UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MELISSA MEIER

MODELAGEM GEOMÉTRICA E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO NO ENSINO FUNDAMENTAL

PORTO ALEGRE

2012

MELISSA MEIER

MODELAGEM GEOMÉTRICA E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de mestrado elaborada junto ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, com requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática da Universidade federal do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Maria Alice Gravina

PORTO ALEGRE

2012

MELISSA MEIER

MODELAGEM GEOMÉTRICA E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de mestrado elaborada junto ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, com requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática da Universidade federal do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Maria Alice Gravina

BANCA EXAMIDADORA

Prof[a]. Dr[a]. Leandra Anversa Fioreze
Departamento de Matemática – UFSM

Prof[a]. Dr[a]. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
Instituto de Matemática – UFRGS

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Instituto de Matemática - UFRGS

DEDICATÓRIA

A meu filho muito amado, Carlos. Ele bem sabe que é a inspiração de minha vida e que poder acompanhar seu crescimento é o melhor aprendizado que posso ter.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Profª. Drª. Maria Alice Gravina pela compreensão, dedicação e paciência durante a realização deste trabalho. Agradeço, também, pelas experiências e aprendizados do período da graduação, pois estes serviram como fontes de motivação e inspiração para a construção deste trabalho.

Aos professores do curso de Pós-Graduação em Ensino de Matemática pelos momentos de aprendizado e reflexão.

Aos professores Marcus Vinicius de Azevedo Basso e Cydara Cavedon Ripoll pela crença em minha capacidade como aluna e professora de matemática e pelo exemplo profissional ético e competente.

Aos meus colegas de mestrado pelas trocas de experiência realizadas neste período e, em especial, aos amigos Fernando, Israel e Josy pelo companheirismo, momentos de estudo, e, principalmente, por tornarem este período mais divertido e feliz.

A professora Maristela Kayser e demais profissionais que atuam na escola em que a pesquisa foi realizada.

Aos alunos pelo entusiasmo, espontaneidade e paciência constantes. Com eles tenho a oportunidade de continuar sempre aprendendo.

Aos meus familiares e amigos, pela compreensão e apoio em todos os momentos em que estive ausente envolvida com as atividades do mestrado.

Á minha orientadora espiritual e companheira da eternidade Alice por auxiliar e iluminar minha caminhada.

Ao Eduardo que, de forma especial, me dá força e coragem, apoiando meu entendimento da matemática e da vida.

O grande livro da natureza só pode ser lido por aqueles que conhecem o idioma no qual foi escrito. E esse idioma é a matemática.

Galileu Galilei (1564-1642)

RESUMO

Esta dissertação apresenta, a partir da atividade de modelagem geométrica, uma proposta para o desenvolvimento de hábitos do pensamento matemático no Ensino Fundamental. Iniciamos o trabalho com reflexões que justificam a proposta: trouxemos a opinião de um grupo de professores acerca do trabalho com argumentações matemáticas na escola e as explicações apresentadas por um grupo de alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental para justificar algumas propriedades matemáticas. Após estas reflexões, apresentamos os fundamentos teóricos da proposta: o trabalho de Goldenberg a respeito do desenvolvimento dos "hábitos do pensamento", a serem entendidos como modos de pensar que contribuem para desenvolvimento do pensamento matemático. Avançamos com questões relativas à utilização de tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática e, em particular, tratamos do uso do software GeoGebra. Em continuidade, foi apresentado o site "Geometria em Movimento", um material didático que trata de modelagem geométrica. Quanto à metodologia usada no desenvolvimento da proposta, nos inspiramos na Engenharia Didática e, com isso, concebemos, implementamos e validamos um experimento didático. Durante a realização do experimento, os alunos mostraram um gradativo desenvolvimento dos hábitos do pensamento. De início, construíram modelos apresentados no site "Geometria em Movimento" e ao final construíram seus próprios modelos e foram autores de projetos nos quais explicitaram, com desenvoltura, seus raciocínios matemáticos.

Palavras chaves: Geometria Dinâmica. Modelagem Geométrica. Hábitos de Pensamento Matemático. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

The aim of this work is to present an approach to the development of mathematical thinking in elementary school through the geometric modeling activity. In this study, we bring the opinion of a group of teachers about the work with mathematical arguments in school and the explanations that eighth grade students gave to justify some fundamental mathematical properties. This proposal is based on the work of Goldenberg about the development of learning habits, which contributes to the development of mathematical thinking. Also, in this study, we discuss technology in mathematics teaching and learning, using GeoGebra software, as well as the website Geometry on Motion, which is a teaching material about geometric modeling. We had look at Didactic Engineering to design, to implement, and to validate this teaching experiment. During this process, the students showed a gradual development of learning habits: initially they built models proposed, on the site Geometry in Motion and afterwards they built their own models and projects, when it was possible to observe their skills in mathematical reasoning.

Keywords: Dynamic Geometry. Geometrical Modelling. Mathematical Learning Habits. Elementary School.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Sempre tivemos a certeza de que, considerando o mundo em que vivemos, a educação tem o poder de transformar a sociedade ao ponto de torná-la culturalmente plural e socialmente igualitária.

Entendemos que esta transformação da sociedade é uma das responsabilidades dos educadores, e que cabe a eles iniciar este processo, zelando sempre por uma educação que propicie ao aluno bases sólidas para o seu desenvolvimento intelectual. Em função disso, defendemos uma prática docente em que o professor questione, avalie e qualifique constantemente suas ações, analisando a forma como estas estão se refletindo no comportamento e na postura do aluno.

É importante compreender, também, que o trabalho na escola básica, principalmente no Ensino Fundamental, é a base para esta transformação. É neste período que ocorre um relevante desenvolvimento do raciocínio matemático do aluno, bem como, de sua sensibilização e familiarização com a disciplina. Dessa forma, cabe, também, ao professor a tarefa de buscar alternativas didáticas para desenvolver um trabalho no qual o aluno seja capaz de "demonstrar interesse para investigar, explorar e interpretar, em diferentes contextos do cotidiano e de outras áreas do conhecimento, os conceitos e procedimentos matemáticos abordados neste ciclo" (PCN, Matemática, 1997, p.56).

A partir de nossa experiência com Ensino Fundamental, percebemos que os alunos possuem muita dificuldade em estabelecer conexões entre os conteúdos matemáticos e suas interações com o mundo. Para uma parcela significativa de alunos, a aprendizagem matemática é momentânea e mecânica. Esta constatação suscitou-nos o seguinte questionamento: estamos, no Ensino Fundamental, desenvolvendo formas de pensamento matemático que incentivam a observação, a experimentação, o errar e refinar suposições, de forma a contribuir para uma aprendizagem mais duradoura? Estamos explorando dados e procurando estabelecer conexões dentro e fora da Matemática e desenvolvendo, desta forma, habilidades que possibilitam a interação do aluno com o mundo que o rodeia?

Essas perguntas nos inquietam e nos trazem a certeza de que queremos buscar alternativas que contribuam para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Devido a isso, em nossas leituras sobre o assunto, entramos em contato com o estudo de Paul

Goldenberg (1998a, 1998b[1]), o qual fala sobre a importância do desenvolvimento de hábitos de pensamento matemático nos alunos. Goldenberg destaca que o desenvolvimento destes hábitos do pensamento depende do envolvimento dos alunos em ações de exploração e investigação.

No ensino da Geometria tem-se um contexto muito propício para este tipo de envolvimento dos alunos, pois, no processo de aprendizagem, eles precisam visualizar figuras, analisar relações entre seus elementos, identificar regularidades, fazer conjeturas sobre propriedades identificadas – ações que são características do pensamento matemático. E, quando se faz uso de softwares de geometria dinâmica, podemos potencializar o envolvimento dos alunos, conforme apontam estudos de Armella (2008) e Gravina (2011a). Os programas de geometria dinâmica, dentre eles o GeoGebra[2], são ferramentas que permitem a construção de figuras geométricas a partir das propriedades que as definem. A manipulação direta de objetos construídos e que são colocados em movimento na tela do computador faz com que os alunos observem os resultados obtidos, primeiramente de forma empírica, mas depois buscando explicar as regularidades que vão se tornando cada vez mais evidentes.

Muitas são as propostas de ensino que fazem uso dos ambientes de geometria dinâmica, tratando, essencialmente, da construção de figuras geométricas e do estudo de suas propriedades. Entretanto, uma proposta de ensino ainda pouco mencionada é a modelagem geométrica. É, sobretudo, a influência do período da graduação (Licenciatura em Matemática pela UFRGS) que direciona nossa opção de pesquisa para esta situação de aprendizagem de natureza lúdica.

Em nosso primeiro semestre da graduação, fomos convidados a observar o mundo ao nosso redor e perceber a geometria das formas em movimento. Nossa tarefa, naquela ocasião, era escolher um objeto e construir seu modelo geométrico (representação na linguagem da matemática de um determinado fenômeno). Realizar esta atividade, ou seja, construir nosso próprio modelo (Figura 1), ampliou nosso entendimento sobre a matemática, de forma que conseguimos começar a percebê-la como uma ciência que vai além dos números e das formas.

[1] Estes dois artigos de Paul Goldenberg estão disponíveis na revista digital Revista Educação e Matemática (APM). Como arquivo html não possui numeração de páginas e, assim sendo, nas eventuais transcrições de ideias de Goldenberg, neste texto, não serão feitas referências de páginas.
[2] Software de geometria dinâmica totalmente gratuito e disponível para download em http://www.geogebra.org/.

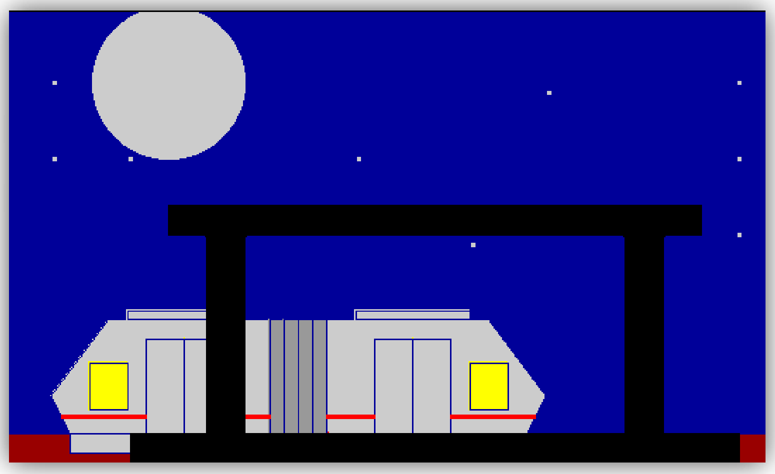


Figura 1 – Modelagem Geométrica que representa o metrô da região de Porto Alegre desenvolvida pela autora no Cabri Géomètre durante sua graduação[3].

Assim, buscamos, através desta dissertação, responder à seguinte pergunta:

Com a modelagem geométrica é possível desenvolver hábitos de pensamento matemático no Ensino Fundamental?

Para isso, o trabalho fundamentou-se nas propostas apresentadas pelas diretrizes curriculares nacionais. Realizamos, então, pesquisas junto a um grupo de professores e alunos da Escola Básica sobre o desenvolvimento do pensamento matemático, assim como utilizamos o estudo de Goldenberg (1998a, 1998b) sobre o desenvolvimento dos hábitos de pensamento. Tal fundamentação é apresentada no Capítulo 2 desta dissertação.

No Capítulo 3, buscamos definir e justificar nossas escolhas didáticas abordando questões relativas à utilização de tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática, e apresentando o software escolhido (GeoGebra) para ser utilizado durante o experimento didático. Também, neste capítulo, tratamos das potencialidades dos ambientes de geometria dinâmica no desenvolvimento dos hábitos do pensamento e as possibilidades agregadas ao ensino da Geometria em um trabalho voltado para a modelagem geométrica.

No que se refere à organização e aplicação de proposta didática, criamos um material específico no formato de site, intitulado "Geometria em Movimento". No capítulo 4, apresentamos, portanto, este material, destacando, inicialmente, a forma como nossas experiências com a Educação a Distância (EAD) influenciou sua elaboração.

[3] Atividade desenvolvida em 2002 para a disciplina de Geometria I do curso e licenciatura em matemática da UFRGS. Material está disponível no link: http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/atividades_galeria_trabalhos/ativ_cabri_2002_1/trensurb/trensurb.htm

No Capítulo 5, tratamos da metodologia de pesquisa utilizada, a Engenharia Didática. Na sequência, descrevemos o desenrolar do experimento didático e a análise de seus resultados, considerando os hábitos do pensamento evidenciados pelos alunos na realização das atividades propostas.

Finalizamos nossa dissertação de mestrado no Capítulo 6, apresentando nossas reflexões acerca dos resultados da pesquisa.

2 REFLEXÕES SOBRE A APRENDIZAGEM E O ENSINO DA MATEMÁTICA ESCOLAR

Neste capítulo, apresentamos os referenciais teóricos que dão sustentação ao nosso trabalho. Na primeira seção, abordamos o desenvolvimento do pensamento matemático, verificando as tendências atuais e o que se espera para o ensino/aprendizagem desta área do conhecimento. Na segunda seção, buscando complementar as ideias já apresentadas, trazemos dados obtidos em questionários aplicados com professores e alunos. Estes questionários buscaram identificar, mesmo com aplicação em um pequeno grupo, a compreensão e importância que é atribuída, pelos professores, ao desenvolvimento das diversas formas do pensar em matemática; e no grupo de alunos, cursando o oitavo ano do Ensino Fundamental, procurou identificar habilidades quanto a formas de pensar em matemática.

Na terceira e última seção do capítulo, trazemos as ideias de Goldenberg (1998) sobre o desenvolvimento de hábitos do pensamento matemático. Acreditamos que as ideias deste autor possibilitam a construção de uma aliança entre o que teoricamente se espera e o que realmente se consegue fazer no ensino/aprendizagem da Matemática. Por este motivo, os estudos deste autor embasaram a concepção e implementação do nosso experimento didático, a ser detalhado no capítulo 5.

2.1 Primeiras reflexões

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) sinalizam que a matemática "*não evoluiu de forma linear e logicamente organizada, desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas*" (p.25). Desta forma, a matemática escolar não deve "*olhar para as coisas prontas e definitivas, mas para a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno*" (p.56). Assim, o currículo escolar precisa ser organizado, de modo que:

> Os alunos desenvolvam a própria capacidade para construir conhecimentos matemáticos e interagir de forma cooperativa com seus pares, na busca de soluções para problemas, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 1998, p.63)

Porém, segundo Sangiacomo (1996), o *olhar* do professor "*é fortemente influenciado pelos livros didáticos*". Em nossa prática docente - vivência escolar - percebemos que, em geral, o professor procede da seguinte maneira: prepara a aula utilizando a matéria apresentada pelos livros didáticos que possui e utiliza um deles para indicar exercícios aos alunos e outro para elaborar suas avaliações. Neste sentido, é fundamental o questionamento quanto à qualidade dos livros didáticos que estamos utilizando nas escolas.

Através de uma análise feita nos livros didáticos do Ensino Fundamental, usados na escola da autora deste trabalho, constatamos que muitos conteúdos continuam sendo apresentados sem incentivo à construção do conhecimento. Observamos inclusive que as proposições matemáticas são ensinadas através do convencimento (teoremas são apresentados sem a argumentação que explique a propriedade enunciada). A análise feita evidencia que estes livros didáticos estão atribuindo demasiada importância ao aprendizado do produto final sem o devido desenvolvimento dos processos matemáticos.

Em nossa prática docente percebemos, também, que os professores não compreendem que estão indo em um sentido contrário as indicações dos parâmetros curriculares nacionais, ou seja, não percebem que estão, sobretudo, "*olhando para as coisas prontas e definitivas*". A partir de entrevistas realizadas com professores da Escola Básica, encontramos como justificativa para este comportamento os seguintes fatores: uma formação acadêmica que não prepara para uma análise crítica dos livros didáticos e a falta de tempo para refletir sobre o planejamento das aulas.

O que defendemos é a transformação desta prática docente, que está sufocada pela realidade enfrentada na educação brasileira e que não questiona mais os processos de aprendizagem do aluno. Em nossas leituras, descobrimos que esta é uma preocupação antiga em vários países, e que muitos são os pesquisadores e educadores que tentam reverter esta realidade. Silva defende a ideia de que:

> Todos os cidadãos devem ter acesso a uma formação que, muito para além dos aspectos utilitários da matemática, valorize a compreensão da natureza da matemática, das suas características como modo de pensar e como atividade humana. (SILVA et al, 1999, p.70).

Neste sentido, percebemos que as orientações curriculares nacionais para o ensino de matemática, na escola básica contemporânea, destacam a importância das atividades investigativas e a resolução de problemas, como formas de trabalhar com os alunos que podem ajudar no desenvolvimento do pensamento matemático. Este tipo de atividade pode ser um incentivo à curiosidade, ao interesse e à persistência dos alunos.

A respeito disso, o matemático Polya, autor do livro "A arte de resolver problemas", escrito em 1944, foi um precursor. Ele acreditava que existe uma arte da descoberta; para ele, a capacidade de descobrir e a capacidade de inventar podem ser desenvolvidas através de um ensino habilidoso que alerte os estudantes para os princípios desta arte da descoberta.

A investigação, no contexto de ensino, significa trabalhar buscando respostas para questões que, de início, podem ser difíceis e até mesmo pouco claras. São questões sobre as quais produzimos respostas que são conjecturas, e então as testamos, buscamos provas até validá-las, de modo fundamentado e organizado (PONTE, 2004). Nesse contexto, o conhecimento não é algo pronto e o professor não possui um roteiro de aprendizagem a ser seguido. Investigar pode levar o aluno a caminhos matemáticos inesperados e não planejados, e isto enriquece o processo de aprendizagem.

