UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática

MARGARETE FARIAS MEDEIROS

GEOMETRIA DINÂMICA NO ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES NO PLANO
– uma experiência com professores da Educação Básica

PORTO ALEGRE
2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática

Margarete Farias Medeiros

GEOMETRIA DINÂMICA NO ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES NO PLANO

– uma experiência com professores da Educação Básica

Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.
Orientadora: Profª. Drª. Maria Alice Gravina

PORTO ALEGRE
2012

MARGARETE FARIAS MEDEIROS

GEOMETRIA DINÂMICA NO ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES NO PLANO

– uma experiência com professores da Educação Básica

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PORTO ALEGRE, maio de 2012.

BANCA EXAMINADORA:

Prof[a]. Dr[a]. Ana Paula Jahn – UNESP

Prof. Dr. Eduardo Brietzke – UFRGS

Prof. Dr. Francisco Egger – UFRGS

Dedico este trabalho aos meus pais Olisia e José, ao meu esposo Alberto e a minha filha Alessandra.

AGRADECIMENTOS

Muitas foram as pessoas que contribuíram para que a conquista deste objetivo se concretizasse. Inicio esses agradecimentos aos meus pais, Olisia e José Martinho, os quais desde sempre me incentivaram ao estudo.

Ao meu esposo Alberto, sempre presente em todos os momentos, guiando-me pelas ruas da grande Porto Alegre.

À Alessandra, minha filha querida, pela compreensão da minha ausência nas segundas-feiras.

Aos meus sogros Osmar e Tereza, pela hospitalidade oferecida.

A minha família, que sempre me apoiou na realização deste mestrado.

A minha orientadora, Professora Dra. Maria Alice Gravina, que aceitou o meu convite para a orientação, dispensando muitas horas de seu tempo para acompanhar-me na construção desta dissertação.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS, pela contribuição na minha formação continuada. Em especial ao professor Eduardo Brietzke e ao professor Francisco Egger, e à professora Ana Paula Jahn da UNESP, pelo aceite em compor a banca de minha defesa de dissertação.

À Secretaria de Educação Municipal de Sombrio-SC, pela oportunidade de realização da oficina para os seus professores de Matemática.

Aos professores participantes da oficina, por aceitarem a proposta de implementação da sequência didática.

Às colegas de profissão Rosemary e Derli, que estiveram sempre à disposição.

Aos meus colegas de mestrado, pela companhia durante estes dois anos, em especial à Rita, a qual sempre esteve ao meu lado na realização dos trabalhos em grupo.

A todas aquelas pessoas que me incentivaram e que acreditaram no meu potencial.

E a Deus, pelos caminhos abertos.

RESUMO

Nesta dissertação apresentamos a concepção, implementação e validação de uma proposta para o ensino de transformações geométricas no plano usando o ambiente de geometria dinâmica GeoGebra. A proposta integra Geometria e Arte através da construção de pavimentações do plano e de mosaicos de Escher e foi dirigida para professores do ensino fundamental, tendo como objetivo apresentar uma nova alternativa de trabalho na Geometria escolar e também capacitá-los para o uso de mídias digitais nas suas salas de aula. O trabalho foi desenvolvido dentro dos princípios da Engenharia Didática. Na análise e validação da implementação da proposta tomamos como base a teoria Sócio-Histórica, cuja referência principal é a obra de Vygotsky; também utilizamos o trabalho de Duval sobre registros de representação semiótica no processo de aprendizagem da Matemática. A partir das análises *a priori* e *a posteriori* observamos que os professores participantes da oficina, através do uso do GeoGebra, se apropriaram dos princípios da geometria dinâmica e dos conceitos da geometria das transformações.

Palavras-chave: Transformações Geométricas. Geometria Dinâmica. Arte. Pavimentação. Mosaicos de Escher.

ABSTRACT

This work presents the conception, implementation and validation of an experiment to teach geometric transformations in the plane using the dynamic geometry environment GeoGebra. The proposal integrates geometry and art through the construction of tessellations of the plane, including Escher's mosaics, and it was directed to elementary school teachers, aiming to present a new alternative to work with geometry using digital media. The work used the principles of Didactic Engineering and the analysis of the experiment was based on the Socio-Historical theory, whose main reference is the work of Vygotsky and on the work of Duval about registers of semiotic representation in the process of mathematics learning. The analysis a priori and a posteriori showed that the teachers, through the use of GeoGebra, learned the principles of dynamic geometry and the concepts of geometry transformations.

Keywords: Geometric Transformation. Dynamic Geometry Environment. Art. Tessellation. Mosaics of Escher.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Diante de tantos problemas que vemos na Educação Matemática, muitas vezes nos sentimos sem saber qual deles deverá ocupar o nosso tempo para estudo. O que pesquisar? Como pesquisar? Por que pesquisar? E assim nós vamos questionando.

São muitos os anos, as aulas dadas, as fórmulas aplicadas e os resultados obtidos. Uns bons, outros nem tanto. Práticas feitas sem ter a preocupação de que fossem organizadas para fins de estudos. Hoje nos vemos numa situação em que nós necessitamos de organização destas, de análise, de crítica, de significação, para que estas práticas possam contribuir nas pesquisas em Educação Matemática. Muitas são as pesquisas feitas nesta área procurando explicar metodologias que garantam a qualidade do ensino e da aprendizagem. Tomando conhecimento sobre estes temas e não estando satisfeitos com a nossa prática atual foi que resolvemos estudar novamente e colocarmo-nos à disposição para também fazer pesquisa. “[...] sempre costuma chegar um tempo em que é preciso descrever os modos como realizamos as práticas de investigação [...] é preciso que necessidades específicas tenham sido criadas [...]” (CORAZZA, 1996, p.105). As necessidades foram criadas, pois foi a partir destas que iniciamos o mestrado profissionalizante na UFRGS em 2010, não temendo novos caminhos e possibilidades.

Durante a realização deste mestrado fomos incentivados a fazer muitas leituras, sobre diversos assuntos relacionados à Educação Matemática e, lendo o texto de Corazza (1996), percebemos o quanto ela estava contribuindo para a nossa tomada de decisão quanto ao problema de pesquisa. E concordamos com a autora quando ela diz que: “Somente nessa condição de insatisfação com as significações e verdades vigentes é que ousamos tomá-las pelo avesso, e nelas investigar e destacar outras redes de significações” (p.111).

Observando o contexto de nossa cidade percebemos que muitos dos professores de Matemática não tinham conhecimento da aplicação da Tecnologia Informática no ensino e aprendizagem da Matemática. Pesquisadores nesta área apontam que não devemos ignorar o avanço que a Tecnologia Informática sofreu nos últimos anos, é preciso que o professor acompanhe esses avanços. Foi então que resolvemos realizar uma dissertação que tratasse da formação de professores e o uso de tecnologias. Por meio da oferta de uma oficina decidimos desencadear um processo multiplicador de uso de tecnologia na escola. Nossos alunos, então professores, poderiam transpor para as suas salas de aula a experiência vivida ao longo da oficina. E assim estaríamos também investigando sobre possibilidades de mudanças nas práticas pedagógicas quando o professor nelas incorpora as tecnologias.

Com base nessas reflexões, surgiram as perguntas: Como fazer tal oficina? Como contribuir para que estes profissionais, de fato, pudessem fazer uso confiante das tecnologias? Qual assunto de Matemática a ser tratado na oficina? Diante desses questionamentos e em conversa com a professora Maria Alice[1], que nos orientou durante a realização desta dissertação, foi que resolvemos criar uma oficina para que os professores aprendessem sobre Geometria Dinâmica[2] e sobre as novas formas de trabalhar com seus alunos a Geometria escolar. E para isso escolhemos o *software GeoGebra*[3], pois é uma ferramenta com consistente organização de conteúdos e menus, além de ser produzido dentro da filosofia do *software* livre.

De acordo com nossas leituras constatamos que muitos profissionais da Educação Matemática têm se mobilizado no intuito de propor alternativas que superem os obstáculos no ensino de Geometria. Lorenzato (1995) afirma que uma das razões para a ausência da Geometria na sala de aula está relacionada às dificuldades encontradas pelos professores relativas ao domínio dos conteúdos e à metodologia utilizada. A partir destas reflexões, decidimos pela abordagem das transformações geométricas no plano, utilizando pavimentações e os mosaicos de Escher, sendo que este tema é fortemente sugerido nos Parâmetros Curriculares Nacionais desde as séries finais do Ensino Fundamental. Delineamos, então, o nosso problema de pesquisa: *de que forma professores de Matemática se apropriam do software GeoGebra para trabalhar com mosaicos e transformações geométricas?*

Com esta pergunta, lançamo-nos nas leituras e reflexões que subsidiaram uma experiência de formação de professores e como resultado temos esta dissertação de mestrado. Ela se organiza em seis capítulos, dentro dos quais está incluída a Introdução como primeiro capítulo.

No segundo capítulo, apresentamos as reflexões teóricas tomando como base a teoria Sócio-Histórica[4]. A referência principal desta teoria é a obra de Vygotsky[5]. Procuramos trazer

---

[1] Maria Alice Gravina é docente do Instituto de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática na UFRGS.

[2]Para o aprendizado de Geometria existem diversos tipos de softwares que permitem manipular objetos com régua e compasso virtuais. Estes programas mantêm as propriedades dos objetos que estão na construção inicial, sendo conhecidos como os ambientes de geometria dinâmica

[3] GeoGebra é um software de matemática dinâmica e multiplataforma de livre distribuição que pode ser encontrado no site www.geogebra.org. Na oficina utilizamos a versão 3.2.46.0 de 17 de dezembro de 2010. Atualmente já existe a versão 4.0.22.0 de 09 de fevereiro de 2012.

[4] Teoria Sócio-Histórica (histórico-cultural) do psiquismo. Conhecida também como abordagem sócio-interacionista de Vigotsky, tem como objetivo central caracterizar os aspectos tipicamente humanos do comportamento e elaborar hipóteses de como essas características se formaram ao longo da história humana e de como se desenvolvem ao longo da vida.

ideias que são pertinentes à Educação, aproximando-as de questões que dizem respeito à Educação Matemática. O capítulo segue com reflexões sobre a teoria de Duval[6] (2011), que trata do processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos sob o ponto de vista dos registros de representação semiótica[7].

O capítulo três refere-se às escritas sobre o ensino e a aprendizagem de Geometria, em especial das transformações geométricas no plano, nos documentos oficiais e também trata da análise de três coleções de livros didáticos das séries finais do Ensino Fundamental.

No quarto capítulo abordamos o potencial da tecnologia no ensino da Matemática, em particular da Geometria. Nele destacamos a utilização dos ambientes de geometria dinâmica e apresentamos o *software* GeoGebra com seus diferentes registros semióticos, por meio de construções básicas e do *menu* das transformações geométricas no plano. Neste capítulo também apresentamos uma coletânea de vídeos sobre transformações geométricas. Esta coletânea é resultado de pesquisa feita a partir do momento em que decidimos que alguns vídeos poderiam tornar mais interessante a aprendizagem sobre mosaicos e pavimentações.

No capítulo cinco apresentamos a concepção, a implementação e a análise de uma sequência didática[8] para o ensino das transformações geométricas no plano (reflexão, translação, rotação) por meio da construção de mosaicos, mosaicos de Escher e pavimentações, fazendo uso de geometria dinâmica. Iniciamos com a apresentação da concepção da experiência, expondo nossas escolhas didáticas para a formação da sequência de atividades; e avançamos com o detalhamento dos seis encontros, com a análise das produções dos professores participantes e das transposições que fizeram para suas salas de aula. No final

---

[5] O nome Vygotsky é encontrado, na bibliografia existente, grafado de várias formas: Vigotski, Vygotsky, Vigotskii, Vygotski e Vigotsky. Optamos por empregar nesta dissertação a grafia Vygotsky. Um dos maiores psicólogos do século XX, nasceu em Orsha, Bielorússia, em 17 de novembro de 1896. Morreu aos 38 anos de idade, consagrando uma dezena de anos a seu trabalho científico e não pode ver a publicação de suas obras mais importantes. O leitor interessado pode, agora, encontrá-las nas seguintes obras: Levitin(1982),Luria (1979), Mecacci (1983), Rivière (1984), Schneuwly e Bronckart(1985), Valsiner(1988), e, naturalmente, na antologia de textos de Vigotsky, em seis volumes (Vigostky,1982-1984).

[6] O professor Duval é filósofo e psicólogo e se interessa por pesquisas em Educação Matemática desde a década de 70. Trabalhou no Instituto de Pesquisas em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo, na França, de 1970 a 1995, onde desenvolveu importantes pesquisas em Psicologia Cognitiva. Hoje está vinvulado à Universidade Du Litoral Côte d'Opale, França, onde é professor emérito. Sua obra *Semiosis e pensamento humano* (1995) é um marco na teoria dos registros de representação semióticas, e seus trabalhos de pesquisa ao longo de todos esses anos têm influenciado fortemente as pesquisas em Educação Matemática no Brasil.

[7] Semiótica: Teoria lógica, filosófica e científica da linguagem. É uma ciência que investiga as linguagens existentes, examinando fenômenos em seu significado e sentido, isto é, tenta desvendar sua existência enquanto linguagem, sua ação de signo. Três modelos aparecem quase ao mesmo tempo e, especialmente, de maneira independente: os trabalhos de Peirce, Saussure e Frege. Todos os trabalhos posteriores de semiótica partem das contribuições desses três autores.

[8] Nós chamamos de sequência didática, uma sequência de atividades planejadas para a sala de aula, que estejam relacionadas entre si.

do capítulo fazemos uma análise geral de todos os encontros à luz das ideias de Vygotsky e de Duval.

Para desenvolver a experiência usamos os princípios da Engenharia Didática. Segundo Artigue (apud CARNEIRO, 2005), a Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa que se organiza em quatro fases: Análises Prévias; Concepção e Análises *A priori;* Experimentação; Análise *A posteriori* e Validação. Com esta escolha temos a possibilidade de realizar a investigação e a avaliação de uma sequência didática, a partir da implementação e observação em sala de aula, levando em consideração a atuação do professor e suas reflexões sobre esta atuação.

No capítulo seis, são feitas as considerações finais, nas quais apresentamos as nossas reflexões e sugestões de possíveis melhorias na implementação da sequência didática que foi aplicada, e destacamos as contribuições do mestrado em ensino na construção perene de nosso papel de professor.

Nos diferentes Apêndices apresentamos os documentos utilizados para a investigação e o produto didático na forma de sequência de atividades, o qual foi validado na experimentação. Neles também disponibilizamos os slides utilizados na oficina com os professores-alunos. No anexo apresentamos as produções desses professores e também aquelas de seus alunos, esses participantes das atividades que foram realizadas.

2. REFLEXÕES TEÓRICAS

De acordo com Radford (2006), nos últimos anos tem existido um crescente interesse pelo estudo da Semiótica no campo da Educação Matemática. Segundo este pesquisador, diferentes são as razões que justificam esse interesse. Uma primeira razão diz respeito à tomada de consciência de que a atividade Matemática é essencialmente uma atividade simbólica, e nesta direção ele menciona o trabalho de Duval (2009) sobre registros de representações. Para Duval (2011, p.103), o "funcionamento cognitivo do pensamento matemático, mesmo no que denominamos conceitualização, é eminentemente semiótico."

Uma segunda razão está na importância em compreender a natureza do discurso matemático, no qual a Semiótica aparece como uma teoria apropriada para dar conta da complexidade do discurso. Uma terceira razão se refere ao uso cada vez maior da Tecnologia Informática no ensino e aprendizagem da Matemática, na qual a Semiótica ajuda a entender o papel que a tecnologia desempenha no desenvolvimento cognitivo. E, por último, Radford (2006) destaca que a tecnologia e os signos são portadores de convenções e formas culturais de significação que fazem da Semiótica um campo importante.

Apoiando-nos nas razões elencadas acima, nós decidimos ter como embasamento teórico nesta dissertação as ideias de Vygotsky, que já nos anos 30 discutia sobre o papel dos signos na construção do conhecimento. Os trabalhos de pesquisa que hoje tratam de Semiótica e aprendizagem da Matemática, como de Radford (2006) e Duval (2011), avançam nessa importante contribuição.

Também trazemos como subsídio teórico o trabalho de Duval (2009), para o qual uma análise do conhecimento matemático é, em sua essência, uma análise de suas representações semióticas[9], porque os objetos matemáticos só são acessados por meio de suas representações.

2.1. ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DE VYGOTSKY

De acordo com Ivic (2010, p.15), se fôssemos definir com especificidade a teoria de Vygotsky, nós diríamos que ela é uma "teoria sócio-histórico-cultural do desenvolvimento das funções mentais superiores", pois, ela tem como base a sociabilidade do homem, interação social, o signo e instrumento, cultura, história e funções mentais superiores. Como funções

---

[9] A capacidade que o sujeito tem de gerar imagens mentais de objetos ou ações e por meio delas chegar à representação (da ação ou do objeto) é conhecida como função semiótica.

mentais superiores, típicas da espécie humana, temos, por exemplo, o controle consciente do comportamento, atenção voluntária, memória lógica, pensamento abstrato, raciocínio dedutivo e capacidade de planejamento, sendo que muitas destas são utilizadas na atividade matemática.

Para Vygotsky, o ser humano é um ser social, isto é, caracteriza-se por uma socialidade[10] primária. A socialidade do indivíduo é o ponto de partida de suas interações sociais com o entorno:

> É por meio de outros, por intermédio do adulto que a criança se envolve em suas atividades. Absolutamente, tudo no comportamento da criança está fundido, enraizado no social. Assim, as relações da criança com a realidade são, desde o início, relações sociais. Neste sentido, poder-se-ia dizer que o bebê é um ser social no mais elevado grau. (VYGOTSKY, 1982-1984, v.IV, p. 281, apud IVIC, 2010, p.16).

Segundo Ivic (2010, p.16), para o desenvolvimento dos indivíduos, os aspectos mais importantes são as interações assimétricas, as interações com os adultos, portadores da cultura, destacando que:

> Nesse tipo de interação, o papel fundamental cabe aos signos, aos diferentes sistemas semióticos que do ponto de vista genético, têm em primeiro lugar uma função de comunicação, depois uma função individual: eles começam a ser utilizados como instrumentos de organização e de controle do comportamento individual. E é precisamente o ponto essencial desta concepção é a de que interação social desempenha um papel construtivo no desenvolvimento.

Bauersfeld (1980, apud MARIOTTI, 2009) afirma que o ensino e aprendizagem da Matemática realizam-se por meio da interação humana, na qual há uma interdependência de ambos, professor e aluno em vários níveis. E Baquero (1998) acrescenta que os processos psicológicos superiores se originam na vida social, isto é, pela mediação proporcionada pela linguagem na participação do sujeito em atividades compartilhadas com outros. Sobre isso Vygotsky escreve:

> O desenvolvimento de funções psicológicas superiores só é possível ao longo das vias de seu desenvolvimento cultural, quer prossiga pela linha do domínio de meios culturais externos (fala, escrita, aritmética) ou pela linha do aperfeiçoamento interno das próprias funções psicológicas (elaboração da atenção voluntária, memória lógica, pensamento abstrato, formação de conceitos, etc.) (VYGOTSKY, 1928, p.173, apud VAN DER VEER E VALSINER, 1998, p.85).

---

[10] As expressões da socialidade podem ser muito diferenciadas, mas a lógica constante é “o fato de partilhar um hábito, uma ideologia, um ideal determina o estar-junto” (MAFFESOLI, 1998, p. 131) e permite, com a unidade, formar uma proteção contra uma imposição externa. Essa unidade é expressa e fortalecida por meio de rituais, signos de reconhecimento resgatados pela existência das redes de relações. Ao apontar as características da socialidade e diferenciá-la das do social, Maffesoli (1998, p. 108) destaca a separação entre *persona* e indivíduo, entre os papéis e as funções na sociedade. Assim, socialidade refere-se à *persona*, ao indivíduo-ator, que representa diferentes papéis nas diferentes tribos das quais participa por gosto ou opção – preferência musical, sexual, científica, etc.

As interações sociais, na perspectiva sócio-histórica, permitem pensar um ser humano em constante construção e transformação que, mediante as interações sociais, conquista e confere novos significados e olhares para a vida em sociedade e os acordos grupais. Nessa perspectiva a ação intencional do professor em um ambiente social deve ser considerada um elemento chave para a aprendizagem dos alunos (MARIOTTI, 2009).

Moysés (2010) afirma que autores americanos como Stodolsky (1985) e Forman (1989) sugerem novas formas para ensinar Matemática, pautadas, principalmente em atividades de grupo, uma vez que reconhecem o papel da interação social na construção do conhecimento matemático.

O que significa considerar o indivíduo e o conhecimento como essencialmente sociais? Duarte (1999) considera, dentre outras coisas, que o indivíduo não pode elaborar seu conhecimento individual a não ser apropriando-se do conhecimento historicamente produzido e socialmente existente. Leontiev (1978, p.268, apud DUARTE, 1999, p.92) caracteriza desta forma:

> Devemos sublinhar que esse processo é sempre ativo do ponto de vista do homem. Para se apropriar dos objetos ou fenômenos que são o produto do desenvolvimento histórico, é necessário desenvolver em relação a eles uma atividade que reproduza, pela sua forma, os traços essenciais da atividade acumulados no objeto.

Moll (1996) afirma que é pelo uso dos conceitos cotidianos que os indivíduos dão sentido às definições e explicações de conceitos científicos. Segundo ele, Vygotsky também enfatizou que os conceitos do dia a dia – os conceitos espontâneos - e os científicos são interconectados e interdependentes, pois em seu desenvolvimento influenciam-se mutuamente. Um não pode existir sem o outro. Os conceitos do dia a dia medeiam a aquisição de conceitos científicos. Segundo Vygotsky (apud MOLL, 1996, p.11):

> Os conceitos científicos crescem dentro do cotidiano, estendendo-se ao domínio da experiência pessoal, adquirindo significado e sentido; assim, demarcam o caminho do desenvolvimento dos conceitos do dia a dia para um nível superior, em direção aos conceitos científicos, facilitando o domínio das características mais elevadas dos conceitos do dia a dia.

O ponto inicial para a formação do conceito científico é o conhecimento já existente, o qual Vygotsky chamou de conhecimento “espontâneo”. É de central importância a transição dos conceitos espontâneos para os conceitos científicos. Decorre daí o fato desta perspectiva considerar o papel do professor fundamental, pois cabe a ele promover a articulação dos conceitos espontâneos do aluno com os científicos da escola.

Neste sentido Moysés (2010, p.67) enfatiza que:

> Se professor e aluno defrontam-se com sentenças, regras e símbolos matemáticos

> sem que nenhum deles consiga dar sentido e significado a tal simbologia, então a escola continua a negar ao aluno - especialmente àquele que freqüenta a escola pública - uma das formas essenciais de ler, interpretar e explicar o mundo. O importante é que o aluno, ao chegar a utilizar tais notações simbólicas, compreenda a sua razão de ser.

Segundo Moll (1996), para Vygotsky, “O fato central em nossa psicologia é o da mediação”. O conceito de mediação para Vygotsky é bastante complexo: na realização de sua própria atividade o sujeito utiliza instrumentos que atuam como mediadores, entre os quais se destacam as ferramentas e os signos. Os instrumentos são elementos que se interpõem nas relações que se estabelecem ao longo da vida dos sujeitos. Na escola, quando o professor utiliza, por exemplo, obras de arte, como mosaicos, para ensinar sobre polígonos, ele está fazendo uso de um instrumento, mas aquilo que o mosaico significa se constitui um signo.

Janvier[11] (apud MOYSÉS, 2010), exatamente como Vygotsky já o fizera ao tratar da mediação, sugere a utilização de imagens mentais, representações, diagramas, operações gestuais, para se chegar à compreensão da situação matemática envolvida. Ao estabelecer uma relação entre uma dada situação envolvendo o cálculo e uma representação, o raciocínio contextualizado favorece a articulação das variáveis em jogo e contribui para a resolução do problema matemático envolvido. Além disso, este pesquisador afirma que o uso do raciocínio contextualizado ajuda a reduzir a complexidade da representação simbólica.

> Evidentemente que, ao privilegiar a contextualização, esse ensino deve ser concebido de uma maneira diferente. Mais solto, mais flexível, ele deve permitir que a significação dos conceitos seja construída por cada um, mediante um processo de trocas coletivas. E mais: que essa significação seja, de fato, socialmente eficaz. Isso implica novas abordagens metodológicas, novos recursos didáticos, revisão nas formas de avaliação; enfim, novos enfoques do processo ensino/aprendizagem. (JANVIER, apud MOYSÉS, 2010, p.78).

Consoante Moysés (2010), existem em Matemática muitos instrumentos que podem atuar como mediadores, como a mediação por meio da linguagem oral e escrita, com objetos reais, mediação utilizando *softwares,* usando o papel quadriculado, e descreve:

> É importante se ter em mente aquilo que afirma Vygotsky, ou seja, que no processo de aprendizagem mediatizada por meio de um signo, é indispensável que se dê a apreensão do significado desse signo. Ou seja, é preciso que o aprendiz transforme aquele signo externo em um signo interno. Só depois dessa apropriação é que ele passará para a sua estrutura cognitiva sob a forma de uma representação mental.

Segundo Abreu (2002), entende-se então que os signos são instrumentos internalizados, que operam em nível mental, contribuindo para as atividades psíquicas do aprendiz, como relacionar, identificar, selecionar. Radford (2006) acrescenta que o signo

---

[11] Claude Janvier é pesquisador canadense, dedicando-se ao estudo da compreensão do funcionamento do raciocínio matemático.

desempenha uma função mediadora entre o indivíduo e o seu contexto, e permite, além disso, a passagem do interpsicológico para o intrapsicológico, que assegura a reconstrução interna da ação, ou seja, a internalização. A internalização é um conceito-chave da teoria de Vygotsky, pois ela se mostra relevante para a determinação social.

> Vygotsky postula que a internalização dos saberes científicos torna-se fator decisivo para o desenvolvimento cognitivo do sujeito; a operação com símbolos, o entendimento da estrutura de um corpo teórico, a generalização e a abstração permeiam o pensar científico, conduzindo o sujeito a níveis psicológicos superiores (...) (GRAVINA, 2001, p.33).

Leontiev (apud MOLL, 1996, p.45) assim explica: “O processo de interiorização não é simplesmente a transferência de uma atividade externa para um plano interno, preexistente, de consciência, mas o processo no qual esse estágio interno é formado.” O processo de internalização é fundamental para o desenvolvimento do funcionamento psicológico humano. A internalização envolve uma atividade externa que deve ser modificada para tornar-se uma atividade interna, é interpessoal e se torna intrapessoal. Mariotti (2009) afirma que a internalização ocorre em intercâmbios sociais inseridos em um registro especial de linguagem chamado discurso; o professor, que é o representante especialista da cultura matemática, participa do discurso coletivo para ajudar a avançar. O professor atua como um mediador na zona de desenvolvimento proximal do aluno.

Na versão mais difundida de sua formulação original na obra de Vygotsky (1988, p.133), a zona de desenvolvimento proximal é:

> A distância entre o nível real de desenvolvimento, determinado pela capacidade de resolver independentemente um problema, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da resolução de um problema sob a orientação de um adulto ou em colaboração com outro companheiro capaz.

Existem, pelo menos, dois níveis de desenvolvimento identificados por Vygotsky: um real, já adquirido, formado, processos mentais que já se estabeleceram, e um potencial, ou seja, a capacidade de aprender com outra pessoa. A aprendizagem interage com o desenvolvimento, produzindo aberturas nas zonas de desenvolvimento proximal, nas quais as interações sociais são importantes. Como a aprendizagem e o desenvolvimento estão inter-relacionados, um conceito que se pretenda trabalhar como, por exemplo, a Geometria, requer sempre um grau de experiência anterior do aluno. Portanto, vemos aqui o papel do professor em provocar avanços nos alunos, e isso se torna possível com sua interferência na zona de desenvolvimento proximal. Moysés (2010) confirma que trabalhar a zona de desenvolvimento proximal implica interação, pois quando o aluno tem alguém que sabe pô-lo a pensar, ele avança. Para Vygotsky, o ensino é o principal catalisador para a apropriação de conceitos, já que ele estabelece a direção do desenvolvimento mental do aluno.

Moysés (2010, p.138) relata um fato em uma de suas pesquisas em que ocorreu a internalização, com atuação na zona de desenvolvimento proximal:

> Acompanhando o desempenho desta aluna nos três momentos assinalados, percebe-se que houve um incremento na sua capacidade de estabelecer relações, antes inexistente. Fica patente, no seu caso, a pertinência dos pressupostos teóricos acerca da formação de zona de desenvolvimento proximal. O processo interpsíquico que havia nas suas trocas com o seu grupo, com o professor e, particularmente, comigo foi aos poucos se internalizando. Transformou-se em algo seu. Passou a fazer parte da sua estrutura interna; concatenou-se com seus processos mentais já existentes e com seus conhecimentos anteriores.

Moysés (2010, p.100) afirma que na perspectiva de Vygotsky: "A atividade criativa se manifesta onde quer que a imaginação humana combine, mude e crie alguma coisa nova, diferente do corriqueiro." Então, cabe ao professor utilizar sua criatividade na ação prática, mediada por instrumentos como o computador com seus *softwares*, ou por representações, que substituem, em grande parte, os livros didáticos e os cadernos. Uma nova forma de trabalhar a Matemática pode contribuir para que os bloqueios dos alunos possam ser vencidos.

Observando a evolução crescente das mídias audiovisuais e das tecnologias da informação, suas funções e aplicações no ensino e aprendizagem, Ivic (2010) afirma que são os diferentes instrumentos e técnicas (incluindo as tecnologias) que o homem assimila, cria e orienta, para si mesmo, para influenciar suas próprias funções mentais. Este autor ainda enfatiza que a cultura criou um número poderoso de auxiliares (instrumentos, aparelhos, tecnologias) que sustentam os processos psicológicos. Radford (2006) descreve que Vygotsky em uma de suas palestras[12] chamou a atenção para o fato de que o comportamento humano está imerso em uma série de dispositivos artificiais (artefatos) e que uma das ideias de sua teoria era a de mostrar que, em vez de simples auxílio, estes dispositivos alteram o curso do desenvolvimento natural dos processos psíquicos. Ivic (2010, p.21) reforça que o ponto de partida de Vygotsky é o ditado famoso de F. Bacon (que Vygotsky cita sempre): "A mão e a inteligência humanas, privadas dos instrumentos necessários e auxiliares, permanecem impotentes; inversamente, o que reforça seu poder são os instrumentos e auxiliares oferecidos pela cultura." E acrescenta:

> Qual instrumento será mais pertinente e mais útil para as pesquisas sobre o impacto desses novos instrumentos culturais para o ser humano do que uma teoria como a de Vygotsky, que coloca, precisamente, no centro de suas preocupações, o papel dos instrumentos da cultura no desenvolvimento psicológico, histórico e ontogenético? (IVIC, 2010, p.28).

---

[12] Em uma conferência em 1930 na Academia de Educação Comunista.

Além dos auxiliares externos, existem, no entanto, nas obras culturais, instrumentos psicológicos que podem ser interiorizados. Trata-se de todos os sistemas semióticos, práticas, procedimentos e técnicas conceituais dos meios de comunicação, operações e estruturas de caráter intelectual que ocorrem em todas as aquisições culturais.

Refletimos sobre os diferentes conceitos que estão na teoria de Vygotsky e procuramos evidenciar o potencial da teoria sócio-histórica na construção das bases de um ensino que vise o desenvolvimento cognitivo dos indivíduos. Os conceitos de interação social, mediação, interiorização e zona de desenvolvimento proximal podem estar presentes na educação e de acordo com Ivic (2010) nenhuma teoria psicológica do desenvolvimento confere tanta importância à educação quanto a de Vygotsky. Este autor também enfatiza que as referências à educação escolar que encontramos na obra de Vygotsky devem ser consideradas, não como descrições das realidades educacionais, mas como um projeto para renovar a educação. Esta teoria que foi formulada há mais de meio século tem tal potencial que pode ser um instrumento de renovação da escola de hoje.

2.2. REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA SEGUNDO DUVAL

O nosso interesse em estudar a teoria de Duval decorre do fato de que os registros de representação semiótica[13] exercem um papel fundamental nas atividades cognitivas[14] e preenchem igualmente as funções de comunicação, de tratamento intencional e de tomada de consciência dos conceitos matemáticos. No que segue, sob o ponto de vista dos registros de representações semiótica, discutimos alguns fatores que, no nosso entendimento, influenciam o processo de ensino e aprendizagem de conceitos geométricos no Ensino Fundamental.

Segundo Duval (apud MACHADO, 2010), sua teoria trata principalmente do funcionamento cognitivo, na atividade matemática e nos problemas de tal aprendizagem. Ele realizou trabalhos sobre a utilização específica da língua materna nos procedimentos matemáticos, bem como sobre a compreensão de textos de Matemática, e ainda sobre a aprendizagem de diferentes formas de raciocínio e argumentação. Este pesquisador estudou também as diversas representações mobilizadas pela visualização matemática. E ainda

---

[13] Registros multifuncionais: os tratamentos não são algoritmizáveis, sendo sua representação discursiva por meio da língua natural e a não-discursiva por meio de figuras geométricas planas ou em perspectiva (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). Registros Monofuncionais: Os tratamentos são principalmente algoritmos, sendo sua representação discursiva por meio do sistema de escrita numérica, algébrica e simbólica (línguas formais) e não discursiva por meio de gráficos cartesianos.

[14] Processo que busca descrever o funcionamento cognitivo que possibilita a um aluno compreender, efetuar e controlar a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos.

desenvolveu um modelo do funcionamento cognitivo do pensamento, em termos de mudança de registros de representação semiótica, na referida obra *Semiosis e pensamento humano (1995).*

2.2.1. Sobre o Pensamento Matemático

A teoria dos registros de representação de Duval tem se mostrado como um instrumento importante de pesquisa no estudo da complexidade da aprendizagem em Matemática.

A diferença entre a atividade cognitiva requerida pela Matemática e aquela requerida por outras ciências não deve ser procurada nos conceitos[15], mas na importância primordial das representações semióticas[16] e na sua grande variedade[17] utilizada em Matemática.

Na perspectiva de Duval, analisar o conhecimento matemático é analisar o sistema de produção das representações semióticas referentes a esse conhecimento. A maneira matemática de raciocinar e de visualizar está intrinsecamente ligada à utilização das representações semióticas. Em Matemática as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias para o desenvolvimento da atividade matemática (DUVAL, 2009).

> De maneira mais global, podemos constatar que o progresso do conhecimento vem acompanhado sempre da criação e do desenvolvimento de sistemas semióticos novos e específicos que coexistem mais ou menos com o primeiro dentre eles, aquele da língua natural. Assim, a formação do pensamento científico é inseparável do desenvolvimento de simbolismos específicos para representar os objetos e suas relações (GRANGER apud DUVAL, 2009, p.16).

Segundo Duval (2009) a Matemática representa o domínio em que esse fenômeno[18] é o mais antigo e o mais indispensável. A evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversidade de representações. Os indivíduos estão hoje mergulhados em um meio cultural que diversifica estes modos de representação e que multiplica a quantidade de recurso a essa diversidade. Comparamos, por exemplo, os livros dos anos de 1930, com outros dos anos de 1950, 1970 e 1990, para constatar a amplitude e a extensão irreversível do recurso a essa diversidade de sistemas semióticos, tanto para os livros de História, Ciências, quanto para os de Matemática (DUVAL, 2009).

---

[15] Não há domínio de conhecimento que não desenvolva um contingente de conceitos mais ou menos complexo.
[16] É suficiente observar a história do desenvolvimento da matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático.
[17] Além dos sistemas de numeração, existem as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural.
[18] Progresso do conhecimento acompanhado da criação e desenvolvimento de sistemas semióticos novos.

Duval (2009) afirma que esta pluralidade de sistemas semióticos permite uma diversificação das representações de um mesmo objeto e isso aumenta as capacidades cognitivas dos indivíduos e suas representações mentais. As representações mentais funcionam sempre em simbiose: uma produz a outra e vice-versa. Como vemos, as representações mentais não podem jamais serem consideradas independentes das representações semióticas. Ou seja, a partir de nossa imagem mental criamos a representação que nos permite a comunicação; e a partir da representação que já existe, interiorizamos novas imagens mentais. Duval (2009, p. 17) atribui a necessidade das representações semióticas para certas funções cognitivas fundamentais e a implicação recíproca das representações mentais e das representações semióticas: "Não há *noésis*[19] sem *semiósis*[20], é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e de exercício da *noésis*." Ou seja, não há *noésis* sem o recurso a uma variedade de sistemas semióticos, recurso que implica sua coordenação para o próprio indivíduo.

A articulação de diferentes representações é condição necessária para a compreensão em Matemática, no entanto, várias abordagens didáticas não levam em conta esta articulação. "Toda confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão" (DUVAL, 2009, p.14). Não se pode ter compreensão em Matemática se nós não distinguimos um objeto de sua representação. É essencial não confundir o objeto matemático, como, por exemplo, as retas, com suas representações, pois um mesmo objeto matemático pode ter muitas representações diferentes. Levando em conta este fato, corremos o risco de considerarmos duas representações diferentes de um mesmo objeto como sendo dois objetos diferentes, ou ao contrário, considerarmos duas representações de um mesmo objeto porque seus conteúdos são quase idênticos. Essa dificuldade cognitiva se deve ao fato de que duas representações diferentes não apresentam os mesmos aspectos ou características do objeto que elas representam. Numa situação de acessibilidade empírica, em Biologia, por exemplo, podemos justapor o objeto com sua representação, ou seja, um espécime do que é representado. Já em Matemática, os objetos do conhecimento não são acessíveis fora das representações semióticas, podemos somente justapor as representações deste objeto, nunca um objeto e sua representação. O objeto "figura" aparece como o invariante do conjunto de variações possíveis de suas representações (desenho). Em Geometria, por exemplo, o

[19] Intelecção. A "noésis", termo empregado por Aristóteles e retomado por Husserl para designar o próprio ato de pensar.

[20] Signo, marca distintiva. Produção ou apreensão de uma representação semiótica. J. Kristeva emprega este termo para designar as produções ligadas às práticas significantes.

triângulo não é nenhuma das figuras particulares por meio das quais o representamos (figura 1).

> A aprendizagem da Matemática suscita problemas de compreensão que não encontramos nos outros domínios do conhecimento (...). Precisamos primeiro nos interrogar sobre o que é o conhecimento matemático e sobre o que pode ter de diferente em relação aos outros tipos de conhecimento. (...) A análise do conhecimento não deve considerar apenas a natureza dos objetos estudados, mas igualmente a forma como os objetos nos são apresentados ou como podemos ter acesso a eles por nós mesmos. (DUVAL, 2011, p.15).

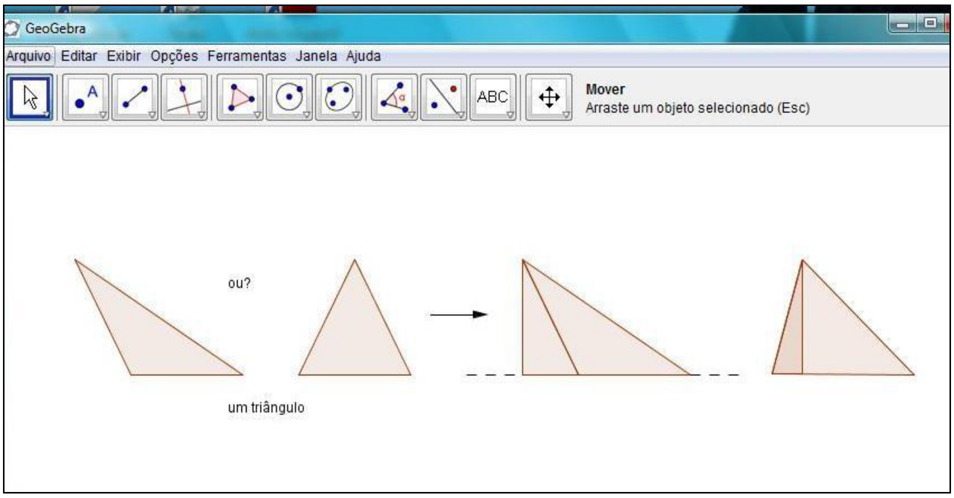


Figura 1 - Construção no Geogebra da variabilidade de figuras visíveis.
Fonte: Duval, 2011, p.19

Com o propósito de tornar mais claras suas ideias, Duval (2011) faz distinções entre sistemas semióticos. As representações semióticas passam a ser denominadas registros[21] – esses são as frases em língua natural, as equações, as figuras, os gráficos, os diagramas. A língua constitui o primeiro registro para o funcionamento do pensamento. Os registros são sistemas cognitivamente produtores, ou mesmo criadores de representações sempre novas que permitem descobrir novos objetos, abrindo possibilidades de transformação do conteúdo das representações produzidas. Por exemplo, as representações gráficas permitiram criar novos tipos de curvas diferentes daquelas obtidas com as seções cônicas, como o *folium*[22]. Na aprendizagem da Geometria, diferentes são os registros que utilizamos: o registro em língua natural quando definimos os objetos geométricos; o registro figural quando desenhamos o objeto; o registro algébrico quando descrevemos os objetos por meio de equações. Outro tipo

---

[21] O emprego da palavra *registro* cristaliza a tomada de consciência de outro modo de funcionamento cognitivo do pensamento, modo mais potente para os matemáticos. Isso confere a essa palavra um valor teórico. (DUVAL, 2011).

[22] "Folium de Descartes", $x^3 + y^3 = 3axy$, uma cúbica. Os matemáticos da época de Descartes desconheciam coordenadas negativas e isso fica aparente pelo fato de a curva ser desenhada como um simples folium ou "folha" no primeiro quadrante. (Duval, 2011).

de sistema semiótico considerado por Duval (2011) são os códigos, são sistemas os quais permitem transmitir uma informação discretizada ou que trocam a codificação de uma informação em função do modo físico de transmissão. Como exemplos, temos o código binário, o alfabeto, etc. Duval (2011) enfatiza que são os registros que abrem possibilidade de transformação do conteúdo de representações produzidas e não os códigos. Afirma que na Matemática o conhecimento não começa com as representações semióticas dos conceitos ou dos objetos matemáticos, mas com suas transformações. São essas transformações de representações semióticas em outras representações semióticas, dadas ou obtidas no contexto de um problema, que produzem conhecimento.

> Essas transformações são as operações semióticas, e um registro se caracteriza pelas operações semióticas que lhe são específicas. Mudar de registro de representação não é só mudar o conteúdo da representação de um objeto, é mudar as operações semióticas a realizar para transformar o conteúdo da nova representação. As operações semióticas próprias aos diferentes registros utilizados na Matemática constituem os gestos intelectuais necessários e não importa qual atividade matemática. (DUVAL, 2011, p.73).

Fortemente associada ao conceito de registro é a ideia de transformação de representação semiótica introduzida por Duval (2009) e que caracteriza como sendo de dois tipos:

- Os tratamentos: são transformações de representações dentro de um mesmo registro. Do ponto de vista *pedagógico*, tenta-se algumas vezes procurar o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender. Por exemplo, completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria.
- As conversões: são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados. Este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não-congruência. Geralmente, a passagem de uma representação a outra se faz de forma espontânea quando elas são congruentes, ou seja, quando as três condições seguintes são preenchidas: correspondência semântica entre as unidades significantes que a constituem, mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações, e conversão de uma unidade significante na representação de chegada. Mas, quando um desses três critérios não é verificado, as representações não são mais congruentes entre elas, e a passagem de uma à outra não é mais imediata. Um exemplo de não-congruência se observa quando os alunos desenham uma reta a partir da sua equação, mas encontram dificuldades para obter a equação da reta em dado sistema de coordenadas.

Duval (apud MACHADO, 2010, p.14) enfatiza que: “A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação”. Passar de um registro a outro não é somente mudar o modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto. Pensar em Matemática mobiliza sempre pelo menos dois registros, em Geometria, por exemplo, mobilizamos o registro discursivo e o figural.

De acordo com Duval (2011), nós prestamos menos atenção àqueles registros que permitem visualização matemática, pois acreditamos que, pelo fato de podermos “ver”, os processos cognitivos de reconhecimento seriam os mesmos de qualquer representação icônica, imagem, esquemas, mapas ou fotografias, o que é claramente falso. Isso está causando muitos equívocos no ensino de Matemática, primeiro na insistência colocada sobre atividades práticas, nas quais os professores enfatizam a utilização de material muito variado de representações icônicas (figuras, tabelas, curvas, etc.), e também com a utilização do computador para tudo o que concerne à visualização em Geometria (DUVAL, 2011, p.8):

> (...) os *softwares* abrem possibilidades consideráveis de criação e exploração visuais. Mas, sua utilização é suficiente para desenvolver nos alunos a capacidade de antecipar as diferentes transformações possíveis de uma dada figura em outras que não se assemelham?

Segundo Duval (apud ALMOULOUD, 2010), na Geometria temos três formas de processo cognitivo que são provocados quando utilizamos:

- A visualização: para a exploração heurística de uma situação complexa, ou seja, é o método que realiza uma investigação no espaço;
- A construção: processo com instrumentos, no qual o aluno percebe a diferença entre construir e desenhar, podendo verificar propriedades;
- Argumentação Dedutiva: que é o processo que conduz à prova e à explicação.

A resolução de problemas de Geometria e a entrada na forma de raciocínio que é exigida na resolução dependem da tomada de consciência da distinção das formas de apreensão. Duval (apud ALMOULOUD, 2010) estabelece quatro formas de apreensão em Geometria:

- Sequencial: é solicitada nas tarefas de construção ou de descrição com o objetivo de reproduzir uma figura. Por exemplo, quando o aluno segue um roteiro para a construção de uma figura;

- Perceptiva: é a interpretação das formas (dos contornos fechados justapostos, superpostos, separados) da figura em uma situação geométrica (figura 2, p.29);
- Discursiva: interpretação dos elementos da figura geométrica, dando prioridade à articulação dos enunciados, considerando a rede de significados das propriedades do objeto;
- Operatória: está centrada nas modificações possíveis de uma figura de partida e na reorganização perceptiva que estas modificações sugerem (utilizada nas demonstrações).

A apreensão operatória das figuras depende das modificações que a figura pode sofrer, as quais são classificadas por Duval (apud ALMOULOUD, 2010) em: modificação mereológica, ótica e posicional. Na mereológica, a figura pode separar-se em partes que são subfiguras da figura dada, fracionando-se e reagrupando-se. Na ótica há a transformação de uma figura em outra considerando sua imagem. E a posicional se refere ao deslocamento em relação a um referencial. Nos três casos estas modificações são realizadas, psíquica, gráfica e mentalmente.

De acordo com Duval (2011), as figuras em Geometria apresentam três características que lhes conferem um poder cognitivo muito particular. Primeiro porque elas têm um valor intuitivo; segundo porque elas dão um reconhecimento quase imediato do objeto que representam; terceiro porque diferentemente de outras imagens, elas podem ser construídas por meio de instrumentos, como régua, compasso e *softwares*.

As figuras permitem “ver”, quando se trata de resolver um problema, demonstrar ou aplicar a Geometria à realidade. No ensino são privilegiadas as ações de demonstrar ou aplicar as propriedades das figuras geométricas. A construção dessas figuras auxiliada por um *software* confere-se a elas uma confiabilidade e uma objetividade, que permitem efetuar verificações e observações, quando “ver” é importante. As representações figurais se diferenciam de todas as outras representações pelo fato de que existem muitas maneiras de reconhecer as formas ou as unidades figurais. Para “ver” matematicamente uma figura é preciso mudar o olhar sem que a representação visual no monitor ou no papel seja modificada.

> A análise cognitiva das figuras diz respeito à maneira de “ver” que elas necessitam para que sejamos capazes de utilizá-las na resolução de um problema ou no reconhecimento de uma aplicação das propriedades geométricas em uma situação real. (DUVAL, 2011, p.85)

As figuras formam um registro específico e nele são usadas as operações mentais figurais que transformam uma figura em outra. Por exemplo, no geral, a figura que acompanha o enunciado de um teorema é transformada em outra figura quando se inicia a demonstração, pois novos elementos geométricos precisam ser agregados na figura inicial. Segundo Duval (2011, p. 85) é “tomando consciência dessas ações que o aluno poderá entrar na maneira matemática de ver em Geometria.”

Para Duval (2011, p.85), ver implica pelo menos uma das três operações, “as duas primeiras são comuns à maneira de olhar as imagens e à percepção dos objetos”, a terceira sendo “aquela necessária em toda atividade geométrica, e que, sobretudo só tem sentido em Matemática.” É reconhecer as formas (Duval, 2011, p.85): “Uma configuração parece com um objeto da realidade à medida que as relações de vizinhança entre as formas que reconhecemos conservam as relações de vizinhança entre as partes desse objeto.”

Apresentamos um exemplo (figura 2) com pelo menos três maneiras de ver uma figura geométrica plana, sendo que a maneira matemática de ver as figuras em Geometria exige que possamos passar espontaneamente (rapidamente) de uma para a outra.

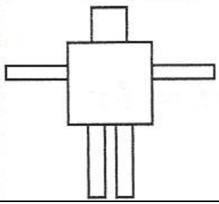
Figuras *2D/2D* *(Configuração global)*	**Duas decomposições VISUALMENTE INCOMPATÍVEIS** *em unidades figurais* ***2D/2D*** (= formas ou contornos fechados reconhecidos)		**E uma terceira** *em unidades figurais* ***1D****/2D*
	Acoplamento/decomposição por **JUSTAPOSIÇÃO**	Acoplamento por **SUPERPOSIÇÃO**	*construção instrumental*
	**6 formas**, cada uma sendo *uma parte do corpo humano*. (***icônica***)	**5 formas**, *cada uma sendo uma faixa retangular* mais ou menos larga.	**18** *segmentos* ou **12** *retas subjacentes*

Figura 2 - Três maneiras de ver uma figura geométrica plana
Fonte: Duval, 2011, p.87

Duval (2011, p.90) afirma que toda utilização das figuras na resolução de problemas, nas explicações de propriedades geométricas, para demonstrar ou justificar uma conjectura, dependem inteira e exclusivamente dessas operações figurais, as quais fazem das figuras um “sistema semiótico de visualização cognitivamente produtor”.

A diferenciação entre os termos *desenho* e *figura* também é pertinente para análise cognitiva (Duval, 2011). Da perspectiva da Educação Matemática, Laborde (1996) pontua uma crucial diferença entre *desenho* e *figura*. O *desenho* está relacionado com aspectos visuais expressando algumas propriedades do problema a ser resolvido, ou seja, “refere-se à instância de representação do componente figural, quer seja um desenho no papel, quer seja um desenho na tela do computador.” A *figura*, embora seja uma representação material, está principalmente relacionada a conceitos teóricos, ou seja, “refere-se ao objeto matemático inserido no modelo euclidiano, dado pelas propriedades que lhe são impostas, por via de construção geométrica" (GRAVINA, 2001, p. 88). Nos *softwares* de geometria dinâmica essa oposição entre *desenho* e *figura* tem um sentido muito forte, eles permitem fazer essa distinção. Na figura 1 (p.25) temos uma sequência não animada que ilustra esta oposição.

> A figura é identificada pelas propriedades que não vemos porque nenhum desenho as mostra em sua generalidade. Estas propriedades só podem ser aprendidas por conceitos, isto é, os termos definidos nos enunciados. Isto reflete, na realidade, esse conglomerado de produções instrumentais e semióticas que chamamos uma "figura" no ensino. Ela consiste na associação do que é dado a ver com um código ou indicações verbais fixando esse "é dado" como "propriedade" ou como "objeto" a ser reconhecido. Não podemos jamais ter certeza se o que é dado a ver representa realmente a propriedade ou como objeto a ser reconhecido. Não podemos jamais ter certeza se o que é dado a ver representa a propriedade desejada (paralelismo, perpendicularismo, ponto médio, simetria, etc. (DUVAL, 2011, p.91).

A interiorização das operações figurais é condição necessária para as atividades de cálculo ou, ainda, para aplicar uma propriedade geométrica no quadro de uma situação real, por exemplo, o teorema de Tales. Para Duval (2011), é preciso primeiro colocar tarefas para os alunos que excluam atividades de medida e de cálculo, estes devem aprender a ver sem recorrer aos aspectos métricos.

