UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Giovane Mansan

# PERSPECTIVAS HISTÓRICAS DE ALGUNS TÓPICOS DE GEOMETRIA:
avaliando alternativas de ensino

Porto Alegre
2012

Giovane Mansan

**PERSPECTIVAS HISTÓRICAS DE ALGUNS TÓPICOS DE GEOMETRIA:**
avaliando alternativas de ensino

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Lucia Helena Marques Carrasco

Porto Alegre

2012

Giovane Mansan

**PERSPECTIVAS HISTÓRICAS DE ALGUNS TÓPICOS DE GEOMETRIA:**
avaliando alternativas de ensino

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Lucia Helena Marques Carrasco

**COMISSÃO EXAMINADORA**

Prof.ª Dr.ª Elisabete Zardo Búrigo
Instituto de Matemática – UFRGS

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Instituto de Matemática – UFRGS

Prof.ª Dr.ª Lucia Helena Marques Carrasco – Orientadora
Instituto de Matemática – UFRGS

Porto Alegre, julho de 2012.

# AGRADECIMENTOS

Ao concluir este trabalho, quero agradecer a todos aqueles que estiveram envolvidos na sua produção, à minha orientadora Lucia Helena Marques Carrasco, que dedicou tempo e empenho no processo de orientação desse trabalho de conclusão, aos entrevistados, que permitiram o levantamento de experiências colaborando com a avaliação das propostas e à banca examinadora, pela leitura e apreciação desse trabalho, todos excelentes professores desta universidade e que muito me auxiliaram.

Agradeço aos meus pais que me apoiaram durante toda minha formação e ao meu irmão, Claiton Mansan, professor já formado na mesma área, que me ajudou com sua experiência na profissão. Agradeço a todos os professores da UFRGS regentes de disciplinas que eu tenha cursado, por participarem diretamente da minha formação.

Dedico este trabalho à minha família:

Meu pai José Afonso Mansan

Minha Mãe Nelly de Oliveira Mansan

Meu irmão Claiton Mansan

# RESUMO

Neste trabalho busca-se desenvolver processos de contextualização de alguns conteúdos de geometria trabalhados no ensino básico, fazendo uso da História da Geometria como conhecimento mediador e inspirador. Foram realizadas pesquisas a obras que tratam da História da Geometria, dando destaque ao Teorema de Pitágoras, ao Teorema de Euler, à teoria dos quadrados dentados e ao cálculo de áreas. Também é comentada uma experiência envolvendo cálculo de áreas que, durante o processo de desenvolvimento, apresenta aspectos dos quadrados dentados. A partir do estudo realizado, foram produzidas propostas de ensino direcionadas à definição de área, ao ensino do Teorema de Pitágoras, ao conceito de poliedro convexo e a uma possível interpretação da raiz quadrada do número dois. As propostas, após sua produção, foram submetidas à análise competente de dois professores com experiência no ensino da matemática e também na disciplina da História da Matemática na universidade, disciplina essa geralmente oferecida a cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática. Foram realizadas entrevistas a esses professores buscando resgatar e valorizar suas experiências no campo do ensino de geometria, assim como suas opiniões a respeito das propostas produzidas neste Trabalho de conclusão. A análise das entrevistas gerou interessantes aprimoramentos nas propostas, o que levou a interessantes considerações.



**Palavras-chave**: 1. História da Matemática. 2. História da Geometria. 3. Ensino da Geometria. 4. Teorema de Pitágoras. 5. Conceito de Área. 6. Conceito de Poliedro. 7. Teorema de Euler.

# ABSTRACT

This work seeks to develop processes of contextualization of some contents of geometry that are worked in basic education, making use of the History of Geometry as knowledge mediator and inspiring. Surveys were performed in works dealing with the History of Geometry, highlighting the Pythagorean Theorem, the Euler theorem, to the theory of dentate square and the calculation of areas. It is also commented an experiment involving calculation of the area which, during the development process, has aspects of square indentations. From the study, were produced proposals of teaching directed to area definition, the teaching of the Pythagorean Theorem, the concept of a convex polyhedron and a possible interpretation of the square root of two. The proposals, after its production, were submitted to two competent teachers with experience in teaching mathematics and also in the discipline of History of Mathematics at the University, discipline that usually offered in Licentiate courses and Bachelor of Mathematics. Interviews were conducted with these teachers seeking to rescue and to value their experience in teaching geometry, as well as his views on the proposals produced in this work of conclusion. The analysis of interviews generated interesting improvements in the proposals, which led to interesting considerations.

**Keywords**: 1.History of Mathematics. 2. History of Geometry. 3. Teaching Geometry. 4. PythagoreanTheorem. 5. Concept of Area. 6. Concept of Polyhedro. 7. Euler Theorem.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Sabemos que praticamente qualquer curso de Licenciatura em matemática dispõe de alguma disciplina de História da Matemática, então perguntamos: por que a história da matemática faz parte da formação do aluno de licenciatura? Claro que a resposta a essa pergunta envolve uma gama de fatores dos quais não daremos conta em sua totalidade, nem cabe aqui associar tal pergunta a uma única resposta, o que queremos fazer é adotá-la como uma pergunta inspiradora deste trabalho de conclusão. Então, propomos uma investigação de passagens históricas que envolvam situações que possam inspirar possíveis metodologias de ensino para a Geometria, associando, assim, a história dessa área da Matemática a propostas de prática de ensino. Também pretendemos analisar a teoria (ou alguma teoria) que trata dessa associação no processo de ensino-aprendizagem, aproveitando talvez a oportunidade para estudar alguns tópicos da geometria. Esperamos, com isso, responder a questão proposta, agora num nível mais objetivo: de que forma pode-se usar a história da geometria como ferramenta de contextualização e de construção de significado, durante o processo de ensino da geometria?

Não há apenas uma forma de utilizarmos a história no ensino, mas podemos escolher fazer o uso da história de determinado conteúdo como suporte para elaborar métodos de ensino do próprio conteúdo. Sabemos que história da geometria contempla o registro dos fatos passados relativos a descobertas científicas no campo da geometria. Esses registros incluem técnicas, demonstrações, figuras e informações utilizadas ou verificadas pelos antigos pensadores. Todo esse material fica definido como bem cultural no campo da história, sendo, muitas vezes, ultrapassado por avanços científicos mais modernos e deixado, consequentemente, no esquecimento. Ocorre que esses conteúdos, mesmo já superados, contêm, como comentamos, uma imensa gama de informações que acreditamos ser útil no campo pedagógico. Por isso, estamos propondo uma reconsideração histórica de parte dessa informação, desta vez não apenas como uma simples revisão, mas como uma procura de ideias, sugestões e técnicas matemáticas úteis no campo do ensino da geometria.

Nosso objetivo, portanto, é propor a história da geometria como campo útil e talvez necessário, em diversos aspectos, ao ensino da geometria, na perspectiva de somar algumas possibilidades de contextualização prática ao caráter dessa disciplina, às vezes encarado como sendo excessivamente teórico e abstrato. A metodologia de trabalho inclui pesquisas e leitura de livros, artigos e outros meios de disseminação da informação relativos à geometria, à história da geometria e à didática de ensino de geometria e inclui, também, entrevistas a dois professores com experiência no ensino da geometria.

No próximo capítulo pretendemos fazer uma primeira visita no campo da história da geometria, explorando algumas publicações que tratam da história da geometria. Desta vez, com uma atenção especial às possibilidades pedagógicas. Estaremos comentando ideias sugeridas, fazendo novas sugestões em função do que pode ter ocorrido no passado e comentando as possibilidades de impacto que isso acarretaria nas nossas considerações sobre o ensino da geometria. Mais especificamente, pensaremos nas possibilidades de estudo do Teorema de Pitágoras oferecidas pela história.

O terceiro capítulo será o ponto onde explicaremos nossos métodos de pesquisa, a entrevista, a análise dos materiais, os eventos esperados. Trataremos do porquê de realizarmos este trabalho. Também faremos uma breve análise dos métodos da entrevista com auxílio de estudos sobre História Oral.

No quarto capítulo esboçaremos nossas propostas de ensino, embasadas na pesquisa de alguns materiais de interesse. O capítulo divide-se em três seções que abordam o Teorema de Pitágoras, o Teorema de Euler e a raiz quadrada de dois vinculada ao conceito de área.

No quinto capítulo contaremos com nossos dados finais: as entrevistas já realizadas. Essas entrevistas foram realizadas por reconhecermos o valor do conhecimento e da experiência dos entrevistados no campo em estudo e, consequentemente, contarmos com suas contribuições na avaliação das propostas de ensino (capítulo 4), previamente disponibilizadas a eles. Assim, expandimos a discussão sobre as possibilidades de pesquisa no campo da história da geometria na perspectiva educacional, contando com excertos extraídos da transcrição das entrevistas.

Por último, faremos nossas considerações finais, que não devem ser encaradas exatamente em termos de uma concentração de resultados, pois esses se encontram no decorrer de todo o trabalho. As considerações são breves, mais provocativas do que finalizadoras de questões.

## 2 HISTÓRIA DA GEOMETRIA: uma perspectiva para o ensino

Podemos nos perguntar como construir um alicerce para a construção de uma casa ou de um edifício qualquer, de tal forma a garantir que ele seja retangular? Se dirigirmos essa pergunta a um professor de matemática ele dará sugestões de formas como isso pode ser feito, mas se quisermos saber “como realmente se faz” temos mais chance de obter resposta se perguntarmos, por exemplo, a um engenheiro civil. Só que o aluno poderá perguntar isso ao professor, isso é fato. Convêm-nos, quando isso ocorrer, fazer um bom proveito da curiosidade do aluno, com uma resposta interessante, porém nem sempre temos qualquer resposta quando a pergunta trata de problemas cotidianos dos quais não temos qualquer experiência. Veremos que a história da matemática pode se apresentar como fonte útil de informações que poderão dar suporte para respostas a essas interrogações. Assim como também pode servir de fonte inspiradora de um bom planejamento didático.

> Navegação quer dizer astronomia e astronomia quer dizer geometria: eis porque os antigos povos navegadores do Mediterrâneo tiveram que tornar-se óptimos geómetras. Mas mesmo a arquitetura quer dizer geometria; e, sobretudo, quer dizer geometria a agrimensura. (RADICE, 1985, p. 23).

Os textos “A matemática de Pitágoras a Newton” (RADICE, 1985) e “Aprendendo pelas raízes: alguns caminhos da matemática na história” (TENÓRIO, 1995) tratam da história da geometria, trazendo passagens que mostram como os povos antigos resolviam alguns de seus problemas geométricos.

> Sabemos com certeza que, já muitos e muitos séculos antes de Pitágoras, no Egipto, na Caldeia, eram dados exemplos de triângulos rectângulos sobre os quais se podia controlar praticamente a verdade da relação dita mais acima. Por exemplo, se os dois catetos têm de comprimento 3 e 4 (metros ou centímetros, etc., aquilo que se queira assumir como unidade de medida), verifica-se com a experiência que a hipotenusa é de comprimento 5 (utilizando a mesma unidade de medida). (RADICE, 1985, p.29).

Uma interessante situação que exemplifica a estratégia dos povos antigos trata da forma como os egípcios demarcavam terrenos retangulares. Ora, os terrenos tinham que ser divididos entre as pessoas em áreas uniformes. Como a área de retângulos é de fácil cálculo, por que não dispor os terrenos em áreas retangulares!? Então, vemos no texto como os egípcios antes do tempo de Pitágoras montavam um esquadro que permitia demarcar os ângulos retos das áreas que se desejava que fossem retangulares. Vemos então uma técnica primitiva de montar um triângulo retângulo de lados com medidas 3, 4 e 5, usando uma corda com 12 nós. (TENÓRIO, 1995).