Fonseca (2000) afirma, também, que "*a realização de trabalho investigativo possibilita que os alunos façam matemática e se envolvam no pensamento matemático e não apenas que a observem*", pois são inseridos em um espírito de exploração matemática. Essa exploração irá contribuir para a compreensão e utilização das ideias matemáticas, sem que haja uma mecanização de procedimentos, e assim o conhecimento tornar-se-á significativo.

Nossas reflexões, nesta seção, tem o propósito de evidenciar que a investigação e a descoberta são contextos de trabalho que devem ser cada vez mais contemplados nas práticas de ensino; são momentos em que os alunos têm a oportunidade de desenvolverem os hábitos do pensamento matemático. Esta é uma questão que vamos tratar com mais detalhes na seção 2.3.

2.2 Sobre o desenvolvimento do pensamento matemático no Ensino Fundamental

Nesta seção, apresentamos um recorte de realidade escolar, no universo dos professores e dos alunos. Com um grupo de professores da Educação Básica foi realizada uma discussão onde eles explicitaram suas opiniões sobre desenvolvimento de um trabalho com demonstrações matemáticas no Ensino Fundamental e, também, sobre a forma como estão trabalhando o desenvolvimento do pensamento matemático de seus alunos. E aplicando um questionário com grupo de alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental procuramos identificar suas habilidades para raciocínios que são característicos do pensamento matemático.

Esta investigação inicial sobre a realidade escolar foi realizada em um período no qual não havíamos definido o tema de pesquisa desta dissertação e nosso foco encontrava-se voltado para a possibilidade de se trabalhar com demonstrações matemáticas no Ensino Fundamental. Os resultados obtidos e aqui apresentados contribuíram com o direcionamento de nossas decisões. Na análise deste recorte de realidade, incluímos reflexões teóricas com o propósito de trazer subsídios para avançarmos na direção de estratégias de ensino, para a educação escolar, que provoquem o desenvolvimento do pensamento matemático.

2.2.1 O que pensam os professores

Na primeira parte da pesquisa, contamos com a participação de vinte e um professores da Educação Básica, dentre os quais haviam alunos e ex-alunos do curso de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS. Este curso disponibiliza, além das disciplinas do programa, um espaço para debates e trocas de ideias entre alunos e ex-alunos, organizado em encontros semanais, com duração de uma hora. Também, paralelamente a estes encontros, o grupo discute à distância, trocando mensagens com o auxílio de uma lista de e-mail. Optamos pela utilização desses espaços para apresentar ao grupo o tema de debate: o desenvolvimento do pensamento matemático no Ensino Fundamental.

Assim, iniciamos a pesquisa enviando por e-mail um questionário, a ser respondido pelo grupo, que buscava investigar quais seriam as indicações quanto às possíveis formas para se trabalhar com demonstrações matemáticas no Ensino Fundamental. Em um segundo momento, nos encontramos pessoalmente com o grupo para discutir sobre as respostas apresentadas.

O trabalho com demonstração matemática, no Ensino Fundamental, é um tema polêmico e gerou divergências dentro do grupo. Constatamos, a partir destas divergências, que dois aspectos, sobre demonstrações no ensino da matemática precisam ser melhor compreendidos. São eles: a) quanto ao significado de uma demonstração matemática; b) quanto a atitude do professor que organiza e apresenta uma demonstração.

No que se refere ao significado de uma demonstração matemática trazemos no quadro abaixo as respostas apresentadas pelo grupo para a seguinte questão: *Explique, de forma resumida, o que entendes por demonstração no ensino/aprendizagem de matemática. Podes utilizar um exemplo, caso considere interessante, nesta explicação.*

QUANTIDADE	BASE DO ENTENDIMENTO	TRECHOS TRANSCRITOS
7	Demonstração como processo de generalização.	“Generalizar situações ou fatos. Todo número dividido por ele mesmo é 1” “aluno ver a generalização do que esta estudando, o quanto aquilo é válido” “é uma maneira de comprovar ideias matemáticas fazendo generalizações” “buscar padrões e generalizar= “demonstrar situações algebricamente, uma “sopa de letrinhas”” “explicação generalizada,...justificar um resultado,...levar o aluno a pensar sobre” “compreender a generalidade de uma fórmula, teorema, propriedade”
4	Demonstração como uma aula no quadro, em que o professor opera com manipulações matemáticas que chegam a uma equação associada a um "c.q.d."	“Provar formalmente” “Convencimento de algum teorema, baseado na lógica e com rigor matemática, com exatidão” “Entendo por demonstração o raciocínio formal que mostra a verdade de certo fato matemático.” “Demonstração é o uso de uma hipótese inicial (axioma) a partir do qual se obtém, usando lógica, outras verdades (teoremas).”
2	Demonstração como processo que estabelece veracidade de uma situação (Verdadeiro ou falso)	“Prova que determina se a proposição é verdadeira ou falsa” “É uma sequência de argumentos lógicos que provam ser verdadeiro certo fato chamado teorema”
3	Demonstração como ferramenta para mostrar a origem do conteúdo matemático.	“fique claro o porquê de operar desta ou daquela maneira” “...como as coisas acontecem, de onde elas vieram...” “a ideia matemática em questão não vem do nada, que foi construída com base em outras ideias (teoremas, postulados...), que tem lógica”
3	Demonstração como processo do entendimento.	“Dar sentido no entendimento da matemática” “Encadeamento lógico que possibilita ao aluno assimilar de forma clara um resultado matemático” “Fazer com que o aluno construa o conhecimento matemático”

Quadro 1 - Quadro-resumo das respostas apresentadas para a primeira pergunta do questionário direcionado a professores da Escola Básica.

Nas manifestações dos professores, registradas no quadro acima, percebe-se uma ênfase no entendimento da demonstração como um processo formal e rigoroso de raciocínio. Ao discutir com o grupo esta mesma questão, também, observamos o destaque dado para a relação entre demonstração matemática e formalismo matemático, e isso, como justificam os professores, não seria possível na escola básica, considerando-se o estágio de desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Quanto a esta posição, nos parece que é preciso repensar o entendimento do significado de uma demonstração matemática. Se considerarmos, como expresso em algumas opiniões, que demonstrações são argumentos que dependem de rigor matemático, estaremos desconsiderando as possibilidades de desenvolvimento do pensamento do aluno através de ações que envolvem explorações, formulações e argumentações que explicam a validade de determinadas propriedades – podem ser argumentos sem a formalidade matemática, mas generalizadores de ideias que contém o germe de uma demonstração.

Esta visão restrita quanto ao significado de uma demonstração, pode explicar a ausência, na escola, do desenvolvimento de certos hábitos do pensamento matemático. Apesar de a demonstração ser um tipo de argumento que faz parte da atividade matemática, ela acaba recebendo um tratamento inadequado na escola ou fica a margem do processo de formação dos alunos. Pietropaolo (2005) afirma que existem duas espécies de demonstração, "*a que valida e a que também explica – é que a explicativa termina por utilizar raciocínios baseados em ideias matemáticas, enquanto a mera prova formal emprega basicamente regra de sintaxe.*". Entendemos que com o aluno do Ensino Fundamental é importante trabalhar com a demonstração que explica, pois através dela ele pode entender os "porquês" das propriedades matemáticas e assim pode construir conhecimento matemático.

Educadores e pesquisadores buscam reverter este quadro de excessivo formalismo, quando se fala de demonstração (Ballacheff, 1987; Healy &Hoyles, 1998; Villiers, 1999). Seus trabalhos tratam de destacar a importância da criação e da descoberta no processo de aprendizagem da Matemática, e eles comentam que são os erros e acertos que fazem com que a atividade matemática se transforme em uma ação dinâmica, na qual o objetivo é a construção do conhecimento e o desenvolvimento do pensamento matemático.

No trabalho de Ballachef (1987) tem-se uma preocupação específica quanto ao tipo de argumentação produzida pelos alunos na passagem do pensamento empírico para o pensamento dedutivo. O autor propõe duas categorias de *provas* (neste trabalho a palavra prova é considerada sinônimo de demonstração) produzidas pelos alunos. São elas:

- Provas pragmáticas: são as que se apoiam em conhecimentos práticos e na ação do sujeito.
- Provas intelectuais: são as que envolvem formulações e relações entre propriedades.

O autor afirma que é o tipo de raciocínio e o conhecimento em jogo que diferencia a prova pragmática da prova intelectual. A passagem de uma prova para a outra é marcada por uma evolução dos meios de linguagem. O autor identifica quatro diferentes níveis nesse processo. São eles:

- Empirismo Ingênuo – sujeito toma, para validação de uma propriedade, alguns poucos casos, sem questionar particularidades.

- Experimento Crucial - validação de uma proposição em que o sujeito enuncia explicitamente a generalização, mas resolve o problema considerando um caso particular que tem solução.

- Exemplo Genérico – explicação da validade de uma proposição a partir do estudo de um objeto que representa as características de um conjunto de objetos.

- Experimento Mental – explicação interiorizada e desligada de representante particular.

A fim de compreendermos mais claramente os níveis que subdividem a prova, apresentamos, abaixo, um relato de uma experiência que ilustra os diferentes níveis. Gravina (2001) cita Balacheff (1987), onde o problema proposto é identificar o número de diagonais de um polígono.

No empirismo ingênuo, os alunos determinam, experimentalmente, que o número de diagonais de certo pentágono é 5; modificam a forma do pentágono e conferem novamente a constatação inicial; daí concluem, peremptoriamente, que um hexágono tem 6 diagonais.

Na experiência crucial, os alunos fazem experiência com um polígono de muitos vértices (uma imensa figura), buscando depreender generalização empírica, buscando a validação em outros casos particulares.

No exemplo genérico os alunos utilizam o caso particular do hexágono para explicação, mas desprendem-se de particularidades, o que dá indícios de pensamento dedutivo: “num polígono com 6 vértices, em cada vértice temos 3 diagonais. Assim, são 18 diagonais, mas como uma diagonal une dois pontos, o número de diagonais é 9. O mesmo acontece com 7 vértices 8,9.....”

E, finalmente, na experiência mental os alunos se desprendem do caso particular o que transparece na argumentação: “em cada vértice o número de diagonais é o número de vértices menos os dois vértices vizinhos; é preciso multiplicar isto que encontramos pelo número de vértices, porque em cada vértice parte o mesmo número de diagonais. Mas estamos contando cada diagonal duas vezes; o número de diagonais que procuramos se encontra dividido por 2 e obtemos uma vez cada diagonal”.

Dessa forma, destacamos que é importante compreender que, mesmo quando o aluno apresenta uma prova pragmática em um estágio inicial de validação, ele está conjecturando, está refletindo sobre sua ação. Cabe ao professor reconhecer este *conhecimento* e propiciar ao aluno experiências que estimulem seu desenvolvimento.

O segundo aspecto, mencionado acima, no qual identificamos a necessidade de ampliar o entendimento, diz respeito ao *professor que organiza e apresenta uma demonstração*. Também, a partir dos argumentos apresentados durante os debates com o grupo de professores, observamos que alguns deles ainda acreditam na centralização da atenção ao professor, em sala de aula, e na transmissão do conhecimento para o aluno. Entendem que, quando o professor organiza e apresenta no quadro uma demonstração matemática e o aluno assiste passivamente, tem-se as condições para que o aluno entenda o raciocínio ao ponto de conseguir repeti-lo em outro momento. Os primeiros passos para um trabalho com demonstração matemática podem ser nesse sentido, mas entender a repetição como única estratégia de trabalho limita a participação ativa do aluno em seu próprio aprendizado e não permite o desenvolvimento de habilidades que o tornem autônomo.

2.2.2 Como pensam os alunos

Na segunda etapa da pesquisa - inspirada em trabalho de Healy e Hoyles (1998) – buscamos informações sobre conhecimento matemático e níveis de argumentação e justificativa dos alunos. Para isso aplicamos um questionário com cinco questões que solicitavam respostas descritivas.

Os alunos selecionados para responderem o questionário, do oitavo ano do Ensino Fundamental, também participaram do experimento didático apresentado nesta dissertação. Foram coletados 30 questionários.

Nas cinco questões escolhidas para o questionário, procuramos um equilíbrio entre questões algébricas e geométricas - foram propostas duas questões de álgebra e três de geometria. Quatro dessas questões, as questões 1, 2, 3 e 5, foram retiradas do material elaborado por Healy e Hoyles (1998) e uma questão, a questão 4, do material da OBMEP.

Nossa hipótese inicial era de que os alunos teriam maior facilidade com as questões de geometria por suas características visuais, que possibilitam experimentações e investigação sem um maior conhecimento de métodos (fórmulas) matemáticas.

A análise dos questionários foi organizada da seguinte forma:

- quanto à classificação das respostas apresentadas pelos alunos

Tomamos como referência o trabalho de Healy e Hoyles (1998), fizemos adaptações e definimos os seguintes níveis:

(-2) – Resposta em branco

(-1) – Respostas do tipo: não sei, não entendi.

(0) – Respostas totalmente erradas, que não apresentam argumentos ou que repetem o enunciado do problema.

(1) – Alguma informação pertinente, como resposta empírica.

(2) – Alguma dedução, mas sem os passos necessários para uma prova.

(3) - Respostas corretas e totalmente justificadas.

- quanto à classificação das justificativas apresentadas pelos alunos

Também inspiradas no trabalho de Healy e Hoyles, utilizamos os quatro diferentes níveis que marcam a evolução dos argumentos que são propostos por Ballachef (1987) apresentados na seção anterior e aqui retomados:

- Empirismo Ingênuo – sujeito toma, para validação de uma propriedade, alguns poucos casos, sem questionar particularidades.

- Experimento Crucial - validação de uma proposição em que o sujeito enuncia explicitamente a generalização, mas resolve o problema considerando um caso particular que tem solução.

- Exemplo Genérico – explicação da validade de uma proposição a partir do estudo de um objeto que representa as características de um conjunto de objetos.

- Experimento Mental – explicação interiorizada e desligada de representante particular.

Nossa intenção não foi fazer um estudo estatístico dos dados coletados, como no trabalho apresentado por Healy e Hoyles (1987). Nosso interesse maior foi observar se, no nosso contexto escolar, encontraríamos um quadro similar ao que foi apresentado pelas autoras. Nossa intenção foi verificar se a variação nos níveis de argumentação matemática de nossos alunos seguiria a mesma tendência do universo de alunos observado pelas pesquisadoras.

Abaixo, apresentamos as questões que foram aplicadas, a tabulação quanto a classificação das respostas e também trazemos exemplos de argumentos apresentados pelos alunos, fazendo referência aos níveis de argumentação que identificamos.

QUESTÃO 1

As figuras abaixo são quadriláteros:

É verdade que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre 360°? Justifique sua resposta:

Figura 2 – Questão 1.

Tabulação das respostas:

NÍVEL	-2	-1	0	1	2	3
QUANTIDADE	0	0	14	15	1	0

Quadro 2 - Tabulação das respostas da questão 1.

Dezesseis alunos responderam que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°. Os argumentos utilizados com maior frequência foram:

Argumentos empíricos

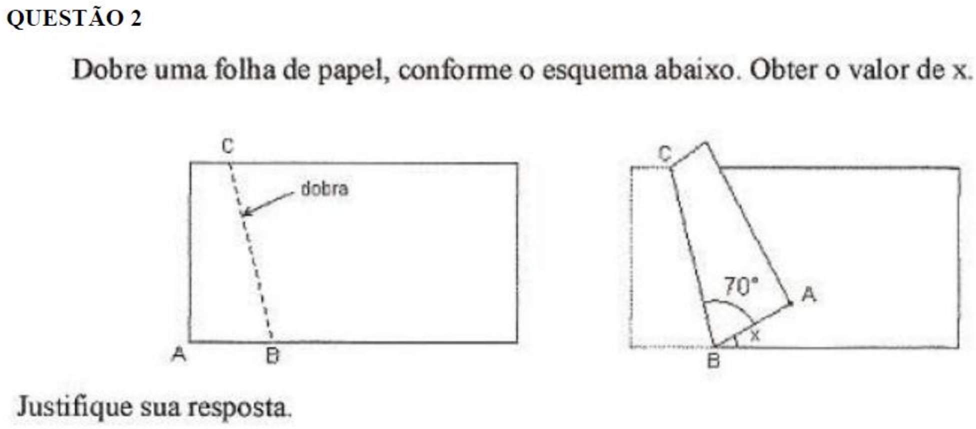
"Cada ângulo tem 90°, noventa vezes 4 é 360°."

"Triângulo não é 360°, então no quadrilátero dá 360°."

"A metade é 180°, então um inteiro é 360°".

Argumentos mais elaborados que ainda utilizam ideias empíricas em suas justificativas.

> “*Se brincarmos com um retângulo, como no GeoGebra, as medidas dos ângulos vão variar, mas uma vai sempre completar a outra.”*
>
> *“Ângulos de dentro com os ângulos de fora dá 360°.”*


QUESTÃO 2

Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.

Justifique sua resposta.

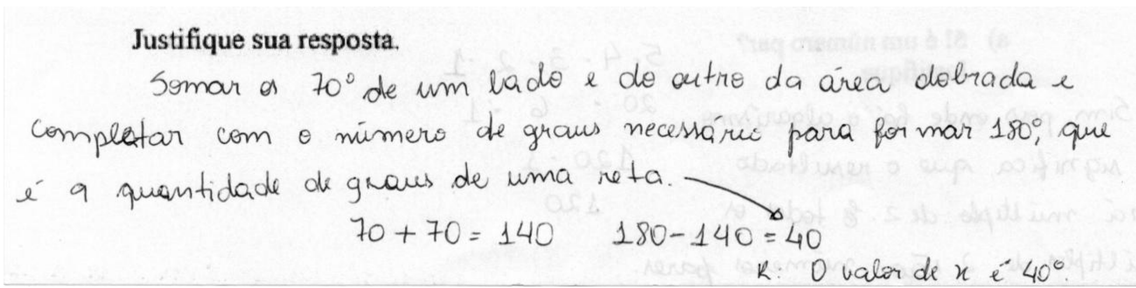
Figura 3 – Segunda questão do questionário planejado para aplicação com alunos.