O ensino de Geometria sofreu transformações no decorrer dos últimos anos, por exemplo, na forma como os autores dos livros didáticos abordam os conceitos geométricos. Duval (2011, p.94) considera importante esta mudança, pois desta forma os objetos tornam-se imediatamente acessíveis aos alunos: "uma abordagem empírica dos objetos estudados no contexto de problemas correspondendo a situações reais." Ou seja, acessíveis por meio de figuras que podem facilmente ser vistas como representação de relações que podemos observar em situações reais e fornecem uma modelagem destas. Afirma, ainda, que a passagem da realidade física à visualização geométrica não é direta, ela requer outro tipo de representação.

> A modelagem geométrica de uma situação concreta é sempre uma representação mista e que resulta da superposição de duas representações semióticas diferentes:
> — Uma imagem esquematizada dos dados significativos da situação física que cumpre uma função analógica.
> — Uma figura cujas unidades figurais possam ser colocadas em correspondência com as unidades figurais da imagem esquematizada, e que permitirá explicitar os tratamentos dependendo do teorema a ser utilizado.
>
> As duas representações superpostas em uma representação mista reenviam cada uma a funcionamentos cognitivos diferentes. Elas cumprem igualmente funções diferentes. Assim, a imagem esquematizada pode ser convertida em uma descrição verbal de fenômenos que não têm nada de comum com o enunciado matemático das propriedades do teorema. (DUVAL, 2011, p.96).

Nossas reflexões nesta seção sobre o pensamento matemático basearam-se em diversas ideias da teoria de Duval (2011). Primeiramente abordamos as atividades cognitivas exigidas pela Matemática, pela produção e diversidade das representações semióticas. E salientamos a articulação dessa diversidade de representação como sendo indispensável para a compreensão em Matemática, na qual o sujeito não pode confundir o objeto com sua representação. Para tornar mais claras estas ideias estabelecemos a diferença entre registros e códigos, segundo Duval (2011), enfatizando que são os registros que permitem ocorrer as transformações; registros considerados como sistemas semióticos criadores de novos conhecimentos. E, além disso, observamos que para haver aprendizagem em Matemática deve haver a mobilização de pelo menos dois registros; em Geometria, por exemplo, mobilizamos a linguagem e a representação figural.

Podemos ver a teoria de Duval como um refinamento das ideias de Vygotsky quanto à mediação por meio de registros, a importância da interiorização desses registros sob a forma das diferentes apreensões, e a utilização da tecnologia com registros dinâmicos se inserindo no processo de aprendizagem que acontece na zona de desenvolvimento proximal.

Quanto aos ambientes de geometria dinâmica, observamos que estes oferecem a possibilidade de visualização simultânea e em tempo real de diferentes registros, ou seja, o algébrico, o discursivo e o figural, oportunizando as transformações serem realizadas dentro de um mesmo registro, o tratamento, ou de um registro para outro, as conversões. Sendo que a conversão é considerada por Duval (2011) como fundamental para a compreensão em Matemática. As atividades em ambientes de geometria dinâmica oportunizam, ainda, as formas de apreensão seqüencial, perceptiva, discursiva e operatória. Além do mais, os ambientes de geometria dinâmica permitem-nos fazer a distinção entre *desenho* e *figura*. No capítulo 4 apresentamos o *software* de geometria dinâmica GeoGebra com seus diferentes registros semióticos, por meio de construções básicas e do *menu* das transformações geométricas no plano.

Na teoria de Duval (2011) as figuras formam um registro específico e nele são usadas as operações mentais figurais que transformam uma figura em outra. E é nesse sentido que se estabelece a importância das operações figurais na aprendizagem das transformações geométricas.

A partir dessas reflexões observamos que, na perspectiva de Duval (2011), ver e ensinar Matemática de outra forma é ter consciência dos processos cognitivos específicos do pensamento matemático e dar condições de serem desenvolvidos pelos alunos. Trata-se de contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, análise e de visualização, as quais são utilizadas na aprendizagem de Geometria.

3. SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

Neste capítulo nos referimos às escritas sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria que estão nos documentos oficiais e apresentamos uma análise de três coleções de livros didáticos das séries finais do Ensino Fundamental, em particular quanto ao conteúdo de transformações geométricas no plano. Também trazemos alguns trabalhos que tratam de experiências que fazem uso de tecnologia no ensino da Geometria.

3.1. AS ORIENTAÇÕES E DIRETRIZES DOS DOCUMENTOS OFICIAIS

Nosso interesse em analisar os documentos oficiais deve-se ao fato de que estes norteiam as ações que devem ser tomadas nas escolas. Além disso, eles fornecem reflexões sobre as teorias que deram suporte a sua própria criação e indicações de conceitos e metodologias. A seguir apresentamos as abordagens feitas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998)[23] e na Proposta Curricular de Santa Catarina (2005)[24], no que tange às transformações geométricas planas para o Ensino Fundamental. A escolha de analisar a Proposta Curricular de Santa Catarina deve-se ao fato de pertencermos ao quadro de professores de uma escola de Sombrio, da rede estadual de Santa Catarina, e de termos como sujeitos de nossa experiência, professores atuantes em escolas desta cidade.

3.1.1. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

Observamos nos PCN que desde o segundo ciclo, nos objetivos conceituais, procedimentais e atitudinais, as transformações geométricas planas estão presentes.

[23] Os Parâmetros Curriculares Nacionais são referenciais de qualidade elaborados pelo Governo Federal, estabelecendo as diretrizes que as escolas públicas devem seguir com o objetivo de padronizar a Educação no Brasil. Foram estabelecidos a partir de 1996 e, desde então, a Geometria ganhou destaque no bloco de conteúdos Espaço e Forma, onde é fortemente sugerida desde as séries iniciais do Ensino Fundamental.

[24] A Proposta Curricular de Santa Catarina é resultado de uma construção coletiva de educadores, cujo processo iniciou-se em 1988 e teve sua primeira publicação em 1991. A partir daí foram proporcionados cursos aos profissionais da educação de modo a implementá-la na rede estadual. Em 1996 houve a revisão daquela edição, incorporando todas as discussões obtidas nos cursos de implementação da proposta, que foi publicada em nova edição em 1998. Este caderno, publicado em 1998, trata da abordagem teórica e metodológica das disciplinas curriculares e disponibiliza os fundamentos que deverão embasar a ação pedagógica dos educadores. A última versão da proposta aconteceu em 2005, produto das discussões do Grupo Multidisciplinar que foi constituído a partir da seleção dos projetos apresentados pelos professores especialistas, mestres, doutores e técnicos das Gerências Regionais de Educação, Ciência e Tecnologia - GEECTs e da Secretaria de Estado da Educação, Ciência e Tecnologia - SED.

Principalmente quando o documento menciona a descrição, interpretação e representação da movimentação de uma pessoa. Ou ainda, quando cita a identificação da simetria, de semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como número de lados, número de ângulos, eixos de simetria, ampliação e redução de figuras planas e percepção de elementos geométricos nas formas da natureza e nas criações artísticas.

O documento sugere atividades de compor e decompor as figuras, percebendo a simetria como característica de algumas figuras e não de outras, e também se refere a levar o aluno a valorizar e perceber a presença da Geometria na natureza e nas criações do homem.

> Isso pode ocorrer por meio de atividades em que ele possa explorar formas como as de flores, elementos marinhos, casa de abelha, teia de aranha, ou formas em obras de arte, esculturas, pinturas, arquitetura, ou ainda em desenhos feitos em tecidos, vasos, papéis decorativos, mosaicos, pisos, etc. As atividades geométricas podem contribuir também para o desenvolvimento de procedimentos de estimativa visual, seja de comprimentos, ângulos ou outras propriedades métricas das figuras, sem usar instrumentos de desenho ou de medida. Isso pode ser feito, por exemplo, por meio de trabalhos com dobraduras, recortes, espelhos, empilhamentos, ou pela modelagem de formas em argila ou massa. Construir maquetes e descrever o que nelas está sendo representado é também uma atividade muito importante, especialmente no sentido de dar ao professor uma visão do domínio geométrico de seus alunos. O uso de alguns *softwares* disponíveis também é uma forma de levar o aluno a raciocinar geometricamente (PCN, 1998, p.83).

No terceiro ciclo (PCN, 1998, p.51) vemos contemplados nos conteúdos o ensino das transformações geométricas planas, para o qual se afirma que devemos destacar a importância das isometrias e homotetias visando a construção dos conceitos de congruência e semelhança. E acrescenta-se que:

> Além disso, é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

Como podemos perceber as transformações geométricas planas são mencionadas em diferentes partes do texto dos PCN. A ênfase é que nesse terceiro ciclo o aluno deve aprender a fazer a transformação de uma figura por meio de reflexões, translações e rotações, identificando que as medidas[25] permanecem invariantes, e assim construir o conceito de congruência.

No quarto ciclo vemos várias páginas[26] que destacam o ensino das transformações geométricas planas, inclusive estabelecendo que o aluno construa o conceito de semelhança a partir de redução/ampliação de figuras. Além disso, no documento encontramos a menção da utilização de *softwares* para o ensino desses conceitos.

---

[25] Estamos nos referindo às medidas dos lados, ângulos e medida de superfície de polígonos.

[26] Nos PCN, do Ensino Fundamental (1998) encontramos fortemente destacados os conteúdos das transformações geométricas planas nas seguintes páginas: 51, 73, 82, 86, 90, 93, 123-125.

> As atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ser privilegiadas nesses ciclos, porque permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais "dinâmico" para este estudo. Atualmente, existem *softwares* que exploram problemas envolvendo transformações das figuras (PCN, 1998, p.124).

3.1.2. Proposta Curricular de Santa Catarina (PC-SC)

A opção teórica desta proposta, desde sua criação, foi pela concepção histórico-cultural de aprendizagem, também chamada sócio-histórica ou sóciointeracionista de Vygotsky, para a qual o professor assume a função de mediador no processo ensino-aprendizagem.

> Nesta concepção, a Matemática, sob uma visão histórico-crítica, não pode ser concebida como um saber pronto e acabado, ou um conjunto de técnicas e algoritmos, tal como concebe o ensino tradicional e tecnicista. Pelo contrário, a Matemática deve ser entendida como um conhecimento vivo, dinâmico, produzido historicamente nas diferentes sociedades, sistematizado e organizado com linguagem simbólica própria em algumas culturas, atendendo às necessidades concretas da humanidade. (PC-SC, 2005, p.106).

A PC-SC apresenta os conteúdos matemáticos organizados em quatro campos de conhecimento: Campos Numéricos; Campos Algébricos; Campos Geométricos; Estatística e Probabilidades. Todos estes campos têm uma proposta metodológica articulada, sem restringir-se a linearidade.

Como o nosso objetivo é analisar o Campo Geométrico, mais especificamente as transformações geométricas, nós vamos observar o quadro em que a proposta traz a representação deste campo no Ensino Fundamental.

No quadro 1[27] podemos verificar a legenda utilizada com o seguinte significado: a passagem gradativa da cor branca para a cor preta, em cada conteúdo, corresponde a uma também gradativa passagem de um tratamento assistemático[28] para esse tratamento sistemático.

A proposta estabelece que os conteúdos sejam organizados por série, porém, isso não impede que o professor possa trabalhá-los antes, dependendo das peculiaridades dos alunos.

---

[27] Na PC-SC, este quadro foi estabelecido em séries, ou seja, do pré-escolar até o terceiro ano do Ensino Médio. Nesta observação estamos nos referindo somente até a oitava série do Ensino Fundamental, no Campo Geométrico.

[28] "Abordá-lo enquanto noção ou significado social, sem preocupação de defini-lo simbolicamente." (PC-SC, 2005, p.107)

CAMPOS GEOMÉTRICOS	Pré	1	2	3	4	5	6	7	8
1.GEOMETRIA									
• Produção Histórico – Cultural									
• Exploração do espaço tridimensional									
• Elementos de desenho geométrico									
• Estudo das representações geométricas no plano									
• Geometria Analítica									
2.SISTEMAS DE MEDIDAS									
• Produção Histórico – Cultural									
• Conceitos e Medidas de: comprimento, superfície, volume, capacidade, ângulo, tempo, massa, peso, velocidade e temperatura									
3.TRIGONOMETRIA									
• Produção Histórico – Cultural									
• Relações trigonométricas no triângulo retângulo									
• Funções Trigonométricas									

Quadro 1 - Campos Geométricos contemplados na PC-SC
Fonte: PC-SC (2005)

Observamos nesse quadro que a PC-SC (2005) tem preocupação com a construção histórica dos conhecimentos matemáticos. No entanto, a proposta não descreve detalhadamente os conteúdos de Geometria que devem ser trabalhados. Também não observamos qualquer menção ao estudo das transformações geométricas no plano. A área da Geometria é destacada, porém, percebemos que existe uma grande distância entre teoria e prática, porque muitos professores têm dificuldades[29] de saber como implementar esta proposta.

[29] Em muitos dos cursos dos quais participamos, referentes à implementação desta proposta, identificamos as dificuldades apresentadas pelos professores.

Acreditamos que o que falta é estabelecer um estudo mais aprofundado da teoria sócio-interacionista que norteia a PC-SC (2005) e relacionar esta teoria aos conceitos que devem ser trabalhados, de forma que o professor possa elaborar atividades que proporcionem aos alunos a construção destes conceitos de acordo com a proposta.

3.2. OS LIVROS DIDÁTICOS

No que segue, observamos como os livros didáticos abordam os conceitos de Geometria Plana, em especial das transformações geométricas no plano.

Consultamos três coleções de livros das séries finais[30] do Ensino Fundamental, que fazem parte do PNLD[31] 2011, ou seja, livros que foram utilizados em 2011, que são utilizados neste ano de 2012 e que serão utilizados em 2013. As coleções de livros foram nomeadas por A[32], B[33] e C[34] para facilitar a escrita desta dissertação.

A escolha da coleção A, se deu pelo fato de que utilizamos esta coleção em nossa escola. A coleção B é utilizada pelos professores da rede municipal de Sombrio-SC, os quais fazem parte desta experiência. E já a escolha da coleção C foi motivada por ter sido mencionada, em um dos fóruns[35] realizados na UFRGS, como uma boa coleção para ser utilizada em sala de aula.

Fizemos uma análise de cada coleção separadamente e, logo após, uma comparação entre elas, destacando o que cada coleção abordava sobre as transformações geométricas no plano.

Coleção A

De uma forma geral, a coleção A procurou contemplar a história da Matemática, abordando os conhecimentos geométricos e os povos antigos, descrevendo como os

[30] Utilizaremos a nova nomenclatura das séries finais do Ensino Fundamental, ou seja, 6º ao 9º ano.
[31] O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) tem como principal objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica. Mais informações podem ser encontradas no *link* do site do MEC: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12391&Itemid=668.
[32] GIOVANNI Júnior, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito. *A Conquista da Matemática*. São Paulo: FTD, 2009.
[33] RIBEIRO, Jackson da Silva. *Projeto radix: matemática.* São Paulo: Scipione, 2009.
[34] MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko.*Matemática: Idéias e Desafios*. São Paulo: Saraiva, 2009.
[35] No curso de mestrado da UFRGS, há a realização de fóruns, nos quais são abordados assuntos relacionados ao Ensino de Matemática.

babilônios, egípcios e gregos a utilizavam. Essa coleção contemplou a contextualização relacionando a Geometria a fatos do mundo real.

Nessa coleção observamos que os autores preocuparam-se em demonstrar os teoremas mencionados no livro e a cada demonstração procuraram explicitar os axiomas estabelecidos e os teoremas já demonstrados anteriormente. Desta forma aproximam-se da organização da Geometria apresentada por Fetissov (1996)[36].

Notamos que nos volumes do sexto e sétimo anos os autores abordaram os axiomas e teoremas de forma mais intuitiva e a partir do oitavo e nono ano utilizaram-se de demonstrações. Também percebemos que nesses volumes temos mais conceitos de Geometria, visto que os autores dedicaram mais capítulos para esta área.

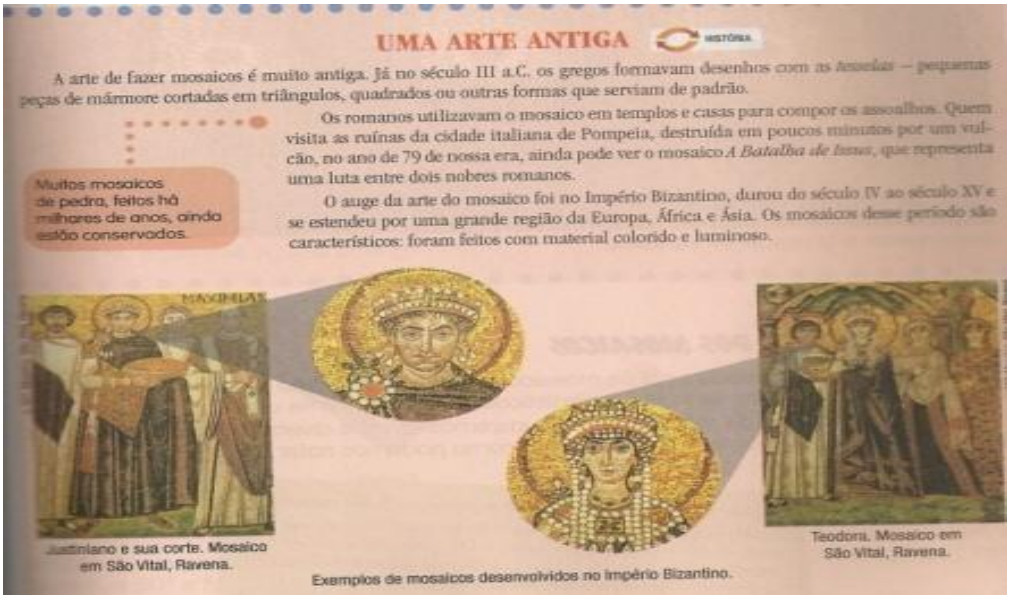
Os autores utilizaram-se, de acordo com Fetissov (1996, p.3), da Geometria subconsciente[37], científica e demonstrativa, e relacionaram a história da Matemática com os conceitos que estavam sendo abordados.

De uma forma geral os autores apresentaram os axiomas e teoremas da Geometria importantes para o estudo nas séries finais do Ensino Fundamental. Porém, em nenhum dos livros desta coleção encontramos os conceitos das transformações geométricas no plano. Apenas no final do volume do sétimo ano foi feita a abordagem por meio da sugestão de desenvolvimento de um projeto intitulado *Investigando revestimentos*. Este projeto consiste de quatro etapas: primeiramente os alunos fazem uma pesquisa de campo, observando locais onde os revestimentos são usados. Na segunda etapa (figura 3) os autores apresentam um texto que se refere ao conhecimento da história dos mosaicos e o entendimento do papel da Matemática neste tipo de revestimento.

---

[36] Este autor apresenta a estrutura axiomática da Geometria organizada em grupos: axiomas de incidência, de ordem, de congruência, de continuidade; e, finalmente, o axioma que diz respeito ao paralelismo - *por um ponto fora de uma reta é possível traçar uma, e uma só, reta paralela à reta dada.*

[37] A *Geometria Subconsciente* caracteriza-se, entre outras coisas, pelo fato de só considerar questões concretas, traduzindo o saber geométrico em uma coleção desconexa de noções sobre o espaço físico. A *Geometria Científica* caracteriza-se pela metodologia empregada – observações, ensaio e erro, um procedimento empírico, enfim – lembra o método científico indutivo moderno. São típicas desta a Geometria dos egípcios e babilônios antigos. Para eles as “verdades” geométricas eram determinadas por procedimentos experimentais. Já os gregos perceberam que esse método não era satisfatório, então pela primeira vez usariam as demonstrações na Geometria. Aparece então a *Geometria Demonstrativa*, com os primeiros traços de dedução lógica (passo gigantesco no desenvolvimento da Matemática), com a contribuição de diversos gregos, tais como Euclides (século III a.C.), Proclo (410-485), Eudemo de Rodes (século IIIa.C.), Tales de Mileto (segunda metade do século VI a.c.), Pitágoras de Samos (532a.C.) e a “escola pitagórica”. (FETISSOV,1996).



UMA ARTE ANTIGA

HISTÓRIA

A arte de fazer mosaicos é muito antiga. Já no século III a.C. os gregos formavam desenhos com as *tesselas* – pequenas peças de mármore cortadas em triângulos, quadrados ou outras formas que serviam de padrão.

Os romanos utilizavam o mosaico em templos e casas para compor os assoalhos. Quem visita as ruínas da cidade italiana de Pompeia, destruída em poucos minutos por um vulcão, no ano de 79 de nossa era, ainda pode ver o mosaico *A Batalha de Issus*, que representa uma luta entre dois nobres romanos.

O auge da arte do mosaico foi no Império Bizantino, durou do século IV ao século XV e se estendeu por uma grande região da Europa, África e Ásia. Os mosaicos desse período são característicos: foram feitos com material colorido e luminoso.

Muitos mosaicos de pedra, feitos há milhares de anos, ainda estão conservados.

Justiniano e sua corte. Mosaico em São Vital, Ravena.

Teodora. Mosaico em São Vital, Ravena.

Exemplos de mosaicos desenvolvidos no Império Bizantino.

Figura 3 - Texto informativo
Fonte: Coleção A, volume 7º ano, p.303

Em seguida, os autores apresentam a Matemática dos mosaicos, abordando os conceitos de reflexão e rotação a partir de eixos de simetria nas figuras. Na figura 4, mostramos como os autores se referiram à rotação.

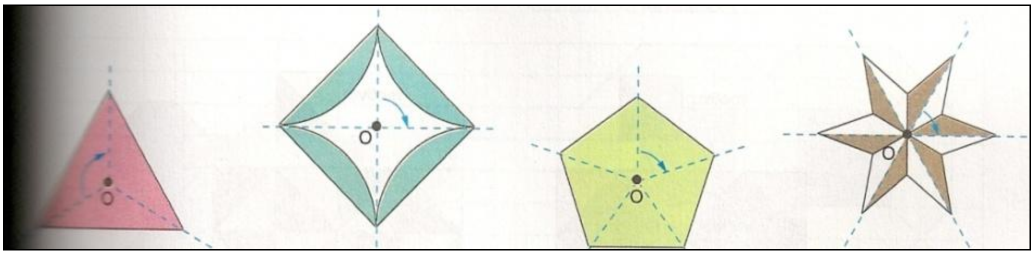


Figura 4 - Estrutura simétrica de rotação em torno do ponto O.
Fonte: Coleção A, volume 7º ano, p. 305

Logo após explicam que na simetria de translação, uma figura padrão passa por uma translação, isto é, todos os pontos da figura sofrem um movimento numa mesma direção e sentido, sendo que o deslocamento tem sempre o mesmo comprimento, conservando a forma da figura.

A partir daí, apresentam alguns exemplos de revestimentos (figura 5) e a condição necessária para se revestir um plano.

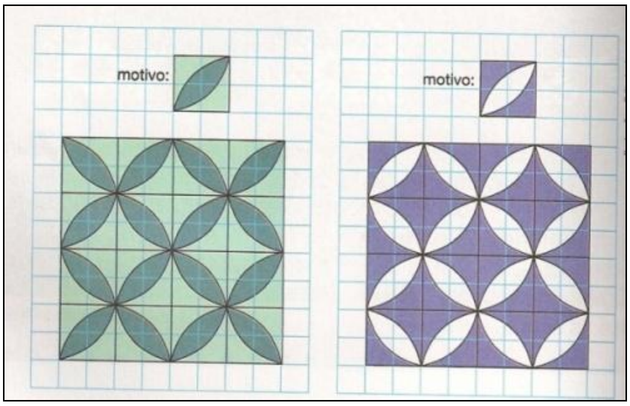


Figura 5 - Pavimentações
Fonte: Coleção A, volume 7º ano, p.306

Os textos da coleção A, que foram abordados anteriormente, estão sendo utilizados para aprofundar os conhecimentos dos alunos sobre o assunto, pois, segundo os autores, utilizando estes novos conhecimentos, na terceira etapa os alunos criarão um mosaico para piso, parede ou teto, e na etapa final todos exporão seus trabalhos.

Coleção B

O autor da coleção B procurou desenvolver o trabalho, no qual os conteúdos foram retomados em diversos momentos. Ele procurou relacionar a situações contextualizadas, utilizando áreas do conhecimento como História, Ciências, Geografia, Arte, entre outras.

Em relação à Geometria, observamos que no volume do sexto ano o autor preocupou-se em apresentar muitas figuras, evidenciando que a visualização na Geometria é muito importante para a compreensão dos conceitos estudados. Nesse volume encontramos a abordagem do conceito de simetria que, segundo o autor, é um tópico do estudo da Geometria das transformações. A abordagem feita, no nosso entendimento, visa propiciar conceituações de congruência e de semelhança, procurando desenvolver no aluno a capacidade de perceber se duas figuras têm ou não a mesma forma e o mesmo tamanho, independente da posição que elas ocupam no plano.

Iniciam o capítulo oito com uma fotografia de um espetáculo de dança, e a partir desta fazem diversos questionamentos levando o aluno a observar de forma intuitiva quando uma figura é simétrica ou dá a ideia de reflexão. Em seguida apresentam diversas figuras destacando os seus eixos de simetria (figura 6). Observamos que o autor só apresentou figuras com eixos de simetria na vertical. Ele poderia ter apresentado outras figuras que apresentassem eixos de simetria, por exemplo, na horizontal.

Figura 6 - Elementos da natureza que apresentam eixo de simetria.
Fonte: Coleção B, volume 6º ano, p.99

Ao final do capítulo o autor apresenta um texto destacando que a simetria está presente na arte das mulheres sotho[38], explica como são feitas estas pinturas (figura 7) e faz questionamentos sobre o assunto. Observamos que o autor tem a preocupação de mostrar ao aluno como é feita a composição de pavimentações, iniciando com a figura motivo e utilizando reflexões, a partir das retas, horizontal e vertical.

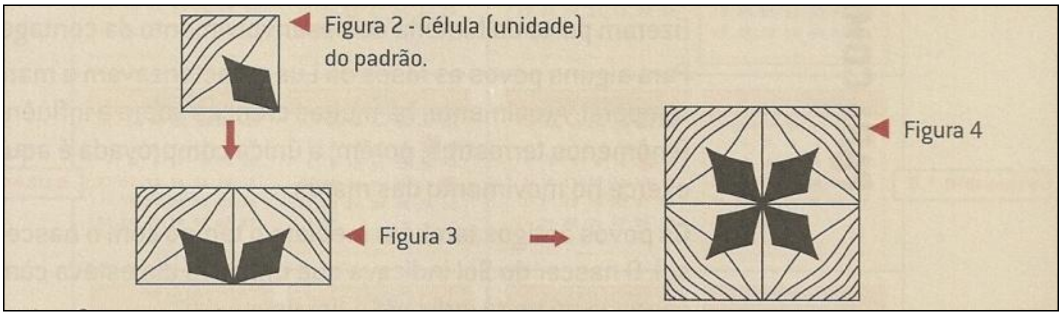


Figura 7 - Um dos padrões mais populares de *litema*
Fonte: Coleção B, volume 6º ano, p.103

Ao introduzir o conceito de polígono, o autor recorre à utilização de mosaicos, relacionando-os com a história das civilizações desde a antiguidade; estabelecendo uma discussão sobre as relações algébricas e geométricas que eles apresentam.

[38] A arte das mulheres do povo sotho, em Lesoto e regiões vizinhas da Africa do Sul, pode ser vista estampada em pinturas nas paredes de suas casas. Os desenhos, chamados de *litema* (singular: *tema*), apresentam padrões geométricos e características de simetria.

Neste volume encontramos também, a ampliação e redução de figuras (homotetia) por meio do uso da malha quadriculada propiciando, no nosso entendimento, a construção do conceito de semelhança.

Dando continuidade ao estudo de polígonos, no volume do sétimo ano, o autor aborda o assunto relacionando à atividade artística de confecção de *patchwork*[39]. A partir deste tema, começa a trabalhar os elementos do polígono, propriedades, bem como seus ângulos internos e externos, e soma dos ângulos, sem, no entanto, utilizar a fórmula S= (n-2).180º. Dedica uma página para o estudo de padrões em mosaicos, destacando que existem três tipos de mosaicos regulares e oito tipos de mosaicos semirregulares[40], porém acreditamos que foi de forma muito breve. No nosso entendimento, este estudo das pavimentações deveria ser explorado no volume do oitavo ano, visto que nesse ano o autor retoma o assunto de polígonos e expressa a fórmula da soma dos ângulos internos.

Ainda no volume do sétimo ano, ele relembra o conceito de simetria axial utilizado no volume anterior. Para relembrar, o ator traz duas figuras na malha quadriculada destacando o eixo de simetria na vertical. Acreditamos que a utilização de figuras com eixo de simetria somente na vertical, induz o aluno a pensar que os eixos de simetria devem ser analisados somente na vertical. O autor poderia apresentar outras figuras que possuíssem eixos de simetria em outras direções.

Ele introduz o conceito de rotação de forma muito breve, utilizando-se de apenas duas páginas. No nosso entendimento, este conceito é difícil para os alunos, portanto deveria ser mais explorado.

Em seguida apresenta obras de Escher afirmando que nelas a transformação de rotação se faz presente (figura 8). Observamos que na figura 8, na segunda obra têm-se o círculo limite baseado na Geometria Hiperbólica[41]. Acreditamos que o autor poderia ter se utilizado de outras obras de Escher para apresentar o conceito de rotação. O círculo limite é muito rico de outras ideias geométricas, e no nosso entendimento, esse exemplo pode confundir o aluno no conceito de rotação.

---

[39] *Patchwork (*do inglês *patch* que significa peça ou remendo e *work*, trabalho). A arte de unir pedacinhos de tecidos é considerada uma das primeiras manifestações artísticas femininas. Atualmente é encontrado em bolsas, roupas, colchas, etc.

[40] Nos apêndices apresentamos a sequência didática com as pavimentações regulares e semirregulares.

[41] Um modelo para representação da geometria Hiperbólica foi criado pelo matemático Henry Poincaré. Trata-se de um disco sem o círculo-fronteira onde as retas são arcos de círculos que encontram a fronteira perpendicularmente.

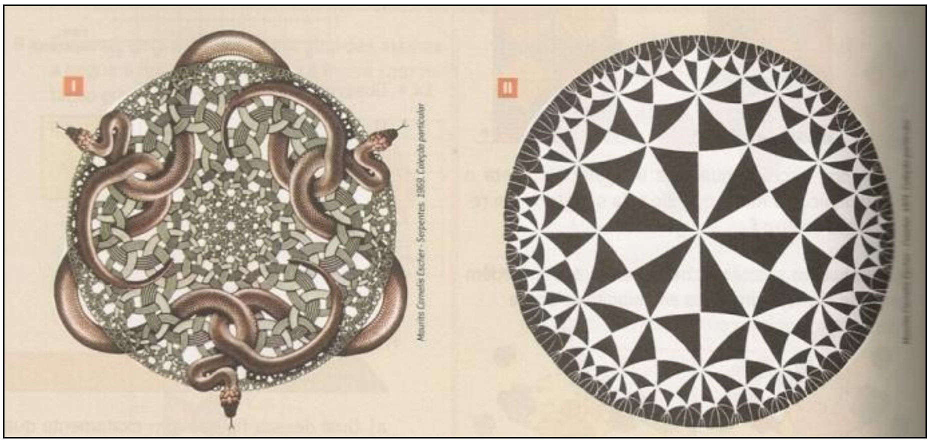


Figura 8 - Obras de Escher
Fonte: Coleção B, volume 7º ano, p.226

No volume do oitavo ano foi retomado o conceito de rotação com mais ênfase e em seguida foi explorado o conceito de translação. Na rotação, o autor procurou diversificar as atividades, utilizando construção de figuras sem a malha quadriculada e com a malha. Contextualizou utilizando exemplos de desenhos dos povos quiocos[42] (figura 9) e obras de Escher da Geometria Hiperbólica. Novamente o autor utiliza figuras que, no nosso entendimento, dificultam a compreensão do conceito de rotação.

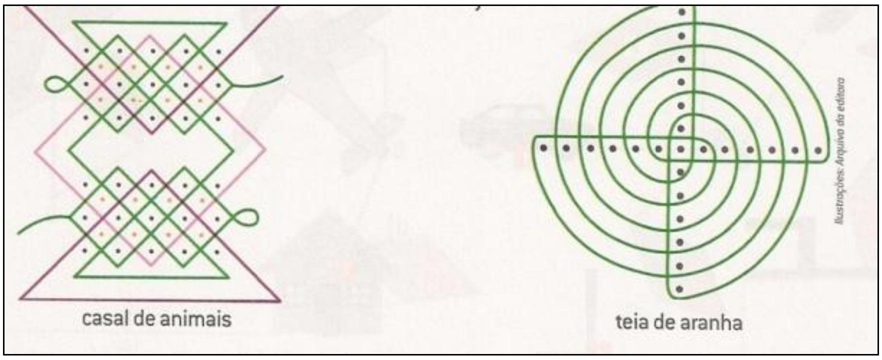


Figura 9 - A arte dos quiocos
Fonte: Coleção B, volume 8º ano, p.118

Para a abordagem sobre translação ele utiliza malhas quadriculadas, uma vez que, segundo o autor, estas, juntamente com a arte e o desenho, servem de apoio para a compreensão da translação.

[42] No nordeste da Angola, África, existe um povo chamado *quioco*. Esse povo tem a tradição de fazer desenhos na areia enquanto contam suas histórias, lendas e adivinhações. Esses desenhos são chamados de *sona*. (GERDES, 1990).

Encontramos no volume do nono ano, embora brevemente, o conceito de homotetia, no capítulo que trata da semelhança de figuras, quando o autor comenta que para confeccionar figuras semelhantes nós podemos utilizar esse tipo de transformação.

Coleção C

Na coleção C observamos que as autoras procuraram trabalhar a Matemática contextualizada, fazendo com que o aluno possa estabelecer conexões entre os diferentes temas matemáticos e também entre estes e as diversas áreas do conhecimento, bem como com situações do cotidiano.

A história da Matemática se faz presente nesta coleção, destacando-se as relações entre ela e as outras ciências. Por exemplo, nas artes, na cultura e na vida dos povos, as autoras relacionam os conhecimentos de Geometria da época nas construções de templos e pirâmides.

Em relação à Geometria, as autoras dão ênfase inicialmente a um tratamento exploratório e intuitivo, e vão gradativamente sistematizando os conceitos e propriedades, visando à formalização ao longo dos quatro volumes.

A partir do volume do sexto ano, as autoras introduzem imagens de pavimentações utilizadas em paredes, calçadas, pisos, obras de arte, etc., mostrando que a Geometria faz parte do cotidiano. Para iniciar o assunto de polígonos e simetria, elas se utilizam de uma imagem (figura 10) refletida sobre um espelho d'água. Partindo dessa imagem estabelecem a relação com reflexão em Geometria.

Figura 10 - Antiga casa do parlamento, em Camberra, Austrália
Fonte: Coleção C, volume 6º ano, p.146

No volume do sétimo ano as autoras iniciam o estudo da simetria de forma experimental utilizando dobraduras e recortes do tipo *kirigami*[43]. Estabelecem o eixo de simetria nas figuras, não se limitando ao eixo vertical. Apresentam uma obra de Echer, explicando que este artista conhecia as propriedades das figuras planas e das figuras no espaço, e que utilizando tais propriedades construía suas obras. Nesse volume as autoras abordam a ampliação, redução e escala, utilizando a malha quadriculada, e situações do cotidiano dos alunos de forma integrada com geografia e desenho.

Simetria, movimentos e padrões em Geometria, é o título com que as autoras iniciam o estudo das transformações geométricas no volume do oitavo ano. Iniciam com belas imagens da natureza e objetos criados pelo homem. Estabelecem uma discussão sobre "o movimento de figuras geométricas em torno de pontos e retas que gera propriedades importantes para o estudo dessas figuras e tem aplicações na vida prática" (MORI; ONAGA, 2009, p.123).

A partir de tais discussões as autoras introduzem o conceito de simetria axial por meio da construção de um *kirigami*. Procuram estabelecer no início o empírico e seguidamente vão formalizando os conceitos, como, por exemplo, a distância de um ponto a uma reta (figura 11), conceito fundamental não somente em Geometria, mas em muitas outras ciências e no desenvolvimento de tecnologia.

No livro elas afirmam que os triângulos ABC e PSR são simétricos em relação ao eixo r. A medida $\overline{AX}$ é menor que a medida de qualquer outro segmento de reta com uma das extremidades em A e a outra em um ponto da reta *r*. Observam que a distância do ponto *A* à reta *r* é igual a distância do ponto *P* à reta *r*. Os pontos *A* e *P* são simétricos em relação a *r*. Observamos que as autoras poderiam, já neste momento abordar o conceito de mediatriz, e mencionar que *r* é a mediatriz do segmento $\overline{\mathrm{AP}}$.

[43] Kirigami é uma palavra de origem japonesa que significa "cortar papel". Com uma sequência de dobraduras e recortes, são feitas figuras com eixos de simetria.

Figura 11 - A distância de um ponto a uma reta
Fonte: Coleção C, volume 8º ano, p.126

Mori e Onaga (2009) utilizam o desenho geométrico para construir figuras simétricas, além de sua contribuição na Geometria, ele é uma ferramenta importante para os profissionais que representam objetos, como plantas e projetos.

Seguidamente as autoras abordam o conceito de simetria central, ou seja, em relação a um ponto, utilizando-se do desenho geométrico.

Relacionam os movimentos em Geometria com a construção de padrões geométricos como, por exemplo, criação de mosaicos, imagens gráficas e arte indígena (figura 12).

Figura 12 - Padrões geométricos usados por várias tribos
Fonte: Coleção C, volume 8º ano, p.130

Também citam as gravuras de Escher, artista que surpreendeu os matemáticos com sua obra apoiada em conceitos geométricos, em especial na obra *Dia e Noite*[44] (Figura 13).

[44] Dia e Noite, 1938. Nessa obra os campos lavrados, com sua forma geométrica, elevam-se em direção ao céu e transformam-se, aos poucos, em pássaros brancos e em pássaros pretos. Eles voam para a direita, em direção à noite que recobre uma pequena aldeia à beira de um rio. Poderá vê-los sobrevoando uma paisagem iluminada de sol que é exatamente a imagem refletida da paisagem noturna.

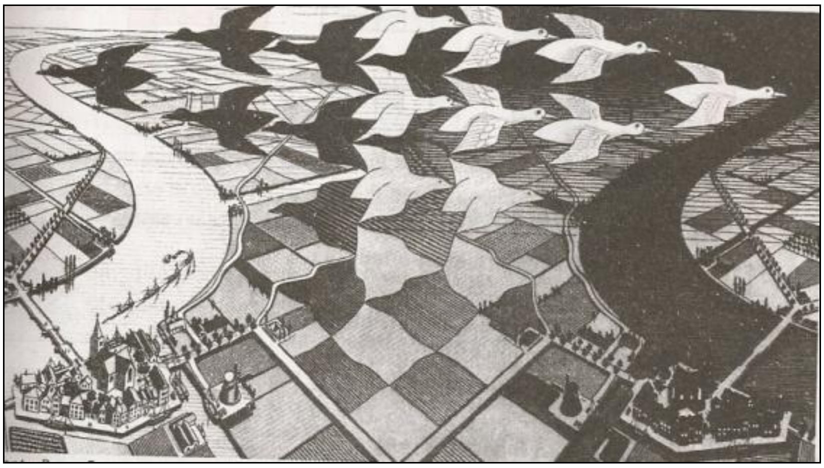


Figura 13 - Escher, Dia e Noite, 1938
Fonte: Coleção C, volume 8º ano, p.131

Mori e Onaga (2009) utilizaram a obra de Escher e os padrões geométricos para envolver os alunos em atividades que circulam entre arte, figuras geométricas e movimentos.

A partir desta obra e dos padrões geométricos, as autoras iniciam os conceitos referentes aos movimentos de reflexão e translação, usando a malha quadriculada, criando motivos para pavimentar o plano. Além disso, elas procuram sistematizar os conceitos e propriedades, formalizando-os (figura 14).

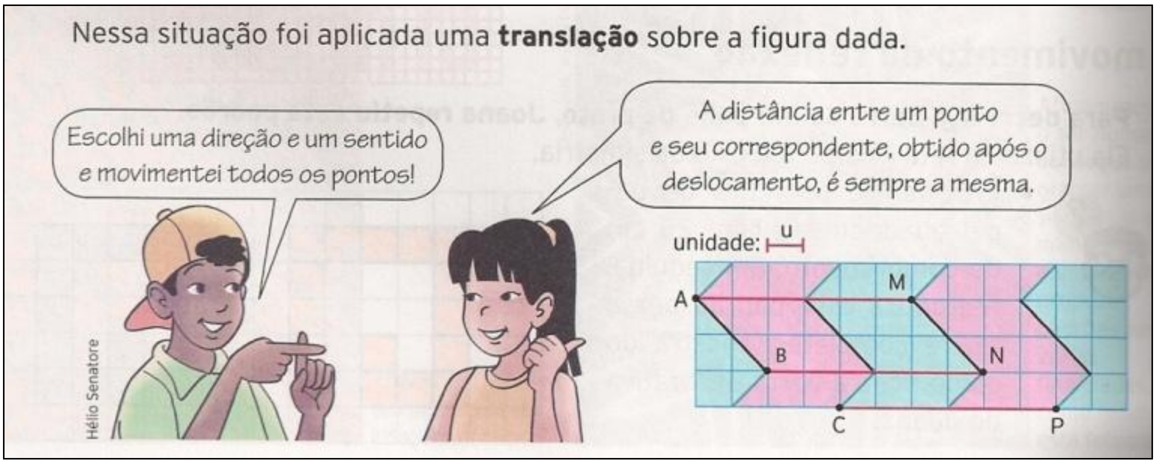


Figura 14 - Movimento de translação
Fonte: Coleção C, volume 8º, p.132

Logo em seguida à figura 14, as autoras afirmam:

- A e M são pontos correspondentes - medida $\overline{AM} = 6u$
- B e N são pontos correspondentes – medida $\overline{BN} = 6u$
- C e P são pontos correspondentes – medida $\overline{CP} = 6u$

Além disso, as retas $\overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{BN}$, $\overleftrightarrow{CP}$ são paralelas e têm o mesmo sentido escolhido para deslocar o desenho inicial.

O movimento de rotação é abordado logo em seguida, utilizando-se primeiramente do desenho geométrico e depois sistematizando o conceito. No nosso entendimento, esta é uma ótima forma para iniciar a construção dos conceitos das transformações geométricas pelos alunos, utilizando-se para isso, um *software* de geometria dinâmica.

Dando seguimento aos conceitos, as autoras trabalham com movimento e figuras geométricas produzindo arte, desta forma exploram de maneira informal o conceito de congruência de figuras geométricas. É uma atividade lúdica que desenvolve a criatividade e que poderá motivar os alunos, podendo ainda ser integrada com desenho geométrico e arte (figura 15).

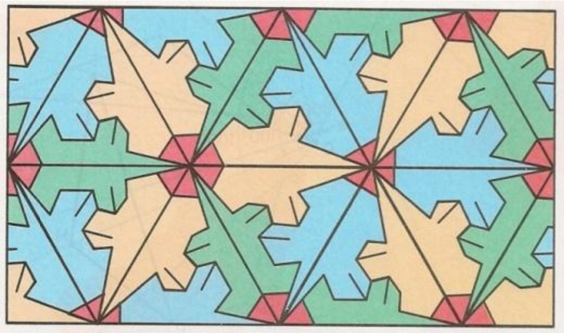


Figura 15 - Movimentos e figuras geométricas produzindo arte
Fonte: Coleção C, volume 8º, p.137

Ainda utilizando os conceitos de rotação, translação e reflexão, juntamente com o desenho geométrico (figura 16), as autoras os utilizam para trabalhar com movimentos e propriedades geométricas, e em seguida abordam o assunto de congruência de triângulos, agora formalmente.

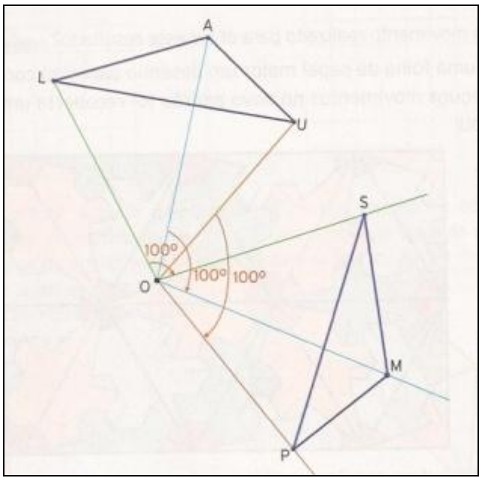


Figura 16 - Rotação
Fonte: Coleção C, volume 8º ano, p.138

No volume do 8º ano encontramos aplicações do conhecimento sobre padrões e movimentos geométricos em recobrimentos de superfícies planas. Os ladrilhamentos são trabalhados, discutindo sobre quais polígonos regulares podem ladrilhar uma superfície plana (figura 17).

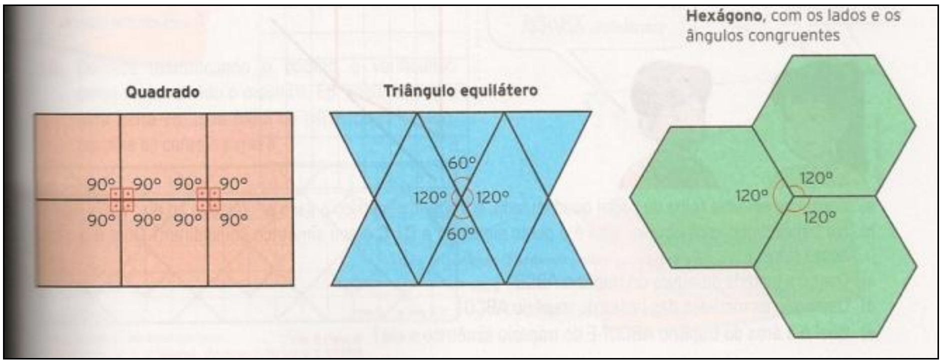


Figura 17 - Mosaicos regulares
Fonte: Coleção C, volume 8º ano, p.145

Para finalizar o capítulo, Mori e Onaga (2009) recorrem ao estudo das obras de Escher, explicando como o artista desenvolvia suas pinturas. Elas apresentam na figura 18 um quadrado como figura inicial para a confecção de um mosaico, aplicando os movimentos de translação.

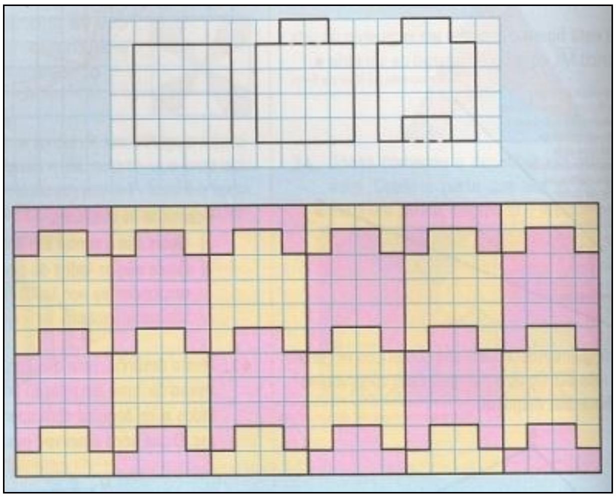


Figura 18 - Aplicação dos movimentos de translação para a confecção do mosaico.
Fonte: Coleção C, volume 8º ano, p.148

De acordo com todas as observações feitas nas três coleções podemos fazer algumas comparações entre elas. A análise feita aqui se refere à seleção de teoremas, propriedades e demonstrações, sem a preocupação de observar os exercícios e aplicações citadas pelos autores. Nós nos preocupamos sobre a forma com que os autores introduzem os conceitos das transformações geométricas e quais registros semióticos são utilizados. Observamos que as três coleções apresentam os diferentes registros semióticos: discursivo, algébrico e geométrico, utilizados na Geometria.

Primeiramente, na coleção A percebemos que os autores preocuparam-se em demonstrar formalmente os teoremas da Geometria Plana propostos para as séries finais do Ensino Fundamental. Eles constroem passo a passo, encaminhando ao aluno na construção dos conceitos. No entanto houve pouco estudo em relação às transformações geométricas, visto que este tema só foi abordado no final do volume do sétimo ano.

Na coleção B, houve preocupação do autor em relacionar os conceitos das transformações geométricas planas, complementando gradativamente em cada volume. Trabalhou os conceitos de forma espiral, contudo, os estes foram apresentados de uma forma intuitiva, sem fazer uma formalização. No nosso entendimento o autor deveria fazer essa formalização dos conceitos.

Na coleção C, as autoras apresentam todos os conceitos das transformações geométricas no plano, e a cada volume retomam os conceitos trabalhados anteriormente. Além disso, foram dando um tratamento exploratório e bastante intuitivo no início de cada conceito, e em seguida uma sistematização gradativa destes e de suas propriedades.

Não verificamos a menção de referências ao uso de *softwares* de geometria dinâmica para o ensino dos conceitos abordados nas coleções analisadas. No entanto, enfatizamos a importância destes recursos para tornar mais dinâmico e eficaz o estudo das transformações geométricas. Abordamos no quarto capítulo o potencial da tecnologia no ensino da Matemática, em particular da Geometria. No que segue apresentamos algumas dissertações realizadas sobre o tema.

3.3. ESTUDOS JÁ REALIZADOS

Após a definição do tema desta dissertação, fizemos um levantamento de estudos já realizados sobre o ensino das transformações geométricas no plano, bem como, da utilização dos ambientes de geometria dinâmica. Este levantamento foi feito nas bibliotecas digitais de universidades.

Na Biblioteca Virtual da UFRGS[45] encontramos duas dissertações realizadas no Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da UFRGS – os trabalhos de Stormowski (2008) e Rodrigues (2012) sobre as transformações geométricas.

Stormowski (2008) elaborou, implementou e fez reflexões sobre uma sequência didática para o estudo de matrizes a partir de transformações geométricas no Ensino Médio. A sequência didática aplicada procurou propiciar ao aluno um estudo que justificasse as definições das operações entre matrizes e suas respectivas propriedades. A partir da observação e análise de algumas transformações geométricas os alunos refizeram o processo histórico da definição e obtenção destes conceitos.

O estudo de Rodrigues (2012) teve como objetivo examinar as possibilidades e potencialidades do ensino das transformações geométricas no quinto ano do Ensino Fundamental, que segundo a autora é um assunto pouco abordado nos currículos deste nível de ensino. Da análise da aplicação dessa proposta, foi produzido um livro paradidático intitulado *Matemática das Transformações.*

Na UNIFRA[46] (Centro Universitário Franciscano) destacamos o trabalho de Rossi (2009). A realização deste estudo teve como propósito fazer um estudo em relação ao ensino e aprendizagem de polígonos e as transformações geométricas no plano. O objetivo de seu trabalho foi analisar as possibilidades de construção e exploração das propriedades geométricas dos polígonos, bem como, das transformações geométricas, tendo como inspiração o vídeo que trata da arte nos frisos e ladrilhos das Igrejas da Quarta Colônia de Imigração Italiana do Rio Grande do Sul e tendo como recurso tecnológico o software Cabri-Géomètre II. De acordo com Rossi (2009) este trabalho favoreceu a aprendizagem dos alunos. A utilização do ambiente de geometria dinâmica criou um ambiente interativo de discussão e argumentação, possibilitando superar as dificuldades nos conceitos geométricos que foram trabalhados.

Na PUC–SP (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo)[47] encontramos os estudos de Eberson (2004), Araújo (2010), Santos (2010) e Evangelista (2011).

A relação entre fractais e transformações geométricas é realizada no trabalho de Eberson (2004). O autor integra diversos *softwares* para a construção de fractais. As estruturas desses *softwares* possuem ferramentas baseadas em transformações geométricas no plano.

---

[45] www.ufrgs.br/ufrgs/bibliotecas/apresentacao.

