Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-graduação em Matemática

Sobre Ações Parciais Torcidas de Grupos e o Produto Cruzado Parcial

por

Saradia Sturza Della Flora

Porto Alegre, 09 de julho de 2012

Tese submetida por Saradia Sturza Della Flora †, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero

Banca examinadora:
Prof. Dr. Antonio Paques (IM - UFRGS)
Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies (IME-USP)
Prof. Dr. João Roberto Lazzarin (CCNE-UFSM)
Prof. Dr. Laerte Bemm (DMA-UEM)
Prof. Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero (IM-UFRGS)
Prof. Dr. Wagner Cortes (IM-UFRGS)

†Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Aos meus pais

Agradecimentos

A Deus. À minha família por ter sempre acreditado em mim. Em particular aos meus pais e a minha irmã pelas orações e incentivo. Ao meu noivo Cicero pelo apoio e carinho em todos os momentos.

A todos os meus colegas de Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS, em especial: Daiana, Daiane, Diego, Bárbara, Andrea, Thiago, Thaísa e Adriana. As minhas amigas Vivian e Fernanda pela força. Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS pela acolhida e aos professores que contribuiram com a minha formação. À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo auxílio financeiro.

Gostaria de agradecer os Professores Wagner Cortes e Laerte Bemm que colaboraram com o desenvolvimento de alguns resultados que foram estabelecidos no Capítulo 3.

Meu profundo agradecimento ao meu orientador Prof. Miguel Ferrero pelo empenho, incentivo e dedicação durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho consideramos ações parciais torcidas de um grupo G sobre um anel A. Além disso, estudamos ações parciais torcidas que admitem envolvente. No caso em que A é semiprimo, estendemos a ação parcial torcida ao anel de quocientes maximal de A. Com isso, encontramos condições necessárias e suficientes para que o produto cruzado parcial $A *_\alpha G$ seja um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Também, introduzimos o conceito de ação parcial torcida X- externa estudando algumas propriedades que se transferem de A para $A *_\alpha G$ quando a ação é deste tipo.

Abstract

In this work we consider twisted partial actions of a group G on a ring A. Firstly we study twisted partial actions with enveloping action. Next we assume that A is semiprime. In this case we extend the twisted partial action to the maximal left rings of quotients of A. Using this we find necessary and sufficient conditions for the partial crossed product $A *_\alpha G$ to be a semiprime Goldie ring. Finally we introduce the concept of the twisted partial action X-outer and study some properties that transfer from A to $A *_\alpha G$ when the action is of this type.

Sumário

Introdução

A noção geral de uma ação parcial (contínua) torcida de um grupo localmente compacto sobre uma C^*-álgebra (um C^*-sistema dinâmico parcial torcido) e de produtos cruzados correspondentes foram introduzidos por R. Exel em [11], onde foi estabelecida a associatividade destes produtos cruzados com a utilização de unidades aproximadas.

A presença de ações parciais foi detectada em diversas outras áreas da Matemática, tais como Teoria de Modelos, Teoria de Semigrupos, Topologia, Teoria Combinatória de Grupos entre outras.

A versão puramente algébrica de ações parciais de grupos sobre conjuntos (e sobre anéis) foi dada em [7]. Neste trabalho os autores mostraram que, sob certas condições, existe uma ação envolvente para uma dada ação parcial torcida. Além disso, estudaram sob que condições o skew anel de grupo parcial é uma álgebra associativa. Este trabalho desencadeou uma série de outros trabalhos sobre ações parciais de grupos. As ações parciais torcidas são uma generalização da noção de ação parcial e foram introduzidas em [8]. Neste trabalho, entre outros resultados, os autores provam que o produto cruzado parcial é um anel associativo. Em seguida, em [9], os autores dão condições necessárias e suficientes para a existência de uma ação envolvente, quando o anel possui unidade.

Atualmente existe uma vasta literatura sobre ações parciais de grupos que admitem uma ação envolvente. Por exemplo, em [15] os autores trabalharam com ações parciais com envolvente e com o skew anel de grupos parcial destas ações parciais. Deste modo é natural considerar ações parciais torcidas que não admitem necessariamente uma envolvente.

O objetivo desta tese é estudar problemas sobre ações parciais torcidas e produtos cruzados parciais que foram estudados para ações parciais não torcidas. Vamos generalizar resultados obtidos em [15] e ainda, obter resultados semelhantes aos de

[5] para grupos finitos, policíclicos infinitos e policíclicos por finito. Além disso, vamos estender alguns resultados do Capítulo 3 de [24], para o caso das ações parciais torcidas.

No primeiro capítulo, apresentamos as principais definições e resultados que são necessários para o bom entendimento dos demais capítulos.

No Capítulo 2 apresentamos alguns resultados que são generalizações naturais, para o caso de ações parciais torcidas, dos demonstrados por M. Ferrero e J. Lazzarin em [15]. Trabalhamos na situação em que α é uma ação parcial torcida de um grupo G sobre A, onde A é um anel com unidade e os ideais S_g de A tem elemento identidade, para todo $g \in G$. Além disso, vamos supor que α possui uma ação envolvente $\beta = (B, \{\beta_g\}_{g\in G}, \{u_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$. Investigamos algumas propriedades que se transferem do anel A para o anel B e reciprocamente, bem como propriedades que são transferidas de A para o produto cruzado parcial $A *_\alpha G$. Alguns destes resultados são ferramentas fundamentais para as demonstrações dos obtidos no capítulo seguinte.

No Capítulo 3, vamos considerar uma ação parcial torcida α de um grupo G sobre um anel semiprimo A (não necessariamente com unidade). Primeiramente, vamos mostrar que α pode ser estendida a uma ação parcial torcida α^* de G sobre o anel de quocientes de Martindale à esquerda de A. A extensão α^* irá nos permitir provar que α pode ser estendida também a uma ação parcial torcida α^{**} de G sobre o anel de quocientes maximal à esquerda de A. Estes resultados estendem os obtidos por M. Ferrero em [14].

Utilizando a extensão α^{**} e supondo agora que A é um anel semiprimo com unidade, obtemos condições necessárias e suficientes para que o produto cruzado parcial $A *_\alpha G$ seja um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Mostramos que se $A *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda, então A é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Além disso, se G é um grupo finito e A é um anel livre de $|G|$-torção, então A é um anel semiprimo de Goldie à esquerda se e somente se $A *_\alpha G$ é semiprimo de Goldie à esquerda. Este mesmo resultado também foi obtido no caso em que G é um grupo policíclico infinito ou quando G é policíclico por finito e α é uma ação parcial torcida de tipo finito. Os resultados assim obtidos estendem os que aparecem na tese de doutorado de L. Bemm (veja [4]).

Finalmente, no Capítulo 4, introduzimos o conceito de ação parcial torcida X-externa e provamos alguns resultados que são generalizações dos apresentados por S.

Montgomery em [24]. Esta noção é dada via a extensão α^*, construída no capítulo anterior. Trabalhamos na situação em que α é uma ação parcial torcida de G sobre um anel semiprimo A, onde os ideais S_g possuem unidade, para todo $g \in G$. Estudamos algumas propriedades que se transferem de A para o produto cruzado parcial $A *_\alpha G$ quando a ação é X-externa. Por exemplo, se A é um anel semiprimo e α é uma ação parcial torcida X-externa de G sobre A, então $A *_\alpha G$ é semiprimo.

Neste texto, um anel é sempre um anel associativo não necessariamente comutativo e não necessariamente com unidade. Além disso, todas as propriedades envolvendo módulos serão estudadas para módulos à esquerda. As notações utilizadas serão previamente estabelecidas ao longo do trabalho.

Capítulo 1

Pré-Requisitos

Neste capítulo apresentaremos os principais conceitos e propriedades que serão importantes para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Como a maioria dos resultados aqui apresentados já fazem parte da literatura, as demonstrações serão omitidas mas poderão ser encontradas na referências indicadas.

1.1 Anéis de Goldie

Nesta primeira seção relembraremos várias definições e resultados que são clássicos na teoria de anéis e módulos. Muitos destes podem ser encontradas, por exemplo, em [18]. Afim de não nos tornarmos repetitivos, cabe observar que os análogos à direita das noções que serão apresentadas aqui são definidas de maneira similar. No que segue, A denotará um anel associativo não necessariamente com unidade.

Definição 1.1.1. *Um A-submódulo à esquerda N de um A-módulo à esquerda M é dito essencial se $N \cap L \neq 0$, para todo A-submódulo à esquerda não nulo L de M.*

Claramente, mediante esta definição, dizemos que um ideal à esquerda I de A é essencial se visto como A-submódulo à esquerda é essencial em ${}_AA$.

Definição 1.1.2. *Um A-submódulo à esquerda N de um A-módulo à esquerda M é dito denso se para quaisquer $y \in M$ e $x \in M \setminus \{0\}$, existe $a \in A$ tal que $ax \neq 0$ e $ay \in N$.*

Assim, um ideal à esquerda I de A é denso se visto como A-submódulo à esquerda é denso em ${}_AA$.

Notação: Usaremos a notação $N \subseteq_e M$ (resp. $N \subseteq_d M$) para indicar que N é um submódulo à esquerda essencial (resp. denso) de M.

É fácil verificar que se I é um ideal à esquerda denso de A então I é um ideal à esquerda essencial.

A proposição abaixo nos dá algumas propriedades que os ideais à esquerda densos satisfazem.

Proposição 1.1.3. *([3, Proposition 2.1.1]) Sejam I, J ideais à esquerda densos de A e $f : I \to A$ um homomorfismo de A-módulos à esquerda. Então,*

(i) $f^{-1}(J) = \{a \in I; f(a) \in J\}$ *é um ideal à esquerda denso de A.*

(ii) $I \cap J$ *é um ideal à esquerda denso de A.*

(iii) IJ *é um ideal à esquerda denso de A.*

Vejamos também a definição de anel não singular à esquerda que será necessária, por exemplo, para definirmos anéis de Goldie à esquerda.

Aqui, dados um A-módulo à esquerda M e $m \in M$, $ann_l(m) = \{a \in A; am = 0\}$ é chamado o *anulador (à esquerda)* de m.

Definição 1.1.4. *Seja M um A-módulo à esquerda. Um elemento $m \in M$ é dito um elemento singular de M se o ideal à esquerda $ann_l(m)$ é essencial em ${}_AA$. O conjunto de todos os elementos singulares de M será denotado por $\mathcal{Z}(M)$.*

É fácil ver que $\mathcal{Z}(M)$ é um A-submódulo de M, chamado *submódulo singular* de M.

Definição 1.1.5. *Dizemos que ${}_AM$ é um módulo singular à esquerda se $\mathcal{Z}(M) = M$ e não singular à esquerda se $\mathcal{Z}(M) = 0$. Em particular, dizemos que o anel A é não singular à esquerda se $\mathcal{Z}({}_AA) = 0$.*

Observamos que $\mathcal{Z}({}_AA)$ é um ideal bilateral de A, e é chamado de *ideal singular à esquerda* de A ([18, Corollary 7.4]). Para simplificarmos a notação, escrevemos $\mathcal{Z}(A)$ para indicar $\mathcal{Z}({}_AA)$.

Observação 1.1.6. *Dizer que um módulo não é singular não é o mesmo que dizer que tal módulo é não singular. Obviamente, se um módulo é singular e não singular ele deve ser nulo.*

Segue imediatamente da definição que $x \in \mathcal{Z}(A)$ se e somente se para todo ideal à esquerda não nulo J de A existe $0 \neq y \in J$ tal que $yx = 0$.

Exemplo 1.1.7. *Considere um anel não nulo A com elemento identidade. Se A é simples então A é não singular à esquerda. Vejamos, como $A \neq 0$, então $\mathcal{Z}(A) \neq A$ uma vez que $ann_l(1_A) = 0$ não pode ser essencial em ${}_AA$. Logo, $\mathcal{Z}(A) = 0$ pois A é simples.*

Exemplo 1.1.8. *Seja A um anel com uma involução $*$, isto é, $* : A \to A$ é um homomorfismo aditivo onde $(a^*)^* = a$ e $(ab)^* = a^*b^*$, para todo $a, b \in A$. Se $a^*a = 0$ implicar que $a = 0$, para qualquer $a \in A$, então A é não singular à esquerda e à direita ([18, Lemma 7.9]). Considere A o anel dos operadores limitados em um espaço de Hilbert H tal que A é fechado sob a adjunta. Observe que a aplicação adjunta $*$ é uma involução em A. Assim, se $T \in A$ é tal que $T^*T = 0$ então, pela definição de T^*, temos que $0 =< T^*T(v), v >=< T(v), T(v) >$, para todo $v \in H$. Disto segue que $T(v) = 0$, para todo $v \in H$, isto é, $T = 0$. Logo, A é não singular à esquerda e à direita.*

Lema 1.1.9. *([15, Lemma 1.19]) Seja A um anel tal que $A = \sum_{i \in I} J_i$, onde J_i é um ideal de A com elemento identidade 1_i como anel, para todo $i \in I$. Então $\mathcal{Z}(J_i) = \mathcal{Z}(A) \cap J_i$, para todo $i \in I$.*

Uma ferramenta básica no estudo dos anéis e módulos Noetherianos é a dimensão uniforme (ou dimensão de Goldie) de um módulo.

Definição 1.1.10. *Um A-módulo à esquerda M é dito uniforme se $M \neq 0$ e qualquer submódulo à esquerda não nulo de M é essencial.*

Ou ainda, um A-módulo à esquerda não nulo M é uniforme se e somente se para quaisquer elementos não nulos $x_1, x_2 \in M$, existem $a_1, a_2 \in A$ tais que $a_1x_1 = a_2x_2 \neq 0$. Assim, um A-módulo à esquerda M não nulo não é uniforme se e somente se existem $x_1, x_2 \in M$ tais que $Ax_1 \cap Ax_2 = 0$.

Exemplo 1.1.11. *Todo A-módulo à esquerda simples é uniforme. Porém a recíproca não vale em geral. Considere $A = \mathbb{Z}$. Os $\mathbb{Z}$-módulos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}_{p^n}$ com $p \geq 2$ primo, são todos uniformes porém não são simples.*

Teorema 1.1.12. *([18, Theorem 6.1]) Sejam* $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ *e* $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ *submódulos essenciais de um* A*-módulo à esquerda* M*, onde* A *é um anel com unidade e os* $U_i's$ *e* $V_j's$ *são módulos uniformes. Então* $m = n$.

Com este resultado podemos então definir dimensão uniforme de um A-módulo à esquerda.

Definição 1.1.13. *Seja* A *um anel com unidade. Dizemos que um* A*-módulo à esquerda* M *tem dimensão uniforme* n *(*$udimM = n$*) se existe um submódulo à esquerda essencial* V *de* M *que é uma soma direta de* n *submódulos uniformes. Por outro lado, se tal* n *não existe, então* $udimM = \infty$.

Utilizando a definição segue que $udimM = 0$ se e somente se $M = 0$.

Desta maneira, definimos a dimensão uniforme à esquerda de um anel com unidade A como sendo a dimensão uniforme de A visto como A-módulo à esquerda e escrevemos $udimA$ para indicar $udim_A A$.

A proposição a seguir nos diz exatamente quando um A-módulo à esquerda tem dimensão uniforme infinita.

Proposição 1.1.14. *([18, Proposition 6.4]) Sejam* A *um anel com unidade e* M *um* A*-módulo à esquerda. Então,* $udimM = \infty$ *se e somente se* M *contém uma soma direta infinita de submódulos não nulos.*

Exemplo 1.1.15. *Segue da proposição anterior que qualquer* A*-módulo à esquerda artiniano ou noetheriano tem dimensão uniforme finita.*

Proposição 1.1.16. *([18, Corollary 6.10]) Sejam* A *um anel com unidade e* $\{M_i\}_{1\leq i\leq k}$ *um conjunto de* A*-módulos à esquerda. Então,*

(i) $udim(\bigoplus_{i=1}^{k} M_i) = \sum_{i=1}^{k} udimM_i$.

(ii) *Para qualquer* A*-submódulo à esquerda* N *de* M *temos que* $udimN \leq udimM$ *e* $udimN = udimM$ *quando* N *é essencial em* M.

Exemplo 1.1.17. *Qualquer espaço vetorial sobre um corpo* K *de dimensão finita tem dimensão uniforme finita, que é igual a sua dimensão sobre* K.

Para qualquer subconjunto X de um anel A, o anulador à esquerda de X em A é o conjunto $ann_{l,A}(X) = \{a \in A; aX = 0\}$. Um ideal anulador à esquerda é da forma $ann_{l,A}(X)$, para algum subconjunto X de A. Consequentemente, dizemos que A satisfaz a condição de cadeia ascendente sobre os ideais anuladores à esquerda se toda cadeia ascendente de ideais anuladores à esquerda for estacionária.

Munidos destes conceitos, podemos definir anel de Goldie à esquerda.

Definição 1.1.18. *Um anel A é dito um anel de Goldie à esquerda se A possui dimensão uniforme à esquerda finita e A satisfaz a condição de cadeia ascendente sobre os ideais anuladores à esquerda.*

Exemplo 1.1.19. *Todo anel noetheriano à esquerda é um anel de Goldie à esquerda.*

Para finalizar esta seção, vejamos a definição de um anel de quocientes clássico à esquerda, para que então possamos enunciar o Teorema de Goldie.

Definição 1.1.20. *Um elemento a de um anel A é dito regular à esquerda se $ba = 0$ implica $b = 0$, para $b \in A$. Analogamente, define-se elemento regular à direita. Dessa forma, dizemos que $a \in A$ é um elemento regular se a for regular à direita e à esquerda.*

Notação: O conjunto de todos os elementos regulares de A será denotado por $\mathcal{C}_A$.

Lembremos que um anel A é *livre de n-torção aditiva*, para um inteiro positivo n, se para qualquer $a \in A$ temos $na = 0$ implicar que $a = 0$.

Definição 1.1.21. *Seja A um anel com unidade. Considere A como subanel de um anel S, ambos com mesma unidade. Então, S é um anel de quocientes clássico à esquerda de A se e somente se valem as seguintes condições:*

(i) Todo elemento regular de A é uma unidade em S (isto é, tem inverso em S).

(ii) Todos os elementos de S são da forma $b^{-1}a$, onde $a, b \in A$ e b é um elemento regular de A.

Neste caso, dizemos que A é uma *ordem à esquerda* em S.

É importante observar que nem todo anel possui um anel de quocientes clássico à esquerda. Segundo o Teorema de Goldie, todo anel semiprimo de Goldie à esquerda possui um anel de quocientes clássico à esquerda, e além disso, este é um anel semisimples como veremos a seguir.

Teorema 1.1.22. *(Teorema de Goldie) Seja A um anel com unidade. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A possui um anel de quocientes clássico à esquerda semisimples.

(ii) A é semiprimo de Goldie à esquerda.

(iii) A é semiprimo, não singular à esquerda e $udimA < \infty$.

(iv) Para qualquer ideal à esquerda U de A, U é essencial em A se e somente se $U \cap \mathcal{C}_A \neq \emptyset$.

Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada, por exemplo, em [18, Theorem 11.13].

Observação 1.1.23. *Observe que o Teorema de Goldie é válido para anéis com unidade. Segundo [23], página 61, a teoria pode ser adaptada para anéis sem unidade. Além disso, é possível deduzir o Teorema de Goldie para anéis sem unidade, a partir do teorema para anéis com unidade.*

1.2 O Anel de Quocientes Maximal à Esquerda

Nesta seção A denotará um anel qualquer não necessariamente com unidade. Vamos definir e construir o anel de quocientes maximal à esquerda de A. Ao contrário do anel de quocientes clássico à esquerda, o anel de quocientes maximal à esquerda sempre existe.

Consideremos o conjunto $\mathcal{T}$ de todos os pares (U, f) tal que U é um ideal à esquerda denso de A e $f :_A U \to_A A$ é um A-homomorfismo à esquerda. Definimos a seguinte relação de equivalência em $\mathcal{T}$: $(U, f) \sim (V, g)$ se e somente se $f = g$ em $U \cap V$. É fácil verificar que $\sim$ é de fato uma relação de equivalência, e denotamos por $[U, f]$ a classe de equivalência determinada por $(U, f) \in \mathcal{T}$. Definimos em $\mathcal{T}$ as operações de soma e multiplicação por:

$$[U, f] + [V, g] = [U \cap V, f + g],$$

$$[U, f] \cdot [V, g] = [g^{-1}(U), f \circ g].$$

Pela Proposição 1.1.3, $U \cap V$ e $g^{-1}(U)$ são ideais à esquerda densos de A. Além disso, estas operações estão bem definidas. O anel construído acima é chamado *anel de quocientes maximal à esquerda de* A e será denotado por $Q_m(A)$.

De maneira similar, utilizando o conjunto dos ideais à direita densos de A, podemos construir o anel de quocientes maximal à direita de A.

Proposição 1.2.1. *([3, Proposition 2.1.7]) O anel de quocientes maximal à esquerda de A, $Q_m(A)$, satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) Para todo $q \in Q_m(A)$, existe um ideal à esquerda denso J de A tal que $Jq \subseteq A$.

(ii) Para todo $q \in Q_m(A)$ e todo ideal à esquerda denso J de A, $Jq = 0$ se e somente se $q = 0$.

(iii) Para todo ideal à esquerda denso J de A e para toda $f \in Hom_A({}_AJ,{}_AA)$, existe $q \in Q_m(A)$ tal que $f(x) = xq$, para todo $x \in J$.

Além disso, as propriedades $(i) - (iv)$ caracterizam o anel $Q_m(A)$ a menos de isomorfismo.

Observemos que todo ideal à esquerda não nulo de $Q_m(A)$ intercepta A não trivialmente. De fato, sejam I um ideal à esquerda não nulo de $Q_m(A)$ e $0 \neq q \in I$. Assim, pela Proposição 1.2.1, existe um ideal à esquerda denso D de A tal que $0 \neq Dq \subseteq A$. Logo, $0 \neq Dq \subseteq I \cap A$. Disto segue facilmente que se A é um anel semiprimo então $Q_m(A)$ também é semiprimo.

A próxima proposição descreve outras propriedades que se transferem de A para $Q_m(A)$ e fornece relações entre ideais à esquerda de A e ideais à esquerda de $Q_m(A)$.

Proposição 1.2.2. *Em $Q_m = Q_m(A)$, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Seja n um inteiro positivo. Então, A é livre de n-torção se e somente se Q_m é livre de n-torção.

(ii) Se H é um ideal à esquerda denso (resp. uniforme) de A, então Q_mH é um ideal à esquerda denso (resp. uniforme) de Q_m.

(iii) Se F é um ideal à esquerda denso (resp. uniforme) de Q_m, então $F \cap A$ é um ideal à esquerda denso (resp. uniforme) de A.

(iv) *Se A possui unidade, então $udimA = udimQ_m$.*

(v) $\mathcal{Z}(A) = \mathcal{Z}(Q_m) \cap A$.

(vi) *A é não singular à esquerda se e somente se Q_m é não singular à esquerda.*

(vii) *Se A possui unidade, então A é um anel de Goldie à esquerda se e somente se Q_m é um anel de Goldie à esquerda.*

A demonstração desta proposição é uma simples aplicação de vários resultados e definições que já foram dadas até aqui.

Às vezes iremos nos restringir a situação em que A é um anel que é escrito como um produto qualquer de anéis, isto é, $A = \prod\limits_{j \in J} A_j$ para uma família de anéis $\{A_j\}_{j \in J}$ e J é um índice qualquer. Nesta situação, a proposição abaixo descreve quem é o anel de quocientes maximal à esquerda de A. Este é um resultado clássico demonstrado primeiramente por Y. Utumi em [27].

Proposição 1.2.3. *Seja A um anel tal que $A = \prod\limits_{j \in J} A_j$, para uma família de anéis $\{A_j\}_{j \in J}$ e J é um índice qualquer. Então $Q_m(\prod\limits_{j \in J} A_j) \simeq \prod\limits_{j \in J} Q_m(A_j)$.*

1.3 O Anel de Quocientes de Martindale à Esquerda

Nesta seção vamos definir e construir o anel de quocientes de Martindale à esquerda. Este conceito foi introduzido por W. S. Martindale em [21] para anéis primos e foi posteriormente estendido para anéis semiprimos por S. A. Amitsur ([1]). Como o anulador de qualquer ideal não nulo de um anel primo é igual a zero, qualquer ideal não nulo de um anel primo é essencial, e assim a construção do anel de quocientes de Martindale à esquerda é mais simples para anéis primos. Vamos fazer a construção para anéis semiprimos. Esta noção será uma ferramenta fundamental no desenvolvimento de todo este trabalho. Além disso, investigaremos relações entre o anel A e seu respectivo anel de quocientes de Martindale à esquerda. No que segue, A denotará um anel semiprimo não necessariamente com unidade e quando nos referirmos a um ideal, significa sempre um ideal bilateral.

Notação: Usaremos $I \subseteq_e A$ para indicar que I é um ideal bilateral essencial de A.

Como nesta seção estaremos sempre considerando um anel semiprimo A, então para qualquer ideal I de A temos que os anuladores à direita e à esquerda de I em A coincidem. Assim denotamos $ann_A(I) = \{a \in A; Ia = 0\} = \{a \in A; aI = 0\}$.

Proposição 1.3.1. *([3, Remark 2.1.4]) Para um ideal I de um anel semiprimo A são equivalentes:*

(i) $ann_A(I) = 0$.

(ii) I é um ideal à esquerda denso.

(iii) I é um ideal à esquerda essencial.

(iv) I é um ideal essencial como ideal bilateral (isto é, para qualquer ideal $J \neq 0$, $I \cap J \neq 0$).

Notação: Para um anel semiprimo A, denotaremos por $\mathcal{F} = \mathcal{F}(A)$ o conjunto dos ideais de A que satisfazem as condições equivalentes dadas na proposição acima. Note que, se $I, J \in \mathcal{F}$ então IJ, $I \cap J$ e I^n $(n \geq 0)$ pertencem todos a $\mathcal{F}$.

Observação 1.3.2. *Suponha que A é um anel primo. Então, para qualquer ideal não nulo I de A temos que $ann_A(I) = 0$ (pela definição de anel primo). Por outro lado, o ideal nulo tem anulador $A \neq 0$. Portanto, nesse caso, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(A)$ é simplesmente o conjunto de todos os ideais não nulos de A.*

Definição 1.3.3. *([18, Definition/Proposition 14.7]) Para um anel semiprimo A, definimos*

$$Q(A) = \{q \in Q_m(A);\ Iq \subseteq A \ \textit{para algum}\ I \in \mathcal{F}\},$$

$$Q_s(A) = \{q \in Q_m(A);\ Iq, qJ \subseteq A \ \textit{para}\ I, J \in \mathcal{F}\}.$$

Estes são subanéis de $Q_m(A)$, com $A \subseteq Q_s(A) \subseteq Q(A)$. O anel $Q(A)$ (resp. $Q_s(A)$) é chamado o anel de quocientes de Martindale à esquerda (resp. simétrico) de A.

Note que, como $\mathcal{F}$ é fechado para interseções finitas, podemos tomar I, J como sendo o mesmo ideal (em $\mathcal{F}$) na definição de $Q_s(A)$.

Assim como os elementos de $Q_m(A)$, os elementos de $Q(A)$ também podem ser interpretados como classes de equivalência, considerando agora ideais em $\mathcal{F}$.