Tabulação das respostas:

NÍVEL	-2	-1	0	1	2	3
QUANTIDADE	14	3	4	8	1	0

Quadro 3 - Tabulação das respostas da questão 2.

Apenas um aluno apresentou uma dedução correta para esta questão. Em sua resposta identificamos um argumento mais elaborado que ainda utiliza ideias empíricas em suas justificativas.


Justifique sua resposta.

Somar os 70° de um lado e de outro da área dobrada e completar com o número de graus necessário para formar 180°, que é a quantidade de graus de uma reta.

70 + 70 = 140 180 − 140 = 40

R: O valor de x é 40°.

Figura 4 – Resposta apresentada para a questão 2 do questionário planejado para aplicação com alunos.

Abaixo, apresentamos exemplos de argumentos empíricos que comprovaram erro na compreensão da imagem:

“Metade de 70° é 35°.”

“20 porque juntos somam 90”

Identificamos, pelos argumentos apresentados, uma dificuldade na interpretação (leitura) da imagem. A proposta de simular mentalmente a modificação da imagem através de uma dobra não foi compreendida pela maioria dos alunos.

QUESTÃO 3

A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

Figura 5 – Quarta questão do questionário planejado para aplicação com alunos.

Tabulação das respostas:

NÍVEL	-2	-1	0	1	2	3
QUANTIDADE	1	1	10	16	0	2

Quadro 4 - Tabulação das respostas da questão 3.

Vinte e três alunos afirmaram que a soma de dois números ímpares quaisquer é sempre um número par.

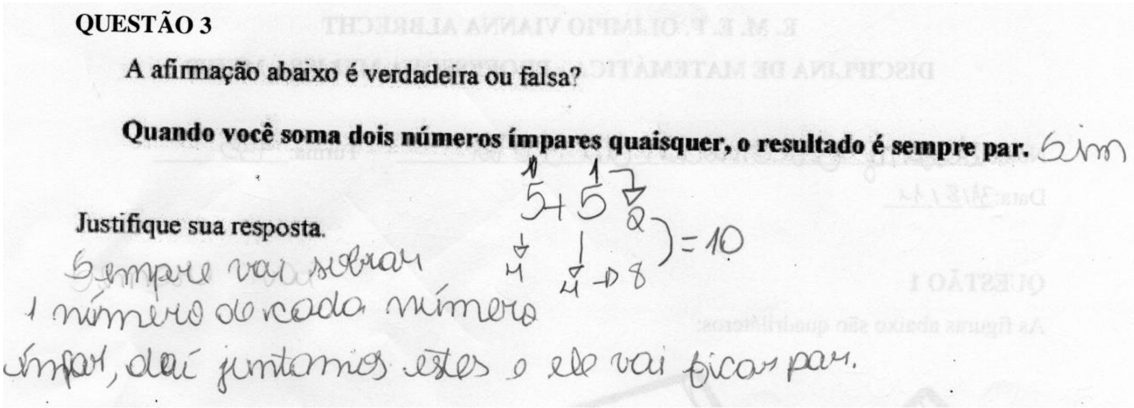
Foram três os argumentos apresentados pela turma:

Argumento empírico

“*3+3=6*”

Argumento mais elaborado, no qual o aluno trabalhou com um exemplo genérico “*Sempre sobre 1 número de cada número ímpar, daí juntamos estes vai ficar par*”.

Argumento mais elaborado que ainda utiliza ideias empíricas em suas justificativas. Abaixo um exemplo deste caso:


QUESTÃO 3

A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par. Sim

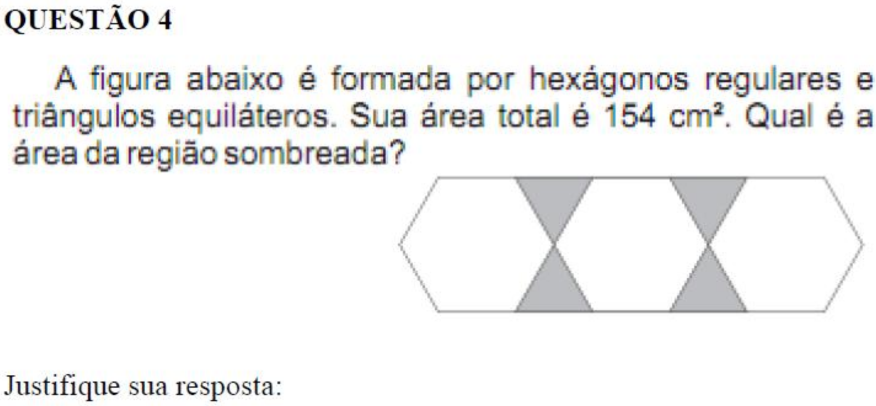
5+5)=10

4 4 -> 8

Justifique sua resposta.

Sempre vai sobrar 1 número de cada número ímpar, daí juntamos estes e ele vai ficar par.

Figura 6 – Resposta apresentada para a questão 3 do questionário planejado para aplicação com alunos.


QUESTÃO 4

A figura abaixo é formada por hexágonos regulares e triângulos equiláteros. Sua área total é 154 cm². Qual é a área da região sombreada?

Justifique sua resposta:

Figura 7 – Quarta questão do questionário planejado para aplicação com alunos.

Tabulação das respostas:

NÍVEL	-2	-1	0	1	2	3
QUANTIDADE	10	3	15	1	1	0

Quadro 5 - Tabulação das respostas da questão 4.

Apenas um aluno respondeu corretamente a esta questão. Identificamos, novamente, pelos argumentos apresentados, uma dificuldade na interpretação (leitura) da imagem.

A maioria dos alunos da turma não respondeu esta questão, mas os que tentaram, utilizaram uma argumentação algébrica como estratégia (argumento empírico), dividindo 154 por 4 e encontrando como resposta 38,5 ou, 154 por 2 e encontrando 77.

QUESTÃO 5:

Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?
Justifique

Figura 8 – Quinta questão do questionário planejado para aplicação com alunos.

Tabulação das respostas:

NÍVEL	-2	-1	0	1	2	3
QUANTIDADE	2	0	15	12	0	1

Quadro 6 - Tabulação das respostas da questão 5.

Dezessete alunos afirmaram que o número 5! é par. Os argumentos utilizados foram:

Argumento empírico

1.2.3.4.5 = 120

Experimento mental

"Onde há o algarismo 2 significa que o resultado será múltiplo de 2. Múltiplos de 2 são pares."

Este questionário confirmou algumas de nossas hipóteses e ampliou nosso entendimento sobre os diferentes níveis de argumentação dos alunos. Assim como Healy e Hoyles (1998), observamos que os alunos, em sua maioria, utilizam argumentos empíricos em suas respostas e, dentre os estudantes que atingiram maior sucesso, a linguagem comum (no lugar da linguagem matemática formal) é utilizada nas explicações que apresentam.

Por outro lado, nossa hipótese inicial de que os alunos teriam maior facilidade com as questões geométricas não foi comprovada. Acreditamos que as questões de geometria realmente ampliam as possibilidades de investigação, mas apresentam uma dificuldade a mais para ser enfrentada: a interpretação visual do problema. Sobre isso, Duval argumenta que a dificuldade com as figuras geométricas está na diferença entre a apreensão perceptiva e a interpretação necessariamente comandada pelas hipóteses. Essa organização perceptiva de uma figura segue a "*lei do fecho*" (ou da continuidade), que diz: "*quando diferentes linhas formam um contorno simples e fechado, este contorno se separa como figura sobre o fundo*". Tal lei tem uma grande importância nas figuras habitualmente presentes nos problemas, pois ela concede prioridade às linhas organizadas excluindo reorganizações que impedem de ver outras formas. Ou seja, os objetos que são vistos de forma imediata podem ser diferentes dos objetos que o problema matemático exige ver.

O que buscamos nesta seção, com as pesquisas realizadas com professores e alunos, não foi fazer um estudo aprofundado sobre a demonstração matemática no Ensino Fundamental, mas discutir o entendimento de seu papel como recurso a ser utilizado para o desenvolvimento do pensamento matemático. O assunto "demonstração na escola" foi polêmico e constante nas discussões do grupo de professores e a dificuldade de argumentação matemática dos alunos foi significativa considerando as respostas apresentadas por eles ao questionário proposto. Tais constatações contribuíram para o direcionamento de nossa proposta de dissertação e, para a concepção do experimento, escolhemos as atividades de modelagem como recurso didático, porque elas propiciam o desenvolvimento do raciocínio geométrico, esta uma habilidade importante e necessária para que os alunos avancem na exploração das demonstrações das propriedades geométricas.

Optamos por manter no texto da dissertação o assunto relativo a demonstrações matemáticas no Ensino Fundamental, mesmo não sendo esse o foco final da nossa experimentação, frente às dificuldades identificadas no grupo de alunos participantes da experiência. Acreditamos que tais reflexões podem contribuir para futuras experiências voltadas para a aprendizagem da demonstração. Hoje, defendemos o trabalho com demonstrações na Escola Básica, desde que ele seja compreendido como uma forma de explicar e/ou validar uma propriedade, e tendo como propósito maior o desenvolvimento do pensamento do aluno, através da investigação e da descoberta. É sobre isso que trata esta seção.

O trabalho com demonstração a ser feito na escola depende de uma maturidade dos alunos para elaboração de raciocínios de natureza dedutiva. Esta habilidade depende de um processo gradual de desenvolvimento de hábitos do pensamento. É disto que vamos tratar na próxima seção. E é através da atividade de modelagem geométrica, a ser detalhada no capítulo 3, que vemos uma possibilidade de desenvolvimento de hábitos de pensamento, uma preparação para o trabalho com demonstrações em matemática.

2.3 Hábitos do Pensamento Matemático

Nesta seção, tratamos do referencial teórico que fundamenta a concepção e implementação do experimento didático desta dissertação. No que segue, usamos como referência principal o artigo *"Hábitos de pensamento": um princípio organizador para o currículo* de Paul Goldenberg (1998).

Goldenberg defende a ideia de que a organização do currículo da Matemática deveria ser centrada em "hábitos do pensamento", através de estratégias de ensino que contribuem para desenvolvimento das atitudes de experimentar, testar, descobrir, raciocinar, generalizar, argumentar. Goldenberg define "hábitos do pensamento" como "*modos de pensar que adquirimos tão bem, tornamos tão naturais e incorporamos tão completamente em nosso repertório que se transformam, por assim dizer, em hábitos mentais*" (GOLDENBERG, 1998a).

O autor propõe um ensino que seja baseado no desenvolvimento de hábitos mentais que possibilitam ao aluno a criação de uma estrutura que pode ser aplicada em suas interações com o "mundo". Para ele, um currículo é coerente quando tem um "*enredo*", uma mensagem sobre a matemática e, neste sentido, ele nos diz: "*a matemática não são os conteúdos, mas o raciocínio que descobre, reúne e dá sentido a esses conteúdos; a matemática é (em parte) um modo de pensar, um conjunto de hábitos de pensamento*". (GOLDENBERG, 1998a). Conteúdos e habilidades devem ser selecionados para construir um currículo, mas, principalmente, é o modo como eles são selecionados e, em especial, o modo como são organizados que determinam o tipo de formação escolar pretendida.

O autor sugere algumas tendências do ensino em geral e busca relações com a Matemática, identificando alguns "hábitos do pensamento" que devem ser desenvolvidos nos alunos. Abaixo, apresentamos alguns destes "hábitos do pensamento", trazendo, também, um código de identificação que será utilizado no decorrer desta dissertação com o objetivo de tornar a comunicação mais objetiva. São eles:

- *Visualizar* (HP-1).

Este hábito de pensamento, segundo o autor, deve ser privilegiado e diz respeito à capacidade de criar, manipular e compreender imagens mentais. Trata-se de uma habilidade fundamental para todas as áreas do conhecimento, pois não é possível, por exemplo, "*cortar o tecido para coser uma manga, ou desenhar os planos de uma estante, sem "ver" primeiro, na nossa cabeça, o que ainda não pôde ser visto com os próprios olhos*" (GOLDENBERG, 1998b).

Goldenberg afirma que esta capacidade não é natural e tal como todas as destrezas exige aprendizagem e deve ser sistematicamente construída e exercitada para que seja adquirida:

> As tarefas que contribuem para essa aprendizagem incluem propostas "não-matemáticas" como criar e ler imagens mentais para responder a perguntas do tipo "quantas portas tem a própria casa" (ou "de que cor estava vestido o companheiro do pequeno almoço"), ou analisar aspectos visuais (por exemplo, uma face ou uma "figura geométrica impossível") de modo que se torne possível desenhá-las. Também incluem tarefas reconhecidamente mais matemáticas como imaginar a sombra de um cubo iluminado obliquamente ou os tamanhos e disposição de quadrados (ou cubos) que utilizam dois pontos específicos do espaço como vértices, ou os sólidos que se obtêm quando se empilham camadas finas de material ou quando se rodam figuras planas (GOLDENBERG, 1998b).

Em Borba e Villarreal (2005), também temos referências a esta habilidade para imaginar o que nunca foi visto:

> [...] contribui para o levantamento de conjecturas, refutações e interpretação de soluções, estimula a investigação e a descoberta. Portanto, a visualização atua como uma forma de apoio às explorações matemáticas, contribuindo com as experiências mentais, manipulação de imagens, levantamento de conjecturas e com a comunicação oral e escrita (BORBA e VILLARREAL, apud LAGE, 2008, p. 23).

- *Reconhecer padrões ou invariantes* (HP-2).

Para o autor este hábito do pensamento representa, em conjunto com a demonstração, o "coração da matemática" e, por isso, a procura por invariantes representa o primeiro passo a ser dado nas aulas de matemática. Considerando que a "*matemática é uma ciência dos padrões, ela trata da procura da estrutura comum subjacente a coisas que em todo o resto parecem completamente diferentes: coisas absolutas ou relativas que permanecem fixas enquanto o que as rodeia ou partes delas variam.*" (GOLDENBERG, 1998b).

Desta forma, qualquer conteúdo pode ser explorado para ajudar os alunos a criar e desenvolver este hábito de pensamento. Goldenberg ressalta, inclusive, que a noção de invariância é, também, essencial fora da matemática.

> Não podemos falar com inteligência sobre a história de uma língua, de um país ou de uma pessoa, sem identificar o que foi preservado e o que mudou (apenas posso falar sobre o meu próprio crescimento se assumir a existência de um Eu, através de mudanças em todas as células do meu corpo e todos os pensamentos da minha mente) (GOLDENBERG, 1998b).

O trabalho envolvendo a busca de invariantes motiva o aluno e a descoberta assume um papel fundamental em sua aprendizagem. Outro autor que também fala sobre esta habilidade é Lage (2008):

> [...] a procura de padrões e de invariantes atua como um conector entre conteúdos e ideias matemáticas, de maneira que os alunos possam descobrir relações, estabelecer leis, fazer generalizações, pensar de forma mais abstrata, desenvolvendo o poder da argumentação (LAGE, 2008, p. 21).

- *Fazer experiências e explorações* (HP-3).

Goldenberg enfatiza que quando o aluno faz suas próprias experiências e explorações, começa a jogar com informações, reconhecer os fatores independentes e analisar os resultados manipulando-os conforme a situação problemática. Quando o currículo promove tais experiências, está a fornecer o contraponto necessário para que as ideias importantes se distingam nitidamente.

Currículos fundamentados pela experimentação fornecem um ambiente favorável à exploração de ideias, permitindo que o aluno amplie seus conhecimentos.

- *Criar, ser inventor* (HP-4).

Segundo o autor os alunos devem desenvolver o hábito de inventar matemática, tanto para fins utilitários quanto para se divertirem.

> Um ingrediente importante é o hábito de inventar coisas, pois é com ele que os alunos começam a procurar *isomorfismos* entre estruturas matemáticas. Seria maravilhoso se os alunos tivessem o hábito de olhar para as diferentes instâncias do mesmo sistema matemático, de modo que eles pudessem ver, por exemplo, que a operação de tomar a união de dois conjuntos se parece muito com a operação de tomar a soma de dois números (GOLDENBERG et. al., 1996).

Goldenberg afirma, a partir de suas experiências, que quando as ideias se tornam o veículo pelo qual os alunos compreendem a matemática, eles conseguem *pensar* e podem re*inventá*-las sempre que precisavam delas.

É interessante observar que Polya no seu livro a Arte de Resolver Problemas, com sua primeira versão datada em 1944, já destacava que o objetivo principal de um programa de Matemática deve ser ensinar o aluno a pensar. Ele afirma que os alunos devem ter oportunidades para participação ativa em seu aprendizado.

- *Fazer conjecturas* (HP-5).

O autor defende uma formação matemática que possibilita aos alunos a oportunidade de conjecturar, buscando conexões dentro da própria matemática e desenvolvendo formas de pensamento matemático que se transformam em hábitos naturais do aluno.

Sobre levantar conjecturas, Fonseca (2000) nos diz:

> O processo de formular conjecturas pode ser representado por um processo cíclico que compreende a seguinte sequencia de fases: formular uma conjectura e acreditar nela quando seu surgimento; verificar que a conjectura cobre todos os casos conhecidos e exemplos; desconfiar da conjectura, tentando refutá-la encontrando um contraexemplo ou usá-la para fazer predições que também podem ser verificadas; compreender por que razão é que a conjectura é verdadeira ou como é que tem de ser modificada (p.31).