Conforme mostrado abaixo, adaptado de Tenório (1995, p.13-14), podemos observar nessa disposição um total de 12 nós:

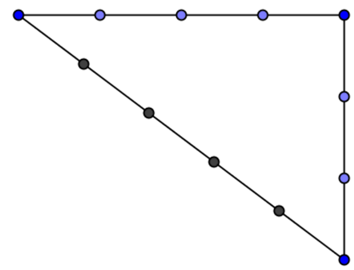


**Figura 1**: Triângulo retângulo com 12 nós posicionados

Esse tipo de problema inspira uma série de possíveis atividades em sala de aula. Podemos pensar em uma atividade prática de montar um esquadro com a turma para verificar com que precisão a sala é retangular, por exemplo. Ou então separar a turma em grupos e propor-lhes a construção de um esquadro com recursos mínimos (somente com a corda e sem ferramentas como régua, compasso, transferidor, etc.). Talvez pintar a corda em vez de dar nós. Vejamos como isso é possível: podemos observar nessa disposição de 12 nós, acima, certas regularidades: observe que podemos dispor essa mesma corda como um triângulo equilátero:

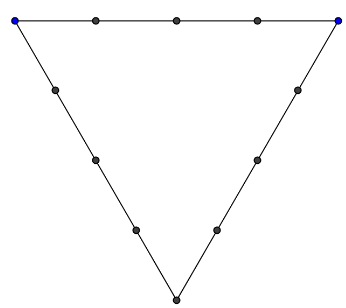


**Figura 2**: Triângulo equilátero com 12 nós posicionados

Também podemos partir desse triângulo equilátero e facilmente remontar o triângulo acima. Apenas trocando o nó que é esticado servindo de vértice, alternamos entre essas duas formas: triângulo retângulo e equilátero. Então, percebemos que é possível marcar os 12 nós em uma corda já disposta como um triângulo equilátero sem necessidade de uma régua com medições numéricas, desde que saibamos como “partir a corda ao meio”, ou seja, se tivermos uma corda com dois nós quaisquer, em que saibamos marcar um nó central entre esses dois nós (o ponto médio). Podemos, por exemplo, dobrar a corda ao meio encostando os dois nós e a dobra indica o ponto médio onde deve ser marcado o terceiro nó. Então, basta marcar um nó no ponto médio entre cada dois vértices e depois novamente marcar pontos médios entre todos os pontos ligados por segmentos até que tenhamos um triângulo equilátero com 12 nós como indicado acima. Agora, como poderíamos partir de uma corda qualquer, sem nós, não emendada, e sem régua para medições numéricas? Ora, podemos, por exemplo, procurar um jeito de montar um triângulo equilátero e, após, seguimos o procedimento acima. Então, podemos dobrar duas vezes a corda para dividi-la em três partes com a mesma medida, conforme a figura 3. Claro que isso já é algo um pouco mais complicado, pois fica mais difícil ter precisão:

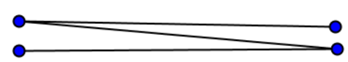


**Figura 3**: Corda dobrada em dois pontos

Então juntamos as pontas montando um triângulo com três lados iguais (equilátero). Mas antes podemos marcar os demais nós e montar diretamente o triângulo retângulo. Observe que essa estratégia de dobrar mais de uma vez sugere formas diferentes de se marcar os nós ou ainda possibilita a montagem de outros triângulos retângulos cujos lados formem os chamados ternos pitagóricos. Um terno pitágórico é um conjunto de três números inteiros *a,b* e *c* que satisfazem a equação: $a^2+b^2=c^2$ Aqui vemos a importância de se estudar os ternos pitagóricos. Seria importante que tivéssemos maior a fontes que aprofundem a história desses ternos. No momento é interessante notar que podemos gerá-los facilmente usando essa identidade:

$$(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$$

Basta escolher quaisquer dois números inteiros *a* e *b* e substituir na identidade acima e teremos um terno pitagórico. Conforme se comenta em fontes pouco específicas (sites públicos da internet como wikipédia, por exemplo), Euclides tira conclusões a respeito dos ternos pitagóricos, as quais não pretendemos abordar neste trabalho, mas convém considerar que essa expressão permite elaborar novas disposições de nós para compor um triângulo retângulo. Ora, partindo de um terno pitagórico qualquer, podemos imaginar a montagem do triângulo desse terno, com o espaçamento entre os nós igual à unidade de medida de comprimento.

Essas ideias juntamente com o método dos egípcios nos fornecem sugestões de como podemos abordar em sala de aula problemas semelhantes aos dos egípcios. Como montar um esquadro e porque pode ser importante estudar soluções nos inteiros para o Teorema de Pitágoras. Uma pergunta segue-se provavelmente nos pensamentos de alguns alunos e pode ser feita a nós professores: por que o triângulo de lados 3, 4 e 5 tem um ângulo reto entre os lados que medem 3 e 4? Então, nós professores perguntamos: se os egípcios sabiam disso antes de Pitágoras, será que há uma forma simples de provar que o caso específico do triângulo de lados medindo 3, 4 e 5 unidades de distância é retângulo?

No momento não temos registros de como eles sabiam disso; o texto de Tenório (1995) indica como evento empírico, isto é, não temos registros literários, mas não sabemos se isso não estava provado, ao menos para o caso desse triângulo específico. Existem muitas demonstrações para o Teorema de Pitágoras, mas geralmente são complicadas para turmas de alunos com pouca base algébrica: demonstrações que envolvam variáveis e letras, portanto poderíamos tentar uma estratégia de convencimento para o caso específico do triângulo de medidas 3, 4 e 5. Se tomarmos um triângulo com um ângulo de 90 graus entre dois de seus lados que tenham medidas 3 e 4 e se concluirmos que isso garante que o terceiro meça 5, está provado. Observe que tudo o que temos que provar é que o quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo de lados 3 e 4 perpendiculares é igual a 25. Isso se observa rapidamente ao dispor-se quatro desses triângulos convenientemente em uma grade quadriculada como na figura abaixo:

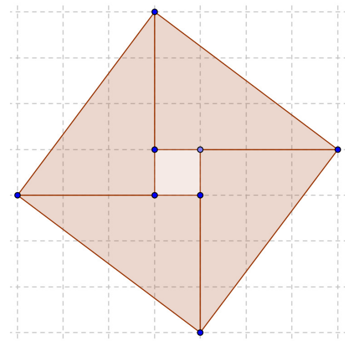
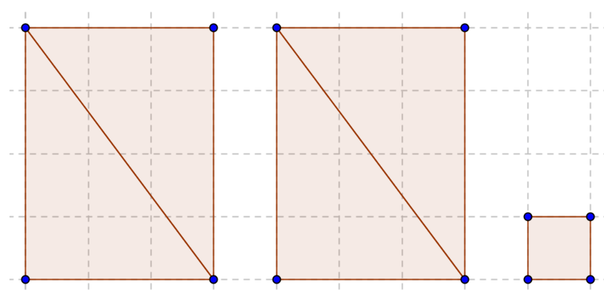


**Figura 4**: Quadrado contendo os triângulos retângulos

Ora, temos acima um quadrado formado pela hipotenusa de triângulos de lados 3 e 4 perpendiculares. Sua área deverá ser a soma das áreas de todos os quatro triângulos demarcados no interior na figura acima, somados ainda à área da unidade central. Para facilitar as coisas, podemos juntar os triângulos dois a dois formando retângulos, conforme ilustração abaixo, e calcular as áreas das figuras, contando os pequenos quadradinhos (unidades de área) de cada retângulo:



12 + 12 + 1 = 25

**Figura 5**: Ilustração com nova disposição de triângulos

Então, concluímos nosso resultado facilmente, observando que o caso específico do triângulo acima parece ser mais aceitável a um aluno sem conhecimentos de álgebra do que a demonstração do próprio Teorema de Pitágoras, válido para todo triângulo retângulo. A prova acima propõe varias conclusões apenas olhando os desenhos. Não estamos dizendo que é mais conveniente essa demonstração do que a demonstração do próprio Teorema de Pitágoras, estamos dizendo que as situações históricas nos inspiram a elaborar métodos de demonstração que envolvam caminhos diferentes dos sugeridos em livros didáticos, talvez menos eficientes, mas ainda assim diferentes, portanto bem sugestivo, além de nos abrir mais opções.

Se de fato os egípcios já conheciam exemplos de triângulos retângulos, conforme comentou Radice (1985), a possibilidade dos egípcios terem descoberto uma demonstração na antiguidade é algo razoável. Não podemos também desconsiderar que os egípcios costumavam dividir as terras em "[...] faixas retangulares aproximadamente equivalentes." (TENÓRIO, 1995, p.12) usando o esquadro, com a corda em disposição de 12 nós, conforme comentado anteriormente. Então vem uma consideração: se há registro de existirem esses esquadros no Egito antigo, é um pouco inacreditável que os egípcios apostem sua agricultura, suas terras, num método meramente "empírico", correndo o risco de serem imprecisos e causar prejuízos aos proprietários de terras. Por isso, achei conveniente refletir sobre a demonstração de tal método da corda.

O que nós observamos até aqui é a possibilidade de que exista uma simplicidade demonstrativa por trás de raciocínios matemáticos aparentemente abstratos. Bons exemplos dessa simplicidade podem estar escondidos nos registros históricos de povos muito antigos que tinham problemas e que precisavam resolvê-los. Mas, é fato que havia muita especulação matemática na época. Como, por exemplo, o que hoje chamamos de $\pi$ alguns judeus admitiam, segundo Radice (1985, p. 36), ser igual a 3, um tanto vago e impreciso nos dias de hoje. A história do número $\pi$ exemplifica casos de aplicação matemática pouco rigorosas. Então, cabe considerar: seria o fato de os egípcios considerarem triângulo de lados 3, 4 e 5 retângulo um mero golpe de sorte especulativa?

## 3 O CAMINHO DA PESQUISA

Para a realização deste trabalho optamos por realizar a pesquisa de materiais que contassem parte da história, de tal forma que durante as leituras fossem captados excertos interessantes, curiosos ou sugestivos. Como em qualquer outra pesquisa, não necessariamente se sabe o que será encontrado durante seu processo, o que pode nos levar ao inesperado, dependendo de muitos fatores externos. Essas pesquisas poderiam nos direcionar por vários caminhos, mas estávamos interessados em pesquisar em História da Geometria aquilo de que houvesse mais necessidade ou algo que fosse pouco explorado no ensino, fugindo, assim, das questões mais usuais, que estão excessivamente exploradas no campo do ensino da matemática. Mas, que fosse interessante e, de preferência, envolvente. Por isso, coube-nos a tarefa de escolher o tema e o caminho que se apresentasse mais conveniente, então escolhemos temas, obras, artigos e leituras que acreditamos se enquadrarem no nosso interesse de pesquisa.

Essas obras foram exploradas de modo a selecionar passagens que fossem sugestivas em termos pedagógicos. Então essas passagens foram associadas a propostas elaboradas dentro do tal âmbito sugestivo. O Teorema de Pitágoras foi escolhido dentre outros motivos pelo fato de possuir um grande número de demonstrações na história, o que auxiliou na escolha de uma que fosse aplicável a alguma atividade no ensino básico. O Teorema de Euler, por ser uma questão complicada e controvertida, mas trabalhada no ensino básico de forma tão resumida, até mesmo nos livros didáticos direcionados a este nível de ensino. A raiz de dois, por geralmente ser explorada mais no âmbito dos irracionais do que na questão da sua existência e dimensionalidade e, principalmente, por nos surpreender durante a leitura com uma excelente ideia impressa numa figura tão simples.