Consideremos o conjunto $\mathcal{Q}$ de todos os pares (I, f), tais que $I \in \mathcal{F}$ e f é um A-homomorfismo à esquerda, ou seja, $f \in Hom_A({}_AI, {}_AA)$. Em $\mathcal{Q}$ definimos uma relação de equivalência como segue: dois pares (I, f), (I', f') são equivalentes se e somente se $f = f'$ em $I \cap I'$. Denotamos por $Q(A)$ o conjunto quociente $\mathcal{Q}/\sim$ e por $[I, f]$ a classe de equivalência de (I, f), onde $(I, f) \in \mathcal{Q}$. A soma e a multiplicação em $Q(A)$ são dadas por:

$$[I, f] + [J, g] = [I \cap J, f + g],$$

$$[I, f] \cdot [J, g] = [IJ, f \circ g].$$

onde $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in I \cap J$, e $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, para todo $x \in IJ$. Com estas operações, $Q(A)$ é um anel com unidade dada por $[A, id_A]$, e é chamado o *anel de quocientes de Martindale à esquerda de* A.

Neste contexto, A pode ser visto como subanel de $Q(A)$ via: $a \to [A, r_a]$, onde $r_a(x) = xa$, para todo $x \in A$.

Algumas propriedades interessantes de $Q(A)$ são dadas nos resultados a seguir.

Lema 1.3.4. *([18, Lemma 14.11]) Sejam $q \in Q(A)$ e $I \in \mathcal{F}$. Se $qI = 0$ ou $Iq = 0$, então $q = 0$.*

Proposição 1.3.5. *([18, Proposition 14.12]) Se A é um anel semiprimo (resp. primo, domínio), então $Q(A)$ também é semiprimo (resp. primo, domínio).*

A próxima proposição nos dá uma caracterização para o anel de quocientes de Martindale à esquerda de A.

Proposição 1.3.6. *([18, Proposition 14.24]) Sejam A um anel semiprimo e S contendo A como subanel. Então, S é A-isomorfo a $Q(A)$ se e somente se S tem as seguintes propriedades:*

(i) Para qualquer $q \in S$, existe $J \in \mathcal{F}$ tal que $Jq \subseteq A$.

(ii) Para qualquer $q \in S$ e $J \in \mathcal{F}$, $Jq = 0 \Rightarrow q = 0$.

(iii) Para qualquer $J \in \mathcal{F}$ e $f \in Hom_A({}_AJ, {}_AA)$, existe $q \in S$ tal que $f(x) = xq$, para todo $x \in J$.

É importante observar que no caso em que A é um anel semiprimo de Goldie à esquerda, o anel de quocientes clássico à esquerda e o anel de quocientes maximal à esquerda de A coincidem (consulte [18, Corollary 13.15]). Porém, ainda nesta situação e em geral, $Q(A)$ e $Q_m(A)$ não coincidem. Por exemplo, seja $A = K[x, \delta]$ o skew anel de polinômios, onde K é um corpo de característica zero e δ é uma derivação sobre K que não é interna. Observe que $K[x, \delta]$ é um anel simples que não é artiniano à esquerda ([19, Corollary 3.16]). Assim, $Q(K[x, \delta]) = K[x, \delta]$. Por outro lado, como $K[x, \delta]$ é um anel de Goldie à esquerda, $Q_m(K[x, \delta])$ é um anel simples artiniano. Logo, $Q(K[x, \delta])$ e $Q_m(K[x, \delta])$ não coincidem. Note que A é semiprimo de Goldie à esquerda.

Façamos agora algumas considerações sobre os elementos do centro de $Q(A)$, que é chamado o *centróide estendido* de A. Denotamos o centróide estendido por C. Uma descrição alternativa, em termos das classes de equivalência, é dada pela seguinte proposição:

Proposição 1.3.7. *([18, Proposition 14.19]) Os elementos do centróide estendido C são da forma $[H, f]$, onde $H \in \mathcal{F}$ e $f : H \to A$ é um homomorfismo de A-bimódulos.*

Como A é semiprimo, C é um anel von Neumann regular ([18, Proposition 14.20]). Lembremos que um anel A é dito ser *von Neumann regular* se para todo $a \in A$, existe $x \in A$ tal que $a = axa$.

Vamos dar uma descrição para os idempotentes de C. Vejamos, seja H um ideal não nulo de A e tome $K_H = H \oplus ann_A(H)$, o qual é um ideal essencial de A. A aplicação $f : K_H \to A$ dada por $f(a + b) = a$, onde $a \in H$ e $b \in ann_A(H)$, é um homomorfismo de A-bimódulos. Desta maneira, existe $e_H \in C$ tal que $(a + b)e_H = ae_H = a$. Note que e_H é um idempotente de C. Reciprocamente, se $e \in C$ é um idempotente central, existe um ideal essencial I de A tal que $Ie \subseteq A$. Observe que $H = Ie$ é um ideal de A, pois e é central em A. Considere $K_H = H \oplus ann_A(H)$, que é um ideal essencial de A, e a aplicacão $f_H : K_H \to A$ definida por $f_H(a + b) = a$, para todo $a + b \in K_H$. É fácil ver que $e = e_H$.

Em [13], o autor define o fecho de um ideal da seguinte maneira.

Definição 1.3.8. *Dado um ideal I de A o fecho de I em A é o conjunto:*

$$\begin{aligned}[I] &= \{x \in A; \textit{ existe } H \subseteq_e A \textit{ com } Hx \subseteq I\} \\ &= \{x \in A; \textit{ existe } H \subseteq_e A \textit{ com } xH \subseteq I\}.\end{aligned}$$

Assim, dizemos que I é um *ideal fechado* se $I = [I]$. Além disso, é fácil ver que $[I] = ann_A(ann_A(I))$, e daí, $[I]$ é um ideal de A que contém I.

Segundo [13], existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos ideais fechados de A, o conjunto de todos os ideais Q-fechados de Q e o conjunto de todos os ideais C-fechados de C, onde $Q = Q(A)$. Mais precisamente, esta correspondência é dada da seguinte maneira: sejam I um ideal fechado de A, I^* um ideal Q-fechado de Q e I_0 um ideal C-fechado de C. Então, estes ideais estão em correspondência se e somente se $I^* \cap A = I$ e $I \cap C = I_0$ (equivalentemente $I^* = I_0 Q$).

Disto segue que para qualquer ideal I de A, o ideal fechado I^* de Q que corresponde ao fecho de I em A pode ser obtido como o seguinte conjunto:

$$I^* = \{q \in Q; \text{ existe } H \subseteq_e A \text{ com } Hq \subseteq I\}.$$

É fácil verificar que todo ideal fechado de C é um somando direto de C e assim é gerado por um idempotente. Além disso, qualquer ideal Q-fechado de Q é gerado por um idempotente central de Q.

É importante observar que qualquer ideal não nulo de um anel semiprimo é um anel semiprimo. Com isto, dado um ideal não nulo em um anel semiprimo podemos considerar seu respectivo anel de quocientes de Martindale à esquerda.

A proposição a seguir é uma ferramenta muito útil, uma vez que nos diz que se I é um ideal de A, então I^* (ideal fechado de Q correspondente ao fecho de I) é isomorfo ao anel de quocientes de Martindale à esquerda de I.

Proposição 1.3.9. *([14, Proposition 2.2]) Seja I um ideal não nulo de A. Então $Q(I) \simeq I^*$.*

Para finalizar esta seção, veremos que sempre é possível estender um isomorfismo entre dois ideais de um anel semiprimo para seus respectivos anéis de quocientes de Martindale à esquerda.

Proposição 1.3.10. *([14, Proposition 2.3]) Suponhamos que I, J são ideais de A e $\phi : I \longrightarrow J$ é um isomorfismo de anéis. Então ϕ pode ser estendida a um isomorfismo de anéis $\phi^* : Q(I) \longrightarrow Q(J)$.*

Vejamos como o isomorfismo ϕ^* é definido. Sejam $q \in Q(I)$ e $f : H \to I$ tal que $f(h) = hq$, para todo $h \in H$, onde $H \subseteq_e I$. Note que $\phi(H)$ é um ideal essencial de J. Definimos $\phi^*(f) : \phi(H) \to J$ por $\phi^*(f)(x) = \phi \circ f \circ \phi^{-1}(x)$, para todo $x \in \phi(H)$. Observe que esta aplicação é um J-homomorfismo à esquerda. É fácil verificar que $\phi^* : Q(I) \to Q(J)$ definida por $\phi^*(q) = [\phi(H), \phi^*(f)]$, para todo $q \in Q(I)$, é um isomorfismo de anéis tal que $\phi^* |_I = \phi$. Mais ainda, a extensão ϕ^* do isomorfismo ϕ dado acima é única. Este é um caso particular da seguinte proposição.

Proposição 1.3.11. *([14, Proposition 2.4]) Suponhamos que I é um ideal de A, $\phi : I \longrightarrow A$ um monomorfismo de anéis e, $f, f' : Q(I) \longrightarrow Q(\phi(I))$ são isomorfismos de anéis tais que $f |_I = f' |_I = \phi$. Então $f = f'$.*

1.4 O Produto Cruzado Global

Nesta seção, sejam B um anel com elemento identidade 1_B, $Aut(B)$ o grupo de todos os automorfismos de B e G um grupo com elemento neutro 1_G. Iremos assumir que G age (globalmente) sobre B, isto é, existe um homomorfismo de grupos $\beta : G \longrightarrow Aut(B)$ que associa a cada $g \in G$ um automorfismo β_g de B. Aqui, por uma questão de simplificação, $\beta_g(b)$ será denotada por $g(b)$, para todo $b \in B$, $\beta_g \in Aut(B)$.

Definição 1.4.1. *Um automorfismo g de B é dito interno se existe um elemento invertível x em B tal que $g(b) = x^{-1}bx$, para todo $b \in B$, e externo caso contrário.*

Com esta definição, dizemos que um subgrupo $G \subseteq Aut(B)$ é *interno* se todo $g \in G$ é interno, e G é dito *externo* se o único automorfismo interno em G é o automorfismo identidade.

Um subconjunto S de B é *G-invariante* se $g(S) \subseteq S$, para todo $g \in G$. Isto equivale a $g(S) = S$, para todo $g \in G$. O subanel dos elementos invariantes pela ação de G é o conjunto

$$B^G = \{b \in B; g(b) = b, \text{ para todo } g \in G\}$$

Se G é um grupo finito, podemos definir a *aplicação traço (global)* $tr_G : B \to B^G$ por

$$tr_G(b) = \sum_{g \in G} g(b),$$

para todo $b \in B$.

A definição do produto cruzado global é dada da seguinte maneira. Sejam B um anel e G um grupo agindo globalmente sobre B. Suponhamos que existe uma aplicação $u : G \times G \longrightarrow U(B)$ (twisting) que a cada par $(g, h) \in G \times G$ associa o elemento invertível $u_{g,h}$ de B, onde $U(B)$ denota o grupo das unidades de B. O *produto cruzado (global)* $B *_\beta G$ de G sobre B é um B-módulo à esquerda livre com base $\{g; g \in G\}$, isto é,

$$B *_\beta G = \{\sum_{g \in G} b_g g; b_g \in B \text{ e } b_g \neq 0 \text{ para um número finito de } g \in G\}.$$

Em $B *_\beta G$, a soma é definida de forma usual e a multiplicação é dada por:

$$ag \cdot bh = ag(b)u_{g,h}gh, \text{ para todo } a, b \in B,\ g, h \in G,$$

onde u satisfaz as condições do lema abaixo a fim de que a multiplicação seja associativa.

Lema 1.4.2. *([26, Lemma 1.1]) A associatividade do produto cruzado global $B *_\beta G$ é equivalente as seguintes afirmações, para todo $g, h, t \in G$:*

(i) $g(u_{h,t})u_{g,ht} = u_{g,h}u_{gh,t}$.

(ii) $g \circ h = u_{g,h}(gh)u_{g,h}^{-1}$.

Observe ainda que o skew anel de grupo global é o produto cruzado no qual $u_{g,h} = 1_B$, para todo $g, h \in G$.

Muitas propriedades a respeito do produto cruzado global $B *_\beta G$ já foram investigadas. Em especial, vejamos alguns resultados que dão condições para que $B *_\beta G$ seja um anel semiprimo. Estes serão necessários mais adiante.

Teorema 1.4.3. *([26, Theorem 4.4]) Sejam B um anel semiprimo e G um grupo finito. Se B é livre de $|G|$-torção, então $B *_\beta G$ é semiprimo.*

Seja $x = \sum\limits_{g \in G} b_g g \in B *_\beta G$. O *suporte* de x é definido como sendo o conjunto

$$\sup x = \{g \in G;\ b_g \neq 0\}.$$

Disto segue que se H é um subgrupo de G, então

$$\{x \in B *_\beta G;\ \sup x \subseteq H\} = B *_\beta H.$$

Teorema 1.4.4. *([26, Theorem 18.9]) Seja $B *_\beta G$ um produto cruzado, onde G é um grupo finito e H é um subgrupo de G. Se $B *_\beta G$ é semiprimo, então $B *_\beta H$ é semiprimo.*

Em particular, se H contém somente o elemento neutro de G com $B *_\beta G$ semiprimo e G finito, então B é semiprimo.

Muitas vezes vamos trabalhar na situação em que G é um grupo policíclico por finito ou policíclico infinito. Desta forma, lembramos a definição de tais grupos.

Seja G um grupo. Uma *série subnormal* de G é uma cadeia de subgrupos

$$1_G = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$$

onde G_{i-1} é um subgrupo normal de G_i, para todo $i = 1, \cdots, n$. Dizemos que G é *policíclico* se $H_i = G_i/G_{i-1}$ é cíclico para $i = 1, \cdots, n$. Além disso, G é um grupo *policíclico por finito* se G possui uma série subnormal onde cada $H_i = G_i/G_{i-1}$ é ou cíclico infinito ou é um grupo finito. E, G é *policíclico infinito* se cada $H_i = G_i/G_{i-1}$ é cíclico infinito.

Quando G é um grupo policíclico por finito podemos supor que $H_n = G_n/G_{n-1}$ é finito e que os demais são todos cíclicos infinitos (veja [23], página 25).

O próximo teorema dá condições necessárias e suficientes para que o produto cruzado global $B *_\beta G$ seja um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Este resultado estende o demonstrado por J. Osterburg em [25]. Lembre que aqui B é um anel com unidade.

Teorema 1.4.5. *Suponhamos que G é um grupo finito e B é livre de $|G|$-torção. Então, $B *_\beta G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda se e somente se B é semiprimo de Goldie à esquerda.*

Prova: Suponhamos que $B *_\beta G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Então, B visto como um subanel de $B *_\beta G$ herda a condição de cadeia ascendente sobre os ideais anuladores à esquerda. Além disso, pelo [26, Lemma 26.5], temos que $udim_B B *_\beta G < \infty$ o que implica que $udim\ _B B < \infty$. Logo, B é um anel de Goldie à esquerda. Pelo Teorema 1.4.4, com $H = 1_G$, segue que B é semiprimo.

A recíproca segue imediatamente de [20, Lemma 1.5 (i)]. □

Já para o caso em que G é um grupo policíclico infinito temos o seguinte resultado, devido a J. Matczuk.

Proposição 1.4.6. *([22, Corollary 3.4]) Seja B um anel tal que G age por automorfismos em B, onde G é um grupo policíclico infinito. Então para o produto cruzado global $B *_\beta G$ temos:*

(i) $udim(B *_\beta G) = udim(B)$ e $\mathcal{Z}(B *_\beta G) = \mathcal{Z}(B)(B *_\beta G)$.

(ii) Se B é semiprimo, então $B *_\beta G$ é semiprimo de Goldie à esquerda se e somente se B é de Goldie à esquerda.

A parte (ii) do corolário acima pode ser provada supondo que G é um grupo policíclico por finito e que B é livre de $|G_n : G_{n-1}|$-torção, onde $|G_n : G_{n-1}|$ denota o índice de G_{n-1} em G_n . Para isto necessitamos do seguinte lema.

Lema 1.4.7. *([26, Lemma 1.3]) Consideremos $B *_\beta G$ e N um subgrupo normal de G. Então,*

$$B *_\beta G = (B *_\beta N) * (G/N)$$

onde o último é algum produto cruzado do grupo G/N sobre o anel $B *_\beta N$.

Teorema 1.4.8. *Suponhamos que G é um grupo policíclico por finito e que B é livre de $|G_n : G_{n-1}|$-torção. Se B é semiprimo, então B é um anel de Goldie à esquerda se e somente se $B *_\beta G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda.*

Prova: Consideremos $1_G = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$ uma série subnormal de G, onde cada $H_i = G_i/G_{i-1}$, $i = 1, \cdots, n$, é ou cíclico infinito ou é um grupo finito. Como já vimos, podemos supor que H_n é finito e que os demais são todos cíclicos infinitos. Utilizando o Lema 1.4.7 e fazendo uma indução sobre n, vemos que

$$B *_\beta G = B * H_1 * H_2 * \cdots * H_n.$$

Como B é livre de $|H_n|$-torção, temos que $B * H_1 * \cdots * H_{n-1}$ também é livre de $|H_n|$-torção.

Se B é um anel semiprimo de Goldie à esquerda então, pela Proposição 1.4.6, $B * H_1$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Novamente, fazendo indução sobre n, obtemos que $B * H_1 * \cdots * H_{n-1}$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Como $B * H_1 * \cdots * H_{n-1}$ é livre de $|H_n|$-torção, pelo Teorema 1.4.5, segue que $B *_\beta G$ é anel semiprimo de Goldie à esquerda.

Reciprocamente, se $B *_\beta G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda, segue do Teorema 1.4.5 que $B * H_1 * \cdots * H_{n-1}$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Logo, pela Proposição 1.4.6, juntamente com uma indução, obtemos que B é um anel de Goldie à esquerda. □

1.5 Ações Parciais Torcidas de Grupos e a Álgebra dos Multiplicadores

Nesta seção lembraremos o conceito de ação parcial torcida de um grupo sobre uma K-álgebra, bem como a noção de ação envolvente. A definição de ação parcial torcida foi introduzida por M. Dokuchaev, R. Exel e J. J. Simón em [8]. Em [9], os autores dão condições necessárias e suficientes para que uma ação parcial torcida (sobre um anel com unidade) possua envolvente. Antes precisamos da álgebra dos multiplicadores. Mais informações podem ser obtidas em [7].

Sejam K um anel comutativo com unidade, A uma K-álgebra associativa (não necessariamente com unidade) e I um ideal de A. Tome um elemento $x \in I$ e considere as multiplicações à esquerda e à direita por x em A: $L_x : A \longrightarrow A$ e $R_x : A \longrightarrow A$ dadas por $L_x(a) = xa$ e $(a)R_x = ax$, para todo $a \in A$. Então, $L = L_x$ e $R = R_x$ são transformações lineares tais que as seguintes propriedades são satisfeitas, para todo $a, b \in A$:

(i) $L(ab) = (La)b$;

(ii) $(ab)R = a(bR)$;

(iii) $(aR)b = a(Lb)$.

Definição 1.5.1. *A álgebra dos multiplicadores de uma K-álgebra A é o conjunto $\mathcal{M}(A)$ de todos os pares ordenados (R, L), onde L e R são transformações lineares de A que satisfazem as propriedades $(i) - (iii)$ acima. Para quaisquer $\lambda \in K$ e (R, L), $(R', L') \in \mathcal{M}(A)$ as operações são dadas por: $(R, L) + (R', L') = (R + R', L + L')$, $(R, L)(R', L') = (R \circ R', L \circ L')$ e $\lambda(R, L) = (\lambda R, \lambda L)$.*

Para um multiplicador $w = (R, L) \in \mathcal{M}(A)$ e um elemento $a \in A$, denotamos por $aw = aR$ e $wa = La$, e dessa maneira sempre temos que $(aw)b = a(wb)$, para todo $a, b \in A$. A primeira (resp. segunda) componente dos elementos de $\mathcal{M}(A)$ é chamada de multiplicador à direita (resp. à esquerda) de A. É importante destacar que no caso em que A é uma K-álgebra com unidade, A é isomorfa a $\mathcal{M}(A)$ (veja [7, Proposition 2.3]).

Com a noção da álgebra dos multiplicadores, vejamos a definição de uma ação parcial torcida de um grupo sobre uma K-álgebra (ou equivalentemente sobre um anel).

Definição 1.5.2. *([8, Definition 2.1]) Uma ação parcial torcida de um grupo G sobre A é uma tripla: $\alpha = (\{S_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$, onde para cada $g \in G$, S_g é um ideal bilateral de A, α_g é um isomorfismo de K-álgebras $S_{g^{-1}} \to S_g$, e para cada $(g, h) \in G \times G$, $w_{g,h}$ é um elemento invertível de $\mathcal{M}(S_g S_{gh})$, satisfazendo as seguintes condições, para todo $g, h, t \in G$:*

(i) $S_g^2 = S_g$, $S_g S_h = S_h S_g$;

(ii) $S_1 = A$ *e* α_1 *é a identidade de* A;

(iii) $\alpha_g(S_{g^{-1}} S_h) = S_g S_{gh}$;

(iv) $\alpha_g \circ \alpha_h(a) = w_{g,h}\alpha_{gh}(a)w_{g,h}^{-1}$, *para todo* $a \in S_{h^{-1}} S_{h^{-1}g^{-1}}$;

(v) $w_{g,1} = w_{1,g} = 1$ *(aplicação identidade de* S_g*)*;

(vi) $\alpha_g(a w_{h,t})w_{g,ht} = \alpha_g(a)w_{g,h}w_{gh,t}$, *para todo* $a \in S_{g^{-1}} S_h S_{ht}$.

Observe que segue imediatamente do item (i) que um produto finito de ideais $S_g S_h \cdots$ é idempotente, e $\alpha_g(S_{g^{-1}} S_h S_f) = S_g S_{gh} S_{gf}$, para todo $g, h, f \in G$, pelo item (iii). Assim, todos os multiplicadores no item (vi) podem ser aplicados.

Além disso, da definição de ação parcial torcida decorrem as seguintes igualdades, que serão utilizadas em várias demonstrações. Para todo $g \in G$ temos,

$$\alpha_g(aw_{g^{-1},g}) = \alpha_g(a)w_{g,g^{-1}}, \text{ para todo } a \in S_{g^{-1}}. \tag{1.5.1}$$

e

$$\alpha_g{}^{-1}(a) = w_{g^{-1},g}^{-1}\alpha_{g^{-1}}(a)w_{g^{-1},g}, \text{ para todo } a \in S_g. \tag{1.5.2}$$

Para mais detalhes, o leitor interessado pode consultar [8].

Lembremos que α é uma *ação global torcida* se $S_g = A$, para todo $g \in G$. Um exemplo interessante de ação parcial torcida é dada pela restrição de uma ação global.

Exemplo 1.5.3. *Seja*

$$\beta = (B, \{\beta_g\}_{g\in G}, \{u_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$$

uma ação global torcida de um grupo G sobre um anel B (não necessariamente com unidade). Podemos restringir β a um ideal bilateral A de B tal que A tem unidade 1_A. Com efeito, tomando $S_g = A\cap\beta_g(A) = A\cdot\beta_g(A)$, temos que cada S_g tem unidade dada por $1_A\beta_g(1_A)$. Considerando $\alpha_g = \beta_g\mid_{S_{g^{-1}}}$, os itens (i), (ii) e (iii) da definição Definição 1.5.2 são satisfeitos. Além disso, se definirmos $w_{g,h} = u_{g,h}1_A\beta_g(1_A)\beta_{gh}(1_A)$ temos que as condições (iv), (v) e (vi) também são satisfeitas. Assim, obtemos uma ação parcial torcida sobre A.

Para apresentarmos um outro exemplo, precisamos de alguns conceitos que serão dados agora.

Seja G um grupo multiplicativo tal que G age sobre um grupo multiplicativo abeliano A. Aqui denotaremos por a^g a ação de G sobre A, para quaisquer $a \in A$ e $g \in G$. Uma função $f : G \times G \cdots \times G \longrightarrow A$ é chamada uma *n-cocadeia* de G em A, onde $n \geq 1$ é o número de cópias de G. O conjunto de todas as n-cocadeias será denotado por $C^n(G, A)$. Note que, $C^n(G, A)$ é um grupo abeliano onde

$$f_1f_2(g_1, \cdots, g_n) = f_1(g_1, \cdots, g_n)f_2(g_1, \cdots, g_n),$$

para toda $f_1, f_2 \in C^n(G, A)$.

A fórmula

$$d_{n+1}f(g_1, \cdots, g_{n+1}) =$$
$$f(g_2, \cdots, g_{n+1}) \times \prod_{i=1}^{n} f(g_1, \cdots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, \cdots, g_{n+1})^{(-1)^i} [f(g_1, \cdots, g_n)^{(-1)^{n+1}}]^{g_{n+1}},$$

define um homomorfismo $d_{n+1} : C^n(G, A) \to C^{n+1}(G, A)$. O núcleo de d_{n+1} será denotado por $Z^n(G, A)$ e a imagem de d_n por $B^n(G, A)$. Os elementos de $Z^n(G, A)$ são chamados de *n-cocíclos* e os de $B^n(G, A)$ são chamados *n-cobordos*. Além disso, $B^n(G, A)$ é subgrupo normal de $Z^n(G, A)$. Assim, o *n-ésimo grupo de cohomologia* de G com coeficientes em A é definido por:

$$H^n(G, A) = Z^n(G, A)/B^n(G, A),$$

para todo $n \geq 1$.

Agora, sejam G um grupo e K um corpo algebricamente fechado de característica zero, K^* o grupo multiplicativo dos elementos não nulos de K. Então, o segundo grupo de cohomologia $H^2(G, K^*)$, onde G age trivialmente sobre K^*, é chamado *multiplicador de Schur* de G. Para maiores detalhes, o leitor poderá consultar [17].

Exemplo 1.5.4. *Considere G um grupo cujo multiplicador de Schur é não trivial. Então, existe um 2-cocíclo $\gamma : G \times G \to \mathbb{C}^*$ de G não trivial, isto é, γ não é um 2-cobordo. Seja α uma ação parcial qualquer de G sobre uma $\mathbb{C}$-álgebra A. Então, $\gamma(g, h)$ pode ser visto como um multiplicador inversível do ideal $S_g \cap S_{gh}$, para cada $g, h \in G$. Como γ é um 2-cocíclo, $\gamma(g, h)\gamma(gh, t) = \gamma(h, t)\gamma(g, ht)$, para todo $g, h, t \in G$. Assim, é fácil ver que (A, α, γ) é uma ação parcial torcida de G sobre A.*

O exemplo dado acima foi sugerido pelo professor M. Dokuchaev.

Outro exemplo de ação parcial torcida também pode ser encontrado em [12].

A seguir, veremos a definição de ação envolvente e condições necessárias e suficientes para que uma dada ação parcial torcida sobre um anel com unidade possua envolvente.

No que segue, $\alpha = (\{S_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ denota uma ação parcial torcida de um grupo G sobre A.