- *Descrever, formal e informalmente, relações e processos* (HP-6).

Segundo Goldenberg (1998b), para fazer matemática deve-se desenvolver o hábito de perceber relações, processos e conexões lógicas entre ideias, e deve-se ter a capacidade de descrevê-las. Ou seja, o aluno deve "*ser capaz de dizer com clareza o que as coisas significam*". Para ele, um currículo ao mesmo tempo em que "*comunica uma seleção de conteúdos matemáticos, deve estar organizado de modo a ajudar os alunos a desenvolver estas capacidades essenciais da comunicação matemática.*".

Em Lage (2008) temos:

> [...] descrever é uma etapa importante para compreender, consistindo em: dizer o que significa; inventar a notação; discutir, tentar convencer os colegas que determinado resultado é verdadeiro ou plausível; descrever as evidências, mostrando os cálculos que constituem a prova; escrever resultados, conjecturas, argumentos,

> perguntas e opiniões sobre a situação em questão. Formular descrições escritas e orais sobre um trabalho favorece a negociação e divulgação das idéias matemáticas (p. 24).

Para Goldenberg (1998b) um currículo ao mesmo tempo em que "*comunica uma seleção de conteúdos matemáticos, deve estar organizado de modo a ajudar os alunos a desenvolver estas capacidades essenciais da comunicação matemática.*".

- *Raciocinar por continuidade* (HP-7).

Goldenberg ilustra este hábito do pensamento a partir da utilização de ambientes de geometria dinâmica. Ele afirma que esta é uma ferramenta que "*ajuda a ampliar a ideia de funções num domínio contínuo e a construir conexões entre a geometria e a matemática da mudança contínua*" (GOLDENBERG, 1998b). Falaremos mais sobre a geometria dinâmica e sua relação com o desenvolvimento desse hábito do pensamento no capítulo 4 desta dissertação.

Acreditamos que, na medida em que trabalhamos com os "hábitos de pensamento", outros hábitos importantes para a aprendizagem são desenvolvidos. Dentre eles, podemos citar a persistência para resolver um problema, a flexibilidade na busca por novas informações, a argumentação para resolução de problemas, a criatividade para enfrentar novos desafios e a aplicação de conhecimentos em novas situações.

Quanto aos "hábitos de pensamento" no contexto específico da Geometria, nos fala Duval (1998):

> A Geometria, mais do que outras áreas da Matemática, pode ser usada para desenvolver diferentes formas de raciocínio. Este deve ser um objetivo essencial do ensino da Geometria. Mas ainda é preciso conseguir uma prática mais compreensiva e equilibrada dos processos cognitivos subjacentes. Isto quer dizer que são necessárias situações específicas de aprendizagem para a diferenciação e coordenação dos diversos tipos de processos de visualização e raciocínio (apud PIETROPAOLO (2005), p.51).

Nesta mesma linha de pensamento, a teoria de Van Hiele (1976), desenvolvida nos anos 50, já propunha que a aprendizagem da Geometria é um processo evolutivo que percorre cinco diferentes níveis de raciocínio geométrico. Nesta escala de aprendizagem, os “hábitos do pensamento” tem papel fundamental na passagem de um nível para outro.

Os níveis de desenvolvimento do raciocínio geométrico indicados por Van Hiele são:

1º. Visual – Os alunos compreendem as formas geométricas em função da sua aparência.

2º. Analítico – Os alunos identificam e entendem as figuras pelas suas propriedades.

3º. Dedução Informal – Os alunos ordenam logicamente as propriedades das figuras, podendo estabelecer definições abstratas e, eventualmente, apresentar argumentações lógicas.

4º. Dedução formal – Os alunos pensam formalmente, entendendo a geometria como um sistema dedutivo; são capazes de construir demonstrações.

5º. Rigor matemático – Os alunos pensam formalmente e podem analisar as consequências da manipulação de axiomas e definições.

Retomamos aqui as ideias de Ballachef (1987) apresentadas na seção 2.2.1. Quando o autor diz que é o tipo de raciocínio e o conhecimento em jogo que diferenciam a prova pragmática da prova intelectual, vemos que podem ser estabelecidas relações entre o seu trabalho e o trabalho de Goldenberg (1998). Os quatro níveis de evolução das argumentações indicados por Ballachef (1987), que levam à passagem da prova pragmática para a prova intelectual, podem ser colocados em relação com os diferentes hábitos do pensamento elencado por Goldenberg. Procuramos ilustrar estas relações através de um mapa conceitual[4] (Figura 9).

[4] De um modo geral, mapas conceituais, ou mapas de conceitos, são diagramas indicando relações entre conceitos, ou entre palavras que usamos para representar conceitos. (MOREIRA, 2005).

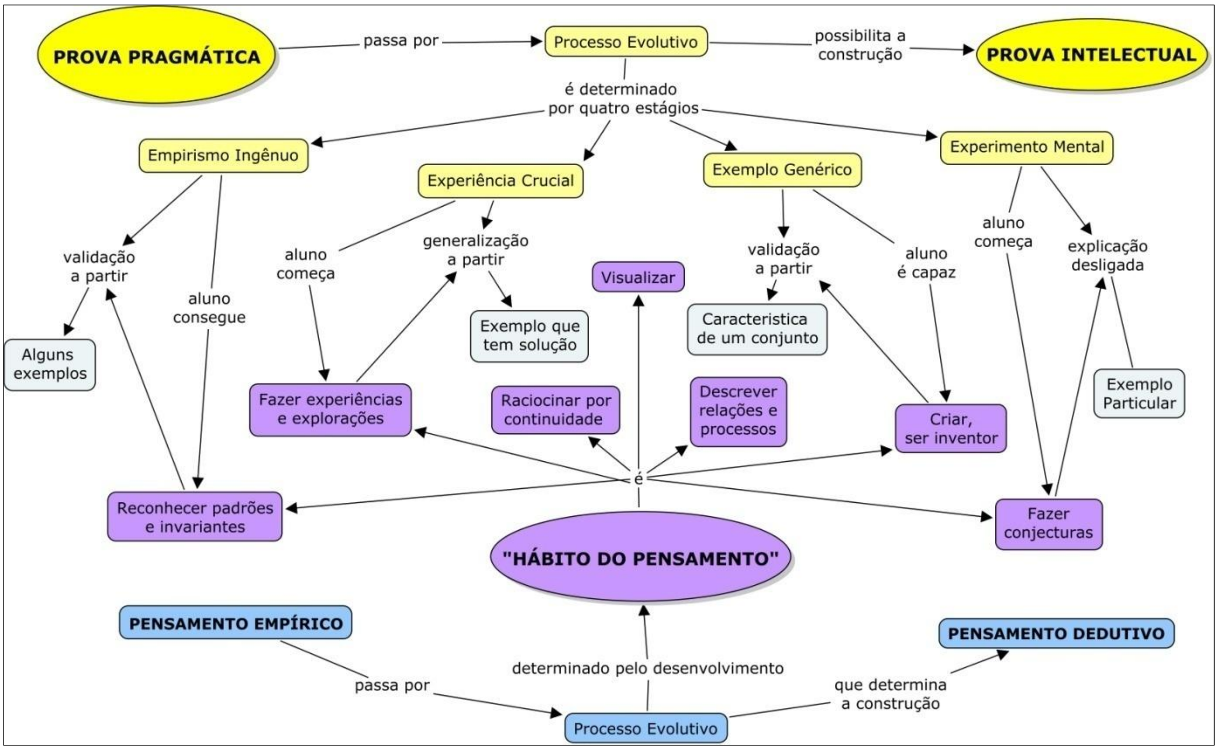


Figura 8 – Mapa conceitual que estabelece relações entre os estudos de Ballachef (1987) e Goldenberg (1998).

Julgamos interessante estabelecer estas relações entre dois quadros conceituais, pois elas nos ajudam a entender que o trabalho com demonstrações rigorosas não precisa ser uma meta nos currículos escolares. Goldenberg entende que formas de demonstração apropriadas ao desenvolvimento dos alunos podem e devem ser introduzidas ao longo dos anos que antecedem a formação universitária. A afirmação central do autor é que:

> [...] ao utilizar os "hábitos de pensamento" como princípio organizador, podemos construir currículos de Matemática válidos para constituir a base necessária aos *estudos matemáticos avançados* e fornecer sólidas indicações sobre o modo como a matemática é realmente feita (GOLDENBERG, 1998a).

Desenvolvendo a compreensão da natureza da matemática e seus métodos, estaremos possibilitando ao aluno uma formação que lhe permitirá uma atuação crítica dentro da sociedade, uma vez que a matemática estudada e aprendida se tornará instrumento para entender e modificar o mundo.

Entendemos que é importante propiciar ao aluno um ambiente em que ele possa explicitar sua forma de pensar, fazer explorações, procurar relações, comunicar seus resultados. Nesse sentido, destacamos as atividades de investigação matemática e vemos na

Modelagem Geométrica uma interessante possibilidade para o desenvolvimento deste trabalho no Ensino Fundamental. É disto que trataremos nos próximos dois capítulos da dissertação.

3 A GEOMETRIA DINÂMICA E OS HÁBITOS DE PENSAMENTO MATEMÁTICO

Neste capítulo, vamos tratar do potencial da tecnologia, em particular, dos softwares de geometria dinâmica, no desenvolvimento de hábitos de pensamento. Na primeira seção, discutimos aspectos gerais da utilização de tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática. Na segunda seção, apresentamos um software de geometria dinâmica, o GeoGebra, e procuramos ilustrar de que forma os seus recursos podem ser utilizados para que provoquem o desenvolvimento de hábitos de pensamento matemático a partir dos princípios da modelagem geométrica e das aprendizagens que são desencadeadas com este tipo de atividade.

3.1 Tecnologias e a Educação Matemática

Vimos no capítulo anterior, que para o desenvolvimento de hábitos do pensamento matemático, os alunos precisam vivenciar situações de aprendizagem que envolvam exploração e investigação. Nesse sentido, as tecnologias, segundo Ponte (1986) [em Borrões, 1998] se apresentam como recursos que podem muito ajudar. O autor afirma que:

> O computador, por suas potencialidades em nível de cálculo, visualização, modelação e geração de micromundos, é o instrumento mais poderoso de que atualmente dispõem os educadores matemáticos para proporcionar experiências aos seus alunos.

Muitos pesquisadores, como Jorge Filho (2006) e Goulart (2009), afirmam que o uso do computador tem um grande potencial para provocar o interesse e a motivação dos alunos. Foi-nos possível comprovar tal fato através de um segundo questionário aplicado com os alunos que participaram do experimento didático. Antes de iniciar o experimento, buscamos a opinião do grupo sobre as aulas de matemática e sobre as suas expectativas quanto ao uso do computador em atividades de estudo. Nas respostas apresentadas, o grupo mostrou não haver rejeição às aulas de matemática e se declarou motivado com a possibilidade de trabalhar nos computadores durante as aulas.

É claro que um aluno motivado se compromete muito mais com as atividades que acontecem em sala de aula e isto tem reflexos na sua aprendizagem. Entretanto, é importante compreender o papel do professor nas práticas de ensino que agregam esta tecnologia. Nestas práticas, o professor tem tarefa de definir e acompanhar as atividades a serem realizadas pelos alunos. A respeito disso, já nos primeiros anos de uso do computador em sala de aula, D'Ambrosio (1988) dizia,

> [...] o uso do computador como meio institucional não torna dispensável o professor, antes, pode liberá-lo de algumas tarefas e reservar um espaço maior para o contato interativo entre ele e o aluno, necessário a um ensino que valorize a aprendizagem da descoberta. O computador não é o fim em si mesmo, mas um meio, um recurso instrumental a mais, cuja eficácia dependerá da capacidade daqueles que o utilizam. (p. 88).

A tecnologia, quando bem utilizada, transforma a aula em um momento de construção de conhecimentos, no qual professores e alunos trabalham juntos. Porém, isso não significa dizer que a tecnologia é o elemento principal deste processo. Com relação a isso, Moran (2003) esclarece:

> [...] se ensinar dependesse só da tecnologia, já teríamos achado as melhores soluções há muito tempo. Elas são importantes, mas não resolvem a questão a fundo. Ensinar e aprender são os desafios maiores que enfrentamos em todas as épocas [...] (MORAN, 2003).

Assim, ao optarmos pela utilização do computador nas aulas de Matemática, torna-se necessário compreender que, ao fazer a escolha de um software para a aplicação de uma atividade matemática, precisamos ter o cuidado de verificar se os recursos disponíveis possibilitam experiências para o pensamento e, consequentemente, para a construção do conhecimento. Segundo Basso e Gravina (2011), os softwares devem: "*a) ser instrumento para externar, consolidar e comunicar o saber matemático; b) ser instrumento que dá suporte aos pensamentos, mais especificamente aos processos cognitivos que produzem conhecimento matemático*".

É interessante observar que, para o ensino da matemática, muitos são os softwares que atendem estas duas funções. Também em Basso e Gravina (2011) tem-se uma lista representativa de tais softwares. Dentre eles estão o Winplot[5], para trabalhar com os conteúdos clássicos de funções e gráficos, o Poly[6] e o Calques3D[7], para trabalhar com geometria espacial e a visualização de objetos tri-dimensionais.

---

[5] Software que permite que se construa gráficos a partir de funções elementares. Possibilita a construção de gráficos em duas e três dimensões. Disponível para download em: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/soft_funcoes.php, acesso em 25/062012.

[6] É uma criação Pedagoguery Software, que permite a investigação de sólidos tridimensionalmente com possibilidade de movimento, dimensionalmente planificação e de vista topológica. Disponível para download em: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/soft_funcoes.php, acesso em 25/06/2012.

[7] Software disponível para download em http://www.calques3d.org/.

O software GeoGebra também é um dos softwares que está na lista. Ele é um software de geometria dinâmica que integra geometria euclidiana, geometria analítica, funções, gráficos, álgebra e aritmética. Além das características que o identificam como um “laboratório para a experimentação”, também possui outras que influenciaram a nossa escolha de uso no momento do experimento didático. São elas: tem uma interface amigável e de fácil utilização; é ferramenta de produção de aplicativos interativos para páginas WEB; é software gratuito e de código aberto.

Estas características contribuíram para a divulgação e uso deste software e assim contamos, hoje, com o International GeoGebra Institute (IGI), uma rede crescente de organizações sem fins lucrativos. Estas organizações, com sedes em vários países, são independentes e ganham o nome de Institutos GeoGebra (Figura 10). Nestes institutos professores e pesquisadores trabalham juntos para promover o ensino e a aprendizagem da Matemática com o apoio do GeoGebra.

Figura 10: Mapa indicando os locais (países) em que existe um IG..

Em linhas gerais, estes institutos compartilham experiências sobre usos do software e também sobre o desenvolvimento de materiais feito por estudantes e professores, sempre visando o aprimoramento da Educação Matemática, Ciência e Tecnologia. Esta forma de organização acaba promovendo a colaboração entre os professores e pesquisadores, estabelecendo, com isso, parcerias e a formação de uma comunidade de usuários.

Todo o material organizado por estes institutos pode ser encontrado no site: http://www.geogebra.org/ (Figura 11). Esse site organiza diferentes informações sobre o GeoGebra, como, por exemplo, o link para download do software e tutoriais para sua utilização.

Figura 11 – Interface do GeoGebra (http://www.geogebra.org/).

Em especial, recomendamos uma análise mais aprofundada no link MATERIAIS (Figura 12), também nomeado como GeoGebra Tube, deste site.

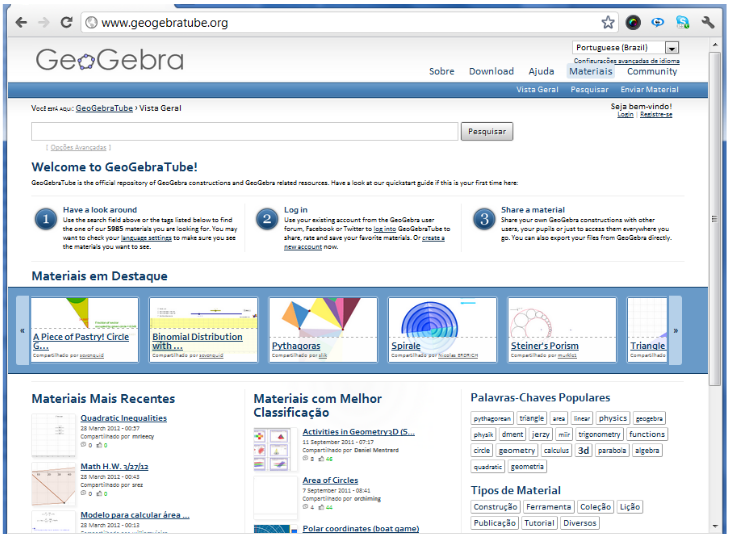


Figura 12 – Interface do GeoGebra Tube (http://www.geogebratube.org/).

O GeoGebra Tube é um interessante espaço para pesquisa e divulgação de materiais criados com o GeoGebra. Nele, encontramos um banco com inúmeras atividades e ideias, sobre diferentes conteúdos, voltadas para aplicação em sala de aula. Nesse sentido, além de conter ferramentas para o ensino da Matemática, este software é uma ótima opção considerando a ampla rede de conhecimento que se desenvolve em seu entorno.

Na próxima seção vamos apresentar com mais detalhes o software GeoGebra e as suas possibilidades para o desenvolvimento de hábitos de pensamento.

