi c_3^\eta (c_3^{\omega\Delta})^2 \right) \\
 & \left. g_2(p_{\phi\eta}, \beta_{J/\psi}, \beta_\phi, \beta_\eta, \beta_{\omega\Delta}) e_2(p_{\phi\eta}, \beta_{J/\psi}, \beta_\phi, \beta_\eta, \beta_{\omega\Delta}) \right\} Y_{10} \quad (C.6)
 \end{aligned}$$

$J/\psi \rightarrow \phi\eta'$  :

$$\begin{aligned}
 h_{fi} = & \frac{8\gamma}{3\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left\{ (2c_1^{J/\psi} c_1^\phi c_1^{\eta'} + c_2^{J/\psi} c_2^\phi c_2^{\eta'} + c_3^{J/\psi} c_3^\phi c_3^{\eta'}) \right. \\
 & g_1(p_{\phi\eta'}, \beta_{J/\psi}, \beta_\phi, \beta_{\eta'}) e_1(p_{\phi\eta'}, \beta_{J/\psi}, \beta_\phi, \beta_{\eta'}) \\
 & + \left( 2c_1^{J/\psi} c_1^\phi c_1^{\eta'} (c_1^{J/\psi\Delta})^2 + c_2^{J/\psi} c_2^\phi c_2^{\eta'} (c_2^{J/\psi\Delta})^2 + c_3^{J/\psi} c_3^\phi c_3^{\eta'} (c_3^{J/\psi\Delta})^2 \right) \\
 & g_2(p_{\phi\eta'}, \beta_{J/\psi}, \beta_\phi, \beta_{\eta'}, \beta_{J/\psi\Delta}) e_2(p_{\phi\eta'}, \beta_{J/\psi}, \beta_\phi, \beta_{\eta'}, \beta_{J/\psi\Delta}) \\
 & + \left( 2c_1^{J/\psi} c_1^\phi c_1^{\eta'} (c_1^{\phi\Delta})^2 + c_2^{J/\psi} c_2^\phi c_2^{\eta'} (c_2^{\phi\Delta})^2 + c_3^{J/\psi} c_3^\phi c_3^{\eta'} (c_3^{\phi\Delta})^2 \right) \\
 & g_2(p_{\phi\eta'}, \beta_{J/\psi}, \beta_\phi, \beta_{\eta'}, \beta_{\phi\Delta}) e_2(p_{\phi\eta'}, \beta_{J/\psi}, \beta_\phi, \beta_{\eta'}, \beta_{\phi\Delta}) \\
 & + \left( 2c_1^{J/\psi} c_1^\phi c_1^{\eta'} (c_1^{\omega\Delta})^2 + c_2^{J/\psi} c_2^\phi c_2^{\eta'} (c_2^{\omega\Delta})^2 + c_3^{J/\psi} c_3^\phi c_3^{\eta'} (c_3^{\omega\Delta})^2 \right) \\
 & \left. g_2(p_{\phi\eta'}, \beta_{J/\psi}, \beta_\phi, \beta_{\eta'}, \beta_{\omega\Delta}) e_2(p_{\phi\eta'}, \beta_{J/\psi}, \beta_\phi, \beta_{\eta'}, \beta_{\omega\Delta}) \right\} Y_{10} \quad (C.7)
 \end{aligned}$$

# Referências

- [1] YUKAWA, H. *On the Interaction of Elementary Particles*. Proc. Physico-Mathematical Soc. of Japan 17, 48, 1935.
- [2] ANDRADE, A. M. R. *Físicos, Mésons e Política*. Editora Hucitec, 1999.
- [3] HUGHES, I. S. *Elementary Particles*. 3<sup>a</sup> ed., Cambridge University Press, 1991.
- [4] GELL-MANN, M. *Symmetries of Baryons and Mesons*. Phys. Rev., v. 125, n. 3, p. 1067, 1962.
- [5] NE'EMAN, Y. *Derivation of Strong Interactions from a Gauge Invariance*. Nuc. Phys. 26, p. 222, 1961.
- [6] ZWEIG, G. CERN Rep. 8419/TH-412, 1964.
- [7] LE YAOUANC, A.; OLIVIER, L. L.; PÈNE, O.; RAYNAL J.-C., *Hadron Transitions in the Quark Model*. Gordon and Breach Science Publishers S.A., 1988.
- [8] OKUBO, S. Phys. Lett. 5, 165, 1963.
- [9] Zweig, G. CERN Preprints TH-401, 1964.
- [10] Zweig, G. CERN Preprints TH-412, 1964.
- [11] IIZUKA, J. *A Systematics and Phenomenology of Meson Family*. Prog. Theor. Phys. Suppl. 37/38, 21, 1966.
- [12] NAKAMURA, K.; *et al.* (Particle Data Group), J. Phys. G 37, 075021, 2010.
- [13] MACHLEIDT, R.; HOLINDE, K.; ELSTER, Ch. *The Bonn Meson-Exchange Model for the Nucleon-Nucleon Interaction*. Phys. Rep., v. 149, pp. 1-89, 1987.
- [14] BARNES, T.; GODFREY, S.; SWANSON, E. S. *Higher Charmonia*. Phys. Rev. D, v. 72, 054026, 2005.
- [15] BARNES, T. *Update on Charmonium Theory*. arXiv:1003.2644v1, 2010.