Definição 1.5.5. *([9, Definition 2.2]) Dizemos que uma ação global torcida $\beta = (B, \{\beta_g\}_{g\in G}, \{u_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ de um grupo G sobre uma álgebra B é uma globalização (ou ação envolvente) para uma ação parcial torcida α de G sobre A se existe um monomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$ tal que:*

(i) $\varphi(A)$ *é um ideal de* B*;*

(ii) $B = \sum\limits_{g\in G} \beta_g(\varphi(A))$*;*

(iii) $\varphi(S_g) = \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$*, para todo* $g \in G$*;*

(iv) $\varphi \circ \alpha_g = \beta_g \circ \varphi$ *em* $S_{g^{-1}}$*, para todo* $g \in G$*;*

(v) $\varphi(aw_{g,h}) = \varphi(a)u_{g,h}$*,* $\varphi(w_{g,h}a) = u_{g,h}\varphi(a)$*, para todo* $g, h \in G$ *e* $a \in S_gS_{gh}$*.*

É claro que se a ação parcial torcida α de G sobre A tem uma ação envolvente $\beta = (B, \{\beta_g\}_{g\in G}, \{u_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ podemos identificar A com o ideal $\varphi(A)$ de B. Assim, sem perda de generalidade, podemos dizer que β é uma ação envolvente para α se A é um ideal de B e se as seguintes condições são satisfeitas:

(i') $B = \sum\limits_{g\in G} \beta_g(A)$;

(ii') $S_g = A \cap \beta_g(A)$, para todo $g \in G$;

(iii') $\alpha_g(x) = \beta_g(x)$, para todo $x \in S_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$;

(iv') $aw_{g,h} = au_{g,h}$, $w_{g,h}a = u_{g,h}a$, para todo $g, h \in G$ e $a \in S_gS_{gh}$.

Definição 1.5.6. *Dizemos que uma ação global torcida* β *de* G *sobre* B *é uma envolvente fraca para uma ação parcial torcida* α *de* G *sobre* A *se existe um monomorfismo de anéis* $\phi : A \to B$ *tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $\phi \circ \alpha_g = \beta_g \circ \phi$ *em* $S_{g^{-1}}$*, para todo* $g \in G$*;*

(ii) $\phi(aw_{g,h}) = \phi(a)u_{g,h}$*,* $\phi(w_{g,h}a) = u_{g,h}\phi(a)$*, para todo* $g, h \in G$ *e* $a \in S_gS_{gh}$*.*

Exemplo 1.5.7. *Seja* $\alpha = (\{S_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ *uma ação parcial (não torcida) de um grupo* G *sobre um anel* A *com unidade, tal que* α *admite uma ação envolvente. Neste caso, os ideais* S_g *de* A *tem unidade, para todo* $g \in G$ *(consulte [7, Theorem 4.5]). Assim, tomando* $w_{g,h} = 1_g1_{gh}$*, para todo* $g, h \in G$ *temos que* $(\{S_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ *é uma ação parcial torcida.*

Lembramos que dada uma ação parcial torcida α de G sobre A, o produto cruzado parcial $A *_\alpha G$ é a soma direta:

$$\bigoplus_{g\in G} S_g\delta_g$$

onde os $\delta_g{}'s$ são símbolos e a multiplicação é dada por:

$$(a_g\delta_g)\cdot(b_h\delta_h) = \alpha_g(\alpha_g^{-1}(a_g)b_h)w_{g,h}\delta_{gh}.$$

Aqui $w_{g,h}$ age como um multiplicador à direita sobre $\alpha_g(\alpha_g^{-1}(a_g)b_h) \in \alpha_g(S_{g^{-1}}S_h) = S_gS_{gh}$. Esta operação é associativa ([8, Theorem 2.4]).

Cabe ressaltar que em [7], os autores provaram que o skew anel de grupo parcial é associativo somente quando os os ideais S_g de A satisfazem uma determinada condição. Um caso em que o skew anel de grupo parcial é associativo é quando os ideais S_g são idempotentes, para todo $g \in G$. Observe que aqui esta condição é automaticamente satisfeita de acordo com a definição de ação parcial torcida.

Se cada ideal S_g é um anel com unidade, cujo elemento identidade é denotado por 1_g, então 1_g é um idempotente central de A tal que $S_g = 1_gA$ e para todo $g, h \in G$, o anel $S_g \cap S_h = S_gS_h$ é unitário com unidade 1_g1_h. Consequentemente, temos que $\mathcal{M}(S_gS_{gh}) \simeq S_gS_{gh}$. Assim, $w_{g,h}$ pode ser considerado como um elemento invertível de S_gS_{gh}, para todo $g, h \in G$.

Os dois teoremas a seguir dão condições necessárias e suficientes para a existência da ação envolvente, no caso em que A é um anel com unidade.

Teorema 1.5.8. *([9, Theorem 4.1]) Seja α uma ação parcial torcida de um grupo G sobre um anel com unidade A tal que cada S_g $(g \in G)$ é um anel com elemento identidade 1_g. Então, α admite uma ação envolvente se e somente se para cada par $(g,h) \in G \times G$ existe um elemento invertível $\widetilde{w}_{g,h} \in U(A)$, tal que $\widetilde{w}_{g,h}1_g1_{gh} = w_{g,h}$ e $\alpha_g(\widetilde{w}_{h,t}1_{g^{-1}})\widetilde{w}_{g,ht} = 1_g\widetilde{w}_{g,h}\widetilde{w}_{gh,t}$, para quaisquer $g, h, t \in G$.*

Teorema 1.5.9. *([9, Theorem 7.2]) Seja A um anel com unidade que é produto (não necessariamente finito) de anéis indecomponíveis. Uma ação parcial torcida α de um grupo G sobre A admite uma ação envolvente se e somente se cada ideal S_g $(g \in G)$ possui unidade.*

1.6 Equivalência de Morita

Nesta seção estaremos considerando sempre anéis com unidade. Apresentaremos agora a definição de um contexto de Morita. Mais detalhes podem ser encontrados em [18] e [23].

Definição 1.6.1. *Um contexto de Morita é uma sextupla* $(A, A', M, M', \tau, \tau')$*, onde:*

(i) A *e* A' *são anéis;*

(ii) M *é um* (A, A')*-bimódulo e* M' *é um* (A', A)*-bimódulo;*

(iii) $\tau : M \otimes_{A'} M' \longrightarrow A$ *é um homomorfismo de* A*-bimódulos;*

(iv) $\tau' : M' \otimes_A M \longrightarrow A'$ *é um homomorfismo de* A'*-bimódulos,*

tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\tau(x \otimes x')y = x\tau'(x' \otimes y), \text{ para todo } x, y \in M, \ x' \in M',$$

e

$$\tau'(x' \otimes x)y' = x'\tau(x \otimes y'), \text{ para todo } x', y' \in M', x \in M$$

Dado um contexto de Morita, onde τ e τ' são sobrejetoras, as categorias de A-módulos e de A'-módulos são equivalentes. Neste caso, dizemos que os anéis A e A' são *Morita equivalentes*. Dessa maneira, toda propriedade que pode ser definida em termos categóricos é facilmente transferível de um anel para o outro. Dentre as propriedades que são Morita invariantes podemos destacar: semisimplicidade, primitividade, artinianidade, noetherianidade, von Neumann regularidade, etc.

Em [7] os autores provaram que se α é uma ação parcial (não torcida) de um grupo G sobre um anel com unidade A que admite uma ação envolvente (B, β), onde B é um anel com unidade, então o skew anel de grupo parcial $A *_\alpha G$ e o skew anel de grupo global $B *_\beta G$ são Morita equivalentes. A prova deste resultado pode ser facilmente adaptada para o caso em que α é uma ação parcial torcida.

Para tanto, consideremos

$$M = \{\sum_{g \in G} c_g \delta_g; c_g \in A, \text{ para todo } g \in G\},$$

$$N = \{\sum_{g \in G} d_g \delta_g; d_g \in \beta_g(A), \text{ para todo } g \in G\}$$

e as seguintes aplicações

$$\tau : M \bigotimes_{B*_\beta G} N \to A *_\alpha G \text{ e } \mu : N \bigotimes_{A*_\alpha G} M \to B *_\beta G,$$

definidas, respectivamente, por $\tau(m \otimes n) = mn$ e $\mu(n \otimes m) = nm$.

A sextupla $(A *_\alpha G, B *_\beta G, M, N, \tau, \mu)$ é um contexto de Morita, com τ e μ sobrejetoras. Portanto temos o seguinte resultado.

Teorema 1.6.2. *Sejam α uma ação parcial torcida de um grupo G sobre um anel com unidade A e β uma ação envolvente de α com G agindo globalmente sobre B, tal que B também tem unidade. Então, os produtos cruzados $A *_\alpha G$ e $B *_\beta G$ são Morita equivalentes.*

Em [9], o teorema acima é demonstrado para um caso mais geral. Uma vez que neste trabalho o Teorema 1.6.2 é suficiente, não entraremos em maiores detalhes.

1.7 O subanel dos elementos invariantes

Nosso principal objetivo nesta seção, é definir o subanel dos invariantes de uma ação parcial torcida, lembrando que este conceito foi estabelecido primeiramente em [10]. Aqui, estaremos considerando $\alpha = (\{S_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ uma ação parcial torcida de um grupo G sobre um anel A.

Definição 1.7.1. *O subanel dos elementos invariantes de A sob a ação parcial torcida α, denotado por A^α, é dado por*

$$A^\alpha = \{x \in A; \alpha_g(xa) = x\alpha_g(a) \text{ para todo } g \in G, a \in S_{g^{-1}}\}.$$

No caso em que os ideais S_g tem elemento identidade 1_g, para todo $g \in G$, podemos escrever simplesmente

$$A^\alpha = \{x \in A; \alpha_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g \text{ para todo } g \in G\}.$$

Quando G for um grupo finito e cada ideal S_g tem elemento identidade 1_g, podemos considerar a aplicação traço parcial $tr_\alpha : A \to A^\alpha$, definida por:

$$tr_\alpha(a) = \sum_{g\in G} \alpha_g(a1_{g^{-1}})$$

para todo $a \in A$.

Definição 1.7.2. *Um ideal I de A é dito α-invariante se*

$$\alpha_g(I \cap S_{g^{-1}}) \subseteq I \cap S_g$$

para todo $g \in G$.

Note que I é α-invariante se e somente se $\alpha_g(I \cap S_{g^{-1}}) = I \cap S_g$, para todo $g \in G$. Além disso, se I é um ideal de A α-invariante, então

$$I *_\alpha G := \{\sum_{g \in G} a_g \delta_g; a_g \in S_g \cap I\}.$$

É fácil verificar que $I *_\alpha G$ é um ideal de $A *_\alpha G$.

Capítulo 2

Ações Parciais Torcidas e o Produto Cruzado Parcial

Neste capítulo serão apresentados alguns resultados que são generalizações naturais, para o caso de ações parciais torcidas, dos resultados demonstrados por M. Ferrero e J. Lazzarin em [15]. Estes serão utilizados no próximo capítulo.

2.1 Ações Parciais Torcidas de Tipo Finito

Vamos trabalhar na seguinte situação: $\alpha = (\{S_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ é uma ação parcial torcida de um grupo G sobre A, onde A é um anel com unidade e os ideais S_g de A tem elemento identidade 1_g, para todo $g \in G$. Além disso, vamos supor que α possui uma ação envolvente $\beta = (B, \{\beta_g\}_{g\in G}, \{u_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$. Escreveremos simplesmente que (B, β, u) é uma ação envolvente para α. Nosso principal interesse nesta seção, é investigar algumas propriedades que se transferem do anel A para o anel B e reciprocamente, bem como propriedades que são transferidas de A para o produto cruzado $A *_\alpha G$. Para tanto, começamos definindo ação parcial torcida de tipo finito, lembrando que esta noção foi introduzida em [15] para ações parciais não torcidas.

Definição 2.1.1. *Dizemos que uma ação parcial torcida α é de tipo finito se existe um subconjunto finito $\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ de G tal que $\sum\limits_{i=1}^{n} S_{gg_i} = A$, para qualquer $g \in G$.*

Note que, no caso em que G for um grupo finito, toda ação parcial torcida é de tipo finito.

A proposição a seguir caracteriza as ações parciais torcidas de tipo finito.

Proposição 2.1.2. *Seja α uma ação parcial torcida de G sobre A com ação envolvente (B, β, u). As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *α é de tipo finito.*

(ii) *Existem $g_1, g_2, \cdots, g_n \in G$ tais que $B = \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(A)$.*

(iii) *B tem unidade.*

Prova: $(i) \Rightarrow (ii)$ Por hipótese, $A = \sum_{i=1}^{n} S_{g^{-1}g_i}$, para qualquer $g \in G$. Aplicando β_g em ambos os lados da igualdade obtemos que

$$\beta_g(A) = \beta_g(\sum_{i=1}^{n} S_{g^{-1}g_i}) = \sum_{i=1}^{n} \beta_g(S_{g^{-1}g_i}).$$

Por outro lado, como (B, β, u) é uma ação envolvente, temos que

$$B = \sum_{g \in G} \beta_g(A) = \sum_{g \in G} \beta_g(\sum_{i=1}^{n} S_{g^{-1}g_i}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{g \in G} \beta_g(S_{g^{-1}g_i}).$$

É fácil verificar que $\beta_g(S_{g^{-1}g_i}) \subseteq \beta_{g_i}(A)$, para todo $g \in G$. Logo, $B = \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(A)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Por hipótese, $B = \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(A)$. Como todos os ideais $\beta_{g_i}(A)$ de B tem elemento identidade, segue que B também possui identidade.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Suponhamos que B tem elemento identidade 1_B. Note que, em particular, $1_B = \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(a_i)$, para algum $g_i \in G$ e $a_i \in A$.

Por outro lado, para todo $g \in G$,

$$1_B = \beta_g(1_B) = \beta_g(\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(a_i)) = \sum_{i=1}^{n} \beta_g(\beta_{g_i}(a_i)) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{gg_i}(a_i).$$

Assim, $1_A = 1_B 1_A = \sum_{i=1}^{n} \beta_{gg_i}(a_i) 1_A \in \sum_{i=1}^{n} S_{gg_i}$.

Portanto, $A \subseteq \sum_{i=1}^{n} S_{gg_i}$, e consequentemente, $A = \sum_{i=1}^{n} S_{gg_i}$, para todo $g \in G$. $\square$

Se α é uma ação parcial torcida de tipo finito com envolvente (B, β, u) então, pela proposição acima, existem um menor inteiro $n \geq 1$ e $g_1, g_2, \cdots, g_n \in G$ tais que $B = \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(A)$. Neste caso, dizemos que n é a *ordem* de α.

Uma consequência interessante desta proposição é o seguinte corolário. Este resultado será de fundamental importância para algumas demonstrações deste e do próximo capítulo.

Corolário 2.1.3. *Se α é uma ação parcial torcida de tipo finito então $A *_\alpha G$ e $B *_\beta G$ são Morita equivalentes.*

Prova: Como α é de tipo finito então, pelo que foi visto acima, B tem unidade. Pelo Teorema 1.6.2, segue que $A *_\alpha G$ e $B *_\beta G$ são Morita equivalentes. $\square$

Definição 2.1.4. *Seja S um anel qualquer. Um idempotente central $e \in S$ é dito centralmente primitivo se não pode ser escrito como uma soma de dois idempotentes centrais ortogonais.*

Definição 2.1.5. *Um anel S com identidade possui uma decomposição em blocos finita se pode ser escrito como uma soma direta finita de anéis indecomponíveis com unidade. Equivalentemente, existe um conjunto finito de idempotentes centralmente primitivos ortogonais $\{e_1, \cdots, e_n\} \in S$ tal que $\sum_{i=1}^{n} e_i = 1_S$.*

Por definição, um anel que tem uma decomposição em blocos finita é sempre um anel com identidade. Maiores detalhes sobre este conceito podem ser encontrados em [19, §22].

Proposição 2.1.6. *Seja α uma ação parcial torcida de um grupo G sobre A com ação envolvente (B, β, u). Então, B tem uma decomposição em blocos finita se e somente se A tem uma decomposição em blocos finita e α é de tipo finito.*

Prova: Primeiramente, note que se $e \in A$ é um idempotente centralmente primitivo de A então e é centralmente primitivo de B. De fato, suponhamos que $e = e_1 + e_2$, onde e_1, e_2 são idempotentes centrais ortogonais de B. Desta maneira, $e_1 = e_1e_1 + e_1e_2 = e_1(e_1 + e_2) = e_1e \in A$. Analogamente, $e_2 \in A$. Assim, $e = e_1 + e_2$, com $e_1, e_2 \in A$ e são centrais em A. Logo, $e_1 = 0$ ou $e_2 = 0$, isto é, e é centralmente primitivo de B.

Agora suponhamos que $B = \sum_{j=1}^{n} \oplus B_j$, onde cada B_j é um anel indecomponível. Notemos que $A = B1_A = \sum_{j=1}^{n} \oplus B_j 1_A$. Daí, $B_j = 1_A B_j \oplus (1_B - 1_A) B_j$. Como cada B_j é indecomponível, $1_A B_j = 0$ ou $(1_B - 1_A) B_j = 0$. Assim, $1_A B_j = 0$ ou $1_A B_j = B_j$.

Logo, A tem uma decomposição em blocos finita. Pela Proposição 2.1.2, α é de tipo finito.

Reciprocamente, suponhamos que A tem uma decomposição em blocos finita e α é de tipo finito. Assim temos que $B = \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(A)$, com $g_1, \cdots, g_n \in G$ e $\beta_{g_i}(A) \simeq A$. Por hipótese $A = \sum_{j=1}^{m} \oplus A_j$, onde cada A_j é indecomponível.

Portanto, $B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_{g_i}(A_j)$, ou seja, B também admite decomposição em blocos finita. $\square$

Com esse resultado, podemos provar o seguinte:

Corolário 2.1.7. *Seja α uma ação parcial torcida de um grupo G sobre A com ação envolvente (B, β, u). Então, B é semisimples se e somente se A é semisimples e α é de tipo finito.*

Prova: Se B é semisimples então A é semisimples pois A é um ideal de B. Além disso, uma vez que B é semisimples então B é escrito como uma soma direta finita de ideais simples, que são indecomponíveis. Logo, B tem decomposição em blocos finita, e daí, B possui unidade. Portanto, pela Proposição 2.1.2, α é de tipo finito.

Por outro lado, se A é semisimples e α é de tipo finito então, pela Proposição 2.1.2, B é uma soma finita de anéis semisimples, e assim, é também semisimples. $\square$

A seguinte observação será necessária em algumas demonstrações desta seção e pode ser encontrada em [15, Remark 1.13].

Observação 2.1.8. *Suponhamos que $S = \sum_{i \in I} J_i$, onde cada J_i é um ideal de S com elemento identidade 1_i como anel, para todo $i \in I$. Então as seguintes afirmações são válidas:*

(i) Se C é um ideal à esquerda (à direita, bilateral) de S então $C1_i$ é um ideal à esquerda (à direita, bilateral) de J_i.

(ii) Se C é um ideal à esquerda (à direita, bilateral) de J_i então C é um ideal à esquerda (à direita, bilateral) de S.

(iii) Se C é um ideal à esquerda (à direita, bilateral) de S então $C1_i = C \cap J_i$.

(*iv*) *Se C, J são ideais à esquerda (à direita, bilateral) de S e $C1_i = J1_i$, para todo $i \in I$ então $C = J$. Em particular, se $C1_i = 0$, para todo $i \in I$, então $C = 0$.*

(*v*) *Se E_i é um ideal à esquerda (à direita, bilateral) essencial de J_i, para todo $i \in I$, então $E = \sum_{i \in I} E_i$ é essencial de S.*

Recordemos que um radical γ é dito um *radical hereditário* se para qualquer anel S e um ideal I de S temos que $\gamma(I) = \gamma(S) \cap I$. O leitor pode consultar [6] para mais informações. Como exemplos de radicais hereditários temos o radical de Jacobson, radical primo e o nil radical superior.

Dado um radical γ, dizemos que um anel S é γ-*semisimples* se $\gamma(S) = 0$.

Proposição 2.1.9. *Suponhamos que α é uma ação parcial torcida de um grupo G sobre A com ação envolvente (B, β, u). Se γ é um radical hereditário, então A é γ-semisimples se e somente se B é γ-semisimples.*

Prova: Suponhamos que A é γ-semisimples, isto é, $\gamma(A) = 0$. Como $\beta_g(A) \simeq A$ temos que $\gamma(\beta_g(A)) = 0$, para todo $g \in G$. Assim, como γ é um radical hereditário, $\gamma(B)\beta_g(1_A) = \gamma(B) \cap \beta_g(A) = 0$, para todo $g \in G$. Pela Observação 2.1.8 item (*iv*), temos que $\gamma(B) = 0$.

Reciprocamente, se $\gamma(B) = 0$ então, como $\gamma(A) = \gamma(B) \cap A = 0$, segue que A é γ-semisimples. □

Como um caso particular desta proposição, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.1.10. *Suponhamos que α é uma ação parcial torcida de um grupo G sobre A com ação envolvente (B, β, u). Então, A é semiprimo (semiprimitivo) se e somente se B é semiprimo (semiprimitivo).*

O lema seguinte é imediato do Lema 1.3 de [16], e será necessário a seguir.

Lema 2.1.11. *Seja I um ideal de um anel A. O anel A é von Neumman regular se e somente se I e A/I são von Neumman regulares.*

Proposição 2.1.12. *Suponhamos que α é uma ação parcial torcida de um grupo G sobre A com ação envolvente (B, β, u). Então, A é von Neumann regular se e somente se B é von Neumann regular.*

Prova: Suponhamos que A é von Neumann regular. Como $B = \sum\limits_{g \in G} \beta_g(A)$ e $\beta_g(A) \simeq A$ qualquer elemento de B está numa soma finita de anéis von Neumman regulares. Logo, por [16, Lemma 1.3], B é von Neumman regular.

Por outro lado, suponhamos que B é von Neumman regular. Como A é um ideal de B então, pelo Lema 2.1.11, A é von Neumman regular. □

No que segue veremos dois resultados que tratam a respeito da dimensão uniforme e da não singularidade, respectivamente.

Proposição 2.1.13. *Sejam A um anel, α uma ação parcial torcida de tipo finito com envolvente (B, β, u). Então,*

$$udimA \leq udimB \leq o(\alpha)udimA$$

onde $o(\alpha)$ é a ordem de α. Em particular, se G é um grupo finito de ordem $|G|$ temos que $udimB \leq |G|udimA$.

Prova: É fácil ver que $udimA \leq udimB$. Mostremos que $udimB \leq o(\alpha)udimA$. Suponhamos que $o(\alpha) = n$ e $B = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(A)$. Como $\beta_{g_i}(A) \simeq A$, então $udimA = udim_A \beta_{g_i}(A)$, e segue que, $udimB \leq nudimA = o(\alpha)udimA$. □

Corolário 2.1.14. *Sejam A um anel e α uma ação parcial torcida de G sobre A com ação envolvente (B, β, u). Então, A é não singular à esquerda se e somente se B é não singular à esquerda.*

Prova: Por hipótese temos que $B = \sum\limits_{g \in G} \beta_g(A)$, e pelo Lema 1.1.9, $\mathcal{Z}(A) = \mathcal{Z}(B) \cap A$. Consequentemente, se B é não singular à esquerda então A é não singular à esquerda.

Suponha que A é não singular. Desta forma, $0 = \mathcal{Z}(A) = \mathcal{Z}(B1_A) \supseteq \mathcal{Z}(B)1_A$. Note que $\beta_g(\mathcal{Z}(B)) = \mathcal{Z}(B)$, para qualquer $g \in G$, pois β_g é um isomorfismo de anéis, para todo $g \in G$.

Assim, $\beta_g(\mathcal{Z}(B)1_A) = 0$, ou seja, $\beta_g(\mathcal{Z}(B))\beta_g(1_A) = 0$. Logo, $\mathcal{Z}(B)\beta_g(1_A) = 0$, para todo $g \in G$. Pela Observação 2.1.8 item (iv), segue que $\mathcal{Z}(B) = 0$. □

De posse destes resultados podemos investigar a propriedade de ser Goldie à esquerda.

Corolário 2.1.15. *Sejam A um anel e α uma ação parcial torcida de G sobre A com ação envolvente (B, β, u). Então, B é semiprimo de Goldie à esquerda se e somente se A é semiprimo de Goldie à esquerda e α é de tipo finito.*

Prova: Suponhamos que B é um anel semiprimo de Goldie à esquerda, isto é, B é semiprimo, não singular à esquerda e $udimB < \infty$. Logo, pelo Corolário 2.1.10 e pelo Corolário 2.1.14, A é semiprimo e não singular à esquerda. Além disso, $udimA \leq udimB < \infty$. Portanto, A é semiprimo de Goldie à esquerda. Resta mostrar que α é de tipo finito, isto é, que B deve ser uma soma finita dos ideais $\beta_g(A)$, $g \in G$. Mas isto é verdade, pois caso contrário, $udimB$ não seria finita.

Reciprocamente, suponhamos que A é semiprimo de Goldie à esquerda e α é uma ação parcial torcida de tipo finito. Como A é semiprimo e não singular à esquerda sabemos que B também é semiprimo e não singular à esquerda, pelo Corolário 2.1.10 e pelo Corolário 2.1.14. Resta verificar que $udimB < \infty$. Mas, α é de tipo finito e $udimA < \infty$, donde segue, pela Proposição 2.1.13, que $udimB < \infty$. Portanto, B é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. $\square$

Para finalizar esta seção, vejamos uma proposição que será necessária para as demonstrações de alguns resultados deste capítulo e do Capítulo 3. Esta foi originalmente demonstrada em [15] e pode ser facilmente adaptada para ações parciais torcidas.

Proposição 2.1.16. *([15, Proposition 1.22]) Sejam A um anel, α uma ação parcial torcida de um grupo G sobre A com ação envolvente (B, β, u) e m um inteiro positivo. Então,*

(i) A é livre de m-torção aditiva se e somente se B é livre de m-torção aditiva.

(ii) Se além disso, B possui elemento identidade, então m é invertível em A se e somente se m é invertível em B.

2.2 A Semisimplicidade e a Von Neumann Regularidade do Produto Cruzado Parcial

Nesta seção iremos investigar a semisimplicidade e von Neumann regularidade do produto cruzado parcial $A *_\alpha G$. Lembrando que todos os resultados desta seção são generalizações dos apresentados em [15], e cujas demonstrações são fortemente inspiradas nesse trabalho.

Continuamos com as mesmas hipóteses da seção anterior: A denotará um anel com unidade, $\alpha = (\{S_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ é uma ação parcial torcida de um grupo G sobre o anel A. Além disso, os ideais S_g de A tem elemento identidade, para todo $g \in G$ e α tem envolvente $\beta = (B, \{\beta_g\}_{g\in G}, \{u_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$.

Observe que, pelo item (iii) da Definição 1.5.2,

$$\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h) = 1_g 1_{gh},$$

para todo $g, h \in G$. Além disso, é importante ressaltar novamente que como os ideais S_g tem unidade, para todo $g \in G$, qualquer multiplicador $w_{g,h}$ pode ser considerado um elemento invertível de $S_g S_{gh}$, para todo $g, h \in G$.

Começamos generalizando duas versões do Teorema de Maschke. Cabe observar que outras demonstrações para ações parciais torcidas já foram feitas em [2].