3.2 Geometria dinâmica e modelagem geométrica no desenvolvimento de hábitos do pensamento

Os programas de geometria dinâmica, dentre eles o GeoGebra, são ferramentas que permitem a construção de figuras geométricas a partir das propriedades que as definem. Como indica Gravina et al. (2011a), estes softwares possuem um interessante recurso de “estabilidade sob ação de movimento”. Conforme estes autores:

> [...] feita uma construção, mediante movimento aplicado aos pontos que dão início à construção, a figura que está na tela do computador se transforma quanto ao tamanho e posição, mas preserva as propriedades geométricas que foram impostas no processo de construção, bem como as propriedades delas decorrentes. Ou seja, a “figura em movimento” guarda as regularidades que são importantes sob o ponto de vista da geometria. São figuras que não se deformam, e estas é que são as figuras da geometria dinâmica! (GRAVINA et al., 2011a, p.29)

Os autores apresentam, também, exemplos ilustrativos desta ideia. Na Figura 13 trazemos um destes exemplos. Nela, visualizamos dois quadriláteros que, em uma primeira análise, acreditamos tratarem-se de “quadrados” idênticos, mas com a “movimentação” do ponto A, percebemos diferentes critérios de construção entre eles.

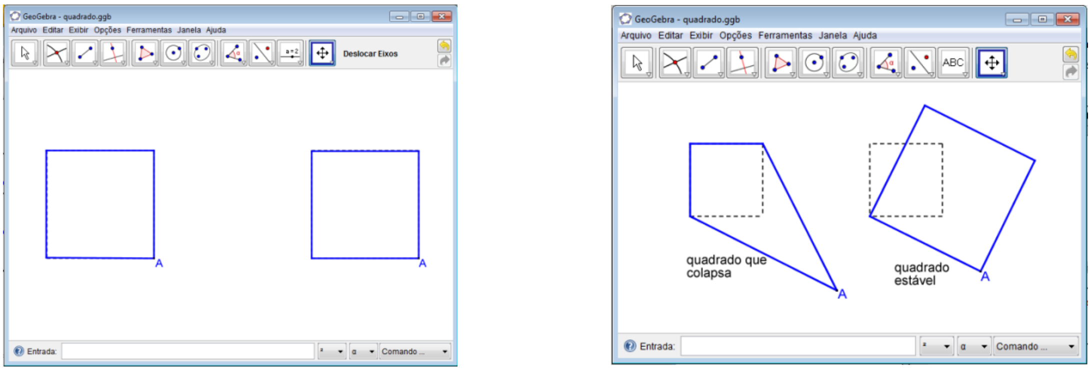


Figura13 – imagem que busca explicar o recurso “estabilidade sob ação de movimento”.

Nos dizem os autores:

> A razão que explica os diferentes efeitos do movimento é a seguinte: o primeiro quadrado corresponde a desenho do tipo “a mão livre”, tratando-se de construção essencialmente visual, e assim, sob ação de movimento, se deforma. Já o segundo quadrado foi construído com controle geométrico – na construção foram explicitadas as propriedades geométricas do quadrado, via os menus disponibilizados no GeoGebra. Essa segunda figura é um quadrado da geometria dinâmica – sob movimento do vértice A, mantém a forma. (GRAVINA et al., 2011ª, p.28).

Ainda segundo Gravina et. al. (2011a), as figuras da geometria dinâmica tem um papel importante na superação das dificuldades que são naturais no processo de aprendizagem da Geometria:

> [...] as figuras da geometria dinâmica ajudam na superação das dificuldades com a Geometria, pois, ao colocar-se sob movimento uma dada construção, temos, na tela do computador, uma coleção de desenhos que correspondem ao componente figural do conceito ou propriedade em questão (GRAVINA et al, 2011a, p.30).

A interface interativa dos softwares de geometria dinâmica propicia a realização de experimentos de pensamento e criação de situações que potencializam o desenvolvimento dos hábitos do pensamento estabelecidos por Goldenberg (1998a, 1998b). A manipulação direta de objetos na tela do computador, com análise imediata da construção, concorrem para este desenvolvimento.

Nas palavras de Gravina (1998), referentes aos ambientes de geometria dinâmica, identificamos as possibilidades destes ambientes quanto ao desenvolvimento de hábitos de pensamento:

> Inicialmente, as construções dos alunos são desenhos do tipo "a mão livre", reproduções de formas conhecidas, como quadrados e retângulos – predomina aí a percepção. Ao movimentarem o desenho, os alunos constatam que a forma colapsa e deixam de apresentar a impressão visual desejada. Os recursos de "estabilidade sob ação de movimento" desafia os alunos a construírem formas sob controle geométrico, isto é, submetidas a propriedades geométricas por eles escolhidas. Na tela do computador, os objetos vão se concretizando sob gradativo controle, na espiral *ação / formulação / validação* (GRAVINA, 2001, p. 88).

O desenho à mão livre está fortemente associado a visualização (HP1). As tentativas de construção de desenhos que ficam sob o controle geométrico estão relacionadas com os hábitos de reconhecimento de padrões e invariantes (HP-2). Na espiral *ação / formulação / validação* vemos a presença do hábito de *fazer experiências e explorações* (HP-3) e também daquele que refere a re*conhecer padrões ou invariantes* (HP-2). Na formulação e validação, identificamos os hábitos de *descrever relações e processos (HP-6) e de fazer conjeturas* (HP-5). Quanto ao hábito de *raciocinar por continuidade* (HP-7), vemos que ele acontece, quando os alunos manipulam a construção e vem na tela um conjunto de instâncias do conceito em questão. O processo de construção de um quadrado ajuda a esclarecer nossas considerações: quando o aluno constrói o quadrado se apoiando tão somente na *visualização*, ao movimentar seus vértices ele se deforma. Para conseguir os *invariantes* "lados congruentes" e "ângulos retos" o aluno precisa usar procedimentos de construção e uma possibilidade está ilustrada na Figura 14.

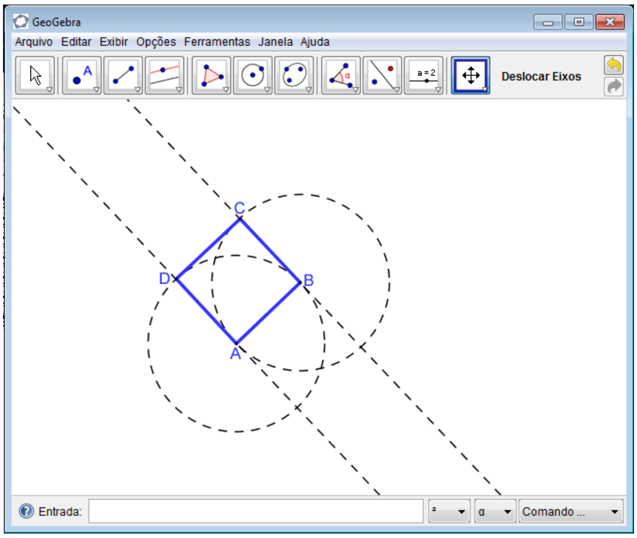


Figura 14: Imagem ilustrativa da construção de um quadrado no GeoGebra.

Na escolha dos menus do GeoGebra - segmento AB; retas perpendiculares ao segmento passando pelos seus extremos; círculo de centro A passando por B e interceptando uma das retas em D; círculo de centro B passando por A e interceptando a outra reta em C; segmentos AD, DC e CB - o aluno está desenvolvendo hábitos que tratam de *descrever relações e processos* (HP-6) e de *fazer conjeturas* (HP-5). O processo de construção envolve ações (concretizadas na manipulação de objetos na tela do computador), formulações (concretizadas nas antecipações dos procedimentos de construção a serem utilizados) e validações (concretizadas nos invariantes que são realçados nas novas manipulações dos objetos). É claro que, mesmo no processo de construção de uma figura tão simples quanto um quadrado, os hábitos do pensamento não se desenvolvem de forma isolada – os hábitos se inter-relacionam, ora um se fazendo mais presente, ora outro mais presente.

No trabalho com geometria dinâmica, Goldenberg (1998b) coloca especial atenção no hábito de raciocinar por continuidade (HP-7) – com ele, os alunos estão construindo conexões entre a geometria e a matemática da mudança contínua. Segundo este autor, nos ambientes de geometria dinâmica, "*os alunos criam construções, e arrastam um ponto sobre o ecrã ao mesmo tempo que observam o efeito que isso tem num outro objecto (ponto, segmento, medição,...) ou relação entre objectos*".

No caso da geometria, este hábito do pensamento auxilia os alunos no abandono dos desenhos prototípicos[8]. Quando, por exemplo, o aluno constrói um triângulo em um ambiente de geometria dinâmica, pode manter um lado do triângulo fixo e fazer o vértice oposto deslocar-se numa paralela à este lado. Obtemos uma família de desenhos com triângulos e segmentos alturas em diversas situações. E o segmento altura passa a ser visto com mais significado: é o segmento entre retas paralelas determinando a distância entre um vértice e a reta suporte do lado oposto ao vértice.

No que segue, vamos tratar de modelagem geométrica, procurando também ilustrar de que forma este tipo de atividade pode ajudar no desenvolvimento de hábitos do pensamento. De início, esclarecemos que um modelo matemático é uma representação, na linguagem da matemática, de certo fenômeno. A modelagem geométrica é uma representação de fenômenos no qual a linguagem da geometria se faz presente - são modelos construídos a partir de pontos, retas, segmentos, dentre outros elementos (GRAVINA, 2011b). Os fenômenos que nos interessam estão presentes em nosso cotidiano. Podemos observar, em diversos mecanismos ao nosso redor, situações nas quais a geometria se faz presente. Neles as formas geométricas se apresentam em movimento e a título de ilustração trazemos alguns exemplos: na praça de brinquedos há o vai e vem do balanço; nas janelas basculantes vemos o movimento de giro de suas folhas; nas portas pantográficas vemos o deslizamento das grades.

Como um exemplo de modelagem geométrica trazemos a construção de uma porta pantográfica. Iniciamos o processo olhando atentamente para o funcionamento do mecanismo que queremos modelar. Na porta pantográfica (Figura 15), vemos que as grades, todas do mesmo tamanho, deslocam-se de um lado para o outro, aproximando-se em um sentido e afastando-se em outro.

[8] Desenhos bem particulares - quadrados com lados paralelos às bordas da folha de papel, retângulos sempre com dois lados diferentes, alturas em triângulos sempre acutângulos, etc...

Figura 15 - Imagem de uma porta pantográfica

Iniciamos a modelagem construindo o segmento que vai determinar a base do "marco" da porta. Sobre este segmento colocamos um ponto M e construímos um novo segmento, com uma extremidade neste ponto e a outra em uma das extremidades do primeiro segmento (Figura 16). Este segundo segmento determinará o movimento do modelo geométrico, pois servirá como base para a "grade" da Porta Pantográfica.

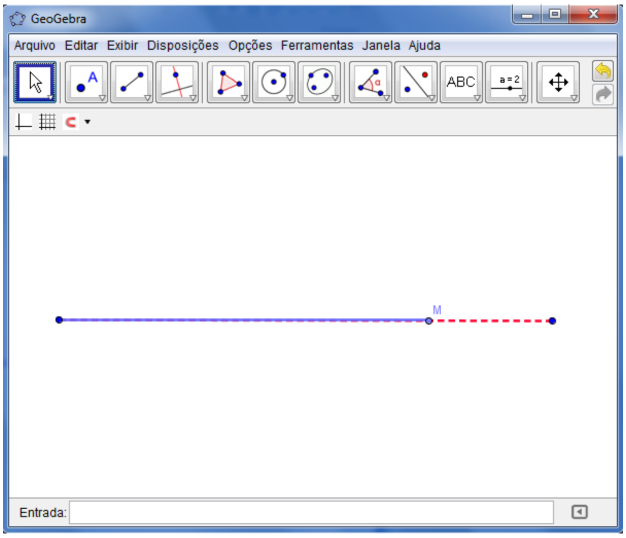


Figura 16 - Início da construção da porta pantográfica

Com o recurso *Ponto Médio*, construímos o ponto médio deste segundo segmento e, na sequência, os pontos médios dos segmentos determinados por estes três pontos, e assim sucessivamente. Assim, quando movimentamos o ponto M, criamos o efeito de "recuo" da porta, pois os pontos que estão no segmento se acumulam conforme a aproximação dos pontos dos extremos. Esta construção e efeito estão ilustrados na Figura 17.

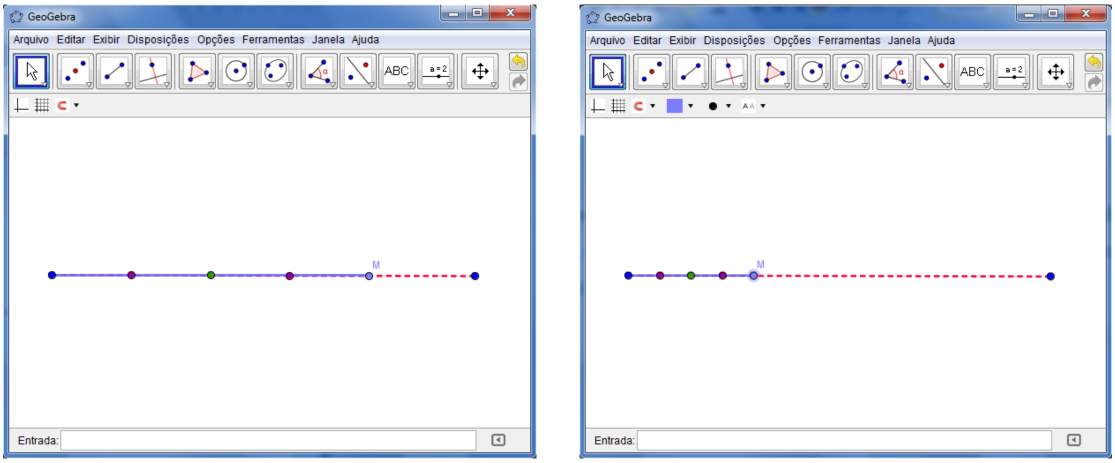


Figura 17 - Construção dos pontos médios que determinaram o movimento do modelo, à esquerda, e visualização do efeito produzido pelo deslocamento do ponto M, à direita.

Concluída esta etapa da construção, que é base de todo o movimento, resta apenas construir a grade da porta pantográfica. Essa grade é gerada a partir de dois segmentos. Inicia-se esta etapa construindo o primeiro “X” da “grade”, conforme Figura 18.

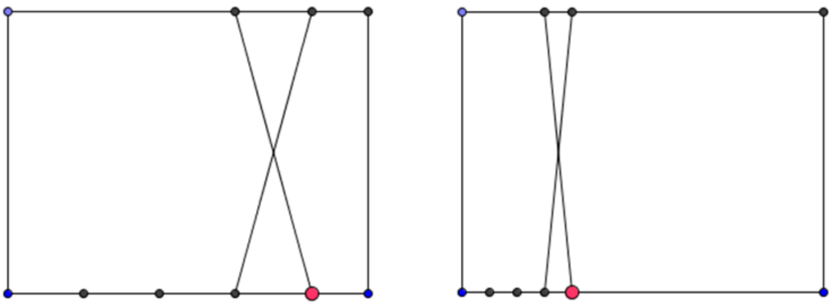


Figura 18 - Início da construção da grade da porta pantográfica, à esquerda, e visualização do efeito produzido pelo deslocamento do ponto MOVA, à direita.

Os demais elementos que compõem a “grade” da porta são construídos através do recurso *Reta Reflexão com Relação a uma Reta*. Com estes procedimentos, quando movimentamos o ponto extremidade do segmento, o efeito “sanfona” dos pontos produz o efeito “sanfona” da grade, como ilustra a Figura 19.

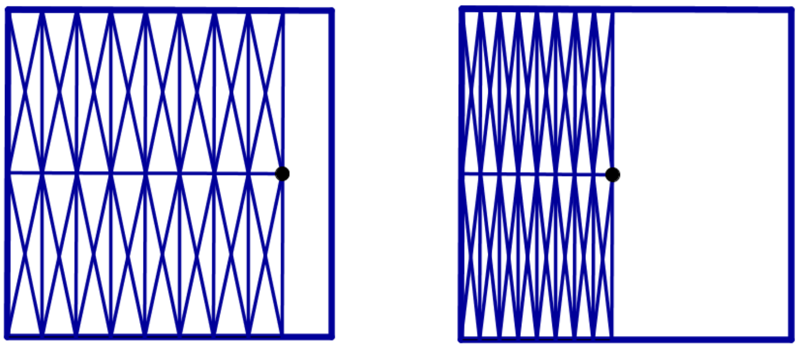


Figura 19 - Visualização da grade da porta pantográfica disponibilizada no site Geometria em Movimento, à esquerda, e visualização do efeito produzido pelo deslocamento do ponto MOVA, à direita.

O exemplo da "Porta Pantográfica" evidencia que, para implementar uma modelagem geométrica, nossa primeira atitude é ter um olhar atento ao mecanismo que se pretende modelar. Assim, de imediato, faz-se presente a *visualização* (HP-1). Na sequência, o que entra em jogo é o *reconhecimento das invariantes* (HP-2) envolvidas no movimento do objeto. Então, concluída esta fase de análise do objeto a ser modelado, parte-se para a construção efetiva do modelo. Neste momento muitos "hábitos do pensamento" se inter-relacionam, pois ao mesmo tempo em que *raciocinamos por continuidade*, quando em ambientes de geometria dinâmica, *exploramos* as ferramentas disponíveis e *conjecturamos* sobre a utilização das mesmas *criando*, desta forma, uma estratégia para construção do modelo geométrico.