[46] www.unifra.br/biblioteca/

[47] www.biblio.pucsp.br

A sequência didática proposta por Araújo (2010) utilizou o ponto de vista dos lugares geométricos. Este estudo concluiu que a intervenção mediada pelo *software* GeoGebra auxilia os estudantes (alunos do 9º do Ensino Fundamental e do 2º ano do Ensino Médio) na superação dos problemas encontrados quanto a identificação dos lugares geométricos que foram propostos.

Santos (2010) teve como o objeto de pesquisa verificar quais as possibilidades e dificuldades de professores de Matemática ao utilizar o GeoGebra em atividades que envolvessem o Teorema de Tales. A autora afirmou que o uso do GeoGebra permitiu evidenciar algumas dificuldades, bem como possibilidades de planejamento e composição de estratégias pedagógicas por parte dos professores participantes da experiência. O estudo concluiu que os professores com maior segurança nos conceitos matemáticos tendem a explorar melhor as ferramentas do *software*.

O estudo de Evangelista (2011) trata de uma investigação sobre transformações isométricas no GeoGebra, voltada para alunos do Ensino Médio. Foi utilizada a Etnomatemática como elemento motivador – a geometria presente na cultura africana. O autor concluiu que a sequência de atividades implementada propiciou uma experiência de aprendizagem que, além de motivar com os desenhos da Geometria Sona – desenhos produzidos no nordeste da Angola - permitiu gerar um produto para as novas pesquisas em transformações isométricas.

Fizemos aqui um levantamento de alguns estudos realizados sobre as transformações geométricas no plano com a utilização de ambientes de geometria dinâmica, nos quais os autores destacam o potencial destes ambientes. Vimos que as pesquisas realizadas tomam como ponto de partida que a geometria das transformações através da geometria dinâmica é um assunto que pode ser inserido na escola básica. É desta forma que também se insere a nossa proposta, a ser detalhada no capítulo 5.

4. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E TECNOLOGIA

Neste capítulo abordamos o potencial da tecnologia no ensino da Matemática, em particular da Geometria. Nele destacamos a utilização dos ambientes de geometria dinâmica e apresentamos o *software* GeoGebra com seus diferentes registros semióticos, por meio de construções básicas e do *menu* que trata das transformações geométricas no plano. No capítulo também apresentamos uma coletânea de vídeos tratando de transformações geométricas, resultado de pesquisa feita sobre o vídeo como um recurso que pode motivar o estudo deste tema.

4.1. O POTENCIAL DA TECNOLOGIA DIGITAL NA EDUCAÇÃO

Para garantir a sua sobrevivência o homem iniciou suas invenções. Invenções estas que ao longo do tempo foram se aperfeiçoando e ganhando novas funções. Algumas servindo para defesa, outras servindo para captura de animais e para o cultivo de plantas, todas elas tendo como função de melhorar a qualidade de vida e garantir a sobrevivência. Com a evolução da espécie humana, estas invenções foram se aperfeiçoando e dando ao homem o poder de domesticar outras espécies, criar meios de transporte, remédios, construir moradias, ampliando, assim, seus domínios sobre o mundo. E é neste sentido que Kenski (2007, p.15) afirma: “Os conhecimentos que o homem vem adquirindo ao longo do tempo, quando são postos em prática, tem gerado diferentes equipamentos, recursos, produtos, processos, ferramentas, enfim, a tecnologia.”

Juntamente com o desenvolvimento do homem, houve o desenvolvimento da tecnologia, que hoje está por toda parte. Com estes avanços houve a invenção dos computadores, aparelhos multimídias capazes de incorporar e combinar todas as formas de mídias (textos, imagens, animação, som).

> Gravei um padrão de formas geométricas em uma pedra. Aos olhos de um leigo, as formas parecem misteriosas e complexas, mas eu sei que, quando dispostas de maneira correta, elas darão à pedra um poder especial, capacitando-a a reagir a encantamentos feitos em um língua que nenhum ser humano jamais falou. Farei perguntas à pedra usando essa linguagem, e ela responderá mostrando-me uma visão: um mundo criado pela minha magia, um mundo imaginado dentro do padrão gravado na pedra. (Hillis, 2000, p.9).

De acordo com Hillis (2000), um computador pode reunir e manipular todas as outras mídias, mas o verdadeiro poder do computador é que ele é capaz de manipular não apenas a expressão das ideias, mas também as ideias em si. O mais impressionante para esse autor não é que o computador possa armazenar o conteúdo de todos os livros de uma biblioteca, mas que ele seja capaz de apontar relações entre os conceitos descritos nestes livros.

> O computador não é apenas uma calculadora, uma câmera ou um pincel avançados; na verdade é um aparelho que acelera e amplia nossos processos de pensamento. É uma máquina de imaginação, que começa com as ideias que colocamos nela e as leva mais longe do que jamais seríamos capazes se o fizéssemos por conta própria. (Hillis, 2000, p.12)

Muitos autores apontam o potencial da Tecnologia Digital na Educação Matemática (KENSKI, 2007; BALACHEFF, 1994; BALACHEFF e KAPUT, 1996; BORBA e PENTEADO, 2007; GRAVINA, 2001; BORBA e VILLAREAL, 2005, NOSS E HOYLES, 2009).

Balacheff e Kaput (1996) enfatizam a significativa necessidade de desenvolvimento de pesquisas sobre a utilização de tecnologias no ensino da Matemática. Borba e Villareal (2005) apresentam uma construção teórica chamada *seres-humanos-com-meios*, na qual eles discutem como o conhecimento matemático é o resultado de um coletivo pensante de seres humanos interagindo com meios digitais. Estes autores pontuam que os meios empregados para comunicar, representar e produzir ideias matemáticas condicionam o tipo de Matemática que é construída e o tipo de pensamento que é desenvolvido nesse processo.

Noss e Hoyles (2009) apontam mudanças provocadas pelo uso da Tecnologia Informática e a necessidade de integração dessas ferramentas que proporcionam muitas vantagens pedagógicas, isto é, situações que não seriam possíveis de realizar em outros ambientes.

Para Gravina (2001, p.36): “O suporte dos ambientes informatizados à pesquisa em Matemática favorece a exploração, a elaboração de conjecturas e o refinamento destas, e a gradativa construção de uma teoria Matemática.”

Segundo Kenski (2007) a utilização da Tecnologia Informática em ambientes educacionais proporciona diversas possibilidades de ensino e aprendizagem, pois promove desafios para a atividade cognitiva, afetiva e também social dos professores e alunos em todos os níveis de ensino. A Educação é um poderoso mecanismo articulador do conhecimento, da tecnologia e do poder. A escola exerce o seu poder em relação aos conhecimentos adquiridos pelo aluno, e a tecnologia serve como um instrumento mediador no relacionamento entre professor, aluno e conceitos.

> As novas tecnologias de comunicação (TICs), sobretudo a televisão e o computador, movimentaram a educação e provocaram novas mediações entre a abordagem do professor, a compreensão do aluno e o conteúdo veiculado. A imagem, o som e o movimento oferecem informações mais realistas em relação ao que está sendo ensinado. Quando bem utilizadas provocam a alteração dos comportamentos de

> professores e alunos, levando-os ao melhor conhecimento e maior aprofundamento co conteúdo estudado. (KENSKI, 2007, p, 45)

Balacheff (1994) reconhece duas importantes possibilidades da Tecnologia Informática para o ensino:

- Por um lado, a Tecnologia Informática oferece a possibilidade de abordar problemas e experimentar situações que sem ela não seriam acessíveis para o ensino e aprendizagem.
- Por outro lado, a tecnologia abre a possibilidade de adotar um enfoque experimental da Matemática que muda a natureza da sua aprendizagem.

O autor faz uma reflexão sobre o uso dos ambientes informatizados no ensino de Matemática, salientando que estes modificam o tipo de Matemática que se pode ensinar e as estratégias didáticas, portanto, o conhecimento profissional do professor também deve modificar-se. E Oliveira (2009) afirma que o uso das TICs pode trazer muitas mudanças positivas para o ensino e a aprendizagem, porém, o sucesso pedagógico dependerá das escolhas feitas pelo professor, uma vez que não é a tecnologia que sozinha irá melhorar esse processo, mas a possibilidade de criar intervenções críticas, de acordo com o conteúdo matemático a ser abordado e fazer desta tecnologia um elemento mediador. É preciso considerar qual é o objetivo da atividade que se quer realizar e saber se ela pode ser desenvolvida com maior qualidade pelo uso, por exemplo, de um *software* específico. Não significa que o professor deve abandonar as outras mídias, mas ele precisa refletir sobre sua adequação.

Borba e Penteado (2007) enfatizam que as inovações educacionais, em sua grande maioria, pressupõem mudança na prática docente, não sendo uma exigência exclusiva daquelas que envolvem o uso de Tecnologia Informática. A docência, independentemente do uso de TICs, é uma profissão complexa. Nela estão envolvidas as propostas pedagógicas, os recursos técnicos, as peculiaridades da disciplina, as leis que estruturam o funcionamento da escola, os alunos, seus pais, a direção, a supervisão, os educadores de professores, os colegas professores, os pesquisadores, entre outros. O professor é desafiado constantemente a rever e ampliar seu conhecimento. E quanto mais ele se insere no mundo da informática, mais corre o risco de se deparar com uma situação matemática que não lhe é familiar.

É necessário, portanto, desenvolver propostas de atualização e aperfeiçoamento docente, de modo que o professor acompanhe os avanços tecnológicos. Em especial, no que se refere à Geometria, pois segundo Pavanello (1999), o ensino da Geometria foi desprezado por muito tempo nos currículos escolares e nos programas de formação docente, privilegiando outros ramos da Matemática. Lorenzatto (1995) aponta duas evidências para a omissão dos professores no ensino da Geometria: falta de conhecimentos geométricos e a exagerada importância de seguir somente as atividades contempladas no livro didático. A evolução que ocorreu nas últimas décadas no desenvolvimento de tecnologias de informação não pode ser ignorada no ensino de Geometria.

Muitas pesquisas têm sido feitas nesta área, das quais citamos as de Laborde (1996) e Gravina (2001), em especial com a utilização de ambientes de "geometria dinâmica", mas sabemos que a utilização destes *softwares* não está instalada em nossas salas de aula. É nesta direção que esta dissertação foi desenvolvida, ela apresenta uma proposta de formação de professores para o uso do GeoGebra. Esta formação proporciona uma reflexão sobre o ensino da Geometria e a atuação docente, e também sobre os aspectos relativos à construção do conhecimento pelo aluno, quando se faz o uso de ambientes de geometria dinâmica.

Gravina (2001) define os ambientes de geometria dinâmica como sendo ambientes informáticos que possuem ferramentas do tipo régua e compasso virtuais, que permitem a construção de objetos geométricos segundo propriedades que os definem. "São micromundos que concretizam um domínio teórico, no caso a Geometria Euclidiana, pela construção de seus objetos e de representações que podem ser manipuladas diretamente na tela do computador." (GRAVINA, 2001, p.82).

Segundo Lopez (2001), os ambientes de geometria dinâmica se caracterizam por possuírem um visor gráfico sobre o qual o usuário pode desenhar objetos geométricos primitivos (pontos, retas, segmentos, etc.) e registrar relações geométricas entre eles (perpendicularismo, paralelismo, etc.) a partir de um repertório pré-fixado. Estas ações produzem construções geométricas mais ou menos complexas em que alguns objetos podem ser selecionados pelo usuário e "arrastados" no visor, mantendo as relações geométricas estabelecidas na construção inicial. Marrades e Gutierrez (2000) enfatizam que o "modo de arraste" [48] é uma das características mais importantes desses ambientes. Este recurso é muito mais poderoso do que o lápis e papel usado no ensino tradicional, pois o "modo de arraste" permite ao aluno ver em poucos segundos, muitos desenhos associados a um conceito. Um ambiente de geometria dinâmica, por meio do movimento aplicado aos objetos que estão na tela do computador, proporciona um imediato *feedback* para o aluno. De acordo com Mariotti

[48] No documento em inglês original se denomina "dragging" a possibilidade de arrastar um objeto a partir do deslocamento de alguns elementos.

(2009), o movimento constitui, seguramente, a principal característica de um “DGE” [49]. Sobre a estabilidade sob ação de movimento, Gravina (2001, p.83) esclarece:

> Estes programas oferecem o recurso de “estabilidade sob a ação de movimento”: feita uma construção, mediante deslocamentos (*dragging*) aplicados aos elementos iniciais determinadores do objeto geométrico, o desenho na tela do computador – instância de representação do componente figural – transforma-se, mas preserva nas novas instâncias as relações geométricas impostas inicialmente à construção, bem como as relações delas decorrentes.

Laborde (1996) destaca a potencialidade do uso reflexivo desta ferramenta didática como, por exemplo: a motivação que gera nos alunos; a possibilidade concreta de enriquecer a sua formação a partir do tratamento de diversas dificuldades usuais na aprendizagem de conceitos geométricos; a possibilidade de estabelecer conexões entre diferentes ramos da Matemática.

Balacheff (1994) afirma a respeito dos ambientes de geometria dinâmica que no uso destes é importante reconhecer que os alunos constroem conhecimentos a partir da interação com o ambiente, pois as características do comportamento do software, incluindo as não intencionais, transformar-se-ão, provavelmente, em características específicas do significado construído pelos estudantes. Afirma, por exemplo, que o desenho de um segmento no monitor se caracteriza por ter os extremos destacados, o que conduziria a pensar que um segmento é formado por uma linha e dois extremos. Gravina (2001) afirma que os ambientes de geometria dinâmica incentivam o espírito de investigação matemática, pois sua face interativa, que permite a exploração e a experimentação, também disponibiliza os “experimentos do pensamento”. Quando os alunos manipulam os objetos diretamente na tela do computador e obtêm uma resposta imediata, fazem questionamentos a respeito de suas ações, elaboram conjecturas, testam utilizando a forma empírica. Segundo a autora, é a partir daí que começa a construção de demonstrações.

De acordo com Duval (2011) é importante situar a contribuição que o computador com seus *softwares* proporcionam em relação aos modos de produção de representações semióticas. Afirma que os computadores não constituem um novo registro de representação, pois as representações que eles exibem são as mesmas que aquelas que são produzidas graficamente no papel para uma apreensão visual. Para Duval (2011), ver uma figura geométrica no monitor ou vê-la no papel exige que nosso olhar faça a mesma desconstrução dimensional, exige que antecipemos as mesmas operações merológicas.

> No entanto, eles constituem um modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração dos tratamentos. Eles exibem no monitor tão rapidamente quanto à produção mental, mas com uma potência de tratamento

[49] Sigla do inglês *Dynamic geometry environment*, ambiente de geometria dinâmica.

> ilimitada em comparação com as possibilidades da modalidade gráfico-visual. Obtemos, imediatamente, muito mais que tudo o que poderíamos obter à mão livre após, talvez, vários dias de escritas e cálculos ou construção de figuras. (DUVAL, 2011, p.137)

Mas o que mais Duval (2011, p. 137) enfatiza ser espetacular, e uma novidade fenomenológica, é o fato de que as "(...) representações semióticas não discursivas tornam-se manipuláveis como objetos reais. Podemos deslocá-las, fazê-las rodar, ou estendê-las a partir de um ponto." O autor considera esse aspecto dinâmico apenas uma consequência da potência ilimitada no tratamento, ou seja, fazer transformações dentro de um mesmo registro. Com o dinamismo dos desenhos na tela, o tratamento de representações dentro do registro figural é ilimitado. Por exemplo, quando se manipula um triângulo, infinitas são as representações que se obtém. Além disso, esses *softwares* permitem desempenhar uma função que nenhum dos outros modos consegue, ou seja, fazer simulações.

Duval (2011) faz uma análise das tarefas cognitivas requeridas na utilização de cada *software*, em função das ações que seu *menu* autoriza ou exclui. Apresentamos no quadro 2 a análise destas tarefas.

Consoante Duval (2011), estamos ainda na fase entusiasta da inovação, todavia não podemos esperar milagres pedagógicos ou didáticos com a introdução do computador na sala de aula. A questão fundamental para tudo o que compete à formação inicial ou continuada, refere-se ao grau da atividade cognitiva que a utilização de um computador solicita da parte de um indivíduo que não é especialista.

Menu de comando	Ação	Atividade cognitiva mobilizada
Uma lista de termos designando os objetos matemáticos e as operações matemáticas ou não.	Escolher um termo para uma instrução ou compor uma sequência de várias instruções.	Conhecimento dos termos matemáticos e de composição da figura esperada em função da escolha dos termos do menu
Uma tabela de ícones	Apoiar sobre o ícone	Reconhecimento do ícone que codifica a instrução correspondente ao pedido.
O *mouse* ou o *tablet*	Deslocar manualmente o *mouse*	Coordenação do gesto e da visão para manipular a figura obtida

Quadro 2 - Análise das tarefas cognitivas requeridas para a utilização de um computador
Fonte: Duval, 2011, p.138

4.2. AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA: O GEOGEBRA

Para o aprendizado de Geometria existem diversos tipos de softwares que permitem manipular objetos com régua e compasso virtuais. Eles são conhecidos como ambientes de geometria dinâmica, e assim já foram referidos anteriormente, por terem a característica de manter, sob a ação do movimento, as relações geométricas impostas à construção. Dentre eles destacamos o *software* GeoGebra[50], e é nele que vamos nos concentrar, por ser um *software* gratuito, de livre acesso, de fácil utilização e instalação. No que segue fazemos uma apresentação do GeoGebra, por meio de construções e do *menu* que trata das transformações geométricas.

No GeoGebra temos uma barra de ferramentas, (figura 19), por meio das quais executamos com o *mouse* as construções na área de trabalho. Toda construção feita na área de trabalho tem na janela de álgebra as equações e as coordenadas de pontos correspondentes aos diferentes elementos geométricos (retas, círculos, etc.). Na parte inferior da tela temos o campo de entrada que é utilizado para a escrita de coordenadas de pontos, de equações e funções. Também podemos utilizar comandos tais como, ponto e vetor: por exemplo, inserimos as coordenadas do ponto A (2,8) e B (7,6), em seguida entramos com o comando vetor [A, B], estes serão mostrados imediatamente depois que for pressionada a tecla *enter*.

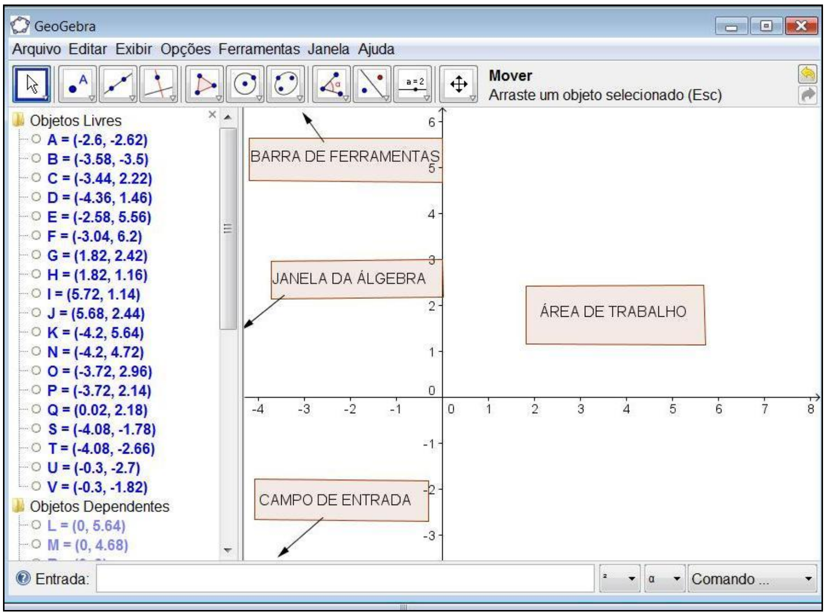


Figura 19 - *Interface* do GeoGebra

---

[50] www.geogebra.org , neste site, que pode ser acessado em diversos idiomas, encontramos mais informações e a mais recente versão do *software* livre para *download*. Este *software* possibilita criar facilmente apresentações dinâmicas que podem ser utilizadas em qualquer navegador de internet.

O GeoGebra combina a Álgebra e a Geometria com mesmo grau de importância, pois disponibiliza simultaneamente janelas para trabalhar nestas duas áreas. Desta forma ele apresenta diferentes tipos de registros semióticos: o algébrico, o geométrico e o discursivo (língua natural de uso especializado). Por exemplo, conforme ilustra a figura 20, ao colocarmos no campo de entrada a equação da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ temos o registro algébrico; quando obtemos na área de trabalho a correspondente circunferência temos o registro geométrico; e ao escolher na barra de ferramentas *círculo dados centro e um dos seus pontos* estamos trabalhando com o registro discursivo. Essas ações feitas no *software* possibilitam ao aluno trabalhar com diferentes registros semióticos de um mesmo objeto geométrico, que nesse caso é a circunferência[51]. É a possibilidade de estabelecer relações simultâneas entre diferentes registros, o algébrico, o geométrico e o discursivo.

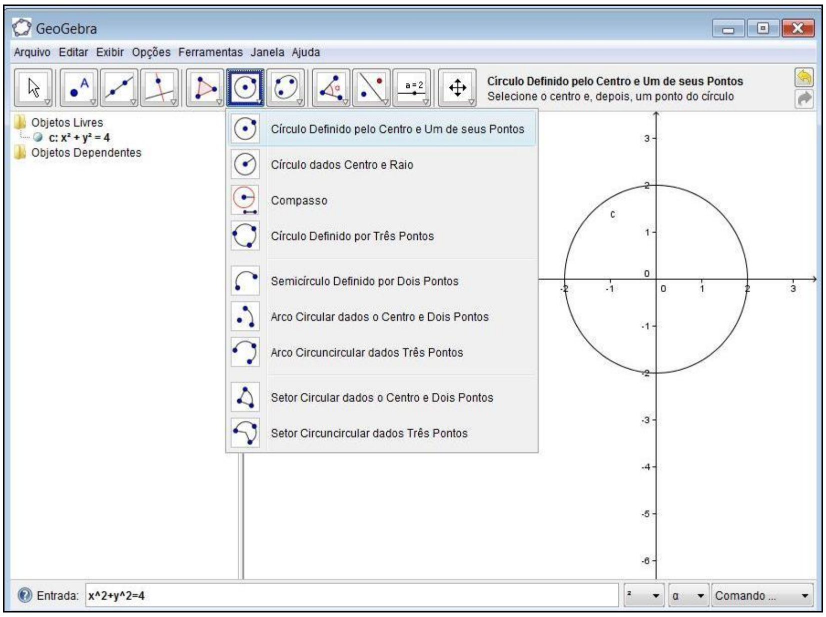


Figura 20 - Diferentes registros de representação da circunferência

No *menu exibir* do GeoGebra encontramos o *protocolo de construção* (registro discursivo) que nos permite acompanhar todo o processo de construção de um objeto geométrico (registro geométrico) (figura 21). Aqui enfatizamos a importância da mobilização de dois registros, no caso da Geometria, a linguagem e o desenho. E também a mobilização do raciocínio do tipo apreensão seqüencial, na construção do quadrado da figura 21. Estes são conceitos da teoria de Duval (2010) que foram discutidos no capítulo 2.

[51] Cabe ao professor estabelecer a diferença entre círculo e circunferência.

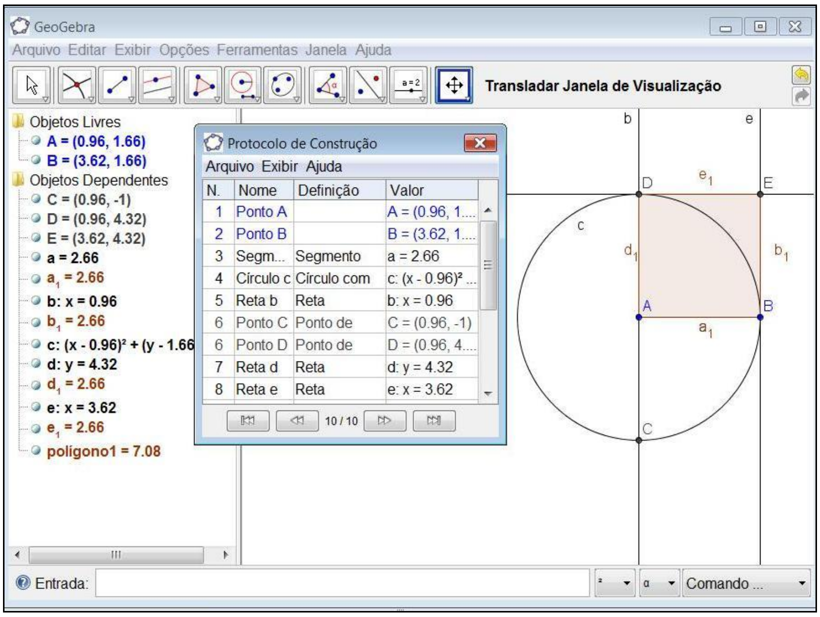
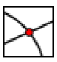


Figura 21 - Construção do quadrado

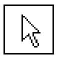
Além de permitir mobilizar diferentes tipos de registros, o GeoGebra proporciona a visualização, a construção e a argumentação, ou seja, as três formas de processo cognitivo[52] discutidas por Duval (2010).

De maneira muito acessível nós podemos fazer construções como pontos, segmentos, retas, vetores, figuras geométricas usando diretamente as ferramentas do GeoGebra ou, a partir de algumas ferramentas básicas, nós podemos construir os conceitos básicos da Geometria, como, por exemplo, uma reta perpendicular. No que segue apresentamos algumas destas construções, exibindo alguns ícones das ferramentas utilizadas.

O *software* possui as ferramentas  *reta perpendicular* e  *reta paralela* que nos permitem traçar por um ponto P uma reta perpendicular ou uma reta paralela a uma reta dada; porém, iremos construí-las utilizando círculos e retas.

Para traçar por um ponto P uma perpendicular a uma reta *r*, construímos um círculo *c* de centro P cortando a reta r nos pontos A e B. Em seguida, com a ferramenta *compasso*, construímos os círculos *e* e *d*, com a mesma medida do raio do círculo *c* e com centros em A e B, respectivamente. Obtemos o ponto Q, a segunda interseção dos dois círculos, utilizando a ferramenta  *interseção de dois objetos*. A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular ao segmento de reta $\overline{AB}$, pois $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$ e $\overline{QA} \equiv \overline{QB}$. Assim, a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é mediatriz de $\overline{AB}$ e, portanto,

[52] Conceitos abordados no capítulo 2, p.27.

perpendicular a $\overline{AB}$. Na figura 22 apresentamos esta construção. Observamos que, no GeoGebra, quando utilizamos a ferramenta  *mover* nos pontos azuis, os objetos construídos mantêm as propriedades e isso ilustra o entendimento que devemos ter da geometria dinâmica, já discutido anteriormente.

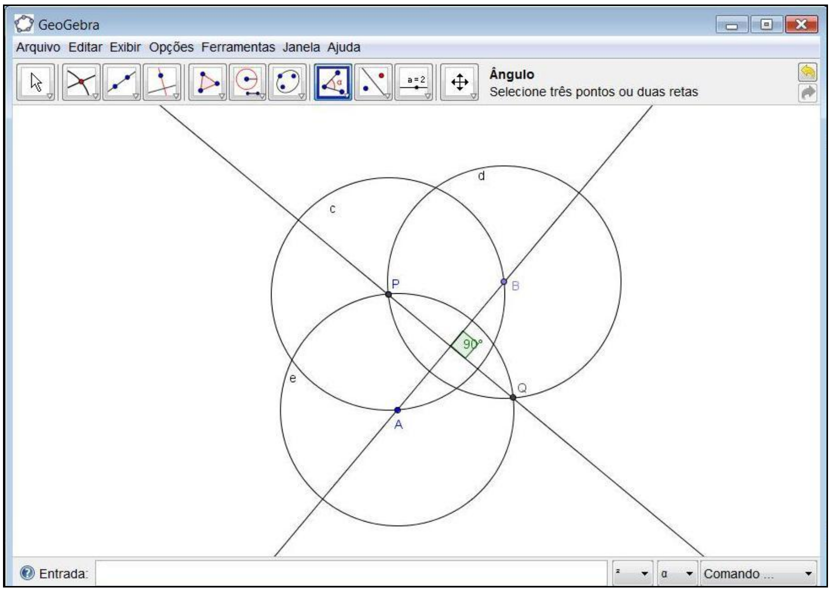


Figura 22 - Traçando por P uma perpendicular a r

Para traçar por um ponto P uma paralela a uma reta *r*, podemos proceder da seguinte forma no GeoGebra. Construímos um círculo *c* com raio $\overline{PA}$, com centro em P passando pelo ponto A na reta r (A é ponto de interseção de *c* e *r*). Em seguida, com a ferramenta *compasso* construímos outro círculo *d* com a mesma medida do raio de *c*, com centro em A, passando pelo ponto C (C é ponto de interseção de *d* e *r*). Novamente utilizamos a ferramenta *compasso* construímos o círculo *e*, com a mesma medida do raio de *c*, com centro em C. Observamos que os círculos *c* e *e*, possuem o ponto D como ponto de interseção. Traçamos agora a reta $\overleftrightarrow{PD}$ e verificamos que essa reta é paralela à reta *r*, pois PACD é losango, e, portanto, seus lados $\overline{PD}$ e $\overline{AC}$ são paralelos (figura 23). Submetendo os objetos construídos sob a ação da ferramenta *mover* sobre os pontos azuis, percebemos que as propriedades dos objetos permanecem as mesmas da construção inicial, constatando-se nessa construção o que Gravina (2001, p.83) afirma sobre os ambientes de geometria dinâmica: eles oferecem um poderoso recurso de “estabilidade sob ação de movimentos”.

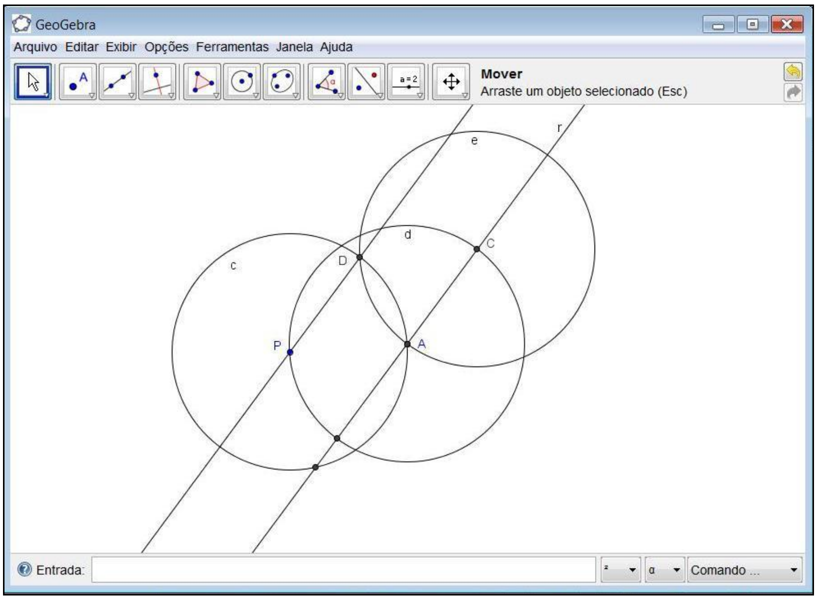
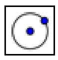
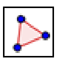


Figura 23 - Traçando por P uma paralela a reta *r*

O GeoGebra possui uma ferramenta *polígono regular* que possibilita a construção do quadrado diretamente no programa; todavia, é importante construir o quadrado a partir de suas propriedades, fazendo com que o aluno mobilize dois registros, a linguagem e o desenho. Além disso, este *sofware* permite verificar a diferença entre desenho e figura[53], conforme Laborde (1996) e Gravina (2001).

Apresentamos a seguir o roteiro para a construção do quadrado (figura 21) seguindo as propriedades da figura e aqui utilizamos as formas de apreensão em Geometria: sequencial, perceptiva e discursiva[54], conforme Duval (apud ALMOULOUD, 2010).

Para a construção do quadrado, inicialmente traçamos um segmento AB, utilizando a ferramenta *segmento definido por dois pontos*. Em seguida construímos um círculo *c*  com centro em A passando por B, e uma reta *b* perpendicular ao segmento AB passando por A. Com a ferramenta *interseção de dois objetos*, obtemos os pontos C e D de interseção do círculo com a reta *b*. Traçamos uma reta *d* passando por D paralela ao segmento AB, e uma reta *e* passando por B paralela a reta *b*. Obtemos o ponto de interseção das retas *e* e *d*. Para finalizar, utilizamos a ferramenta  *polígono* para obter o quadrado ABED. A partir da construção do quadrado podemos utilizá-lo como uma peça básica para a construção de um mosaico (figura 24).

[53] Os conceitos de desenho e figura foram abordados no capítulo 2, p.29-30.
[54] Foram apresentadas no capítulo 2, p.28.

Na figura 24 apresentamos a construção inicial da peça básica de um mosaico utilizando as ferramentas *ponto médio*, *reta paralela*, *reta perpendicular*, *círculo*, *interseção de dois objetos* e *arco circular definido por três pontos.*

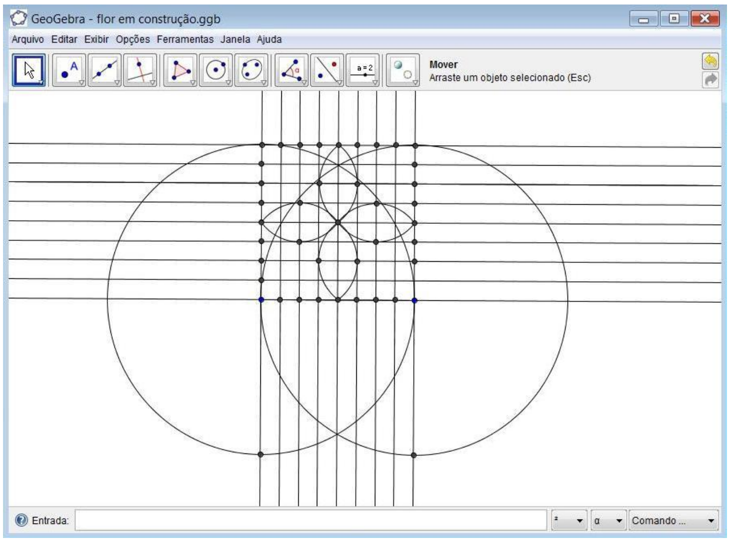


Figura 24 - Peça inicial de um mosaico

O GeoGebra possibilita esconder ou exibir objetos que servem de suporte na construção do mosaico, como, por exemplo, retas, pontos e círculos (figura 24). No *menu editar*, *propriedades* (figura 25) o *software* permite a escolha de cores para os objetos construídos, isso sendo importante na arte dos mosaicos.

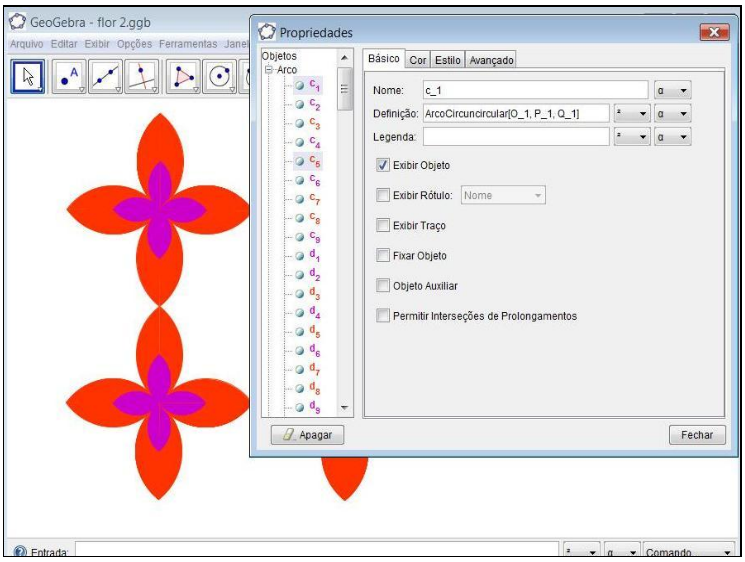


Figura 25 - Configurações de objetos geométricos

Nesta seção, apresentamos alguns conceitos básicos da geometria plana construídos com a régua e o compasso virtuais do GeoGebra a partir de um roteiro. No apêndice E trazemos as construções da mediatriz de um segmento e da bissetriz de um ângulo.

4.3. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E GEOMETRIA DINÂMICA

Nesta seção, tratamos do *menu* das transformações geométricas do GeoGebra e nos concentramos na translação, reflexão e rotação. Apresentamos suas definições e algumas propriedades sem, no entanto, demonstrá-las.

As transformações geométricas são funções que associam a cada ponto do plano, um outro ponto também do plano, obedecendo a certas regras.

> Uma *transformação* T no plano Π é uma função T: Π→Π que associa a cada ponto A do plano um outro ponto A′ = T(A) do plano chamado *imagem* de A por T. Se F é uma *figura* (portanto um conjunto de pontos de Π) definiremos F′ = T(F) como o conjunto das imagens dos pontos de F. (WAGNER, 2007, p.70).

As transformações que utilizamos nesta dissertação são todas *bijetivas*, isto é, são transformações em que pontos diferentes possuem sempre imagens diferentes e que cada ponto do plano é imagem de um outro ponto deste plano.

> Uma transformação bijetiva T: Π→Π possui uma inversa T^{-1}: Π→Π onde para todo ponto A′ de Π, T^{-1}(A′) é o único ponto A do plano Π tal que T(A)=A′. A transformação identidade Id: Π→Π é definida por Id(A)= A para todo A do plano Π. Finalmente, dadas duas transformações T_1 e T_2 no plano, definimos a composta $T_2 \circ T_1$: Π→Π como transformação que a cada ponto A do plano Π, associa o ponto A′= $(T_2 \circ T_1)(A) = T_2(T_1(A)$. Em particular, para qualquer transformação bijetiva T, temos $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = Id$. (WAGNER, 2007, p.70).

No que segue fazemos um estudo das *isometrias,* isto é, transformações que preservam distâncias. Uma transformação T: Π→ Π′ é uma *isometria* quando d(T(A), T(B)) = d(A, B), isto é, quando a distância entre os pontos T(A) e T(B) é igual à distância entre os pontos A e B, para quaisquer pontos A e B do plano Π. No livro de Lima (2007, p.13-14) temos enunciadas e demonstradas as seguintes propriedades:

> 1) Toda isometria T: Π→ Π′ transforma retas em retas.
>
> 2) Toda isometria T: Π→ Π′ transforma reta perpendiculares em retas perpendiculares.
>
> 3) Toda isometria T: Π→ Π′ é uma bijeção, cuja inversa T^{-1}: Π′→ Π é ainda uma isometria.

4) Toda isometria T: Π→ Π′ transforma um ângulo em outro ângulo de mesma medida.

Pelo fato de uma isometria preservar segmentos, ângulos e medidas destes, diz-se que a imagem de uma figura F por uma isometria é uma figura F′ *congruente* a F.

As isometrias abordadas nesta dissertação são a translação, a reflexão e a rotação e suas compostas. Apresentamos a seguir suas definições, bem como a utilização do *menu* (figura 26) das transformações geométricas do GeoGebra para resolver problemas de construções.

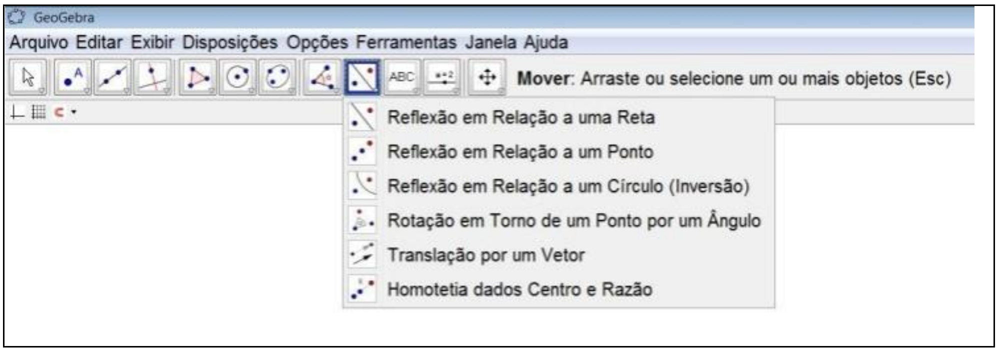


Figura 26 - *Menu* das transformações geométricas no GeoGebra

A noção de translação está relacionada ao conceito de vetor (do Latin “vehere” = transportar). Um vetor é dado pela direção, sentido e comprimento de uma família de “setas” equivalentes. Na figura 27 temos duas famílias de setas equivalentes e, portanto, dois vetores. As setas das famílias são usadas para representar o vetor.

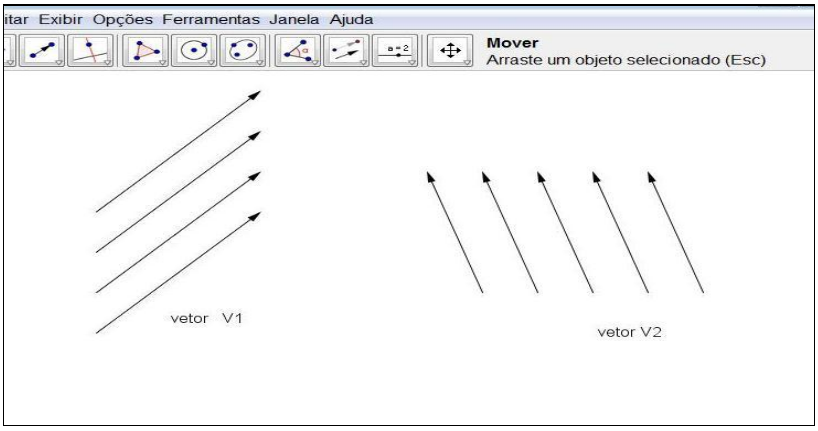


Figura 27 - Vetores

A *translação* determinada pelo vetor *v* que é representado pela “seta” UV associa cada ponto A do plano ao ponto A′ de forma tal que os pontos A, A′, V e U, nesta ordem, formam um paralelogramo. Na figura 28 apresentamos a translação do ponto A, determinada pelo vetor *v*.

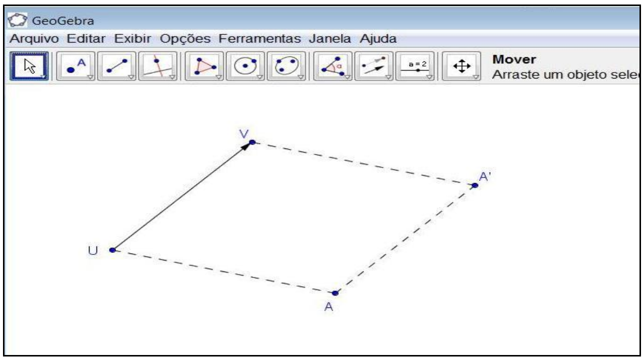
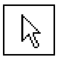


Figura 28 - A translação determinada pelo vetor *v*

Como a translação é uma isometria e transforma qualquer figura em outra congruente, construímos, a partir daí, um triângulo ABC onde a translação T_u aplicada a este triângulo, transforma ABC em A′B′C′ (figura 29). Inicialmente construímos o triângulo ABC e, em seguida, o vetor *u*. Com a ferramenta *translação por um vetor* nós selecionamos o triângulo ABC e logo após o vetor *u*. Obtemos, então, A′B′C′. Com a ferramenta *mover*  podemos mudar a posição de qualquer um dos vértices do triângulo ABC, visto que este é um triângulo qualquer. Ao movimentar o vértice A, por exemplo, o vértice A′ também será movimentado da mesma forma que A. Vivenciamos neste momento o significado de "geometria dinâmica", pois A′ é uma translação de A pelo vetor *u*. A e A′ estão relacionados por uma construção geométrica, a translação, na qual A′ depende de A.

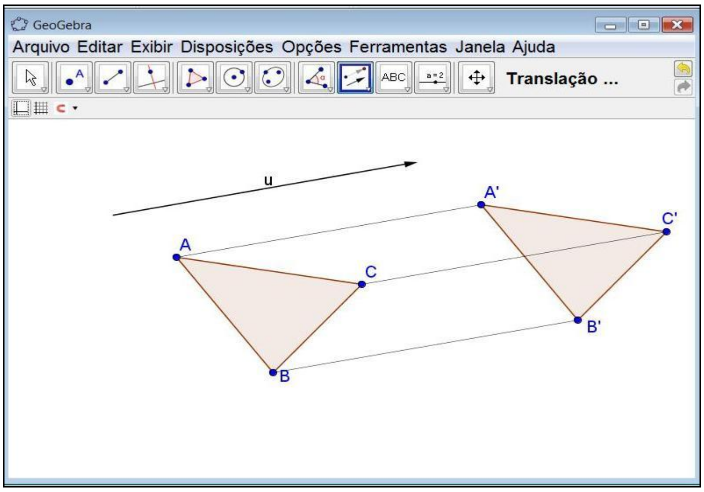


Figura 29 - A translação T_u transforma ABC em A′B′C′.

Como nós vemos na figura 30, podemos efetuar sucessivas translações de um polígono a partir de um vetor. Nesta construção, fizemos inicialmente uma reta definida por dois pontos dando a ideia de um “cordão esticado”. Em seguida com a ferramenta *polígono* construímos um pentágono na forma de uma “bandeirinha”. A partir deste pentágono efetuamos sucessivas translações por meio do vetor dado, construindo pentágonos congruentes. Colorimos todos os pentágonos construídos e obtivemos a construção final, na qual criamos um efeito como se parecesse um “cordão esticado” com cinco “bandeirinhas” anexadas. Se submetermos o primeiro pentágono à ferramenta *mover* todos os outros efetuarão os mesmos movimentos, pois estes são translações do primeiro pentágono construído. Aqui apresentamos a possibilidade que o GeoGebra permite de construir figuras que se pareçam com objetos do mundo real.

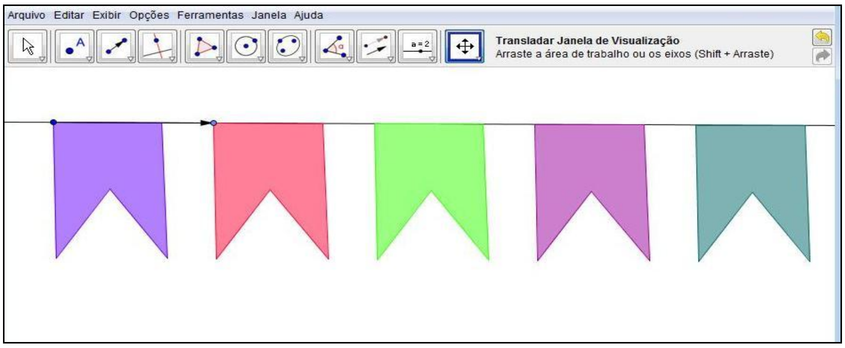


Figura 30 - Translações sucessivas do pentágono por um vetor dado

Passamos agora para o estudo da reflexão de um ponto A em relação ao centro O do plano Π. A reflexão de centro O é a transformação geométrica que associa a cada ponto A um outro A′ tal que:

- A′ está na semirreta AO;
- Os segmentos AO e OA′ são congruentes.

Apresentamos essa reflexão na figura 31 construída no GeoGebra, conforme o seguinte roteiro. Inicialmente construímos o ponto A, em seguida marcamos um ponto O como centro, utilizamos a *ferramenta reflexão com relação a um ponto* selecionando o ponto A e em seguida o ponto O. Aparecerá então o ponto A′, que é a reflexão de A em relação ao ponto O. Construímos a semirreta AO e observamos que A′ está na semirreta AO. Movimentando o ponto A, observamos que A′ efetua os mesmos movimentos de A, pois A′ é reflexão de A em relação ao ponto O. E como a reflexão é uma isometria, AO e OA′ são congruentes.

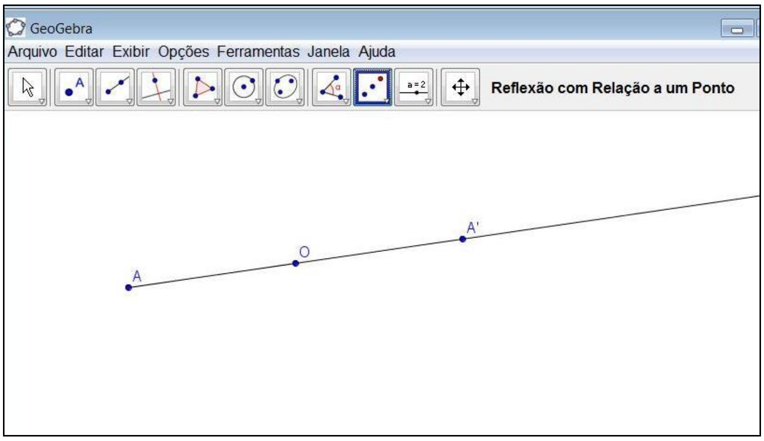


Figura 31 - Reflexão segundo um ponto

A reflexão segundo a reta *r* é a transformação geométrica, que associa a cada ponto A um ponto A′ ambos no plano Π, tal que:

- A reta definida por AA′ é perpendicular a *r;*
- Os segmentos AO e OA′ são congruentes, onde o ponto O é o ponto de interseção entre o segmento AA′ e a reta *r*.

Façamos agora a construção dessa reflexão em relação à reta *r* no GeoGebra. Construímos uma reta *r*, a partir de dois pontos, a qual será o eixo de reflexão. Em seguida marcamos um ponto A fora da reta *r*. Com a ferramenta *reflexão com relação a uma reta* selecionamos primeiramente o ponto A e em seguida a reta *r* e obtemos o ponto A′, que é o resultado da reflexão. Observamos na figura 32 a construção feita no GeoGebra da reflexão do ponto A em relação à reta *r*.

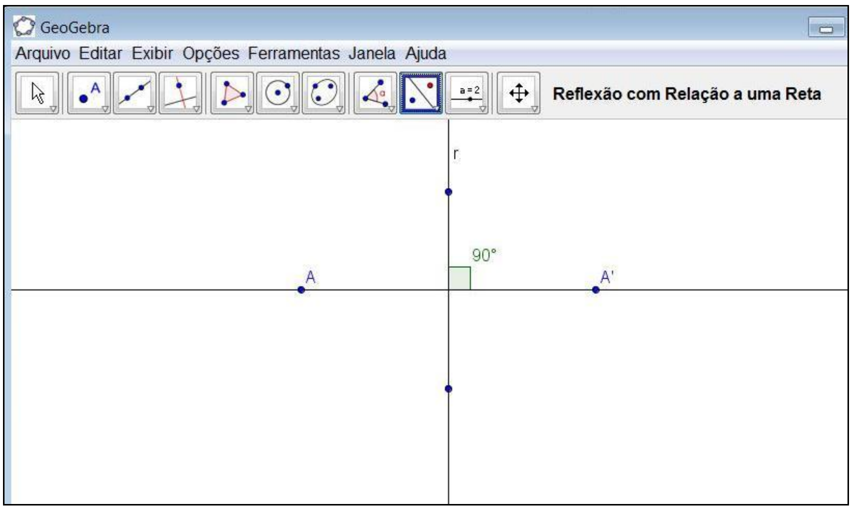


Figura 32 - Reflexão em relação a uma reta *r*

A reflexão é uma isometria e, portanto, transforma cada figura F em outra F′, congruente à F. Partindo desta afirmação construímos agora no GeoGebra uma reta *r* e um triângulo ABC, onde todos os pontos A,B e C estão no mesmo semi-plano em relação à reta *r*, no plano Π (figura 33). Com a ferramenta *reflexão em relação a uma reta* selecionamos o triângulo ABC e em seguida a reta, obtendo o triângulo A′B′C′. Submetendo um dos vértices do triângulo ABC à ferramenta *mover*, nós vivenciamos a principal característica dos softwares de geometria dinâmica, permitindo ao aluno ver muitos exemplos (diferentes tipos de triângulos com seus respectivos triângulos congruentes obtidos por simetria axial) em poucos segundos.