Uma vez selecionados os temas e os materiais de leitura, surgia aos poucos a ideia de propostas que não fossem exatamente planos de aula, mas métodos a considerar no ensino da matemática, fatos e figuras úteis e, claro, uma discussão pedagógica acerca de cada assunto. Há sempre a preocupação de que o que é escrito não seja compreendido como se deseja, já que nossos pensamentos não têm exatamente a forma de um texto, mas sim de ideias, de ações e de fatos.

Coube-nos, portanto, expressar as propostas preocupando-nos em rebater ambiguidades de interpretação e falta de detalhes, assim como, em lidar com descontinuidades ou ideias vagas; mesmo assim, sabemos que apesar de nossos esforços sempre fica “algo para trás”. Por isso, sentimos a necessidade de submeter estes escritos à análise crítica competente de professores com experiência na pesquisa e ensino dos campos tratados aqui.

As entrevistas foram parcialmente gravadas para evitar perdas de tempo com escritos à mão, que, às vezes, atrapalham as conversas, além de nos fazer esquecer as ideias de que queremos falar. Elas ocorreram como conversas sobre matemática, ensino e métodos, pensando sobre como melhorar as propostas, como acrescentar propostas novas ou ainda adaptações da proposta inicial que fiz às novas propostas. De fato as entrevistas oportunizaram a conversa com profissionais com experiência e conhecimentos relativos ao ensino da matemática e à história da matemática o que garantiu o alcance dos nossos objetivos. Eles trouxeram suas concepções, críticas, dúvidas e algumas contribuições importantes a serem agregadas às propostas pedagógicas.

No momento em que entrevistamos estas pessoas estamos evidentemente resgatando, direta ou indiretamente, seus métodos, sua opinião e seu passado profissional, o que nos remete diretamente à história oral. É claro que durante esse resgate estamos estudando não exatamente uma outra história, mas a própria história vivida desta vez de outra forma.

> A história oral, hoje, tem características especiais uma vez que não conta com fontes que se constituem *a priori*, ou seja com fontes já estabelecidas – textos já escritos, “documentos prontos” – mas, que se constituem no decorrer da pesquisa. Seus documentos são “arquivos orais provocados” que, entretanto, como os outros “lugares de memória” resgatam *a posteriori* o passado. (GARNICA, 2006, p.172).

Uma vez que estejamos diante de depoimentos de entrevistas que podem ou não ter comprovação documental extra (digo extra porque a entrevista em si vale como documento), cabe-nos assegurar a consideração e o respeito àquilo que é ouvido. Chegamos a um ponto em que só porque não podemos provar a veracidade das experiências relatadas não significa que sejam inválidas. Não necessariamente uma história não catalogada é uma história não vivida. Quando buscamos história oral estamos procurando exatamente aquilo que certas fontes documentadas não dão conta, a história não catalogada. É neste contexto que a história oral trabalha.

> Entendemos que o professor entrevistado e o “seu duplo” – inventado a partir de sua memória – são “dois indivíduos” – criador e criatura – um concreto e outro construído, um vivido e outro tornado texto. Entendemos que a criatura traz em “seu corpo” as marcas do vivido pelo criador, carrega consigo os silêncios repletos de significados – que só o criador pode conhecer e explicar – as lembranças transformadas ou equivocadas e, ainda, seus esquecimentos voluntários ou não. (GARNICA, 2006, p. 177).

O resgate da memória que buscamos consiste em revelar o vivenciado profissionalmente, algo que nem sempre pode se fazer apenas com falas e textos. Também não esperamos reviver as experiências dos entrevistados com exatidão no momento das entrevistas, esperamos ouvir uma versão sintetizada de lembranças do ocorrido.

> A função social da memória consiste na possibilidade de que as pessoas – valendo-se da linguagem oral ou escrita – podem narrar fatos, circunstâncias, contextos, cenários e objetos, não presentes – partes do passado – fazendo-os transitar além dos limites físicos do corpo de quem narra e depositar-se na memória do “outro”, ou em outros “lugares da memória”. Assim, a memória é nosso elo com o passado. Por meio dela procuramos recuperar experiências, pontos de vista e emoções de professores que, na concepção da historiografia tradicional, permaneceriam invisíveis e calados. (GARNICA, 2006, p. 173).

Em qualquer entrevista corremos o risco de que os entrevistados possam relatar fatos dos quais não participaram, locais onde não estiveram, pensamentos que nunca tiveram. Nada disso deve ser “levado ao pé da letra”. Durante qualquer entrevista as pessoas acabam conversando e se distraindo com partes da conversa que tenham chamado atenção, são desvios que podem ou não ter relevância nos nossos objetivos. Às vezes, tenta-se dizer algo, mas não se tem palavras, ocorre que dizemos algo que não exemplifica a situação levando-nos a possíveis erros de interpretação.

> Em Michael Pollak – que se apóia em Halbwachs – embora a memória seja aparentemente um fenômeno individual, é sobretudo um fenômeno coletivo e social, ou seja, um fenômeno que se constrói coletivamente e que se transforma e se modifica constantemente. (GARNICA, 2006, p.175).

Como qualquer construção coletiva, a memória sofre transformações no contexto de quem a descreve, isso vale tanto para quem fala como para quem o interpreta o que é falado, o que põe em cheque entrevistado e entrevistador.

> Pollak, dando-nos a certeza da presença dessa “memória herdada” – de acontecimentos, personagens e lugares não vividos ou conhecidos – da presença forte do imaginário dos narradores em suas narrações, ajuda-nos a entender, nos depoimentos, suas “distorções da realidade”, vendo-as não

> como “mentiras” mas como projeções ou transferências de outros acontecimentos, personagens ou lugares. (GARNICA, 2006, p. 176).

Não esperamos uma entrevista que aborde exatamente o que queremos, sem abrir espaço a outras ideias. É fato que pretendemos abordar propostas de ensino já elaboradas num âmbito avaliativo, mas essa abordagem pode envolver a elaboração de novas propostas, ampliações destas propostas ou de minhas próprias ideias a respeito de propostas sugeridas pelos entrevistados. Qualquer trabalho quando iniciado não necessariamente anda num caminho previsto, muito menos seria correto antecipar seu destino. Existe a questão da própria experiência em realizar este trabalho, que nos levou a novos ambientes, a novas interpretações e novas considerações a respeito das propostas. O desenvolvimento desse trabalho pode depender das entrevistas mais do que esperamos. Essa dependência, apesar do desconforto causado pela incerteza, é evidência da originalidade, do enriquecimento de possibilidades e de que há um nível do avanço o qual fazemos aos poucos durante sua produção. É nesse âmbito que ocorrem as entrevistas: envolvendo história oral, as questões as quais esperávamos, a princípio, dar ênfase, as questões as quais realmente é dado ênfase, as versões sintetizadas das lembranças dadas pelo entrevistado, as versões daquele que entrevista, e existe ainda aquela versão, que não comentamos aqui, daquele que lê a versão do entrevistador, esse será o desafio que estamos encaminhando ao leitor.

# 4 PROPOSTAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA COM ÊNFASE NA HISTÓRIA

O uso da história da matemática tem-se constituído um eficiente método no ensino da matemática. No âmbito deste trabalho, cabe destacar as alternativas para definir conceitos, envolvendo ficções, contos ou fatos históricos propriamente ditos. As passagens históricas podem mostrar-se interativas, curiosas, talvez dotadas de sentido, ou ainda, carregadas de significado ou com aspecto mais realista que o “conteúdo resultado”. De modo geral, apresentam-se com uma riqueza de informações acadêmicas. Mas, mais do que isso, assim como vários autores que tratam do uso da história da matemática no ensino:

> Acreditamos que atividades com perspectivas históricas humanizam o estudo da disciplina, mostrando a Matemática como ciência em construção e em constante interação com outras ciências, sendo, a nosso ver, uma fonte de conhecimentos favoráveis à aprendizagem. Reconhecemos, desta forma, que recorrer à história da Matemática potencializa o aluno a internalizar o novo material de forma significativa realizando a passagem do lógico ao psicológico. (NUNES, 2010, p.542).

O ensino da geometria, assim como o de tantos outros ramos da matemática, pode ser favorecido pela história das teorias (incluindo aqui as conjeturas explicitadas, os problemas resolvidos e os não resolvidos, o processo de formalização) que constituem esse campo de conhecimento. Há quem acredite que o maior problema do ensino da matemática no Brasil seja a construção dos conceitos matemáticos. Nessa perspectiva, a história da matemática coloca-se como forte aliado, pois elucida problemáticas que têm por solução a definição ou a redefinição dos conceitos. Além disso,

> [...], dar ênfase à situação problemática que deu origem a um conceito que se queira apresentar pode acentuar a lógica dos assuntos estudados, identificando também suas relações com outras disciplinas e com outros conceitos matemáticos que estejam relacionados de alguma forma ao assunto em estudo. A interpretação e a compreensão de um conceito matemático, a nosso ver, podem ser facilitadas quando, ao invés de o apresentarmos como verdade perfeita e acabada, destacarmos as ideias primeiras que originaram tais conceitos, com suas imperfeições e contínua construção. (NUNES, 2010, p. 543).

Pretendemos, neste capítulo, contemplar referências que abordam a história da geometria, elaborando propostas de ensino inspiradas nessas leituras. Tentaremos, assim, tratar de forma alternativa alguns conceitos da geometria, que, às vezes, mostram-se pouco ou insuficientemente explorados durante o ensino básico.

### 4.1 Uma proposta pedagógica inspirada na história do Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é considerado, por vários estudiosos, um dos teoremas mais importantes e atraentes da história antiga da matemática. Vários resultados importantes em geometria teórica, bem como na solução de problemas práticos relacionados a medidas, foram descobertos através dele ou, no mínimo, o utilizam. Certamente, ele é um dos mais famosos e úteis teoremas da geometria elementar. (GASPAR, 2003).

Conforme Gaspar (2003), o Teorema de Pitágoras, apesar de receber o nome de “Teorema de Pitágoras” foi desenvolvido em diversas civilizações como, por exemplo, na antiga babilônia, nas antigas civilizações indiana, chinesa e egípcia, com alguns casos de desenvolvimento, datando, certamente, antes mesmo da época de Pitágoras. Ao observar alguns casos da história do Teorema de Pitágoras, a autora destaca dois “aspectos de aplicação”: o computacional, que se refere ao quadrado algébrico das medidas dos lados, e o geométrico que se refere às áreas dos quadrados escritos sobre os lados do triângulo retângulo.

Ao ler vários textos históricos sobre o Teorema de Pitágoras parece predominar o aspecto geométrico, mas quando exploramos os métodos de abordagem no ensino básico, parece predominar o aspecto computacional, constatação apresentada também por Gaspar (2003):

> O estudo do Teorema de Pitágoras no ensino fundamental e médio em geral se restringe ao aspecto computacional. Minha experiência no trabalho com a geometria em cursos de formação de professores mostra que são raros aqueles que percebem ou já trabalharam em sala de aula com o aspecto geométrico do Teorema. Em geral, quando pergunto sobre qual é o Teorema de Pitágoras, a resposta é dada pela equação $a^2 + b^2 = c^2$. (p.270).

Tentaremos, portanto, desenvolver nesta seção uma abordagem de aspecto geométrico, tendo em vista uma demonstração histórica do teorema em estudo.

Quando falamos de Ensino Fundamental, estamos falando de crianças. Não podemos esperar sempre um bom rendimento para a aprendizagem em uma atividade demonstrativa formal para esse nível de ensino. Provavelmente não consigamos demonstrar o Teorema de Pitágoras a crianças de 12 anos de tal forma que a maioria entenda, mas também não consideramos justo ensiná-las a decorar e aplicar a fórmula sem saber do que se trata. Mas, podemos investir em atividades geométricas focadas nesse teorema, fornecendo um razoável apoio aos estudos de geometria e do próprio Teorema de Pitágoras nas séries mais avançadas que envolvam demonstrações. Existem muitas notas históricas que relatam a demonstração desse teorema, graças a essas notas temos registrado várias formas de demonstrá-lo. Podemos então escolher alguma e organizar interessantes atividades.