- [16] BRODSKY, S. J.; LEPAGE, G. P. *Helicity Selection Rules and Tests of Gluon Spin in Exclusive Quantum-Chromodynamic Processes*. Phys. Rev. D, v. 24, n. 11, dezembro 1981.
- [17] BRODSKY, S. J.; LEPAGE, G. P.; TUAN, S. F. *Exclusive Charmonium Decays: The  $J/\psi$  ( $\psi'$ )  $\rightarrow \rho\pi$ ,  $K^*\bar{K}$  Puzzle*. Phys. Rev. Lett., v. 59, n. 5, p. 621-623, agosto 1987.
- [18] BRODSKY, S. J.; KARLINER, M. *Intrinsic Charm of Vector Mesons: A Possible Solution of the " $\rho\pi$  Puzzle"*. Phys. Rev. Lett., v. 78, n. 25, pp. 4682-4685, abril 1997.
- [19] CHAN, C. T.; HOU, W. S. *On the Mixing Amplitude of  $J/\psi$  and Vector Glueball  $O$* . Nuc. Phys. A 675, 367c, 2000.
- [20] CLAVELLI, L. J.; INTEMANN, G. W. *Vector-Meson Mixing and Hadronic Decays of  $\psi$* . Phys. Rev. D 28, 2727, 1983.
- [21] MO, X. H.; YUAN, C. Z.; WANG P. *Study of the  $\rho\pi$  Puzzle in Charmonium Decays*. High Energy Nuc. Phys. 31, 687, 2007.
- [22] FELDMANN, T.; KROLL, P. *Implications of light-quark admixtures on charmonium decays into meson pairs*. Phys. Rev. D 62, 074006, 2000.
- [23] FELDMANN, T.; KROLL, P.; STECH, B. *Mixing and decay constants of pseudoscalar mesons*. Phys. Rev. D 58, 114006, 1998.
- [24] Da SILVA, D.T., *Um Novo Modelo para Decaimento de Mésons*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2006. Link: <http://hdl.handle.net/10183/11138>
- [25] QUADROS, J. N., *Decaimentos de Mésons Leves de Sabor Aberto no Modelo  $C^3P_0$* . Dissertação de Mestrado, Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2008. Link: <http://hdl.handle.net/10183/13128>
- [26] Da SILVA, D.T.; Da SILVA, M. L. L.; QUADROS, J. N.; HADJIMICHEF, D., *Méson Decay in a Corrected  $^3P_0$  Model*. Phys. Rev. D 78, 076004, 2008.
- [27] QUADROS, J. N.; Da SILVA, D.T.; Da SILVA, M. L. L.; HADJIMICHEF, D., *Light Meson Decay in the  $C^3P_0$  Model*. Mod. Phys. Lett A, v. 25, n. 35, p. 2973-2980, 2010.
- [28] Da SILVA, M. L. L., *Um Formalismo para o Decaimento de Mésons Exóticos*. Tese de Doutorado, Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010. Link: <http://hdl.handle.net/10183/22062>



- [29] MICU, L., *Decay rates of meson resonances in a quark model*. Nuclear Physics B 10, 521 1969.
- [30] LE YAOUANC, A.; OLIVIER, L.; PÈNE, O.; RAYNAL J., *"Naive" Quark-Pair-Creation Model of Strong-Interaction Vertices*. Phys. Rev. D 8, 2223, 1973.
- [31] KOKOSKI, R.; ISGUR, N., *Meson decays by flux-tube breaking*. Phys. Rev. D, Nova York, v. 35, p. 907, Fev. 1987.
- [32] ACKLEH, E. S.; BARNES, T.; SWANSON, E. S., *On the mechanism of open-flavor strong decays*. Phys. Rev. D, Nova York, v. 54, n. 11, p. 6811-6829 , 1996.
- [33] GEIGER, P.; SWANSON, E. S., *Distinguishing among strong decay models*. Phys. Rev. D, Nova York, v. 50, p. 6855, Dez. 1994.
- [34] BARNES, T.; BLACK, N.; PAGE, P. R., *Strong decays of strange quarkonia*. Phys. Rev. D, Nova York, v. 68, p. 54014 , 2003.
- [35] QUADROS, J. N.; Da SILVA, M. L. L.; Da SILVA, D.T.; HADJIMICHEF, D., *Strange Meson Decay in the  $C^3P_0$  Model*. I. J. of Modern Physics D, v. 19, ns. 8-10, p. 1647-1650, 2010.
- [36] QUADROS, J. N.; HADJIMICHEF, D.,  *$J/\psi$  Decay in the  $C^3P_0$  Model*. Aceito para publicação em I. J. of Modern Physics-CS.
- [37] QUADROS, J. N.; HADJIMICHEF, D., *Strange Quarkonia and Mixtures in the  $C^3P_0$  Model*. Em preparação.
- [38] QUADROS, J. N.; HADJIMICHEF, D., *Charm Mixtures in the  $C^3P_0$  Model*. Em preparação.
- [39] TANI, S. *Scattering Involving a Bound State*. Phys. Rev., Nova York, v. 117, n. 1, p. 252-260, Jan. 1960.
- [40] GIRARDEAU, M. D. *Second-Quantization Representation for Systems of Atoms, Nuclei, and Electrons*. Phys. Rev. Lett., Nova York, v. 27, n. 21, p. 1416-1419, Nov. 1971.
- [41] GIRARDEAU, M. D. *Second-Quantization Representation for a Nonrelativistic System of Composite Particles. I. Generalized Tani Transformation and its Iterative Evaluation*. j. Math. Phys., Nova York, v. 16, n. 9, p. 1901-1919, Set. 1975.