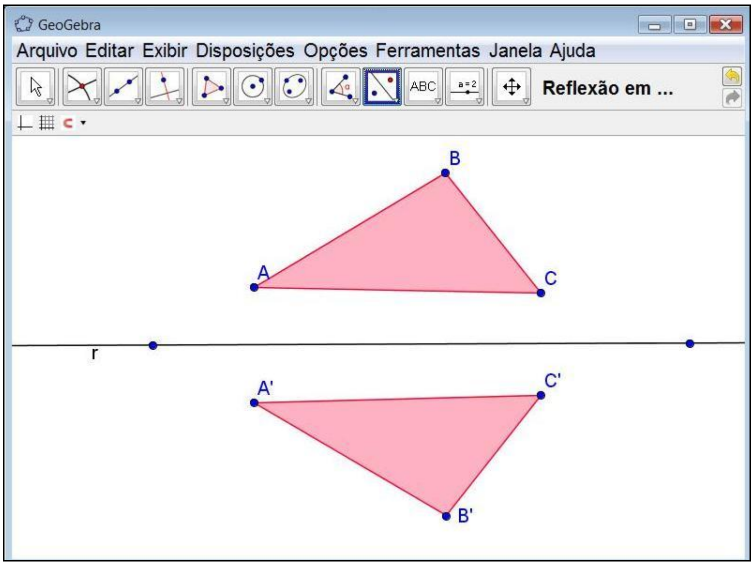


Figura 33 - Reflexão do triângulo ABC em relação à reta r

Passamos agora para a rotação e fixamos um ponto O no plano Π orientado (sentido positivo é o anti-horário). Dado um ângulo de medida α, a rotação de cento O e amplitude α é a transformação que a cada ponto A do plano Π associa o ponto $A' = R_\alpha$ (A) de forma que se tenha OA′ = OA, AÔA′ =α e sendo o ângulo medido no sentido anti-horário da semirreta AO para a semirreta OA′. A partir desta definição vamos construir no GeoGebra a rotação do ponto A em torno do ponto O sob um ângulo α = 45º (figura 34). Inicialmente definimos o ponto O, marcamos o ponto A, e com a ferramenta *rotação em torno de um ponto por um ângulo* selecionamos o ponto A e, em seguida, o ponto O. O *software* disponibiliza uma caixa de diálogo contendo as opções para escolha da amplitude do ângulo e o sentido, neste caso um ângulo α = 45º e sentido anti-horário. Observamos que a rotação de centro em O e amplitude de 45º levou A em A′.

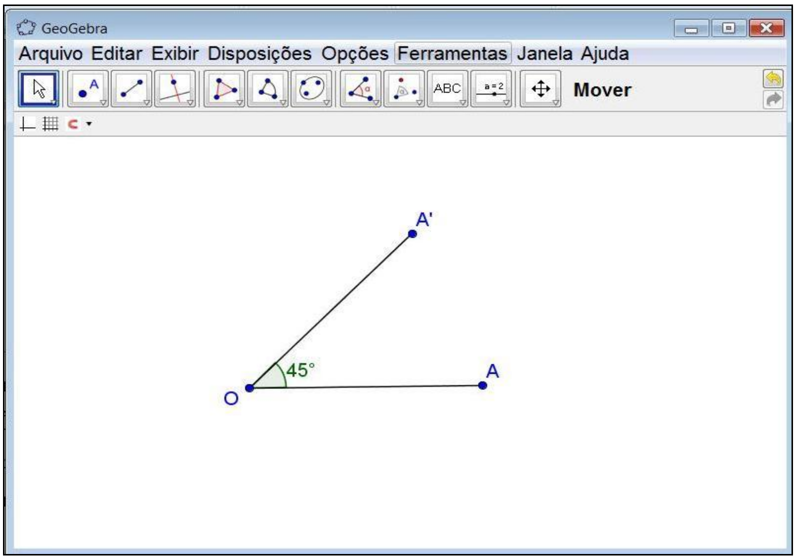


Figura 34 - Rotação de centro O

A rotação também é uma isometria e, portanto transforma cada figura F em outra F′, congruente à F. A imagem de uma figura F por uma rotação é uma figura $F' = R_\alpha\ (F)$, congruente à F. Apresentamos então como realizar esta construção (figura 35) no GeoGebra, conforme o seguinte roteiro. Marcamos o ponto O (centro de rotação), com a ferramenta *polígono* construímos o triângulo ABC e, utilizando a ferramenta *rotação em torno de um ponto por um ângulo,* selecionamos o triângulo ABC e o ponto O, escolhemos um ângulo α=60º e sentido anti-horário, obtendo o triângulo A′B′C′ que é congruente a ABC.

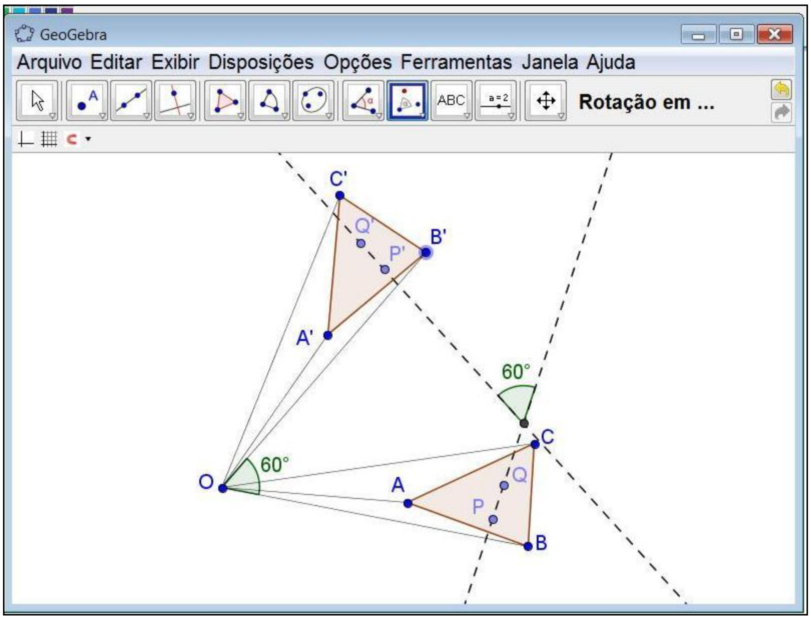


Figura 35 - A rotação R_α transforma ABC em A′B′C′

O software GeoGebra permite ao usuário fazer sucessivas rotações de uma figura por um ângulo em torno de um ponto central, assim obtendo uma série de figuras todas congruentes à figura inicial. Na figura 36 construímos um triângulo qualquer ABC e o submetemos à rotação sob um ângulo de 45º, sentido anti-horário, em torno do ponto B (neste caso o ponto B é o centro de rotação). Obtemos então o triângulo A′B′C′. Em seguida aplicamos sucessivas rotações, sempre selecionado a figura obtida anteriormente e o centro de rotação, marcando na caixa de diálogo o ângulo de 45º graus e o sentido anti-horário. Aplicando a ferramenta *mover* em qualquer um dos vértices do triângulo inicial ABC, todos os vértices correspondentes executarão a mesma movimentação, visto que todas as figuras foram construídas através da rotação que é uma isometria. Na construção (figura 36) escondemos os rótulos dos vértices e escolhemos cores diferentes para cada triângulo, criando um efeito na construção de modo que parecessem com as hélices de um cata-vento.

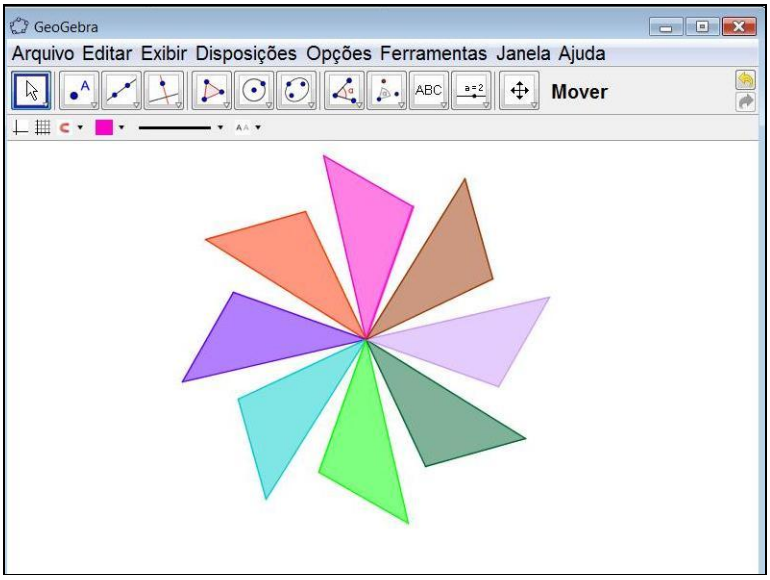


Figura 36 - Triângulos congruentes obtidos por rotação

Podemos ainda utilizar todas as isometrias em uma construção e produzir os mais diversos tipos de mosaicos. Na figura 37, para a construção do mosaico semirregular, onde combinamos dodecágonos regulares e triângulos eqüiláteros, utilizamos as isometrias, a saber, a translação, a rotação e a reflexão.

Na implementação da sequência didática relatada no capítulo cinco, apresentamos diversos tipos de mosaicos regulares e semirregulares produzidos pelos professores participantes da oficina e seus respectivos alunos.

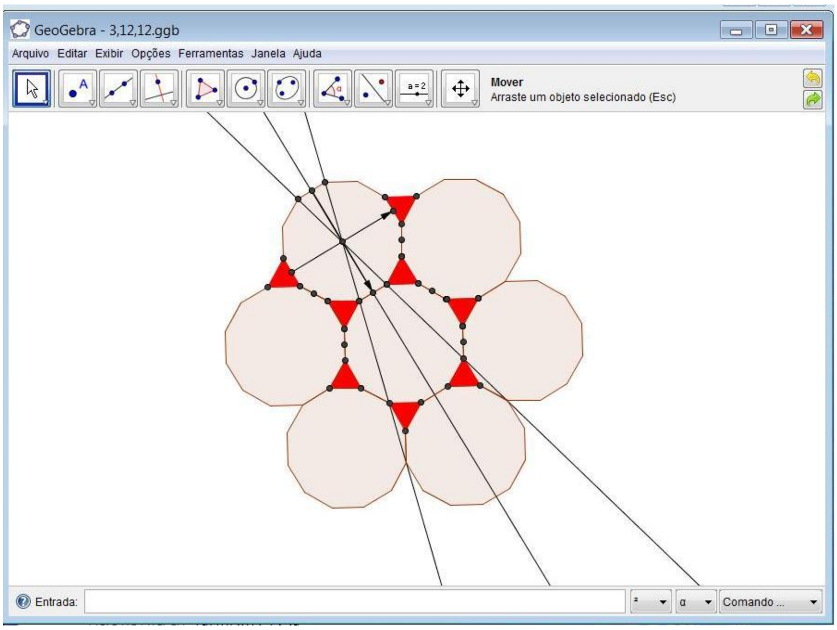


Figura 37 - Mosaico semirregular

4.4. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E VÍDEOS

Nesta seção tratamos da utilização de vídeos no ensino e aprendizagem das transformações geométricas. Alguns dos vídeos selecionados são importantes na introdução do tema abordado, sendo utilizados como sensibilização, pois esta proposta, segundo Moran (1995, p. 29):

> É do meu ponto de vista, o uso mais importante na escola. Um bom vídeo é interessantíssimo para introduzir um novo assunto, para despertar a curiosidade, a motivação para novos temas. Isso facilitará o desejo de pesquisa nos alunos para aprofundar o assunto do vídeo e da matéria.

No que segue, apresentamos uma seleção de vídeos sobre o tema destacando algumas de suas características e imagens.

Arte GeoGebra*:* apresenta uma construção feita no GeoGebra utilizando o menu das transformações geométricas. O autor do vídeo movimenta os pontos azuis da construção, a qual conserva as propriedades iniciais. Na figura 38 apresentamos uma das imagens do vídeo exibido que tem uma duração de 2 minutos e 18 segundos.

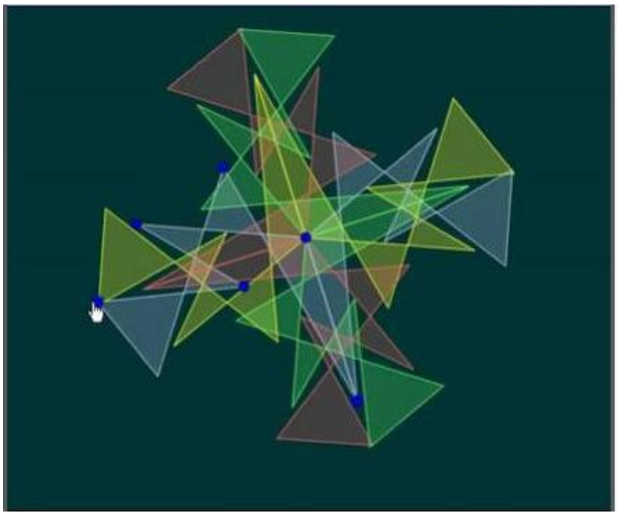


Figura 38 - Imagem vídeo Arte GeoGebra
Fonte: *http://www.youtube.com/watch?v=5fHFi3xbCfQ&feature=related*

Tesselation slideshow: é um vídeo que apresenta o que é uma pavimentação, onde ela pode ser encontrada, e quais os tipos de transformações geométricas planas utilizadas nas pavimentações. Mostra que a partir de um quadrado podem ser construídos diversos mosaicos. O vídeo é executado em inglês, com uma duração de 2 minutos e 44 segundos. Na figura 39 apresentamos uma das imagens do vídeo.

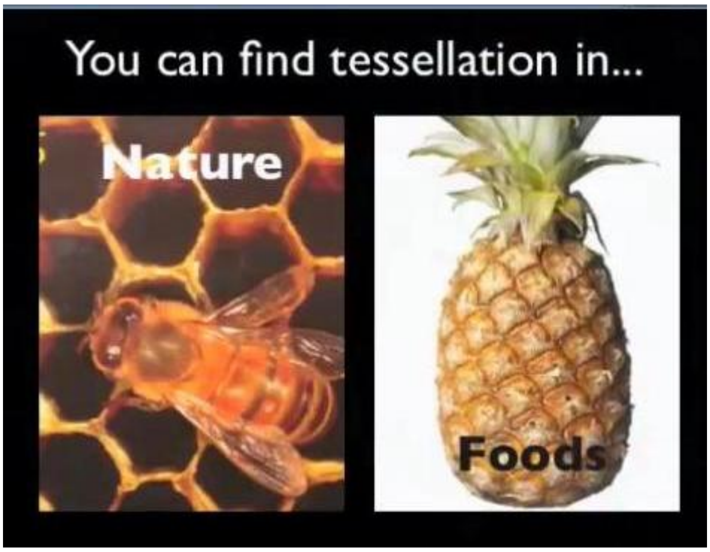


Figura 39 - Imagem do vídeo *tesselation slideshow*
Fonte: *http://www.youtube.com/watch?v=5-3tOa9CPb0*

Igrejas Matrizes da Quarta Colônia de Imigração Italiana do Rio Grande do Sul: o vídeo[55] (figura 40) aborda as Igrejas Matrizes da Quarta Colônia de Imigração Italiana do Rio Grande do Sul, trazendo a história das comunidades e mostrando os mosaicos pintados nas paredes e pisos das igrejas, bem como destacando os elementos geométricos utilizados na criação destes mosaicos. Na figura 40, apresentamos uma das imagens do vídeo, destacando os movimentos de reflexão, rotação e translação para a construção do mosaico.

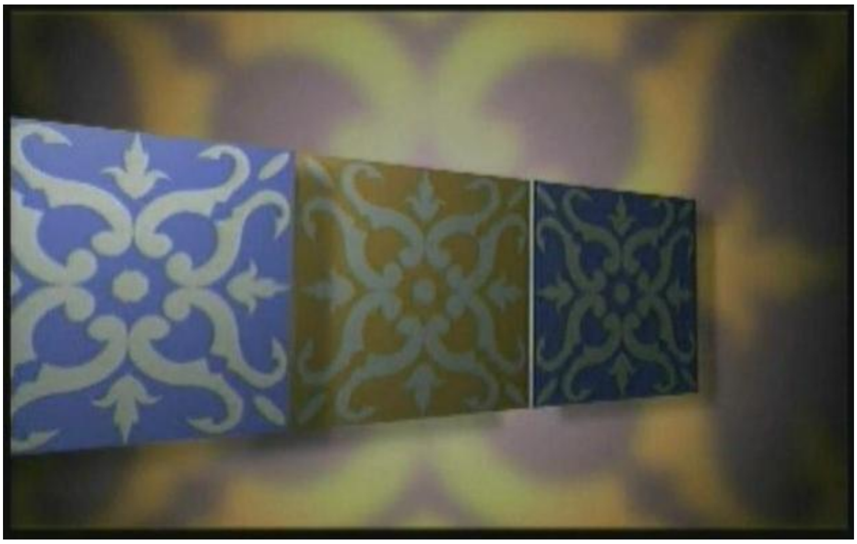


Figura 40 - Imagem do vídeo das Igrejas da Quarta Colônia
Fonte: DVD UNIFRA

Escher e a Geometria[56]***:*** traz uma reportagem sobre as obras de Escher apresentadas numa exposição do Centro Cultural do Banco do Brasil em São Paulo. Na reportagem exibida no vídeo o professor faz comentários a respeito das obras de Escher, destacando os elementos matemáticos utilizados pelo artista bem como os conceitos das transformações geométricas. O vídeo tem uma duração de 8 minutos e 24 segundos. Na figura 41 vemos uma das imagens reproduzidas no vídeo, mostrando como Escher utilizou na produção de uma de suas obras um estudo da relação geométrica entre quadrados e suas diagonais.

---

[55] O vídeo destaca a História, Arte, Matemática e *Design* nas Igrejas da Quarta Colônia de Imigração Italiana do Rio Grande do Sul, localizada na região central do estado. Produzido na UNIFRA: Centro universitário Franciscano.
[56] Este vídeo foi produzido pela revista Nova Escola.

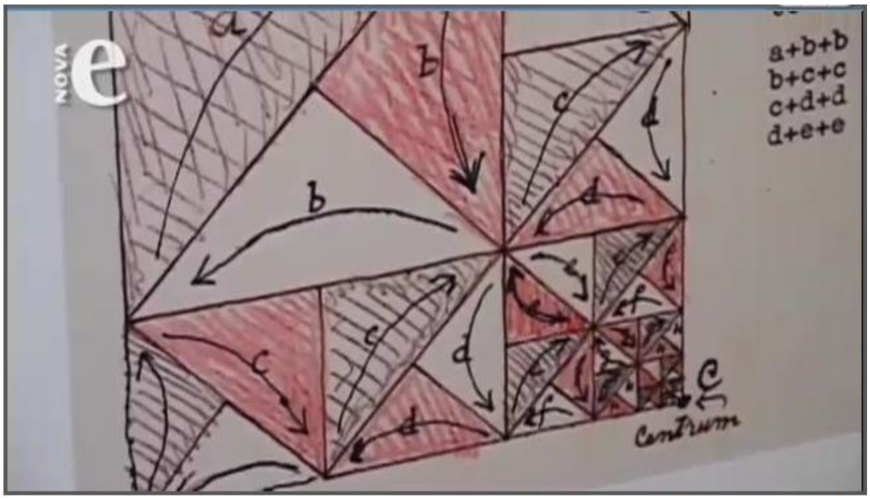


Figura 41 - Imagem do vídeo Escher e a Geometria
Fonte: http://www.youtube.com/watch?v=6aRFy73cZxY

Matemática em toda parte, ***Construção/ Pavimentação com polígonos:*** este é o título do vídeo do qual uma imagem é apresentada na figura 42, que tem uma duração de 2 minutos e 58 segundos. Ele traz imagens sobre os tipos de padrões utilizados na indústria e a preferência pelo uso de figuras geométricas, como o hexágono regular, para a pavimentação. Trata dos polígonos regulares que podem pavimentar o plano e o porquê disto. Mostra diversos tipos de mosaicos regulares e semirregulares.

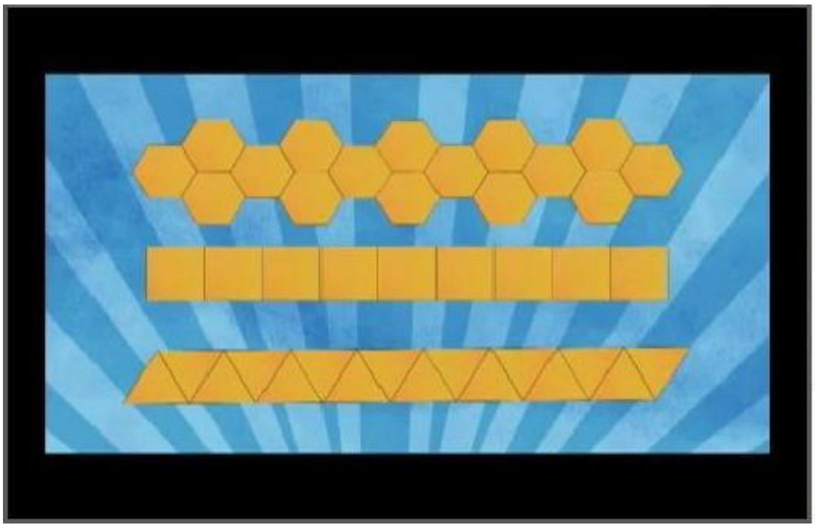


Figura 42 - Imagem do vídeo a *Matemática em toda parte*
Fonte: http://www.youtube.com/watch?v=y__0a7TDbfs

Escher Style: o vídeo, do qual segue uma imagem na figura 43, apresenta diversas obras feitas por alunos, nas quais são utilizados os critérios de Escher para a criação de mosaicos. A exibição de cada mosaico mostra o padrão utilizado e a seguir exibe os desenhos sem cor, e, ao final, coloridos. O vídeo apresenta, nos diversos mosaicos, as transformações geométricas planas, translação, rotação e reflexão.

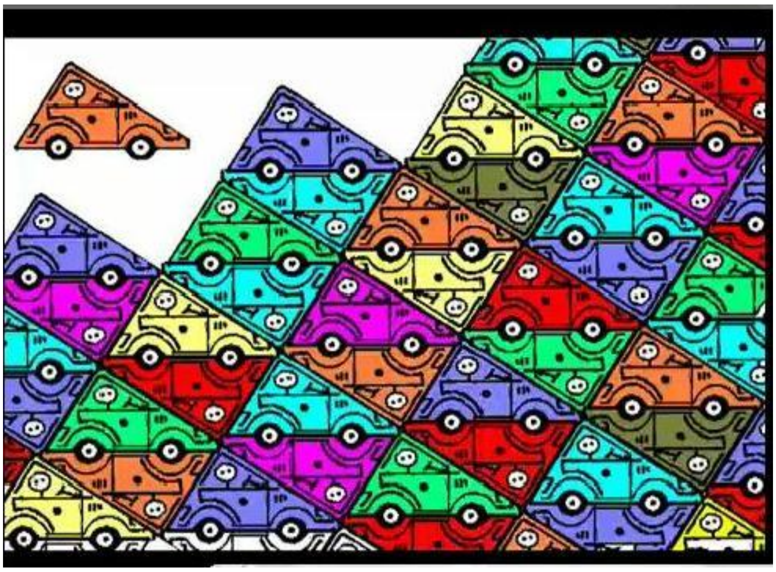


Figura 43 - Imagem do vídeo *Escher Style*
Fonte: http://www.youtube.com/watch?v=h2AWKgU0cN4

Simetria: a exibição desse vídeo proporciona a identificação de muitas situações práticas nas quais encontramos as transformações geométricas: na arte, na arquitetura, na música, etc. A imagem que temos a seguir (figura 44) apresenta a simetria encontrada na partitura de uma música.

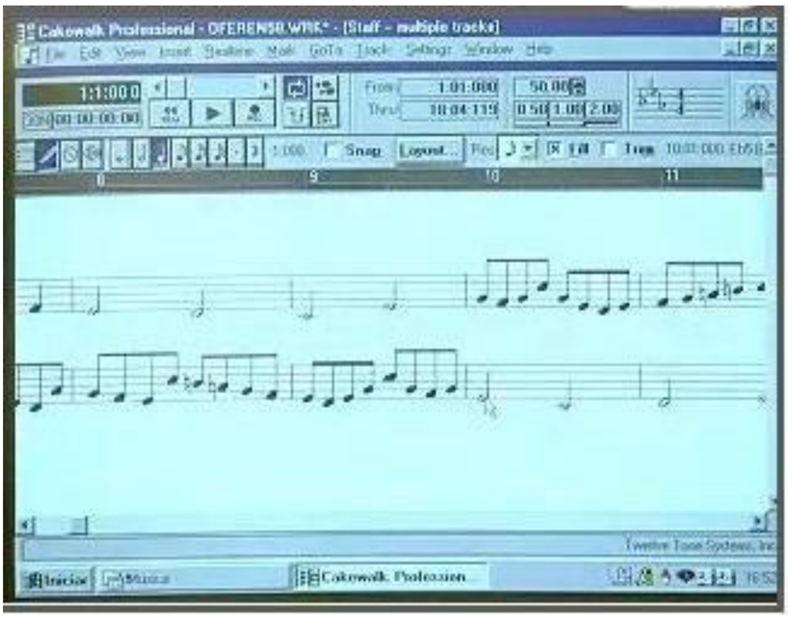


Figura 44 - A simetria na partitura de uma música
Fonte: http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=20794

Matemática em toda parte, Matemática na arte: Nesse vídeo são abordados conceitos de Geometria, utilizando obras de arte de diversos autores, inclusive de M. C. Escher. O vídeo apresenta situações do dia a dia que podem ser utilizadas em sala de aula para desenvolver os conceitos geométricos. Ele tem uma duração de 26 minutos, sugerindo diversos tipos de atividades para os professores de Matemática. Na figura 45 apresentamos uma imagem exibindo as translações feitas a partir de um retângulo formando uma peça básica de um mosaico no estilo de Escher.

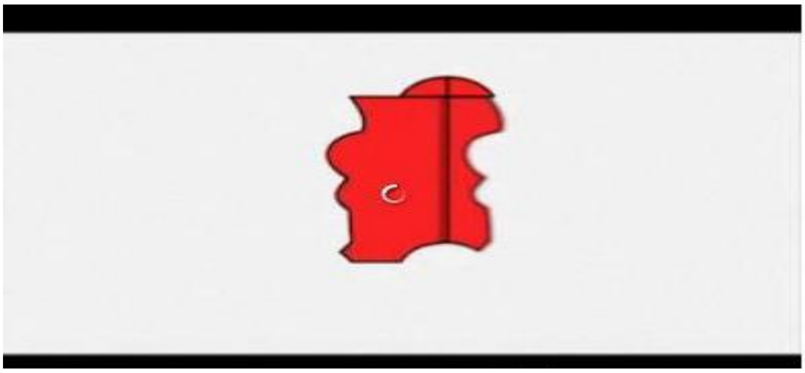


Figura 45 - Imagem do vídeo *Matemática em toda parte: Matemática na arte*
Fonte: http://tvescola.mec.gov.br/index.php?option=com_zoo&view=item&item_id=2354

Snakes: na figura 46 vemos uma das imagens do vídeo *Snakes*[57], que é uma animação de Cristóbal Vila, baseado na obra “Serpentes” de M. C. Escher (1969). O vídeo mostra todo o processo de criação desta obra, com uma duração de 2 minutos e 26 segundos.

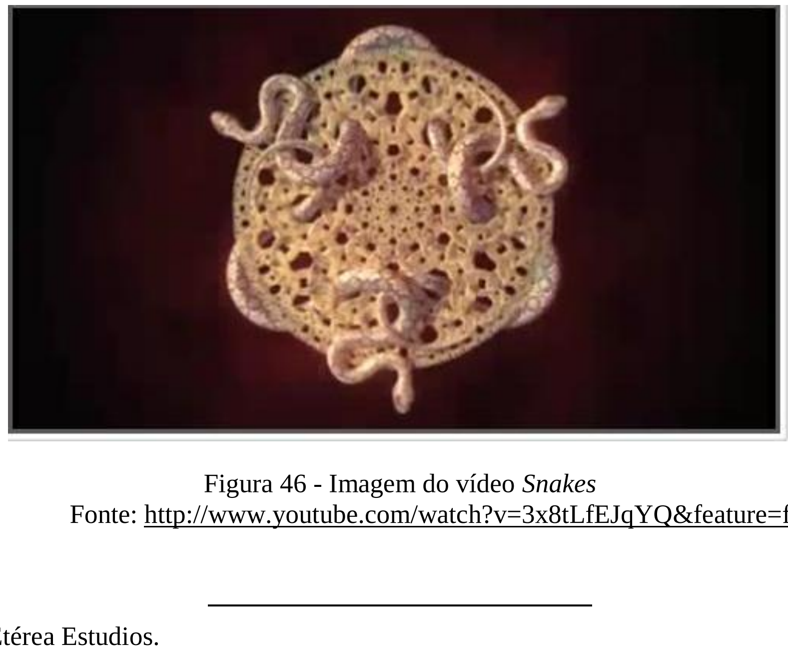


Figura 46 - Imagem do vídeo *Snakes*
Fonte: http://www.youtube.com/watch?v=3x8tLfEJqYQ&feature=fvsr

[57] Produzido pela Etérea Estudios.

A seleção de vídeos aqui apresentada foi feita com o objetivo de proporcionar um repertório, que respaldasse a confecção da sequência didática sobre transformações geométricas desenvolvida nesta dissertação. Além disso, alguns desses vídeos podem ser utilizados para abordar diversos conceitos de Geometria.

5. CONCEPÇÃO E REALIZAÇÃO DA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo, apresentamos a concepção, a implementação e a análise de uma sequência didática para o ensino das transformações geométricas no plano. A sequência aborda as transformações de reflexão, translação e rotação, fazendo o uso de vídeos e de um ambiente de geometria dinâmica GeoGebra.

A experiência foi implementada em oficina para professores de Matemática da rede municipal de Sombrio- SC. Dentre as tarefas propostas havia a realização de uma prática, na qual o professor deveria criar uma situação de aprendizagem para sua sala de aula.

A pesquisa foi feita de forma qualitativa. Foram feitos registros dos momentos de trabalho dos professores por meio de filmagens. As produções feitas pelos professores no GeoGebra foram gravadas e os protocolos de construção constituíram material de análise; as produções dos alunos desses professores também fazem parte de nossa coleta de dados.

A organização da pesquisa toma como referência a Engenharia Didática. Este método de pesquisa é composto de quatro fases assim distribuídas: Análises Prévias; Concepção e Análise *A priori;* Experimentação; Análise *A posteriori* e Validação da Experiência (CARNEIRO, 2005).

Os capítulos 2, 3 e 4 referem-se as Análises Prévias. Neles tratamos de três dimensões: a dimensão cognitiva, ao trazer as ideias de Vygotsky sobre aprendizagem e desenvolvimento; a dimensão epistemológica e cognitiva, ao trazer o trabalho de Duval que discute o quanto os sistemas de representações semióticas são constitutivos do saber matemático e a sua importância no processo de aprendizagem; a dimensão didática, ao referenciar as diretrizes dos PCN, ao fazer a análise dos livros didáticos e ao discutir o potencial da tecnologia no ensino da Matemática.

No início deste capítulo apresentamos as nossas escolhas quanto aos participantes, ao formato da oficina, e a sequência de atividades a ser proposta. Depois tratamos da implementação da oficina, trazendo nossas análises *a priori* e *a posteriori* das atividades propostas e realizadas pelos professores ao longo dos seis encontros. Finalizamos o capítulo com uma reflexão geral sobre as aprendizagem dos professores participantes, à luz das teorias de Vygotsky e Duval.

5.1. CONCEPÇÃO DA EXPERIÊNCIA

Inicialmente, entramos em contato com a Secretaria da Educação do Município de Sombrio- SC para saber sobre a possibilidade de realização de um curso, sob a forma de oficina, para professores de escolas, tratando de tecnologia na sala de aula. Posteriormente, houve um convite direto para os professores da rede municipal[58] para que participassem da oficina.

Para a nossa concepção da experiência, tomamos a seguinte questão como norteadora:

De que forma professores de Matemática se apropriam do software GeoGebra para trabalhar com mosaicos e transformações geométricas?

A partir desta questão, elaboramos uma sequência de atividades, planejada de forma a atender os seguintes objetivos: a) apresentar uma nova alternativa de trabalho na Geometria escolar; b) capacitar os professores no uso de mídias digitais no dia a dia da sala de aula; c) realizar um trabalho integrado de Geometria e Arte, utilizando-se da construção de pavimentações do plano e também dos mosaicos de Escher, por meio das transformações geométricas.

A oficina ficou organizada em seis encontros. Nos quatro primeiros tratamos da: familiarização com o *software*; construção de pavimentações regulares e semirregulares; reprodução de mosaicos e dos mosaicos de Escher. Para cada assunto abordado contemplamos a apresentação de um vídeo inicial como sensibilização[59]. O quinto encontro ficou destinado para a organização das práticas dos professores participantes. E o último para a apresentação dos resultados.

Dando seguimento às nossas escolhas, optamos pelo uso de um ambiente de geometria dinâmica, mais precisamente pelo *software* GeoGebra, uma vez que, de acordo com as nossas análises prévias desenvolvidas no capítulo 4, é a partir deste que propiciamos situações significativas de aprendizagem que contribuem para a construção do conhecimento em Geometria.

> Nestes ambientes conceitos geométricos são construídos com equilíbrio conceitual e figural; a habilidade em perceber representações diferentes de uma mesma configuração se desenvolve; controle sobre configurações geométricas levam a descoberta de propriedades novas e interessantes. Quanto às atitudes dos alunos frente ao processo de aprender: experimentam; criam estratégias; fazem conjeturas; argumentam e deduzem propriedades matemáticas. A partir de manipulação concreta, “o desenho em movimento”, passam para manipulação abstrata atingindo

---

[58] Optamos pela rede municipal, pois houve greve em 2011 na rede estadual e nesta a realização do projeto teria mais dificuldade, visto que os professores não poderiam ser liberados durante suas aulas.
[59] Conceito definido na seção 4.4, p.73.

níveis mentais superiores da dedução e rigor, e desta forma entendem a natureza do raciocínio matemático. (GRAVINA, 1996, p.13)

Como material de apoio utilizamos o CD Mídias Digitais I[60], o qual é constituído de sete módulos, dentre os quais destacamos para a aplicação na sequência didática, os módulos I e II. Este CD (figura 47) serviu aos professores participantes como uma fonte de pesquisa para os conceitos básicos de Geometria; além disso, o material apresenta os objetivos e conteúdos e sugere atividades para serem desenvolvidas com os alunos utilizando o GeoGebra.

Figura 47 - *Interface* do CD Mídias Digitais I
Fonte: http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_I/

O CD possui um ambiente onde eles podem manipular os *applets*[61] (figura 48) já construídos no GeoGebra e observar as propriedades das construções que caracterizam cada um dos conceitos geométricos apresentados.

---

[60] Este cd faz parte do material a ser utilizado nas disciplinas de Mídias Digitais I e Prática Pedagógica I do Curso de Especialização "Matemática, Mídias Digitais e Didática". Este curso também possui um site que apresenta possibilidades de utilização de diferentes softwares e objetos de aprendizagem para o ensino e aprendizagem da Matemática. Os conteúdos de matemática a serem trabalhados são: geometria euclidiana, transformações geométricas no plano, geometria analítica, funções e gráficos. O site foi implementado pelas bolsistas: Fernanda Abreu Lima, Larissa Weyh Monzon e Mariângela Torre Dias, alunas do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS em 2009 e por Marina Menna Barreto (tutora à distância do curso), sob a coordenação da professora Maria Alice Gravina do Instituto de Matemática da UFRGS e com financiamento da UAB/MEC.

[61] Animações desenvolvidas com o GeoGebra em alguma tarefa específica. Nestas animações os pontos azuis podem ser movimentados.

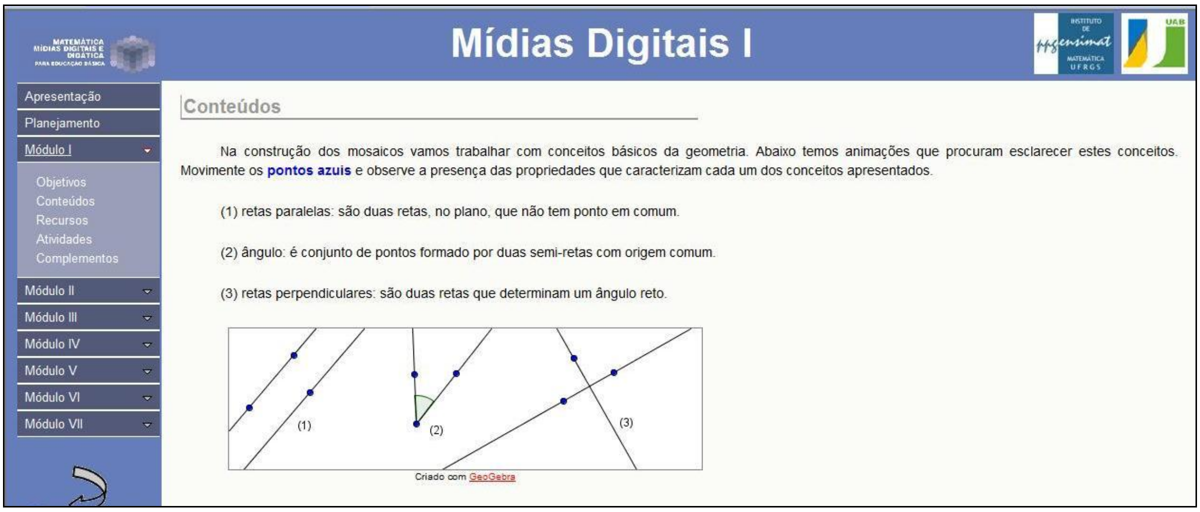


Figura 48 - *Applets* criados no GeoGebra
Fonte: http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_I/

A partir destas escolhas, a concepção da sequência didática[62] resultou em seis encontros[63] de 4 horas, os quais foram elaborados de modo que a cada encontro fosse aumentando o nível de dificuldade. Estabelecemos os conteúdos de forma gradual, ficando a sequência didática organizada da forma que é apresentada no quadro 3:

Encontro 1	Familiarização com os *Menus* do GeoGebra
Encontro 2	Pavimentações e as Transformações Geométricas
Encontro 3	Reprodução de Mosaicos
Encontro 4	Mosaicos de Escher e as Transformações Geométricas
Encontro 5	Organização das Práticas dos Professores
Encontro 6	Resultados das Práticas dos Professores

Quadro 3 - Sequência Didática

[62] Disponibilizamos na íntegra a sequência didática no apêndice D.
[63] Quando o projeto desta dissertação foi desenvolvido, este previa cinco encontros de 120 minutos cada, porém em conversa com a responsável pelo apoio pedagógico da SMECE- Secretaria Municipal de Educação Cultura e Esporte de Sombrio-SC, logo após a definição do projeto, nós combinamos que os encontros poderiam ter uma duração maior, para que o professor participante pudesse ter um melhor aproveitamento do curso. Além disso, houve a necessidade de estabelecermos um encontro a mais, no qual o professor pudesse fazer uma preparação das atividades a serem desenvolvidas em sua sala de aula. A partir destas discussões ficou definido que teríamos então seis encontros de 4 horas cada.

O primeiro encontro ficou destinado às atividades coletivas de familiarização com o *software* GeoGebra. O segundo encontro consistiu de construções de pavimentações regulares e semirregulares. A partir do segundo encontro os professores participantes deveriam criar e organizar atividades envolvendo os conceitos abordados na oficina para serem aplicadas com seus alunos. No terceiro contemplamos a reprodução de mosaicos encontrados em diversos locais. O quarto ficou para a construção de mosaicos em movimento no estilo de Escher. O encontro cinco para a organização das experiências realizadas com alunos. E o sexto para a apresentação dos resultados destas aplicações executadas pelos professores.

5.2. SOBRE OS ENCONTROS

Todos os encontros (figura 49) foram realizados na sala de informática da Escola Municipal Nilza Matos Pereira, no CAIC[64], sede da SMECE, nas seguintes datas: 11, 20 e 25 de outubro e 03,08 e 30 de novembro de 2011.

Figura 49 - Primeiro encontro
Fonte: Imagem do vídeo produzido pela autora

Na oficina foram inscritas sete professoras de Matemática e uma professora responsável pela sala de informática e apoio aos professores. Cada professora recebeu o material impresso com as atividades de cada encontro e o CD Mídias Digitais I.

[64] Centro de Atenção Integral à Criança.

As professoras de Matemática participantes da oficina foram: Cristiane, Dalila, Denise, Marilva, Teresinha, Eliane e Ligiane. Também participou da oficina a professora da sala de informática, Maura. Nossas análises foram baseadas principalmente nos trabalhos desenvolvidos pelas professoras Cristiane, Dalila, Marilva e Denise, as quais participaram de todas as atividades.

Como rotina de trabalho, ficou estabelecida que no final de cada encontro, as participantes da oficina enviariam, por *e-mail*, os arquivos de construções feitas no GeoGebra. Também ficou estabelecido nos encontros que as aprendizagens deveriam ser repensadas de forma a serem contempladas, em experiência similar, com seus alunos.

5.3. SOBRE OS PARTICIPANTES

O universo de nosso estudo compunha-se de sete professoras[65] de Matemática e uma professora responsável pela sala de informática de sua escola (figura 50).

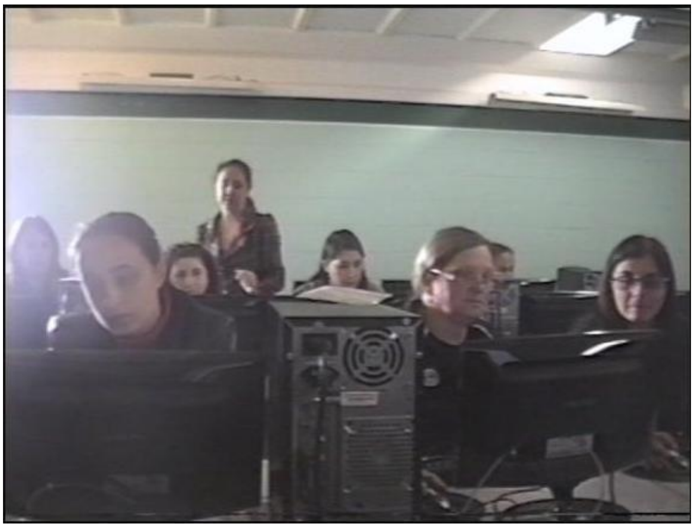


Figura 50 - As professoras participantes
Fonte: Imagem do vídeo produzido pela autora

As participantes desta pesquisa foram designadas como *professoras-alunas*, pois, em sua maioria, são professoras atuantes nas escolas municipais, e, nesta pesquisa, são consideradas alunas da oficina.

[65] Durante a realização da oficina, mais precisamente no último encontro tivemos a desistência de três professoras.

A partir do momento em que foi definida a quantidade e quais professoras fariam parte da investigação, nós as submetemos a um questionário[66] com diversas questões, relacionadas com a formação dessas profissionais, com a proposta didática desenvolvida na escola, o uso de TICs, do *software* GeoGebra e no ensino de transformações geométricas no plano. O questionário, aplicado às sete professoras participantes, foi um "(...) questionário com perguntas mistas, combinando parte com perguntas fechadas e parte com perguntas abertas." (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.116). Esse questionário foi elaborado com questões objetivas e discursivas, de modo a procurar conhecer melhor os sujeitos envolvidos.

Também enviamos às professoras um termo de consentimento informado[67] objetivando autorizar a publicação e análise de suas produções.

No que segue, vamos apresentar o resultado do levantamento feito junto a estas sete professoras.

No item I, identificação e formação, temos que todos os participantes são do sexo feminino, com idade entre 30 e 55 anos, graduados em instituições particulares de ensino da região, com licenciatura em Matemática e Ciências Biológicas. Somente uma participante tem especialização no Ensino de Matemática, uma está cursando, três têm especialização em Fundamentos da Educação e duas não tem pós-graduação. A maioria das professoras participantes atua nas séries finais do Ensino Fundamental das redes municipal e estadual, três atuam no Ensino Médio, sendo que uma destas atua em Biologia, e um no Ensino de Jovens e Adultos da rede estadual. Cinco destas professoras têm mais de 18 anos de atividade docente.

No item II, atividade docente, parte A, sobre Geometria e as transformações geométricas, observamos que a maioria das participantes não teve acesso aos conceitos das transformações geométricas planas em sua graduação, não trabalham estes conceitos com seus alunos, abordam somente os conceitos básicos de Geometria, mas acreditam que seja importante este estudo. Na Geometria, procuram relacionar situações práticas com objetos do dia a dia, elementos da natureza, mas de forma muito superficial.

De acordo com estas professoras, a rede de ensino municipal está sistematizando os conceitos por série de ensino e elas estão participando dos encontros.

As professoras de Matemática em questão, da rede municipal de Sombrio, utilizam o livro didático do PNLD 2009, Projeto Radix, de Jackson Ribeiro, e afirmaram que as transformações geométricas estavam presentes nos quatro volumes das séries finais do Ensino Fundamental.

---

[66] O questionário está no apêndice A.
[67] O termo está no apêndice B. Este estabelece todas as condições de realização da pesquisa.

No item II, atividade docente, parte B, sobre *softwares* matemáticos, nós verificamos que somente uma das professores não tem condições reais para o uso da Tecnologia Informática no ensino de Matemática na sua escola. Todos os demais responderam que a escola possui laboratório de informática funcionando; porém, a maioria não a utiliza.

Em relação à avaliação destes recursos e se existe melhora na qualidade do processo ensino – aprendizagem, todos concordaram que a Tecnologia Informática deve contribuir para esta melhoria. No entanto, todas as professoras não conheciam *softwares* de geometria dinâmica e nunca ouviram falar do GeoGebra.

5.4. EXPERIMENTAÇÃO E AS ANÁLISES

Nesta seção apresentamos a experimentação, ou seja, o momento da execução da sequência didática concebida. Para os seis encontros realizados apresentamos as análises *a priori*, que tratam de nossas expectativas quanto às aprendizagens pretendidas, e as análises *a posteriori* que tratam de nosso acompanhamento às aprendizagens no momento de realização das atividades. A análise *a posteriori* foi subsidiada pelos protocolos de construção das produções feitas no GeoGebra. Ao final da seção retomamos as análises, agora à luz das teorias de Vygotsky e Duval.

5.4.1. Encontro 1: Familiarização com os *Menus* do GeoGebra

No primeiro encontro apresentamos um *PowerPoint* (apêndice C) abordando todas as informações referentes a esta pesquisa: a oficina; o cumprimento das atividades, em particular sobre a experiência que as professoras-alunas deveriam realizar com seus alunos; as características do *software* GeoGebra; o CD Mídias Digitais I como material de apoio.

Nós optamos pela apresentação do *menu* e familiarização com as ferramentas do *software*, executando coletivamente a primeira e a segunda atividades, pois de acordo com o questionário respondido pelas professoras-alunas, estas não tinham nenhum conhecimento sobre GeoGebra[68].

Na primeira atividade abordamos os conceitos básicos da Geometria Plana, tais como, ponto, reta, segmento, no GeoGebra. Na segunda atividade, exploramos o *menu* das transformações geométricas no GeoGebra e os conceitos geométricos (retas paralelas e

[68] Todos os computadores estavam com o software GeoGebra devidamente instalado.

perpendiculares, ângulo, triângulo, paralelogramo, mediatriz, bissetriz, círculo, reflexão, rotação, translação), que são apresentados no módulo I e II do CD Mídias Digitais I. A partir destas atividades esperávamos que as professoras-alunas utilizassem os menus solicitados do *software* na primeira e na segunda atividades para fazerem uma criação livre no GeoGebra.

Análise *a priori*: Ao abordar os conceitos de Geometria Plana, tivemos como objetivo revisá-los, visto que as professoras-alunas já tinham conhecimento sobre o assunto. Esta revisão se fez por meio da utilização de um roteiro (quadro 4) segundo o qual as professoras-alunas construíram figuras no GeoGebra.

e) A ferramenta *Reta definida por dois pontos* permite que você trace uma reta. Trace a reta $\overleftrightarrow{AB}$, selecionando os dois pontos.
f) Com a ferramenta *Reta paralela*, trace uma reta paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$, selecionando primeiro o ponto e depois a reta $\overleftrightarrow{AB}$.
g) Crie dois pontos A e B, exiba seus rótulos, trace uma reta que passe por estes dois pontos e exiba seu rótulo.
h) Com a ferramenta *Reta Perpendicular*, trace uma perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AB}$, passando por A.

Quadro 4 - Recorte da primeira atividade

Em relação à exploração do *menu* das transformações geométricas planas (quadro 5) esperávamos que as professoras-alunas reconhecessem a conservação de algumas propriedades em figuras planas sujeitas aos movimentos de reflexão, translação ou rotação, isto é, reconhecessem que tais movimentos preservam as distâncias e os ângulos, o paralelismo e o perpendicularismo. Esperávamos que esse reconhecimento fosse feito a partir da movimentação nas figuras construídas no GeoGebra e exploração dos *applets* (figura 48); utilizando o potencial do *software*, que é a movimentação das figuras que mantêm as propriedades da construção inicial.

a) Crie um ponto A, faça sua reflexão a partir do ponto B. Exiba seus rótulos. **Movimente o ponto A**. Mova o ponto B. Observe as relações entre A, B e A'.
b) Crie um polígono e faça sua reflexão a partir de uma reta. Escolha o vértice A do polígono e **movimente-o.** Explore esta ferramenta, desenhando outros polígonos regulares e verifique o que acontece.

Quadro 5 - Recorte da segunda atividade

A partir das duas atividades iniciais, esperávamos que as professoras-alunas tivessem se familiarizado com o *software* e desenvolvessem uma criação livre utilizando os *menus* das transformações geométricas.

Análise *a posteriori:*

Discutimos sobre os conceitos de Geometria Plana que seriam trabalhados com a utilização do GeoGebra. Sobre isso as professoras-alunas afirmaram que a Geometria era dificilmente utilizada, citando algumas possíveis causas deste fato: durante sua formação, em nível básico e superior, não tiveram aprofundamento suficiente na Geometria; os livros didáticos abordavam este assunto quase sempre no final e não havia tempo para este estudo; as transformações geométricas no plano não eram citadas nos planos de ensino estipulado pela rede municipal[69].

Dando seguimento ao encontro, assistimos a um vídeo[70] *Arte GeoGebra*, o qual apresenta uma construção feita no GeoGebra utilizando o menu das transformações geométricas. Para melhor entendimento, o vídeo foi apresentado uma segunda vez, sendo que e ao longo da exibição íamos fazendo algumas intervenções com explicações sobre o *software*.

A partir da apresentação do vídeo, incentivamos as professoras-alunas no sentido de que, ao final do encontro, elas deveriam reproduzir no GeoGebra uma situação semelhante àquela vista no vídeo, usando as transformações geométricas no plano. Partimos então para a apresentação da *interface* do GeoGebra, explicando os *menus* e ferramentas do *software* que seriam utilizados nos encontros.

Na primeira atividade, fizemos coletivamente a exploração dos seguintes *menus*: ponto, reta e segmento, retas paralelas e perpendiculares , mediatriz, bissetriz e círculo. Enquanto íamos construindo no projetor, cada professora-aluna executava individualmente em seu computador. Observamos que as professoras acompanhavam as instruções com muita atenção, e quando tinham dúvidas trocavam ideias com o colega ou nos faziam perguntas. Após cada item realizado discutíamos sobre o assunto. Algumas professoras-alunas descobriam novas formas de executar a atividade e colaboravam dando sugestões. Ressaltamos neste momento a importância da interação social da teoria de Vigotsky.

---

[69] A sistematização dos conteúdos estava sendo estudada e reformulada pelos professores de matemática e apoio pedagógico da rede municipal de educação de Sombrio – SC, durante a realização deste estudo.
[70] As características do vídeo foram apresentadas na seção 4.4, p.74.

Ao final da primeira atividade, utilizamos o CD Mídias Digitais I, Módulo I, em *conteúdos*, movimentamos os pontos azuis e observamos a presença de todas as propriedades que caracterizavam cada um dos conceitos apresentados. Neste momento a professora G comentou: *"Nossa, quantos conceitos nós trabalhamos até agora! Como é mais prático e mais fácil usar este software! É possível verificar que as propriedades iniciais são mantidas quando movimentamos os pontos azuis."*

Na segunda atividade, utilizamos o *menu* das transformações geométricas no plano, onde criamos pontos, fizemos reflexões, movimentamos os pontos azuis e observamos as propriedades. Construímos polígonos, fizemos sua reflexão com relação a uma reta, escolhemos um ponto e o movimentamos. Desenhamos um polígono e um vetor e, a partir deste vetor, efetuamos translações. A seguir utilizamos a rotação a partir de um ponto e um ângulo dado.