Faremos aqui a descrição de uma possível atividade, inspirada numa demonstração chinesa citada em Gaspar (2003). Segundo a autora, Liu Hui apresenta no capítulo IX associado ao nome *gougu* (triângulo retângulo) de Jiuzhang Suanshu - o mais antigo trabalho escrito específico de matemática na China que sobrevive até hoje – uma demonstração interessante do Teorema de Pitágoras.

> O diagrama original de Liu Hui está perdido desde o século XIII, mas a reconstrução [Figura 4.8] feita pelo matemático Gu Guanguang ajuda a entender como a demonstração foi feita:

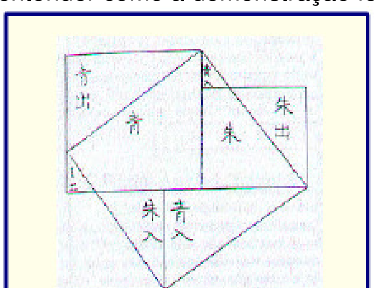



Figura 4.8

(GASPAR, 2003, p.296-297)

Abaixo um esquema que dá a ideia da demonstração do Teorema de Pitágoras:

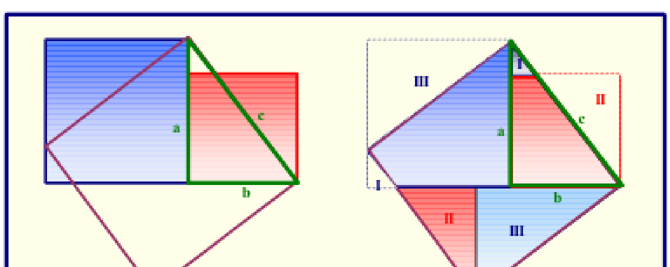



Figura 4.10

(GASPAR, 2003, p.298)

Observamos que o triângulo verde representa o triângulo retângulo de lados a, b e c. com os três quadrados escritos sobre seus lados, porém os três quadrados não se encontram na forma tradicional apresentada na maioria dos livros, que geralmente é assim:

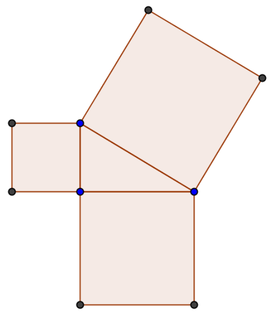


**Figura 6**: Representação geométrica do Teorema de Pitágoras

Apenas temos a hipotenusa e um dos catetos voltados "para dentro" do triângulo na Figura 4.10 de Gaspar (2003), de tal forma que, na construção à esquerda, o espaço que corresponde ao interior do quadrado que está sobre a hipotenusa (ou seja, cujo lado tem medida igual a da hipotenusa do triângulo) fica parcialmente preenchido por parte dos quadrados que estão sobre os catetos, já, na construção à direita, a parte restante do quadrado da hipotenusa é preenchido com o que sobrou dos quadrados sobre os catetos na figura da esquerda. O mais interessante é que a autora afirma:

> É possível provar, usando propriedades de paralelismo e de congruência de triângulos, que as figuras removidas se encaixam completamente nos locais indicados. É importante, em um curso de formação de professores levantar esta questão e discuti-la a partir do conhecimento que os alunos têm da geometria euclidiana. (GASPAR, 2003, p.298).

Também podemos observar, na Figura 4.10, para onde são deslocados os triângulos indicados por I, II e III. O mais interessante é que eles permanecem na "mesma posição" (não são girados), isto é são apenas transladados.

Baseados nessa demonstração chinesa, podemos propor a uma turma de Ensino Fundamental uma atividade de desenho e recorte, que pode ser feita com poucos materiais, dentre eles, régua e compasso. Essa atividade inclui instruções ordenadas (dadas pelo professor aos alunos), onde propomos as construções, com uso de régua e compasso, de um triângulo retângulo qualquer e de quadrados cujos lados têm medidas iguais aos lados do triângulo. Tais figuras devem ser construídas na mesma posição do triângulo chinês. Mesmo as construções dos ângulos retos poderão ser feitas por meio de instruções do professor. Trata-se, portanto, de uma atividade empírica, sem necessidade de uma formalização axiomática que a anteceda. Por isso, quase todo processo depende das instruções do professor, mesmo que os alunos não saibam do que se trata inicialmente, ficará de surpresa para o final. Caso o professor se sinta mais seguro poderá orientá-los a utilizar um esquadro, porém estará desperdiçando uma boa oportunidade de colocá-los em contato com o raciocínio estratégico das construções com régua e compasso resumindo as construções angulares retas à operacionalização de uma ferramenta pronta: o esquadro. Após a construção das figuras, pode-se sugerir aos alunos que recortem com a tesoura os triângulos I, II e III, desafiando-os a usarem as peças para completar os espaços vazios do quadrado que está sobre a hipotenusa.

Acredito ser importante ressaltar que o triângulo retângulo inicialmente construído deva ser aleatório, permitindo que cada aluno monte livremente. Também é importante acentuar esse triângulo, pintando-o ou contornando-o, assim como na figura 4.10, e chamando a atenção de que ele é a figura “domínio da função”, de forma que os quadrados sejam considerados “dependentes”, construídos após o triângulo. Apesar de essa atividade correr o risco de ser interpretada apenas como um quebra cabeça, coloca o aluno em contato com a clássica construção por meio de régua e compasso, permitindo-lhe ter uma importante experiência geométrica. Cabe considerar aqui o sentido provocativo da atividade, pois poderão perguntar-se: “porque no final as figuras encaixam-se completando exatamente o quadrado da hipotenusa?”. Entendemos, portanto, que a perspectiva de ensino baseada na história da matemática, explorada através de uma atividade informal e motivada pelo empirismo, pode conduzir a uma aprendizagem mais significativa, em comparação com uma perspectiva de ensino de matemática baseada no rigor matemático. Encontramos apoio para tal proposta no argumento de que

> [...] o desenvolvimento histórico dos conceitos pode ser considerado como uma seqüência de (pelo menos) dois estágios: um estágio intuitivo e um estágio maduro; vários séculos podem passar entre estes estágios. No primeiro estágio o foco é simplesmente operacional, o ponto de vista estrutural não é o principal. Do ponto de vista educacional, uma situação semelhante pode ser indicada: em um primeiro estágio os alunos abordam os conceitos por intuição, sem uma compreensão completa do assunto. Então a aprendizagem torna-se melhor e melhor até que ela amadurece. (GRUGNETTI, 2000, *apud* GASPAR, 2003, p.20).

Assim, defendemos que a aprendizagem de matemática ocorre por uma espécie de “amadurecimento”, como o citado acima. Esse “amadurecimento” tanto maior será quanto maior for o contato que o aprendiz tiver com a matemática escolar. Esse contato nem sempre é otimizado quando ocorre através de atividades repetitivas como, por exemplo, resolução de listas de exercícios com exercícios muito semelhantes em sua estrutura e estratégia de resolução. O que estamos propondo é um contato múltiplo: o aluno pode entrar em contato com régua, compasso, esquadro (talvez), geometria elementar e o Teorema de Pitágoras, assim como com sua demonstração. Além disso, operacionaliza uma aplicação estratégica de resolução geométrica ao menos provocativa, mesmo que não totalmente compreendida pelos alunos. Não podemos deixar de considerar o mais importante, ou seja, não estamos sugerindo apenas a aplicação da proposta exatamente como mostrada aqui, mas também o estudo dela. Não estamos priorizando o preparo de um aluno para resolver inúmeros problemas, todos iguais, como é o caso das listas de exercícios presentes na maioria dos livros de Ensino Fundamental. Tampouco estamos interessados em defender ou criticar essas listas. A intenção desta proposta é ressaltar o acréscimo de métodos, pouco explorados, aos atuais métodos já existentes, não se trata de comparar, mas sim de acrescentar. Pois acreditamos que se quisermos pesquisar sobre a compatibilidade entre o que é comum e o que é incomum no ensino de qualquer ramo da matemática, não podemos desprezar a ideia de tentar buscar articulações históricas. Ainda mais se considerarmos que o que é incomum hoje e aqui não necessariamente foi incomum sempre e em qualquer lugar.

## 4.2 Teorema de Euler na perspectiva de Imre Lalatos

Vemos em Lakatos (1978) que uma reflexão histórica do chamado Teorema de Euler revela fatos riquíssimos, que podem ser tratados separados dos estudos formais desse mesmo teorema. Para análise de tal trabalho é fundamental explicitarmos uma das ideias sobre formalismo apresentada por Lakatos:

> O formalismo desliga a história da matemática da filosofia da matemática, uma vez que, de acordo com o conceito formalista de matemática, não há propriamente história da matemática. (LAKATOS, 1978, p.14).

Geralmente nos estudos do Teorema de Euler, em escolas de ensino básico e superior, lidamos com seu estudo formal, portanto com seu resultado final já estabelecido e amadurecido nas árduas críticas que surgiram no decorrer da história. Críticas essas que alteraram aos poucos tanto seu enunciado quanto os conceitos nos quais se baseia. Não é comum encontrarmos pesquisas que abordem as implicações da história desse teorema no tratamento formal de seu próprio enunciado. A abordagem do Teorema de Euler no Ensino Médio, nas escolas brasileiras, geralmente ocorre de forma aligeirada: poucas páginas dos livros (nem todos) que apresentam a Geometria Espacial, tratando-o como um teorema muito simples, com poucos exercícios. Vemos que raras vezes ele é demonstrado e, quando o é, isto ocorre de forma razoavelmente empírica, baseado em lemas pouco trabalhados, que dependem mais da imaginação do que da lógica. Esta rarefação do assunto talvez decorra do fato de que supervalorizar a importância dos estudos formais da matemática pode ser pouco produtivo no ensino. Mas, teria outra forma de abordar esse assunto? Conforme Lakatos (1978, p.15):

> O "formalismo" é o baluarte da filosofia do positivismo lógico. De acordo com o positivismo lógico, o enunciado só é significativo se for ou "tautológico" ou empírico. Uma vez que a matemática não-formal não é "tautológica" nem empírica, deve ser destituída de significado, puro despropósito. Os dogmas do positivismo lógico têm sido prejudiciais para a *história e filosofia da matemática.*

A falta de argumentações mais trabalhadas a respeito de certos detalhes da demonstração frequentemente torna impossível uma compreensão considerável do próprio enunciado do teorema, por exemplo, por um leitor que esteja iniciando seus estudos do Teorema de Euler. Claro que, neste caso, não é complicado interpretar a equação V-A+F=2, nem a questão da convexidade, mas a associação entre os dois torna-se uma tarefa não trivial. É natural que, à primeira vista, não consigamos ver uma relação entre convexidade e a equação de Euler. Afirmar que "verifica-se V-A+F=2 para um poliedro" e que "um poliedro é convexo" são afirmações interpretáveis de imediato, porém são psicologicamente não articuladas por serem de naturezas diferentes, o que torna complicado associá-las numa perspectiva formal. Quando surgem problemas formais desse tipo podemos buscar contextualização numa teoria menos rigorosa, que nos ajude a ampliar a familiaridade com os problemas. Acreditamos que, dessa forma, podemos estabelecer a ligação entre os dois conceitos e que essa ligação possa ser ampliada pelo menos numa perspectiva histórica. Aproveitamos ainda para observar que a matemática passa por crises às vezes incompreensíveis para alguém que observe o conteúdo apenas como produto final, numa perspectiva tão pacífica e acabada como a que se vê num livro didático de Ensino Médio.