Segundo as ideias de Van Hiele (1976), apresentadas no capítulo 2, as atividades de modelagem geométrica podem desenvolver hábitos do pensamento nos dois primeiros níveis (visualização e análise), visto que, no terceiro nível, os alunos compreendem argumentos de natureza dedutiva. Nesse sentido, entendemos que as atividades de modelagem geométrica poderiam desenvolver hábitos do pensamento que, mais adiante, ajudarão no entendimento e na produção de argumentações de natureza dedutiva – as demonstrações.

Neste capítulo, tratamos de ressaltar a importância da utilização de tecnologias na escola como uma ferramenta que pode ajudar na aprendizagem da matemática. Vimos como os ambientes de geometria dinâmica podem auxiliar o professor que deseja desenvolver hábitos do pensamento matemático em seus alunos. Apresentamos a modelagem geométrica como uma atividade que pode desenvolver hábitos do pensamento, tendo no seu aspecto lúdico um estímulo para o aprendizado da geometria no Ensino Fundamental.

No próximo capítulo tratamos do site “Geometria em Movimento”. Este site trata de modelagem geométrica e foi desenvolvido para ser usado no experimento que é detalhado no capítulo 5.

4 O SITE “GEOMETRIA EM MOVIMENTO”

Neste capítulo, tratamos dos pressupostos que foram levados em consideração, no momento de construção de material didático voltado para o desenvolvimento dos hábitos do pensamento matemático, no contexto da geometria. O material tem o formato de site – o site “Geometria em Movimento”, o qual se organiza através de blocos de objetivos e atividades a serem contemplados em um experimento didático que trata de modelagem geométrica. O site também foi pensado como sendo um canal de comunicação que organiza as intenções de ensino e aprendizagem do professor.

Buscando esclarecer nossas escolhas quanto ao tipo de material didático produzido, faremos, inicialmente, algumas considerações sobre a influência da EAD em nossa prática docente.

4.1 Influências da EAD em nossa prática docente

> Educação à distância é o processo de ensino-aprendizagem, mediado por tecnologias, onde professores e alunos estão separados espacial e/ou temporalmente (MORAN, 2002[9]).

A ideia básica da educação à distância é a seguinte: alunos e professores estão em locais diferentes durante toda ou grande parte do tempo em que aprendem e ensinam. Deste modo, aluno e professor dependem da tecnologia para interagir, pois ela oferece meios eficazes de comunicação.

Nesse sentido, uma característica importante desta modalidade de ensino é a *flexibilidade de tempo e espaço*, ou seja, o aluno à distância é responsável por seu aprendizado e determina – de forma ativa e autônoma – o tempo e os espaços necessários para seu desenvolvimento. Ele possui aptidões para o estudo e habilidades de comunicação diferentes das que normalmente são utilizadas nas escolas tradicionais/presenciais. Na EAD, o aluno busca o que lhe interessa, pois não há uma comunicação unidirecional do conhecimento vinda de um especialista em determinado assunto.

Nossa primeira experiência com esta modalidade de ensino teve início no ano de 2006 com o lançamento do primeiro curso de Licenciatura em Pedagogia à distância (PEAD)

---

[9] Este artigo de Moran está disponível em uma versão digital. Como arquivo html não possui numeração de páginas e, assim sendo, nas eventuais transcrições de ideias de Moran, neste texto, não serão feitas referências de páginas.

da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Este curso foi especialmente criado para formar professores em exercício. Neste sentido, a proposta era:

> [...] implementar sua primeira experiência de formação acadêmica inicial em nível de graduação de professores se valendo, para isso, do ensino a distância, qual seja, o Curso de Pedagogia: Licenciatura para os Anos Iniciais no Ensino Fundamental, oferecidos a docentes em exercício nas escolas públicas (NEVADO, 2007, p.18).

Neste período, junto a todos os tutores do PEAD, participamos do curso de Especialização em Tutoria de EAD (ESPEAD), que apresentava a mesma metodologia de formação em exercício.

A possibilidade de compartilhar nossas dificuldades referentes ao trabalho de tutoria no curso de especialização, incentivou a criação de uma "força tarefa" dentro da equipe de tutores. Conjuntamente, criamos estratégias para auxiliar os (as) alunos (as) do PEAD, e as diferentes formas de atuação acabaram nos especializando em *áreas de auxílio* distintas, conforme nosso interesse.

Entre tais funções da tutoria e diferentes *formas de auxílio*, optamos por direcionar nossa atenção para as seguintes atividades:

- ajudar o aluno a compreender os materiais do curso, através de discussões, explicações e elaboração de material explicativo;
- colaborar para a compreensão do material pedagógico, através da discussão, do levantamento de questões e da elaboração de material explicativo.

Nossa segunda experiência ocorreu no período de julho de 2009 a dezembro de 2010, no curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática. O que destacamos desta experiência são as pesquisas que realizamos a respeito das potencialidades do ambiente de aprendizado (MOODLE) utilizado no curso. Desta vez, pesquisamos as melhores formas de interagir com os alunos nos espaços disponíveis, investigando as potencialidades de comunicação de cada um destes espaços.

Resumidamente, os aspectos que mais nos interessavam nessas experiências com a EAD estavam baseados na interação do aluno com o material didático digital. Percebemos que a comunicação professor/aluno mediada por material digital é uma interessante possibilidade quando se deseja trabalhar com o desenvolvimento da autonomia do aluno. Assim sendo, as questões tecnológicas e suas potencialidades para comunicação à distância nos motivaram a pesquisar o desenvolvimento de materiais para apoio pedagógico.

De nossas pesquisas destacamos um primeiro aspecto que precisa ser observado quando falamos na interação do aluno com material didático. O aluno à distância e o aluno que temos hoje na escola são diferentes. Os dois possuem uma habilidade de comunicação diferenciada. Fica fácil comprovar isso, quando observamos as redes sociais que os alunos da escola tradicional/presencial fazem parte. É impressionante como estes alunos podem ser criativos, carismáticos e autênticos em sua comunicação, quando estão em um ambiente aberto para interações.

É incontestável o uso das tecnologias nas diferentes áreas da atuação humana e as muitas mudanças trazidas com isso. Segundo Moran (2002),

> Na medida em que avançam as tecnologias de comunicação virtual (que conectam pessoas que estão distantes fisicamente como a Internet, telecomunicações, videoconferência, redes de alta velocidade) o conceito de presencialidade também se altera (MORAN, 2002).

No entanto, é fácil observar que a escola tradicional/presencial é uma área onde as mudanças ainda foram pouco relevantes. O fato é que a nova realidade imposta pelo fácil acesso aos meios de comunicação de massa, como o rádio, a televisão, o computador, o telefone celular, a Internet, dentre outros, via de regra, muito apreciados pelas crianças e jovens que hoje estão na escola, exige uma mudança dos ambientes de ensino-aprendizagem e da atuação dos professores.

Considerando nossas experiências com a EAD e com o ensino presencial, vemos como uma alternativa para a *mudança de paradigma* na escola presencial é que se estabeleça um integração entre as duas modalidades de educação. Segundo Tori (2009), existem diversas possibilidades de combinação entre estas duas modalidades de educação e isto seria um ensino semipresencial. O autor afirma que:

> Com essa abordagem, os educadores podem lançar mão de uma gama maior de recursos de aprendizagem, planejando atividades virtuais ou presenciais, levando em consideração limitações e potenciais que cada uma apresenta em determinadas situações e em função de forma, conteúdo, custos e resultados pedagógicos desejados (TORI, 2009, p.121).

Pensando nesta integração, é possível planejar a transposição da *flexibilidade de espaços e tempos* da EAD para a escola presencial. É fundamental e urgente que o professor, inspirado nesta metodologia de ensino, flexibilize os tempos e os espaços da educação presencial, rompendo com os limites estabelecidos por uma sala de aula tradicional. A dúvida do aluno pode surgir fora deste ambiente, em um momento de ausência do professor e a comunicação não deve ocorrer somente em sala de aula ou no tempo em que o aluno e o professor estão juntos fisicamente.

Segundo Moran (2002), a Educação que antes acontecia em espaços e tempos determinados como, escola, sala de aula, calendário escolar, estrutura curricular rígida, pode ser favorecida em diferentes espaços e tempos não-formais. Nesse sentido, a tecnologia tem se apresentado como nova possibilidade de organização das atividades educativas formais ou informais, por meio do uso de diferentes linguagens de comunicação e expressão em que professores e alunos podem se apoiar para subsidiar a construção de conhecimentos. O autor afirma que:

> Hoje, ainda entendemos por aula um espaço e um tempo determinados. Mas, esse tempo e esse espaço, cada vez mais, serão flexíveis. O professor continuará "dando aula", e enriquecerá esse processo com as possibilidades que as tecnologias interativas proporcionam: para receber e responder mensagens dos alunos, criar listas de discussão e alimentar continuamente os debates e pesquisas com textos, páginas da Internet, até mesmo fora do horário específico da aula. Há uma possibilidade cada vez mais acentuada de estarmos todos presentes em muitos tempos e espaços diferentes. Assim, tanto professores quanto alunos estarão motivados, entendendo "aula" como pesquisa e intercâmbio. Nesse processo, o papel do professor vem sendo redimensionado e cada vez mais ele se torna um supervisor, um animador, um incentivador dos alunos na instigante aventura do conhecimento (MORAN, 2002).

Assim, é imprescindível que o professor da educação presencial participe desta transformação criando:

- canais de comunicação abertos com os alunos (e-mails, chats, entre outros);
- material digital para estudo fora da sala de aula (sites, blogs, entre outros).

Acreditamos que, como já é possível perceber em muitos cursos, as práticas educativas vão combinar aulas presenciais com virtuais. Com isso, a atividade docente vem cada vez mais, se apresentando como uma tarefa complexa onde a utilização das diversas mídias disponíveis possibilitarão a construção autônoma do conhecimento.

É claro que este processo de mudança não é simples, pois ainda é grande a desigualdade de acesso e conhecimento das pessoas. Porém, é fundamental que a mudança aconteça, pois a tecnologia se renova constantemente e, com isso, se ampliam as habilidades e o interesse de nossos alunos. Como coloca Moran:

> A Internet está caminhando para ser audiovisual, para transmissão em tempo real de som e imagem (tecnologias *streaming*, que permitem ver o professor numa tela, acompanhar o resumo do que fala e fazer perguntas ou comentários). Cada vez será mais fácil fazer integrações mais profundas entre TV e WEB (a parte da Internet que

> nos permite navegar, fazer pesquisas...). Enquanto assiste a determinado programa, o telespectador começa a poder acessar simultaneamente às informações que achar interessantes sobre o programa, acessando o *site* da programadora na Internet ou outros bancos de dados (MORAN, 2002).

Enfim, a comunicação da EAD serve como fonte de pesquisa e inspiração, modificando ideias quanto à prática docente na educação presencial. Hoje, o que entendemos como um redirecionamento interessante para o ensino tradicional/presencial é a flexibilidade de tempos e espaços da EAD. Insistimos na ideia de que o professor deve preparar material digital específico para suas aulas, fazendo com que o aluno consiga interagir de forma autônoma tendo respeitadas assim suas individualidades e dificuldades.

4.2 O site “Geometria em Movimento”

O site “Geometria em Movimento” (Figura 20) foi criado para o experimento didático a ser detalhado no capítulo 5 desta dissertação. Sendo a autora da dissertação a própria professora da turma (oitavo ano) que participou do experimento, o site foi construído considerando as características desta turma quanto ao uso da linguagem, quanto aos interesses, quanto à experiência matemática, dentre outros aspectos.

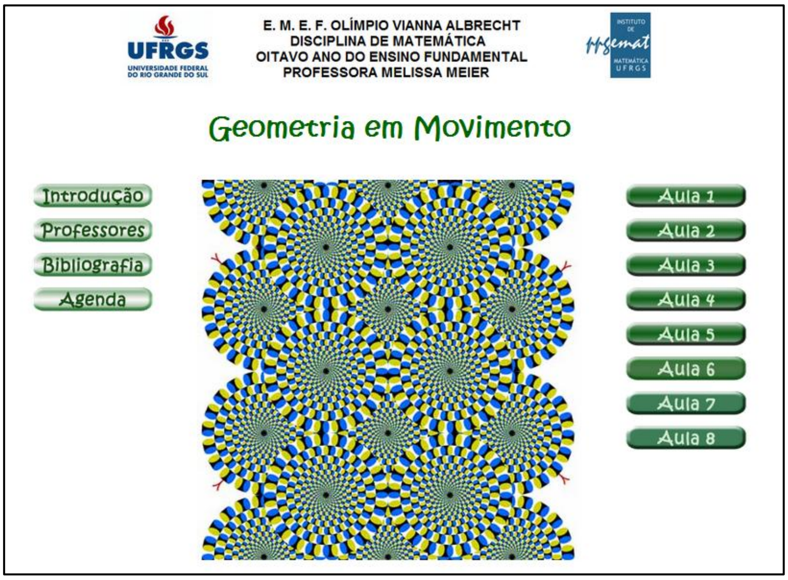


Figura 20 - Interface do site Geometria em Movimento

Nossa estratégia foi publicar na Internet, no site “Geometria em Movimento”, os conteúdos e as tarefas a serem tratados na aula presencial regular, e assim os alunos, de acordo com seus interesses, poderiam acessar o material de estudo a qualquer tempo e espaço.

Ainda hoje, este material continua disponível na Internet em duas versões: uma para professores e alunos que tiverem interesse em analisar os trabalhos produzidos a partir do experimento didático desta dissertação (http://odin.mat.ufrgs.br/modelagem/) e outro para aplicação deste material com alunos, considerando um contexto neutro (http://odin.mat.ufrgs.br/modelagemgeometrica/).

Quanto ao conteúdo do site, ele foi organizado através de uma coleção de três modelagens. Uma vez explorado este material, os alunos tiveram como desafio a realização de uma quarta modelagem geométrica, este sendo um especial momento de autoria.

Para auxiliar o aluno nesse desafio e acompanhá-lo na *jornada* de construção do próprio modelo, o material do site propõe o estudo das propriedades geométricas envolvidas na construção de três modelos. Houve um cuidado especial na escolha dos modelos, pois entendíamos que deveriam fazer parte da realidade do aluno, deveriam estar presentes no mundo concreto. Além disso, a escolha também foi guiada pelo conteúdo curricular da escola a ser atendido no oitavo ano.

Basicamente, a organização do estudo de cada um dos modelos geométricos divide-se em três etapas:

- Primeira Etapa - Modelo Geométrico é apresentado ao aluno, que faz uma primeira investigação das características e do movimento do modelo tentando identificar os padrões matemáticos envolvidos.

Nesta primeira etapa utilizamos animações que foram construídas no GeoGebra e inseridas no site[10].

Quanto ao desenvolvimento dos hábitos do pensamento matemático entendemos, como descrito anteriormente, que esta primeira etapa permite que o aluno visualize (HP-1) as características do modelo e, a partir da interação (manipulação) com as animações, realize uma investigação (HP-3) sobre as propriedades matemáticas envolvidas no modelo, buscando reconhecer as invariantes da construção (HP-2).

- Segunda Etapa - Aluno realiza atividades direcionadas e responde aos questionamentos propostos.

[10] O software GeoGebra permite a construção de animações, dispensando conhecimentos prévios de linguagem de programação, ou seja, somos responsáveis pelo conteúdo matemático da construção e o GeoGebra traduz para a linguagem de programação. Assim, conseguimos inserir a construção realizada em uma página da web. Esta característica permite a criação de material digital que possibilita a ação do aluno sobre o material; de observador o aluno passa a ser agente ativo do processo.

Novamente, utilizamos animações feitas no GeoGebra, mas agora com uma interação mais específica do aluno, visando a aprendizagem de conteúdos da geometria. O que propomos nas animações desta etapa é o início de construções que devem ser concluídas pelo aluno. A proposta é iniciar a familiarização do aluno com os conceitos geométricos e os menus do GeoGebra que serão utilizados na construção do modelo geométrico que está em estudo.

A ideia desta interação mais específica do aluno está baseada na "movimentação" (utilização do menu "move") das construções e, consequentemente, na percepção das relações matemáticas envolvidas nas animações. Quando pedimos ao aluno que "movimente" uma construção (animação), estamos incentivando a utilização de formas gerais de pensamento matemático e, desta forma, baseado em previsões, interpretações e comprovações, o aluno consegue formular descrições mentais e escritas sobre suas percepções.

Também, com o intuito de auxiliar esta interação, o site propõe questionamentos específicos sobre cada propriedade geométrica sob estudo. Ao término de cada atividade, os alunos devem responder, em seus registros de aula, as questões propostas estabelecendo uma "regra" para os conceitos trabalhados. Utilizamos a expressão "regra", pois esta é uma palavra utilizada pelos alunos, quando precisam explicar, por exemplo, os procedimentos de funcionamento de um jogo, e, assim, entende-se que a "regra" em matemática explicaria o funcionamento das relações matemáticas percebidas.

Pensando no desenvolvimento dos hábitos do pensamento entendemos que, nesta etapa, o aluno começa a compreender e fazer conjecturas sobre as relações matemáticas envolvidas (HP-5) a partir da construção e manipulação dos objetos (HP-7) e, quando responde as perguntas, tem a oportunidade de descrever, formal e informalmente, relações e processos (HP-6).

- Terceira Etapa – O aluno constrói um modelo semelhante ao estudado na primeira etapa considerando suas ideias, percepções e conclusões.

Nesta última etapa, o aluno demonstra o que aprendeu. No GeoGebra, ele coloca em prática o que estudou criando estratégias (HP-4) para construir um modelo semelhante a modelagem geométrica estudada.

Entendemos que, de um modo geral, as etapas de organização do estudo dos três modelos geométricos propostos contemplam os sete hábitos do pensamento a serem desenvolvidos no aluno (proposta de Goldenberg (1998), discutida na terceira seção do capítulo 2). Porém, julgamos que é na construção do modelo geométrico escolhido pelo aluno, a ser feita após a construção orientada dos três modelos indicados para estudo, que vamos conseguir melhor avaliar o nível de desenvolvimento destes hábitos do pensamento.