Ao final da segunda atividade, utilizamos o CD Mídias Digitais I, Módulo II, em *conteúdos*, e nas animações[71], movimentamos o ponto azul A e notamos o efeito no ponto vermelho B (figura 51).

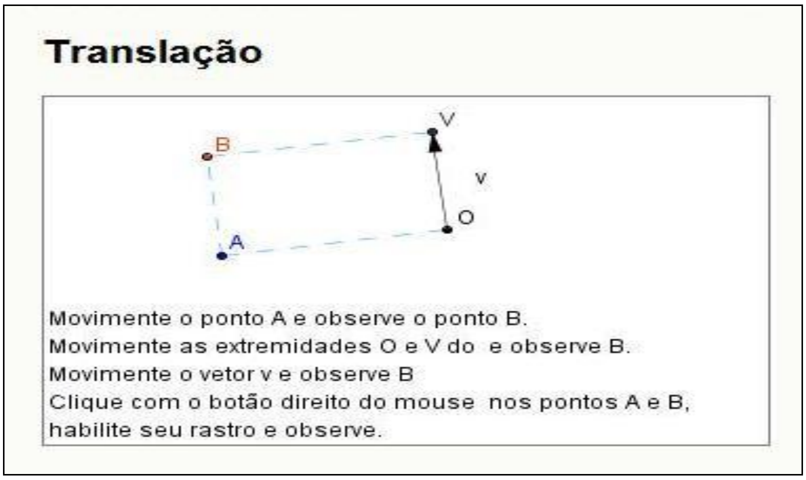


Figura 51 - Translação
Fonte: CD Mídias Digitais I

Nossa expectativa era de que as professoras-alunas não apresentassem dificuldades nas construções do GeoGebra, visto que os conceitos elencados já eram conhecidos. Todavia, observamos que quando os conceitos da primeira atividade foram trabalhados, as professoras-alunas tiveram mais facilidade na execução das tarefas. Já quando fomos executar as tarefas da segunda atividade, as professoras-alunas tiveram dificuldades em aplicar as transformações

[71] No módulo II do CD Mídias Digitais I encontramos animações feitas no GeoGebra com a utilização das transformações geométricas.

geométricas no plano. Por exemplo, ao estabelecer a direção do vetor para efetuar uma translação; onde construir a reta para fazer uma reflexão; o conceito de eixo de simetria; qual ângulo utilizar na rotação. Na análise do questionário observamos que as professoras-alunas não tinham conhecimento sobre as transformações geométricas e constatamos isso na realização dessa atividade. Porém, elas reconheceram a conservação de algumas propriedades em figuras planas sujeitas aos movimentos de reflexão, translação ou rotação. Durante a segunda atividade, algumas delas comentaram que não estudaram estes conceitos e que, portanto, não os ensinavam para seus alunos.

Todas as que estavam presentes[72] afirmaram que a Geometria era pouco trabalhada na escola e que o uso deste *software* facilitaria muito o seu ensino, devido ao dinamismo e à visualização da figuras. Além disso, os conceitos das transformações geométricas planas poderiam ser construídos pelo aluno de uma forma mais fácil, pois o aluno poderia manipular as figuras sem que houvesse a perda de suas propriedades.

No final do primeiro encontro, cada professora-aluna deveria fazer uma produção livre no GeoGebra, inspirada no vídeo, usando as transformações geométricas no plano - a reflexão, a rotação e a translação. Cada uma escolheu um polígono e uma das três transformações para fazer sua produção (anexo A). Todas as participantes do primeiro encontro fizeram produções. Elencamos algumas destas construções que utilizaram diferentes transformações. Na figura 52 verificamos que a professora Cristiane utilizou a rotação para construir sua produção livre. Inicialmente a professora A utilizou a ferramenta *polígono* e desenhou o triângulo amarelo ABC, estabeleceu como ponto central para rotação o ponto C, fez rotação do triângulo ABC em relação a C sob um ângulo de 45º no sentido anti-horário, logo após, fez sucessivas rotações dos triângulos formados, sempre estabelecendo C como ponto central e um ângulo de rotação de 45º no sentido anti-horário. Desta forma a professora A obteve uma figura “cata-vento com oito hélices”, as quais podem mudar de forma mediante movimento aplicado aos vértices do triângulo amarelo. Utilizando a movimentação do triângulo amarelo, a professora A vivenciou o que chamamos de geometria dinâmica. Para colorir os triângulos ela utilizou a *janela de configurações dos objetos geométricos*[73], que possibilita fazer escolhas de cor e estilo, entre outras possibilidades.

---

[72] As professoras Teresinha e Ligiane não compareceram ao primeiro encontro.
[73] Explicações sobre a utilização da janela de configurações de figuras geométricas na seção 4.3

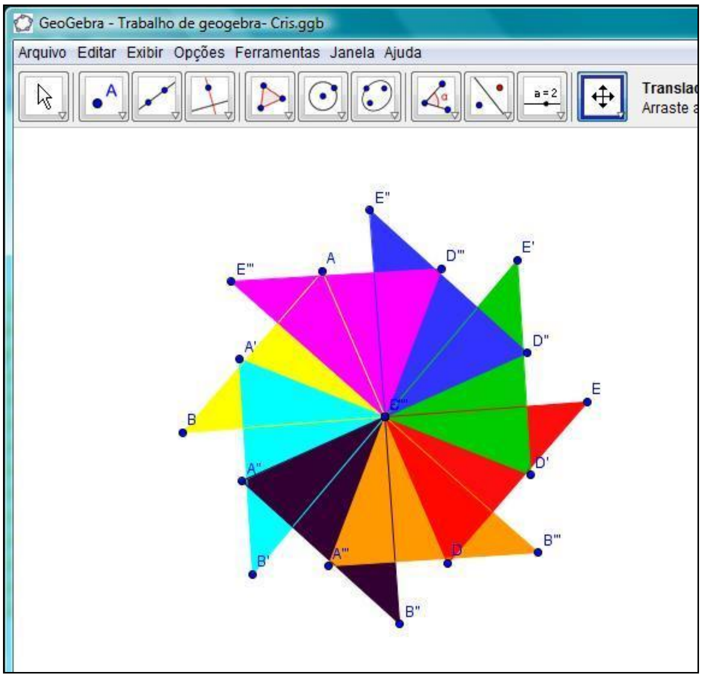


Figura 52 - Construção no GeoGebra da professora Cristiane, rotação.

As professoras Eliane, Marilva e Maura fizeram construções do mesmo tipo que a professora Cristiane, ou seja, utilizaram o triângulo e a rotação, porém a professora Maura (figura 53) escondeu os pontos utilizando a janela de configuração de objetos geométricos, apresentando uma figura com o título *eólica*, na qual os triângulos não se sobrepõem e possuem apenas um vértice em comum, isto é, o centro de rotação.

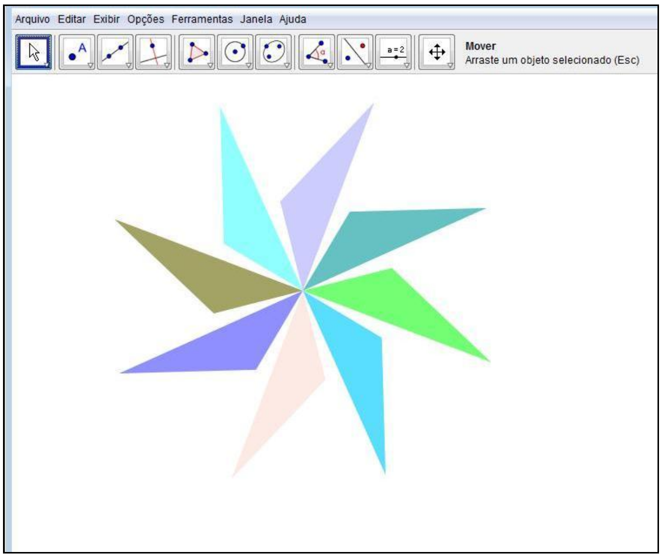


Figura 53 - Construção no GeoGebra da professora Maura utilizando a rotação.

A professora Dalila (figura 54) utilizou uma malha quadriculada para fazer sua construção. Segundo ela, com o uso da malha quadriculada ficaria mais fácil de localizar a reta para fazer a reflexão do polígono em relação a esta reta. Além disso, poder-se-ia verificar, por exemplo, que o ponto A e o A′ são pontos equidistantes da reta, pois A′ é o ponto de reflexão de A em relação à reta dada. Comentou também que o *software* permitia movimentar o ponto A e, como A′ era o seu simétrico, executava os mesmos movimentos que haviam sido aplicados no ponto A, e que isso era possível de realizar com todos os outros vértices do polígono.

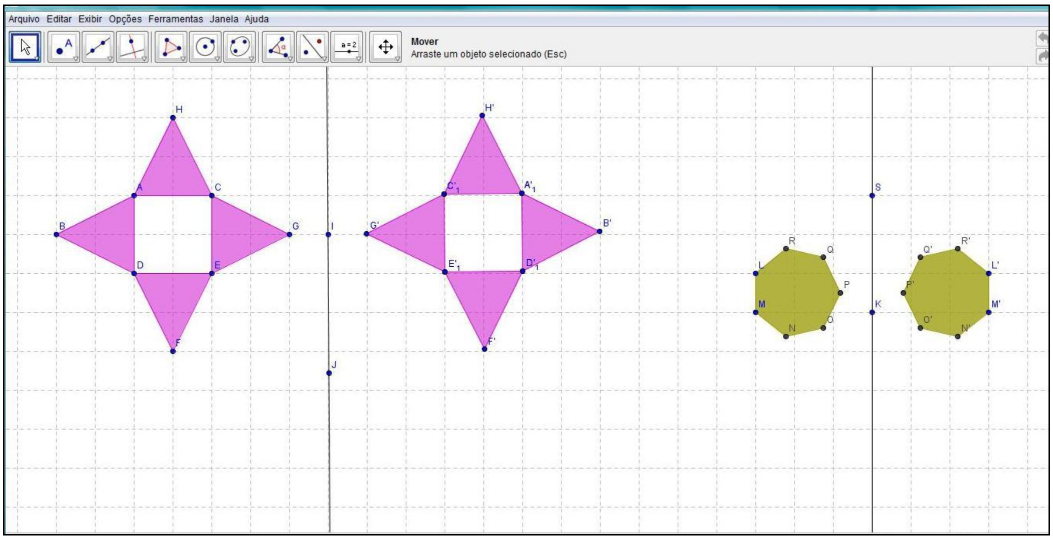


Figura 54 - Construção no GeoGebra da professora Dalila utilizando a reflexão.

A professora Denise construiu inicialmente um hexágono regular (figura 55). Utilizou um segmento de reta $\overline{AB}$; em seguida construiu um círculo de raio AB, com centro em A, logo após, com a ferramenta *compasso* construiu outro círculo com raio AB, com centro em B. Utilizando a ferramenta *interseção de dois objetos* encontrou os pontos C e E, pontos de interseção dos círculos. Construiu o triângulo equilátero ABC, embora o triângulo não apareça na construção[74]. Fez rotações do triângulo equilátero por um ângulo de 60º com centro em B até completar um hexágono regular. Sua intenção era já começar a construir um mosaico usando as transformações geométricas, então transladou o hexágono regular por um vetor, de modo que os dois hexágonos regulares construídos tivessem um lado comum. Em seguida rotacionou este novo hexágono regular por um ângulo de 120º no sentido anti-

[74] A análise foi feita com base no protocolo de construção do GeoGebra, o qual permite acompanhar o processo de construção das figuras.

horário, formando assim uma pavimentação regular. Submeteu sua construção à ferramenta *mover*, e verificou que ela conservava as propriedades da construção original.

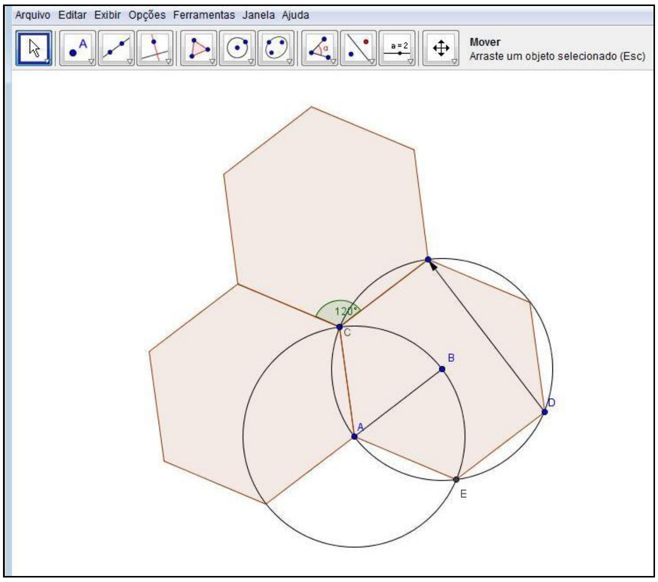


Figura 55 - Construção no GeoGebra da professora Denise

As professoras-alunas não apresentaram muitas dificuldades em relação ao uso do GeoGebra e ainda comentaram que seus alunos teriam mais facilidade já que têm mais contato com a Tecnologia Informática.

Percebemos que a utilização do *software* GeoGebra possibilitou que estas professoras pudessem ter o conhecimento dos conceitos das transformações geométricas planas, visto que cada uma delas soube explicar o comportamento de cada uma das transformações. E, além disso, observaram que as formas das figuras onde eram aplicadas as transformações geométricas planas não se alteravam.

5.4.2. Encontro 2: Pavimentações e as Transformações Geométricas

O segundo encontro foi dividido em três atividades. A primeira atividade consistia da exibição do vídeo *Tesselation Slideshow*[75] o qual apresenta o que é uma pavimentação, indica onde ela pode ser encontrada e quais os tipos de transformação geométrica utilizada nas pavimentações. Seguidamente de exploração coletiva das ferramentas *polígonos* e *polígonos regulares* do GeoGebra. A segunda atividade exigia o uso do *menu* das transformações para construir uma pavimentação regular e uma semirregular. A terceira atividade consistia na

[75] Vídeo apresentado na seção 4.4, p.74.

elaboração, por parte das professoras-alunas, de uma proposta de trabalho a ser implementada em suas escolas, a partir do que haviam aprendido até então.

Análise *a priori*: Com a realização da primeira atividade, em relação à exploração coletiva das ferramentas do GeoGebra (quadro 6), tivemos como o objetivo que as professoras-alunas estabelecessem a diferença na utilização das ferramentas *polígono* e *polígono regular*, observando que, ao utilizar o *polígono regular*, este não se deformava sob a ação da ferramenta *mover*. Além disso, no item *d*, do quadro 6, exploramos a apreensão seqüencial por meio da identificação de propriedades na construção de figuras (DUVAL, apud ALMOULOUD, 2010).

a) Utilizando a ferramenta *Polígono*, crie um triângulo selecionando os vértices.

b) Com a ferramenta *Polígono*, crie um quadrilátero, um pentágono e um hexágono. Exiba os rótulos e mova o ponto A. Observe.

c) No GeoGebra temos a opção para desenhar um polígono regular, selecionando dois pontos e depois fornecendo o número de vértices. Utilize a ferramenta Polígono Regular e desenhe um quadrado. Exiba os rótulos dos pontos e mova o ponto A. Verifique o que acontece. Relacione-o com o item b.

d) Vamos desenhar triângulos eqüiláteros, quadrados e hexágonos regulares usando segmentos, retas e círculos.

Quadro 6 - Recorte da primeira atividade

Na segunda atividade as professoras-alunas deveriam identificar as condições necessárias para se construir uma pavimentação com a utilização de polígonos regulares e congruentes entre si. A partir destas construções de mosaicos regulares, apresentamos o Teorema de Kepler[76], mais para classificação, sem objetivo de demonstrá-lo:

> Existem exatamente onze maneiras de se cobrir o plano utilizando-se exclusivamente polígonos regulares sujeitos às condições: a) se dois polígonos regulares intersectam-se, então essa interseção é um lado ou um vértice comum; b) a distribuição dos polígonos regulares ao redor de cada vértice é sempre a mesma. Alves e Dalcin (RPM,1999, p.12).

[76] A primeira pessoa a exibir os mosaicos semirregulares foi J. Kepler, em um trabalho publicado em 1619, no qual está este teorema. Alves e Dalcin demonstram este teorema apresentando todas as possibilidades de formação dos mosaicos regulares e semirregulares. (ALVES e DALCIN, 1999).

Com a utilização do teorema e apresentando as notações[77] das 11 possibilidades de pavimentações usando polígonos regulares: (3,12,12), (4,6,12), (4,8,8), (6,6,6), (4,4,4,4), (3,6,3,6) , (3,4,6,4), (3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4), (3,3,4,3,4) e (3,3,3,3,3,3), cada professora-aluna teve como tarefa construir uma destas pavimentações observando as condições para a construção dessa pavimentação. Em seguida deveria elaborar uma situação de aprendizagem envolvendo o primeiro e segundo encontros e aplicar em sua turma de alunos.

Análise *a posteriori*:

As professoras-alunas comentaram que o vídeo era muito bom e dinâmico sendo que atraía bastante a atenção e que, além disso, apresentava todos os conceitos que seriam estudados.

Dando seguimento ao encontro executamos coletivamente os itens a, b e c (quadro 6), da primeira atividade proposta para o segundo encontro. Observamos que neste encontro as professoras-alunas já estavam mais confiantes para realizar as atividades e até já respondiam os itens mesmo antes que déssemos auxílio. As professoras Teresinha e Ligiane, ausentes no primeiro encontro, tiveram dificuldades para acompanhar as demais.

Em relação ao item d, incentivamos as professoras-alunas para que respondessem sem o nosso auxílio, falando sobre as propriedades das figuras que deveriam ser construídas. Porém, nenhuma delas conseguiu realizá-lo sem a nossa intervenção. Construímos coletivamente o triângulo eqüilátero. Somente após a construção do triângulo eqüilátero, elas observaram que as figuras deveriam ser construídas obedecendo a certas propriedades peculiares a cada figura. Logo após as professoras-alunas conseguiram construir os outros polígonos solicitados no item d (quadro 6).

Na segunda atividade, solicitamos às professoras-alunas que lessem e respondessem as questões propostas na atividade, usando o GeoGebra. Algumas professoras responderam oralmente que poderíamos construir pavimentações usando somente triângulos eqüiláteros; somente quadrados; somente hexágonos regulares. Porém, não saberiam construir no GeoGebra. Foi então que nós perguntamos: - *E se nós usarmos as transformações geométricas planas?* Algumas professoras responderam que sim, que construiríamos a primeira figura, e, a partir dela, faríamos rotações e translações. Construímos então, coletivamente, as três pavimentações mencionadas anteriormente – com triângulos equiláteros, com quadrados e com hexágonos regulares.

[77] A notação (3, 12, 12) indica que em cada vértice tem-se o encontro de três polígonos regulares: um triângulo e dois dodecágonos regulares.

Observamos que a maior parte das professoras-alunas não tinha conhecimento das pavimentações. Foi só a partir das construções feitas no GeoGebra, que elas perceberam que para construir uma pavimentação no plano, era necessário que os polígonos se encaixassem (sem que houvesse sobra ou sobreposição) e que a soma dos ângulos que tinham o vértice em comum, deveria ser de 360º.

Na pergunta sobre pavimentações com polígonos regulares não necessariamente congruentes entre si, a professora A disse que era possível, porém não com todos os tipos de polígonos regulares. Houve neste momento a necessidade de nossa intervenção, explicando o Teorema de Kepler. Discutimos sobre o teorema e partimos para a construção de pavimentações usando polígonos regulares não congruentes entre si, ou seja, pavimentações semirregulares. Dentre as onze possibilidades de pavimentação do plano apresentadas no teorema, foram escolhidas oito para serem construídas. Cada professora-aluna escolheu uma das oito pavimentações semirregulares e a construiu no GeoGebra (anexo B).

Percebemos nesta atividade que, quando as professoras-alunas precisavam usar a rotação, algumas não se davam conta de que havia a necessidade de saber a medida do ângulo interno do polígono regular e/ou também do ângulo central do polígono ao qual pertencia o centro de rotação. Observamos as dificuldades dessas professoras-alunas quando elas deveriam definir o local onde colocar o ponto ou a reta para fazer a reflexão do polígono. Na translação, a dificuldade foi em estabelecer o tamanho do vetor para fazer o deslocamento da figura, de modo que os polígonos se encaixassem. Acreditamos que estas dificuldades não estão relacionadas com o conhecimento do *software*, mas com os conceitos de Geometria.

Na figura 56, destacamos a construção de uma destas pavimentações semirregulares. Inicialmente a professora Dalila construiu um segmento $\overline{AB}$, e a partir dele um dodecágono regular. Em seguida usou um dos lados do dodecágono regular, o segmento $\overline{AL}$, e construiu um hexágono regular. Traçou a reta $\overleftrightarrow{CI}$ e a reta $\overleftrightarrow{BH}$ e obteve o ponto de intersecção destas duas retas, o ponto W. Usou o ponto W como centro de rotação e fez rotações do hexágono regular por um ângulo de 60º graus. Obteve diversas rotações dos hexágonos regulares até completar seis hexágonos ao redor do dodecágono regular. Com esta formação entre os hexágonos regulares e o dodecágono regular, ela completou com seis quadrados formados a partir dos lados do dodecágono regular. Marcou o ponto médio dos lados dos quadrados que estão em lados opostos do dodecaedro regular e em seguida traçou um vetor, a partir deste vetor completou o mosaico fazendo translações.

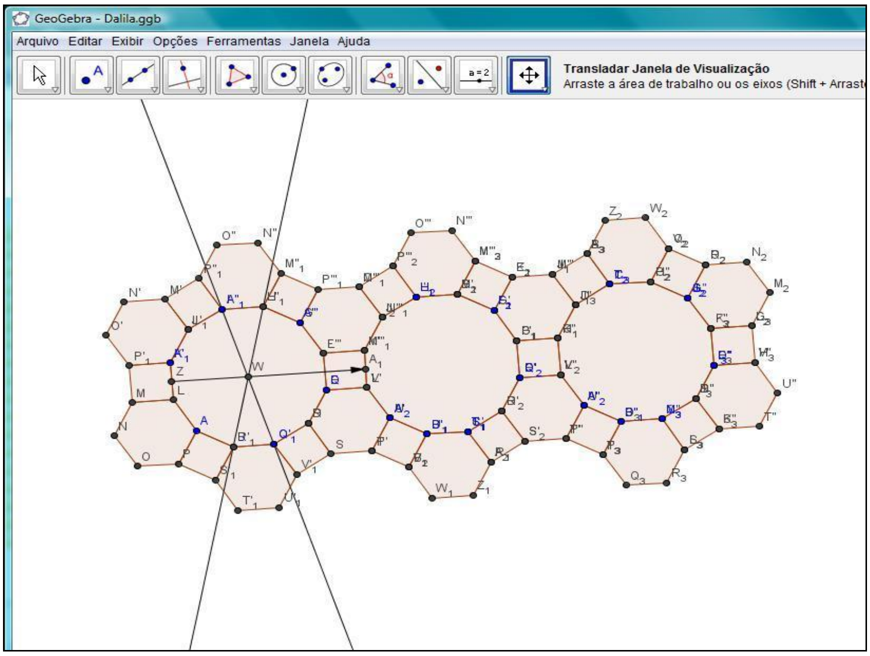


Figura 56 - Produção professora Dalila, mosaico semirregular (4,6,12)

Durante esta construção a professora Dalila nos solicitou atendimento sobre quantos graus deveria ser a rotação dos hexágonos ao redor do dodecágono regular. Foi então que nos referimos ao ângulo central do hexágono. Aproveitamos para fazer uma série de questionamentos. *Por que ela havia estabelecido o ponto W como ponto central de rotação? Esse ponto não era o ponto central também do dodecágono regular? Qual era o valor do ângulo central do dodecágono regular?* A partir destas perguntas a professora B, conseguiu fazer as rotações e completar sua construção.

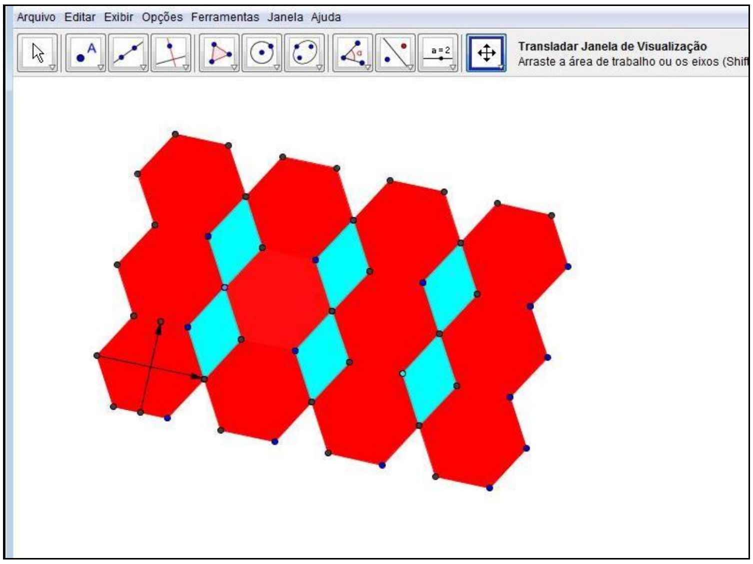


Figura 57 - Produção professora Cristiane

A professora Cristiane (figura 57) fez sua pavimentação utilizando inicialmente a ferramenta *polígono regular* para construir o hexágono regular e a partir de dois vetores no hexágono regular fez translações. Entre os hexágonos regulares coloridos de vermelho, formaram-se triângulos equiláteros, os quais a professora A coloriu de azul. Segundo ela, foi possível perceber que os triângulos formados eram eqüiláteros devido à condição de formação da pavimentação semirregular (3,3,6,6). Porém, observou que sua construção não obedecia ao teorema de Kepler, pois se considerasse o arranjo (3,3,6,6) (figura 58) ao redor do vértice V, e tentasse estender esta configuração de modo que o mesmo arranjo se repetisse ao redor do V_1, viu que seria impossível efetivar esse mesmo arranjo ao redor do vértice V_2. Fez, então, uma comparação com o arranjo (3,6,3,6) e percebeu que se tratava de outra pavimentação. Concluiu, então, que o arranjo (3,3,6,6) não poderia ser estendido de modo a formar um mosaico no plano.

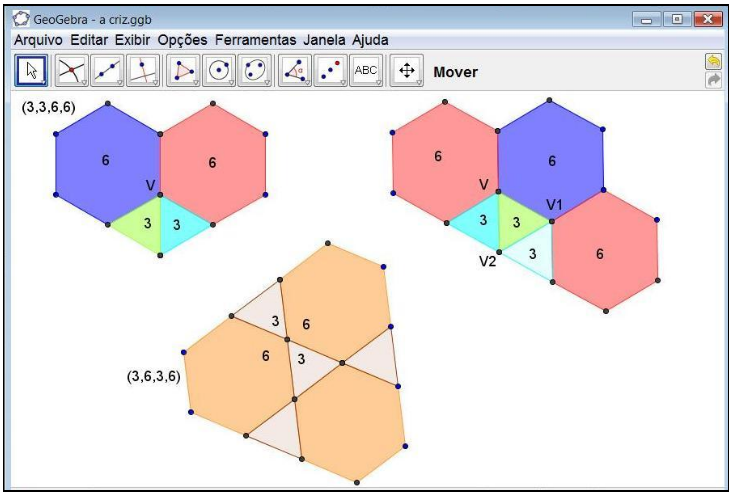


Figura 58 - Arranjo (3, 3, 6, 6) e (3, 6, 3, 6)

Na figura 59, temos a produção da professora Denise, a qual construiu um mosaico de acordo com o arranjo (3, 3, 4, 3, 4).

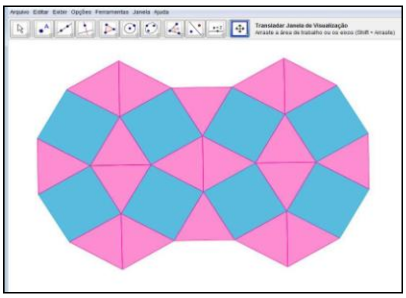


Figura 59 - Produção da professora Denise, mosaico semirregular (3,3,4,3,4)

Inicialmente, a professora Denise construiu um segmento de reta $\overline{AB}$, construindo, em seguida, dois círculos de raio $\overline{AB}$, com centros em A e B, respectivamente (figura 60). Verificou os pontos de interseção dos círculos e marcou-os. Em seguida, com a ferramenta polígono, construiu os triângulos equiláteros ABC e ABD. Traçou a reta $\overleftrightarrow{BC}$ e uma perpendicular *e* a $\overleftrightarrow{BC}$ pelo ponto B. Selecionou o ponto E de interseção do círculo com a reta *h*. Traçou uma paralela a reta $\overleftrightarrow{BC}$ pelo ponto E. Construiu o quadrado CBEG. Utilizou o mesmo procedimento, ou seja, traçar retas perpendiculares e paralelas para construir o quadrado BDJH. Traçou a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ e por reflexões obteve os quadrados B′DJ′H′ e CB′E′G′. Para completar o mosaico como apresentado na figura 59 a professora foi utilizando as transformações geométricas. A professora Eliane produziu um mosaico do mesmo tipo que o da professora Denise, porém com cores diferentes. Observamos nessa construção que a professora Denise utilizou os diversos conceitos geométricos e as ferramentas do GeoGebra abordados no primeiro encontro.

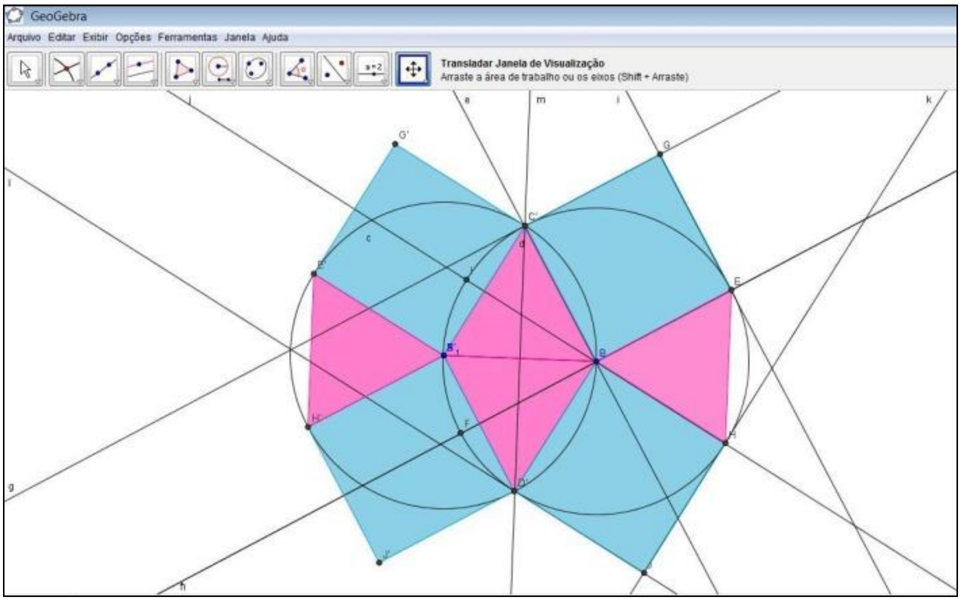


Figura 60 - Procedimento de construção do mosaico (3,3,4,3,4)

As professoras Ligiane e Marilva produziram mosaicos do mesmo tipo (figura 61), isto é, do arranjo (4,8,8). Inicialmente construíram um octógono regular ABCDEFGH diretamente pela ferramenta *polígono regular*. Marcaram o ponto médio I do lado AB e o ponto médio J do lado oposto paralelo a AB, traçaram um vetor de I a J e a partir deste vetor fizeram translações obtendo outros octógonos regulares na horizontal. Efetuaram o mesmo procedimento e obtiveram os octógonos regulares na vertical. Entre os octógonos regulares formaram quadrados, os quais foram coloridos de azul. Observamos que as professoras Ligiane e Marilva compartilharam os conhecimentos sobre a utilização das ferramentas do GeoGebra.

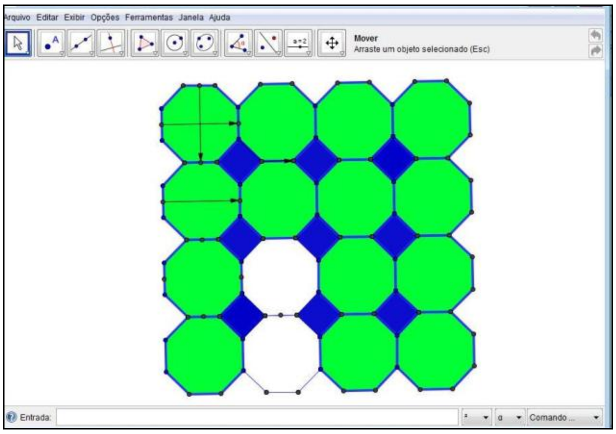


Figura 61 - Produção da professora Marilva, mosaico semirregular (4,8,8)

Ao final do encontro conversamos sobre as atividades que cada professora-aluna deveria realizar, ou seja, elaborar uma situação de aprendizagem envolvendo o primeiro e o segundo encontro, relatando e apresentando os resultados no último encontro. Também definir a série de aplicação da situação de aprendizagem. Dentre as professoras-alunas, somente as professoras Denise e Marilva comentaram sobre o que pensaram para a aplicação. Denise pensou em incluir a arte do *patchwork* e Marilva a colmeia. Também combinamos sobre as imagens dos mosaicos que deveriam trazer para o próximo encontro. Observamos que as professoras-alunas ainda não se sentiam seguras quanto a utilização do GeoGebra.

5.4.3. Encontro 3: Reprodução de Mosaicos

Na primeira atividade, contemplamos a exibição de um vídeo sobre mosaicos pintados nas paredes e pisos das Igrejas da Quarta Colônia de Imigração Italiana do Rio Grande do Sul[78]. Seguimos com a exploração o CD Mídias Digitais I, no módulo I, que trata de Geometria e mosaicos, e no módulo II, que trata das transformações geométricas planas e ladrilhagem. Na segunda atividade apresentamos algumas imagens de mosaicos da Igreja

[78] Mais detalhes do vídeo na seção 4.4, p.75.

Santo Antônio de Pádua, situada em Sombrio – SC e, a partir de mosaicos, cada professora-aluna deveria fazer a sua reprodução. Assim como no segundo encontro, a professora-aluna deveria elaborar uma situação de aprendizagem envolvendo o terceiro encontro e aplicar em sua turma de alunos.

Análise *a priori*: O objetivo deste encontro era a reprodução de um mosaico encontrado em diversos locais da cidade. Aqui a professora-aluna deveria fazer uma descrição dos elementos geométricos utilizados na construção; descrever o local onde se encontra o mosaico; enviar o arquivo do GeoGebra; registrar suas considerações sobre a construção, descrevendo as dificuldades encontradas, tanto na Matemática quanto na utilização do *software* GeoGebra. Ao movimentarmos sua construção, esta deveria conservar todas as suas propriedades, sem deformar-se.

Análise *a posteriori:* O encontro começou com a apresentação do vídeo[79] sobre as Igrejas Matrizes da Quarta Colônia de Imigração Italiana do Rio Grande do Sul. Comentamos sobre o vídeo, sendo que as professoras-alunas o relacionaram com os mosaicos que fazem parte da igreja de Santo Antônio, no município de Sombrio –SC. Além disso, foi mencionado que diversas professoras de arte das escolas levam os alunos para analisar estes mosaicos. Foi quando ressaltamos que nós aproveitamos tais visitas para também trabalhar as transformações geométricas planas.

As professoras-alunas trouxeram fotos de mosaicos retirados da internet e de livros, de forma que não poderiam descrever o local onde se encontrava seus mosaicos, nem produzir um breve histórico sobre o local, como havíamos planejado. Porém, a atividade de reprodução do mosaico foi realizada. Cada professora-aluna fez a peça básica da pavimentação e construiu o mosaico utilizando as transformações geométricas planas (anexo C). No que segue, apresentamos as reproduções das professoras-alunas que estavam presentes no encontro. Na figura 62 observamos uma destas reproduções feita pela professora Denise, a qual faz cursos de *patchwork* e idealizou este mosaico.

[79] O vídeo destaca a História, Arte, Matemática e *Design* nas Igrejas da Quarta Colônia de Imigração Italiana do Rio Grande do Sul, localizada na região central do estado. Produzido na UNIFRA: Centro universitário Franciscano. As características do vídeo estão na seção 4.4, p.75.

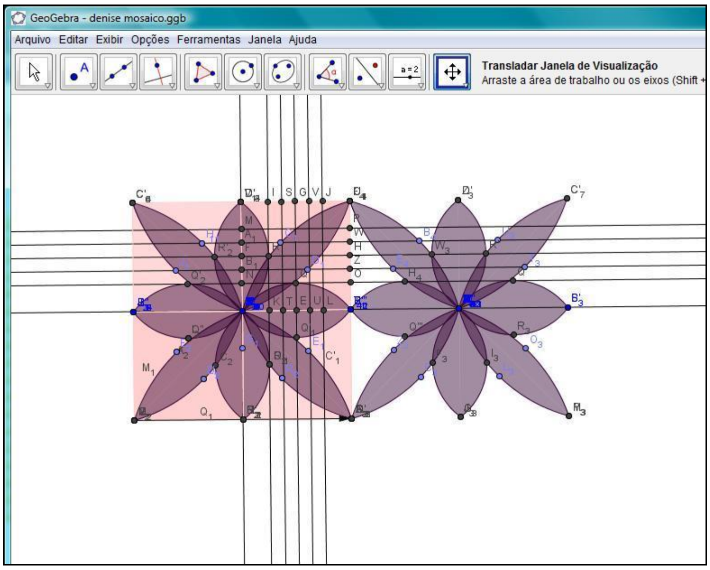


Figura 62 - Reprodução de Mosaico da professora Denise

Sua peça inicial foi um quadrado. Estabeleceu os pontos médios dos lados do quadrado e o quadriculou, utilizando diversas retas paralelas e perpendiculares, passando por estes pontos. Obteve os pontos de intersecção das retas. Quando fez o quadriculado, pensou na hipótese de usar circunferências para a construção das pétalas da flor. Porém, não conseguiu utilizá-las. Então a professora C solicitou a nossa ajuda. Foi quando perguntamos de quantos e quais pontos ela precisaria para fazer a pétala da flor? Ela mostrou os três pontos. Sugerimos que utilizasse uma ferramenta que ainda não havia sido utilizada, que era o *arco circular dados três pontos*. Selecionou os três pontos desejados e conseguiu fazer a pétala da flor. E por esta ferramenta construiu as demais que fazem parte da peça do motivo. Com movimentos de reflexão, a partir de uma reta, construiu as outras pétalas, e por translação, por meio de um vetor, construiu a outra peça do mosaico. Observamos que esta professora ao longo dos encontros foi aumentando gradativamente o nível de dificuldade nas suas construções. Isso significa um crescimento na sua apropriação das ferramentas do software. Ao final de sua reprodução, submetemos a construção à ferramenta *mover* e ela manteve as propriedades da construção inicial, sem deformar-se.

Na figura 63, vemos a produção da professora Dalila, a qual iniciou sua construção a partir de um segmento $\overline{AB}$. Com a utilização desse segmento construiu dois círculos com centros em A e B, respectivamente. Em seguida encontrou os pontos C e D de interseção dos círculos. Ela traçou as retas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$. Em seguida encontrou os pontos de interseção dessas retas com os círculos. E, a partir daí, foi traçando retas paralelas e achando os pontos de interseção destas, formando uma malha triangular. Com esta malha construiu alguns hexágonos e, logo após, por rotações e reflexões construiu os demais. Utilizou as configurações dos objetos geométricos para colorir apresentando sua reprodução. Observamos que a professora utilizou-se dos conceitos básicos da Geometria para a construção de seu mosaico, e, além disso, sua reprodução conservou as propriedades construídas inicialmente

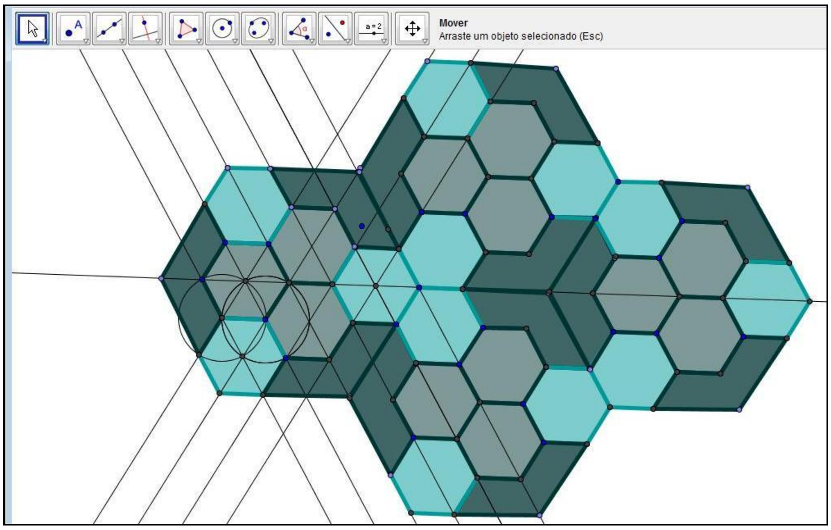


Figura 63 - Reprodução do Mosaico da professora Dalila

A professora Cristiane iniciou sua reprodução da mesma forma que a professora Dalila, porém, construiu como peça básica de seu mosaico um quadrado, utilizando retas paralelas e perpendiculares. A partir deste, encontrou os pontos médios de seus lados e traçou retas paralelas. Construiu na metade desse quadrado três polígonos, um hexágono e dois triângulos os quais coloriu. Utilizando a reflexão em relação à reta que passava pelo centro do quadrado, completou sua peça básica do mosaico. A seguir, com reflexões, foi construindo o restante do mosaico. Entretanto, quando submetemos sua construção à ferramenta *mover*, observamos que o seu mosaico se "desmanchou" (figura 64). Fomos, assim, verificar porque isso havia acontecido. Identificamos que ao construir o mosaico a professora utilizou duas retas, as quais não obedeciam à propriedade do paralelismo. A partir deste fato ela percebeu a importância das ferramentas do *software*, pois ao fazer a construção deveria ter utilizado em todas as retas a ferramenta *reta paralela*. Dentre as situações de erros cometidos pelas professoras, nós destacamos esta, enfatizando aqui o estudo do erro no aprendizado escolar.

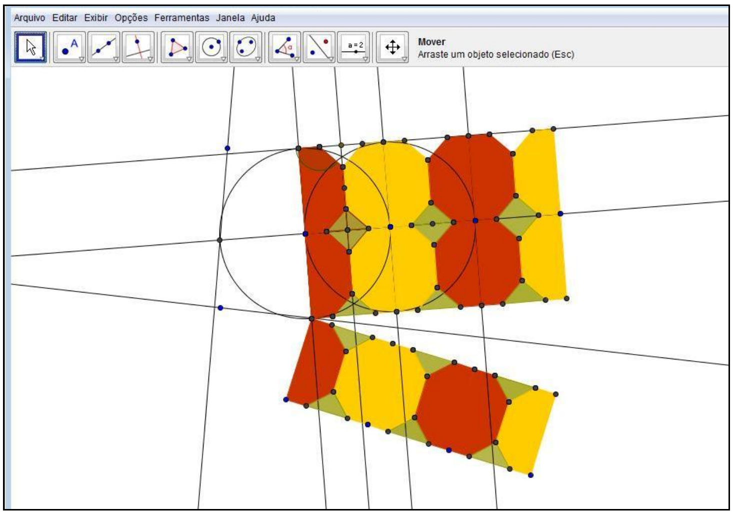


Figura 64 - Reprodução da professora Cristiane, submetido à ferramenta *mover*

Podemos observar que as professoras-alunas citadas anteriormente iniciaram suas reproduções utilizando um segmento $\overline{AB}$ e dois círculos, de modo a construir a sua peça inicial. Com a professora Marilva também não foi diferente (figura 65): criou primeiramente um triângulo eqüilátero, e com rotações, completou o hexágono regular. Traçou as retas paralelas que continham as bases do hexágono regular. Em seguida traçou retas perpendiculares a estas, passando pelos centros dos círculos construídos inicialmente. Com rotações, reflexões e translações, completou a sua reprodução. A professora coloriu os polígonos iniciais antes de usar as transformações geométricas, pois desta forma ao fazer as reflexões, por exemplo, o polígono refletido seria da mesma cor que o inicial. Sua reprodução ao ser movimentada conservava as propriedades dos objetos construídos inicialmente.

Observamos que as dificuldades das professoras-alunas na reprodução dos mosaicos foram: estabelecer quais as propriedades dos objetos que deveriam ser mantidas nas construções; identificar nos mosaicos qual a peça inicial a ser construída e quais transformações elas poderiam utilizar. A partir do momento em que cada professora-aluna estabelecia estas condições, avançava e conseguia iniciar sua produção.

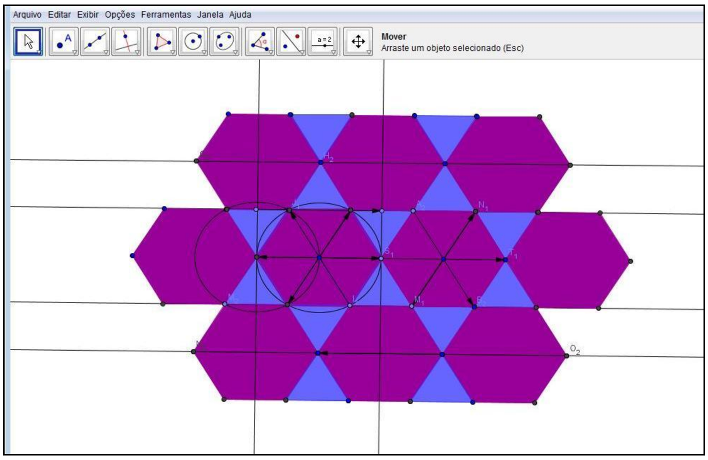


Figura 65 - Reprodução da professora Marilva

No final do encontro as professoras-alunas pensaram que também poderiam aplicar com seus alunos uma atividade similar a que foi realizada nesse dia.

5.4.4. Encontro 4: Mosaicos de Escher e as Transformações Geométricas.

A opção pelas obras de Escher se deu pelo fato de que ele estudou as propriedades geométricas para criar seus mosaicos; o artista utilizava as transformações geométricas e os padrões geométricos a partir de divisões regulares da superfície, ou seja, malhas quadriculadas, triangulares, hexagonais, etc. Suas obras nos permitem observar pavimentações e simetrias. E com o GeoGebra é possível a construção de pavimentações com movimentos no estilo de Escher.

Contemplamos neste encontro a apresentação do vídeo Escher e a Geometria[80], no qual são destacados os elementos matemáticos utilizados pelo artista, bem como os conceitos das transformações geométricas. Logo após a professora-aluna deveria utilizar o CD Mídias Digitais I, Módulo II em *Complementos*, a partir do qual tem orientações para construção de mosaicos via movimentos. Assim, manipularia os mosaicos e em seguida verificaria como eles são construídos.

Foram apresentadas algumas obras de Escher, nas quais cada professora-aluna deveria identificar qual tipo de transformação geométrica plana foi utilizada. Na segunda atividade, foi fornecida às professoras-alunas uma sequência de figuras mostrando exemplos de como as obras de Escher são construídas utilizando a reflexão, a translação e a rotação. Logo após, esta

[80]Detalhes do vídeo no desenvolvimento na seção 4.4, p.76.

deveria construir um mosaico no estilo de Escher usando as transformações geométricas do GeoGebra e elaborar uma situação de aprendizagem para seus alunos.

Análise *a priori*: Na primeira atividade, ao utilizar os *applets* do CD Mídias Digitais I, cada professora-aluna deveria identificar o polígono utilizado como figura inicial para a criação do mosaico (figura 67), bem como as transformações geométricas utilizadas. Na segunda atividade, na criação do mosaico no estilo de Escher, dever-se-ia observar que todas as figuras obtidas por uma transformação geométrica (isometria) seguem os movimentos efetuados na figura inicial, pois preservam as propriedades da sua construção. Além disso, ela deveria relacionar e apresentar as características de seu mosaico com as obras de Escher.

Análise *a posteriori*: Assistimos ao vídeo intitulado *Escher e a Geometria*[81] que traz uma reportagem sobre as obras de Escher numa exposição do Centro Cultural do Banco do Brasil em São Paulo. Depois da exibição do vídeo, começamos a primeira atividade quando discutimos sobre quem foi Escher e como suas obras foram produzidas. Em seguida utilizamos o CD Mídias Digitais I, Módulo II, em *Complementos,* momento no qual as professoras-alunas manipularam os mosaicos construídos e verificaram as orientações para construção de mosaicos por meio de movimentos. Durante a realização desta atividade, observamos como as professoras-alunas ficaram entusiasmadas com as imagens produzidas (figura 66). A professora Eliane fez o seguinte comentário: *"Se nós gostamos, imagina os alunos."* E a professora Teresinha enfatiza: *"Olha aqui, nossa, que interessante, eu descobri que a figura que originou este mosaico foi um triângulo. Gostei muito, que legal!*

Figura 66 - Entusiasmo dos professores-alunos
Fonte: imagem do vídeo produzido pela autora

[81] O vídeo pode ser encontrado no link http://www.youtube.com/watch?v=6aRFy73cZxY .

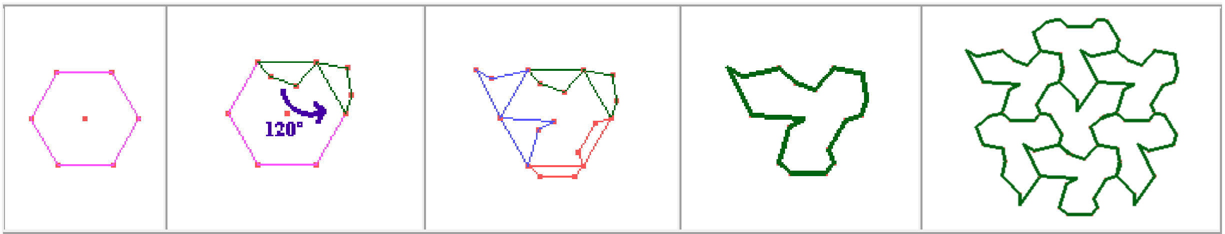
À medida que elas iam interagindo com os mosaicos, íamos direcionando para que fossem observando o comportamento dos movimentos e identificando qual polígono havia sido a figura inicial para a criação do mosaico, bem como quais transformações geométricas haviam sido utilizadas. Houve nesse momento a necessidade de nossa intervenção nas orientações para a construção dos mosaicos utilizando movimentos.

No material (apêndice D) que cada professora-aluna recebeu nesse encontro, foram apresentadas diversas obras de Escher, nas quais as professoras-alunas deveriam identificar quais transformações geométricas haviam sido utilizadas. Eles as observaram e coletivamente íamos discutindo qual transformação estava presente na obra. Também no material foram colocados três quadros mostrando passo a passo como Escher produzia suas obras, ou seja, mostrava a figura inicial e as transformações que iam sendo feitas até a arte final.

A partir da exibição do vídeo, da interação com os mosaicos no CD Mídias Digitais I, das orientações de como fazer uma obra no estilo de Escher usando as transformações geométricas, as professoras-alunas começaram a produzir suas obras no GeoGebra. De acordo com as professoras-alunas, de todas as atividades realizadas na oficina, esta foi considerada a mais difícil de ser executada, pois exigia o conhecimento dos conceitos trabalhados nos encontros anteriores.

Algumas professoras-alunas preferiram, ao invés de criar uma construção, fazer uma cópia de uma obra de Escher ou mesmo de um dos mosaicos exibidos no CD Mídias Digitais I. A seguir apresentamos as diferentes opções de construção.

Na figura 68 que apresenta construção da professora Dalila, observamos que para fazê-la ela seguiu exatamente as orientações do CD Mídias I, Módulo II[82]. Ela fez a reprodução do mosaico dois (figura 67), que é exibido neste CD.