Segundo Lakatos (1978, p.20), Euler testou a conjectura: “Para todo poliedro vale a relação V-A+F=2.” com sólidos regulares e outros sólidos. Com base nisso a conjectura foi lançada. Isto sugere que a equação, baseada nas observações de Euler, foi proposta sem dar uma importância imediata ao conceito de convexidade e que, conforme Lakatos (1978), tal equação não pode ser provada imediatamente. Algum tempo depois Cauchy lança uma prova, mas tal prova apresentava lemas não provados, portanto abria novas frentes para a crítica, de modo que “O próprio Euler, [...], desistiu da prova, visto que notou a dificuldade mas não pode fazer aquela ‘mínima observação’”(*Ibid,* p.26), observação essa que se referia a um dos lemas não provados.

A expansão do teorema a todos os poliedros definia-se em uma conjectura que dependia do conceito de poliedro, que logo se mostrara um problema, mesmo para Euler:

> Observado pela primeira vez por Euler [1758a]. Seu problema original era a classificação dos poliedros, cuja dificuldade foi acentuada no sumário editorial: “Enquanto em geometria plana os polígonos *(figurae rectilineae)* podiam ser classificados muito facilmente de acordo com o número de lados, o qual é evidentemente sempre igual ao número de ângulos, em estereometria a classificação dos poliedros *(corpora hedris planis inclusa)* representa problema muito mais difícil, visto que somente o número de faces é insuficiente para esse fim. (LAKATOS, 1978, p.19).

Vejamos alguns conceitos que foram lançados para poliedros: Definição 1, devida a Legendre: “Poliedro é um sólido cuja superfície consiste de faces poligonais.” (LAKATOS, 1978, p.29). Definição 2: “Poliedro é uma superfície que consiste de um sistema de polígonos.” (*Ibid*, p.30), ou seja, considera-se que um ponto pode mover-se continuamente sobre toda a sua superfície. Essa definição resulta dos “[...] ensaios de Jonquières lidos na Academia Francesa contra os que pretendiam refutar o Teorema de Euler.” (*Ibid*, p.30). Definição 3: Poliedro é um “[...] sistema de polígonos dispostos de tal modo que (1) exatamente 2 polígonos se encontram em cada aresta e (2) Seja possível ir de dentro de qualquer polígono para o interior de qualquer outro polígono por uma via que jamais cruza qualquer aresta num vértice.”(*Ibid,* p.31). Tal definição surge “[...] para impedir tetraedros gêmeos [...]

Encontramos essa perturbadora definição reproduzida em alguns manuais modernos do modo usual autoritário do ‘acredite se quiser’”. (*Ibid*, p.31).

Cada uma das definições acima restringe a anterior, ou melhor, o conjunto de todos os poliedros da definição 3 estão contidos nos da definição 2 que, por sua vez, estão contidos nos da definição 1. E, se incluirmos a definição de poliedros convexos, estaremos restringindo ainda mais os objetos em estudo.

> No caso de um poliedro autêntico, através de qualquer ponto arbitrário no espaço haverá pelo menos um plano cujo corte transversal com o poliedro consistirá de um único polígono. No caso dos poliedros convexos, todos os planos satisfarão essa exigência. (LAKATOS, 1978, p.37).

Essas definições foram surgindo nessa sequência, em função da existência de certos sólidos denominados “poliedros” em que não se verificava a relação de Euler. É interessante notar que o conceito de poliedro era ajustado não para a teoria dos sólidos ou outros estudos matemáticos geométricos mais gerais, mas para satisfazer a relação de Euler.

Praticamente houve uma crise envolvida, talvez, por interesses políticos dentro da matemática que redefinia o conceito de poliedro em função de um problema particular. Vemos então que uma simples lei como V-A+F=2, direcionada (até mesmo restringida) aos poliedros convexos, que parece de tão fácil aplicação no Ensino Médio, passou por uma complexa rede de transformações e ajustes. E, por ironia, ainda precisamos lidar com o fato de a restrição ter sido excessiva, ou seja, acabamos deixando de fora vários poliedros não convexos que satisfazem a relação de Euler. Agora perguntamos novamente: qual a ligação entre convexidade e a relação de Euler na perspectiva histórica? Do que foi dito até aqui, podemos concluir que a única ligação é a de que o conceito de poliedro convexo é apenas uma super-restrição ao campo dos poliedros, de modo a contemplar, de forma segura, aqueles que obedecem à relação de Euler. É o mesmo que dizer: A soma de dois números naturais não pode ultrapassar 100, desde que definamos os números naturais como N={1,2,3,4,5,6}.

Ainda poderíamos perguntar: como abordar o Teorema de Euler, na escola, numa perspectiva histórica? A história, como uma ciência não-formal, deixa uma margem de possibilidades, sem definir qual a melhor. Mas podemos usar as informações disponíveis num âmbito criativo. A própria obra de Lakatos pode ser classificada como uma ficção escolar. Nela, lê-se a sugestão de que a história da matemática possa se repetir na sala de aula. Se não esperarmos uma turma tão aplicada, como a da ficção criada pelo autor, podemos propor questões que envolvam análise de conceitos. Por exemplo, tomamos o sólido delimitado por um par de cubos, o sólido formado por dois tetraedros com uma aresta em comum, o sólido formado por dois tetraedros com um vértice em comum, o sólido chamado “Poliedro estelado” de Kepler ou ouriço, O “túnel” da Figura 9 em Lakatos (1978, p.35), o sólido da Figura 11 em Lakatos (*Id*, p.37), um cubo simples, um cilindro..., então podemos propor a uma turma de Ensino Médio a seguinte questão: quais desses sólidos são poliedros, conforme as definições 1, 2 e 3, e quais são poliedros convexos? Mais ainda, para quais se verificam a relação de Euler? Por fim, deixamos a seguinte provocação: seria a relação de Euler uma propriedade geral dos “poliedros”, supondo como verdadeira, uma de cada vez, cada uma das definições indicadas?

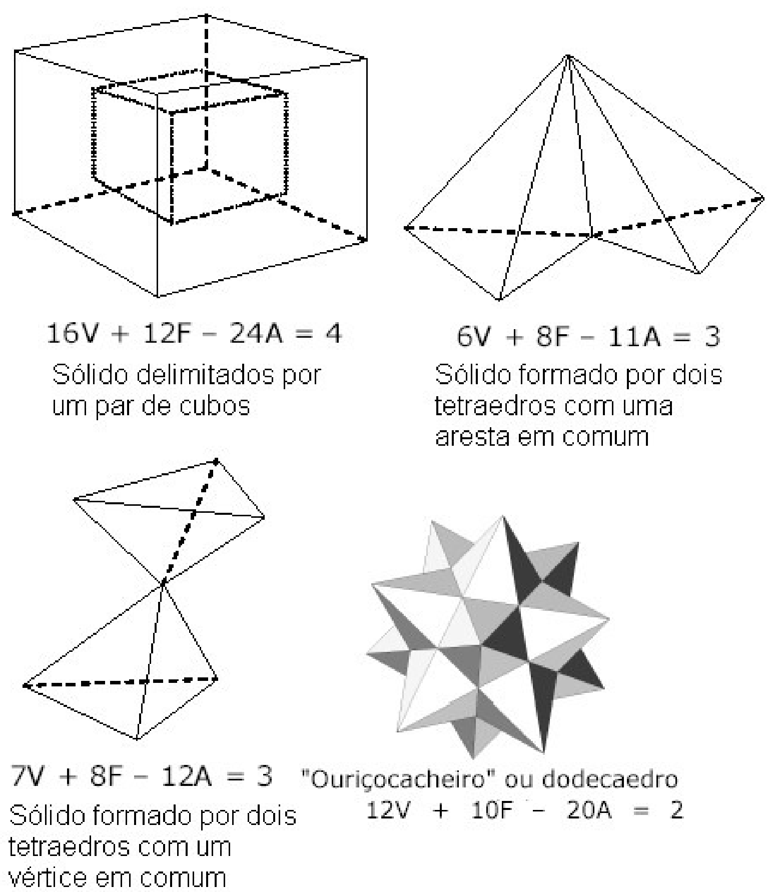



**Figura 7**: Alguns poliedros abordados na obra de Lakatos

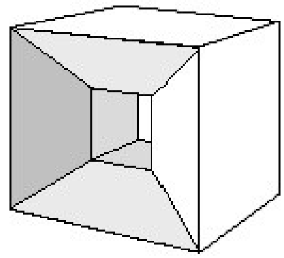


**Figura 8:** O “túnel”: um poliedro especial

Este tipo de atividade, aparentemente um pouco desobjetivada e desorganizada, foge um pouco do padrão de exercícios que estamos acostumados, ela coloca o aprendiz numa situação onde ele deve analisar conceitos com muita atenção, desenvolvendo a capacidade de ser minucioso nas leituras, cuidadoso, detalhista, que são capacidades fundamentais para um matemático. Estamos lidando com conceitos, mais do que com as contas do Teorema de Euler, estamos induzindo os alunos a colocarem-se na mesma posição dos antigos pensadores matemáticos. Com pouca pesquisa sobre a história da geometria podemos propor atividades diversificadas, com conceitos e ideias alternativas, às vezes já em desuso por alguns séculos, ou nem tanto.

Assim, novamente saímos do âmbito usual das listas de exercícios ao propor uma atividade diferenciada. Não estamos dizendo que essa deva substituir outras atividades mais tradicionais, mas sim que pode ser adicionada a elas. Cada metodologia tem seus objetivos, os quais podem variar de modo a se complementarem.

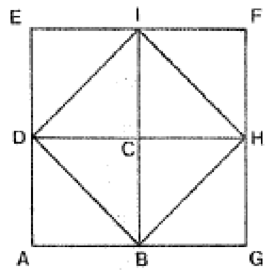
### 4.3 Área de figuras planas e raiz quadrada de dois

Os números irracionais sempre estiveram presentes nos estudos do ensino básico, tanto nos livros didáticos como no currículo da maioria das escolas. Existe uma importância no trato desse conceito, dentre outros motivos, pelo fato de ser considerado como base para construção dos números reais. As dificuldades pedagógicas no trato desse conceito devem-se provavelmente ao fato de que ele se refere a uma negação: Os números irracionais são todos os reais que não são racionais. Qualquer iniciante nos estudos do ensino básico perguntar-se-ia: Mas, então, o que eles são? Embora existam, conforme os matemáticos, infinitos irracionais e, mais do que isso, existam “mais irracionais do que racionais na reta”, a questão de encontrar números que não possam ser representados como razão de dois inteiros não nulos, de fato, não é trivial. Convencer alguém que um número é racional pode resumir-se a encontrar dois inteiros cuja divisão de um pelo outro o tenha como resultado. Mas, convencer que um dado número é irracional envolve provavelmente uma demonstração bem mais prolongada.

Um aluno iniciante pode supor muitas coisas sobre os irracionais apenas pelo vislumbre de sua definição. Provavelmente ele perguntaria para que servem esses números na prática? Também podem surgir questões pedagógicas adjacentes, com referência à posição dos irracionais na reta, ou ainda, com relação à própria existência de uma posição determinada. Certamente esse é um conceito cuja abordagem no campo pedagógico é bastante complexa e polêmica. MIGUEL (1993) também observa precariedade na abordagem do tema dos números irracionais.

> A razão de nossa escolha ter recaído sobre esse tema deve-se ao fato de, tradicionalmente, as passagens dos textos didáticos para a escola secundária referentes a ele reduzirem-se a um amontoado de regras de operar com radicais para os quais, na maioria das vezes, não se apresentam justificativas convincentes e que acabam por constituir-se, aos olhos dos estudantes, em conhecimentos pouco úteis, pouco desafiadores e desligados dos demais temas presentes nos programas de matemática. (*Ibid*, p.168).