Nossa hipótese de pesquisa é que as escolhas e os processos envolvidos na construção de um modelo geométrico ajudam na identificação do nível de desenvolvimento dos hábitos do pensamento matemático. Isto porque quando o aluno inicia a modelagem do objeto escolhido, no primeiro momento precisa visualizar (HP-1) e identificar (HP-2) as relações geométricas necessárias para sua implementação. Na sequência, o aluno começa a planejar (HP-4) a construção do modelo a partir da exploração (HP-3) e compreensão (HP-7) das possibilidades de um ambiente de geometria dinâmica. Assim, concluídas suas análises, o aluno conjectura (HP-5) estabelecendo os passos para a construção de seu modelo.

No total, para a aplicação do experimento didático, foram elaboradas oito aulas, que estão disponíveis no site "Geometria em Movimento". Abaixo, temos um quadro que apresenta a organização deste material:

AULA	MODELAGEM	CONTEÚDO CURRICULAR
Aula 1 Aula 2 Aula 3	Modelagem geométrica de uma Porta Pantográfica.	- Ponto; - Reta; - Semirreta; - Segmento de reta; - Reta paralela; - Reta perpendicular.
Aula 4 Aula 5	Modelagem geométrica de uma Janela Basculante	- Ângulo; - Ângulos opostos pelo vértice; - Ângulo de duas retas com uma transversal; - Triângulo; - Soma dos ângulos internos de um triângulo.
Aula 6 Aula 7	Modelagem geométrica de um Balanço Vai e Vem	- Quadriláteros (propriedades gerais); - Quadriláteros notáveis.
Aula 8	Aula reservada para trabalhar na construção da modelagem escolhida pelo aluno	O objetivo, ao final do estudo dos três modelos geométricos, é que o aluno consiga planejar os passos para a construção de sua própria modelagem geométrica.

Quadro 7 - Quadro-resumo do material disponível no site "Geometria em Movimento".

Nas próximas seções, apresentamos descrições detalhadas das modelagens geométricas propostas para estudo e seus procedimentos de construção. Apresentaremos, também, nossas ideias de atividades que contemplam o entendimento das relações matemáticas envolvidas nestas modelagens.

4.2.1 Modelagem Geométrica – Porta Pantográfica

O primeiro modelo proposto para estudo é a Porta Pantográfica (protocolo de construção esta disponível nos apêndices). A construção deste modelo foi apresentada na seção 3.3 do capítulo anterior com o objetivo de exemplificar o procedimento de construção de uma Modelagem Geométrica e, por isso, não a repetiremos aqui.

Além das características específicas para o desenvolvimento dos hábitos do pensamento, este primeiro modelo geométrico proposto para estudo, tem o objetivo de familiarizar a turma com a proposta do experimento didático e com os diferentes espaços utilizados durante sua aplicação: site Geometria em Movimento para acompanhar as atividades do experimento didático, software GeoGebra para construção dos modelos geométricos e software Kompouser para elaboração dos registros escritos.

No que se refere às atividades planejadas para entendimento das relações geométricas envolvidas na construção do modelo, o site propõe quatro atividades tratando de pontos, reta, semirreta, segmento de reta, retas paralelas, retas perpendiculares e ponto médio. São elas:

- Atividade 1: Perceber, a partir da exploração de uma animação feita no GeoGebra, as características de um ponto que está sobre a reta na geometria dinâmica. O objetivo desta atividade é iniciar o entendimento da diferença entre uma construção *livre* e uma construção que está *amarrada* a partir de relações matemáticas pré-estabelecidas.

A Figura 21 representa a animação disponibilizada para os alunos nesta primeira atividade - reta contendo pontos A, B, C, D e fora dela os pontos E e F que propositalmente foram colocados sobre (visualmente) a reta.

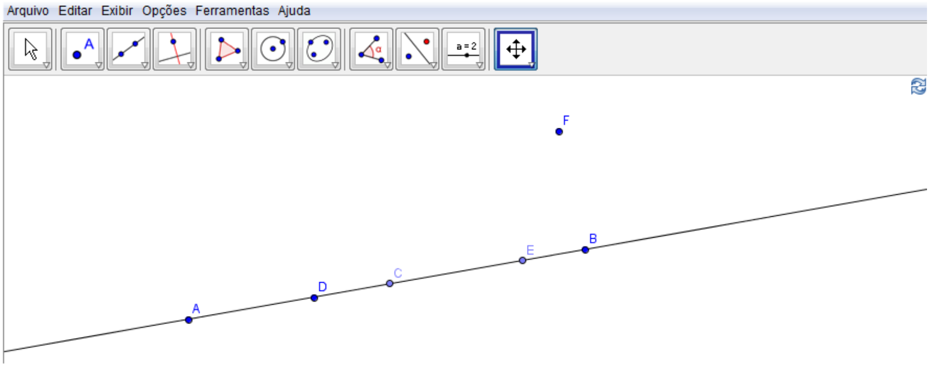


Figura 21 – Animação feita no GeoGebra para a realização da primeira atividade do Bloco I.

- Atividade 2: Completar uma animação feita no GeoGebra, conforme indicações estabelecidas, e investigar as relações matemáticas envolvidas. A expectativa é de que os alunos consigam, ao final desta atividade, compreender o conceito de pontos colineares.

A Figura 22 representa a animação disponibilizada para os alunos nessa atividade - reta contendo pontos A, B, C e fora dela o ponto D que propositalmente será colocado afastado (visualmente) da reta.

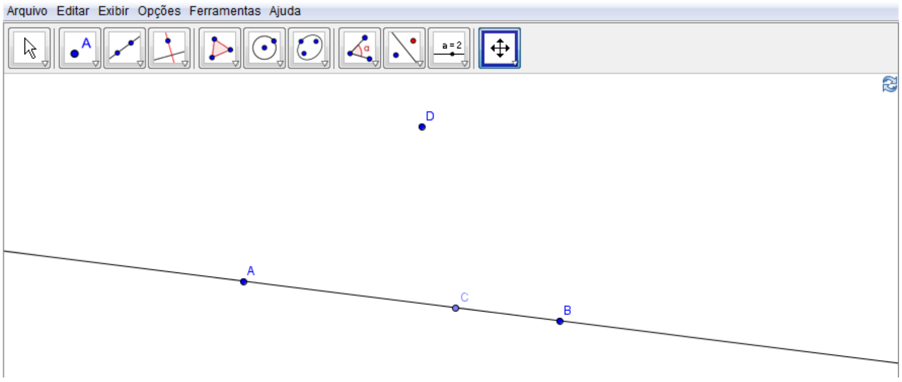


Figura 22 - Animação feita no GeoGebra para a realização da segunda atividade do Bloco I.

Principal questionamento proposto para esta segunda atividade:

Quando uma reta pode ser desenhada passando por três pontos? Como devem estar posicionados estes três pontos?

- Atividade 3: Completar uma animação feita no GeoGebra, conforme indicações estabelecidas, e realizar uma investigação das relações matemáticas envolvidas na construção. O objetivo para desta atividade é que os alunos percebam que por um ponto P, não pertencente a uma reta r, passa uma única reta paralela a essa reta r dada.

A Figura 23 representa a animação disponibilizada para os alunos nessa atividade - reta a contendo pontos A, B e fora dela o ponto C que propositalmente será colocado afastado (visualmente) da reta.

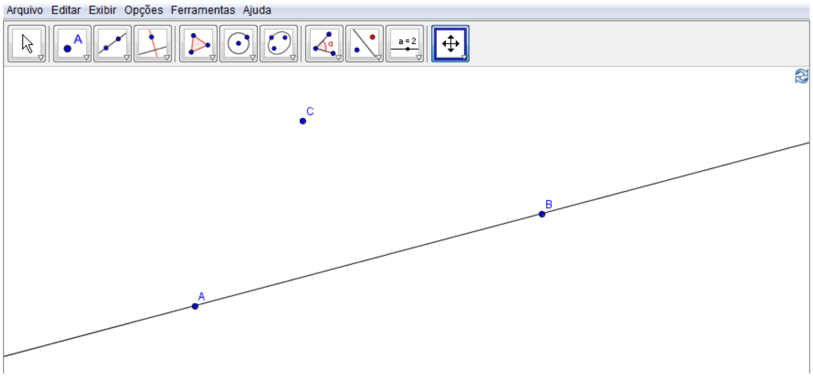


Figura 23 - Animação feita no GeoGebra para a realização da terceira atividade do Bloco I.

Principais questionamentos propostos para esta terceira atividade:

Escreva a regra que explica o que é uma reta paralela a reta a.

Escreva a regra que explica o que é uma reta perpendicular a reta a.

- Atividade 4: Criar um arquivo no GeoGebra utilizando o menu *Ponto Médio*, conforme indicações estabelecidas, e com a "movimentação" da construção, perceber as características desta relação matemática.

Principais questionamentos propostos para estas atividades:

Descreva o que você está observando, quando movimenta os objetos.

Escreva uma regra que explique as características de um PONTO MÉDIO.

4.2.2 Modelagem Geométrica – Janela Basculante

Nesse segundo modelo abordado - Janela Basculante (protocolo de construção esta disponível nos apêndices) - o aluno trabalha o conceito de retas paralelas cortadas por uma reta transversal, para criar o efeito de "abrir/fechar" da janela. Como no modelo da Porta Pantográfica, pode-se iniciar a construção de um segmento e seu ponto médio e, depois, a construção dos pontos médios dos segmentos determinados por estes três pontos.

A utilização de pontos médios neste modelo tem como propósito a construção de segmentos que guardem proporcionalidade. Este procedimento de construção e o efeito do movimento estão ilustrados na Figura 24.

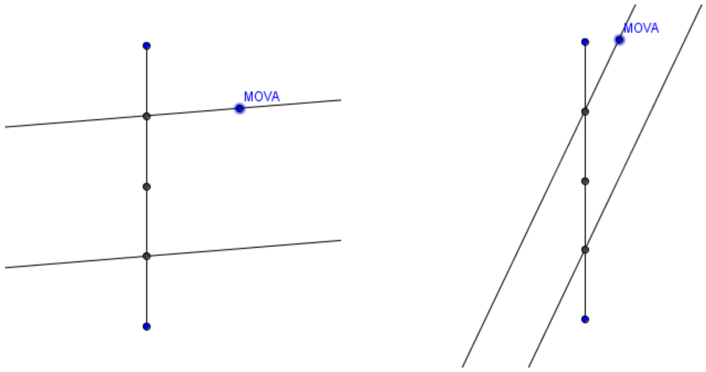


Figura 24 - Início da construção da Janela Basculante, à esquerda, e visualização do efeito produzido pelo deslocamento do ponto MOVA, à direita.

Concluída esta primeira etapa, falta apenas controlar o efeito de “abrir/fechar” da janela limitando o movimento do ponto MOVA. Esta limitação pode ser estabelecida através do menu *Arco de Circunferência* do GeoGebra, como mostra a Figura 25:

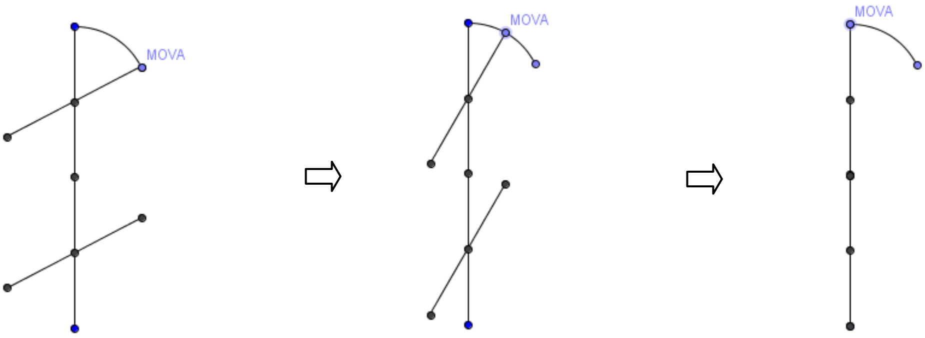


Figura 25 - Visualização de uma sequência de imagens do efeito de controle de movimento do modelo de Janela Basculante.

A conclusão da construção do modelo de janela basculante é dada através dos menus *Reta Paralela* e *Reta Perpendicular*. Com estes procedimentos, quando movimentamos o ponto MOVA, obtemos o efeito “abrir/fechar” da janela basculante, como ilustra a Figura 26.

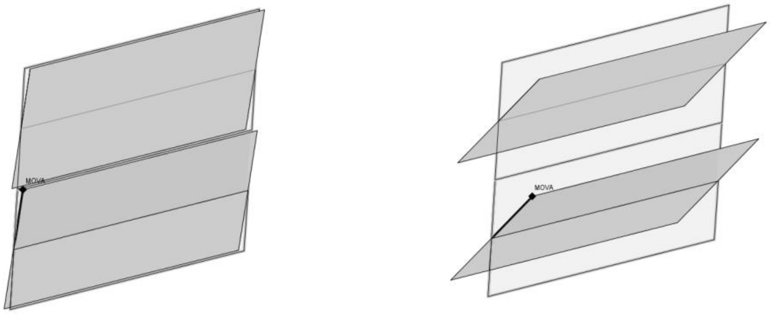


Figura 26: Visualização do modelo de janela basculante, disponibilizado no site “Geometria em Movimento”, à esquerda, e visualização do efeito produzido pelo deslocamento do ponto MOVA, à direita.

No que se refere à compreensão das relações matemáticas envolvidas na construção do modelo - ponto, reta, semirreta, segmento de reta, retas paralelas, retas perpendiculares, ponto médio, ângulo, ângulos opostos pelo vértice, ângulo de duas retas com uma transversal, triângulo e a soma dos ângulos internos de um triângulo - no site “Geometria em Movimento” estão propostas cinco atividades.

Nas atividades planejadas para o estudo deste segundo modelo, ampliam-se os momentos de discussão em grande grupo. No total, são propostos dois momentos de centralização da atenção da turma para discussão em grupo das relações matemáticas envolvidas na construção do modelo. O objetivo desta estratégia é desenvolver/qualificar o registro oral e escrito das relações matemáticas percebidas.

Descrevemos abaixo as atividades e discussões propostas para este segundo modelo estudado.

Atividades 1 e 2 - Criar uma animação no GeoGebra utilizando o menu *Ângulo* e, conforme indicações estabelecidas, perceber as propriedades matemáticas envolvidas. A expectativa é que concluídas estas atividades os alunos consigam definir *ângulo* como uma abertura entre semirretas.

Atividade 3 - Utilizar as conclusões das duas atividade anteriores e, a partir da complementação da animação iniciada na Atividade 1, perceber a igualdade entre ângulos opostos pelo vértice.

Ao final desta atividade, a ideia é iniciar uma discussão, no grande grupo, para sistematizar oralmente as ideias apresentadas pela turma para o conceito de ângulos opostos pelo vértice. O objetivo é discutir com o grupo a maneira como informamos (escrevemos) nossas constatações, ressaltando a importância da *justificativa* para a matemática.

A animação que está ilustrada na Figura 27 é utilizada para fazer a demonstração da congruência dos ângulos opostos pelo vértice.

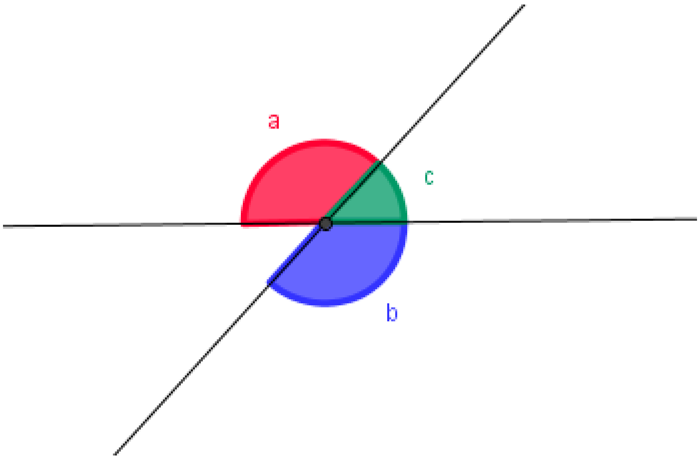


Figura 27: imagem utilizada para justificar a igualdade entre ângulos opostos.

a+c = 180

c+b = 180

Então

a=b

Conforme dito anteriormente, o intuito desta discussão é possibilitar ao aluno uma vivência com a justificativa matemática para que, desta maneira, possa refletir sobre suas respostas para as perguntas colocadas no site. Nossa expectativa é que a vivência e experiência com a linguagem matemática possibilite o desenvolvimento da linguagem do aluno. A ideia não é impor uma linguagem, mas ampliar o conhecimento do aluno e ao mesmo tempo permitir que sempre inicie escrevendo com suas próprias palavras as relações matemáticas identificadas.

Atividade 4 - Complementar e investigar uma animação feita no GeoGebra, percebendo a relação matemática existente entre ângulos alternos formados por um par de retas paralelas cortadas por uma reta transversal.

A Figura 28 representa a animação disponibilizada para os alunos nessa atividade (reta r e s paralelas cortadas pela reta t nos pontos C e F. Ponto MOVA sobre a reta t).