Hexágono regular	Polígono qualquer P, usando como um dos lados o lado do hexágono	Rotação de P em torno de vértice comum com o hexágono, de ângulo de 120 graus	Mesmo procedimento para os demais lados do hexágono	Construção da peça final, usando vértices do hexágono e os pontos criados. Sucessivas rotações da peça final, de ângulo de 120 graus.

Figura 67 - Construção do Mosaico 2
Fonte: CD Mídias Digitais I

[82] O CD Mídias Digitais I, Módulo II, em *Complementos*, possui orientações para construção de mosaicos através de movimentos.

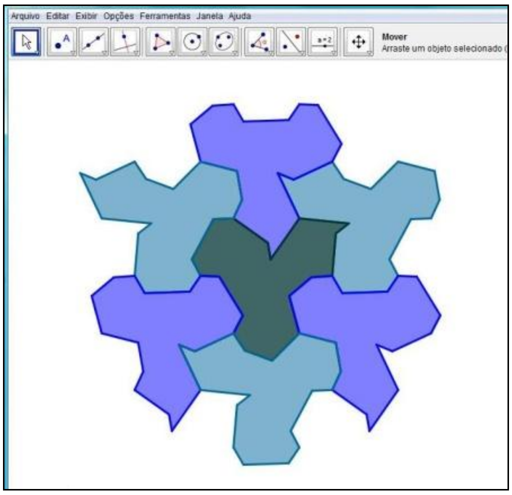


Figura 68 - Construção da professora Dalila, mosaicos em movimento

A professora Cristiane construiu um quadrado diretamente pela ferramenta *polígono regular*; em seguida, construiu um polígono qualquer P utilizando como lado um dos lados do quadrado, traçou um vetor com a medida do lado do quadrado, e a partir dele fez translação do polígono P. Com a ferramenta *polígono,* construiu a peça final usando os vértices do quadrado e os pontos criados. Finalmente fez translações na horizontal e vertical a partir de vetores dados e produziu o mosaico da figura 69. As professoras Eliane e Teresinha (anexo D) seguiram os mesmos procedimentos.

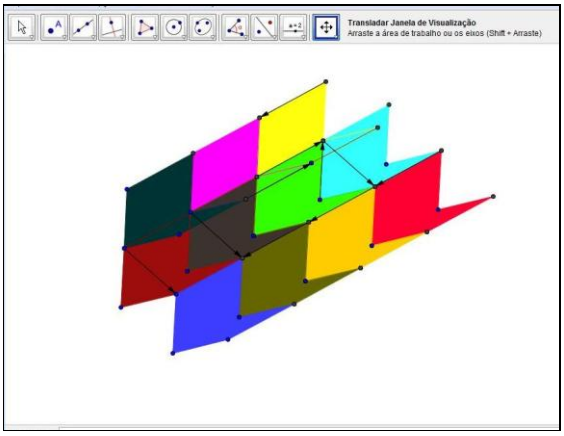


Figura 69 - Construção da professora Cristiane, mosaico em movimento

A professora Marilva (figura 70) fez sua própria criação a partir de um quadrado seguindo os mesmos procedimentos da professora A, ou seja, utilizando as ferramentas *segmento definido por dois pontos*, *vetor definido por dois pontos* e *transladar objeto por um vetor.* A seguir coloriu os polígonos utilizando o *menu Editar*, *propriedades*, em *cor e estilo*. Porém, escondeu os objetos que deram suporte à construção, isto é, o quadrado, os pontos e os vetores.

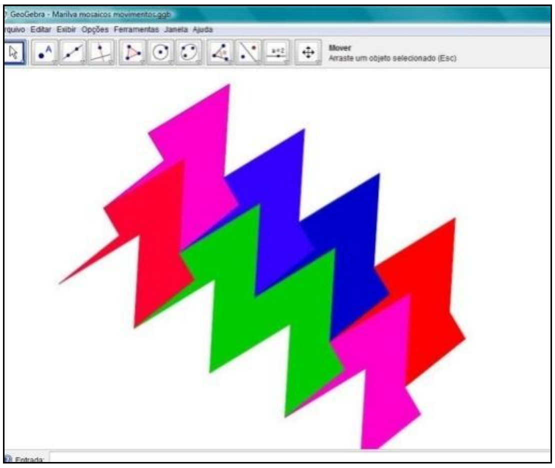


Figura 70 - Produção professora Marilva, mosaicos em movimento

Já a professora Denise, (figura 72) preferiu fazer sua construção no estilo de Escher, seguindo as orientações do material impresso do encontro (apêndice D). Iniciou com um quadrado, desenhou segmentos de reta a partir do lado do quadrado na parte externa, traçou uma reta pela diagonal do quadrado e fez reflexões destes segmentos por esta reta. Fez rotações destes segmentos em relação ao vértice do quadrado por um ângulo de 90º no sentido horário e fechou o polígono formado pelos vértices do quadrado e os pontos criados (figura 71) e coloriu de rosa.

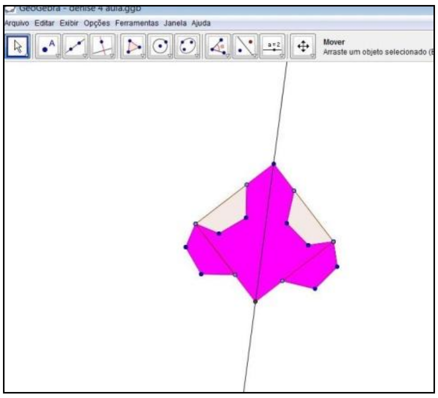


Figura 71 - Peça inicial do mosaico da professora Denise

Com este polígono, fez uma rotação de 180º por um ponto e coloriu o polígono de verde. Traçou uma reta paralela à reta dada por um ponto do polígono verde e uma perpendicular a esta reta neste ponto. A seguir fez reflexões para completar sua produção. A professora Maura seguiu o mesmo procedimento, colorindo, todavia, todos os polígonos construídos e acrescentando segmentos de reta num dos polígonos para que ficasse parecido com um peixe, de acordo com uma das obras de Escher (figura 73).

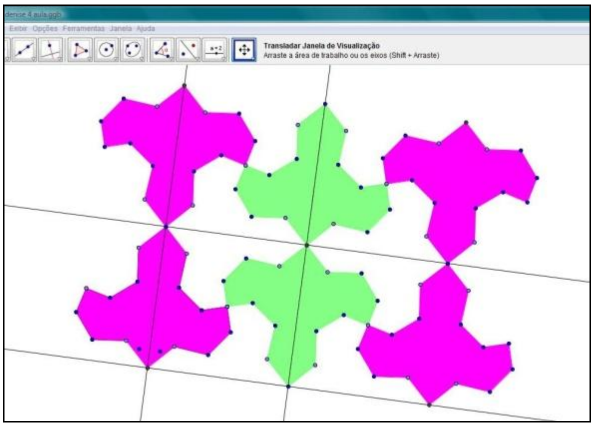


Figura 72 - Produção professora Denise, mosaicos em movimento no estilo de Escher

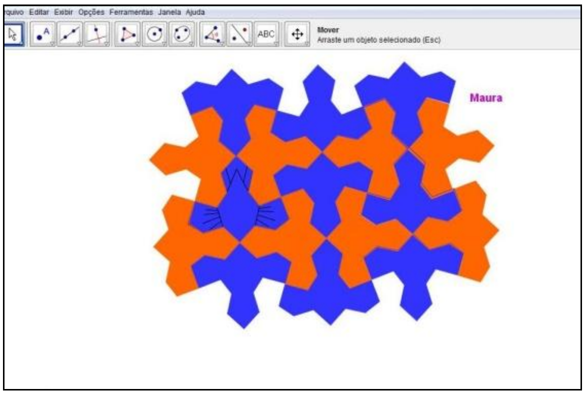


Figura 73 - Produção da professora Maura, mosaicos em movimento no estilo de Escher

Durante este encontro observamos que as professoras-alunas executaram as atividades com muito entusiasmo, várias vezes comentando sobre as possibilidades que o *software* GeoGebra poderia proporcionar. Com sua utilização poder-se-ia trabalhar diversos conceitos geométricos, a partir dos quais o aluno pode interagir movimentando as construções e observando as propriedades geométricas das figuras. Também comentaram sobre as figuras de Escher, afirmando que sua obra é excelente fonte de consulta para se trabalharem os conceitos da Geometria das transformações.

Nossa expectativa no início do encontro era a de que todas iriam construir com o auxílio do Geogebra um mosaico no estilo de Escher e, ao final do encontro, apenas uma professora, Ligiane, teve que sair antes do seu término e não construiu o mosaico. Sobre o desenvolvimento de uma atividade para os alunos relacionando as obras de Escher, a professoras-alunas comentaram que talvez fosse difícil contemplar este tema, visto que já estávamos no último bimestre do ano letivo, e elas precisariam de mais tempo para o desenvolvimento.

5.4.5. Encontro 5: Organização das Práticas com Alunos

A escola, não podendo trabalhar a Matemática tal qual é tratada em níveis superiores, requer dos responsáveis e envolvidos no processo escolar uma transformação desse saber matemático. Cabe ao professor, adequar esse saber aos interesses e necessidades do aluno (MACHADO, 2008).

O quinto encontro foi reservado para organizar a apresentação das experiências que as professoras-alunas foram pensando e implementando, com seus alunos, ao longo da realização da oficina. Relembramos que no início da oficina foi combinado que as professoras-alunas, a partir do segundo encontro, iriam aplicar com seus alunos, os conhecimentos adquiridos durante os encontros.

Durante a realização dos encontros foram pensadas atividades similares às desenvolvidas na oficina, no entanto, surgiram algumas ideias diferentes: relacionar com a arte do *patchwork*; fazer reproduções de habitações de animais, como por exemplo, colmeias; reproduzir algumas formas geométricas encontradas na natureza, como flocos de neve, flores, etc.

Para dar uma ideia de como as professoras-alunas deveriam apresentar suas transposições no dia 30/11/11 (último encontro), nós organizamos uma apresentação de *PowerPoint* (apêndice F), apresentando objetivos e exemplos de construções no GeoGebra dos trabalhos desenvolvidos na oficina.

Após a apresentação do *PowerPoint*, exploramos o menu *Arquivo* no GeoGebra (figura 74), verificando que o *software* possibilita a exportação da figura para a área de transferência na montagem dos *slides* de apresentação.

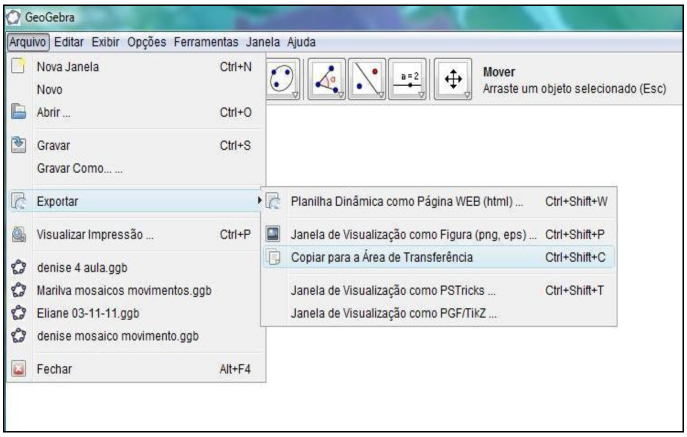


Figura 74 - *Interface* do Geogebra, *menu Arquivo*

Dando seguimento ao encontro[83], falamos sobre como capturar a imagem de um vídeo ou figura para sua colocação nos *slides* de apresentação, e, a partir de então, cada professora-aluna ficou livre para organizar suas atividades.

Análise *a priori:* Neste encontro as professoras-alunas deveriam organizar suas atividades concebidas e aplicadas com seus alunos, utilizando os *menus* do GeoGebra e a organização de um *PowerPoint.*

Análise *a posteriori:* Durante a apresentação do nosso *PowerPoint* observamos o interesse das professoras-alunas em conhecer as construções realizadas pelas colegas da oficina. Observaram as construções identificando as figuras, os conceitos geométricos e as transformações geométricas utilizadas em cada uma. Logo após a apresentação, cada professora-aluna procurou organizar suas atividades.

5.4.6. Encontro 6: Resultados das Práticas com Alunos

Este encontro foi realizado com a presença das professoras de Matemática Cristiane, Dalila, Marilva e Denise, a professora Maura, responsável pela sala de informática. Contamos também com a presença da responsável pelo apoio pedagógico e da secretária da Educação da SMECE, estas últimas com o objetivo de avaliar a oficina desenvolvida.

[83] Neste quinto encontro tivemos a visita da ARTV, que fez uma reportagem a respeito do curso, elencando os objetivos e conceitos abordados. A ARTV é uma TV da região do Vale do Araranguá-SC, que faz parte do Grupo Correio do Sul. O vídeo da reportagem pode ser encontrado no link http://www.grupocorreiodosul.com.br/artv/reportagens/professoresdesombriorecebemcursodeforma-ocontinuada/

As professoras Cristiane, Marilva e Denise atuam na Escola Municipal Professora Alda Santos de Vargas. É a maior escola municipal de Sombrio-SC. A professora Dalila atua na Escola Municipal Nilza Matos Pereira, no CAIC, sede da Secretaria da Educação de Sombrio. Foi nessa escola que realizamos a oficina. As duas escolas contam com laboratórios de informática equipados e em perfeito funcionamento. As professoras-alunas Cristiane, Marilva, Denise e Dalila, foram as professoras mais ativas, as quais nós acompanhamos mais de perto nas análises *a posteriori.*

Análise *a priori:* Neste encontro, cada professora-aluna apresentaria a experiência realizada com seus alunos. A partir da apresentação, por meio de um *PowerPoint*, a professora-aluna deveria abordar todas as atividades desenvolvidas, mostrar exemplos de trabalhos de alunos feitos no GeoGebra e dificuldades e sucessos constatados na experiência aplicada.

Análise *a posteriori:* Iniciamos o encontro com a escolha da sequência de apresentações das professoras, que ficou da seguinte forma: Marilva, Cristiane, Dalila e Denise.

A professora Marilva, que tem formação em Matemática e Ciências, e estava atuando em Ciências, começou sua apresentação com um *PowerPoint* (anexo E), mostrando que aplicou uma sequência de atividades envolvendo Ciências e Matemática. Escolheu a sexta série[84], a qual possui 28 alunos, iniciando com o assunto beleza das formas, as formas geométricas encontradas na natureza, algumas das quais são produzidas pelos animais e pelo homem.

Questionou os alunos e estes começaram a falar sobre objetos do dia a dia, sobre flores, flocos de neve, colmeias, etc. Aproveitando-se deste momento, a professora apresentou o *GeoGebra* e um *PowerPoint*, estabelecendo sua proposta: a construção de um mosaico regular usando hexágonos regulares, semelhantes à construção de uma colmeia. Exibiu o vídeo *Tesselation slideshow*[85] e, a partir daí, desenvolveu atividades de familiarização com o *software*, utilizando as ferramentas: ponto, ponto médio, interseção de dois objetos, reta, reta paralela, reta perpendicular, polígono regular, reflexão com relação à reta, rotação e translação. Além disso, os alunos conseguiram usar a ferramenta para colorir, esconder objetos e inserir o texto.

[84] Atualmente sétimo ano.
[85] Este vídeo foi exibido no segundo encontro, detalhes do vídeo na seção 4.4, p.74.

De acordo com a professora Marilva, nenhum dos alunos desta série conhecia o GeoGebra; porém, executaram as atividades com certa facilidade. Até mesmo os alunos que possuíam dificuldades em Matemática utilizaram as ferramentas do software com tranquilidade.

A professora Marilva apresentou produções de 20 alunos (anexo E) dos quais 18 apresentaram mosaicos que conservaram as propriedades da construção inicial da figura, pois, ao mover o mosaico, este não se deformava. Dos 20 alunos, 17 construíram mosaicos regulares utilizando hexágonos regulares. Apresentamos na figura 75 a construção de um aluno que iniciou sua produção usando a ferramentas *polígono regular*, em seguida utilizando os lados paralelos do hexágono regular, construiu retas paralelas duas a duas e, a partir dessas retas, utilizou a reflexão com relação a uma reta, obtendo os demais hexágonos regulares que compõem o mosaico. Coloriu os hexágonos regulares e escondeu os objetos que deram suporte à construção.

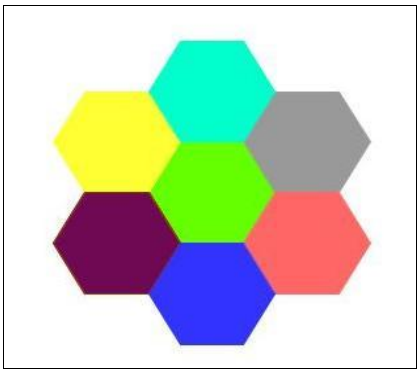


Figura 75 - Produção de aluno da professora Marilva

Um dos alunos da professora Marilva (figura 76) construiu seu mosaico utilizando inicialmente um triângulo qualquer; em seguida, a partir de vetores dados, fez sucessivas translações até que o mosaico formado tivesse a forma de um triângulo. Ao movimentar os vértices do triângulo inicial constatou que o *software* tem o potencial de conservar as propriedades iniciais das figuras sob a ação de movimentos.

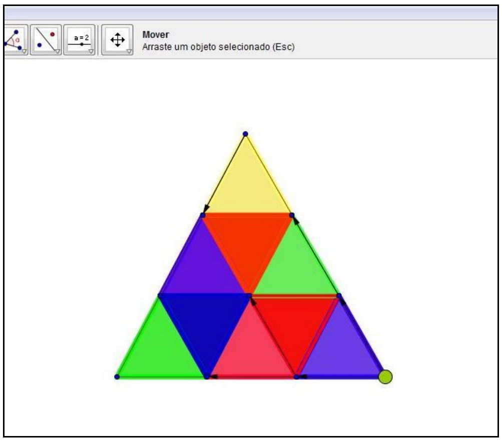


Figura 76 - Produção de aluno da professora Marilva

Utilizou três aulas para a realização destas atividades, pois durante a realização do curso só se sentiu segura para a transposição a partir do terceiro encontro. Comentou que o curso foi muito bom, porque, além de relembrar conceitos de Geometria Plana, proporcionou-lhe o conhecimento do GeoGebra, sendo que procurará colocar em prática todos os conhecimentos adquiridos nos encontros. O que mais despertou o interesse dos alunos foi o fato de que o software proporciona, sob a ação de movimentos, que a figura mantenha todas as propriedades feitas na construção inicial.

A professora Marilva enviou todas as construções dos alunos por *e-mail*, dando-nos a oportunidade de analisar os protocolos de construção no GeoGebra. Em relação à analise destes protocolos e ao depoimento da professora Marilva, observamos que a maioria dos alunos conseguiu construir os conhecimentos de retas paralelas e reflexão de um objeto por uma reta.

A professora Cristiane iniciou sua apresentação com *PowerPoint* (anexo F), elencando os objetivos, o conteúdo trabalhado, o desenvolvimento das atividades e exemplos de construções feitas pelos seus alunos. As atividades foram desenvolvidas em uma turma de sétima série[86] com 27 alunos, da mesma escola da professora Marilva.

Iniciou sua experiência apresentando diversas figuras, questionando os alunos sobre quais apresentavam eixos de simetria, isto é, quais eram simétricas. Em seguida apresentou leituras sobre a Geometria das transformações e o vídeo *Tesselation slideshow*[87].

---

[86] Atualmente oitavo ano.
[87] Este vídeo também foi utilizado pela professora Marilva.

Dando seguimento às atividades, a professora Cristiane executou coletivamente a utilização dos menus das transformações geométricas planas no GeoGebra, reflexão, rotação e translação. Utilizou-se da translação nas construções geométricas para a formalização do conceito de congruência de figuras planas (figura 77).

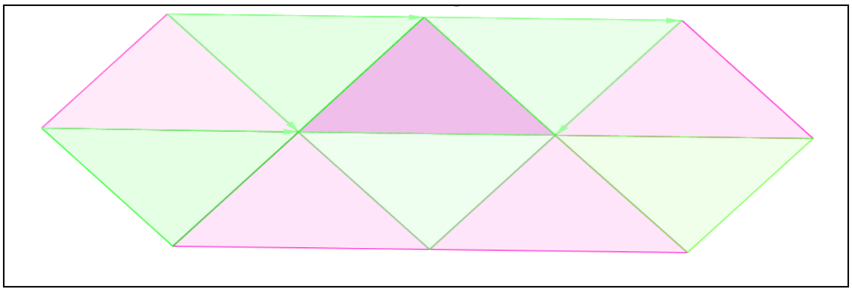


Figura 77 - Construção de aluno da professora Cristiane

De acordo com a professora Cristiane, nenhum dos alunos conhecia o GeoGebra e a participação nas aulas foi excelente. A maior parte deles conseguiu construir as figuras e definir as diferentes transformações isométricas, percebendo que as formas, o tamanho e os ângulos das figuras eram invariantes quando submetidas aos movimentos de reflexão, translação e rotação.

A professora Cristiane, apresentou 16 exemplos de construções, procurou colocar no PowerPoint exemplos de todas as construções diferentes que os alunos criaram. Aproveitou-se das construções feitas para que os alunos percebessem a diferença entre elas. Os estudantes construíram mosaicos regulares e semirregulares (figura 78); no entanto, a professora não demonstrou o teorema da pavimentação do plano, somente exemplificou com figuras quais mosaicos poderiam ser construídos utilizando polígonos regulares.

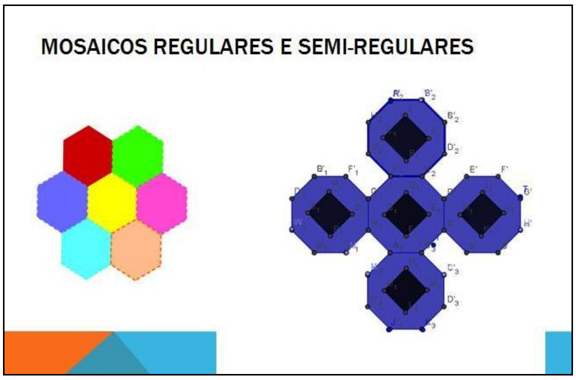


Figura 78 - Construção de alunos da professora Cristiane

Observando todos os trabalhos apresentados, percebemos que os alunos já possuíam o conhecimento de retas paralelas, visto que tem sido um dos conceitos mais utilizados nas construções feitas no GeoGebra. De acordo com a professora Cristiane, nesta turma a construção desse conhecimento foi observada na formalização do conceito de congruência de figuras planas, nas isometrias e na diferença entre polígonos irregulares e regulares.

Na figura 79, abaixo, apresentamos uma das construções feitas pelos alunos da professora A, utilizando a translação de polígono irregular por meio de um vetor. Observamos que os alunos também souberam utilizar a ferramenta para colorir, esconder o objeto e inserir texto.

Conforme a professora Cristiane, a utilização do GeoGebra proporcionou uma aula mais interativa, quando os alunos puderam movimentar suas construções, sem que estas perdessem as propriedades iniciais da figura. Além disso, comentou que a visualização e a movimentação da figura foram fundamentais para a compreensão dos conceitos de congruência. Afirmou, ainda, que a partir da realização desta oficina pretende inserir em suas aulas a utilização da tecnologia informática como uma ferramenta para o ensino e a aprendizagem da Matemática. A docente utilizou quatro aulas para a realização destas atividades.

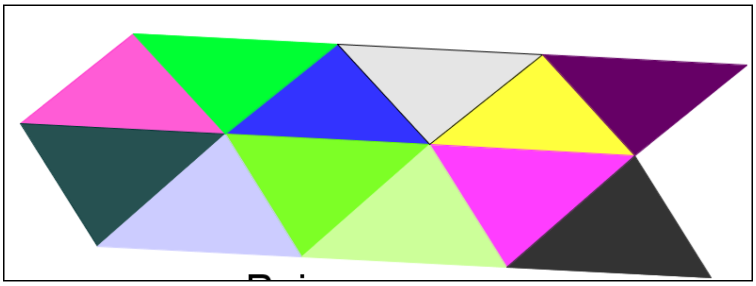


Figura 79 - Construção de aluno da professora Cristiane

A professora Dalila apresentou um *PowerPoint* (anexo G) elencando as dificuldades na execução de seu projeto de aplicação, uma delas foi conseguir horários compatíveis entre a sala de informática e suas aulas. Além disso, muitas de suas aulas coincidiram com dias da realização da oficina.

A professora Dalila é contratada em caráter temporário, substituindo outra professora, isso fez com que tivesse dificuldades em diagnosticar quais conceitos já haviam sido trabalhados na série em questão. Conseguiu trabalhar com os alunos da oitava série[88], que possui 16 alunos, utilizando apenas duas aulas. Citou dificuldades dos alunos nos conceitos básicos da Geometria Plana e teve que, praticamente, nestas duas aulas revisar somente os conceitos de ponto, ponto médio, reta, reta paralela, e perpendicular, executando coletivamente os menus do GeoGebra.

Como nas outras séries citadas anteriormente, nenhum dos alunos conhecia o GeoGebra.

Ao final da aula trabalhou com o conceito de reflexão por uma reta, no entanto, poucos alunos conseguiram fazer construções significativas.

De acordo com a professora Dalila, duas aulas seriam insuficientes para trabalhar todos os conceitos que havia previsto. Sobre a utilização do GeoGebra, afirmou que é muito mais atraente para o aluno uma explicação com a utilização de tecnologia informática, pois proporciona uma movimentação, algo que no estático do quadro de giz é impossível realizar. Considerou o *software* GeoGebra muito acessível para ao alunos, dizendo que iria aplicar em suas aulas sempre que possível, não só pela exigência da oficina, mas por ser muito bom para o aprendizado de Geometria Plana.

A professora Denise leciona na mesma escola das professoras Cristiane e Marilva e aplicou seu projeto numa turma de sétima série com 24 alunos. Segundo ela, os alunos utilizaram o GeoGebra com muita facilidade. Utilizou-se de duas aulas para a execução das atividades.

Iniciou os trabalhos levando para a sala de aula diversas revistas de *Patchwork,* nas quais apareciam muitos mosaicos. Explicou o que é um mosaico, explorou o assunto falando das transformações geométricas e apresentou o vídeo *Snake*[89], que é baseado na obra de Escher. A escolha deste vídeo se deu porque os alunos já tinham conhecimento de uma imagem reproduzida no livro[90] da sexta série.

Em seguida, com a utilização do Geogebra, passou a executar coletivamente as ferramentas do ponto, reta, reta paralela, vetor, polígono regular e o *menu* das transformações geométricas. A partir daí, incentivou os alunos para produzirem um mosaico.

A professora fez uma comparação entre as atividades desenvolvidas no GeoGebra pelas professoras na oficina e as atividades que os alunos produziram, e constatou que os alunos desenvolveram-nas com muito mais rapidez, devido à agilidade com a utilização da

[88] Atualmente nono ano. Esta série funciona no mesmo local onde foi realizada a oficina.
[89] Detalhes do vídeo na seção 4.4, p.78.
[90] No livro da sexta série, Projeto Radix, na página 226 encontra-se essa imagem relacionada ao texto: *A arte e a simetria.*

tecnologia informática: -*“Os alunos desenvolveram bem mais rápido do que nós professores!”*

Na figura 80, apresentamos uma das construções dos alunos da sétima série, na qual observamos, abrindo o protocolo de construção do GeoGebra, que o aluno construiu primeiramente uma reta passando por dois pontos A e B, em seguida desenhou um hexágono regular a partir destes pontos. Ele construiu retas paralelas, retas estas que continham os lados paralelos do hexágono e, a partir destas, fez reflexões para a construção do mosaico. Na construção original, as retas estão escondidas, na imagem da figura 80, apresentamos estas retas de modo que o leitor possa compreender melhor a estratégia utilizada pelo aluno para a sua construção. Utilizando a ferramenta *mover* o mosaico feito pelo aluno conserva as propriedades de modo que este não se deforma. Observamos também na arte que ele utilizou o tracejado, como se fosse uma costura utilizada em *Patchwork.* A professora Denise apresentou 19 construções feitas pelos alunos, todas sendo enviadas pelo *e-mail* (anexo H), das quais 18 conservavam a propriedades das figuras sem deformar-se.

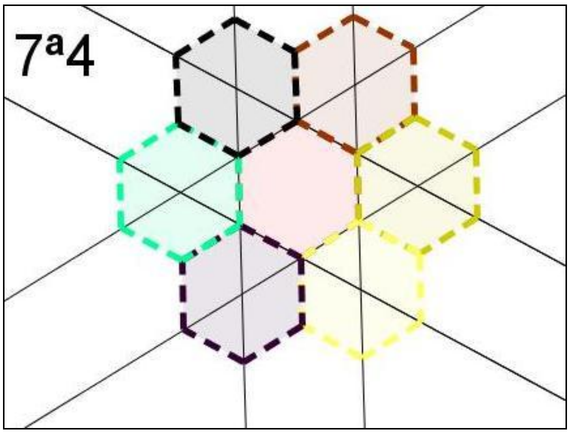


Figura 80 - Produção de aluno da professora Denise

Durante a realização da oficina, algumas professoras-alunas construíram mosaicos regulares utilizando hexágonos regulares, porém, utilizando a rotação do hexágono sob um ângulo de 120º. Já este aluno procurou fazer sua construção a partir de retas paralelas.

Na figura 81, a seguir, observamos uma construção feita com hexágonos regulares sobrepostos, os quais foram construídos a partir da reflexão em relação a um ponto, criando um efeito de figuras tridimensionais.

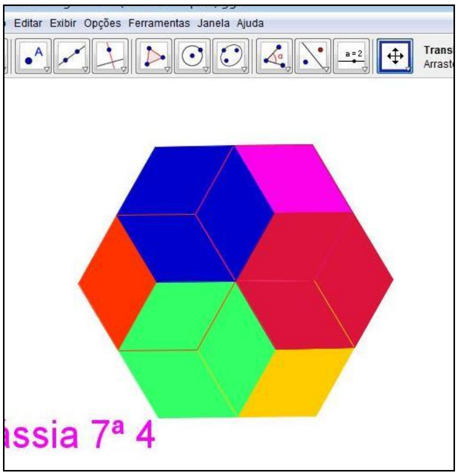


Figura 81 - Construção de aluno da professora Denise

No final do encontro seis, as professoras presentes afirmaram que a oficina havia sido muito produtiva e que estavam dispostas, no próximo ano, para a realização de outras oficinas utilizando a Matemática e a Tecnologia Informática. Além disso, manifestaram-se afirmando que iriam continuar a desenvolver atividades com seus alunos utilizando o GeoGebra. Elas iriam procurar explorar as diversas opções que o software proporciona para o ensino da Matemática.

5.4.7. Análise *a Posteriori* à Luz de Vygotsky e Duval

Fazendo uma análise conjunta de todos os encontros à luz das considerações teóricas, do potencial da tecnologia e relacionando-os com os objetivos previstos no início da concepção da experiência, percebemos a importância da realização de cursos de formação continuada para os professores da escola básica. Pois, na realização desta oficina, houve participação e interesse por parte das professoras-alunas durante as atividades, sempre questionando, perguntando qual o objetivo da utilização do vídeo, do *software*, da sequência de atividades, buscando alternativas para ensinar a Geometria Plana.

Na perspectiva de Vygotsky, a troca de experiência e a interação social fizeram com que os participantes pudessem internalizar os conhecimentos trabalhados na oficina. Ressaltamos aqui sua importância, pois essas indagações e discussões são fundamentais, uma vez que nesta perspectiva, a linguagem exerce um papel de construtora e impulsionadora do pensamento.

Em diversos momentos da oficina, houve a necessidade da nossa intervenção atuando como um professor mediador do conhecimento. No primeiro encontro observamos as dificuldades iniciais, e a partir de nossa intervenção constatamos a familiaridade com que as professoras-alunas passaram a usar os recursos do GeoGebra. Procuramos, então, atuar na zona de desenvolvimento proximal, ou seja, fazíamos intervenções necessárias para que o conhecimento, que era potencial nas professoras-alunas, se transformasse em real.

Além do mais, os conceitos das transformações geométricas no plano foram introduzidos de uma forma contextualizada, aliando o uso da Tecnologia Informática, a Arte e a Matemática. Com isso, as professoras-alunas puderam produzir atividades significativas com seus alunos, partindo do conhecimento espontâneo para os conceitos científicos. Nós entendemos que houve desenvolvimento das professoras-alunas; pois segundo Vigotsky, é a aprendizagem que provoca o desenvolvimento.

Ao aliar certa Tecnologia Informática à aplicação desta sequência didática, proporcionou-se o conhecimento do *software* GeoGebra, visto que nenhuma das professoras-alunas participantes da oficina, bem como seus alunos, conhecia o *software*. O *software* GeoGebra, com seu potencial de geometria dinâmica, oportunizou a distinção entre desenho e figura por meio da construção, na qual a professora-aluna pode verificar as propriedades do objeto. Além disso, na perspectiva de Duval (2011), o *software* permitiu a mobilização de diferentes registros semióticos do mesmo objeto: no caso da Geometria, o registro discursivo e o figural. E fez com que a professora-aluna utilizasse os dois tipos de transformações, os tratamentos e as conversões. Utilizou os tratamentos, que são transformações dentro de um mesmo registro; por exemplo, quando executou as mudanças nas figuras nos “mosaicos em movimento” no estilo de Escher. E usou as conversões, que são transformações de uma representação em outra representação de um registro diferente; por exemplo, na escolha de menus escritos na linguagem da Geometria e a correspondente figura resultado do uso dos *menus* do GeoGebra. Proporcionou, também, a apreensão em Geometria: de forma *seqüencial*, na qual a professora-aluna reproduziu mosaicos no GeoGebra a partir de um roteiro; *perceptiva*, quando realizou a interpretação das formas das figuras nos mosaicos; *discursiva*, no momento em que interpretou os elementos das figuras, articulando com os enunciados nas atividades e compreendendo as propriedades dos objetos construídos.

Quanto à sequência didática apresentada alguns pontos merecem ser observados:

- No primeiro encontro as atividades realizadas de familiarização com o *software* foram produtivas; porém, para uma futura aplicação, é importante deixar que o aluno, após as atividades realizadas com o roteiro, explore livremente os *menus* de modo que ele conheça as ferramentas do *software*.

- Ao realizar as atividades do segundo encontro, vimos a necessidade de apresentar visualmente todos os mosaicos semirregulares que obedecem ao Teorema de Kepler.
- Quanto ao terceiro encontro, na eventualidade de que o aluno não tenha um mosaico para fazer sua reprodução, o professor deve ter antecipadamente modelos de mosaicos, que o aluno possa reproduzir.
- Em relação ao quarto encontro, caso o professor não disponha do CD Mídias Digitais I, deve disponibilizar *apletts* criados no GeoGebra antecipadamente para que os alunos os utilizem.

Observando a aplicação da sequência didática, embasada em todas as leituras referidas nesta dissertação, e avaliando os resultados obtidos, consideramos que esta proposta didática foi válida. Consideramos respondida nossa pergunta inicial: - *De que forma professores de Matemática se apropriam do software GeoGebra para trabalhar com mosaicos e transformações geométricas?*

De um modo geral, as professoras-alunas foram superando as dificuldades quanto ao uso do GeoGebra e em muitos momentos comentaram sobre sua *interface* acessível e de uso bastante intuitivo. Em relação às suas práticas, só não conseguiram avançar mais nos trabalhos devido às proximidades do final de ano, quando muitas outras atividades já haviam sido programadas. Sugeriram que neste ano de 2012 fosse realizada novamente uma oficina, ou mesmo, que organizássemos um grupo de estudos, com utilização de Tecnologia Informática, de modo que elas pudessem aprimorar seus conhecimentos e assim poder incluí-los com mais confiança em suas aulas. Quanto aos conceitos de Geometria Plana que foram trabalhados, confirmaram que a utilização do GeoGebra facilitou a construção destes conhecimentos pelos seus alunos.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa proposta de capacitação docente, sob a forma de oficina, proporcionou às professoras participantes a familiarização com o software GeoGebra e a oportunidade de revisar os conceitos básicos de Geometria Plana. Nós oferecemos uma nova alternativa para o seu ensino, contribuindo para que os seus alunos tenham aulas mais dinâmicas e eficientes. Além disso, a introdução deste *software* exigiu que as professoras repensassem suas práticas docentes frente às inovações no uso da Tecnologia Informática.

A característica dinâmica do *software* permitiu às professoras trabalharem as transformações geométricas de forma mais acessível, a partir das manipulações feitas em suas construções, verificando que elas mantinham as propriedades iniciais. Além do mais, elas puderam visualizar diversas figuras congruentes em poucos segundos. Com base nesses aspectos as professoras concluíram que a utilização deste *software* contribuiria para o ensino e aprendizagem das transformações geométricas. E essa constatação da característica do *software* pode ser percebida na fala da professora-aluna Vinholes (figura 82):

> Aquele tradicional da escola só no quadro e no giz é uma coisa muito estática, é algo assim muito difícil de passar para os alunos. Por exemplo, na primeira aula, todos aqueles conceitos que a gente reviu, com o uso do computador, a aula rendeu bastante. São conceitos que, se agente fosse fazer no estático do quadro, a própria dificuldade para passar para o aluno, e no computador é algo assim que, além de chamar bastante a atenção, toda aquela movimentação é algo que o aluno tem uma facilidade maior para aprender.

Figura 82 - Professora participante da oficina
Fonte: ARTV

Além do aspecto dinâmico que este *software* proporciona, temos também a identificação dos diferentes registros semióticos que um objeto pode apresentar, visto que, segundo Duval (2011), é preciso que o aluno mobilize pelo menos dois registros para a aprendizagem de um conceito em Matemática, fazendo a conversão entre estes registros, isto é, podendo trocar de registro a todo o momento.

Nossa intenção principal na aplicação e validação desta sequência didática foi a disponibilização para professores de escolas de um produto didático que tratasse de transformações no plano através da geométrica dinâmica. Este produto consiste da sequencia de atividades que está disponibilizada no apêndice D e da coletânea de vídeos apresentada na seção 4.5.

As atividades realizadas em conjunto, a interação social, o compartilhamento de experiências, as discussões, os questionamentos, possibilitaram “novas” formas de aprendizagem. Por meio destas ações, os professores puderam pensar em alternativas para trabalhar com a Geometria, de forma que dificuldades de aprendizagem de seus alunos pudessem ser mais facilmente superadas. Percebemos que a utilização do GeoGebra, para abordar os conceitos das transformações, reforçou estes conceitos e, além disso, proporcionou às professoras uma motivação para a sua exploração, uma vez que o seu uso permite a experimentação, a simulação, o questionamento e a análise, tornando o trabalho criativo e mais prazeroso.

Entendemos que na escolha desse *software*, para se trabalhar com mosaicos e pavimentações, o professor não pode perder de vista o que precisa ensinar. Este não deve ser utilizado apenas como motivação para o aluno, mas para compreender os conceitos geométricos. Também sabemos que não é o *software* que, por si só, acabará com as dificuldades no ensino de Geometria; no entanto, ele é uma ferramenta, é um ambiente de aprendizagem, indiscutivelmente importante para auxiliar o professor na sua tarefa de fazer com que o aluno construa o seu conhecimento.

Sobre aquelas professoras que participaram como sujeitos de nossa pesquisa, vimos nelas um grande envolvimento com a proposta desenvolvida. Temos a certeza de que nosso trabalho foi motivador e que contribuiu para que elas continuem desenvolvendo novas atividades em sala de aula utilizando a Tecnologia Informática no ensino da Geometria. Em contato recentemente feito com estas professoras, tivemos a constatação de que o processo de multiplicação do uso da tecnologia foi iniciado com a realização da oficina.

Nossa expectativa é de que as ideias que apresentamos nesta dissertação possam ser discutidas, complementadas ou mesmo discordadas por professores de Matemática que tenham a preocupação de procurar novas alternativas para diminuir as dificuldades que os alunos apresentam em Geometria.

Registramos aqui a importância de um técnico em Informática responsável pela manutenção da sala de Informática. Isto porque o professor que quer fazer o uso do laboratório de Informática, sempre precisa do auxílio de um técnico para configurar os computadores e instalar os *softwares*. O tempo de aula é muito curto para que essas providências sejam tomadas no início da aula. Além disso, os problemas técnicos podem surgir e impedir completamente a realização de uma atividade.

Na finalização deste trabalho trazemos algumas palavras quanto a nossa passagem pelo Mestrado Profissionalizante do Instituto de Matemática da UFRGS. Podemos afirmar com certeza que este período de estudos mudou nossa atuação profissional. Na realização deste mestrado adquirimos conhecimentos em diversas áreas, tanto de fundamentação Matemática quanto de Educação e, em particular, quanto ao potencial da tecnologia como uma ferramenta para a aprendizagem. Nossa intenção, após a realização deste mestrado, é continuar a ser um professor pesquisador, um observador, e fazer acontecer as mudanças na Educação Matemática. E de que forma? Procurando caminhos e acreditando que podemos fazer parte das mudanças frente às novas tecnologias que ainda irão surgir.

REFERÊNCIAS

ABREU, Maria Auxiliadora Maroneze de. et al. *Metodologia de Ensino de Matemática*. Florianópolis: UFSC, 2002.

ALMOULOUD, Saddo A. Registros de Representação Semiótica e Compreensão de conceitos geométricos. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Aprendizagem em Matemática*. Campinas: Papirus Editora, 2010. p.125-147.

ALVES, Sérgio; DALCIN, Mário. Mosaicos no plano. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n.40, p.3-12, mai./ago.1999.

ARAÚJO, P. B. *Situações de aprendizagem: a circunferência, a mediatriz e uma abordagem com o GeoGebra.* Dissertação de mestrado, São Paulo: PUC-SP, 2010.

BALACHEFF, N. La transposition Informatique. In: ARTIGUE, M. *Vingt ans de Didactiques de Mathématiques en France*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1994. p.364-370.

BALACHEFF, N.; KAPUT, J. J. Computerbased learning environments in Mathematics. In: *International handbook in Mathematics Education*. London: Kluwer, 1996. p. 469-501.

BAQUERO, Ricardo. *Vygotsky e a aprendizagem escolar.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

BORBA, M.; VILLARREAL, M. *Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking.* New York: Springer, 2005.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Mirian Godoy. *Informática e Educação Matemática.* São Paulo: Autêntica, 2007.

BOYER, Carl B. *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasilia, DF: Ministério da Educação e do Desporto, 1998.

CARNEIRO, V. C.G. Engenharia Didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. *Zetetike*. Campinas, v.13,p. 85-118, 2005.

CASTORINA, José Antônio. et al. *Piaget, Vygotsky, Novas Contribuições para o Debate.* São Paulo: Ática, 2003.

CORAZZA, Sandra M. Labirinto da pesquisa, diante dos ferrolhos. In: COSTA, Marisa (org.) *Caminhos Investigativos: novos olhares na pesquisa em educação*. Porto Alegre: Mediação, 1996. p.115-131.

COUTINHO, Lázaro. *Convite às Geometrias Não-Euclidianas*. Rio de Janeiro, 1989.

DUARTE, Newton. *Educação Escolar, Teoria do Cotidiano e a Escola de Vigotski.* São Paulo: Autores Associados, 1999.

DUVAL, Raymond. *Semiósis e Pensamento Humano: Registros Semióticos e Aprendizagens intelectuais.* São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. *Ver e Ensinar a Matemática de outra forma.* São Paulo: Proem, 2011.

EBERSON, R.R. *Um estudo sobre a construção de fractais em ambientes computacionais e suas relações com transformações geométricas no plano.* Dissertação de Mestrado, São Paulo: PUC-SP, 2004.

EVANGELISTA, M. C. S. *As transformações isométricas no GeoGebra com motivação Etnomatemática.* Dissertação de Mestrado, São Paulo: PUC-SP, 2011.

FETISSOV, A. I. *A Demonstração em Geometria.* Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1996.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.* Campinas: Autores Associados, 2006.

FORMAN, Ellice. The role of peer interaction in the social construction of mathematical knowledge. *International Journal of Educational Research.* 1989, v.13, p.55-69.

GERDES, Paulus. *Desenhos da África.* Sâo Paulo: Scipione, 1990.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. *A Conquista da Matemática.* São Paulo: FTD, 2009.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o ensino de geometria. *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação.* Belo Horizonte, 1996. p.1-13.

GRAVINA, Maria Alice. *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.* Tese de Doutorado, Porto Alegre: UFRGS, 2001.

GRAVINA, Maria Alice; BARRETO, M. Mídias Digitais I. Material Didático. *Curso de Especialização: Matemática, Mídias Digitais e Didática para a Educação Básica*. Porto Alegre, UAB/IM/UFRGS, 2009. Disponível em: <www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_I/>

HILLIS, Daniel. *O Padrão Gravado na Pedra: As ideias simples que fazem os computadores funcionarem.* Tradução: Laura Neves. Rio de Janeiro: Ciência Atual Rocco, 2000.

HOFFMANN, Daniela. *Ambientes virtuais e redes: estética e socialidade.* Disponível em: http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/etd/article/view/2101/pdf. Acesso em 20 de jan. 2012.

IVIC, Ivan. *Lev Semionovich VYGOTSKY.* Recife: Editora Massangana, 2010.

KENSKI, Vani Moreira. *Educação e Novas Tecnologias: o novo ritmo da informação.* Campinas: Papirus, 2007.

LABORDE, C. Cabri-Geómètre o una nueva relación com la geometría. In: PUIG, L.; CALDERÓN, F. *Investigación y Didactica de las matemáticas*. Madrid: Ministerio da Educación y Ciencia, 1996. p.67-85.

LIMA, Elon Lages. *Isometrias.* Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LOPEZ, M. J Gonzalez. La Gestión de la Clase de Geometria utilizando Sistemas de Geometria Dinâmica. In: GÓMEZ, P.; (eds) RICO, L. *Iniciación a la investigacion in Didactica de la Matemática*. Granada: Universidade de Granada, 2001. p.277-290.

LOPEZ, M. J. Gonzalez; GOMEZ, J.L.L. Formación inicial de professores de matematica de secundaria: atividades basadas en la utilización de software de geometria dinâmica. *Uno:didactica de las matematicas.*Barcelona: (Grao), p.110-125, 2001.

LORENZATO, Sérgio. *Por que não ensinar geometria?* São Paulo: SBEM, 1995.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Aprendizagem em Matemática: Registros de representação Semiótica.* Campinas: Papirus Editora, 2010.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Educação Matemática: Uma (nova) introdução.* São Paulo: EDUC, 2008.

MARIOTTI, Maria Alessandra. *Artifacts and signs after a Vygotskian perspective*: Disponível em :<http://www.mendeley.com/research/artifacts-signs-after-vygotskian-perspective-role-teacher-1/>.Acesso em 15 dez. 2011.

MARRADES, R. ; GUTIERREZ, A. Proofs produced by secundary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educacional Studies in Mathematics*. 2000, p.87-125.

MOLL, Luis C. *Vygostky e a educação: Implicações pedagógicas da psicologia sócio-histórica.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

MORAN, José Manuel. O vídeo na Sala de Aula. *Comunicação & Educação*. ECA-Ed.Moderna, p.27-35. jan/abr 1995.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. *Matemática: Idéias e Desafios.* São Paulo: Saraiva, 2009.

MOYSÉS, Lúcia. *Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática.* São Paulo: Papirus Editora, 2010.

NOSS, R.; HOYLES, C. The technological mediation of Mathematics and its learning. Human development: giving meaning to Mathematical signs. *Psychological, Pedagogical and Cultural Processes*, Basel, vol. 52, n. 2, p. 129-147, 2009.

OLIVEIRA, G. P.Estratégias Didáticas em Educação Matemática: as tecnologias de informação e comunicação como mediadoras. *Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.* Brasília: SBEM, 2009.

PAVANELLO, Regina Maria. A Geometria no Ensino Fundamental. *Revista Teoria e Prática da Educação.* v.1 p.33-41. 1999.

RADFORD, Luis. Introducción. Semiótica Y Educación Matemática. *Revista Latino Americana en Matematica Educativa* . México, Distrito Federal. p.7-21. 2006.

RIBEIRO, Jackson da Silva. *Projeto Radix: Matemática.* São Paulo: Scipione, 2009.

RODRIGUES, Camila Roberta Ferrão. Potencialidades e Possibilidades do Ensino das transformações Geométricas no Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado, Porto Alegre: UFRGS, 2012.

ROSSI, Gicele da R. *O ensino e aprendizagem de polígonos e de transformações geométricas no plano: relacionando arte e matemática por meio dos frisos e dos ladrilhos.* Dissertação de Mestrado, Santa Maria: UNIFRA, 2009.

SANTA CATARINA. *Proposta Curricular de Santa Catarina*: Matemática. Florianópolis: SED, 2005.

SANTOS, R. P. *As dificuldades e possibilidades de professores de matemática ao utilizarem o software GeoGebra em atividades que envolvem o Teorema de Tales.* Dissertação de Mestrado, São Paulo: PUC-SP, 2010.

STODOLSKY, S. S. Telling math: Origins of math aversion and anxiety. *Educacional Psychologist*. n. 20.1985, p.125-133.

STORMOWSKI, Vandoir. Estudando Matrizes a partir de Transformações Geométricas. Dissertação de Mestrado, Porto Alegre: UFRGS, 2008.

VEER, René V.D.; VALSINER Jaan,. *Vygotsky: Uma síntese.* São Paulo: Edições Loyola, 1998.

VYGOTSKY, L. S. *Pensamento e Linguagem.* Edição: Ridendo Castigat Mores. eBooksBrasil, 2011.

WAGNER, Eduardo. *Construções Geométricas.* Rio de Janeiro: SBM, 2007.

REFERÊNCIAS DE VÍDEOS E IMAGENS

Tesselation slideshow. Disponível em:< *http://www.youtube.com/watch?v=5-3tOa9CPb0*>. Acesso em 21 ago.2011.

Arte Geogebra. Disponível em:

< *http://www.youtube.com/watch?v=5fHFi3xbCfQ&feature=related>*.

Acesso em 21ago.2011.

Escher e a Geometria. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=6aRFy73cZxY>. Acesso em 28 ago. 2011.

Matemática em toda parte. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=y__0a7TDbfs>. Acesso em 28 Ago.2011.

Escher Style .Disponível em : < http://www.youtube.com/watch?v=h2AWKgU0cN4>. Acesso em: 30 ago.2011.

Simetria. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=20794>. Acesso em: 30 ago. 2011.

Matemática em toda parte, Matemática na arte. Disponível em : <http://tvescola.mec.gov.br/index.php?option=com_zoo&view=item&item_id=2354>. Acesso em: 30 ago.2011.

Snakes. Disponível em: < http://www.youtube.com/watch?v=3x8tLfEJqYQ&feature=fvsr>. Acesso em 02 set. 2011.

Matemática, Mídias Digitais e Didática. CD Mídias Digitais na Educação Matemática I. Porto Alegre: UFRGS, UAB.

Igrejas Matrizes da Quarta Colônia de Imigração Italiana do Rio Grande do Sul. DVD.UNIFRA

Obras de Escher. Disponível em: < http://www.mcescher.com/indexuk.htme>. Acesso em: 20 ago.2011

Translação. Disponível em:< http://www.iep.uminho.pt/aac/sm/a2002/M_C_Escher/passo_trans.htm>. Acesso em: 30 Jul.2011.

Reflexão. Disponível em: <http://www.iep.uminho.pt/aac/sm/a2002/M_C_Escher/passo_simetria.htm>. Acesso em: 30 jul. 2011

Rotação. Disponível em:< http://www.iep.uminho.pt/aac/sm/a2002/M_C_Escher/passo_simetria.htm>. Acesso em: 30 jul.2011.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Questionário para professores

Caro (a) colega,

Este questionário tem por objetivo levantar informações referentes a sua formação e atividade docente, sobre Geometria, em particular sobre Transformações Geométricas no plano e sobre o *software* GeoGebra.

Este instrumento faz parte do projeto de pesquisa de mestrado em Ensino de Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul- UFRGS, sendo que a identidade dos sujeitos participantes será preservada e firmada de acordo com o termo de consentimento informado.

Desde já, agradecemos muitíssimo sua participação neste curso. Obrigada.

Margarete Farias Medeiros

Mestranda

I) Identificação e Formação

Nome:____Data:_____________

1) Sexo: Masculino ( ) Feminino ( )

2) Idade:_______anos.