Vemos, portanto, que esse conceito tem sido abordado geralmente do ponto de vista numérico e não histórico. Se considerarmos o contexto histórico de surgimento e de formalização dos números irracionais veremos que alguns problemas pedagógicos de abordagem ocorrem semelhantemente a problemas desencadeados durante o processo histórico. Percebemos, conforme Miguel (1993), que a história da matemática revela o surgimento dos números irracionais geralmente por problemas próprios da geometria. A figura abaixo é baseada no problema proposto numa “[...] passagem do livro ‘Menom’ de Platão, no qual Sócrates solicita ao escravo de Menom para construir um quadrado cuja área seja igual ao dobro da área de um quadrado dado.”(*Ibid*, p.201).



(*Ibid*, p.201).

Vemos nessa figura que a solução é um quadrado construído sobre a diagonal do quadrado dado (ABCD). Observamos que um aluno que tenha noções de área poderá calcular facilmente a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos unitários ADB sem recorrer ao Teorema de Pitágoras, usando simplesmente a definição de área, concluindo assim que a diagonal do quadrado ABCD mede a raiz quadrada da área do quadrado DIHB que é dois, portanto DB mede raiz quadrada de 2. Repare que trabalhamos até aqui independentes do Teorema de Pitágoras. Uma importância fundamental da geometria, que pretendemos atingir aqui para os irracionais é permitir sua visualização, visualização essa “do tal número chamado raiz de dois”: o aluno verá que um segmento que meça raiz de dois é um pouco maior que o unitário e mede menos que duas unidades. Então, vemos que uma pequena busca histórica revigora a construção de um número até então encarado como apenas axiomático e abstrato.

Basicamente, o fato de construímos os números reais numa reta já demonstra a forte dependência cognitiva da geometria, apresentada pelos números reais. O exemplo acima não só apresenta a possibilidade de se trabalhar com números que sejam raízes quadradas de quaisquer números inteiros, como sugere que os mesmos possam ter uma forma visual; no caso em estudo, o número que representa raiz quadrada de dois é visto como medida de comprimento.

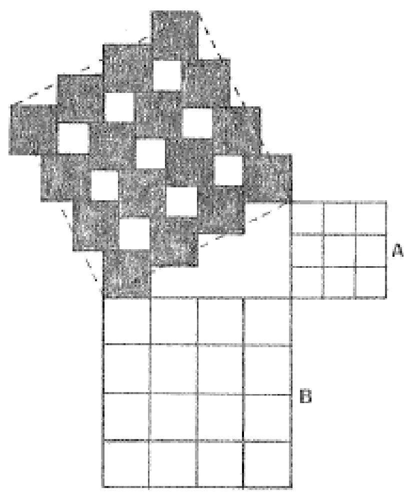
Miguel (1993) também se refere frequentemente a algo definido como “quadrado dentado” em comparação com o clássico “quadrado liso”. Essas figuras, desenhadas numa grade quadriculada, propõem basicamente a visualização da ideia de área, já que a área é determinada pela quantidade de quadradinhos no interior da figura. Sobre o tema o autor afirma:

> Vamos chamar de quadrado dentado qualquer quadrado cujos lados tenham uma forma de uma escadinha, composta de vários degraus ou dentes. (MIGUEL, 1993, apêndice, p.12).

O foco dos estudos referentes aos quadrados dentados parece estar na formação de um quadrado a partir de dois outros, conforme algumas regras. Abaixo uma citação sobre o assunto:

> Não se sabe exatamente quando, onde e nem como foi feita essa descoberta... mas os povos antigos deram uma resposta afirmativa à questão anterior; isto é, afirmaram que é sempre possível construir um único quadrado que ocupe a mesma área que a de dois quadrados dados, juntos. (MIGUEL, 1993, Apêndice, p. 10).

Abaixo segue um curioso exemplo que sugere um método para geração de um quadrado liso equivalente a dois lisos iniciais A e B.




(MIGUEL, 1993, p. 220)

Conforme o autor, o método consiste na divisão dos lados A e B em n e n+1 partes iguais obtendo $n^2$ e $(n+1)^2$

> [...] quadradinhos de tamanhos diferentes que, dispostos como num tabuleiro de xadrez, produzem o quadrado dentado heterogêneo procurado. Ligando as extremidades das diagonais desse quadrado dentado heterogêneo [...], obtemos o quadrado liso procurado. Eis aí o Teorema de Pitágoras em um grau possível de generalização. (MIGUEL, 1993, apêndice**,** p. 221).

O estudo relativo a quadrados dentados, apresentado por Miguel (1993), culmina, portanto, com a elaboração de um método que transforma quadrados dentados em lisos, fato que o conduz a pressupostos dos povos antigos, como o citado acima, acerca do Teorema de Pitágoras.

Vamos fazer, a seguir, um breve relato de uma atividade a respeito das grades quadriculadas, que foi aplicada numa turma de segundo ano de Ensino

Médio, na disciplina de Estágio em Educação Matemática III, no segundo semestre de 2011. Era uma atividade sobre o cálculo de áreas como uma introdução à geometria e durou aproximadamente 2 períodos de 50 minutos cada. A atividade consistia na resolução da folha de questões que segue abaixo:

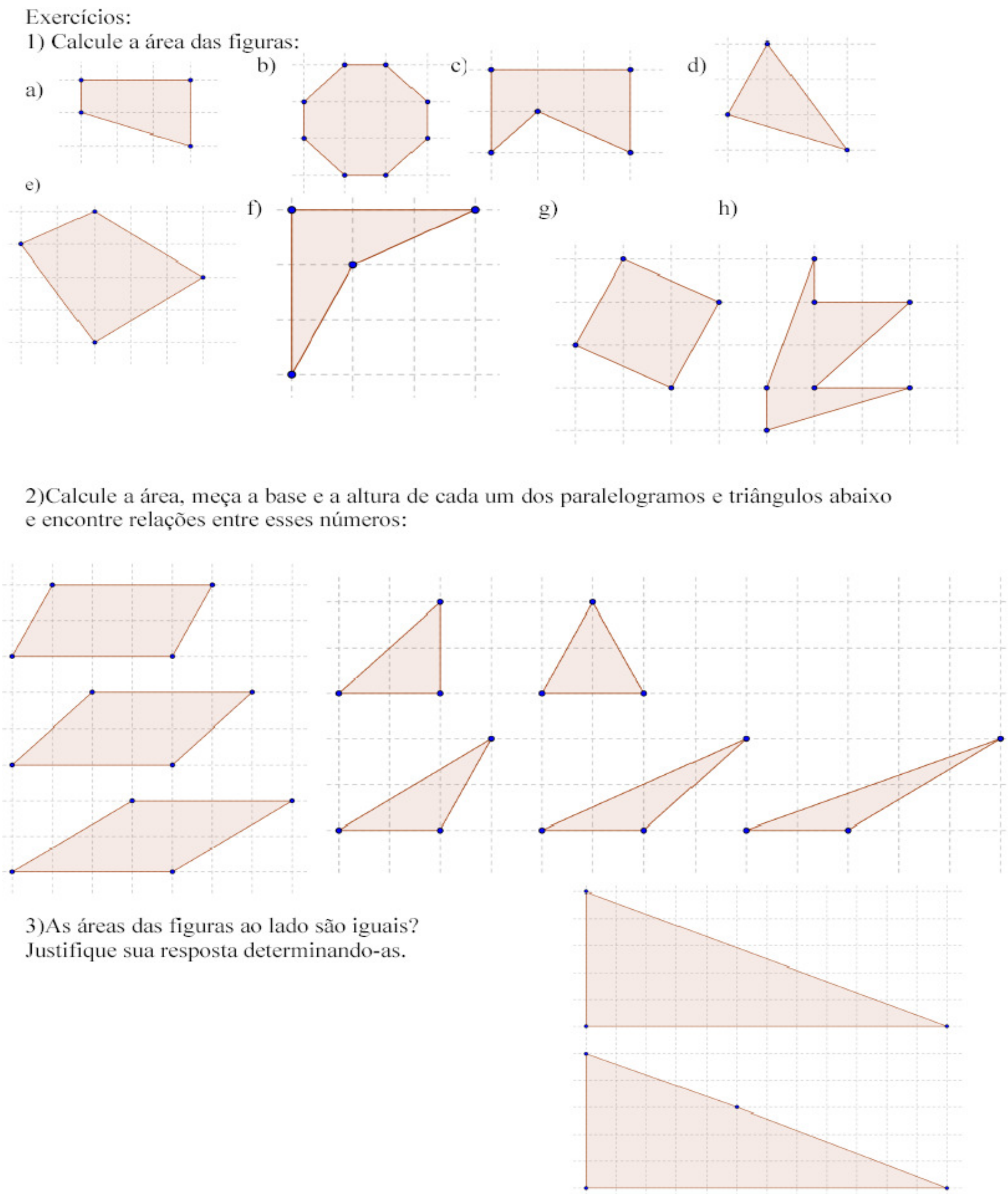



**Figura 9**: Atividade proposta a alunos de Ensino Médio

A estratégia básica recomendada para a medição da área era a contagem dos quadradinhos, mas quando houvesse um segmento de reta diagonal deveria se partir a figura em triângulos retângulos, às vezes ultrapassando os limites da figura, portanto sendo necessário não só somas de áreas, mas também subtração. Também foi dito que a área de um triângulo retângulo era igual à área do “retângulo inteiro” partido ao meio, ou seja, dividido por dois. Observamos que, com base nessa estratégia, é possível calcular todas as áreas.

Também foi apresentada outra estratégia, que é difícil de explicar, mas é bem simples de entender: consiste em fazer o completamento (transformação) de uma figura usando partes dela mesma, de forma a não alterar a área. Por exemplo, no item 4.b podemos recortar os triângulos indicados em verde e colocá-los na posição dos vermelhos, obtendo a figura da direita que, por isso, tem área igual à da esquerda:

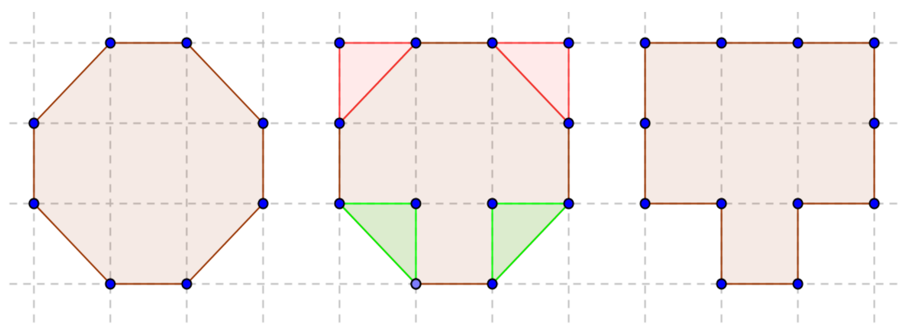


**Figura 10**: Atividade de transformar figuras conservando a área

O que queremos ressaltar aqui são os resultados da experiência. Ocorreu que os alunos, na sua totalidade, usaram o segundo método (de recortar figuras). Percebemos também que as folhas foram preenchidas na forma de “escadas”, como nos quadrados dentados. Dentre os que fizeram a atividade havia pouquíssimos casos de erros, que eram isolados, provavelmente causados por desatenção. Havia interessantes marcações como as indicadas na figura abaixo:

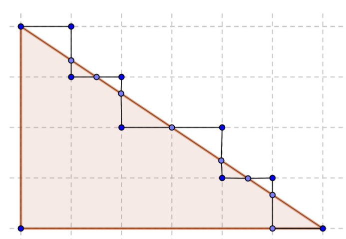


**Figura 11**: Construção feita por um aluno

Poderíamos indagar porque eles preferiram calcular a área de um triângulo retângulo fazendo os vários recortes trabalhosos acima, sabendo que teriam, ainda, de compor equivalências para contar as unidades de área, no lugar de calcular a área do retângulo inteiro com um simples produto e, após, dividir o resultado por dois.