Teorema 2.2.1. *(Teorema de Maschke 1) Sejam A um anel e α uma ação parcial torcida de um grupo finito G sobre A. Se A é semisimples e $|G|$ é invertível em A, então $A *_\alpha G$ é semisimples.*

Prova: Suponhamos que A é semisimples e $|G|$ é invertível em A. Pelo Corolário 2.1.7 e pela Proposição 2.1.16, B é semisimples e $|G|$ é invertível em B. Usando a versão global do Teorema de Maschke ([24, Corolário 0.2]), obtemos que $B *_\beta G$ é semisimples. Como G é um grupo finito então α é de tipo finito, e assim, pelo Corolário 2.1.3 segue que $A *_\alpha G$ é semisimples. $\square$

Teorema 2.2.2. *(Teorema de Maschke 2) Sejam α uma ação parcial torcida de um grupo finito G sobre A, V um $A *_\alpha G$-módulo à esquerda e U um $A *_\alpha G$-submódulo à esquerda de V. Se $tr_\alpha(1_A)$ é invertível em A e U é um somando direto de V como A-módulo à esquerda, então U é um somando direto de V como $A *_\alpha G$-módulo à esquerda.*

Prova: Seja $V = U \oplus U'$ como A-módulos à esquerda. Dessa forma, consideremos uma A-projeção à esquerda $\pi : V \longrightarrow U$, isto é, $\pi(u) = u$, para todo $u \in U$. Definimos uma aplicação $\psi : V \longrightarrow U$ dada por:

$$\psi(v) = l \sum_{g\in G} w_{g^{-1},g}^{-1} 1_{g^{-1}} \delta_{g^{-1}} \pi(1_g \delta_g v),$$

para todo $v \in V$, onde $l = (tr_\alpha(1_A))^{-1}$. Observe que $\psi(V) \subseteq U$.

Mostremos que ψ é um homomorfismo de $A *_\alpha G$-módulo à esquerda com $\psi(u) = u$, para todo $u \in U$. De fato, sejam $v \in V$ e $h \in G$ um elemento fixado. Então, como π é uma A-projeção temos

$$\begin{aligned}
l^{-1}\psi(1_h\delta_h v) &= \sum_{g\in G} w^{-1}_{g^{-1},g} 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g 1_h\delta_h v)\\
&= \sum_{g\in G} w^{-1}_{g^{-1},g} 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(\alpha_g({\alpha_g}^{-1}(1_g)1_h)w_{g,h}\delta_{gh}v)\\
&= \sum_{g\in G} w^{-1}_{g^{-1},g} 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h)w_{g,h}\pi(1_{gh}\delta_{gh}v)\\
&= \sum_{g\in G} \alpha_{g^{-1}}(\alpha^{-1}_{g^{-1}}(w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}})\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h)w_{g,h})w_{g^{-1},1}\delta_{g^{-1}}\pi(1_{gh}\delta_{gh}v)\\
&= \sum_{g\in G} w^{-1}_{g^{-1},g} 1_{g^{-1}}1_h\alpha_{g^{-1}}(w_{g,h})\delta_{g^{-1}}\pi(1_{gh}\delta_{gh}v).
\end{aligned}$$

Pela Definição 1.5.2 item (vi), para todo $g, h \in G$,

$$\alpha_{g^{-1}}(w_{g,h}) = \alpha_{g^{-1}}(1_g 1_{gh} w_{g,h}) = \alpha_{g^{-1}}(1_g 1_{gh})w_{g^{-1},g}w^{-1}_{g^{-1},gh} = 1_{g^{-1}}1_h w_{g^{-1},g}w^{-1}_{g^{-1},gh}.$$

Assim, substituindo na equação acima vemos que

$$l^{-1}\psi(1_h\delta_h v) = \sum_{g\in G} 1_{g^{-1}}1_h w^{-1}_{g^{-1},gh}\delta_{g^{-1}}\pi(1_{gh}\delta_{gh}v). \tag{2.2.1}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
l^{-1}1_h\delta_h\psi(v) &= \sum_{g\in G} 1_h\delta_h w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g v)\\
&= \sum_{g\in G} \alpha_h(1_{h^{-1}}w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}})w_{h,g^{-1}}\delta_{hg^{-1}}\pi(1_g\delta_g v)\\
&= \sum_{g\in G} 1_h\alpha_h(w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}1_{h^{-1}})w_{h,g^{-1}}\delta_{hg^{-1}}\pi(1_g\delta_g v). \qquad (*)
\end{aligned}$$

Novamente pelo item (vi) da Definição 1.5.2, para todo $g, h \in G$, temos que

$$\alpha_h(1_{h^{-1}}1_{g^{-1}}w^{-1}_{g^{-1},g}) = 1_h 1_{hg^{-1}}w^{-1}_{hg^{-1},g}w^{-1}_{h,g^{-1}}.$$

Substituindo em $(*)$ obtemos que

$$l^{-1}1_h\delta_h\psi(v)=\sum_{g\in G}1_h1_{hg^{-1}}w^{-1}_{hg^{-1},g}\delta_{hg^{-1}}\pi(1_g\delta_g v).$$

Tomando $gh^{-1}=f$, segue que

$$l^{-1}1_h\delta_h\psi(v)=\sum_{f\in G}1_h1_{f^{-1}}w^{-1}_{f^{-1},fh}\delta_{f^{-1}}\pi(1_{fh}\delta_{fh}v). \tag{2.2.2}$$

Comparando as Equações (2.2.1) e (2.2.2) resulta que $\psi(1_h\delta_h v)=1_h\delta_h\psi(v)$.

Como π é uma A-projeção, temos que $\psi(av)=a\psi(v)$, para todo $a\in A$ e $v\in V$.

Logo, ψ é um homomorfismo de $A*_\alpha G$-módulos à esquerda.

Resta verificar que $\psi(u)=u$, para todo $u\in U$. Observemos que,

$$\pi(1_g\delta_g u)=1_g\delta_g\pi(u)=1_g\delta_g u,$$

para todo $u\in U$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
l^{-1}\psi(u)&=\sum_{g\in G}w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\pi(1_g\delta_g u)\\
&=\sum_{g\in G}w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}1_g\delta_g u\\
&=\sum_{g\in G}\alpha_{g^{-1}}(\alpha^{-1}_{g^{-1}}(w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}})1_g)w_{g^{-1},g}\delta_1 u\\
&=\sum_{g\in G}w^{-1}_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}w_{g^{-1},g}\delta_1 u\\
&=\sum_{g\in G}1_{g^{-1}}u=l^{-1}u.
\end{aligned}$$

Daí, $\psi(u)=u$, para todo $u\in U$ e o resultado segue. □

Como uma consequência imediata temos:

Corolário 2.2.3. *Se A é um anel semisimples, α é uma ação parcial torcida de um grupo finito G sobre A e $tr_\alpha(1_A)$ é invertível em A, então $A*_\alpha G$ é semisimples.*

Nosso próximo objetivo é estudar a questão da von Neumann regularidade de $A*_\alpha G$.

Teorema 2.2.4. *Suponhamos que α é uma ação parcial torcida de um grupo finito G sobre A. Se A é um anel von Neumann regular e $|G|$ é invertível em A, então $A *_\alpha G$ é von Neumann regular.*

Prova: Pela Proposição 2.1.16, $|G|$ é invertível em B, e pela Proposição 2.1.12, B é von Neumann regular. Assim, $B *_\beta G$ é von Neumann regular ([26, Proposition 17.2]). Como α é de tipo finito, $A *_\alpha G$ e $B *_\beta G$ são anéis Morita equivalentes, donde segue que $A *_\alpha G$ é von Neumann regular. □

Lembramos que A é von Neumann regular se e somente se todo ideal à esquerda principal é um somando direto de ${}_AA$ ([19, Theorem 4.23]). Com esta caracterização podemos provar o seguinte lema.

Lema 2.2.5. *Sejam A um anel von Neumann regular e α uma ação parcial torcida de um grupo finito G sobre A. Se I é um ideal à esquerda principal de $A *_\alpha G$, então I é um A-somando direto de $A *_\alpha G$.*

Prova: Observe que, para quaisquer $g, h \in G$ e $a \in S_g$, temos,

$$S_h\delta_h a\delta_g = S_h\alpha_h(a1_{h^{-1}})w_{h,g}\delta_{hg}.$$

Uma vez que I é um ideal à esquerda principal de $A *_\alpha G$, então existe $x = \sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g \in A *_\alpha G$ tal que $I = (A *_\alpha G)x$. Assim,

$$I = \sum_{g,h\in G} S_h\delta_h a_g\delta_g = \sum_{g,h\in G} S_h\alpha_h(a_g1_{h^{-1}})w_{h,g}\delta_{hg} = \sum_{f\in G} I_f\delta_f,$$

onde $f = hg$ e $I_f = \sum\limits_{h\in G} S_h\alpha_h(a_{h^{-1}f}1_{h^{-1}})w_{h,h^{-1}f} = \sum\limits_{h\in G} A1_h\alpha_h(a_{h^{-1}f}1_{h^{-1}})w_{h,h^{-1}f}$ é um ideal à esquerda finitamente gerado de A que está contido em S_f. Como A é um anel von Neumann regular, segue que I_f é um somando direto de A como A-módulo à esquerda. Desta forma, existe um ideal à esquerda H_f de A tal que $I_f \oplus H_f = A$.

Logo, $I_f \oplus (H_f \cap S_f) = S_f$, donde segue que $A *_\alpha G = I \oplus \sum\limits_{f\in G}(H_f \cap S_f)\delta_f$ como A-módulo à esquerda. □

Teorema 2.2.6. *Suponhamos que A é um anel von Neumann regular e α é uma ação parcial torcida de um grupo finito G sobre A onde $tr_\alpha(1_A)$ é invertível em A. Então $A *_\alpha G$ é von Neumann regular.*

Prova: Seja I um ideal à esquerda principal de $A *_\alpha G$. Assim, I é um A-somando direto de $A *_\alpha G$. Pelo Teorema de Maschke, I é um $A *_\alpha G$- somando direto. Logo, $A *_\alpha G$ é von Neumann regular. □

2.3 Ideais Primos, Primitivos e o Radical de Jacobson

Nesta seção continuamos nas mesmas hipóteses das seções anteriores. Vamos provar resultados envolvendo o radical de Jacobson de $A *_\alpha G$.

No que segue, para qualquer anel S, $J(S)$ denota o radical de Jacobson de S. O radical de Jacobson de um anel S com unidade é a interseção de todos os ideais à esquerda maximais de S. O lema a seguir caracteriza os elementos de $J(S)$ em termos dos elementos invertíveis de S.

Lema 2.3.1. *([19, Lemma 4.3]) Para qualquer $y \in S$, tem-se que $y \in J(S)$ se e somente se $1 - xyz$ é invertível em S, para quaisquer $x, z \in S$.*

Além disso, o radical de Jacobson de S é a interseção de todos os ideais primitivos à esquerda de S ([19, Corollary 11.5]). Lembrando que um ideal I de S é *primitivo à esquerda* se I é o anulador de um S-módulo à esquerda simples.

Como já foi visto no primeiro capítulo, a sextupla $(A *_\alpha G, B *_\beta G, M, N, \tau, \mu)$ é um contexto de Morita, onde $M = \{\sum\limits_{g\in G} c_g\delta_g; c_g \in A,$ para todo $g \in G\}$, $N = \{\sum\limits_{g\in G} d_g\delta_g; d_g \in \beta_g(A),$ para todo $g \in G\}$ e as aplicações

$$\tau : M \bigotimes\nolimits_{B*_\beta G} N \to A *_\alpha G \text{ e } \mu : N \bigotimes\nolimits_{A*_\alpha G} M \to B *_\beta G,$$

são dadas respectivamente por: $\tau(m \otimes n) = mn$ e $\mu(n \otimes m) = nm$. Utilizando [23, Theorem 3.6.2] obtemos uma correspondência biunívoca entre os ideais primos de $A *_\alpha G$ e de $B *_\beta G$. A demonstração deste resultado para o caso dos produtos cruzados segue as mesmas idéias de [15], e desta forma vamos omitir a prova.

Proposição 2.3.2. *([15, Proposition 5.1]) Existe uma correspondência um a um, via contração, entre o conjunto de todos os ideais primos de $A *_\alpha G$ e o conjunto de todos os ideais primos de $B *_\beta G$.*

Dado um anel qualquer S o radical primo de S, $Nil_*(S)$, é definido como sendo a interseção de todos os ideais primos de S. Assim, como uma consequência imediata da Proposição 2.3.2 temos o seguinte.

Corolário 2.3.3. *Para o radical primo de $A *_\alpha G$, obtemos a seguinte relação:*

$$Nil_*(A *_\alpha G) = Nil_*(B *_\beta G) \cap A *_\alpha G.$$

Proposição 2.3.4. *Se G um grupo finito e A um anel semiprimo livre de $|G|$-torção, então $A *_\alpha G$ é semiprimo.*

Prova: Pelo Corolário 2.1.10 e pela Proposição 2.1.16, segue que B é um anel semiprimo e é livre de $|G|$-torção. Pelo Teorema 1.4.3, segue que $B *_\beta G$ é semiprimo. Como $A *_\alpha G$ e $B *_\beta G$ são Morita equivalentes, segue que $A *_\alpha G$ é semiprimo. $\square$

Suponhamos que P é um ideal primo de $A *_\alpha G$ e P' é o ideal primo de $B *_\beta G$ correspondente a P, ou seja, $P' \cap (A *_\alpha G) = P$. A Proposição 3.6.5 de [23] nos diz que P é um ideal à esquerda primitivo de $A *_\alpha G$ se e somente se P' é um ideal à esquerda primitivo de $B *_\beta G$. Como uma consequência imediata temos a seguinte relação entre o radical de Jacobson de $A *_\alpha G$ e o radical de Jacobson de $B *_\beta G$.

Proposição 2.3.5. $J(A *_\alpha G) = J(B *_\beta G) \cap A *_\alpha G$.

Seja H um subgrupo de G e denote por α_H a ação parcial torcida definida pela restrição da ação parcial torcida α ao subgrupo H, isto é, tomando todos os isomorfismos parciais $\alpha_h : S_{h^{-1}} \to S_h$, $h \in H$, e os multiplicadores $w_{g,h}$, com $g, h \in H$. Assim, temos que $A *_{\alpha_H} H$ é um subanel de $A *_\alpha G$.

O lema abaixo descreve quem é o grupo das unidades de $A *_{\alpha_H} H$. Aqui, dado um anel qualquer S, $U(S)$ denota o grupo das unidades de S.

Lema 2.3.6. *Sejam A um anel, α uma ação parcial torcida de G sobre A e H um subgrupo de G. Então $U(A *_{\alpha_H} H) = U(A *_\alpha G) \cap A *_{\alpha_H} H$.*

Prova: Claramente temos que $1_A\delta_{1_H}$ é a unidade de $A *_{\alpha_H} H$. Como H é um subgrupo de G, $1_H = 1_G$, e assim, $U(A *_{\alpha_H} H) \subseteq U(A *_\alpha G) \cap A *_{\alpha_H} H$.

Para a inclusão contrária, consideramos a aplicação: $\pi : A *_\alpha G \to A *_{\alpha_H} H$ dada por $\pi(\sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g) = \sum\limits_{g\in H} a_g\delta_g$. Mostremos que a aplicação π é um homomorfismo de $A *_{\alpha_H} H$- módulos à esquerda e à direita. De fato, sejam $a \in S_g$ e $b \in S_h$ com

$g \in G$ e $h \in H$. Note que $g \in H$ se e somente se $gh \in H$. Assim, se $g \in H$ temos que $\pi(a\delta_g b\delta_h) = a\delta_g b\delta_h = \pi(a\delta_g)b\delta_h$. Caso contrário, $\pi(a\delta_g b\delta_h) = 0 = \pi(a\delta_g)b\delta_h$. Analogamente, mostra-se que π é homomorfismo de $A *_{\alpha_H} H$- módulos à esquerda.

Se $u \in U(A *_\alpha G) \cap A *_{\alpha_H} H$ então existe $v \in A *_\alpha G$ tal que $uv = vu = 1_A\delta_{1_G}$. Dessa maneira,

$$\pi(uv) = u\pi(v) = \pi(v)u = 1_A\delta_{1_G} = 1_A\delta_{1_H}.$$

Portanto, $u \in U(A *_{\alpha_H} H)$. □

Proposição 2.3.7. *Suponhamos que α é uma ação parcial torcida de G sobre A e H é um subgrupo de G. Então, $J(A *_\alpha G) \cap A *_{\alpha_H} H \subseteq J(A *_{\alpha_H} H)$. Em particular, $J(A *_\alpha G) \cap A \subseteq J(A)$.*

Prova: Seja $u \in J(A *_\alpha G) \cap A *_{\alpha_H} H$. Então $1_A - xuy \in U(A *_\alpha G)$, para todo $x, y \in A *_\alpha G$. De acordo com a proposição anterior, $1_A - xuy \in U(A *_\alpha G) \cap A *_{\alpha_H} H = U(A *_{\alpha_H} H)$, para todo $x, y \in A *_{\alpha_H} H$.

Logo, pelo Lema 2.3.1, $u \in J(A *_{\alpha_H} H)$. □

Proposição 2.3.8. *Seja γ um radical hereditário. Então, γ é α-invariante.*

Prova: Como γ é um radical hereditário, então $\gamma(A) = \gamma(B) \cap A$. Daí,

$$\gamma(A) \cap S_g = \gamma(B) \cap A \cap S_g = \gamma(B) \cap S_g,$$

para todo $g \in G$.

Além disso, $\gamma(B)$ é G-invariante e segue que

$$\begin{aligned} \alpha_g(\gamma(A) \cap S_{g^{-1}}) = \alpha_g(\gamma(B) \cap S_{g^{-1}}) &= \beta_g(\gamma(B) \cap S_{g^{-1}}) \\ &\subseteq \gamma(B) \cap S_g = \gamma(A) \cap S_g, \end{aligned}$$

para todo $g \in G$.

Logo, $\gamma(A)$ é α-invariante. □

Uma consequência interessante desse resultado é que, por exemplo, o radical de Jacobson é α-invariante.

Teorema 2.3.9. *Suponhamos que α é uma ação parcial torcida de um grupo finito G sobre um anel A. Então,*

$$J(A *_\alpha G)^{|G|} \subseteq J(A) *_\alpha G \subseteq J(A *_\alpha G).$$

Além disso, se $\mid G \mid$ é invertível em A, então $J(A *_\alpha G) = J(A) *_\alpha G$.

Prova: Primeiramente note que A é um ideal de B e que o radical de Jacobson é um radical hereditário. Então, $J(B) *_\beta G \cap A *_\alpha G = J(A) *_\alpha G$.

Além disso, por [26, Theorem 4.2], para o produto cruzado global, temos que

$$J(B *_\beta G)^{|G|} \subseteq J(B) *_\beta G \subseteq J(B *_\beta G).$$

Utilizando a Proposição 2.3.5,

$$\begin{aligned}(J(A *_\alpha G))^{|G|} &= (J(B *_\beta G) \cap A *_\alpha G)^{|G|} \subseteq J(B *_\beta G)^{|G|} \cap A *_\alpha G \\ &\subseteq J(B) *_\beta G \cap A *_\alpha G \subseteq J(A) *_\alpha G.\end{aligned}$$

Além disso,

$$J(A) *_\alpha G \subseteq J(B) *_\beta G \cap A *_\alpha G \subseteq J(B *_\beta G) \cap A *_\alpha G.$$

Usando novamente a Proposição 2.3.5, temos que $J(A) *_\alpha G \subseteq J(A *_\alpha G)$.

Agora suponhamos que $|G|$ é invertível em A. Pela Proposição 2.1.16, $|G|$ é invertível em B. Assim, por [26, Theorem 4.2], $J(B *_\beta G) = J(B) *_\beta G$. Portanto,

$$J(A *_\alpha G) = J(B *_\beta G) \cap A *_\alpha G = J(B) *_\beta G \cap A *_\alpha G = J(A) *_\alpha G. \qquad \square$$

Corolário 2.3.10. *Suponhamos que A é um anel e α é uma ação parcial torcida de um grupo finito G sobre A. Então,*

(i) $J(A *_\alpha G) \cap A = J(A)$.

(ii) $J(A *_\alpha G)$ *é nilpotente se e somente se* $J(A)$ *é nilpotente.*

Prova: (i) Segue da Proposição 2.3.7 e do Teorema 2.3.9.
(ii) Suponhamos que $J(A *_\alpha G)$ seja nilpotente.
Assim, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(J(A *_\alpha G))^n = 0$. Pelo item (i), $J(A)^n = 0$, ou seja, $J(A)$ é nilpotente.

Reciprocamente, se $J(A)$ é nilpotente então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $J(A)^n = 0$. Como $J(A)$ é α-invariante, temos que $J(A) *_\alpha G$ é nilpotente. Pelo Teorema 2.3.9, $J(A *_\alpha G)^{|G|} \subseteq J(A) *_\alpha G$. Portanto, $J(A *_\alpha G)$ é também nilpotente. $\square$

Lema 2.3.11. *Seja U um A-módulo à esquerda e suponhamos que G é um grupo finito. Tome $V = A *_\alpha G \bigotimes_A U$. Se U é um A-módulo simples, então V é um A-módulo semisimples.*

Prova: Como $A *_\alpha G = \bigoplus_{g\in G} S_g\delta_g$ então

$$V = \bigoplus_{g\in G} S_g\delta_g \bigotimes_A U \simeq \bigoplus_{g\in G} (S_g\delta_g \bigotimes_A U).$$

Para cada $g \in G$ temos

$$S_g\delta_g \bigotimes_A U = S_g\delta_g 1_{g^{-1}} \bigotimes_A U = S_g\delta_g \bigotimes_A 1_{g^{-1}}U.$$

Assim, $V \simeq \bigoplus_{g\in G} (S_g\delta_g) \bigotimes_A 1_{g^{-1}}U$.
Como U é um A-módulo à esquerda, então para cada $g \in G$, $1_{g^{-1}}U$ é um A-módulo à esquerda via:

$$a \cdot u = w^{-1}_{g^{-1},g}\alpha_{g^{-1}}(a1_g)w_{g^{-1},g}u,$$

para todo $a \in A, u \in 1_{g^{-1}}U$.

Denotamos por U^{α_g} o A-módulo à esquerda $1_{g^{-1}}U$. Definimos:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & S_g\delta_g \times 1_{g^{-1}}U & \longrightarrow & U^{\alpha_g} \\ & (b\delta_g, 1_{g^{-1}}u) & \longmapsto & b \cdot 1_{g^{-1}}u \end{array}$$

Observemos que φ é A-balanceada. De fato, para todo $a \in A, g \in G, b \in S_g$ e $1_{g^{-1}}u \in 1_{g^{-1}}U$ obtemos,

$$\begin{aligned}
\varphi(b\delta_g a, 1_{g^{-1}}u) &= \varphi(b\alpha_g(a1_{g^{-1}})\delta_g, 1_{g^{-1}}u) \\
&= b\alpha_g(a1_{g^{-1}}) \cdot 1_{g^{-1}}u \\
&= w^{-1}_{g^{-1},g}\alpha_{g^{-1}}(b\alpha_g(a1_{g^{-1}}))w_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}u \\
&= w^{-1}_{g^{-1},g}\alpha_{g^{-1}}(b)w_{g^{-1},g}a1_{g^{-1}}w^{-1}_{g^{-1},g}w_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}u \\
&= w^{-1}_{g^{-1},g}\alpha_{g^{-1}}(b)w_{g^{-1},g}a1_{g^{-1}}u \\
&= b \cdot (a1_{g^{-1}}u) \\
&= \varphi(b\delta_g, a1_{g^{-1}}u).
\end{aligned}$$

Pela Propriedade Universal do Produto Tensorial, existe

$$\begin{array}{rcl} \phi \ : \ S_g\delta_g \otimes 1_{g^{-1}}U & \longrightarrow & U^{\alpha_g} \\ b\delta_g \otimes 1_{g^{-1}}u & \longmapsto & b \cdot 1_{g^{-1}}u \end{array}$$

homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos à esquerda.

Como $S_g\delta_g$ tem estrutura de A-bimódulo, então temos que $S_g\delta_g \bigotimes_A 1_{g^{-1}}U$ é um A-módulo à esquerda com:

$$a(b\delta_g \otimes 1_{g^{-1}}u) = ab\delta_g \otimes 1_{g^{-1}}u,$$

para todo $a \in A$, $g \in G$, $b \in S_g$, $1_{g^{-1}}u \in 1_{g^{-1}}U$.

É fácil verificar que ϕ é um homomorfismo de A-módulos à esquerda.

Agora mostremos que ϕ é uma bijeção. Primeiramente observemos que ϕ é injetora. De fato, seja $\sum\limits_i b_i 1_g\delta_g \otimes 1_{g^{-1}}u_i \in S_g\delta_g \otimes 1_{g^{-1}}U$ tal que $\phi(\sum\limits_i b_i 1_g\delta_g \otimes 1_{g^{-1}}u_i) = 0$. Assim, $\sum\limits_i b_i \cdot 1_{g^{-1}}u_i = 0$. Isto implica que $0 = \sum\limits_i w^{-1}_{g^{-1},g}\alpha_{g^{-1}}(b_i 1_g)w_{g^{-1},g}u_i$.

Utilizando o item (iii) da Definição 1.5.2 e a Equação (1.5.1) temos

$$\begin{aligned} 0 &= 1_g\delta_g \otimes \sum_i w^{-1}_{g^{-1},g}\alpha_{g^{-1}}(b_i 1_g)w_{g^{-1},g}u_i \\ &= \sum_i 1_g\delta_g w^{-1}_{g^{-1},g}\alpha_{g^{-1}}(b_i 1_g)w_{g^{-1},g}\delta_1 \otimes 1_{g^{-1}}u_i \\ &= \sum_i \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(1_g)w^{-1}_{g^{-1},g}\alpha_{g^{-1}}(b_i 1_g)w_{g^{-1},g})\delta_g \otimes 1_{g^{-1}}u_i \\ &= \sum_i w^{-1}_{g,g^{-1}}w_{g,g^{-1}}b_i 1_g w^{-1}_{g,g^{-1}}w_{g,g^{-1}}\delta_g \otimes 1_{g^{-1}}u_i \\ &= \sum_i b_i 1_g\delta_g \otimes 1_{g^{-1}}u_i, \end{aligned}$$

como queríamos provar.

Agora vamos verificar a sobrejetividade da aplicação ϕ. Considere $1_{g^{-1}}u \in U^{\alpha_g}$. Então,

$$\begin{aligned} \phi(1_g\delta_g \otimes 1_{g^{-1}}u) &= 1_g \cdot 1_{g^{-1}}u \\ &= w^{-1}_{g^{-1},g}\alpha_{g^{-1}}(1_g)w_{g^{-1},g}1_{g^{-1}}u \\ &= 1_{g^{-1}}u \end{aligned}$$

Logo, $S_g\delta_g \otimes 1_{g^{-1}}U \simeq U^{\alpha_g}$, e portanto, $V \simeq \bigoplus\limits_{g\in G} U^{\alpha_g}$ como A-módulos à esquerda.

Observemos que como $\mathbb{Z}$-módulos, $1_{g^{-1}}U$ e U^{α_g} coincidem, mas como A-módulos as estruturas são distintas.

Como U é um A-módulo à esquerda simples, para qualquer A-submódulo à esquerda 1_gU de U temos que $1_gU = 0$ ou $1_gU = U$.