3)Qual a sua formação acadêmica profissional?

Graduação____Universidade__________

Pós- Graduação

Especialização_______________________________________Universidade_________

Mestrado____Universidade_________

Doutorado____Universidade_________

4) Há quanto tempo você leciona?_______anos.

5)Em que graus de ensino você leciona? ( ) Ensino Fundamental ( ) Ensino Médio

( ) Supletivo ( ) Técnico ( ) Magistério ( ) Ensino Superior

6)Em quais instituições você leciona? ( ) municipal ( ) estadual ( ) particular

____

II) ATIVIDADE DOCENTE

A) TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO

1) Você estudou sobre as transformações geométricas no plano durante sua formação acadêmica?____

2) Sua rede de ensino possui proposta em que sugira a sistematização dos conceitos por série de ensino? É previsto o ensino das transformações geométricas a partir de que serie?____

____

3) Na sua opinião, qual a importância do ensino das transformações geométricas: rotação, translação, reflexão ____

____

____

4) Quais as principais dificuldades que os alunos enfrentam neste assunto? E você?

____

5) Os PCN (1998) enfatizam que: “Uma das possibilidades mais fascinantes do ensino de Geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem. E que isso pode ocorrer por meio de atividades em que ele possa explorar formas como as de flores, elementos marinhos, casa de abelha, teia de aranha, ou formas em obras de arte, esculturas, pinturas, arquitetura, ou ainda em desenhos feitos em tecidos, vasos, papéis decorativos, mosaicos, pisos, etc.” Como você costuma abordar este conteúdo?
____
____
____

6) Você utiliza livro didático? Qual? Ele aborda este assunto? Em que série?

____

____

B) SOBRE *SOFTWARES* MATEMÁTICOS

1) Na escola que você trabalha existem condições reais para o uso de tecnologias (em especial a informática) no ensino da matemática?

____

2) Os PCNs (1998) ressaltam que : “O computador pode ser usado como elemento de apoio para o ensino (banco de dados, elementos visuais), mas também como fonte de aprendizagem e como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades.” Você costuma utilizar o computador nas suas praticas educativas? Como você avalia a utilização destes recursos? Existe uma melhora na qualidade do processo ensino/aprendizagem?
____
____
____

3) Você conhece *softwares* de geometria dinâmica? Quais os *softwares* de matemática que você tem conhecimento? Quais você utiliza em sala de aula?

____
____
____

4) Você conhece o *software* GeoGebra? ( ) sim ( ) não

Se você respondeu “sim”, responda as próximas questões:

5) Como você classificaria o seu entendimento do *software* :

( ) razoável ( ) bom ( ) ótimo ( ) excelente

6) Já utilizei em sala de aula: ( ) sim ( ) não

7) Já utilizei para ensinar Geometria: ( ) sim ( ) não

8) Considero o *software* GeoGebra para ensinar Geometria:

( ) razoável ( ) bom ( ) ótimo ( ) excelente

APÊNDICE B

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada **GEOMETRIA DINÂMICA NO ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES NO PLANO- uma experiência com professores da Escola Básica**, desenvolvida pelo (a) pesquisador (a) MARGARETE FARIAS MEDEIROS, na forma de curso de aperfeiçoamento. Fui informado (a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por MARIA ALICE GRAVINA, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone (051)3308.6212

Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa.

Fui informado (a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

1. Planejar, justificar, elaborar, implementar e validar uma sequência de atividades para docentes, sobre transformações geométricas no plano, utilizando pavimentações e mosaicos, usando como referência a metodologia da Engenharia Didática.

2. Oferecer um curso de atualização aos professores da Escola Básica do município de Sombrio-SC, visando o conhecimento do *software GeoGebra*, articulando o conhecimento matemático, o conhecimento tecnológico e a prática pedagógica destes docentes.

3. Estimular a argumentação em Geometria dos professores participantes da pesquisa, em relação aos resultados obtidos nas práticas feitas com o software GeoGebra.

Fui também esclarecido (a) de que os usos das informações oferecidas por mim será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de meu nome e pela idade.

A minha colaboração se fará por meio de entrevista/questionário escrito, etc., bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que serei observado (a) e minha produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários, etc., sem identificação. A minha colaboração se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado (a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no telefone ou e-mail.

Fui ainda informado (a) de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de _________________ de _______.

Assinatura do Professor Participante: ______________________________

Assinatura do(a) pesquisador(a):__________________________________

Assinatura do Orientador da pesquisa:_____________________________

APÊNDICE C: POWERPOINT 1

Slide 1

UFRGS

GEOMETRIA DINÂMICA NO ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS
-uma Experiência na Escola Básica

Slide 2

OBJETIVOS

- Analisar a abordagem feita sobre "Transformações Geométricas no plano".
- Planejar, justificar, elaborar, implementar e validar uma sequência de atividades para docentes .
- Oferecer um curso de atualização aos professores da Escola Básica do município de Sombrio – SC.
- Estimular a argumentação em geometria em relação aos resultados obtidos nas práticas feitas com o *software* GeoGebra.

Slide 3

JUSTIFICATIVA

- Participar de uma pesquisa que trata da formação de professores, através da oferta de um curso, pode-se desencadear um processo multiplicador de uso de tecnologia na escola.
- Propor aos professores uma nova forma de trabalhar com a geometria na escola, usando a tecnologia informática, e em especial com o auxílio do *software GeoGebra.*

Slide 4

REFERENCIAL TEÓRICO

- Vygotsky sobre a construção do conhecimento.
- Balachef, Gravina, e outros no que diz respeito à tecnologia e aprendizagem da matemática.
- Duval sobre o pensamento em matemática

Slide 5

INSPIRADA NA METODOLOGIA DA PESQUISA

ENGENHARIA DIDÁTICA:
Análises Prévias,
Concepção e Análise *A priori,*
Experimentação,
Análise *A posteriori* e Validação da Experiência.

Slide 6

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

- Primeiro encontro: apresentação do *menu* e familiarização com as ferramentas do *software GeoGebra*;
- Segundo encontro: Pavimentações e as Transformações Geométricas;
- Terceiro encontro: Reprodução de Mosaicos;
- Quarto encontro: Mosaicos de Escher e as Transformações Geométricas;
- Quinto encontro: Organização das práticas dos professors
- Sexto encontro: Resultado das práticas dos professores

Slide 7

CRONOGRAMA

- Primeiro encontro-11/10/2011 :terça-feira -13h30min
- Segundo encontro- 20/10/2011: quinta-feira – 13hmin
- Terceiro encontro-25/10/2011:terça-feira – 8h
- Quarto encontro- 03/11/2011: quinta-feira – 13h30mim
- Quinto encontro- 08/11/2011:terça-feira-8h
- Sexto encontro- 30/11/2011 :quarta f-eira – 19h

APÊNDICE D – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

ENCONTRO 1 – Atividades de familiarização do *menu* do GeoGebra

Apresentação de um *PowerPoint* com as informações sobre o curso e um vídeo desenvolvido no *GeoGebra* para estabelecermos nossa proposta de trabalho. Este pode ser encontrado em: *http://www.youtube.com/watch?v=5fHFi3xbCfQ&feature=related*

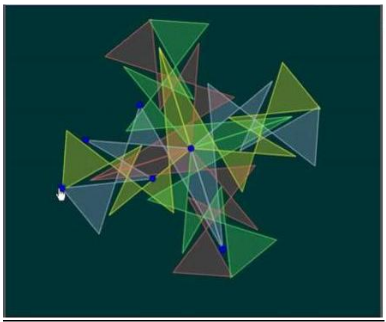


Figura 1: Imagem do vídeo Arte GeoGebra

Para nossas atividades iremos utilizar o *software* livre do *GeoGebra*, disponível para *dowload* em www.geogebra.org e o CD Mídias Digitais I.

Atividade 1- Exploração dos Menus: Ponto, Reta, Segmento, Círculo.

Executaremos coletivamente as atividades a seguir:

a) Utilize a ferramenta Novo Ponto e crie um ponto. Com o botão direito do *mouse* renomeie como ponto B.

b) Com o botão direito do *mouse*, selecione *propriedades* e escolha a cor e o estilo do ponto.

c) Crie um novo ponto, exiba o rótulo.

d) Utilize a ferramenta Ponto Médio, selecione os pontos A e B. Exiba o rótulo do ponto médio de AB. Com a ferramenta *mover*, movimente o ponto A, verifique o que ocorre.

e) A ferramenta *Reta definida por dois pontos* permite que você trace uma reta. Trace a reta $\overleftrightarrow{AB}$, selecionando os dois pontos.

f) Com a ferramenta *Reta paralela*, trace uma reta paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$, selecionando primeiro o ponto e, depois, a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

g) Crie dois pontos A e B, exiba seus rótulos, trace uma reta que passe por estes dois pontos e exiba seu rótulo.

h) Com a ferramenta *Reta Perpendicular*, trace uma perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AB}$, passando por A.

i) No *Arquivo* selecione *Novo*. Crie um segmento de reta $\overline{AB}$. Selecione os dois pontos e trace a *Mediatriz*. No *Exibir* selecione *Protocolo de Construção*, verifique as etapas de construção.

j) Crie duas retas concorrentes. Com a ferramenta Interseção de Dois Objetos, verifique o ponto de interseção das retas traçadas selecionando as duas retas. Trace a bissetriz destas duas retas.

k) Crie uma circunferência usando a ferramenta *Círculo Definido pelo Centro e um de seus Pontos*. Exiba o rótulo do centro e do ponto destacado da circunferência. Construa outra circunferência com centro em B passando por A. Mova o ponto A. Agora, com a ferramenta *interseção de dois objetos*, selecione as duas circunferências e mova o ponto A.

l) Crie uma circunferência *c* exibindo os pontos A e B. Com a ferramenta *compasso* você pode obter outra circunferência *d* do mesmo tamanho que *c*. Selecionando o segmento $\overline{AB}$ para definir o raio e depois o centro.

n) Utilize o CD Mídias Digitais I, Módulo I, em *conteúdos*, movimente os pontos azuis e observe a presença das propriedades que caracterizam cada um dos conceitos apresentados.

Atividade 2 – Menu das Transformações no GeoGebra: Reflexão, Translação e Rotação e CD Mídias Digitais I

a) Crie um ponto A, faça sua reflexão a partir do ponto B. Exiba seus rótulos. Movimente o ponto A. Mova o ponto B. Observe as relações entre A, B e A’.

b) Crie um polígono e faça sua reflexão a partir de uma reta. Escolha o vértice A do polígono e movimente-o. Explore esta ferramenta, desenhando outros polígonos regulares e verifique o que acontece.

c) Vamos fazer uma translação a partir de um vetor dado. Desenhe um polígono qualquer. Crie um vetor. Faça a translação deste polígono por este vetor. Crie objetos e faça translações.

d) Desenhe um polígono e a partir de um ponto faça sua rotação em sentido horário de 90 graus.

e) Utilize o CD Mídias Digitais I, Módulo II, em *conteúdos*, nas animações, movimente o ponto azul e observe o efeito no ponto vermelho.

Atividade 3 – Criação livre usando os Menus da atividade 1 e 2.

Nesta atividade você deverá, utilizando os menus do GeoGebra, fazer uma criação livre usando as três transformações geométricas planas. Envie sua construção para o *e-mail detyfm@yahoo.com.br.*

ENCONTRO 2 – Pavimentações e as Transformações Geométricas

Atividade 1 – Vídeo sobre as pavimentações e transformações geométricas no plano e exploração dos menus dos polígonos irregulares e regulares.

Inicialmente vamos assistir a um vídeo: *tesselation slideshow*, que pode ser encontrado no *link* *http://www.youtube.com/watch?v=5-3tOa9CPb0* .

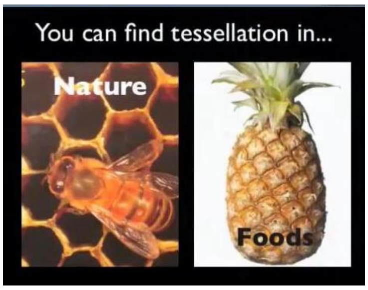


Figura 1: Imagem do vídeo

Em seguida vamos executar coletivamente as atividades no GeoGebra:

a) Utilizando a ferramenta *Polígono*, crie um triângulo selecionando os vértices formando um ciclo.

b) Com a ferramenta *Polígono*, crie um quadrilátero, um pentágono, um hexágono. Exiba os rótulos e mova o ponto A. Observe.

c) No GeoGebra temos a opção para desenhar um polígono regular, selecionando dois pontos e depois fornecendo o número de vértices. Utilize a ferramenta Polígono Regular e desenhe um quadrado. Exiba os rótulos dos pontos e mova o ponto A. Verifique o que acontece. Relacione-o com o item b.

d) Vamos desenhar triângulos eqüiláteros, quadrados e hexágonos regulares usando segmentos, retas e círculos.

Atividade 2- Pavimentações no plano: polígonos regulares

Desde a antiguidade, as pessoas observam formas geométricas tanto na natureza como nos produtos fabricados. Em algumas atividades do cotidiano, desenvolveu-se a capacidade de perceber, reproduzir e criar uma grande variedade de formas. Podendo ser encontradas nos artesanatos, rastros de automóveis, revestimento de pisos e paredes, fachadas de construções, tapetes, obras de arte, etc.

Essa capacidade é observada em criações artísticas, onde formas geométricas aparecem com freqüência, muitas vezes se repetindo e se combinando, num tom harmonioso, formando belos mosaicos.

Num mosaico, as formas geométricas se repetem, sem que haja espaços ou sobreposições. No contexto matemático, o mosaico no plano pode ser construído com triângulos, quadrados, hexágonos e outros polígonos.

Como nossa intenção neste trabalho é fazer um estudo mais da Matemática do que no aspecto artístico, nossa concentração será em pavimentações formadas por polígonos regulares. Observando as informações, pergunta-se:

É possível construir uma pavimentação usando apenas:

Triângulos eqüiláteros? Quadrados? Pentágonos regulares? Hexágonos regulares? Vamos responder a estas perguntas usando o GeoGebra.

Faça polígonos regulares e utilize o *menu* das transformações geométricas (figura 1) para construir as pavimentações.

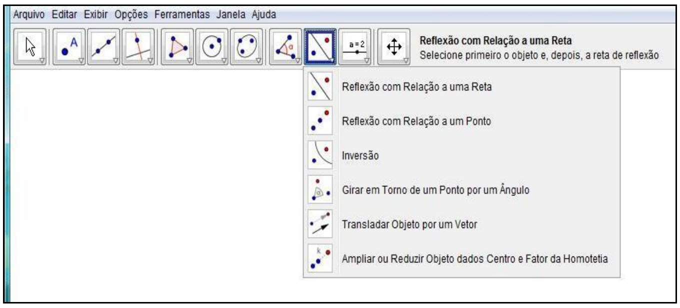


Figura 2: *Menu* das transformações geométricas no GeoGebra

Podemos fazer combinações com polígonos regulares não necessariamente congruentes entre si?

Você conhece algum teorema sobre a pavimentação no plano utilizando polígonos regulares?

Para construir uma pavimentação no plano, é necessário que os polígonos se encaixem sem que haja sobras ou sobreposição, ou seja, a soma dos ângulos que tem o vértice em comum, deve ser 360º (figura 2).

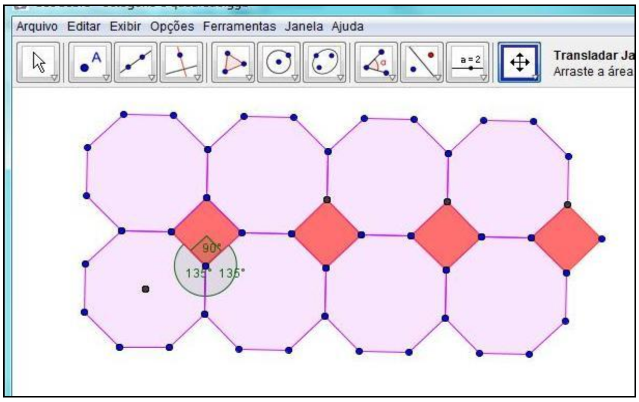


Figura 3: Mosaico semirregular com quadrados e octógonos regulares (4, 8,8), feito no GeoGebra.

Segundo Alves e Dalcin (RPM, n.40), a existência dos mosaicos regulares já era conhecida pelos antigos pitagóricos da Matemática grega. Um mosaico é regular quando ele é formado por polígonos congruentes entre si (figura 3). Tais coberturas são chamadas de *mosaicos regulares do plano, e* são indicadas pelas sugestivas notações de acordo com o número de lados de cada polígono: (3, 3, 3, 3, 3,3), (4, 4, 4,4) e (6, 6,6), que apresentamos nas figuras 4,5 e 6.

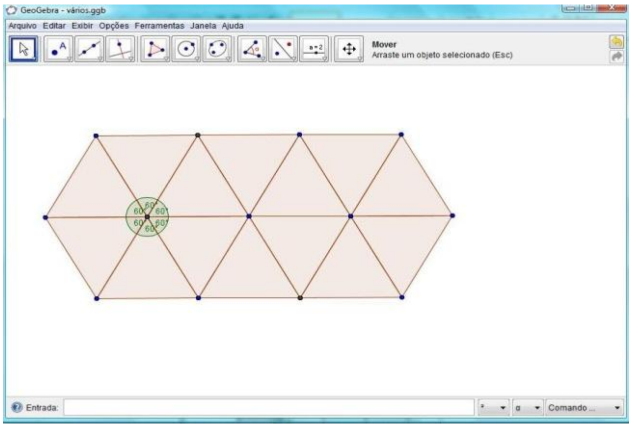


Figura 4: Mosaico regular com triângulos eqüiláteros (3, 3, 3, 3, 3,3), feito no GeoGebra

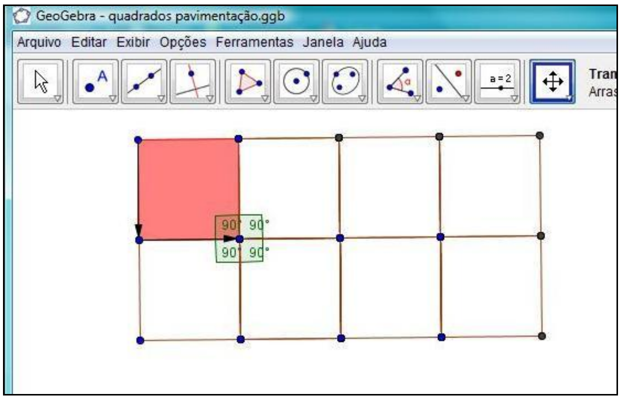


Figura 5: Mosaico regular com quadrados (4, 4, 4,4), feito no GeoGebra

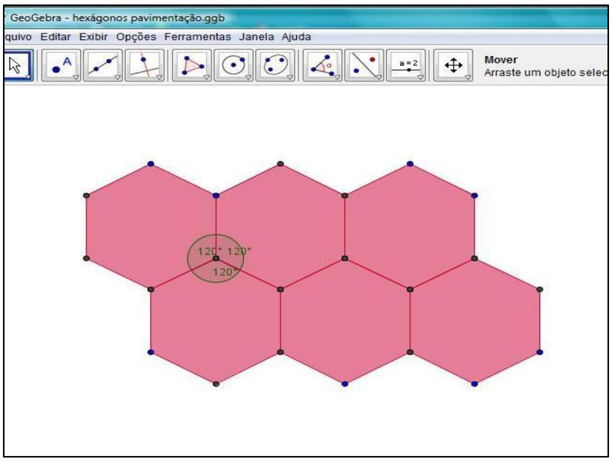


Figura 6: Mosaico regular com hexágonos regulares (6, 6,6), feito no GeoGebra

Alves e Dalcin também afirmam que a primeira pessoa a exibir os mosaicos semirregulares (figura 3) foi J. Kepler, em um trabalho publicado em 1619, no qual está este teorema:

> *Existem exatamente onze maneiras de se cobrir o plano utilizando-se exclusivamente polígonos regulares sujeitos às condições: a) se dois polígonos regulares intersectam-se, então essa interseção é um lado ou um vértice comum; b) a distribuição dos polígonos regulares ao redor de cada vértice é sempre a mesma.*

De acordo com o Teorema de Kepler, temos exatamente onze maneiras de se cobrir o plano utilizando-se exclusivamente polígonos regulares sujeitos às condições dadas *a* e *b*. Então a partir deste teorema apresentamos as 11 possibilidades de pavimentações usando polígonos regulares: (3,12,12), (4,6,12), (4,8,8), (6,6,6), (4,4,4,4), (3,6,3,6) , (3,4,6,4), (3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4), (3,3,4,3,4) e (3,3,3,3,3,3) e abaixo, na figura 7, apresentamos uma destas possibilidades.

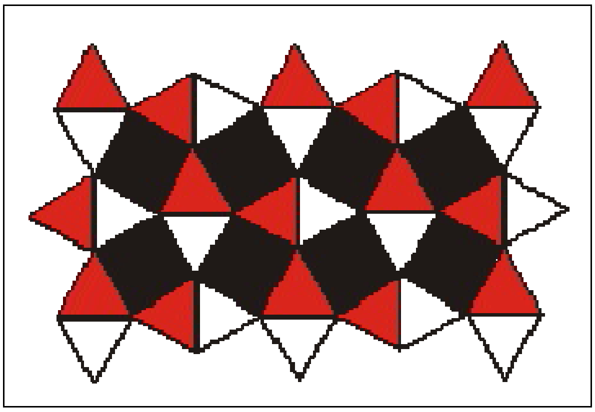


Figura 7: Mosaico semirregular com quadrados e triângulos eqüiláteros (3, 3, 4, 3,4).

A partir destas 11 possibilidades construa uma das possíveis pavimentações listadas anteriormente. Envie-a para o *e-mail detyfm@yahoo.com.br.*

Atividade 3- Elaboração de uma atividade de aprendizagem

Você deverá elaborar uma situação de aprendizagem envolvendo o encontro 1 e 2 e aplicar em sua turma de alunos. Relatando e apresentando os resultados no último encontro (quinto encontro).

Procure anotar todas as informações que você verificar que são importantes em um diário durante as atividades realizadas com seus alunos.

Atividade 4 – Material para o próximo encontro

Para o próximo encontro (terceiro encontro) você deverá trazer uma foto de uma pavimentação e fazer um breve histórico sobre o local onde ela se encontra.

ENCONTRO 3 – Reprodução de mosaicos encontrados em diversos locais da cidade

Atividade 1- Vídeo sobre os mosaicos nas igrejas da quarta colônia e exploração do CD Mídias Digitais I

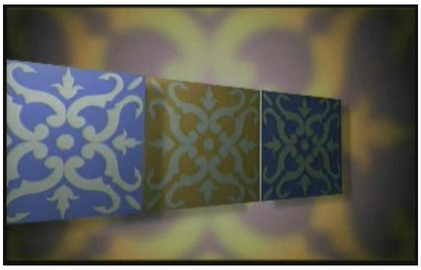


Figura 1: Imagem do vídeo

Nesta atividade vamos ver um vídeo sobre mosaicos e explorar o CD Mídias Digitais I, no Módulo I, que trata da Geometria e Mosaicos, e no Módulo II que trata das Transformações Geométricas planas e ladrilhagem.

Atividade 2- Reprodução de Mosaicos

A seguir apresentamos alguns mosaicos da Igreja Santo Antônio de Pádua, situada em Sombrio - SC. Estes mosaicos foram pintados pelo artista plástico José Fernandes, mais conhecido como “Zé Diabo”.

Figura 2: Paredes laterais

Figura 3: Paredes laterais

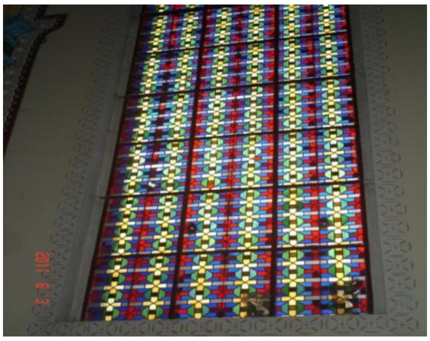


Figura 4 : vitral

E logo abaixo apresentamos os mosaicos nos pisos da Igreja Garuva Nova, localidade de Garuva Nova, Sombrio-SC.

Figura 5: Piso central

Figura 6: Piso lateral

Neste encontro faremos a construção da réplica do mosaico que você escolheu. Inicialmente você deverá construir a peça básica da pavimentação e construir a pavimentação usando as transformações geométricas.

Ao final da atividade você deverá enviar para o *e-mail detyfm@yahoo.com.br*: uma foto do mosaico escolhido, imagem jpg do mosaico construído com o GeoGebra, descrição dos elementos geométricos utilizados na construção, descrição do local onde se encontra o mosaico, arquivo ggb do GeoGebra, e todas as suas considerações sobre a construção descrevendo as dificuldades encontradas tanto da matemática quanto da utilização do *software* GeoGebra.

Ao movimentarmos sua construção, esta deverá conservar todas as suas propriedades, sem deformar-se.

Atividade 2- Elaboração de uma atividade de aprendizagem

Você deverá elaborar uma situação de aprendizagem envolvendo o encontro 4 e aplicar em sua turma de alunos. Relatando e apresentando os resultados no último encontro (quinto encontro).

ENCONTRO 4 – Mosaicos de Escher e as Transformações Geométricas

Atividade 1 – Mosaicos de Escher e as Transformações Geométricas

Inicialmente vamos assistir à apresentação do vídeo *Escher e a Geometria*, que pode ser encontrado no link http://www.youtube.com/watch?v=6aRFy73cZxY .

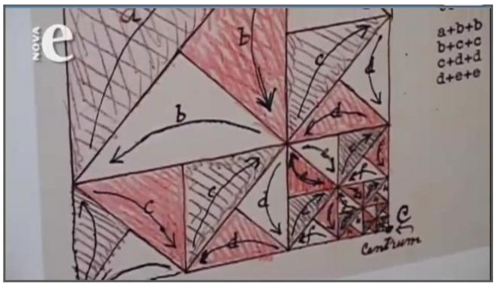


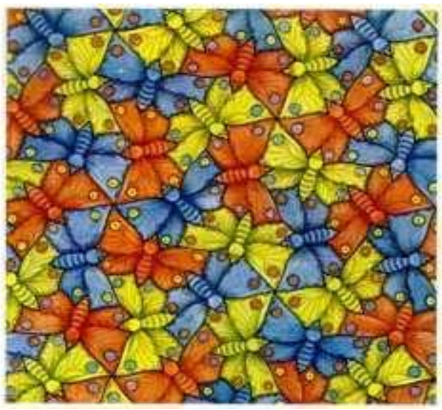
Figura 1: Imagem do vídeo

O artista M. C. Escher foi um gênio na criação de mosaicos, inteligentemente projetados, o que torna necessário observar suas obras com muita atenção. Escher estudou as propriedades geométricas para criar seus mosaicos, ele utilizava as transformações geométricas e os padrões geométricos a partir de divisões regulares da superfície.

Em suas obras podemos observar pavimentações e simetrias. Um padrão consiste na existência de um "motivo", suas cópias, a partir de uma ou mais cores, sobre um fundo uniforme constituem uma pavimentação. Como já observamos no encontro 2, uma pavimentação é feita cobrindo o plano completamente sem área livre ou sobreposição. Um padrão pode ser constituído por translações do motivo, reflexões e/ou rotações do motivo.

Nesta atividade vamos usar o CD Mídias Digitais I, Módulo II em *Complementos,* temos orientações para construção de mosaicos através de movimentos. Manipule os mosaicos e em seguida verifique como eles são construídos.

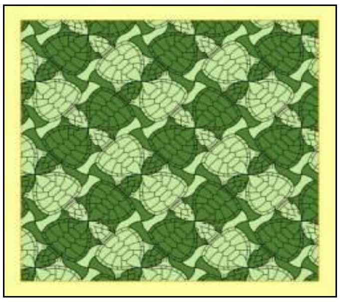
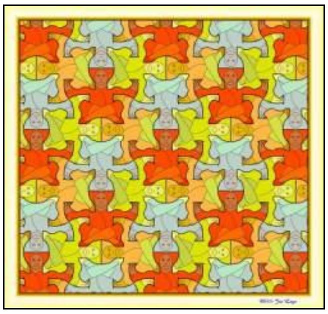
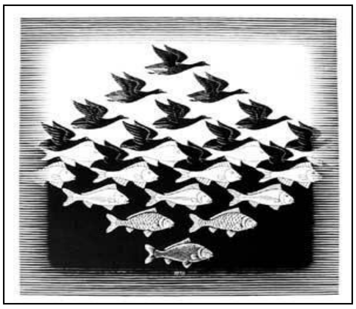
No mosaico de Escher que vemos a seguir, podemos perceber que ele utilizou a rotação para construí-lo.



Fonte: http://www.mcescher.com/indexuk.htme

Analise abaixo as seguintes obras de Escher, que estão disponibilizadas em http://www.mcescher.com/indexuk.htme , encontre o tipo de transformação geométrica utilizadas.



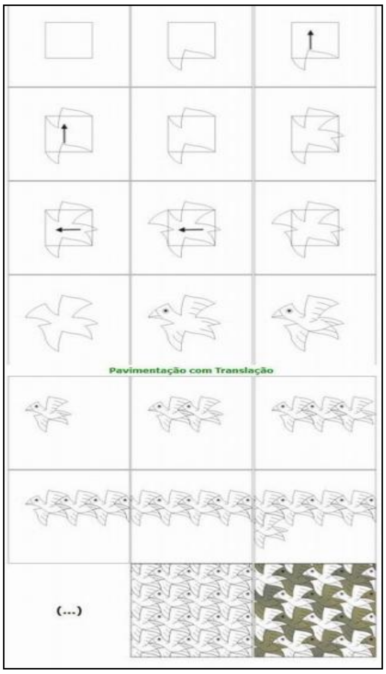




Envie suas respostas para o *e-mail detyfm@yahoo.com.br*.

Atividade 2 – Construindo Mosaicos através de Movimentos

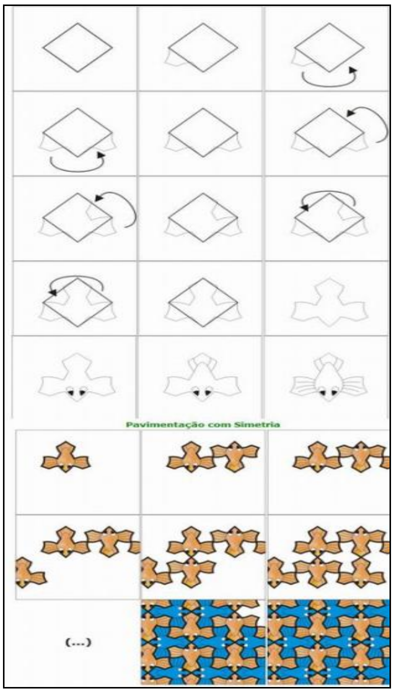
Apresentamos abaixo alguns exemplos de como fazer uma obra no estilo de Escher, usando o as transformações geométricas.

Translação



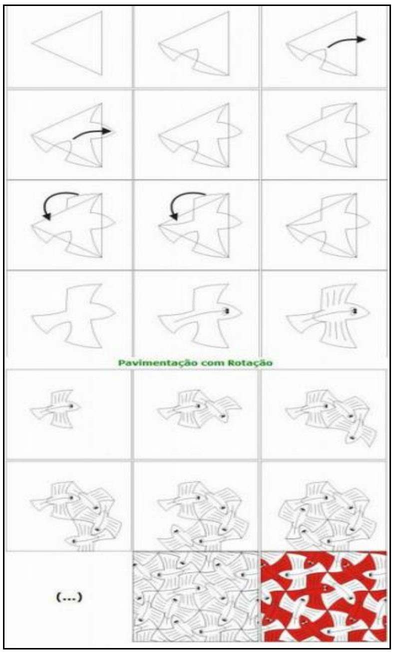
Fonte: http://www.iep.uminho.pt/aac/sm/a2002/M_C_Escher/passo_trans.

Reflexão



Fonte: http://www.iep.uminho.pt/aac/sm/a2002/M_C_Escher/passo_simetria.htm

Rotação



Fonte: http://www.iep.uminho.pt/aac/sm/a2002/M_C_Escher/passo_simetria.htm

Construa um mosaico no estilo de Escher usando as transformações geométricas do GeoGebra, e envie-o para o *e-mail* detyfm@yahoo.com.br.

Atividade 3- Elaboração de uma atividade de aprendizagem

Você deverá elaborar uma situação de aprendizagem envolvendo o encontro 3, e aplicar em sua turma de alunos. Relatando e apresentando os resultados no último encontro (quinto encontro).

ENCONTRO 5- Organização das Práticas dos Professores

Atividade 1- Apresentação de um *PowerPoint* com objetivos, exemplos de construções no GeoGebra, dando ideia para os professores-alunos de como organizar sua apresentação no dia 30/11/11 (último encontro).

Atividade 2 – Exploração do menu *Arquivo* do GeoGebra

Atividade 3 – Exploração do *PowerPoint*

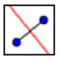
ENCONTRO 6– Resultados das Práticas dos Professores

Atividade 1- Apresentação das situações de aprendizagem criadas pelos professores-alunos

Neste encontro, como combinamos anteriormente, cada professora-aluna apresentará a sua experiência realizada com seus alunos.

Esta será feita através de um *PowerPoint*, no qual constarão as atividades desenvolvidas, exemplos de trabalhos de alunos feitos no GeoGebra, dificuldades e sucessos constatados na sua experiência, esta sendo realizada de acordo com os conhecimentos adquiridos durante os encontros.

APÊNDICE E: CONSTRUÇÃO DA MEDIATRIZ E DA BISSETRIZ

Vamos construir agora a mediatriz de um segmento AB, sendo que a mediatriz é a reta perpendicular a AB que contém o seu ponto médio. Construímos um segmento AB, traçamos dois círculos de mesmo raio AB, com centros em A e B, respectivamente. Obtemos os pontos P e Q de interseção destes círculos. A reta PQ é a mediatriz de AB, porque APBQ é um losango, suas diagonais são perpendiculares e cortam-se ao meio (figura 1). E de acordo com a propriedade (WAGNER, 2007, p.4): “A mediatriz de um segmento é o conjunto de todos os pontos que eqüidistam dos extremos do segmento.” No GeoGebra encontramos a ferramenta  *mediatriz*, com a qual podemos construir diretamente no programa a mediatriz de um segmento AB.

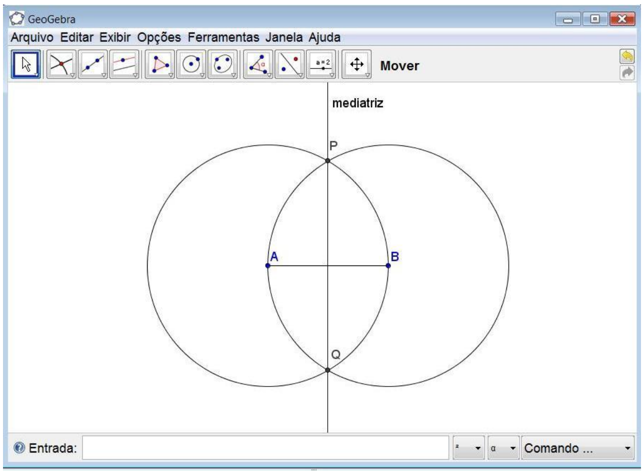
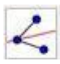


Figura 1: Mediatriz de AB

A bissetriz de um ângulo pode ser obtida pela ferramenta  *bissetriz*, a qual é definida como: “A bissetriz de um ângulo AÔB é a semirreta OC tal que AÔC = CÔB” (WAGNER, 2007, p.4). Costumamos dizer que a bissetriz “divide” um ângulo em dois outros iguais. Para construir esta bissetriz de um ângulo AÔB, sem a utilização da ferramenta *bissetriz*, podemos seguir as seguintes instruções. Traçamos um círculo de centro O. Determinamos os pontos X e Y nos lados do ângulo. Em seguida traçamos dois círculos de mesmo raio (usar a ferramenta *compasso*) com centros em X e Y que possuem C como um dos pontos de interseção (usar a ferramenta *interseção de dois objetos*). A semirreta OC é a bissetriz do ângulo AÔC. De fato, pela construção realizada temos que os triângulos OXC e OYC são congruentes (sendo o caso LLL) e, portanto, XÔC = CÔY (figura 2). Consoante Wagner (2007), a bissetriz de um ângulo é o conjunto de todos os pontos que eqüidistam dos lados do ângulo.

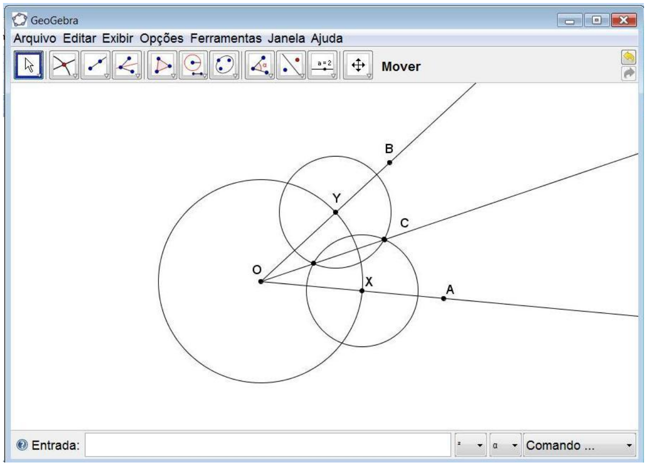
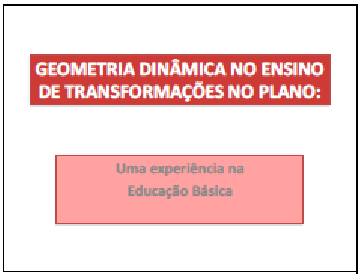


Figura 2: A bissetriz de AÔB

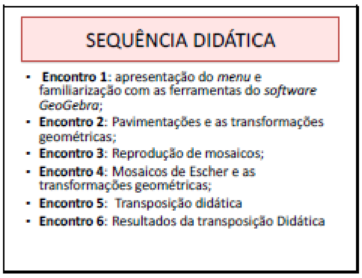
APÊNDICE F

POWERPOINT 2

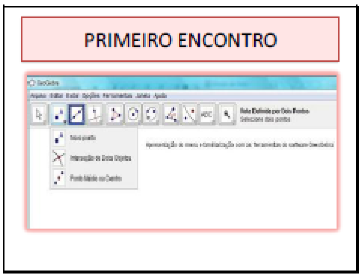
Slide 1



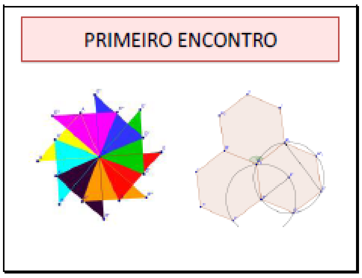
Slide 2



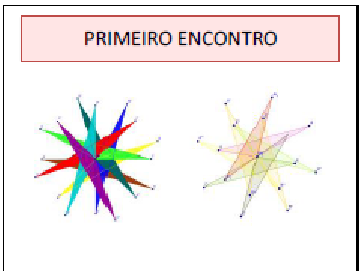
Slide 3



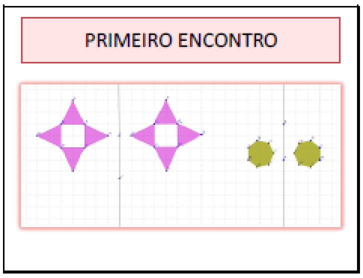
Slide 4



Slide 5

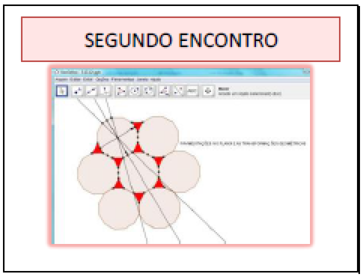


Slide 6



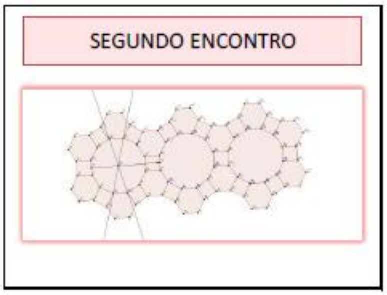
Slide 7

Slide 8



Slide 9

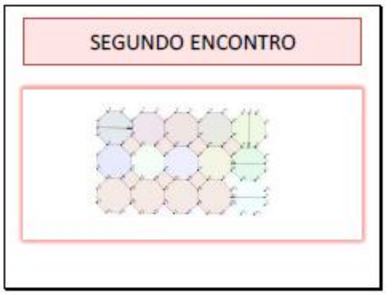
Slide 10



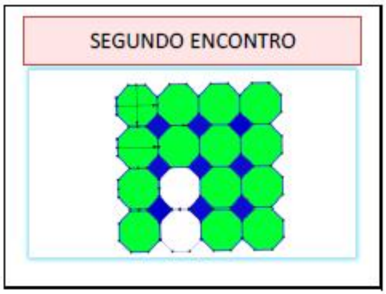
Slide 11

Slide 12

Slide 13



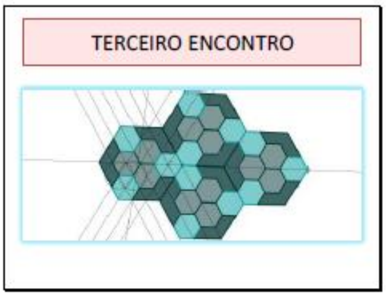
Slide 14



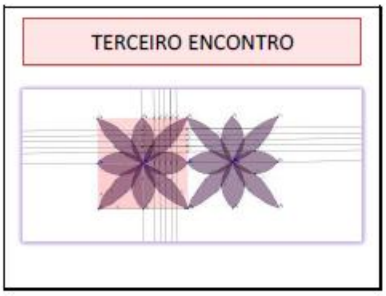
Slide 15

Slide 16

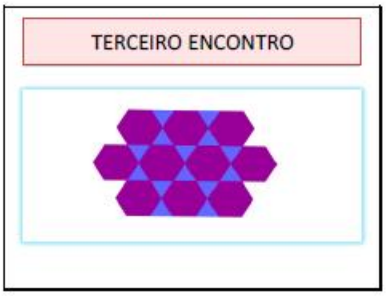
Slide 17



Slide 18

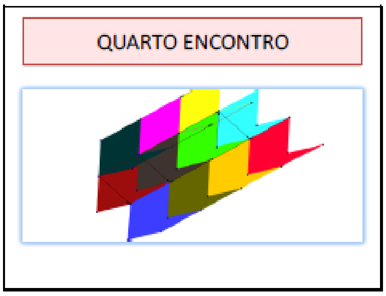


Slide 19



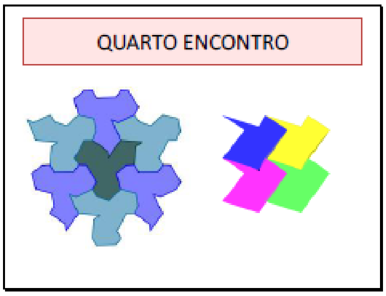
Slide 20

Slide 21

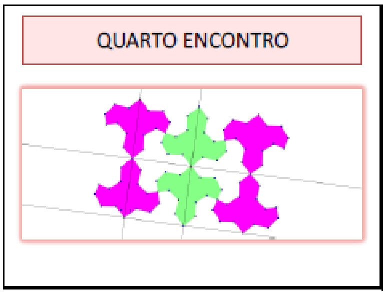


Slide 22

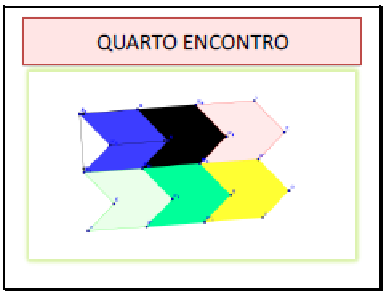
Slide 23



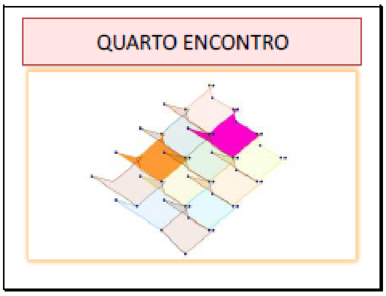
Slide 24



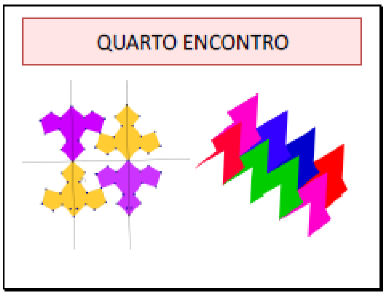
Slide 25



Slide 26

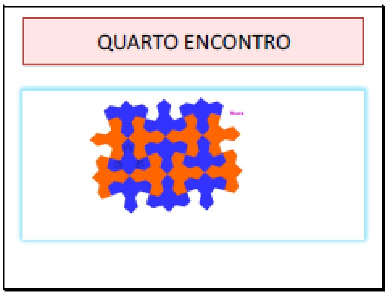


Slide 27

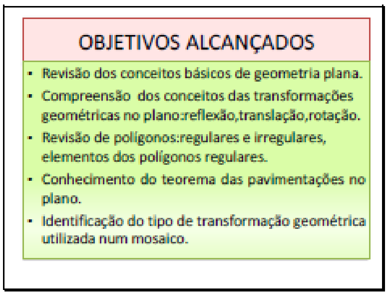


Slide 28

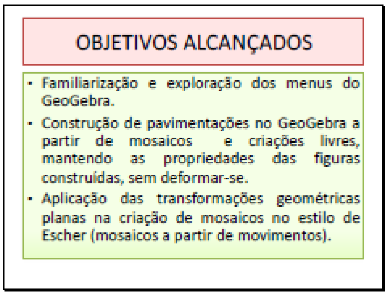
Slide 29



Slide 30

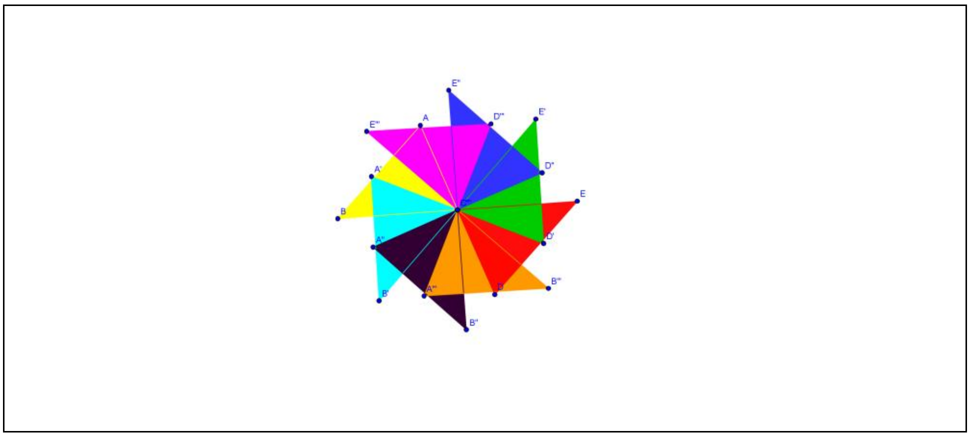


Slide 31

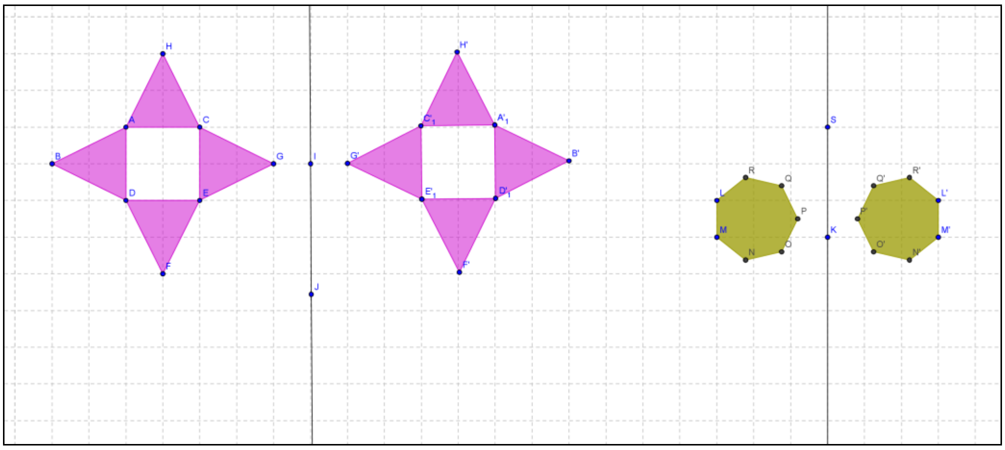


ANEXOS

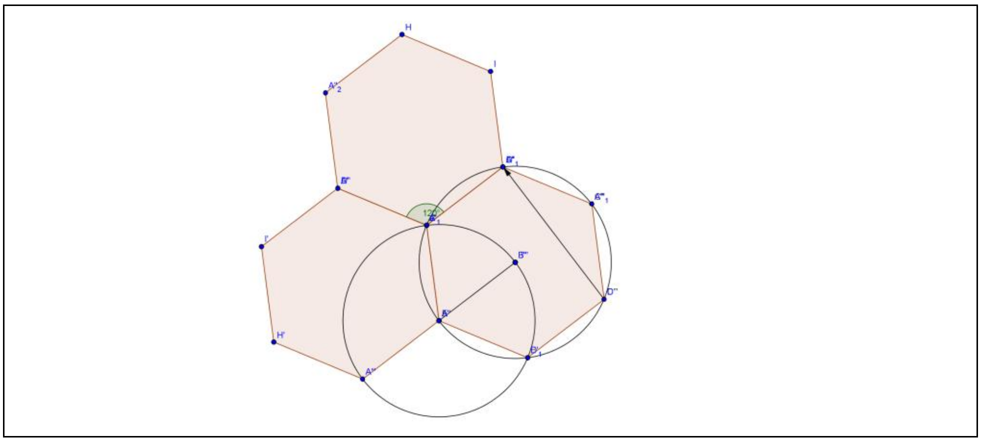
ANEXO A: Produções dos Professores no encontro 1
Familiarização dos *menus* dos GeoGebra