Talvez o método das escadas, apesar de ser mais trabalhoso, forneça uma melhor visualização da área, pois a figura formada fica com uma forma semelhante à anterior, dando mais segurança ao aluno, enquanto o método de dividir o retângulo ao meio pode parecer mais abstrato e pouco atrativo, pois a visualização do aluno corresponderia a duas peças grandes cuja congruência seja menos visualizável.

O fato é que o método dos quadrados dentados assemelha-se às marcações em escada acima, fato que nos leva a acreditar que a história "repete-se" no pensamento do aprendiz. Os conceitos "visualizáveis" (aqueles de que lembramos ao fazer um desenho mental) parecem sempre ser mais facilmente assimilados do que os "abstratos" (aqueles de que lembramos geralmente associando o pensamento à escrita literal do conceito), ou seja, as imagens matemáticas podem dizer mais do que a linguagem matemática. Ainda sobre essa ideia de visualização, também vale considerar que, conforme mencionado, sugerimos um método que possivelmente permita a imediata visualização da medida igual à raiz quadrada de 2, acredito que a dependência de um  espécie de "ambiente visual" proposto pela geometria talvez explique porque a geometria foi um dos primeiros ramos matemáticos a ser explorado pela humanidade, conforme a história da matemática nos conta.

# 5 AVALIANDO AS PROPOSTAS DE ENSINO

As entrevistas foram feitas com intenção de reforço e aperfeiçoamento àquilo que foi escrito no capítulo anterior. Os dois professores entrevistados não foram identificados, o importante aqui, que queremos apontar, são suas considerações. Mas, conforme as informações que coletamos, podemos afirmar que ambos são professores de matemática e, mais do que isso, têm experiência de ensino de disciplinas diretamente associadas à matemática e à história da matemática, no meio acadêmico.

As entrevistas não foram lineares, ocorreram na forma de uma interessante conversa sobre matemática, por isso durante as transcrições registramos somente aquilo que consideramos significativo para os objetivos que temos aqui. Seguimos um roteiro de questões na forma de perguntas, que foi usado, na verdade, mais como guia de assuntos, ou seja, não necessariamente fizemos as perguntas na mesma escrita do roteiro. Claro que, também, não necessariamente as questões foram tratadas na mesma ordem em que se encontram no roteiro. Há questões no roteiro que não foram significativamente tratadas com todos os professores, talvez nem comentadas aqui, em contrapartida foram significativamente tratadas questões além do roteiro. Deixo claro que o roteiro só foi usado, na maior parte das entrevistas, como mero lembrete de assuntos. A seguir, começamos a análise das entrevistas.

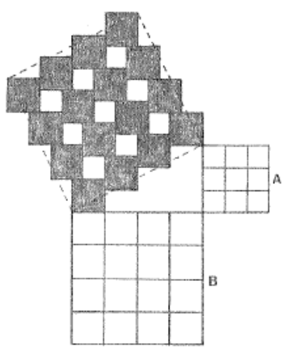
## 5.1 Analisando as propostas com base na primeira Entrevista

Sobre a proposta inspirada na demonstração chinesa do Teorema de Pitágoras mencionamos:

*GM: [...]. O que você acha que poderíamos melhorar nessa proposta?*
*PR1: [...], a pergunta que eu te faço, que eu não sei se é fácil ou difícil, não pensei muito, se seria possível avançar mais a ponto de os alunos conseguirem justificar que essas figuras se encaixam perfeitamente. Mas é bem interessante.*

A questão de expandir a atividade é algo a considerar. Uma atividade aplicável no ensino básico, não pode ser considerada finalizada e incompatível com outros níveis de aprofundamento. Podemos pensar em expandi-la no sentido de adaptá-la a um nível mais amplo, a alunos mais avançados, ou mais velhos, assim como expandi-la no sentido de elaborar continuações do conteúdo no mesmo nível de ensino. A sugestão do professor com a ideia de adaptar a atividade a justificativas de, por exemplo, congruência é, de fato, cabível em qualquer sentido adotado para uma possível expansão da atividade. A história da matemática deixa claro que as demonstrações, no âmbito da lógica, são o alvo principal de qualquer matemático. Ao menos justificativas para ocorrências extraordinárias devem ser pensadas para aquilo que trabalhamos em aula. Esta atividade é aplicada no âmbito de "adivinhe o segredo" com objetivo da "provocação", por isso nossa trajetória terminou antes de um possível momento para justificativas, o que deixou margem para expansões, cabendo considerar, talvez, não só a possibilidade, mas também a necessidade de ampliá-la no âmbito do tratamento dos motivos do exato encaixe de cada figura.

O professor chamou a atenção para uma figura mostrada no trabalho:




Conforme o professor:

*PR1: Isso não é bem Pitágoras porque isso não é bem um quadrado. Mas se tu fizesse um processo de limite, isso eu acho que tu não falaste aqui. Tu poderias pensar o que aconteceria se o n fosse muito grande. Para um n muito grande esse quadrado dentado fica quase se confundindo com o quadrado que está pontilhado. Então ao tomar o n tendendo para o infinito, um n muito grande, tu poderias provar o Teorema de Pitágoras [...] que esse quadrado aqui, a área dele é a soma das áreas desses dois. Porque tu pegaste esse quadrado dentado e decompôs numa área sombreada e numa área branca [...], quando pegaste um n muito grande, mais precisamente tendendo para o infinito, daria o quadrado pontilhado que tu construíste sobre a hipotenusa do triângulo retângulo. Quer dizer, eu acho que tu poderias usar esta ideia. Se tu não quiseres dizer "tender para o infinito" então diz "para um n muito grande". Isso poderia te dar um novo processo, uma outra maneira de demonstrar o Teorema de Pitágoras [...] Quer dizer: essa atividade poderia explorar o que acontece quando o n vai ficando muito grande, cada vez maior. Que o quadrado dentado começa a se aproximar de um quadrado mesmo.*

Aqui vemos uma situação em que o professor entrevistado segue um pensamento análogo ao usado para a metodologia desse trabalho, assim como fizemos com os textos lidos (destacando figuras sugestivas e elaborando ideias e propostas), o professor entrevistado fez esse trabalho, ele destacou essa figura e sugeriu a possibilidade que está comentada. De fato, é uma interessante possibilidade a elaboração de uma proposta de demonstração do Teorema de Pitágoras baseado nessa figura. Nas argumentações do professor vemos a preocupação na independência do conceito de limite quando ele sugere considerar um número muito grande para o valor de n no lugar de fazer n tender ao infinito. Essa busca por independência dos conceitos pode estar diretamente associada ao pensamento pedagógico, já que ocorre uma preocupação com os pré-requisitos conceituais dos alunos, ao mesmo tempo em que buscamos simplicidade nas afirmações.

A ideia de explorar o Teorema de Euler relaciona-se à necessidade de apontar a polêmica sugerida pela obra de Lakatos. A questão pedagógica do Teorema de Euler no ensino básico pode levar-nos a muitas discussões, conforme sugerido pela obra. Por ser um campo pouco explorado, o Teorema de Euler no ensino, resolvemos dar uma seção a ele neste trabalho de conclusão, mas não o desenvolvemos amplamente como poderia e merecia ser desenvolvido. Deixamos uma interessante provocação a trabalhos posteriores perguntando como deveria ser tratada essa questão pedagógica, que historicamente está repleta de retrocessos em torno do conceito de poliedro associado ao Teorema de Euler.

*PR1: [...] No texto tu mencionaste o caso de pegar um tetraedro e "encostar" num outro, acho que esse tipo de coisa é interessante, até para levar para os alunos, dá para construir uma coisa assim, é fácil contar o número de faces, de vértices e arestas [...] convexo é uma propriedade forte demais, mas ela garante que vale a fórmula de Euler, mas tem muitos outros que vale, que não são convexos. Porque a condição de convexo elimina todos aqueles que a gente quer eliminar, mas elimina outros que valem.*

A obra de Lakatos ressalta o fato da clara ideia da exclusão de muitos poliedros para os quais não se verifica o Teorema de Euler, fazendo apelo a uma reconceitualização que vai excluindo poliedros indesejáveis, misturados a desejáveis, até chegar no restrito caso do poliedro convexo. A respeito disso comentamos:

*GM: O senhor acha que é viável esse tipo de atividade, associar essas figuras estranhas, quando se comenta o Teorema de Euler?*
*PR: Certamente, acho que sim. No momento que tu estuda o Teorema de Euler, se estuda poliedros onde vale, seria interessante estudar poliedros onde não vale.*

Sobre a proposta envolvendo a raiz quadrada de dois, o professor afirma:

*PR1: [...]. Uma coisa que eu acho interessante é que se dá conta de que não precisa do Teorema de Pitágoras. Porque nesses triângulos aqui, além de serem retângulos, os catetos são iguais. Realmente trabalhamos sem depender do Teorema de Pitágoras. Isso aqui não demonstra que raiz de dois é irracional. Teria que, por alguma outra maneira, saber isso. Permite visualizar esse número, mas não é uma demonstração de que ele é irracional. Com isso aqui tu estás mostrando um segmento que tem essa medida. E que é um número com o qual a gente precisa trabalhar.*

Essa interessante consideração refere-se a tornar mais precisa a posição pedagógica desse tipo de proposta, com objetivo de conceituar raiz de dois, de forma a estabelecer os pontos positivos considerando também o que ela não aborda, fica claro que ela não aborda se raiz de dois é ou não irracional. O que, assim como na proposta anterior, sugere a necessidade de uma ampliação dos métodos ou de uma adaptação a outra proposta, na intenção de elaborar uma continuação direcionada aos irracionais. A motivação é notavelmente trabalhada nessa proposta, no momento em que o aluno percebe que a raiz quadrada de dois pode ser representado por uma medida que existe naturalmente, o que ressalta, conforme comentado pelo professor, a necessidade de aprendermos a trabalhar com ela.

## 5.2 Analisando as propostas com base na segunda Entrevista

Essa entrevista foi feita parcialmente por escrito. A conversa relativa à primeira questão foi tratada pessoalmente, enquanto as questões 2, 3 e 4 foram respondidas por escrito. Comecemos com alguns comentários sobre a proposta de Gaspar:

*PR2: Outra coisa que eu gostaria de comentar é que isso aqui que tu chamas de conceitos visualizáveis também muda conforme a cultura. Por exemplo, os gregos, quando estudavam geometria, já estavam mais familiarizados com essas figuras, com a notação, etc. Eu não sei se a geometria é tão universal assim que tu vês e enxergas sempre a mesma coisa, acho que precisas ter uma certa "educação do olho", para enxergar essa figura, que tu trazes aqui. Para enxergar um deslocamento, é preciso uma certa educação do olho. A pessoa que não tem educação pode enxergar...*
*GM: ...um monte de riscos de figuras.*

*PR2: Isso, eu nem percebi, por exemplo, que aqui tem um ângulo reto. Nem enxergar um quadrado. Enxerga só um ângulo reto aqui, outro aqui...*
*GM: Sim*
*PR2: Claro que isso põe em destaque o papel do professor. O professor tem que estar lá fazendo essa mediação, ver se o sujeito enxergou de verdade esse quadrado, que isso aqui é um quadrado. Mas eu achei bem interessante os teus exemplos e a discussão que estás fazendo.*

De fato, a professora levou-nos a considerar um importante detalhe que faz diferença na prática: a questão da visualização, que foi comentada, mas não foi abordada de forma ampla. Comentamos algo no texto referente à última proposta, que não era essa que se refere à demonstração chinesa para o Teorema de Pitágoras. A questão de visualização complicada, ou seja, a pessoa vê aquilo que quer ver. O que uma pessoa vê não necessariamente é o que outra pessoa vê, o que nos leva à necessidade de considerar um componente: O sujeito. Essa proposta deixa a cargo do aluno a montagem e também as conclusões que vai tirar. Pode ocorrer que ao montar a figura o aprendiz conclua apenas que as peças se encaixam sem observar nenhuma relação com as áreas, e ainda sem perceber que as peças se encaixam exatamente porque são e sempre serão congruentes. Por isso a propomos como uma atividade provocativa, aberta a ampliações. Na entrevista anterior sentimos a necessidade de não desconsiderar justificativas, aqui sentimos a necessidade de pensar no ponto de observação do sujeito. São ideias diferentes, mas complementares, que poderiam nos levar a melhores processos de contextualização.