- [42] GIRARDEAU, M. D.; GILBERT, J. D. *Fock-Tani Representation for the Quantum Theory of Reactive Collisions*. Phys. A, Amsterdam, v. 97, n. 1, p. 42-74, Jun. 1979.
- [43] GILBERT, J. D. *Second Quantized Representation for a Model System with Composite Particles*. J. Math. Phys., Nova York, v. 18, n. 4, p. 791-805, Abr. 1977.
- [44] GIRARDEAU, M. D. *Fock-Tani representation for positron-hydrogen scattering*. Phys. Rev. A, Nova York, v. 26, n. 1, p. 217-236, Jul. 1982.
- [45] OJHA, P. C.; GIRARDEAU, M. D.; GILBERT, J. D.; STRATON, J. C. *Fock-Tani transformation and a first-order theory of charge transfer*. Phys. Rev. A, Woodbury, v. 33, n. 1, p. 112-123, Jan. 1986.
- [46] STRATON, J. C. *Reduced-mass Fock-Tani representations for  $a^+ + (b^+c^-) \rightarrow (a^+c^-) + b^+$  and first-order results for  $\{abc\} = \{ppe, epe, \mu p\mu, \mu d\mu, \text{ and } \mu t\mu\}$* . Phys. Rev. A, Woodbury, v. 35, n. 9, p. 3725-3740, Mai. 1987.
- [47] STRATON, J. C.; GIRARDEAU, M. D. *Post-prior symmetrical first-order T matrix for charge transfer*. Phys. Rev. A, Woodbury, v. 40, n. 6, p. 2991-3001, Set. 1989.
- [48] LO, C.; GIRARDEAU, M. D. *Symmetric orthogonalized-plane-wave Born approximation for charge exchange*. Phys. Rev. A, Woodbury, v. 41, n. 1, p. 158-164, Jan. 1990.
- [49] STRATON, J. C. *Fock-Tani Hamiltonian for reactions involving two-electron atoms*. Phys. Rev. A, Woodbury, v. 43, n. 11, p. 6018-6026, Jun. 1991.
- [50] HADJIMICHEF, D. *Formalismo de Fock-Tani para a Física Hadrônica*. Tese Doutorado - Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 1995.
- [51] SZPIGEL, S. *Interação Méson-Méson no Formalismo Fock-Tani*. Tese de Doutorado - Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.
- [52] GIRARDEAU, M. D.; KREIN, G.; HADJIMICHEF, D. *Field-Theoretic Approach for Systems of Composite Hadrons*. Mod. Phys. Lett. A, Singapore, v. 11, n. 14, p. 1121-1129, Mai. 1996.
- [53] HADJIMICHEF, D.; KREIN, G.; SZPIGEL, S.; DA VEIGA, J. S. *Mapping of Composite Hadrons into Elementary Hadrons and Effective Hadronic Hamiltonians*. Ann. Phys., Nova York, v. 268, n. 1, p. 105-148, Mar. 1998.

- [54] HADJIMICHEF, D.; HAIDENBAUER, J.; KREIN, G. *Long- and medium-range components of the nuclear force in quark-model based calculations.* Phys. Rev. C, Melville, v. 63, n. 3, 035204 8p., Fev. 2001.
- [55] HADJIMICHEF, D.; HAIDENBAUER, J.; KREIN, G., *Short-range repulsion and isospin dependence in the kaon-nucleon (KN) system.* Phys. Rev. C, v. 66, 055214, Nov. 2002.
- [56] Da SILVA, M. L. L., *Uma Nova Assinatura para Glueballs.* Dissertação de Mestrado, Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2004. Link: <http://hdl.handle.net/10183/6974>
- [57] Da SILVA, M. L. L.; HADJIMICHEF, D.; VASCONCELLOS, C. A. Z.; BODMANN, B. E. J., *Do glueballs contribute in heavy-ion collisions?* J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. G 32 475, Fev. 2006.
- [58] Particle Data Group, C. Amsler, *et al.*, Phys. Lett. B 667, 1, 2008.
- [59] SHEN, C. P.; *et al.* (Colaboração BELLE), Phys. Rev. D 80, 031101R, 2009.
- [60] AUBERT, B.; *et al.* (Colaboração BABAR), Phys. Rev. D 77, 092002, 2008.