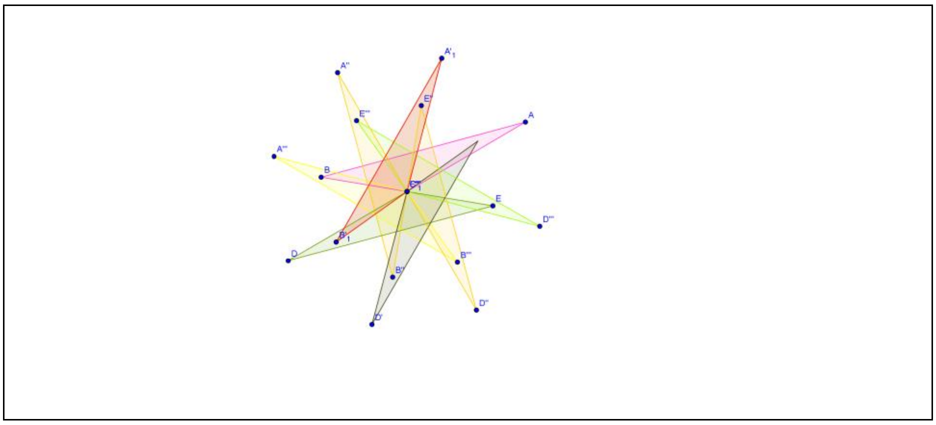
Professora CRISTIANE



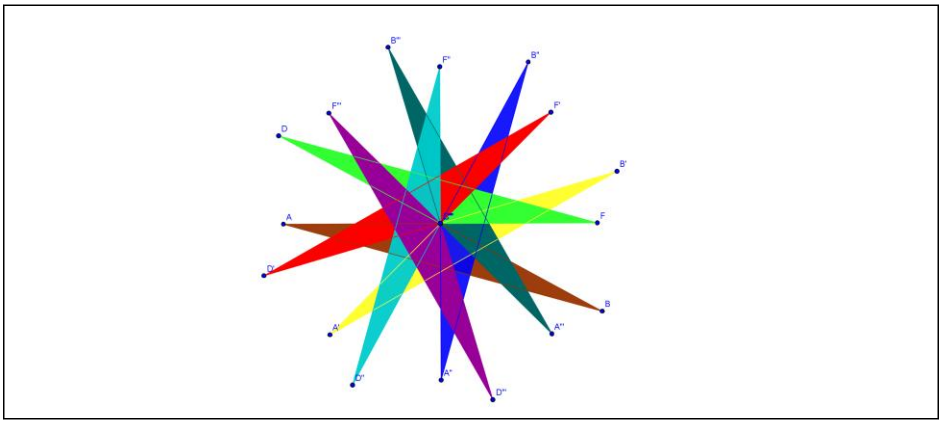
Professora DALILA



Professora DENISE



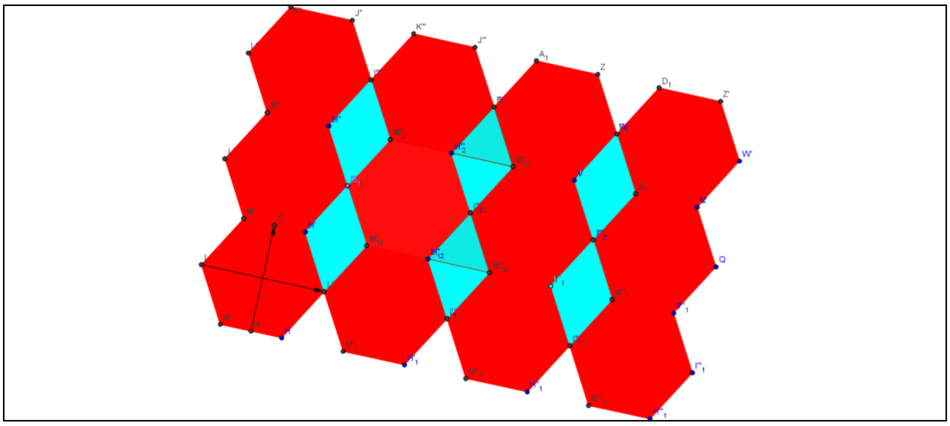
Professora ELIANE



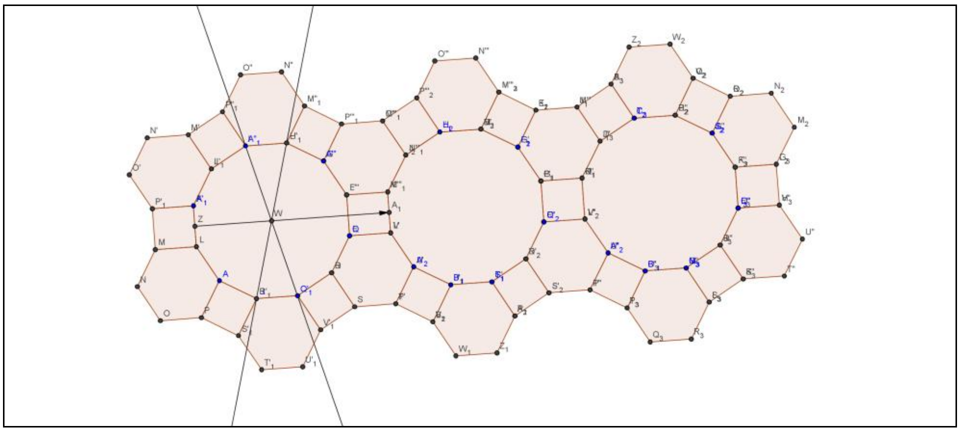
Professora MARILVA

Professora MAURA

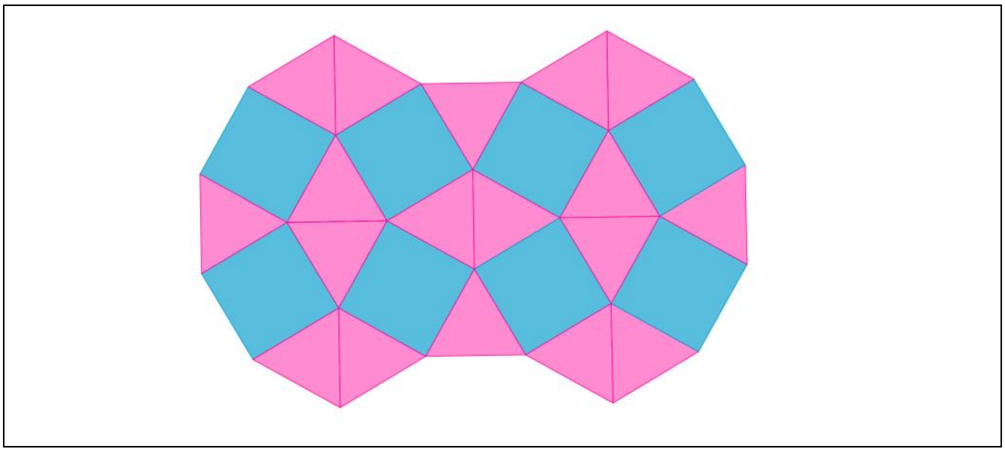
ANEXO B: Produções dos professores encontro 2
Pavimentações no plano e as transformações geométricas



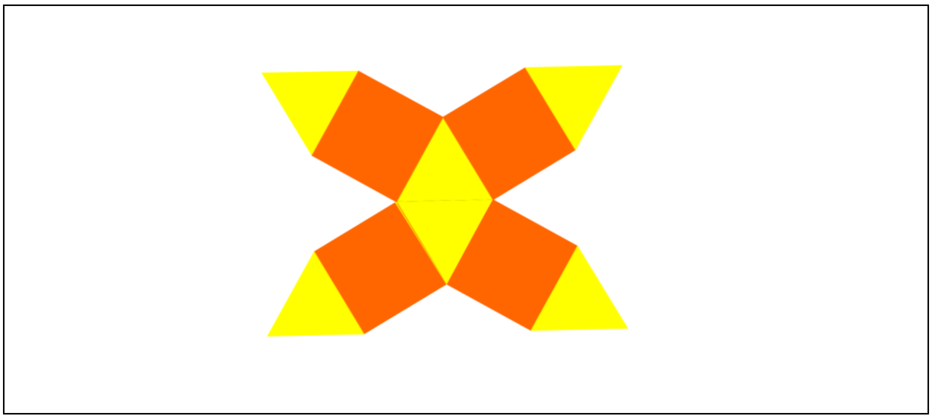
Professora CRISTIANE



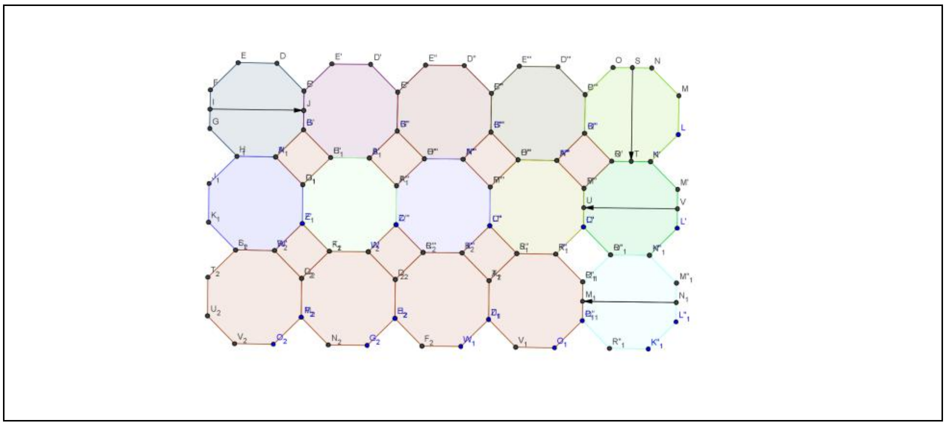
Professora DALILA



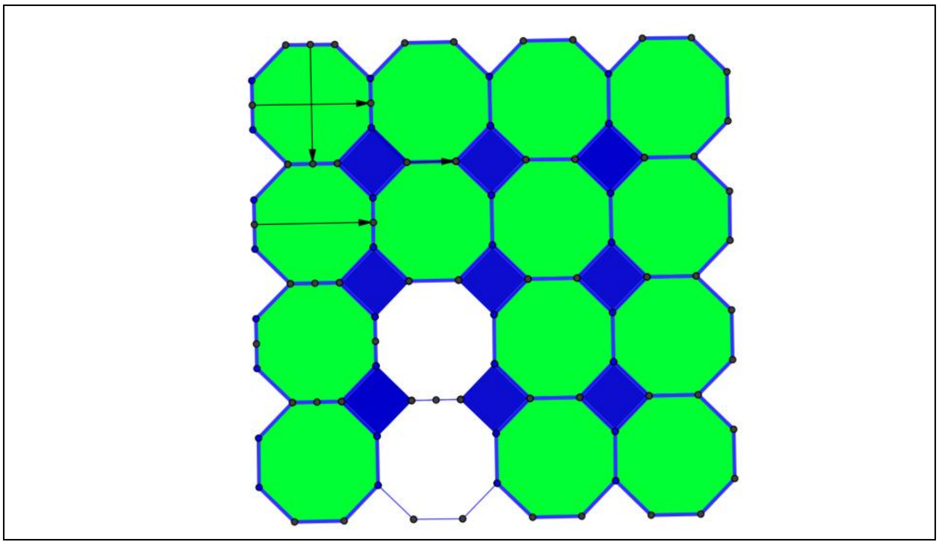
Professora DENISE



Professora ELIANE

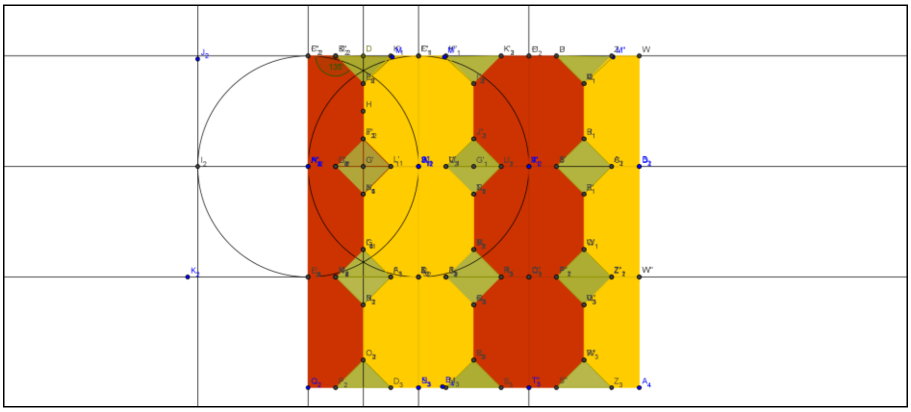


Professora LIGIANE

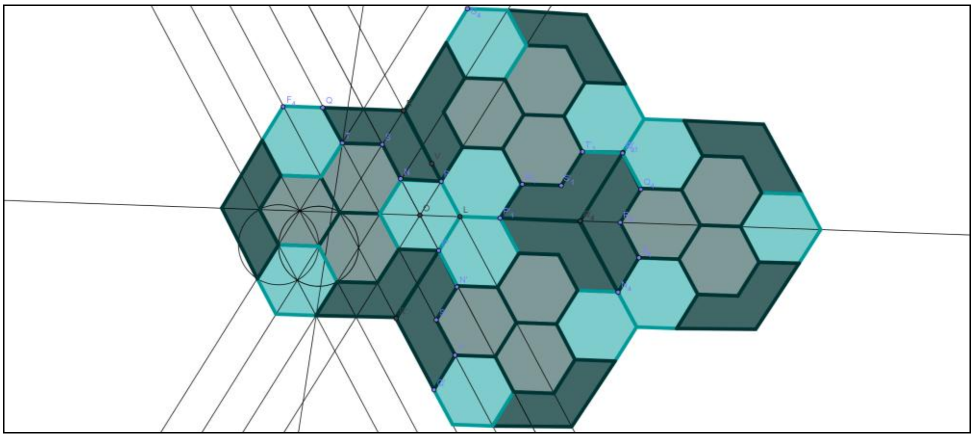


Professora MARILVA

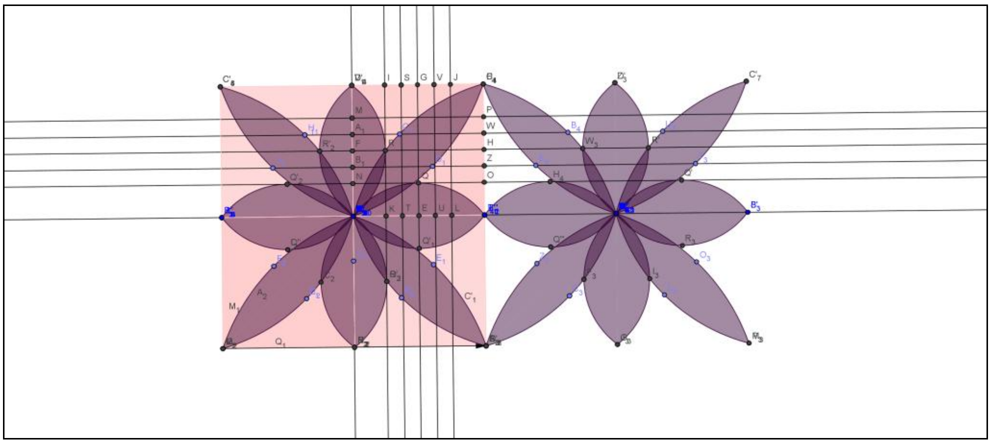
ANEXO C: Produção dos professores encontro 3
Reprodução de mosaicos



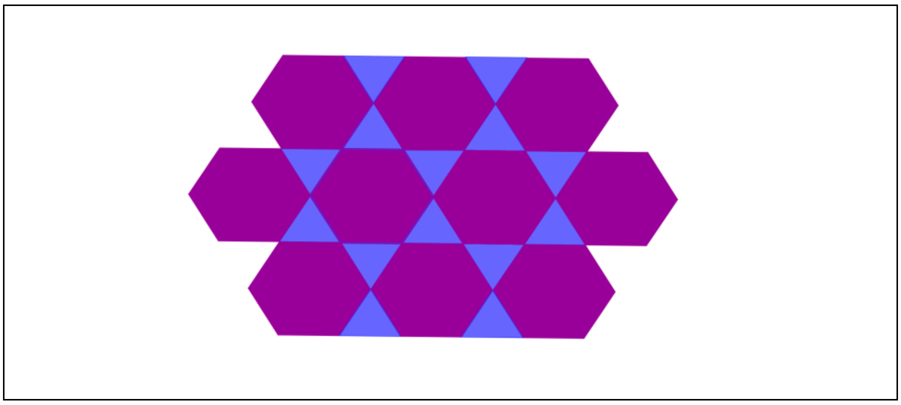
Professora CRISTIANE



Professora DALILA

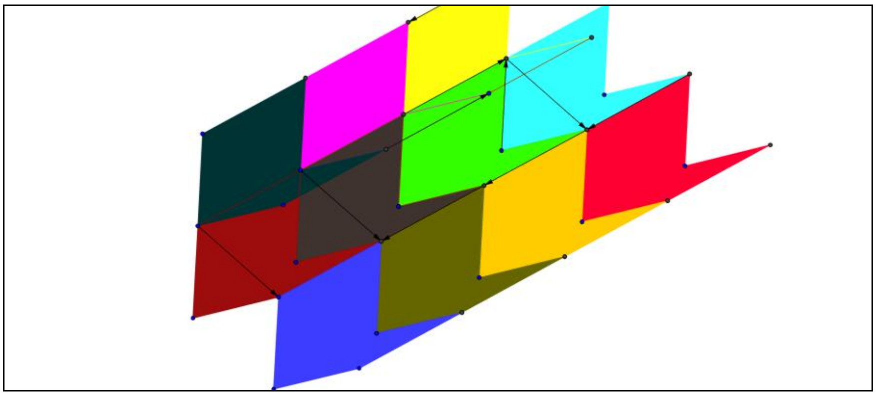


Professora DENISE

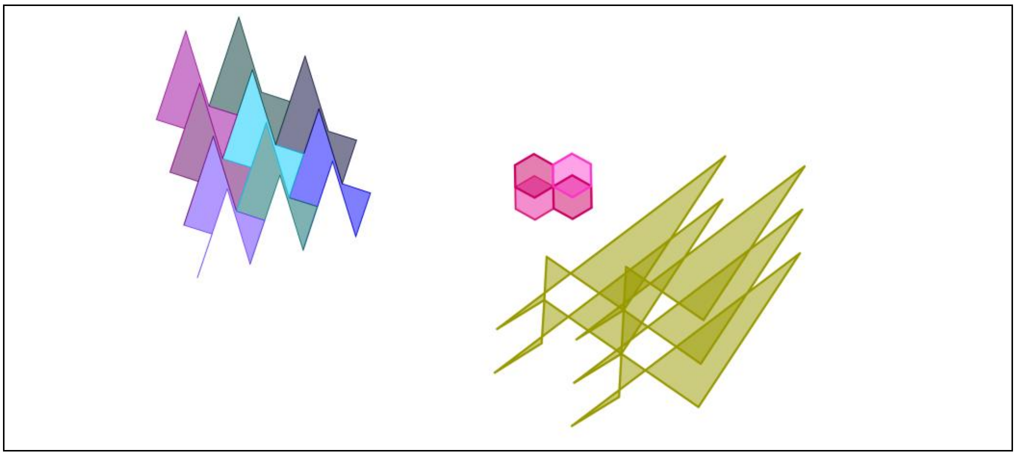


Professora MARILVA

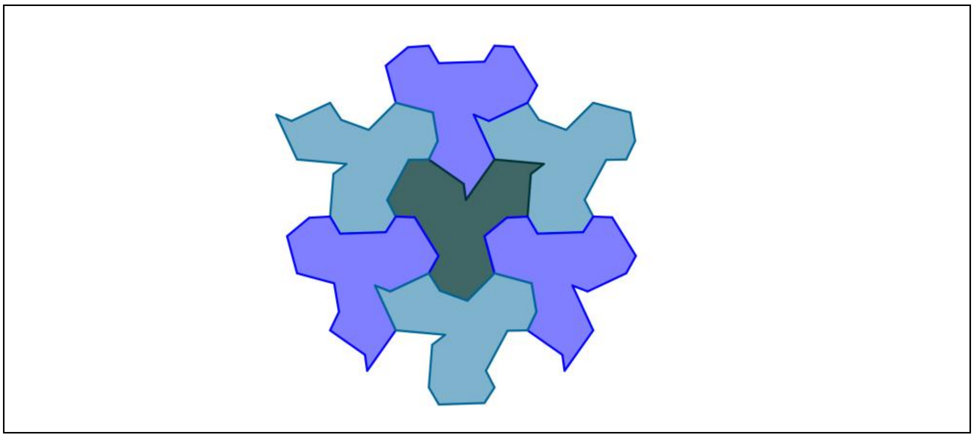
ANEXO D: Produção professores encontro 4
Mosaicos de Escher e as transformações geométricas planas



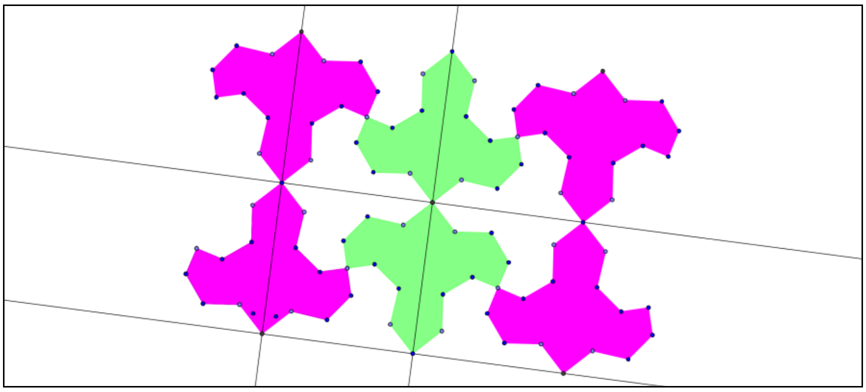
Professora CRISTIANE



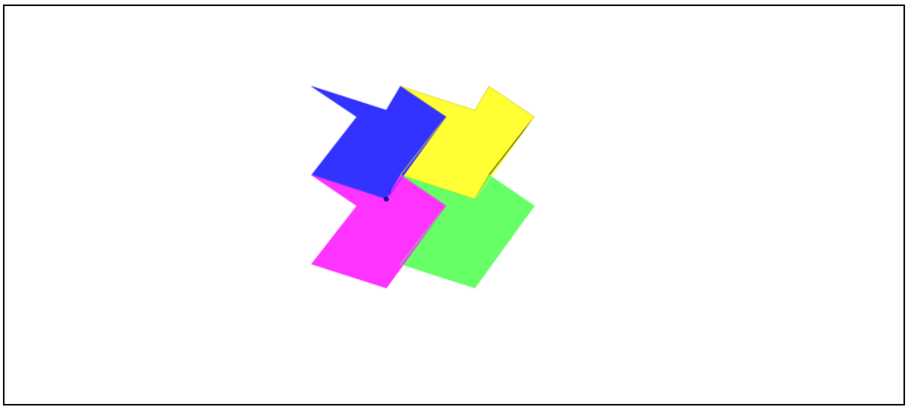
Professora DALILA



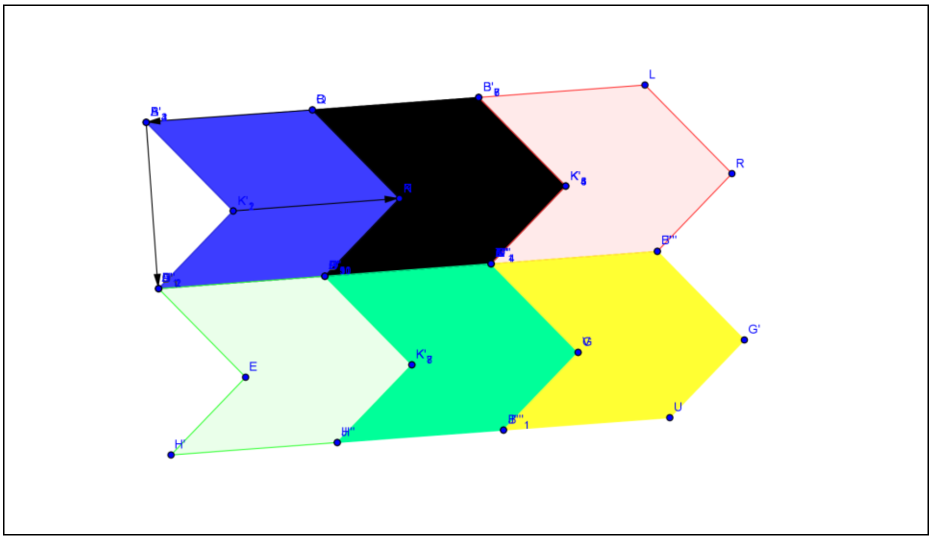
Professora DALILA



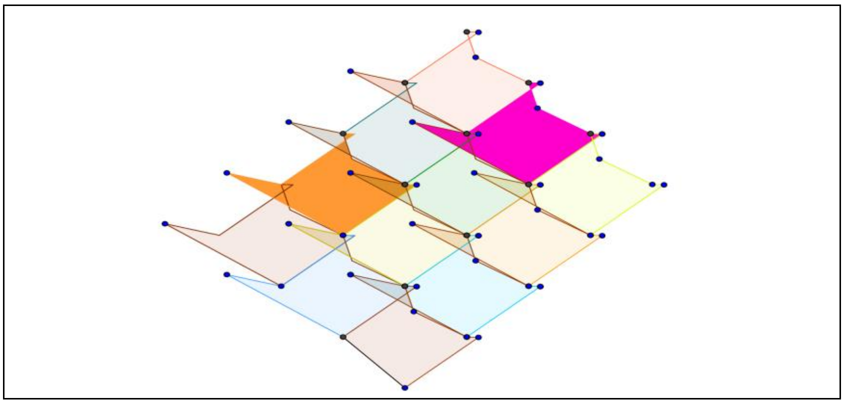
Professora DENISE



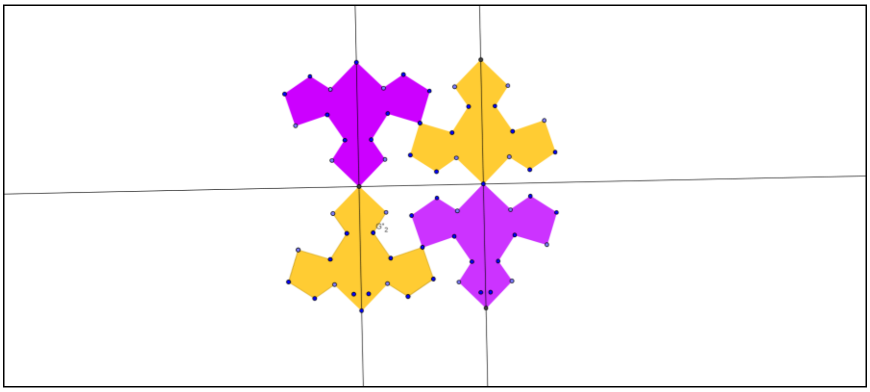
Professora DENISE



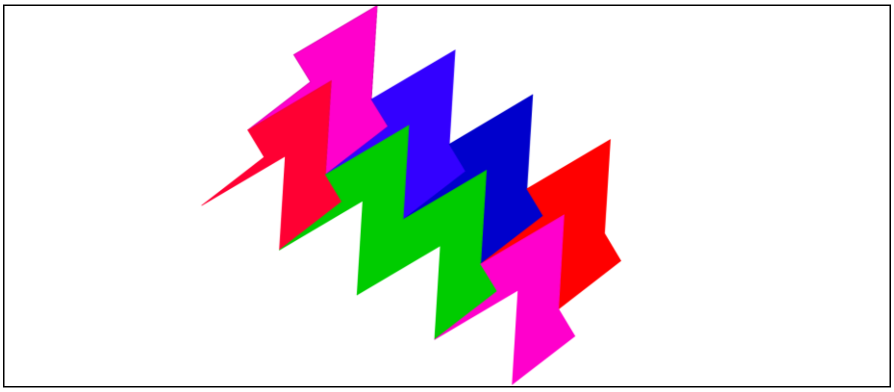
Professora TERESINHA



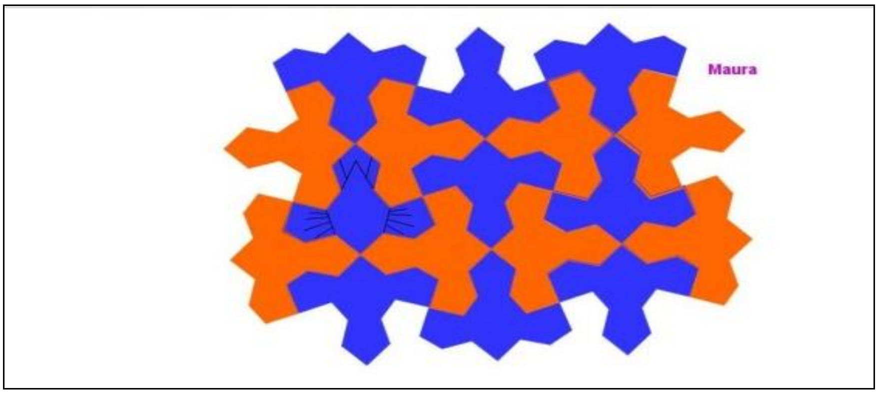
Professora ELIANE



Professora MARILVA

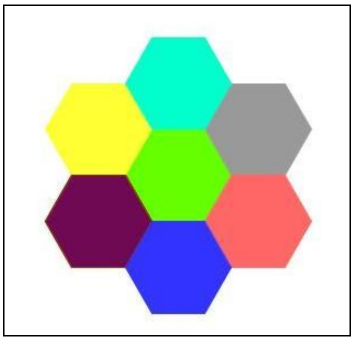
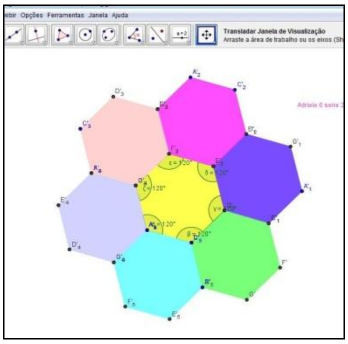
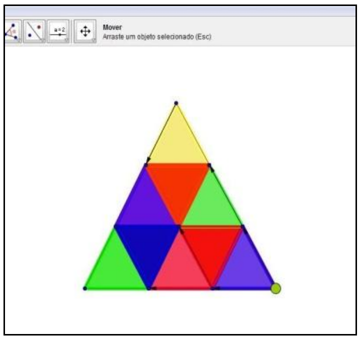
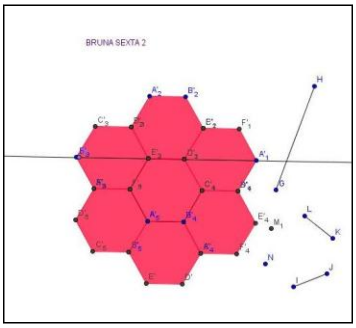


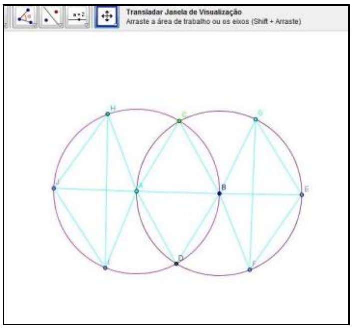
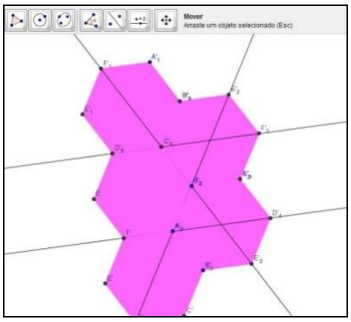
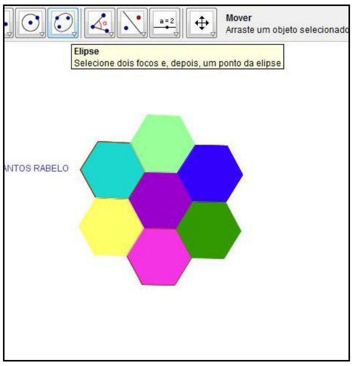
Professora MARILVA

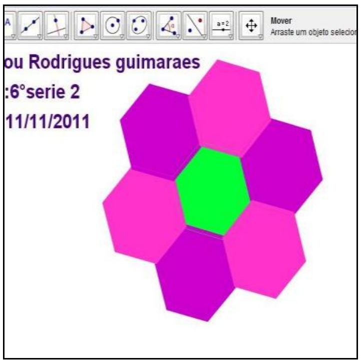


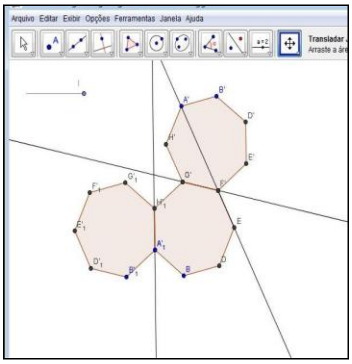
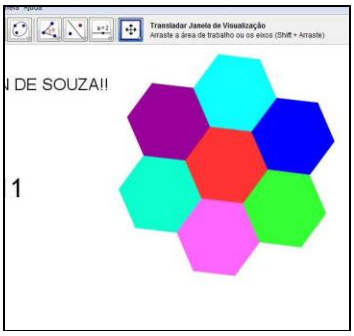
Professora MAURA

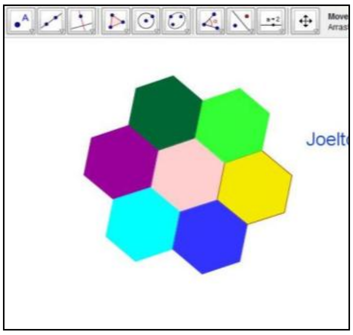
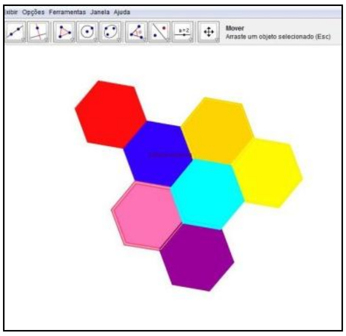
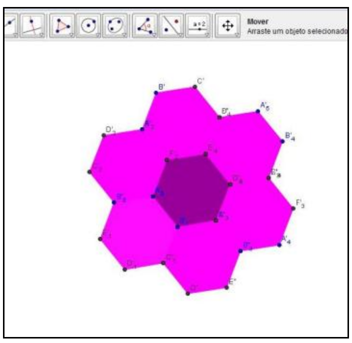
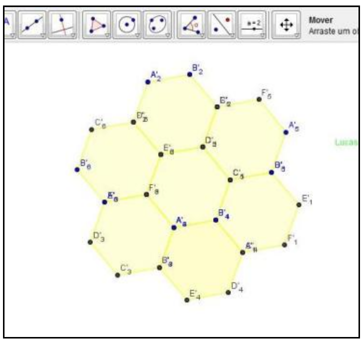
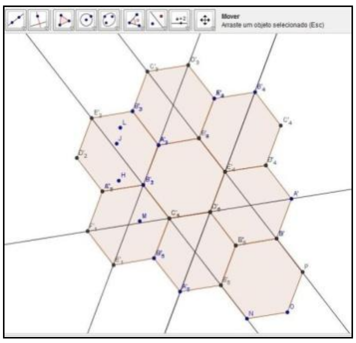
ANEXO E: PRODUÇÃO DOS ALUNOS DA PROFESSORA MARILVA

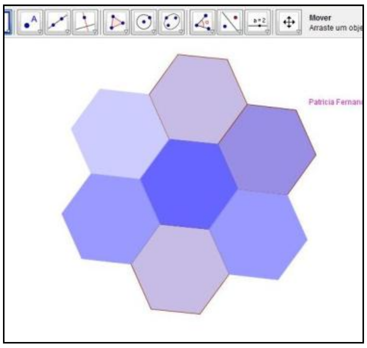





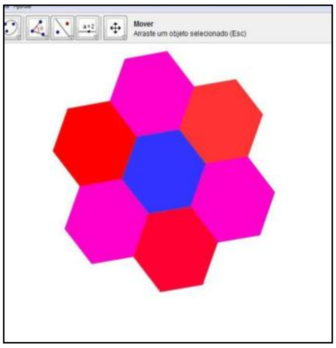




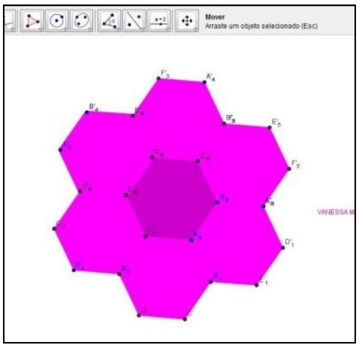


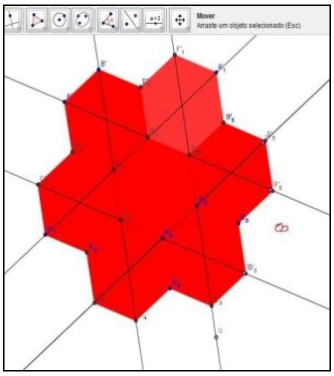







Mover


Mover
Arraste um objeto selecionado (Esc)

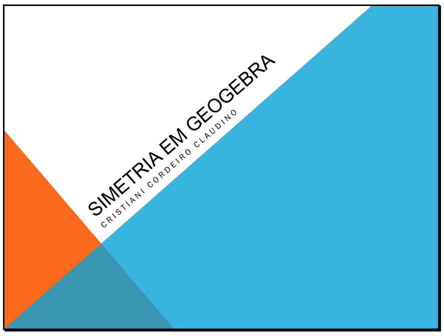

Mover
Arraste um objeto selecionado (Esc)


Mover
Arraste um objeto selecionado (Esc)
Dalpiaz

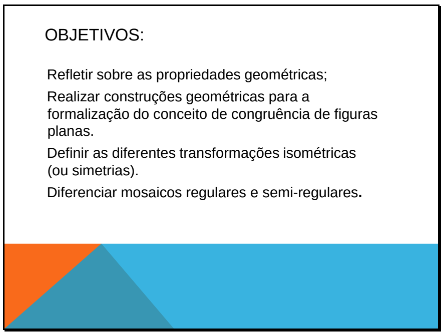

Mover
Arraste um objeto selecionado (Esc)

ANEXO F: PRODUÇÕES DOS ALUNOS DA PROFESSORA CRISTIANE

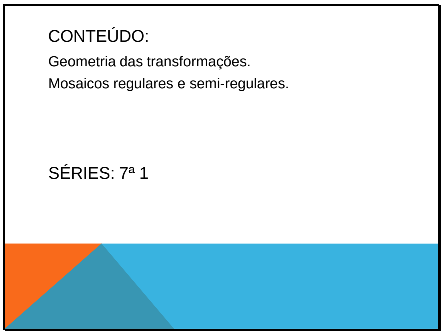
Slide 1



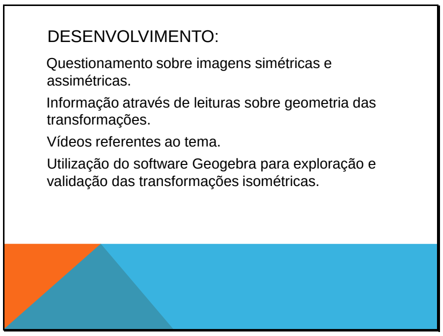
Slide 2



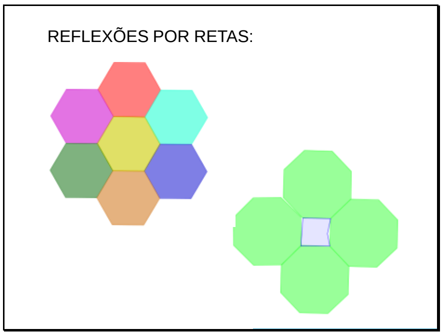
Slide 3



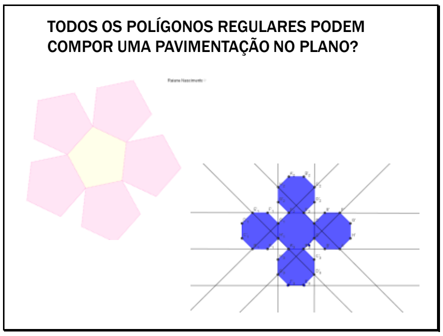
Slide 4



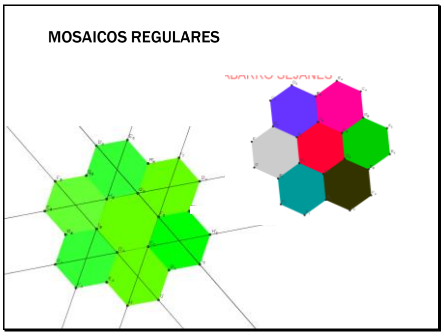
Slide 5



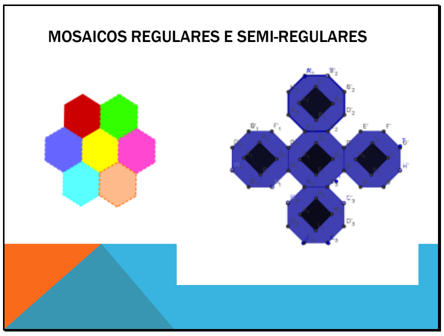
Slide 6



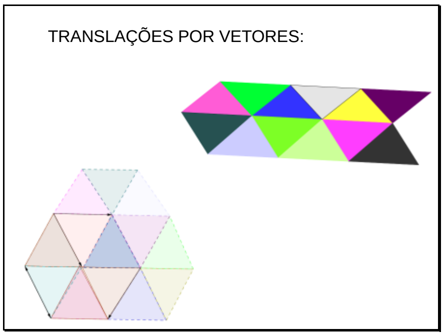
Slide 7



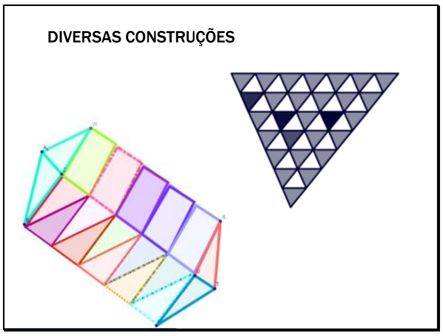
Slide 8



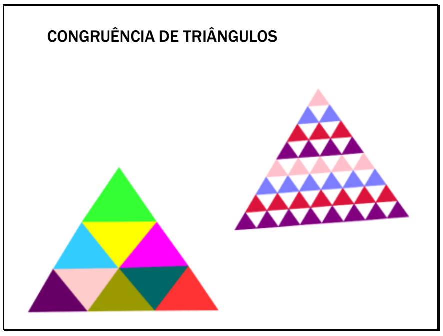
Slide 9



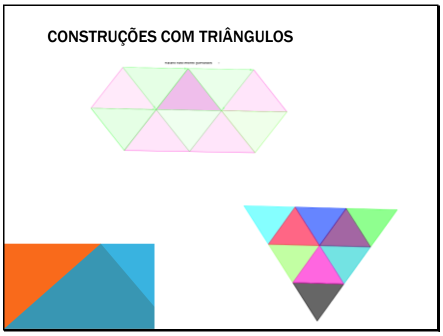
Slide 10



Slide 11



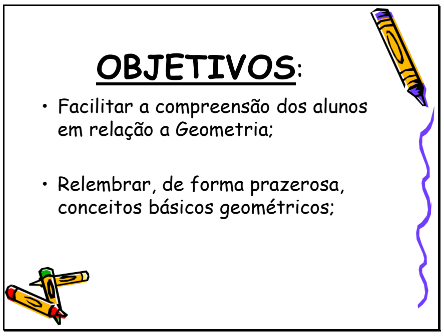
Slide 12



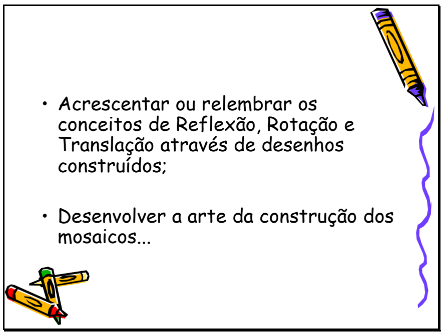
ANEXO G: APRESENTAÇÃO PROFESSORA DALILA

Slide 1

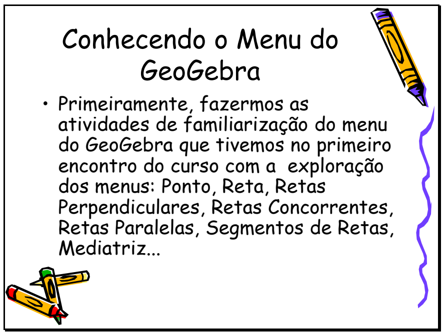
Slide 2



Slide 3



Slide 4



Slide 5

Slide 6

Slide 7

Considerações Finais...

- Negativas: Devido ao pouco tempo disponibilizado para as aulas, pois os horários do laboratório de informática da escola estavam todos preenchidos, não tive condições de aplicar as aulas conforme desejava...

Slide 8

- Da mesma forma pelo pouco tempo, os alunos não tiveram condições de desenvolver os desenhos criativos para a aplicação da Reflexão, Rotação e Translação;
- Os Mosaicos não foram desenvolvidos...

Slide 9

- Positivos: O uso da tecnologia aplicada a certos conteúdos que são difíceis de aprender na aula tradicional, desperta a curiosidade e pelo visual, facilita a assimilação;
- Alguns alunos perguntaram quando iríamos novamente ao laboratório para seguirmos a aula de Geometria...

Slide 10

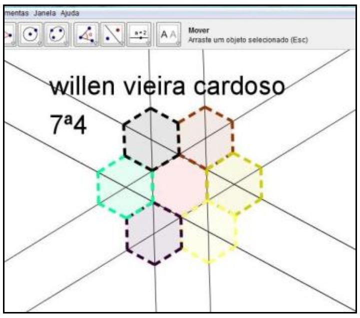
Quanto a Importância do Curso...

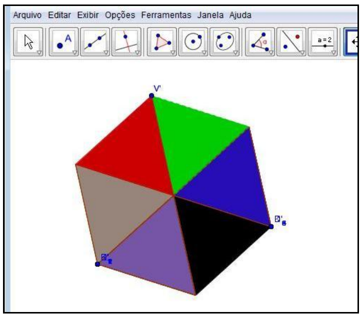
Para mim, o curso foi importante pois no mundo tecnológico que vivemos, os alunos apresentam dificuldades para gostarem das tradicionais aulas... Ainda que elas sejam necessárias, porém, sempre que os conteúdos permitirem, é interessante dispormos das tecnologias para facilitarmos o entendimento dos alunos...

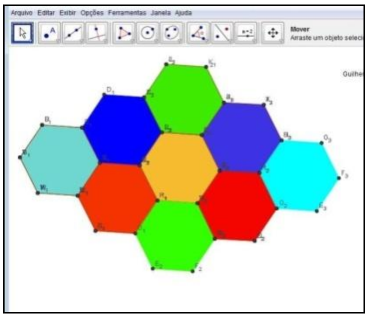
Slide 11

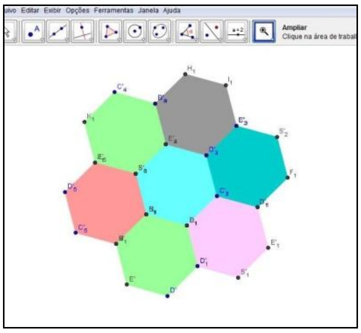
Mesmo não conseguindo aplicar as aulas conforme desejava no momento, o conhecimento do *software* me permitirá a construção de aulas mais "interessantes" que serão aplicadas do próximo ano em diante...

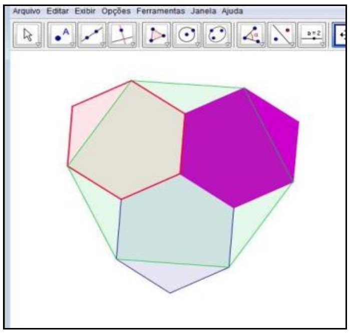
ANEXO H: PRODUÇÃO DOS ALUNOS DA PROFESSORA DENISE

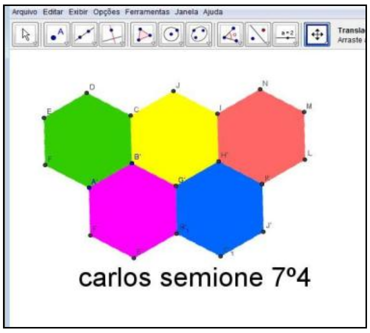


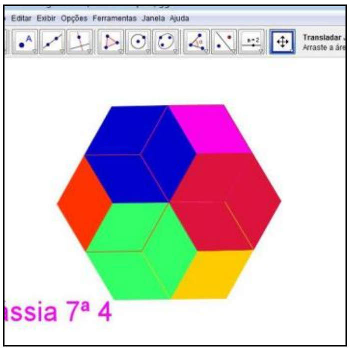


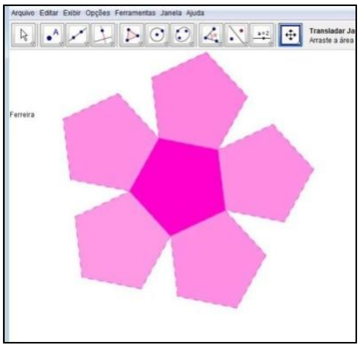


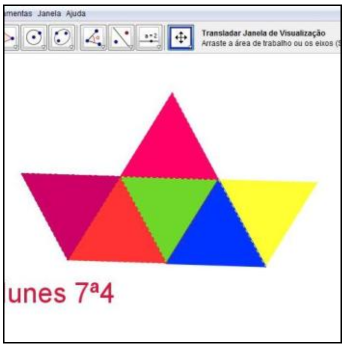


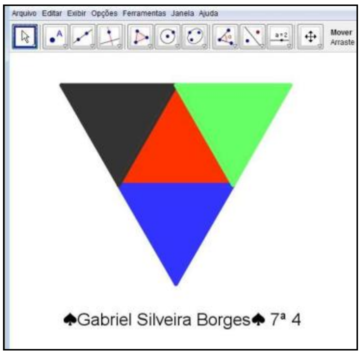


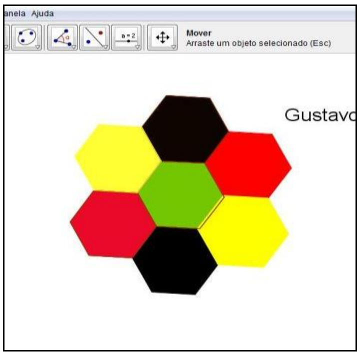


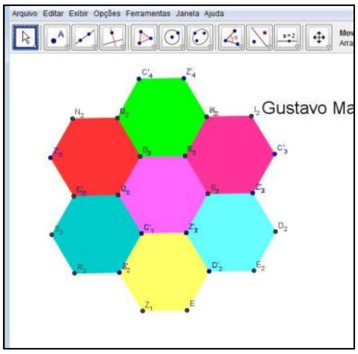


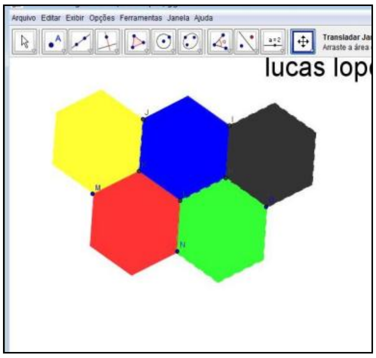


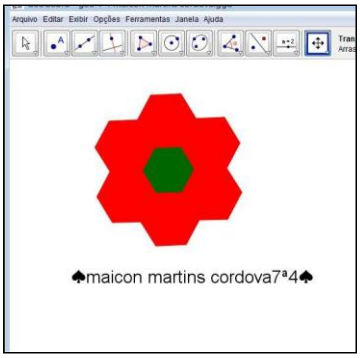


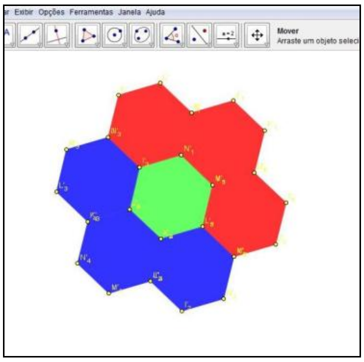


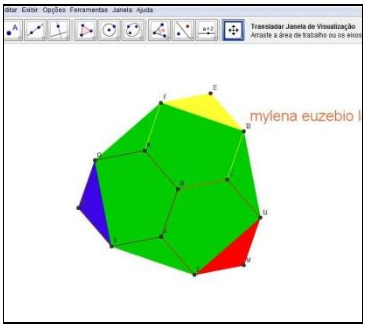


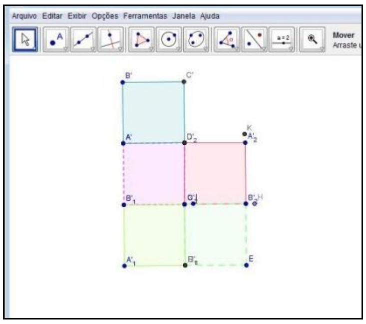


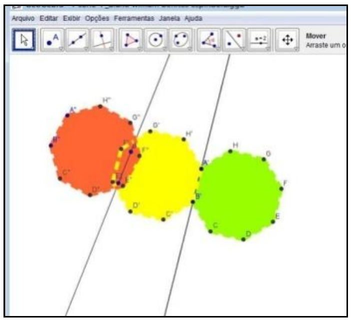


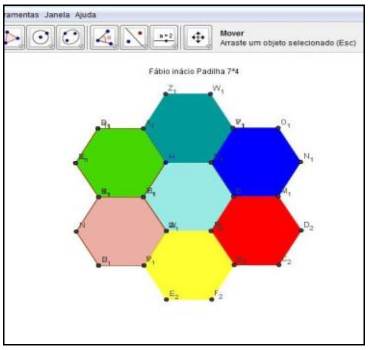





Translador Janela de Visualização
Arraste a área de trabalho ou os eixos
mylena euzebio l


Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Mover


Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Mover


Mover
Arraste um objeto selecionado (Esc)
Fábio inácio Padilha 7º4