Se $U^{\alpha_g} = U$ como $\mathbb{Z}$-módulos então U^{α_g} é simples como A-módulo à esquerda. De fato, seja N um A-submódulo à esquerda de U^{α_g}. Daí, para todo $x \in N$ temos que $x = 1_gx$. Observe que $ax = a(1_gx) = (a1_g)x$, onde $a \in A$. Sabemos que para cada $g \in G$, α_g é um isomorfismo de ideais de A e $w_{g,g^{-1}}aw_{g,g^{-1}}^{-1} \in S_g$. Logo, existe $a' \in A$ ($a' \in S_{g^{-1}}$) tal que $\alpha_g(a'1_{g^{-1}}) = w_{g,g^{-1}}aw_{g,g^{-1}}^{-1}$. Portanto,

$$\begin{aligned} a'x &= w_{g,g^{-1}}^{-1}\alpha_g(a'1_{g^{-1}})w_{g,g^{-1}}x \\ &= w_{g,g^{-1}}^{-1}w_{g,g^{-1}}aw_{g,g^{-1}}^{-1}w_{g,g^{-1}}x \\ &= ax \end{aligned}$$

Desta forma N é um A-submódulo à esquerda de U com o produto usual. Como U é um A-módulo simples, então $N = 0$ ou $N = U = U^{\alpha_g}$ donde segue que U^{α_g} é um A-módulo à esquerda simples.

Logo, $V = \bigoplus\limits_{g=1}^{|G|} U^{\alpha_g}$, onde $U^{\alpha_g} = 0$ ou U^{α_g} é simples. Consequentemente, V admite uma série de composição de comprimento menor ou igual a $|G|$, como A-módulo à esquerda. Portanto, V admite uma série de composição de comprimento menor ou igual a $|G|$ como $A *_\alpha G$-módulo à esquerda, pois todo $A *_\alpha G$-módulo à esquerda é um A-módulo à esquerda. Desta maneira V é uma soma direta finita de A-módulos à esquerda simples, ou seja, V é um A-módulo à esquerda semisimples. □

Para finalizar esta seção temos o seguinte resultado sobre o radical de Jacobson de $A *_\alpha G$.

Proposição 2.3.12. *Sejam A um anel e α uma ação parcial torcida de um grupo finito G sobre A com $tr_\alpha(1_A)$ invertível em A. Então $J(A *_\alpha G) = J(A) *_\alpha G$.*

Prova: Pelo Teorema 2.3.9, $J(A) *_\alpha G \subseteq J(A *_\alpha G)$.

Segundo o Lema 2.3.11, se U é um A-módulo à esquerda simples então V é um A-módulo semisimples, onde $V = A *_\alpha G \bigotimes_A U$. Considere um $A *_\alpha G$-submódulo

N de V. Assim, N é um A-submódulo de V. Logo, N é um somando direto de V como A-módulo pois V é A-semisimples.

Como por hipótese $tr_\alpha(1_A)$ invertível em A, pelo Teorema de Maschke, N é um somando direto de V como $A *_\alpha G$-módulo. Portanto V é um $A *_\alpha G$-módulo à esquerda semisimples, isto é, $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$, onde cada V_i é um $A *_\alpha G$-módulo simples. Daí $J(A *_\alpha G)V_i = 0$, para todo $i = 1, \cdots, n$, o que implica que $J(A *_\alpha G)V = 0$.

Considere $a = \sum_{g \in G} a_g \delta_g \in J(A *_\alpha G)$ e $u \in U$. Como $1_A \otimes u \in V = A *_\alpha G \bigotimes_A U$, então $a(1_A \otimes u) = 0$ donde segue que $a_g \delta_g \otimes 1_{g^{-1}} u = 0$, para todo $g \in G$. Lembrando que a aplicação $\phi : S_g \delta_g \otimes 1_{g^{-1}} U \to U^{\alpha_g}$ dada por $\phi(a_g \delta_g \otimes 1_{g^{-1}} u) = a_g \cdot 1_{g^{-1}} u$, é um isomorfismo então $\phi(a_g \delta_g \otimes 1_{g^{-1}} u) = 0$. Consequentemente,

$$a_g \cdot 1_{g^{-1}} u = w_{g^{-1},g}^{-1} \alpha_{g^{-1}}(a_g 1_g) w_{g^{-1},g} u = 0.$$

Assim, $\alpha_{g^{-1}}(a_g 1_g) w_{g^{-1},g} u = 0$ e desta forma, $\alpha_{g^{-1}}(a_g 1_g) w_{g^{-1},g} \in ann_A(U)$, para todo $g \in G$.

Uma vez que, para todo $g \in G$, $w_{g^{-1},g}$ é um elemento invertível de $S_{g^{-1}}$ e $ann_A(U)$ é um ideal de A, segue que $\alpha_{g^{-1}}(a_g) \in ann_A(U)$. Logo, $\alpha_{g^{-1}}(a_g) \in J(A)$. Como o radical de Jacobson é α-invariante, segue que $a_g \in J(A)$, para todo $g \in G$. Portanto, $a \in J(A) *_\alpha G$. $\square$

Capítulo 3

Ações Parciais Torcidas de Grupos sobre Anéis Semiprimos, Anéis de Goldie

Neste capítulo mostraremos que dada uma ação parcial torcida α de um grupo G sobre um anel semiprimo A (não necessariamente com unidade) esta pode ser estendida a uma ação parcial torcida α^* de G sobre o anel de quocientes de Martindale à esquerda de A. Isto estende um resultado de [14] para ações parciais não torcidas. Além disso, a extensão α^* irá nos permitir provar que α pode ser estendida também a uma ação parcial torcida α^{**} de G sobre o anel de quocientes maximal à esquerda de A.

Em [4] L. Bemm, em sua Tese de doutorado, mostrou que se G é finito e A é livre de $|G|$-torção, então o skew anel de grupo é um anel semiprimo de Goldie à direita se e somente se A é um anel semiprimo de Goldie à direita. Ele também obteve o mesmo resultado supondo que G é policíclico infinito. Vamos generalizar estes resultados para o caso das ações parciais torcidas. E ainda, provaremos um resultado análogo no caso em que G é policíclico por finito e α é uma ação parcial torcida de tipo finito.

3.1 A Extensão da Ação Parcial ao Anel de Quocientes de Martindale à Esquerda de A.

Em [14], M. Ferrero mostrou que sempre é possível estender uma dada ação parcial de um grupo sobre um anel semiprimo para o seu respectivo anel de quocientes de Martindale à esquerda. Nosso objetivo nesta seção é generalizar esse resultado para o caso das ações parciais torcidas.

Consideremos $\alpha = (\{S_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ uma ação parcial torcida de um grupo G sobre um anel semiprimo A (não necessariamente com unidade) e $Q = Q(A)$ seu anel de quocientes de Martindale à esquerda.

Primeiramente, começaremos estendendo os multiplicadores de A para Q.

Proposição 3.1.1. *Sejam A um anel semiprimo e $w = (R, L)$ um multiplicador de A. Então existe um multiplicador $w^* = (R^*, L^*)$ de Q tal que $w^* \mid_A = w$. Além disso, se w for invertível então w^* também é invertível.*

Prova: Recordemos que, por definição, R é um homomorfismo de A-módulos à esquerda. Assim, pela Proposição 1.3.6, existe $q \in Q$ tal que $aR = aq$, para todo $a \in A$.

Sabemos que $(aR)b = a(Lb)$, para todo $a, b \in A$. Logo, como $a \in A \subset Q$ e Q é um anel associativo, então temos que $a(qb - Lb) = 0$, para todo $a \in A$, isto é, $A(qb - Lb) = 0$. Portanto, pela Proposição 1.3.6, segue que $qb - Lb = 0$, ou seja, $Lb = qb$, para todo $b \in A$. Assim, para todo $q' \in Q$, definimos

$$q'R^* = q'q \text{ e } L^*q' = qq'.$$

É fácil ver que R^* e L^* coincidem com R e L em A, respectivamente. Mais ainda, $w^* = (R^*, L^*)$ define um multiplicador de Q.

Agora, suponhamos que w seja invertível. Note que o inverso de um multiplicador é também um multiplicador. Com isto, e sendo que R e L são bijeções, temos que q é um elemento invertível em Q. De fato, observe que para todo $a \in A$, existe $q'' \in Q$ tal que $aR^{-1} = aq''$. Desta forma, $(aR^{-1})R = (aR^{-1})q = (aq'')q'$, para todo $a \in A$. Consequentemente, segue que $1_Q = q''q$. Analogamente, mostra-se que $1_Q = qq''$.

Portanto q é um elemento invertível em Q, e então, o multiplicador w^* definido acima é também invertível. $\square$

Observe que a extensão definida acima é única, uma vez que Q é um anel semiprimo.

Aqui cada S_g^* é um ideal fechado de Q que corresponde ao fecho de S_g em A. Segue disso que cada S_g^* possui unidade que iremos denotar por 1_g .

Proposição 3.1.2. *Seja $\alpha = (\{S_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ uma ação parcial torcida de um grupo G sobre um anel semiprimo A. Então para cada par (g,h) em $G \times G$, qualquer multiplicador invertível $w_{g,h} \in \mathcal{M}(S_gS_{gh})$ pode ser estendido para um multiplicador invertível $w_{g,h}^* \in \mathcal{M}({S_g}^*S_{gh}^*)$.*

Prova: Como foi feito na Proposição 3.1.1, podemos estender cada multiplicador invertível $w_{g,h} \in \mathcal{M}(S_gS_{gh})$ para um multiplicador invertível $w_{g,h}^* \in \mathcal{M}(Q(S_gS_{gh})) \simeq \mathcal{M}((S_gS_{gh})^*)$, para todo $g,h \in G$.

Note que $(S_gS_h)^* \simeq S_g^*S_h^*$, para todo $g,h \in G$. De fato, sabemos que $S_g^* = 1_gQ$ e $S_h^* = 1_hQ$, onde 1_g e 1_h são idempotentes centrais de Q. Por outro lado, existem H, F ideais essenciais de A tais que $F1_g \subseteq S_g$ e $H1_h \subseteq S_h$. Como $H \cap F$ é um ideal essencial de A e $(H\cap F)(1_g1_h) \subseteq S_gS_h$, segue que $S_g^*S_h^* \subseteq (S_gS_h)^*$.

Por outro lado, é fácil ver que $(S_g \cap S_h)^* = S_g^* \cap S_h^*$. Portanto,

$$(S_gS_h)^* \subseteq (S_g \cap S_h)^* = S_g^* \cap S_h^* = S_g^*S_h^*,$$

para todo $g,h \in G$. Logo $w_{g,h}^* \in \mathcal{M}({S_g}^*S_{gh}^*)$. □

Observação 3.1.3. (i) *Cada isomorfismo $\alpha_g : S_{g^{-1}} \to S_g$ pode ser estendido a um isomorfismo $\alpha_g^* : S_{g^{-1}}^* \to S_g^*$, para todo $g \in G$ (veja a Proposição 1.3.9 e a Proposição 1.3.10).*

(ii) É fácil ver que pela Proposição 1.3.11, para todo $q \in S_g^*$ e todo $g \in G$, $\alpha_g^{-1^*}(q) = \alpha_g^{*-1}(q)$. Além disso, se $w = (R,L)$ um multiplicador invertível de A então, $w^{-1^*} = w^{*-1}$.

O teorema a seguir é o principal resultado desta seção.

Teorema 3.1.4. *Seja $\alpha = (\{S_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ uma ação parcial torcida de um grupo G sobre um anel semiprimo A. Então existe uma ação parcial torcida $\alpha^* = (\{S_g^*\}_{g\in G}, \{{\alpha_g}^*\}_{g\in G}, \{w_{g,h}^*\}_{(g,h)\in G\times G})$ de G sobre Q tal que $\alpha_g^* |_{S_{g^{-1}}} = \alpha_g$ e $w_{g,h}^* |_{S_gS_{gh}} = w_{g,h}$, para todo $g,h \in G$.*

Prova: Observe que $S_gS_{gh} \subseteq Q(S_gS_{gh}) \simeq (S_gS_{gh})^* = S_g^*S_{gh}^*$.

Pela Proposição 3.1.2, para cada par $(g,h) \in G \times G$ podemos estender o multiplicador invertível $w_{g,h} \in S_gS_{gh}$ para o multiplicador invertível $w_{g,h}^* \in S_g^*S_{gh}^*$. Além disso, pela Observação 3.1.3, cada isomorfismo α_g pode ser estendido a um isomorfismo $\alpha_g^* : S_{g^{-1}}^* \to S_g^*$, para todo $g \in G$.

Resta mostrar que $\alpha^* = (\{S_g^*\}_{g\in G}, \{\alpha_g{}^*\}_{g\in G}, \{w_{g,h}^*\}_{(g,h)\in G\times G})$ é de fato uma ação parcial torcida de G sobre Q.

Primeiramente, como cada ideal S_g^* é gerado por um idempotente central de Q, temos que $S_g^{*2} = S_g^*$ e $S_g^*S_h^* = S_h^*S_g^*$, para todo $g, h \in G$.

Claramente, $S_1^* = Q$ e α_1^* é a aplicação identidade de Q.

Mostremos que $\alpha_g^*(S_{g^{-1}}^*S_h^*) = S_g^*S_{gh}^*$, para todo $g, h \in G$. Seja $q \in \alpha_g^*(S_{g^{-1}}^*S_h^*)$. Assim $q = \alpha_g^*(p)$, para algum $p \in S_{g^{-1}}^*S_h^*$. Desta maneira, existe um ideal essencial F_1 de A tal que $F_1p \subseteq S_{g^{-1}}S_h \subseteq S_{g^{-1}}$. Agora, considere $F_2 = S_{g^{-1}} \cap F_1$ que é um ideal essencial de $S_{g^{-1}}$. Para todo $x \in F_2$ temos,

$$\alpha_g^*(xp) = \alpha_g^*(x)\alpha_g^*(p) = \alpha_g(x)\alpha_g^*(p).$$

Note que $\alpha_g(F_2) = F$ é um ideal essencial de S_g. Como $\alpha_g^*(xp) = \alpha_g(xp) \in S_gS_{gh}$, segue que $F\alpha_g^*(p) \subseteq S_gS_{gh}$. Além disso, uma vez que $\alpha_g^*(p) \in S_g^*$, existe um ideal essencial L de A tal que $L\alpha_g^*(p) \subseteq S_g$. Observe que $AFA \oplus ann_AS_g$ é um ideal essencial de A. Logo,

$$\begin{aligned}(AFA \oplus ann_AS_g)(AFA \oplus ann_AS_g)L\alpha_g^*(p) &= (AFA \oplus ann_AS_g)AFAL\alpha_g^*(p)\\ &\subseteq (AFA \oplus ann_AS_g)S_g\alpha_g^*(p)\\ &= AF\alpha_g^*(p) \subseteq S_gS_{gh}.\end{aligned}$$

Tomando $J = (AFA \oplus ann_AS_g)^2L$, que é um ideal essencial de A, obtemos que $J\alpha_g^*(p) \subseteq S_gS_{gh}$. Portanto, $q = \alpha_g^*(p) \in S_g^*S_{gh}^*$.

Para a inclusão contrária, seja $q \in S_g^*S_{gh}^*$. Assim, existe um ideal essencial H_1 de A tal que $H_1q \subseteq S_gS_{gh} \subseteq S_g$. Então, para todo $x \in H_2 = S_g \cap H_1$, que é um ideal essencial de S_g, temos

$$\alpha_g^{*-1}(xq) = \alpha_g^{*-1}(x)\alpha_g^{*-1}(q) = \alpha_g^{-1}(x)\alpha_g^{*-1}(q).$$

Já que $xq \in S_gS_{gh}$, $\alpha_g^{*-1}(xq) = \alpha_g{}^{-1}(xq) \in S_{g^{-1}}S_h$ pelo item (iii) da Definição 1.5.2, e assim, $H\alpha_g^{*-1}(q) \subseteq S_{g^{-1}}S_h$, onde $\alpha_g^{-1}(H_2) = H$ é um ideal essencial de $S_{g^{-1}}$. Além disso, como $\alpha_g^{*-1}(q) \in S^*_{g^{-1}}$, existe um ideal essencial E de A tal que $E\alpha_g^{*-1}(q) \subseteq S_{g^{-1}}$. Tome $(AHA \oplus ann_A S_{g^{-1}})^2 E$, o qual é um ideal essencial de A. Daí,

$$\begin{aligned}(AHA \oplus ann_A S_{g^{-1}})(AHA \oplus ann_A S_{g^{-1}})E\alpha_g^{*-1}(q) &\subseteq (AHA \oplus ann_A S_{g^{-1}})S_{g^{-1}}\alpha_g^{*-1}(q)\\ &\subseteq AH\alpha_g^{*-1}(q) \subseteq S_{g^{-1}}S_h.\end{aligned}$$

Consequentemente, $\alpha_g^{*-1}(q) \in S^*_{g^{-1}}S^*_h$, isto é, $q \in \alpha^*_g(S^*_{g^{-1}}{S_h}^*)$, para todo $g, h \in G$.

Provemos que $\alpha^*_g \circ \alpha^*_h(a) = w^*_{g,h}\alpha^*_{gh}(a){w^*_{gh}}^{-1}$, para todo $a \in S^*_{h^{-1}}S^*_{h^{-1}g^{-1}}$ e todo $g, h \in G$. Seja $a \in S^*_{h^{-1}}S^*_{h^{-1}g^{-1}}$. Então, existe um ideal essencial F_1 de A tal que $F_1 a \subseteq S_{h^{-1}}S_{h^{-1}g^{-1}}$. Tome $F_2 = F_1 \cap S_{h^{-1}}S_{h^{-1}g^{-1}}$, o qual é um ideal essencial de $S_{h^{-1}}S_{h^{-1}g^{-1}}$. Para todo $x \in F_2$ temos,

$$\begin{aligned} w^*_{g,h}\alpha^*_{gh}(x)w^{*-1}_{g,h}\alpha^*_g(\alpha^*_h(a)) &= w_{g,h}\alpha_{gh}(x)w^{-1}_{g,h}\alpha^*_g(\alpha^*_h(a))\\ &= \alpha_g(\alpha_h(x))\alpha^*_g(\alpha^*_h(a))\\ &= \alpha^*_g(\alpha^*_h(xa))\\ &= \alpha_g(\alpha_h(xa))\\ &= w_{g,h}\alpha_{gh}(xa)w^{-1}_{g,h}\\ &= w^*_{g,h}\alpha^*_{gh}(xa)w^{*-1}_{g,h}\\ &= w^*_{g,h}\alpha_{gh}(x)\alpha^*_{gh}(a)w^{*-1}_{g,h}.\end{aligned}$$

Portanto, $\alpha_{gh}(x)w^{*-1}_{g,h}\alpha^*_g(\alpha^*_h(a)) = \alpha_{gh}(x)\alpha^*_{gh}(a)w^{*-1}_{g,h}$, para todo $x \in F_2$.

Além disso, observe que $\alpha_{gh}(F_2) = F$ é um ideal essencial de $S_g S_{gh}$. Assim, para todo $f \in F$

$$f(w^{*-1}_{g,h}\alpha^*_g(\alpha^*_h(a)) - \alpha^*_{gh}(a)w^{*-1}_{g,h}) = 0.$$

Já que F é um ideal essencial de $S_g S_{gh}$, temos que

$$\alpha^*_g(\alpha^*_h(a)) = w^*_{g,h}\alpha^*_{gh}(a)w^{*-1}_{g,h},$$

para todo $a \in S^*_{h^{-1}}S^*_{h^{-1}g^{-1}}$.

Agora vamos verificar o item (v) da Definição 1.5.2. Note que, $w^*_{1,g}\,|_{S_g} = w_{1,g}$ e $w^*_{g,1}\,|_{S_g} = w_{g,1}$. Pela Proposição 1.3.11, $w^*_{1,g} = w^*_{g,1}$ em $Q(S_g) \simeq S^*_g$.

Seja $a \in S^*_g$. Assim, existe um ideal essencial H de A tal que $Ha \subseteq S_g$. Lembramos que, por definição, $aw^*_{1,g} = aq$ para algum $q \in Q$. Daí, $h(aq) = (ha)q =$

$haw_{g,1} = ha$, para todo $h \in H$. Consequentemente, $h(aq) - ha = 0$ para todo $h \in H$, isto é, $H(aq - a) = 0$. Uma vez que H é um ideal essencial de A, segue que $aq = a$, para todo $a \in S_g^*, g \in G$.

Logo, $w_{g,1}^*$ é a aplicação identidade de S_g^*. Analogamente para $w_{1,g}^*$.

Resta mostrar que $\alpha_g^*(aw_{h,t}^*)w_{g,ht}^* = \alpha_g^*(a)w_{g,h}^*w_{gh,t}^*$, para todo $a \in S_{g^{-1}}^*S_h^*S_{ht}^*$ e todo $g, h, t \in G$. Seja $a \in S_{g^{-1}}^*S_h^*S_{ht}^*$. Assim, existe um ideal essencial F_1 de A tal que $F_1a \subseteq S_{g^{-1}}S_hS_{ht}$. Agora considere $F = F_1 \cap S_{g^{-1}}S_hS_{ht}$, que é um ideal essencial de $S_{g^{-1}}S_hS_{ht}$. Portanto, como α é uma ação parcial torcida de G sobre A, para todo $x \in F$,

$$\begin{aligned}
\alpha_g(x)\alpha_g^*(a)w_{g,h}^*w_{gh,t}^* &= \alpha_g^*(xa)w_{g,h}^*w_{gh,t}^* \\
&= \alpha_g(xa)w_{g,h}w_{gh,t} \\
&= \alpha_g(xaw_{h,t})w_{g,ht} \\
&= \alpha_g(x)\alpha_g^*(aw_{h,t}^*)w_{g,ht}^*
\end{aligned}$$

Consequentemente, $\alpha_g(x)(\alpha_g^*(a)w_{g,h}^*w_{gh,t}^* - \alpha_g^*(aw_{h,t}^*)w_{g,ht}^*) = 0$, para todo $x \in F$. Como $\alpha_g(F)$ é um ideal essencial de $S_gS_{gh}S_{ght}$, segue que, para todo $g, h, t \in G$,

$$\alpha_g^*(a)w_{g,h}^*w_{gh,t}^* = \alpha_g^*(aw_{h,t}^*)w_{g,ht}^*.$$

Portanto, $\alpha^* = (\{S_g^*\}_{g\in G}, \{\alpha_g{}^*\}_{g\in G}, \{w_{g,h}^*\}_{(g,h)\in G\times G})$ é uma ação parcial torcida de G sobre Q, o que completa a prova. □

3.2 A Extensão da Ação Parcial ao Anel de Quocientes Maximal à Esquerda de A.

Aqui continuaremos trabalhando na mesma situação da seção anterior, isto é, $\alpha = (\{S_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ é uma ação parcial torcida de um grupo G sobre um anel semiprimo A (não necessariamente com unidade), $Q = Q(A)$ é o anel de quocientes de Martindale à esquerda de A e $Q_m = Q_m(A)$ o anel de quocientes maximal à esquerda de A. Tendo já a extensão da ação parcial torcida α ao anel de quocientes de Martindale à esquerda de A, vamos estender a ação parcial ao anel de quocientes maximal à esquerda de A.

Fazemos a extensão da ação parcial ao anel de quocientes maximal à esquerda de A a fim de obtermos melhores resultados na investigação de condições necessárias e suficientes para que $A *_\alpha G$ seja um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Isso se deve ao fato de que quando o anel é semiprimo de Goldie à esquerda o anel de quocientes maximal à esquerda e o anel de quocientes clássico à esquerda são iguais.

Algumas das demonstrações que serão feitas aqui são semelhantes as da seção 3.1.

O corolário abaixo será fundamental nas demonstrações desta seção.

Corolário 3.2.1. *([3, Corollary 2.1.12]) Sejam A um anel semiprimo, I um ideal de A e J o anulador à direita de I em A. Então,*

$$Q_m(A) = Q_m(I) \oplus Q_m(J).$$

Disto segue imediatamente que se I é um ideal de um anel semiprimo A, então $Q_m(I) \subseteq Q_m(A)$.

Lema 3.2.2. *Seja I um ideal de A tal que I é gerado por um idempotente central 1_I de A. Além disso, considere I^* o ideal fechado de Q que corresponde ao fecho de I em A. Então 1_I^* é um idempotente central de $Q_m(A)$ e $Q_m(A)1_I^* = Q_m(I)$.*

Prova: Sabemos que 1_I^* é um idempotente central de $Q(A)$. Além disso, temos que $1_I^* \in Q(I) \subseteq Q_m(I) \subseteq Q_m(A)$. Mais ainda, o centro de $Q(A)$ e o centro de $Q_m(A)$ coincidem, pois A é um anel semiprimo ([18, Proposition 14.17]). Logo, 1_I^* é um idempotente central do $Q_m(A)$.

Como pelo Corolário 3.2.1 $Q_m(A) = Q_m(I) \oplus Q_m(J)$, onde $J = ann_{r,A}(I)$, segue que $Q_m(A)1_I^* = Q_m(I)$. □

Lema 3.2.3. *Sejam I e J ideais de um anel semiprimo A e $\phi : I \to J$ um isomorfismo de anéis. Então existe um isomorfismo $\phi^{**} : Q_m(I) \to Q_m(J)$ tal que $\phi^{**}|_I = \phi$.*

Prova: Sejam $q \in Q_m(I)$ e $f : H \to I$ tal que $f(h) = hq$, para todo $h \in H$, onde H é um ideal à esquerda denso de I. Como ϕ é um isomorfismo, $\phi(H)$ é um ideal à esquerda denso de J. Definimos $\phi^{**}(f) : \phi(H) \to J$ por

$$\phi^{**}(f)(x) = \phi \circ f \circ \phi^{-1}(x),$$

para todo $x \in \phi(H)$. Note que esta aplicação é um J-homomorfismo à esquerda. É fácil verificar que $\phi^{**} : Q_m(I) \to Q_m(J)$ dada por $\phi^{**}(q) = [\phi(H), \phi^{**}(f)]$, para todo $q \in Q(I)$, é um isomorfismo de anéis.

Resta mostrar que $\phi^{**} \mid_I = \phi$. De fato, seja $a \in I$. Então, a pode ser visto como um elemento de $Q_m(I)$ dado por $[I, r_a]$, onde $r_a(x) = xa$ para todo $x \in I$. Seja $b = \phi(c) \in J$, com $c \in I$. Assim,

$$\phi^{**}(r_a)(b) = \phi(r_a(c)) = \phi(ca) = \phi(c)\phi(a) = b\phi(a).$$

Logo, $\phi^{**} \mid_I = \phi$. □

Lema 3.2.4. *Sejam I um ideal de A, $\phi : I \to A$ um monomorfismo de anéis e $f, f' : Q_m(I) \to Q_m(\phi(I))$ isomorfismos de anéis tais que $f \mid_I = f' \mid_I = \phi$. Então $f = f'$.*

Prova: Seja $q \in Q_m(I)$. Assim, existe um ideal à esquerda denso H de I tal que $Hq \subseteq I$. Então, por hipótese, $f(hq) = f'(hq)$, para todo $h \in H$. Assim, $\phi(h)(f(q) - f'(q)) = 0$, para todo $h \in H$. Uma vez que $\phi(H)$ é um ideal à esquerda denso de $\phi(I)$, segue que $f = f'$. □

Lema 3.2.5. *Sejam I e J ideais de A tais que $I = A1_I$ e $J = A1_J$, onde 1_I e 1_J são idempotentes centrais de A. Então,*

$$Q_m(IJ) = Q_m(I)Q_m(J).$$

Prova: Observe que pelo Lema 3.2.2,

$$Q_m(IJ) = 1_{IJ}^{*}Q_m(A) = 1_{IJ}Q_m(A) = 1_I 1_J Q_m(A) = Q_m(I)Q_m(J). \qquad \square$$

Proposição 3.2.6. *Sejam A um anel semiprimo e $w = (R, L)$ um multiplicador de A. Então existe um multiplicador $w^{**} = (R^{**}, L^{**})$ de $Q_m(A)$ tal que $w^{**} \mid_A = w$. Além disso, se w for invertível, então w^{**} também é invertível.*

Prova: Como R é um homomorfismo de A-módulos à esquerda, existe $q \in Q_m(A)$ tal que $aR = aq$, para todo $a \in A$. Seguindo as mesmas idéias da Proposição 3.1.1, segue o resultado. □

Vamos estender uma ação parcial torcida α de G sobre A para uma ação parcial torcida α^{**} de G sobre $Q_m(A)$ supondo que todos os ideais S_g de A tem unidade.