*PR2: [...]. Também tenho acordo com a atividade que propões para poliedros. Acrescento que esse tipo de atividade requer não apenas ou não tanto que alunos e professores sejam minuciosos, mas que o foco seja colocado sobre as explicações e relações: quais propriedades dos poliedros estão relacionadas a número de faces, vértices e arestas? É possível generalizar a relação para todos os poliedros? Esta seria uma boa questão para investigação.*

Quando colocamos o foco sobre as tais relações e explicações, estamos cada vez mais na raiz dos conceitos, já que o Teorema de Euler é justamente, conforme a história, o modelador dos conceitos de poliedro considerados. É importante, portanto, pensar no quanto cada conceito afeta as relações entre o número de faces, vértices e arestas, mesmo que o pensamento seja subjetivo. Generalizar a relação a todos os poliedros pode ser pensado para cada conceito de poliedro isoladamente, com destaque para o que se considera ser um poliedro.

*PR2: Outra questão que tenho trabalhado com meus alunos em Geometria II é: quais são os poliedros convexos que podem ser construídos com um dado número de faces? Como saber se esgotamos a lista? [...]*
*Neste semestre, examinei essa questão com os alunos pedindo que construíssem poliedros. Na atividade de construção eles foram percebendo, por exemplo, que é fácil aumentar o número de faces cortando "cantos" do poliedro ou girando uma das bases de um prisma; e logo perceberam, por exemplo, que não é possível construir um poliedro convexo de cinco faces triangulares.*

Eis aqui mais uma atividade inspirada na obra de Lakatos, paralela à nossa, desta vez já aplicada pela professora. Curiosamente essa proposta parece propor um exercício para criação, por exemplo, de “monstros”[1], apesar de a proposta não se referir exatamente a poliedros não convexos, já que se propõe pensar em criar figuras que atendam a certas propriedades. Mas poderíamos pensar na mesma questão para poliedros não convexos, isso abriria uma margem de possibilidades pedagogicamente interessantes, que nos permitiria entrar no ambiente dos “monstros”. É uma ideia um tanto provocadora elaborar poliedros, convexos ou não, que atendam a certas condições, e pode complicar-se no momento em que tentamos esgotar toda uma lista de possibilidades, ainda mais se pensarmos em: como provar que tal lista foi esgotada?

*PR2: Aproveitei a discussão sobre o Teorema de Euler também para chamar a atenção de que a definição do que é poliedro não é algo trivial. Como o livro adotado na disciplina não define poliedro, propus uma discussão sobre possíveis definições.*

Este é um interessante ponto relacionado à atividade que propomos, a questão do conceito de poliedros. Na verdade a maioria dos livros não dá uma definição satisfatória de poliedro, e as coisas complicam quando entra em jogo o Teorema de Euler.

Agora sobre a proposta envolvendo raiz quadrada de dois temos o comentário:

*PR2: Sobre a figura dos dois quadrados, ela ajuda bastante a entender a existência de um número cujo quadrado é dois. Agora, a irracionalidade é mais complicado. Como convencer alunos da incomensurabilidade dos segmentos? É preciso recorrer a um raciocínio por absurdo e isso sempre é complicado.*

Isto confirma e reforça o que foi comentado na outra entrevista, além de observarmos que raciocínio por absurdo poderia ser o nosso método para desfechar

[1] O termo “monstros”, usado frequentemente na obra de Lakatos, refere-se aos poliedros para os quais não se verifica a equação V-A+F=2.

um primeiro estudo da raiz quadrada de dois, já que se baseia numa estratégia que poderia servir para verificar a irracionalidade das raízes de outros números.

Sobre o fenômeno ocorrido na atividade relacionada à grade quadriculada, que aplicamos com uma turma, a professora comenta:

*PR2: Meu palpite sobre a "escada" é que os alunos preferem em geral trabalhar com unidades que podem ser contadas. Isso tem a ver com o modo como nossa mente é educada para contar.*

Importante observação, bem cabível se considerarmos a forma como definimos inicialmente área no ensino básico, que se dá, na maioria das vezes, por meio das unidades quadradas, apesar das fórmulas trabalhadas subsequentemente. Como as unidades quadradas são as unidades de área, nada mais natural do que montá-las e contá-las.

# 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Elaborar propostas associadas ao ensino de geometria baseadas em fatos históricos ou, mais especificamente, na história da geometria não é, como vimos, uma questão trivial. As propostas que são elaboradas correm o risco de não darem conta de todos os conhecimentos que se deseja trabalhar, deixando a cargo de possíveis propostas paralelas o papel de complementar, ampliar ou justificar situações que ocorrerão possivelmente junto às atividades já elaboradas. A tarefa de trabalhar conceitos no ensino assume destaque quando trabalhamos com história, uma vez que os conceitos sejam elaborados por algum motivo não muito aparente e estejamos com intenção de não deixar abstrato, nada mais natural do que recorrer à fonte que, muitas vezes, é a própria história. É fato que uma proposta nova, envolvendo questões incomuns, é passível de avaliação de profissionais experientes que às vezes podem prever certas situações para as quais não estejamos dando uma merecida atenção.

É interessante observar que os próprios professores ao lerem os fatos trazidos nas propostas, puderam pensar com vistas à elaboração de mais propostas, ou melhor, "enxergaram" possibilidades apenas vendo as figuras. É o que ocorreu, por exemplo, com a figura que associou os quadrados dentados ao triângulo retângulo. Informamos-nos que certo fato funcionava escolhendo um *n* qualquer e o professor entrevistado sugeriu que o *n* fosse levado ao infinito e isso possibilitaria a demonstração do Teorema de Pitágoras. Então vemos o quanto os fatos históricos são por si só provocadores, já que o que provocou o comentário não foi exatamente minha proposta e sim a figura e algumas considerações que extraí da obra pesquisada naquela parte do texto.

A complicação de avaliar propostas por meio de entrevistas reside na necessidade de disposição dos professores entrevistados, para que as leiam antes. Uma leitura detalhada a ponto de pensar em novas possibilidades de escrevê-las, sem dúvida, exige uma forma rara e especial de disposição por parte dos entrevistados. Cabe considerar a avaliação como uma parte muito delicada quando se faz por meio de entrevistas, já que não seria justo interpretar as falas dos entrevistados de forma radical, supondo considerações que podem não corresponder exatamente àquilo que o entrevistado pretendia passar naquele momento. Assim, acaba sendo realizada uma análise possível, sem que seja entendida como a melhor ou a mais verdadeira.

Os conteúdos explorados neste trabalho são apenas uma pequena fração dos conteúdos trabalhados no ensino básico e já nos deu um razoável trabalho tratar dessas questões com algum aprofundamento. Mesmo assim, esse aprofundamento não foi o suficiente, deixamos de lado, por exemplo, as demonstrações do Teorema de Euler para ressaltar o conceito de poliedro. O ensino de Teorema de Euler merece um aprofundamento maior do que o tratado aqui e muito maior do que o que vem sendo tratado no ensino básico. Ficando como sugestão a trabalhos subsequentes a possibilidade de elaborar propostas que deem conta da história da demonstração do Teorema de Euler e de seu impacto no ensino. O Teorema de Pitágoras é um teorema que apresenta uma enorme gama de demonstrações na história da matemática, cada uma sujeita a inspirar propostas para o ensino.

Por fim, concordamos que a forma como somos educados influi na nossa compreensão da matemática e a história pode sugerir um desenvolvimento dos conteúdos bem diferente daquela a que estamos acostumados, uma nova atmosfera. Cabe-nos não rebaixar ao esquecimento ou mesmo descartar aquilo que se tornou aparentemente ultrapassado, uma vez que altera indubitavelmente nosso futuro e amplia e expande nosso presente.

## REFERÊNCIAS


GASPAR, Maria Terezinha Jesus. **Aspectos do desenvolvimento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores.** Rio Claro (SP): UNESP, 2003. 307 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. **Mosaico, mapa, memória:** ensaios na interface história oral - e educação matemática. Bauru: Canal 6/e-GHOEM, 2006. CD-ROM. – (Coleção e-GHOEM. História oral e educação matemática, 1)

LAKATOS, Imre. **A lógica do descobrimento matemático**: provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

MIGUEL, Antonio. **Três estudos sobre História e Educação Matemática**. Campinas: UNICAMP, 1993. 274 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

NUNES, José Messildo Viana; ALMOULOUD, Saddo Ag; GUERRA, Renato Borges. O contexto da História da Matemática como organizador prévio**. Bolema**, Rio Claro, SP, v. 23, nº 35B, p. 537-561, abr. 2010.

RADICE, Lucio L. **A matemática de Pitágoras a Newton**. Lisboa: Edições 70, 1985.

TENÓRIO, Robinson M. **Aprendendo pelas raízes**: alguns caminhos da matemática na história. Salvador: Centro Editorial e Didático da UFBA, 1995.

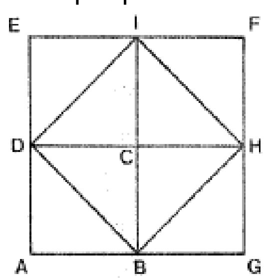
**APÊNDICE**

Roteiro de entrevista por assuntos:

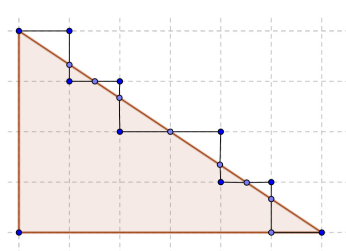
1) O que você acha da proposta inspirada na obra de Gaspar, sobre construção com régua e compasso, da demonstração chinesa, com quadrados sobre catetos seguida da recortagem e colagem das peças I, II e III para o completamento do quadrado sobre a hipotenusa? Quais os “prós” e “contras” e o que poderia melhorar, em sua opinião?

2) Sobre a proposta inspirada em Lakatos, que trata do conceito de Poliedros: Associar as figuras apresentadas na obra às definições dadas à poliedro pelo “professor” em Lakatos, em sua opinião, é uma proposta viável, quais as vantagens e desvantagens, o que poderíamos melhorar nela?

3) Para alunos do ensino básico, você acha interessante definir raiz quadrada de dois usando a figura abaixo? Quais os prós ou contras, em sua opinião? O que você acha que poderia melhorar?




4) Quanto à atividade final que trabalha a definição de área, vimos que os alunos encontraram triângulos semelhantes aos iniciais porém com “escadas”, sugerindo os quadrados dentados explorados por Antônio Miguel. Porém numa resolução mais complicada, enquanto a mais simples seria completar o triângulo como um só retângulo, dividindo-o ao meio. Porque você acha que isso ocorreu? Teria essa ocorrência algum significado? O que você achou da lista de questões sobre áreas proposta a turma?



## ANEXO

## TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu_____________________________________________________________________, portador de RG ____________________________, autorizo por meio desse instrumento que ________________________________________________ utilize a entrevista concedida a este, para uso exclusivo de seu trabalho de pesquisa intitulado: __________________________________________________________

Declaro que possuo ciência dos objetivos dessa pesquisa e que concordo com os fins a que se propõe.

________________, _____ de__________ de 2012.

___________________________________________