Com este resultado, mostraremos que também podemos estender uma ação parcial no caso em que os ideais não são necessariamente gerados por idempotentes centrais.

Aqui denotamos por S_g^{**} o anel de quocientes maximal à esquerda de S_g, para todo $g \in G$.

Teorema 3.2.7. *Seja $\alpha = (\{S_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ uma ação parcial torcida de um grupo G sobre um anel semiprimo A. Suponhamos que os ideais S_g de A são gerados por idempotentes centrais, para todo $g \in G$. Então existe uma ação parcial torcida $\alpha^{**} = (\{S_g^{**}\}_{g\in G}, \{{\alpha_g}^{**}\}_{g\in G}, \{w_{g,h}^{**}\}_{(g,h)\in G\times G})$ de G sobre $Q_m(A)$ tal que $\alpha_g^{**} \mid_{S_{g^{-1}}} = \alpha_g$ e $w_{g,h}^{**} \mid_{S_gS_{gh}} = w_{g,h}$, para todo $g, h \in G$.*

Prova: Observe que, pelo Lema 3.2.5, $S_gS_{gh} \subseteq Q_m(S_gS_{gh}) = (S_gS_{gh})^{**} = S_g^{**}S_{gh}^{**}$, para todo $g, h \in G$. Pelo Lema 3.2.2, cada ideal S_g^{**} é gerado por um idempotente central de $Q_m(A)$, para todo $g \in G$. Desta forma, $S_g^{**2} = S_g^{**}$ e $S_g^{**}S_h^{**} = S_h^{**}S_g^{**}$, para todo $g, h \in G$.

Pela Proposição 3.2.6, para cada par $(g, h) \in G \times G$ podemos estender o multiplicador invertível $w_{g,h} \in S_gS_{gh}$ para um multiplicador invertível $w_{g,h}^{**} \in S_g^{**}S_{gh}^{**}$. Além disso, pelo Lema 3.2.3, cada isomorfismo α_g pode ser estendido a um isomorfismo $\alpha_g^{**} : S_{g^{-1}}^{**} \to S_g^{**}$, para todo $g \in G$.

Mostremos que $\alpha^{**} = (\{S_g^{**}\}_{g\in G}, \{{\alpha_g}^{**}\}_{g\in G}, \{w_{g,h}^{**}\}_{(g,h)\in G\times G})$ é de fato uma ação parcial torcida de G sobre $Q_m(A)$.

É fácil ver que $S_1^{**} = Q_m(A)$ e α_1^{**} é a aplicação identidade de $Q_m(A)$.

Mostremos que $\alpha_g^{**}(S_{g^{-1}}^{**}S_h^{**}) = S_g^{**}S_{gh}^{**}$, para todo $g, h \in G$.

Seja $p \in S_{g^{-1}}^{**}S_h^{**} = (S_{g^{-1}}S_h)^{**}$. Assim, existe um ideal à esquerda denso H de $S_{g^{-1}}S_h$ tal que $Hp \subseteq S_{g^{-1}}S_h$. Daí, para todo $h \in H$, $\alpha_g(hp) = \alpha_g^{**}(hp) = \alpha_g(h)\alpha_g^{**}(p)$. Logo, $\alpha_g(H)\alpha_g^{**}(p) \subseteq S_gS_{gh}$. Como H é um ideal à esquerda denso de $S_{g^{-1}}S_h$, então $\alpha_g(H)$ é um ideal à esquerda denso de S_gS_{gh}.

Portanto $\alpha_g^{**}(p) \in (S_gS_{gh})^{**} = S_g^{**}S_{gh}^{**}$.

Para a inclusão contrária, seja $q \in S_g^{**}S_{gh}^{**}$. Assim, existe um ideal à esquerda denso L de S_gS_{gh} tal que $Lq \subseteq S_gS_{gh} \subseteq S_g$. Então, para todo $l \in L$ temos que $lq \in S_gS_{gh}$ e $\alpha_g^{**-1}(lq) = {\alpha_g}^{-1}(lq) = \alpha_g^{-1}(l)\alpha_g^{**-1}(q) \in S_{g^{-1}}S_h$.

Note que $\alpha_g^{-1}(L)$ é um ideal à esquerda denso de $S_{g^{-1}}S_h$, e consequentemente, $\alpha_g^{**-1}(q) \in S_{g^{-1}}^{**}S_h^{**}$. Logo $q \in \alpha_g^{**}(S_{g^{-1}}^{**}{S_h}^{**})$, para todo $g, h \in G$. Isso prova que $\alpha_g^{**}(S_{g^{-1}}^{**}S_h^{**}) = S_g^{**}S_{gh}^{**}$, para todo $g, h \in G$.

Verifiquemos agora que $\alpha_g^{**} \circ \alpha_h^{**}(a) = w_{g,h}^{**}\alpha_{gh}^{**}(a){w_{g,h}^{**}}^{-1}$, para todo $a \in S_{h^{-1}}^{**}S_{h^{-1}g^{-1}}^{**}$, para todo $g, h \in G$.

Seja $a \in S_{h^{-1}}^{**}S_{h^{-1}g^{-1}}^{**}$. Assim, existe um ideal à esquerda denso F de $S_{h^{-1}}S_{h^{-1}g^{-1}}$ tal que $Fa \subseteq S_{h^{-1}}S_{h^{-1}g^{-1}}$. Para todo $x \in F$ temos,

$$\begin{aligned} w_{g,h}^{**}\alpha_{gh}^{**}(x){w_{g,h}^{**}}^{-1}\alpha_g^{**}(\alpha_h^{**}(a)) &= w_{g,h}\alpha_{gh}(x)w_{g,h}^{-1}\alpha_g^{**}(\alpha_h^{**}(a)) \\ &= \alpha_g^{**}(\alpha_h^{**}(xa)) \\ &= \alpha_g(\alpha_h(xa)) \\ &= w_{g,h}\alpha_{gh}(xa)w_{g,h}^{-1} \\ &= w_{g,h}^{**}\alpha_{gh}^{**}(xa){w_{g,h}^{**}}^{-1} \\ &= w_{g,h}^{**}\alpha_{gh}(x)\alpha_{gh}^{**}(a){w_{g,h}^{**}}^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, $\alpha_{gh}(x)({w_{g,h}^{**}}^{-1}\alpha_g^{**}(\alpha_h^{**}(a)) - \alpha_{gh}^{**}(a){w_{g,h}^{**}}^{-1}) = 0$, para todo $x \in F$.

Observe que $\alpha_{gh}(F)$ é um ideal à esquerda denso de $S_g S_{gh}$. Assim,

$$\alpha_g^{**}(\alpha_h^{**}(a)) = w_{g,h}^{**}\alpha_{gh}^{**}(a){w_{g,h}^{**}}^{-1},$$

para todo $a \in S_{h^{-1}}^{**}S_{h^{-1}g^{-1}}^{**}$, o que prova a afirmação acima.

Agora vamos verificar o item (v) da Definição 1.5.2. Note que $w_{1,g}^{**}\mid_{S_g} = w_{1,g}$ e $w_{g,1}^{**}\mid_{S_g} = w_{g,1}$. Pelo Lema 3.2.4, $w_{1,g}^{**} = w_{g,1}^{**}$ em $Q_m(S_g) = S_g^{**}$.

Seja $a \in S_g^{**}$. Assim, existe um ideal à esquerda denso H de S_g tal que $Ha \subseteq S_g$. Lembremos que, por definição, $aw_{1,g}^{**} = aq$ com $q \in Q_m(A)$. Daí, $h(aq) = (ha)q = haw_{g,1} = ha$, para todo $h \in H$. Uma vez que H é um ideal à esquerda denso de S_g, segue que $aq = a$, para todo $a \in S_g^{**}, g \in G$. Logo, $w_{1,g}^{**}$ é a aplicação identidade de S_g^{**}. Analogamente para $w_{g,1}^{**}$.

Resta verificar que $\alpha_g^{**}(aw_{h,t}^{**})w_{g,ht}^{**} = \alpha_g^{**}(a)w_{g,h}^{**}w_{gh,t}^{**}$, para todo $a \in S_{g^{-1}}^{**}S_h^{**}S_{ht}^{**}$, para todo $g, h, t \in G$. Seja $a \in S_{g^{-1}}^{**}S_h^{**}S_{ht}^{**}$. Assim, existe um ideal à esquerda denso D de $S_{g^{-1}}S_hS_{ht}$ tal que $Da \subseteq S_{g^{-1}}S_hS_{ht}$. Para todo $x \in D$,

$$\begin{aligned} \alpha_g(x)\alpha_g^{**}(a)w_{g,h}^{**}w_{gh,t}^{**} &= \alpha_g^{**}(xa)w_{g,h}^{**}w_{gh,t}^{**} \\ &= \alpha_g(xa)w_{g,h}w_{gh,t} \\ &= \alpha_g(xaw_{h,t})w_{g,ht} \\ &= \alpha_g(x)\alpha_g^{**}(aw_{h,t}^{**})w_{g,ht}^{**} \end{aligned}$$

Como $\alpha_g(D)$ é um ideal à esquerda denso de $S_gS_{gh}S_{ght}$,

$$\alpha_g^{**}(a)w_{g,h}^{**}w_{gh,t}^{**} = \alpha_g^{**}(aw_{h,t}^{**})w_{g,ht}^{**}.$$

Portanto, $\alpha^{**} = (\{S_g^{**}\}_{g\in G}, \{\alpha_g{}^{**}\}_{g\in G}, \{w_{g,h}^{**}\}_{(g,h)\in G\times G})$ é uma ação parcial torcida de G sobre $Q_m(A)$, o que completa a demonstração. □

Nosso próximo objetivo é mostrar este teorema sem admitir que os ideais de A sejam gerados por idempotentes centrais. Para tanto, precisamos da seguinte proposição.

Proposição 3.2.8. *([3, Proposition 2.1.10]) Sejam K um ideal à esquerda denso de A e S um subanel do $Q_m(A)$ tal que $K \subseteq S$. Então,*

$$Q_m(S) = Q_m(A).$$

Uma consequência interessante deste resultado é que como $Q(A)$ é um subanel do $Q_m(A)$ e $A \subseteq Q(A) \subseteq Q_m(A)$ temos que

$$Q_m(Q(A)) = Q_m(A).$$

Teorema 3.2.9. *Seja $\alpha = (\{S_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ uma ação parcial torcida de um grupo G sobre um anel semiprimo A. Então existe uma ação parcial torcida $\alpha^{**} = (\{S_g^{**}\}_{g\in G}, \{\alpha_g^{**}\}_{g\in G}, \{w_{g,h}^{**}\}_{(g,h)\in G\times G})$ de G sobre $Q_m(A)$ tal que $\alpha_g^{**}\mid_{S_{g^{-1}}} = \alpha_g$ e $w_{g,h}^{**}\mid_{S_gS_{gh}} = w_{g,h}$, para todo $g, h \in G$.*

Prova: Pelo Teorema 3.1.4 sabemos que podemos estender α para uma ação parcial torcida α^* de G sobre o anel de quocientes de Martindale à esquerda $Q(A)$ de A. Observe que $Q(A)$ é um anel semiprimo e cada ideal S_g^* de $Q(A)$ é gerado por um idempotente central de $Q(A)$. Então, pelo Teorema 3.2.7, podemos estender α^* para uma ação parcial torcida α^{**} de G sobre $Q_m(Q(A)) = Q_m(A)$. □

Relembremos que uma ação global torcida $\beta = (B, \beta, u)$ de G sobre B é uma envolvente fraca para uma ação parcial torcida α de G sobre A se existe um monomorfismo de anéis $\phi : A \to B$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $\phi \circ \alpha_g = \beta_g \circ \phi$ em $S_{g^{-1}}$ para todo $g \in G$;

(ii) $\phi(aw_{g,h}) = \phi(a)u_{g,h}$, $\phi(w_{g,h}a) = u_{g,h}\phi(a)$, para todo $g, h \in G$ e $a \in S_gS_{gh}$.

Para mais detalhes veja a Definição 1.5.6.

Teorema 3.2.10. *Seja α uma ação parcial torcida de um grupo G sobre um anel semiprimo de Goldie à esquerda A. Então α possui uma ação envolvente fraca.*

Prova: Note que, como A é um anel semiprimo de Goldie à esquerda então o anel de quocientes maximal à esquerda e o anel de quocientes clássico à esquerda de A coincidem ([18, Corollary 13.15]). Então pelo Teorema 1.1.22, $Q_m(A)$ é um anel semisimples, e desta forma $Q_m(A)$ é um produto direto de anéis indecomponíveis. Como $Q_m(A)$ é um anel com unidade e, para todo $g \in G$, S_g^{**} também tem unidade, α^{**} admite uma ação envolvente $\beta = (B, \{\beta_g\}, \{u_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ que é uma envolvente fraca para a ação α. $\square$

Assim, nesta situação temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} A & \hookrightarrow & Q_m & \hookrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A *_\alpha G & \hookrightarrow & Q_m *_{\alpha^{**}} G & \hookrightarrow & B *_\beta G \end{array}$$

Como vimos no primeiro capítulo, algumas propriedades são invariantes pela extensão $A \subseteq Q_m$. Por exemplo, A é semiprimo de Goldie à esquerda se e somente se Q_m é semiprimo de Goldie à esquerda. Também, pelo Corolário 2.1.15, se B é um anel com unidade, então Q_m é semiprimo de Goldie à esquerda se e somente se B é semiprimo de Goldie à esquerda. E ainda, se B tem unidade, então $Q_m *_{\alpha^{**}} G$ e $B *_\beta G$ são anéis Morita equivalentes (Teorema 1.6.2), e assim, $Q_m *_{\alpha^{**}} G$ é de Goldie à esquerda se e somente se $B *_\beta G$ também é de Goldie à esquerda. Além disso, para a extensão $B \subseteq B *_\beta G$, a questão de ser um anel semiprimo de Goldie à esquerda é tratada no Teorema 1.4.5 e na Proposição 1.4.6. Assim, devemos estudar a extensão $A *_\alpha G \subseteq Q_m *_{\alpha^{**}} G$.

Este diagrama irá nos possibilitar provar os principais resultados da próxima seção.

3.3 O Produto Cruzado Parcial e Anéis de Goldie

Em [5], os autores provaram que se A é um anel semiprimo com unidade e α é uma ação parcial de um grupo cíclico infinito sobre A, então A é um anel semiprimo de Goldie à direita se e somente se o skew anel de polinômios parcial sobre A é um anel de Goldie à direita. Nosso principal objetivo nesta seção é mostrar resultados semelhantes aos encontrados em [5] para o produto cruzado parcial

$A *_\alpha G$, sob determinadas condições sobre o grupo G e sobre a ação parcial torcida. Além disso, a maioria dos resultados apresentados aqui são generalizações dos encontrados em [4]. Quanto a notação, A é um anel semiprimo com unidade, $\alpha = (\{S_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ é uma ação parcial torcida arbitrária de um grupo G sobre o anel A e $\alpha^{**} = (\{S_g^{**}\}_{g\in G}, \{\alpha_g^{**}\}_{g\in G}, \{w_{g,h}^{**}\}_{(g,h)\in G\times G})$ é a extensão de α a Q_m, o anel de quocientes maximal à esquerda de A, que foi construída na seção anterior.

Como nesta seção o anel de quocientes de Martindale à esquerda de A não será necessário, vamos trabalhar somente com a ação parcial torcida α^{**} de G sobre Q_m. Então vamos denotar $\alpha^{**} = (\{S_g^{**}\}_{g\in G}, \{\alpha_g^{**}\}_{g\in G}, \{w_{g,h}^{**}\}_{(g,h)\in G\times G})$ simplesmente por $\alpha^{*} = (\{S_g^{*}\}_{g\in G}, \{\alpha_g^{*}\}_{g\in G}, \{w_{g,h}^{*}\}_{(g,h)\in G\times G})$.

Nosso primeiro objetivo é mostrar que se α é de tipo finito então α^* é de tipo finito.

Proposição 3.3.1. *Se α é uma ação parcial torcida de tipo finito, então α^* também é uma ação parcial torcida de tipo finito.*

Prova: Suponhamos que α é de tipo finito. Então, existem $\{g_1, \cdots, g_n\} \subseteq G$ tais que $A = \sum_{i=1}^{n} S_{gg_i}$, para todo $g \in G$. Assim, $1_{Q_m} = 1_A \in \sum_{i=1}^{n} S_{gg_i} \subseteq \sum_{i=1}^{n} S_{gg_i}^*$, para todo $g \in G$. Além disso, $\sum_{i=1}^{n} S_{gg_i}^*$ é um ideal de Q_m.

Logo $Q_m = \sum_{i=1}^{n} S_{gg_i}^*$, para todo $g \in G$, donde segue que α^* é uma ação parcial torcida de tipo finito. □

Começaremos provando alguns resultados que relacionam os ideais de $A *_\alpha G$ e os ideais de $Q_m *_{\alpha^*} G$. Em especial o lema abaixo irá desempenhar um papel fundamental nas demais demonstrações desta seção.

Lema 3.3.2. *Se y é um elemento não nulo de $Q_m *_{\alpha^*} G$, então existe um ideal à esquerda denso H de A tal que $0 \neq Hy \subseteq A *_\alpha G$. Além disso, se $y_1, y_2, \cdots, y_k$ são elementos de $Q_m *_{\alpha^*} G$ então existe um ideal à esquerda denso D de A tal que $Dy_j \subseteq A *_\alpha G$, para todo $j = 1, \cdots, k$.*

Prova: Seja $y = \sum_{i=1}^{n} q_{g_i}\delta_{g_i}$ um elemento não nulo de $Q_m *_{\alpha^*} G$.

Podemos supor sem perda de generalidade que os índices $g_i's$ que aparecem em y são todos distintos entre si e que os coeficientes q_{g_i} são não nulos, para todo $i = 1, \cdots, n$.

Para cada $g \in G$, denotamos por 1_g o idempotente central de $Q_m(A)$ que gera S_g^*. Uma vez que cada $q_{g_i} \in S_{g_i}^* \subseteq Q_m(A)$, existe um ideal à esquerda denso D_i de A tal que $0 \neq D_i q_{g_i} \subseteq A$. Pelo Lema 3.2.2, $1_{g_i} \in Q(S_{g_i})$ o que implica que existe um ideal essencial L_i de A tal que $L_i 1_{g_i} \subseteq S_{g_i}$. Como A é semiprimo, pela Proposição 1.3.1, L_i é um ideal à esquerda denso de A. Assim, pela Proposição 1.1.3, $L_i D_i = H_i$ é um ideal à esquerda denso de A, para todo $i = 1, \cdots, n$. Logo, como 1_{g_i} é um idempotente central de $Q_m(A)$, $L_i D_i 1_{g_i} q_{g_i} \subseteq S_{g_i}$, para todo $i = 1, \cdots, n$.

Tomando $H = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$, que é um ideal à esquerda denso de A, temos que para todo $i = 1, \cdots, n$, $0 \neq H q_{g_i} \subseteq S_{g_i}$. Daí, como $b q_{g_i} \subseteq S_{g_i}$, para todo $b \in H$ temos

$$by = \sum_{i=1}^{n} b q_{g_i} w_{1,g_i}^* \delta_{g_i} = \sum_{i=1}^{n} b q_{g_i} \delta_{g_i} \in A *_\alpha G,$$

Em particular, $q_{g_1} \neq 0$, e pelo Lema 1.3.4 existe $a \in H$ tal que $a q_{g_1} \neq 0$. Assim, $ay \in A *_\alpha G$ e $ay = a q_{g_1} \delta_{g_1} + \sum_{i=2}^{n} a q_{g_i} \delta_{g_i} \neq 0$.

Logo, $0 \neq Hy \subseteq A *_\alpha G$.

Mais ainda, se $y_1, \cdots, y_k \in Q_m *_{\alpha^*} G$, então para cada $j = 1, \cdots, k$ existe um ideal à esquerda denso D_j de A tal que $D_j y_j \in A *_\alpha G$. Tomando $D = \bigcap_{j=1}^{k} D_j$, obtemos que $D y_j \subseteq A *_\alpha G$, para todo $j = 1, \cdots, k$. $\square$

Corolário 3.3.3. *Em $A *_\alpha G$ valem as seguintes afirmações:*

(*i*) *Se I é um ideal à esquerda não nulo de $Q_m *_{\alpha^*} G$, então $I \cap A *_\alpha G$ é um ideal à esquerda não nulo de $A *_\alpha G$.*

(*ii*) *Se $A *_\alpha G$ é semiprimo, então $Q_m *_{\alpha^*} G$ é semiprimo.*

Prova: (*i*) Sejam I um ideal à esquerda não nulo de $Q_m *_{\alpha^*} G$ e x um elemento não nulo de I. Pelo Lema 3.3.2, existe um ideal à esquerda denso H de A tal que $0 \neq Hx \subseteq A *_\alpha G$. Como I é um ideal à esquerda de $Q_m *_{\alpha^*} G$, então $0 \neq Hx \subseteq (A *_\alpha G) \cap I$.

(ii) Seja I um ideal à esquerda de $Q_m *_{\alpha^*} G$ tal que $I^2 = 0$.
Como $(I \cap A *_\alpha G)^2 \subseteq I^2 = 0$ e $I \cap A *_\alpha G$ é um ideal à esquerda de $A *_\alpha G$ segue que $I \cap A *_\alpha G = 0$. Pelo item (i), $I = 0$, e assim, $Q_m *_{\alpha^*} G$ é semiprimo. □

Vejamos agora como estão relacionados os ideais singulares à esquerda de $A *_\alpha G$ e de $Q_m *_{\alpha^*} G$.

Proposição 3.3.4. *Para os ideais singulares à esquerda de $A *_\alpha G$ e de $Q_m *_{\alpha^*} G$ temos a seguinte relação*

$$\mathcal{Z}(A *_\alpha G) = \mathcal{Z}(Q_m *_{\alpha^*} G) \cap A *_\alpha G.$$

Prova: Sejam $x \in \mathcal{Z}(A *_\alpha G)$ e J um ideal à esquerda não nulo de $Q_m *_{\alpha^*} G$. Então, pelo Corolário 3.3.3, item (i), temos que $J \cap A *_\alpha G$ é um ideal à esquerda não nulo de $A *_\alpha G$. Uma vez que $x \in \mathcal{Z}(A *_\alpha G)$, existe $0 \neq y \in J \cap A *_\alpha G$ tal que $yx = 0$. Logo, $x \in \mathcal{Z}(Q_m *_{\alpha^*} G)$ e segue que $\mathcal{Z}(A *_\alpha G) \subseteq \mathcal{Z}(Q_m *_{\alpha^*} G) \cap A *_\alpha G$.

Para a inclusão contrária, sejam $x \in \mathcal{Z}(Q_m *_{\alpha^*} G) \cap A *_\alpha G$ e I um ideal à esquerda não nulo de $A *_\alpha G$. Assim, $(Q_m *_{\alpha^*} G)I$ é um ideal à esquerda não nulo de $Q_m *_{\alpha^*} G$, e portanto, existe $0 \neq z \in (Q_m *_{\alpha^*} G)I$ tal que $zx = 0$.

Como $z \in (Q_m *_{\alpha^*} G)I$, existem $a_1, \cdots, a_n \in Q_m *_{\alpha^*} G$ e $y_1, \cdots, y_n \in I$ tais que $z = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \neq 0$. Pelo Lema 3.3.2, existe um ideal à esquerda denso E de A tal que $Ea_i \subseteq A *_\alpha G$, para todo $i = 1, \cdots, n$. Daí,

$$E(a_i y_i) = (Ea_i) y_i \subseteq (A *_\alpha G) y_i \subseteq I$$

para todo $i = 1, \cdots, n$. Logo, $Ez \subseteq I$, e pelo Lema 3.3.2 $Ez \neq 0$. Desta forma, existe $b \in E$ tal que $0 \neq bz \in I$ e $(bz)x = b(zx) = 0$, isto é, $x \in \mathcal{Z}(A *_\alpha G)$. □

Corolário 3.3.5. *$A *_\alpha G$ é não singular à esquerda se e somente se $Q_m *_{\alpha^*} G$ é não singular à esquerda.*

Prova: Segue diretamente do Corolário 3.3.3, item (i), e da Proposição 3.3.4. □

Proposição 3.3.6. *As seguintes afirmações são válidas:*

(i) *Se H é um ideal à esquerda essencial de $A *_\alpha G$, então $(Q_m *_{\alpha^*} G)H$ é um ideal à esquerda essencial de $Q_m *_{\alpha^*} G$;*

(*ii*) *Se F é um ideal à esquerda essencial de $Q_m *_{\alpha^*} G$, então $F \cap (A *_\alpha G)$ é um ideal à esquerda essencial de $A *_\alpha G$.*

Prova: (i) Sejam H um ideal à esquerda essencial de $A *_\alpha G$ e I um ideal à esquerda não nulo de $Q_m *_{\alpha^*} G$. Então, pelo Corolário 3.3.3, item (i), $I \cap A *_\alpha G$ é um ideal à esquerda não nulo de $A *_\alpha G$. Como H é um ideal à esquerda essencial de $A *_\alpha G$ e $Q_m *_{\alpha^*} G$ tem unidade, temos

$$0 \neq H \cap (I \cap A *_\alpha G) \subseteq H \cap I \subseteq (Q_m *_{\alpha^*} G)H \cap I$$

Portanto, $(Q_m *_{\alpha^*} G)H$ é um ideal à esquerda essencial de $Q_m *_{\alpha^*} G$.

(ii) Sejam F um ideal à esquerda essencial de $Q_m *_{\alpha^*} G$ e J um ideal à esquerda não nulo de $A *_\alpha G$. Então, $F \cap (Q_m *_{\alpha^*} G)J \neq 0$.

Consideremos um elemento não nulo y de $F \cap (Q_m *_{\alpha^*} G)J$. Assim, $y = \sum_{i=1}^n a_i c_i$, onde $a_i \in Q_m *_{\alpha^*} G$ e $c_i \in J$, para todo $i = 1, \cdots, n$. Pelo Lema 3.3.2, existe um ideal à esquerda denso E de A tal que $Ea_i \subseteq A *_\alpha G$, para todo $i = 1, \cdots, n$. Como J é um ideal à esquerda não nulo de $A *_\alpha G$ e $y \in F$ obtemos

$$Ey = \sum_{i=1}^{n} (Ea_i)c_i \subseteq (F \cap (A *_\alpha G)) \cap J.$$

Além disso, pelo Lema 3.3.2, como $y \neq 0$ segue que $Ey \neq 0$.

Portanto, $F \cap (A *_\alpha G)$ é um ideal à esquerda essencial de $A *_\alpha G$. □

O resultado correspondente, substituindo o conceito de essencial por uniforme também é verdadeiro.

Proposição 3.3.7. *As seguintes afirmações se verificam:*

(*i*) *Seja U um ideal à esquerda não nulo de $A *_\alpha G$. Se U é uniforme, então $(Q_m *_{\alpha^*} G)U$ é um ideal à esquerda uniforme de $Q_m *_{\alpha^*} G$.*

(*ii*) *Seja V um ideal à esquerda não nulo de $Q_m *_{\alpha^*} G$. Se V é uniforme, então $V \cap (A *_\alpha G)$ é um ideal à esquerda uniforme de $A *_\alpha G$.*

Prova: (i) Observemos que como $Q_m *_{\alpha^*} G$ tem unidade e $U \neq 0$, então $(Q_m *_{\alpha^*} G)U \neq 0$. Suponhamos que $(Q_m *_{\alpha^*} G)U$ não seja uniforme. Assim, existem elementos não nulos $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i y_i$, $y = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} v_j x_j \in (Q_m *_{\alpha^*} G)U$ tais que $(Q_m *_{\alpha^*} G)x \cap (Q_m *_{\alpha^*} G)y = 0$, onde $u_i, v_j \in Q_m *_{\alpha^*} G$ e $y_i, x_j \in U$ são todos não nulos.

Como x e y são não nulos temos, do Corolário 3.3.3 (i), que $(Q_m*_{\alpha^*}G)x \cap A *_\alpha G$ e $(Q_m*_{\alpha^*}G)y \cap A *_\alpha G$ são ideais à esquerda não nulos de $A *_\alpha G$. Porém,

$$((Q_m*_{\alpha^*}G)x \cap A *_\alpha G) \cap ((Q_m*_{\alpha^*}G)y \cap A *_\alpha G) = 0.$$

Mas como cada u_i e cada v_j são elementos não nulos de $Q_m*_{\alpha^*}G$, segue do Lema 3.3.2, que existe um ideal à esquerda denso E de A tal que $Eu_i \subseteq A *_\alpha G$ e $Ev_j \subseteq A *_\alpha G$, para todo $i = 1, \cdots, n$ e todo $j = 1, \cdots, m$. Mais ainda, como U é um ideal à esquerda de $A *_\alpha G$, segue que $Ex, Ey \subseteq U$. Além disso, como x e y são ambos não nulos e E é um ideal à esquerda denso de A, temos que $Ex \neq 0$ e $Ey \neq 0$. Desta forma, existem $a, b \in E$ tais que $ax \neq 0$ e $by \neq 0$. Por hipótese U é uniforme, e consequentemente, $(A *_\alpha G(xa)) \cap (A *_\alpha G(yb)) \neq 0$. Mas isso contradiz o fato de que

$$(A *_\alpha G(ax)) \cap (A *_\alpha G(by)) \subseteq ((Q_m*_{\alpha^*}G)x \cap A *_\alpha G) \cap ((Q_m*_{\alpha^*}G)y \cap A *_\alpha G) = 0.$$

Portanto, $(Q_m*_{\alpha^*}G)U$ é uniforme.

(ii) Seja V um ideal à esquerda uniforme de $Q_m*_{\alpha^*}G$. Assim, V é não nulo e segue do Corolário 3.3.3 (i), que $V \cap (A *_\alpha G)$ é um ideal à esquerda não nulo de $A *_\alpha G$. Suponhamos que existam dois ideais à esquerda não nulos I e J de $A *_\alpha G$ contidos em V tais que $I \cap J = 0$. Assim, $(Q_m*_{\alpha^*}G)I$ e $(Q_m*_{\alpha^*}G)J$ são ideais à esquerda não nulos de $Q_m*_{\alpha^*}G$ contidos em V. Aplicando o Lema 3.3.2 podemos ver que $(Q_m*_{\alpha^*}G)I \cap (Q_m*_{\alpha^*}G)J = 0$, o que contradiz o fato de que V é uniforme. □

Corolário 3.3.8. *As dimensões uniforme à esquerda de $A *_\alpha G$ e de $Q_m*_{\alpha^*}G$ coincidem.*

Prova: Segue imediatamente da Proposição 3.3.6 e da Proposição 3.3.7. No caso em que a dimensão uniforme for infinita, utilize também a Proposição 1.1.14. □

Corolário 3.3.9. *Suponhamos que A é um anel semiprimo e que $A*_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Então, $Q_m*_{\alpha^*}G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda.*

Prova: Suponhamos que $A *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Pelo Teorema 1.1.22, $A *_\alpha G$ é semiprimo, $\mathcal{Z}(A *_\alpha G) = 0$ e $udim A *_\alpha G < \infty$. Assim, utilizando o Corolário 3.3.3 (ii), Corolário 3.3.5 e o Corolário 3.3.8 obtemos que $Q_m *_{\alpha^*} G$ é semiprimo, $\mathcal{Z}(Q_m *_{\alpha^*} G) = 0$ e $udim Q_m *_{\alpha^*} G < \infty$. Novamente, pelo Teorema 1.1.22, $Q_m *_{\alpha^*} G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. □

Já vimos no Corolário 3.3.3, que se $A *_\alpha G$ é semiprimo então $Q_m *_{\alpha^*} G$ é semiprimo. Veremos a seguir que a recíproca é verdadeira no caso em que A é um anel semiprimo de Goldie à esquerda.

Proposição 3.3.10. *Seja A um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Então, $A *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda se e somente se $Q_m *_{\alpha^*} G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda.*

Prova: Se $A *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda então do Corolário 3.3.9 segue que $Q_m *_{\alpha^*} G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda.

Reciprocamente, suponhamos que $Q_m *_{\alpha^*} G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Assim, por definição, $udim(Q_m *_{\alpha^*} G) < \infty$ e $Q_m *_{\alpha^*} G$ satisfaz a condição de cadeia ascendente sobre ideais anuladores à esquerda. Pelo Corolário 3.3.8, $udim A *_\alpha G < \infty$. Além disso, como $A *_\alpha G$ é um subanel de $Q_m *_{\alpha^*} G$, também satisfaz a condição de cadeia ascendente sobre ideais anuladores à esquerda. Portanto, $A *_\alpha G$ é um anel de Goldie à esquerda.

Resta verificar que $A *_\alpha G$ é semiprimo. Para tanto, vamos mostrar que os anéis de quocientes clássicos à esquerda de $A *_\alpha G$ e de $Q_m *_{\alpha^*} G$ são iguais, isto é, $Q_{cl}(A *_\alpha G) = Q_{cl}(Q_m *_{\alpha^*} G)$.

Primeiramente, observe que $\mathcal{C}_A \subseteq \mathcal{C}_{A *_\alpha G}$. Além disso, $\mathcal{C}_{A *_\alpha G} = \mathcal{C}_{Q_m *_{\alpha^*} G} \cap A *_\alpha G$. De fato, sejam $x \in \mathcal{C}_{A *_\alpha G}$ e $y \in Q_m *_{\alpha^*} G$ tais que $yx = 0$. Pelo Lema 3.3.2, existe um ideal à esquerda denso H de A tal que $Hy \subseteq A *_\alpha G$. Então, $0 = H(yx) = (Hy)x$. Porém, $x \in \mathcal{C}_{A *_\alpha G}$, o que implica que $Hy = 0$. Logo, pelo Lema 3.3.2, segue que $y = 0$. Isto mostra que x é um elemento regular à esquerda de $Q_m *_{\alpha^*} G$. Portanto, x também é regular à direita, pois $Q_m *_{\alpha^*} G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. A inclusão contrária é imediata.

Consideremos $y \in Q_{cl}(Q *_{\alpha^*} G)$. Então, existe $x \in \mathcal{C}_{Q_m *_{\alpha^*} G}$ tal que $xy \in Q_m *_{\alpha^*} G$. Pelo Lema 3.3.2 existe um ideal à esquerda denso H de A tal que $Hx \subseteq A *_\alpha G$. Mais ainda, existe um ideal à esquerda denso F de A tal que $F(xy) \subseteq A *_\alpha G$. Tome $L = H \cap F$, que é um ideal à esquerda denso de A.
Daí, $Lx \subseteq A *_\alpha G$ e $L(xy) \subseteq A *_\alpha G$. Sendo A um anel semiprimo de Goldie à esquerda, pelo Teorema 1.1.22 item (v), existe $e \in \mathcal{C}_A \cap L \subseteq \mathcal{C}_{Q_m *_{\alpha^*} G} \cap L$. Logo,

$ex \in \mathcal{C}_{Q_m *_{\alpha^*} G} \cap A *_\alpha G = \mathcal{C}_{A *_\alpha G}$ é tal que $(ex)y \in A *_\alpha G$. Portanto, $y \in Q_{cl}(A *_\alpha G)$, isto é, $Q_{cl}(Q_m *_{\alpha^*} G) \subseteq Q_{cl}(A *_\alpha G)$. A inclusão contrária é trivial, uma vez que $\mathcal{C}_{A *_\alpha G} \subseteq \mathcal{C}_{Q_m *_{\alpha^*} G}$.

Como $Q_m *_{\alpha^*} G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda, temos pelo Teorema 1.1.22 que $Q_{cl}(A *_\alpha G) = Q_{cl}(Q_m *_{\alpha^*} G)$ é semisimples artiniano. Novamente pelo Teorema 1.1.22, $A *_\alpha G$ é semiprimo. □

Teorema 3.3.11. *Se A é um anel semiprimo e $A *_\alpha G$ é semiprimo de Goldie à esquerda, então A é um anel semiprimo de Goldie à esquerda.*

Prova: Primeiramente observemos que como $A *_\alpha G$ é semiprimo de Goldie à esquerda, A visto como subanel de $A *_\alpha G$ satisfaz a condição de cadeia ascendente sobre os ideais anuladores à esquerda. Assim, pelo [23, Lemma 2.3.4], $\mathcal{Z}(A) = 0$. Como A é não singular à esquerda, pelo [18, Theorem 13.36], $Q_m(A)$ é um anel von Neumann regular.

Pelo Corolário 3.3.9 temos que $Q_m *_{\alpha^*} G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Desta forma, $Q_m(A)$ satisfaz condição de cadeia ascendente sobre os ideais anuladores à esquerda. É fácil verificar que como $Q_m(A)$ é um anel von Neumann regular e satisfaz a condição de cadeia ascendente sobre os anuladores à esquerda, então $Q_m(A)$ é noetheriano à esquerda, donde segue que $Q_m(A)$ é semisimples (consulte os exercícios 3.44 e 13.26 de [18]).

Logo, por [18, Theorem 13.40], A é semiprimo de Goldie à esquerda. □

Lembremos que se A é um anel semiprimo de Goldie à esquerda então $Q_m(A)$ é semisimples, isto é, $Q_m(A)$ é um produto direto de anéis indecomponíveis. Além disso, como para todo $g \in G$ cada ideal S_g^* tem unidade, a ação parcial torcida α^* admite uma ação envolvente $\beta = (B, \{\beta_g\}_{g \in G}, \{u_{g,h}\}_{(g,h) \in G \times G})$.

Observação 3.3.12. *Se α é uma ação parcial de tipo finito, então α^* também é uma ação parcial de tipo finito, pela Proposição 3.3.1. Desta forma, pela Proposição 2.1.2, B também possui unidade. Logo, $Q_m *_{\alpha^*} G$ e $B *_\beta G$ são anéis Morita equivalentes.*

O teorema abaixo é uma generalização do Teorema 1.4.5, originalmente demonstrado por J. Osterburg ([25]) para o caso de ações globais.

Teorema 3.3.13. *Sejam A um anel semiprimo, G um grupo finito tal que que A é livre de $|G|$-torção. Então, A é um anel de Goldie à esquerda se e somente se $A *_\alpha G$ é semiprimo de Goldie à esquerda.*

Prova: Suponhamos que A é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Então Q_m também é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Como por hipótese α é de tipo finito, pelo Corolário 2.1.15, B é um anel semiprimo de Goldie à esquerda.

Além disso, como A é livre de $|G|$-torção, utilizando a Proposição 1.2.2, segue que Q_m é livre de $|G|$-torção. Assim, a Proposição 2.1.16 garante que B é livre de $|G|$-torção. Portanto, pelo Teorema 1.4.5, $B *_\beta G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Uma vez que $B *_\beta G$ e $Q_m *_{\alpha^*} G$ são Morita equivalentes, temos que $Q_m *_{\alpha^*} G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda.

Logo, pela Proposição 3.3.10, $A *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda.

A recíproca segue do Teorema 3.3.11. □

Resultado semelhante também pode ser obtido quando G é um grupo policíclico infinito e α é uma ação parcial torcida de tipo finito.

Teorema 3.3.14. *Sejam A um anel semiprimo e α é uma ação parcial torcida de tipo finito de um grupo policíclico infinito G sobre A. Então A é um anel de Goldie à esquerda se e somente se $A *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda.*

Prova: Suponhamos que A é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Assim Q_m também é semiprimo de Goldie à esquerda. Como α^* é uma ação parcial torcida de tipo finito, temos do Corolário 2.1.15, que B é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Assim, pela Proposição 1.4.6, $B *_\beta G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Como $B *_\beta G$ e $Q_m *_{\alpha^*} G$ são Morita equivalentes, temos que $Q_m *_{\alpha^*} G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Pela Proposição 3.3.10, $A *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda.

Agora se $A *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie segue do Teorema 3.3.11 que A é semiprimo de Goldie à esquerda. □

Para finalizar este capítulo, vamos generalizar o Teorema 1.4.8 para o caso parcial. Lembremos que quando G é um grupo policíclico por finito podemos escolher uma cadeia de subgrupos $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$ tal que somente o último grupo quociente G_n/G_{n-1} é finito e os demais são cíclicos infinitos.

Teorema 3.3.15. *Sejam A um anel semiprimo e α uma ação parcial torcida de tipo finito de um grupo policíclico por finito G sobre A. Suponhamos que A um anel livre de $|G_n : G_{n-1}|$-torção. Então, A é um anel de Goldie à esquerda se e somente se $A *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda.*

Prova: Suponhamos que A é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Por hipótese, A é livre de $|G_n : G_{n-1}|$-torção. Assim, Q_m é livre de $|G_n : G_{n-1}|$-torção pela Proposição 1.2.2 item (i). Daí, de acordo com a Proposição 2.1.16, B é livre de $|G_n : G_{n-1}|$-torção. Mais ainda, como Q_m é um anel semiprimo de Goldie à esquerda, temos do Corolário 2.1.15 que B é um anel semiprimo de Goldie à esquerda. Pelo Teorema 1.4.5, obtemos que $B *_\beta G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda, e assim, $Q_m *_{\alpha^*} G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda via a equivalência de Morita.

Portanto, pela Proposição 3.3.10, $A *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à esquerda.

A recíproca segue novamente do Teorema 3.3.11. $\square$

Capítulo 4

Ações Parciais Torcidas X-Externas

Os resultados que serão demonstrados aqui são generalizações dos apresentados por S. Montgomery em [24] que foram obtidos para o caso de ações globais de grupos. Além disso, estes resultados estendem os que foram obtidos no Capítulo 2.

4.1 Definição e Resultados

Neste capítulo $\alpha = (\{S_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}, \{w_{g,h}\}_{(g,h)\in G\times G})$ denotará uma ação parcial torcida de um grupo G sobre um anel semiprimo A, onde cada ideal S_g de A tem unidade 1_g. Cabe ressaltar que o fato de que todos os ideais S_g de A sejam gerados por idempotentes centrais não implica que α possua uma ação envolvente. Vamos generalizar alguns resultados apresentados no Capítulo 2, no sentido de que ao invés de trabalharmos com uma ação parcial torcida com envolvente, iremos trabalhar com um tipo especial de ação parcial torcida que será definida a seguir.

Além disso, consideraremos $\alpha^* = (\{S_g^*\}_{g\in G}, \{\alpha_g{}^*\}_{g\in G}, \{w_{g,h}^*\}_{(g,h)\in G\times G})$ a ação parcial torcida de G sobre o anel de quocientes de Martindale à esquerda de A, denotado simplesmente por Q. Note que 1_g é ainda a unidade de S_g^*, para todo $g \in G$.

A definição de automorfismo X-externo é devido a V. K. Kharchenko. Com esta idéia, vamos definir ação parcial torcida X-externa e provar alguns resultados no caso em que a ação parcial torcida é deste tipo. Vamos transferir propriedades de A para o produto cruzado parcial $A *_\alpha G$.

No que segue, para cada $g \in G$, definimos

$$\phi_{\alpha_g} = \{x \in S_g^*; xw_{g,h}^{*-1}\alpha_g(a1_{g^{-1}}) = axw_{g,h}^{*-1}, \text{ para todo } a \in A, h \in G\}$$

Lema 4.1.1. *Seja x um elemento não nulo de ϕ_{α_g}. Então,*

$$xw_{g,h}^{*-1}\alpha_g^*(q1_{g^{-1}}) = qxw_{g,h}^{*-1},$$

para todo $q \in Q$ e todo $h \in G$.

Prova: Seja $q \in Q$. Então, existe um ideal essencial J de A tal que $Jq \subseteq A$. Assim, para todo $y \in J$ e todo $h \in G$,

$$xw_{g,h}^{*-1}\alpha_g(yq1_{g^{-1}}) = (yq)xw_{g,h}^{*-1}.$$

Considere $J' = J \cap S_g$, que é um ideal essencial de S_g. Em particular, para todo $z \in J'$, $xw_{g,h}^{*-1}\alpha_g(zq1_{g^{-1}}) = zqxw_{g,h}^{*-1}$. Além disso,

$$xw_{g,h}^{*-1}\alpha_g(zq1_{g^{-1}}) = xw_{g,h}^{*-1}\alpha_g(z1_{g^{-1}})\alpha_g^*(q1_{g^{-1}}) = zxw_{g,h}^{*-1}\alpha_g^*(q1_{g^{-1}})$$

Logo $zxw_{g,h}^{*-1}\alpha_g^*(q1_{g^{-1}}) = zqxw_{g,h}^{*-1}$, para todo $z \in J'$. Daí,

$$z(xw_{g,h}^{*-1}\alpha_g^*(q1_{g^{-1}}) - qxw_{g,h}^{*-1}) = 0, \text{ para todo } z \in J'.$$

Como J' é um ideal essencial de S_g e $xw_{g,h}^{*-1}\alpha_g^*(q1_{g^{-1}}) - qxw_{g,h}^{*-1} \in S_g^*$, segue que $xw_{g,h}^{*-1}\alpha_g^*(q1_{g^{-1}}) = qxw_{g,h}^{*-1}$, para todo $q \in Q$ e todo $h \in G$. □

Lema 4.1.2. *O conjunto ϕ_{α_g} definido acima é igual ao conjunto*

$$\phi'_{\alpha_g} = \{x \in S_g^*;\ x\alpha_g(a1_{g^{-1}}) = ax, \textit{ para todo } a \in A\}.$$

Prova: Claramente $\phi_{\alpha_g} \subseteq \phi'_{\alpha_g}$, basta tomarmos $h = 1_G$.

Para a inclusão contrária, seja $x \in \phi'_{\alpha_g}$.

Observemos que $Q = S_g^*S_{gh}^* \oplus ann_Q(S_g^*S_{gh}^*)$, para todo $g, h \in G$. Assim, para $x \in Q$ podemos escrever $x = y + t$, onde $y \in S_g^*S_{gh}^*$ e $t \in ann_Q(S_g^*S_{gh}^*)$. Uma vez que $w_{g,h}^*$ é um elemento invertível de $S_g^*S_{gh}^*$, temos que $xw_{g,h}^* = yw_{g,h}^*$, isto é, $x1_g1_{gh} = y1_g1_{gh} = y$.

Note que $x\alpha_g(a1_{g^{-1}})1_g1_{gh} = ax1_g1_{gh}$, para todo $a \in A$. Como 1_g1_{gh} é um idempotente central de Q, $x1_g1_{gh}\alpha_g(a1_{g^{-1}}) = ax1_g1_{gh}$, ou seja, $xw_{g,h}^*w_{g,h}^{*-1}\alpha_g(a1_{g^{-1}}) = axw_{g,h}^*w_{g,h}^{*-1}$. Portanto, $xw_{g,h}^* \in \phi_{\alpha_g}$, para todo $h \in G$. Em particular, tomando $h = 1_G$, $x1_g = x \in \phi_{\alpha_g}$. Logo $\phi'_{\alpha_g} \subseteq \phi_{\alpha_g}$. □

Como consequência do resultado acima poderemos usar ϕ_{α_g} e ϕ'_{α_g} de acordo com o que for mais conveniente.

Definição 4.1.3. *Para cada $g \in G$, dizemos que o isomorfismo α_g é X-interno se $\phi_{\alpha_g} \neq 0$ e é X-externo se $\phi_{\alpha_g} = 0$.*

Desta forma, definimos o seguinte subconjunto do grupo G:

$$G_{inn} = \{g \in G;\ \alpha_g \text{ é X-interno}\}$$

Proposição 4.1.4. *Se $g \in G_{inn}$ então $g^{-1} \in G_{inn}$, isto é, G_{inn} é fechado com relação aos inversos.*

Prova: Seja $g \in G_{inn}$, ou seja, α_g é X-interno, ou ainda, existe $0 \neq x \in S_g^*$ tal que $x\alpha_g(a1_{g^{-1}}) = ax$, para todo $a \in A$. Mostremos que $g^{-1} \in G_{inn}$, isto é, existe $0 \neq y \in S_{g^{-1}}^*$ tal que $y\alpha_{g^{-1}}(a1_g) = ay$, para todo $a \in A$.

Note que $ann_{S_g}(x)$ é um ideal bilateral de S_g, pois S_g é um anel semiprimo. Considere $H = C \oplus ann_{S_g}(x)$, onde C é o complementar de $ann_{S_g}(x)$ em S_g. Observe que H é um ideal essencial de S_g. Como S_g tem unidade, C também é um ideal de A. Considere agora $J = C \oplus ann_{S_g}(x) \oplus A(1_A - 1_g)$, que é um ideal essencial de A. Definimos a aplicação $f : J \to A$ dada por $f(c + t + z) = c$, para todo $c \in C$, $t \in ann_{S_g}(x)$ e $z \in A(1_A - 1_g)$. É fácil verificar que f é um homomorfismo de A-bimódulos. Logo, existe um elemento do centróide estendido de A e tal que $(c + t + z)e = ce = c$, para todo $c \in C$, $t \in ann_{S_g}(x)$ e $z \in A(1_A - 1_g)$. Além disso $e^2 = e$. Observe que $ex = xe = x$. De fato, seja $h = c + t \in H$, onde $c \in C$, $t \in ann_{S_g}(x)$. Note que, $hxe = (c + t)xe = cex = cx = (c + t)x = hx$, para todo $h \in H$, ou seja, $H(xe - x) = 0$. Como H é essencial em S_g, segue que $xe = x$, pois $xe, x \in S_g^*$.

Uma vez que $x\alpha_g(a1_{g^{-1}}) = ax$, para todo $a \in A$, é fácil ver que $S_{g^{-1}}x = xS_g$. Segue que Cx é um ideal bilateral de S_g, e consequentemente, é um ideal de A. De fato, sejam $a \in S_g$ e $c \in C$. Observe que $xa = bx$ com $b \in S_{g^{-1}}$. Como C é um ideal de A, $cxa = cbx \in Cx$. Por outro lado, $acx \in Cx$, pois C é um ideal de S_g.

A aplicação $f_1 : C \oplus ann_{S_g}(x) \to S_g$ dada por $f_1(c + t) = (c + t)x = cx$ define x em S_g^*.

Além disso, x é regular em C pois $c \notin ann_{S_g}(x)$, isto é, $cx = 0$ implica que $c = 0$.

Tome $Cx \oplus L$, onde L é o complementar de Cx em S_g. Este é um ideal essencial de S_g e defina $f_2 : Cx \oplus L \to S_g$, dada por $f_2(cx + l) = c$, para todo $cx + l \in Cx \oplus L$. Como x é regular em C, f_2 está bem definida. Logo, $y = [Cx \oplus L, f_2]$ é um elemento de S_g^*e que é o inverso de x em S_g^*e. Ou seja, $xy = yx = 1_ge$.

Desta forma, $e\alpha_g(a1_{g^{-1}}) = yax$, ou ainda, $e\alpha_g(a1_{g^{-1}})y = ya1_ge$, para todo $a \in A$. Aplicando $\alpha^*_{g^{-1}}$ em ambos os lados da igualdade, temos

$$\alpha^*_{g^{-1}}(e\alpha_g(a1_{g^{-1}})y) = \alpha^*_{g^{-1}}(ya1_ge),$$

para todo $a \in A$. Como e é um idempotente central de Q, para todo $a \in A$, temos que

$$w^*_{g^{-1},g}aw^{*-1}_{g^{-1},g}\alpha^*_{g^{-1}}(ye) = \alpha^*_{g^{-1}}(ye)\alpha^*_{g^{-1}}(a1_g),$$

ou ainda,

$$aw^{*-1}_{g^{-1},g}\alpha^*_{g^{-1}}(ye) = w^{*-1}_{g^{-1},g}\alpha^*_{g^{-1}}(ye)\alpha^*_{g^{-1}}(a1_g), \text{ para todo } a \in A.$$

Tomae $u = w^{*-1}_{g^{-1},g}\alpha^*_{g^{-1}}(ye) \in S^*_{g^{-1}}$, que é não nulo e verifica $u\alpha_{g^{-1}}(a1_g) = au$, para todo $a \in A$. A prova está completa. □

Apesar do G_{inn} ser fechado para os inversos, este conjunto não é necessariamente um subgrupo de G. De fato, sejam A um anel semiprimo e $g, h \in G_{inn}$. Assim, existem $0 \neq x \in S^*_g$ e $0 \neq y \in S^*_h$ tais que

$$x\alpha_g(a1_{g^{-1}}) = ax \text{ e } y\alpha_h(a1_{h^{-1}}) = ay,$$

para todo $a \in A$. Observe que, para todo $a \in A$

$$\begin{aligned} a(xy) &= (ax)y \\ &= (x\alpha_g(a1_{g^{-1}}))y \\ &= x(\alpha_g(a1_{g^{-1}})y) \\ &= xy\alpha_h(\alpha_g(a1_{g^{-1}})1_{h^{-1}}) \\ &= xyw_{h,g}\alpha_{hg}(a1_{g^{-1}h^{-1}})w^{-1}_{h,g}. \end{aligned}$$

Logo, $xyw_{h,g}\alpha_{hg}(a1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h^{-1}}) = axyw_{h,g}$. Mas não temos a garantia de que $xyw_{h,g}$ seja um elemento não nulo de $S^*_gS^*_hS^*_{hg} \subseteq S^*_{hg}$.

Um exemplo que ilustra esse fato, para o caso de ações globais, pode se encontrado na página 42 de [24].

Definição 4.1.5. *Uma ação parcial torcida é dita X-externa se $\phi_{\alpha_g} = 0$, para todo $g \in G$, $g \neq 1_G$.*

Observe que esta definição coincide com a que foi dada em [24] (página 42) no caso de ações globais.

Definição 4.1.6 Seja $\mathbb{Z}$ o anel dos números inteiros e Q_s o anel de quocientes de Martindale simétrico de A, onde A é um anel semiprimo. Denotemos por L o subanel do produto tensorial $Q_s \bigotimes\limits_{\mathbb{Z}} {Q_s}^{op}$ gerado por elementos do tipo $a \otimes 1$, $1 \otimes a^{op}$, onde os anéis Q_s e ${Q_s}^{op}$ são anti-isomorfos mas possuem os mesmos grupos aditivos, enquanto a e a^{op} percorrem A e A^{op} respectivamente.

Definimos as seguintes operações: para quaisquer $\sigma = \sum\limits_i r_i \otimes {a_i}^{op} \in L$, $r \in Q$ e $g \in G$, temos:

$$\alpha_g^*(\sigma) = \alpha_g^*(\sum_i r_i \otimes {a_i}^{op}) = \sum_i \alpha_g^*(r_i 1_{g^{-1}}) \otimes a_i^{op}.$$

$$r \cdot \alpha_g^*(\sigma) = \sum_i a_i r \alpha_g^*(r_i 1_{g^{-1}}).$$

É fácil verificar que estas operações estão bem definidas.

E além disso, se S é um subconjunto de L, então

$$S^{\perp \alpha_g^*} = \{r \in S_g^*;\, r \cdot \alpha_g^*(s) = 0, \text{ para todo } s \in S\}.$$

Se $r \in Q$, então denotemos por $r^{\perp \alpha_g^*}$ o conjunto de todos os elementos $\sigma \in L$ tais que $r \cdot \alpha_g^*(\sigma) = 0$.

Lema 4.1.6. *Sejam I um ideal à direita de L, α_g^*, $\alpha_{g_1}^*, \cdots, \alpha_{g_n}^*$ isomorfismos onde $\alpha_g^* : S_{g^{-1}}^* \longrightarrow S_g^*$, $g \in G$. Então para quaisquer $r_1, \cdots, r_n \in Q$, vale a seguinte igualdade:*

$$I^{\perp \alpha_g^*} + \sum_{i=1}^n r_i \phi_{\alpha_{gg_i^{-1}}} = (\bigcap_{i=1}^n {r_i}^{\perp \alpha_{g_i}^*} \cap I)^{\perp \alpha_g^*}.$$

Prova: Claramente, $I^{\perp \alpha_g^*} \subseteq (\cap {r_i}^{\perp \alpha_{g_i}^*} \cap I)^{\perp \alpha_g^*}$, pois ${r_i}^{\perp \alpha_{g_i}^*} \cap I \subseteq I$.

Agora, consideremos $r_i x$ onde $x \in \phi_{\alpha_{gg_i^{-1}}}$. Assim,

$$x w^{*-1}_{gg_i^{-1},h} \alpha_{gg_i^{-1}}(a 1_{g_i g^{-1}}) = a x w^{*-1}_{gg_i^{-1},h}, \tag{4.1.1}$$

para todo $h \in G$, $a \in A$.

Seja $\sigma = \sum_k s_k \otimes {a_k}^{op} \in L$ tal que $\sigma \in {r_i}^{\perp\alpha^*_{g_i}}$. Daí, $r_i \cdot \alpha^*_{g_i}(\sigma) = 0$, ou seja, $\sum_k a_k r_i \alpha^*_{g_i}(s_k 1_{g_i^{-1}}) = 0$. Utilizando a Equação 1.5.2, obtemos

$$\begin{aligned} r_i x \cdot \alpha^*_g(\sigma) &= r_i x \cdot (\sum_k \alpha^*_g(s_k 1_{g^{-1}}) \otimes {a_k}^{op}) \\ &= \sum_k a_k r_i x \alpha^*_g(s_k 1_{g^{-1}}) \\ &= \sum_k a_k r_i x \alpha^*_g(\alpha^{*-1}_{g_i}(\alpha^*_{g_i}(s_k 1_{g_i^{-1}}))1_{g^{-1}}) \\ &= \sum_k a_k r_i x \alpha^*_g(w^{*-1}_{g_i^{-1},g_i} \alpha^*_{g_i^{-1}}(\alpha^*_{g_i}(s_k 1_{g_i^{-1}}))w^*_{g_i^{-1},g_i} 1_{g^{-1}}). \end{aligned}$$

Uma vez que $\alpha^*_g(1_{g^{-1}} w^*_{g_i^{-1},g_i}) = w^*_{g,g_i^{-1}} w^*_{gg_i^{-1},g_i}$, temos

$$r_i x \cdot \alpha^*_g(\sigma) = \sum_k a_k r_i x w^{*-1}_{gg_i^{-1},g_i} w^{*-1}_{g,g_i^{-1}} \alpha^*_g(\alpha^*_{g_i^{-1}}(\alpha^*_{g_i}(s_k 1_{g_i^{-1}}))1_{g^{-1}}) w^*_{g,g_i^{-1}} w^*_{gg_i^{-1},g_i}.$$

Utilizando o item (iv) da Definição 1.5.2, obtemos

$$\begin{aligned} r_i x \cdot \alpha^*_g(\sigma) &= \sum_k a_k r_i x w^{*-1}_{gg_i^{-1},g_i} w^{*-1}_{g,g_i^{-1}} w^*_{g,g_i^{-1}} \alpha^*_{gg_i^{-1}}(\alpha^*_{g_i}(s_k 1_{g_i^{-1}}) 1_{g_i g^{-1}}) w^{*-1}_{g,g_i^{-1}} w^*_{g,g_i^{-1}} w^*_{gg_i^{-1},g_i} \\ &= \sum_k a_k r_i x w^{*-1}_{gg_i^{-1},g_i} \alpha^*_{gg_i^{-1}}(\alpha^*_{g_i}(s_k 1_{g_i^{-1}}) 1_{g_i g^{-1}}) w^*_{gg_i^{-1},g_i}. \end{aligned}$$

Pela Equação (4.1.1) segue que

$$\begin{aligned} r_i x \cdot \alpha^*_g(\sigma) &= \sum_k a_k r_i \alpha^*_{g_i}(s_k 1_{g_i^{-1}}) x w^{*-1}_{gg_i^{-1},g_i} w^*_{gg_i^{-1},g_i} \\ &= \sum_k a_k r_i \alpha^*_{g_i}(s_k 1_{g_i^{-1}}) x = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $r_i x \cdot \alpha^*_g(\sigma) = 0$, para todo $\sigma \in {r_i}^{\perp\alpha^*_{g_i}}$ e para todo $i = 1, \cdots, n$. Assim $r_i x \in (\bigcap_{i=1}^n {r_i}^{\perp\alpha^*_{g_i}})^{\perp\alpha^*_g}$. Como $\bigcap_{i=1}^n {r_i}^{\perp\alpha^*_{g_i}} \cap I \subseteq \bigcap_{i=1}^n {r_i}^{\perp\alpha^*_{g_i}}$, então $r_i x \in (\bigcap_{i=1}^n {r_i}^{\perp\alpha^*_{g_i}} \cap I)^{\perp{\alpha_g}^*}$. Logo,

$$I^{\perp\alpha^*_g} + \sum_{i=1}^n r_i \phi_{\alpha_{gg_i^{-1}}} \subseteq (\bigcap_{i=1}^n {r_i}^{\perp\alpha^*_{g_i}} \cap I)^{\perp\alpha^*_g}.$$

Para a inclusão contrária, façamos indução sobre n. Para $n = 1$, devemos mostrar que

$$(r_1{}^{\perp\alpha^*_{g_1}} \cap I)^{\perp\alpha^*_g} \subseteq I^{\perp\alpha^*_g} + r_1\phi_{\alpha_{gg_1^{-1}}}.$$

Seja $v \in (r_1{}^{\perp\alpha^*_{g_1}} \cap I)^{\perp\alpha^*_g}$. Note que, se $c \in r_1{}^{\perp\alpha^*_{g_1}} \cap I$ então $v \cdot \alpha^*_g(c) = 0$.

Considere $B = r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(I)$. É fácil ver que valem as seguintes igualdades, para todo $a \in A$ e $b \in I$

$$a(r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b)) = r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b(1 \otimes a^{op})), \tag{4.1.2}$$

$$(r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b))a = r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b(\alpha^{*-1}_{g_1}(a1_{g_1}) \otimes 1^{op})). \tag{4.1.3}$$

Uma vez que I é um ideal à direita de L, B é um A-subbimódulo de Q.

Definimos a seguinte aplicação, $\varphi : B \to Q$ dada por:

$$\varphi(r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b)) = v \cdot \alpha^*_g(b),$$

para todo $b \in I$. Observe que φ está bem definida, pois se $r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b) = 0$ então $b \in r_1{}^{\perp\alpha^*_{g_1}} \cap I$. Assim, $v \cdot \alpha^*_g(b) = 0$ já que $v \in (r_1{}^{\perp\alpha^*_{g_1}} \cap I)^{\perp\alpha_g{}^*}$.

Além disso, φ é homomorfismo de A-módulos à esquerda. De fato, sejam $a \in A$, $b \in I$. Então pela Equação (4.1.2),

$$\begin{aligned}
\varphi(a(r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b))) &= \varphi(r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b(1 \otimes a^{op})) \\
&= v \cdot \alpha^*_g(b(1 \otimes a^{op})) \\
&= av \cdot \alpha^*_g(b) \\
&= a\varphi(r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b)).
\end{aligned}$$

E ainda, pela Equação (4.1.3), segue que

$$\begin{aligned}
\varphi((r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b))a) &= \varphi((r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b(\alpha^{*-1}_{g_1}(a1_{g_1}) \otimes 1^{op}))) \\
&= v \cdot \alpha^*_g(b(\alpha^{*-1}_{g_1}(a1_{g_1}) \otimes 1^{op})) \\
&= (v \cdot \alpha^*_g(b))\alpha^*_g(\alpha^{*-1}_{g_1}(a1_{g_1})1_{g^{-1}}) \\
&= \varphi(r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b))\alpha^*_g(w^{*-1}_{g_1{}^{-1},g_1}\alpha^*_{g_1^{-1}}(a1_{g_1})w^*_{g_1{}^{-1},g_1}1_{g^{-1}}).
\end{aligned}$$

Como $\alpha_g(1_{g^{-1}}w^*_{g_1{}^{-1},g_1}) = w^*_{g,g_1{}^{-1}}w^*_{gg_1{}^{-1},g_1}$, obtemos que

$$\varphi((r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b))a) = \varphi(r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b))w^{*-1}_{gg_1{}^{-1},g_1}\alpha^*_{gg_1^{-1}}(a1_{g_1g^{-1}})w^*_{gg_1{}^{-1},g_1}. \tag{4.1.4}$$

Podemos estender a aplicação φ para $B \oplus ann_Q B$ tal que $\varphi(ann_Q B) = 0$. Assim, podemos encontrar um elemento $s \in Q$ tal que $ann_Q(B)s = 0$ e $\varphi(b) = bs$, para todo $b \in B$.

Note que, para todo $a \in A$ e $b \in I$, $(r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b))a \in B$. Pela Equação 4.1.4, segue que

$$\begin{aligned}
(r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b))asw^{*-1}_{gg_1^{-1},g_1} &= \varphi((r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b))a)w^{*-1}_{gg_1^{-1},g_1} \\
&= \varphi(r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b))w^{*-1}_{gg_1^{-1},g_1}\alpha^*_{gg_1^{-1}}(a1_{g_1g^{-1}}) \\
&= r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b)sw^{*-1}_{gg_1^{-1},g_1}\alpha^*_{gg_1^{-1}}(a1_{g_1g^{-1}}).
\end{aligned}$$

Além disso, $(B \oplus ann_Q B)(asw^{*-1}_{gg_1^{-1},g_1} - sw^{*-1}_{gg_1^{-1},g_1}\alpha^*_{gg_1^{-1}}(a1_{g_1g^{-1}})) = 0$. Logo,

$$asw^{*-1}_{gg_1^{-1},g_1} = sw^{*-1}_{gg_1^{-1},g_1}\alpha^*_{gg_1^{-1}}(a1_{g_1g^{-1}}),$$

para todo $a \in A$. Disto segue que $s1_g1_{gg_1^{-1}} \in \phi_{\alpha_{gg_1^{-1}}}$. Além disso, pelo Lema 4.1.1 esta igualdade também é válida para todo $q \in Q$.

Observe que se $b = \sum_k b_k \otimes t_k^{op} \in I$, então

$$\begin{aligned}
(r_1s) \cdot \alpha^*_g(b) &= \sum_k t_k r_1 s\alpha^*_g(b_k 1_{g^{-1}}) \\
&= \sum_k t_k r_1 s\alpha^*_g(\alpha^{*-1}_{g_1}(\alpha^*_{g_1}(b_k 1_{g_1^{-1}}))1_{g^{-1}}) \\
&= \sum_k t_k r_1 sw^{*-1}_{gg_1^{-1},g_1}\alpha^*_{gg_1^{-1}}(\alpha^*_{g_1}(b_k 1_{g_1^{-1}})1_{g_1g^{-1}})w^*_{gg_1^{-1},g_1} \\
&= \sum_k t_k sw^{*-1}_{gg_1^{-1},g_1}\alpha^*_{gg_1^{-1}}(r_1\alpha^*_{g_1}(b_k 1_{g_1^{-1}})1_{g_1g^{-1}})w^*_{gg_1^{-1},g_1} \\
&= \sum_k t_k r_1\alpha^*_{g_1}(b_k 1_{g_1^{-1}})s1_g1_{gg_1^{-1}} \\
&= (r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b))s1_g1_{gg_1^{-1}}.
\end{aligned}$$

Com isto, obtemos

$$\begin{aligned}
1_g1_{gg_1^{-1}}(v - r_1s) \cdot \alpha^*_g(b) &= 1_g1_{gg_1^{-1}}v \cdot \alpha^*_g(b) - (1_g1_{gg_1^{-1}}r_1s \cdot \alpha^*_g(b)) \\
&= 1_g1_{gg_1^{-1}}v \cdot \alpha^*_g(b) - (r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b))s1_g1_{gg_1^{-1}} \\
&= 1_g1_{gg_1^{-1}}(v \cdot \alpha^*_g(b)) - \varphi(r_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(b))1_g1_{gg_1^{-1}} = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $1_g 1_{gg_1^{-1}} v - r_1 s 1_g 1_{gg_1^{-1}} \in I^{\perp\alpha_g^*}$, donde implica que $v \in r_1\phi_{\alpha_{gg_1^{-1}}} + I^{\perp\alpha_g^*}$.

Portanto, $({r_1}^{\perp\alpha_{g_1}^*} \cap I)^{\perp\alpha_g^*} \subseteq I^{\perp\alpha_g^*} + r_1\phi_{\alpha_{gg_1^{-1}}}$, como queríamos provar.

Suponhamos que $I^{\perp\alpha_g^*} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} r_i\phi_{\alpha_{gg_i^{-1}}} = (\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} {r_i}^{\perp\alpha_{g_i}^*} \cap I)^{\perp\alpha_g^*} := {I_1}^{\perp\alpha_g^*}$. Como I_1 é um ideal à direita de L, então pelo caso $n = 1$

$$I_1^{\perp\alpha_g{}^*} + r_n\phi_{\alpha_{gg_n^{-1}}} = ({r_n}^{\perp\alpha_{g_n}^*} \cap I_1)^{\perp\alpha_g^*} = (\bigcap_{i=1}^{n} {r_i}^{\perp\alpha_{g_i}^*} \cap I)^{\perp\alpha_g^*}.$$

Logo, $I^{\perp\alpha_g^*} + \sum\limits_{i=1}^{n} r_i\phi_{\alpha_{gg_i^{-1}}} = (\bigcap\limits_{i=1}^{n} {r_i}^{\perp\alpha_{g_i}^*} \cap I)^{\perp\alpha_g^*}$. $\square$

Proposição 4.1.7. *Sejam $a_1, \cdots, a_n$ elementos de Q tais que $a_1 \notin \sum\limits_{i=2}^{n} a_i\phi_{\alpha_{g_1 g_i{}^{-1}}}$. Então existem elementos de A, $v_1, \cdots, v_k$ e $t_1, \cdots, t_k$ tais que*

$$\sum_j v_j a_1 \alpha_{g_1}(t_j 1_{g_1{}^{-1}}) \neq 0$$

e

$$\sum_j v_j a_i \alpha_{g_i}(t_j 1_{g_1{}^{-1}}) = 0$$

para todo $i = 2, \cdots, n$.

Prova: Tome $I = L$, $g = g_1$ e $a_i = r_i$ no lema anterior. Assim,

$$L^{\perp\alpha_{g_1}^*} + \sum_{i=2}^{n} a_i\phi_{\alpha_{g_1 g_i^{-1}}} = (\bigcap_{i=2}^{n} {a_i}^{\perp\alpha_{g_i}^*} \cap L)^{\perp\alpha_{g_1}^*}.$$

Como $\bigcap\limits_{i=2}^{n} {a_i}^{\perp\alpha_{g_i}^*} \subseteq L$ temos que

$$L^{\perp\alpha_{g_1}^*} + \sum_{i=2}^{n} a_i\phi_{\alpha_{g_1 g_i^{-1}}} = (\bigcap_{i=2}^{n} {a_i}^{\perp\alpha_{g_i}^*})^{\perp\alpha_{g_1}^*}.$$

Observemos que $L^{\perp\alpha_{g_1}^*} = 0$. De fato, sabemos que

$$L^{\perp\alpha_g^*} = \{q \in S_g^*; q \cdot \alpha_g^*(\beta) = 0 \text{ para todo } \beta \in L\}.$$

Seja $q \in L^{\perp\alpha_g^*}$ e considere $\beta = 1 \otimes {1_g}^{op} \in L$. Desta forma, $q \cdot \alpha_g^*(\beta) = 0$, isto é, $1_g q {\alpha_g}^*(1 1_{g^{-1}}) = 0$. Portanto, $q = q1_g = 0$, pois $q \in S_g^*$.

Consequentemente, $\sum\limits_{i=2}^{n} a_i\phi_{\alpha_{g_1 g_i^{-1}}} = (\bigcap\limits_{i=2}^{n} {a_i}^{\perp\alpha_{g_i}^*})^{\perp\alpha_{g_1}^*}$. Por hipótese $a_1 \notin \sum\limits_{i=2}^{n} a_i\phi_{\alpha_{g_1 g_i{}^{-1}}}$ o que implica que $a_1 \notin (\bigcap\limits_{i=2}^{n} {a_i}^{\perp\alpha_{g_i}^*})^{\perp\alpha_{g_1}^*}$. Desta forma, existe $\gamma \in \bigcap\limits_{i=2}^{n} {a_i}^{\perp\alpha_{g_i}^*}$ tal que

$a_1 \cdot \alpha^*_{g_1}(\gamma) \neq 0$. Escrevendo $\gamma = \sum_j t_j \otimes {v_j}^{op}$, obtemos que $\sum_j v_j a_1 \alpha_{g_1}(t_j 1_{g_1^{-1}}) \neq 0$. Além disso, $\gamma \in {a_i}^{\perp \alpha^*_{g_i}}$, para todo $i = 2, \cdots, n$. Portanto, $\sum_j v_j a_i \alpha_{g_i}(t_j 1_{g_1^{-1}}) = 0$, para todo $i = 2, \cdots, n$. □

Relembramos que dado um elemento $x = \sum_{g\in G} a_g \delta_g \in A *_\alpha G$, o suporte de x é o conjunto:

$$sup(x) = \{g \in G; a_g \neq 0\}.$$

Lema 4.1.8. *Sejam I um ideal não nulo de $A *_\alpha G$, onde A é um anel semiprimo e $x = \sum_{g\in G} a_g \delta_g$ um elemento de I de menor comprimento tal que $a_{1_G} \neq 0$. Então $sup(x) \subseteq G_{inn}$. Em particular, se α é uma ação parcial torcida X-externa então todo ideal não nulo de $A *_\alpha G$ intercepta A não trivialmente.*

Prova: No que segue denotaremos indistintamente por $1 = 1_G$ o elemento neutro do grupo G.

Seja $\{g_1, g_2, \cdots, g_n\} = sup(x)$, $\mid sup(x) \mid = n$.

Basta mostrar que para todo $g \in sup(x)$, $0 \neq a_g \in a_1 \phi_{\alpha_{g^{-1}}}$, pois disto segue que $\phi_{\alpha_{g^{-1}}} \neq 0$, o que implica que $g \in G_{inn}$ uma vez que G_{inn} é fechado para os inversos. Suponha que existe $g \in sup(x)$ tal que $a_g \notin a_1 \phi_{\alpha_{g^{-1}}}$.

Pela proposição anterior, existem $v_j, t_j \in A$ tais que

$$\sum_j v_j a_g t_j \neq 0 \text{ e } \sum_j v_j a_1 \alpha_{g^{-1}}(t_j 1_g) = 0.$$

Como $x \in I$ então $x w^{-1}_{g^{-1},g} \delta_1 \in I$, ou seja, $\sum_{g\in G} a_g \delta_g w^{-1}_{g^{-1},g} \delta_1 = \sum_{g\in G} a_g w^{-1}_{g,g^{-1}} \delta_g \in I$.

Considere $u = \sum_j v_j (\sum_{g\in G} a_g w^{-1}_{g,g^{-1}} \delta_g) 1_{g^{-1}} \delta_{g^{-1}} t_j \in I$.

Logo,

$$\begin{aligned} u &= \sum_j v_j a_1 \delta_{g^{-1}} t_j + \sum_j v_j a_g \delta_1 t_j + \sum_{h\neq 1,g} \cdots \\ &= \sum_j v_j a_1 \alpha_{g^{-1}}(t_j 1_g) \delta_{g^{-1}} + \sum_j v_j a_g t_j \delta_1 + \sum_{h \neq 1,g} \cdots \end{aligned}$$

Como o coeficiente de $\delta_{g^{-1}}$ é zero e o coeficiente de δ_1 é não nulo, u é um elemento não nulo de I e $\mid sup(u) \mid < n$, o que é um absurdo. Portanto, $sup(x) \subseteq G_{inn}$.

Em particular, se α é uma ação parcial torcida X-externa então $G_{inn} = \{1_G\}$. Daí, $0 \neq a_1 = a_1\delta_1 \in I \cap A *_\alpha G$. $\square$

Teorema 4.1.9. *Sejam A um anel semiprimo e α uma ação parcial torcida X-externa de um grupo G sobre A. Então $A *_\alpha G$ é semiprimo.*

Prova: Seja I um ideal de $A *_\alpha G$ tal que $I^2 = 0$. Note que, $(I \cap A)^2 \subseteq I^2 = 0$. Pelo Lema 4.1.8 segue que $I = 0$, e portanto, $A *_\alpha G$ é semiprimo. $\square$

Corolário 4.1.10. *Sejam A um anel semiprimo e α uma ação parcial torcida X-externa de um grupo G sobre A.*

(i) Se A é J-semisimples, então $A *_\alpha G$ é J-semisimples.

(ii) Se A é semisimples e G é um grupo finito, então $A *_\alpha G$ é semisimples.

Prova: (i) Seja $J(A *_\alpha G)$ o radical de Jacobson de $A *_\alpha G$. Note que, $J(A *_\alpha G) \cap A$ é um ideal quasi-regular de A. Daí, $J(A *_\alpha G) \cap A \subseteq J(A) = 0$. Pelo Lema 4.1.8, $J(A *_\alpha G) = 0$, ou seja, $A *_\alpha G$ é J-semisimples.
(ii) Por hipótese como G é finito e A é artiniano então $A *_\alpha G$ é um A-módulo artiniano. Logo, $A *_\alpha G$ é artiniano como $A *_\alpha G$-módulo. Pelo item (i) segue que $A *_\alpha G$ é semisimples. $\square$

Observação 4.1.11. *Suponhamos que α seja uma ação parcial torcida X-externa de um grupo finito G sobre um anel semiprimo A. Se A for primitivo à esquerda então A é primo, e consequentemente, α é uma ação global. Utilizando [24, Corollary 3.18], temos que $A *_\alpha G$ é primitivo à esquerda.*

Referências Bibliográficas

[1] S. A. Amitsur, *On rings of quotientes*, Symposia Mathematica **8** (1972), 149-164.

[2] D. Bagio, J. Lazzarin and A. Paques, *Crossed products by twisted partial actions: separability, semisimplicity and Frobenius properties*, Comm. Algebra **38** (2010), 496-508.

[3] K. I. Beidar, W. S. Martindale and A. V. Mikhalev, *Rings with generalized identities*, Marcel Dekker Inc., New York, 1996.

[4] L. Bemm, *Ações parciais de grupos sobre anéis semiprimos*, tese de doutorado, PPG-Mat, UFRGS, 2011.

[5] W. Cortes, M. Ferrero and H. Marubayashi, *Partial skew polynomial rings and Goldie rings*, Communications in Algebra **36** (2008), 4284-4295.

[6] N. J. Divinsky, *Rings and radicals*, Univ. Toronto Press, 1965.

[7] M. Dokuchaev and R. Exel, *Associativity of crossed products by parcial actions, enveloping actions and partial representations*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 1931-1952.

[8] M. Dokuchaev, R. Exel and J. J. Simón, *Crossed product by twisted partial actions and graded algebras*, J. Algebra **320** (2008), 3278-3310.

[9] M. Dokuchaev, R. Exel and J. J. Simón, *Globalization of twisted partial actions*, Trans. AMS **362** (2010), 4137-4160.

[10] M. Dokuchaev, M. Ferrero and A. Paques, *Partial actions and Galois theory*, J. Pure Appl. Algebra **208** (2007), 77-87.

[11] R. Exel, *Twisted partial actions: a classification of regular C*-algebraic bundles*, Proc. London Math. Soc. **74** (1997), 417-443.

[12] R. Exel, *Hecke algebras for protonormal subgroups*, J. Algebra **320** (2008), 1771-1813.

[13] M. Ferrero, *Closed submodules of centred bimodules over semiprime rings*, Nova J. Math., Game Theory an Alg. **5** (1996), 309-345.

[14] M. Ferrero, *Partial actions of groups on semiprime rings*, Group, Rings and Group Rings, Lect. Notes on Pure Appl. Math. **258** (2006), 155-162.

[15] M. Ferrero and J. Lazzarin, *Partial actions and partial skew group rings*, Jornal of Algebra **319** (2008), 5247-5264.

[16] K. R. Goodearl, *von Neumann regular Rings*, Krieger Pub. Co, 1991.

[17] G. Karpilovsky, *The Schur multiplier*, Oxford University Press, New York, 1987.

[18] T. Y. Lam, *Lectures on modules and rings*, Springer-Verlang, New York, 1999.

[19] T. Y. Lam, *A First course on noncommutative Rings*, Springer, New York/Berlin/Heidelberg, 2001.

[20] M. Lorenz and D. S. Passman, *Prime ideals in group algebra of polycyclic-by-finite groups*, Proc. London Math. Soc. **43** (1981), 520-543.

[21] W. S. Martindale, *Prime ring satisfying a generalized polynomial identity*, J. Algebra **12** (1969), 576-584.

[22] J. Matczuk, *S-Cohn-Jordan extensions*, Communications in Algebra, **35** (2007), 725-746.

[23] J.C. McConnel and J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian rings*, Pure Appl. Math., New York,1988.

[24] Susan Montgomery, *Fixed rings of finite automorphism groups of associative rings*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[25] J. Osterburg, *The coefficient ring of the skew group ring*, Czechoslovak Mathematical Journal, **29** (1979) 144-147.

[26] D. S. Passman, *Infinite crossed products*, Academic Press, New York, 1989.

[27] Y. Utumi, *On quotient rings*, Osaka Math. J. **8** (1956), 1-18.