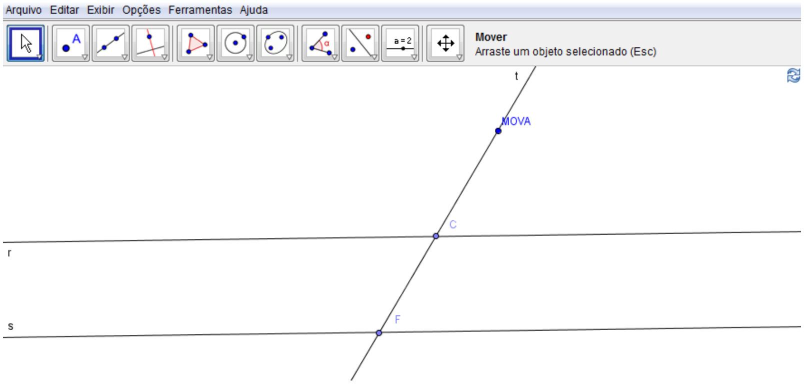


Figura 28 – Animação feita no GeoGebra para a realização da quarta atividade do Bloco II.

Com a conclusão desta atividade, a ideia é iniciar o segundo momento de discussão em grande grupo, para sistematizar as ideias apresentadas para o conceito de ângulos alternos. O intuito da discussão é, mais uma vez, ampliar a vivência e experiência com a justificativa matemática, possibilitando o desenvolvimento e a qualificação da linguagem do aluno.

Atividade 5 - Analisar uma animação feita no GeoGebra e, utilizando as conclusões da atividade anterior, construir uma "regra" para a soma dos ângulos internos do triângulo qualquer.

A Figura 29 representa a animação disponibilizada para os alunos nessa atividade.

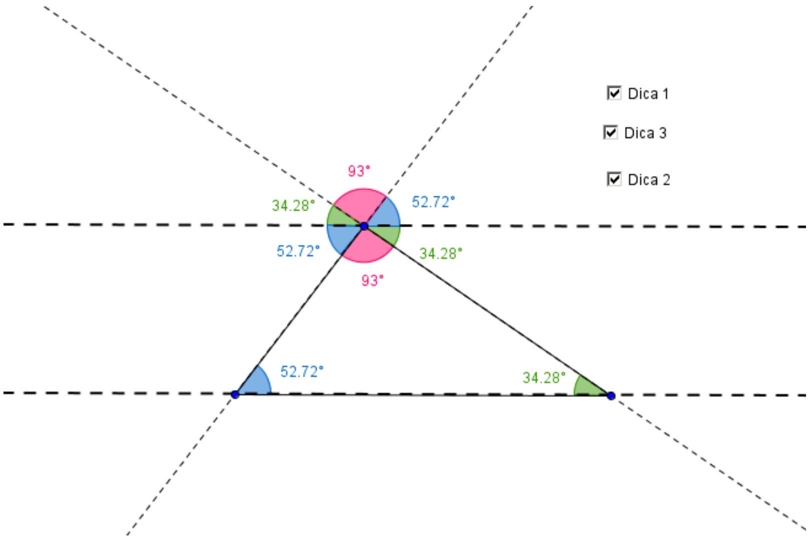


Figura 29 – Animação feita no GeoGebra para a realização da quinta atividade do Bloco II.

Esta animação foi especialmente criada para servir como instrumento para o desenvolvimento autônomo do aprendizado ao disponibilizar três níveis de auxílio para o entendimento do conceito. Entendemos que, desta forma, é o aluno que determina quantas informações precisa para estabelecer suas conclusões.

Questionamento proposto para esta atividade:

A partir dos elementos da construção e de sua análise, tente explicar, em seus registros de aula, por que a relação observada é válida para qualquer triângulo (todos os triângulos).

4.2.3 Modelagem Geométrica – Balanço Vai e Vem

O último modelo proposto para estudo no site “Geometria em Movimento” é o Balanço Vai e Vem (protocolo de construção esta disponível nos apêndices) e, nele, o aluno trabalha com conceito de quadrilátero, mais especificamente com o conceito de paralelogramo.

Para o paralelogramo, fizemos a seguinte construção: segmentos AB e AD; reta r paralela ao segmento AB passando por D; reta s paralela ao segmento AD, passando por D; C ponto de intersecção das duas retas; segmentos BC e DC. Movimentando os vértices A, B e D, vemos que o quadrilátero construído mantém os lados opostos sempre paralelos; mas o movimento mostra que retângulos, quadrados e losangos são quadriláteros que fazem parte da família dos paralelogramos e, é isso que ilustramos na Figura 30, a qual registra o resultado de alguns movimentos aplicados aos vértices A, B e D do paralelogramo.

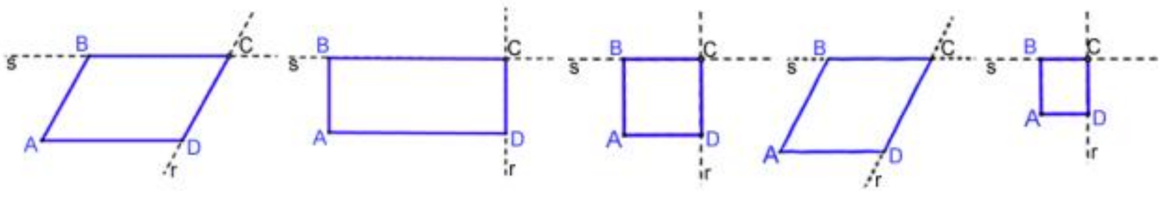


Figura 30 - Movimento aplicado ao paralelogramo

Desta forma, o aluno tem a possibilidade de analisar as características do paralelogramo e perceber que a condição que o define é tão somente “ser quadrilátero com lados opostos paralelos”.

Para a construção de modelo de Balanço Vai e Vem é preciso determinar um único ponto para movimentação do modelo e, também, limitar seu movimento – o efeito “vai e vem” do balanço. Aqui, como no modelo de janela basculante, pode-se utilizar, para delimitar o movimento, o menu *Arco de Circunferência* do GeoGebra. Os demais elementos que compõem a construção modelo são decorativos e servem para representar o balanço, como mostra a Figura 31.

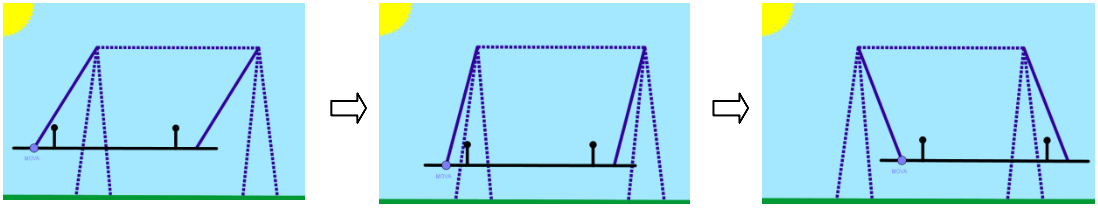


Figura 31 - Visualização de uma sequência de imagens do modelo de Balanço Vai e Vem, disponibilizado no site “Geometria em Movimento”.

São três as atividades propostas no site para entendimento das relações matemáticas envolvidas na construção deste modelo - ponto, reta, semirreta, segmento de reta, retas paralelas, retas perpendiculares, ponto médio, ângulo, ângulos opostos pelo vértice, ângulo de duas retas com uma transversal, quadriláteros (propriedades gerais) e quadriláteros notáveis. São elas:

Atividade 1 - Perceber e registrar as propriedades matemáticas dos quadriláteros (relação entre lados) a partir da análise de uma animação feita no GeoGebra.

A Figura 32 representa a animação disponibilizada para os alunos nessa atividade.

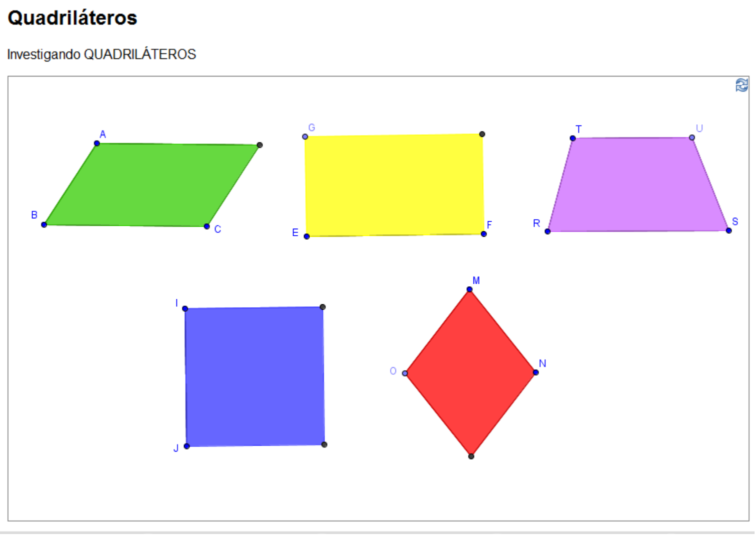


Figura 32 – Animação feita no GeoGebra para a realização da primeira atividade do Bloco III.

Atividade 2 – Perceber e registrar as propriedades matemáticas dos quadriláteros, mas agora observando a relações matemáticas existentes entre as diagonais de cada quadrilátero.

A Figura 33 representa a animação disponibilizada para os alunos nessa atividade.

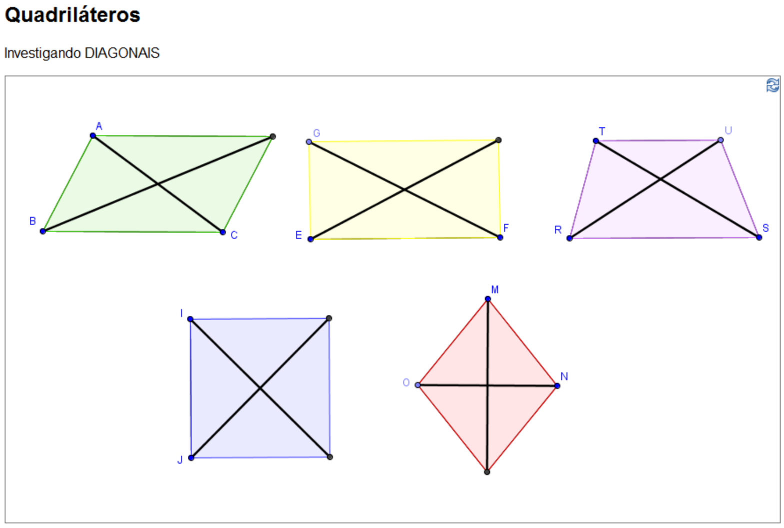


Figura 33 – Animação feita no GeoGebra para a realização da segunda atividade do Bloco III.

Ao concluir a atividade, a ideia é iniciar uma discussão, no grande grupo, para estabelecer um resumo das “regras” que explicam as propriedades gerais dos quadriláteros.

Atividade 3 – Construir um dos quadriláteros notáveis estudado nas atividades anteriores. Nossa expectativa é que os alunos consigam, sem maiores dificuldades, construir um dos quadriláteros estudados determinando as propriedades e ferramentas necessárias para sua implementação.

Nesta seção, foram apresentadas nossas estratégias e ideias para trabalhar com os alunos as modelagens geométricas apresentadas no site “Geometria em Movimento”. Estas estratégias e ideias não são únicas e exclusivas, pois as possibilidades de construção do modelo de um mesmo objeto são inúmeras.

No site “Geometria em Movimento” não foram estabelecidos *passos* para a construção dos modelos, pois o que buscamos é, sobretudo, acompanhar o desenvolvimento das habilidades do pensamento do aluno. Para cada modelo, a ser construído, tratamos de apresentar os conceitos geométricos, bem como, os menus do GeoGebra, a serem utilizados no processo, mas sempre deixando o aluno determinar, de forma autônoma, o seu procedimento de construção, usando a sua percepção do movimento do modelo concreto e análise do modelo virtual.

Neste capítulo apresentamos, também, recursos didáticos característicos da EAD, isto porque, nossas vivências com esta modalidade de ensino nos levaram a refletir sobre a forma como estamos interagindo com os alunos em nossa prática docente. Hoje, questionamos a limitação de *espaços e tempos* característicos da educação presencial. Nesse sentido, defendemos a utilização de material didático digital que possa ser acessado pelo aluno fora do ambiente escolar. O site “Geometria em Movimento” contempla, também, esta ideia.

5 O EXPERIMENTO DIDÁTICO

Neste capítulo, apresentamos a proposta, a implementação e a análise de um experimento didático elaborado para o ensino de tópicos de geometria que fazem parte do programa de Matemática do Ensino Fundamental. O objetivo da proposta é provocar a aprendizagem da geometria com concomitante desenvolvimento de “hábitos do pensamento” matemático.

Iniciamos o capítulo fazendo algumas considerações sobre a Engenharia Didática, a metodologia de pesquisa que inspirou a concepção de nosso experimento, e então avançamos no detalhamento do experimento. Na segunda seção do capítulo, apresentamos as análises das atividades realizadas pelos alunos, sempre buscando identificar os possíveis desenvolvimentos de “hábitos do pensamento”.

5.1 A metodologia de pesquisa e a organização do experimento didático

Tomamos a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, pelo fato de esta ir além de pesquisa teórica, ao propor experiências em sala de aula. Segundo Artigue (1996):

> A engenharia didática vista como metodologia de pesquisa de investigação, caracteriza-se antes de mais nada por um esquema experimental baseado em ‘realizações didáticas’ na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino. (pag. 196).

A partir da Engenharia Didática, o professor tem a oportunidade de repensar e avaliar sua ação docente e, assim, redirecionar o trabalho que desenvolve. Nesta metodologia de pesquisa, ele busca compreender as dificuldades apresentadas pelos alunos em sala de aula e, desta forma, é capaz de refletir sobre sua ação.

O desenvolvimento de uma Engenharia Didática ocorre a partir da escolha de um ponto problemático no sistema didático. Utilizamos as palavras de Artigue (1996) para esclarecer esta ideia:

> Considera-se um ponto problemático no sistema didático, cujo funcionamento parece, por razões que podem ser de natureza diversa, pouco satisfatório. Analisa-se este ponto do funcionamento e os constrangimentos (condições) que tendem a fazer dele um ponto de equilíbrio do sistema e depois, jogando com estes constrangimentos (condições), procura-se determinar as condições de existência de um ponto mais satisfatório. (pag. 196).

Identificado e escolhido o problema para investigação, a Engenharia Didática se desenvolve em quatro diferentes etapas: *análise prévia; concepção do experimento, análise a priori e formulação de hipótese; a experimentação;* e finalmente a *análise a posteriori* e a *validação das hipóteses.*

a) *Análise prévia* – nesta etapa, são considerados diferentes aspectos: o ensino habitual do conteúdo, o estudo teórico, a metodologia de ensino e seus efeitos, a postura dos alunos, as dificuldades.

b) *Concepção do experimento, análise a priori e formulação de hipótese*– nesta etapa, ocorrem as tomadas de decisão do investigador (professor). Nela é elaborada a sequência didática, com a previsão de possíveis comportamentos dos alunos e de tipo de conhecimento que será construído. Neste momento, também é estabelecida a hipótese a ser validada durante o experimento.

c) *Experimentação* – o momento de execução do experimento concebido.

d) *Análise a posteriori* – a partir das observações realizadas durante a experimentação e do material produzido pelos alunos, é feita a *análise a posteriori*, com o objetivo de validar (ou não) a proposta didática implementada e as hipóteses formuladas.

Em nosso trabalho o ponto problemático escolhido, já enunciado anteriormente, é a dificuldade que os alunos do Ensino Fundamental apresentam no estudo da matemática – uma constatação da limitação ou até, em alguns casos, inexistência do pensamento matemático (observar, relacionar, experimentar, conjecturar, errar e repensar suposições).

Nesta dissertação, a primeira etapa da Engenharia Didática, tratando das *análises prévias*, foi desenvolvida no capítulo 2. Neste capítulo, discutimos o tratamento que se tem dado ao desenvolvimento do pensamento matemático na Escola Básica e trouxemos um recorte de realidade quanto ao que pensam os professores sobre desenvolvimento do pensamento matemático na escola e também sobre como pensa em matemática um grupo de alunos do oitavo ano.

A última parte das análises prévias, também apresentada no capítulo 2, trata da proposta de Goldenberg (1998) sobre o desenvolvimento dos “hábitos do pensamento” matemático. Conforme lá discutido, Goldenberg identifica sete “hábitos do pensamento” matemático que devem ser trabalhados com os alunos para possibilitar o desenvolvimento do pensamento matemático. São eles:

- *Visualização* (HP-1).
- *Reconhecer padrões ou invariantes* (HP-2).
- *Fazer experiências e explorações* (HP-3).
- *Pensar, demonstrar ideias, ser inventor* (HP-4).
- *Fazer conjecturas* (HP-5).
- *Descrever, formal e informalmente, relações e processos* (HP-6).
- *Raciocinar por continuidade* (HP-7).

Seguindo as etapas da Engenharia Didática, nos capítulos 3 e 4 apresentamos as escolhas didáticas que nortearam o experimento que vamos aqui apresentar, acompanhadas de reflexões que justificam o "porquê" destas escolhas. Ou seja, nestes dois capítulos tratamos da *Concepção do experimento*, das *análises a priori e da formulação de hipótese.* Relembramos as escolhas didáticas que foram feitas:

- trabalhar com a geometria dinâmica por suas potencialidades no desenvolvimento dos "hábitos do pensamento";

- desenvolver atividades que proponham a construção de modelos geométricos, iniciando com a exploração de modelos virtuais, depois avançando no estudo das propriedades envolvidas nestas construções e, finalmente, propondo a implementação de um modelo semelhante (igualdade no movimento).

O desenvolvimento do site "Geometria em Movimento" e a concepção do experimento aconteceram de forma integrada. O site, detalhado no capítulo 4, apresenta uma barra de navegação que organiza um conjunto de oito aulas que vão tratar de três modelagens - Porta Pantográfica, Janela Basculante e Balanço Vai e Vem - e dos conteúdos de geometria que são necessários para o desenvolvimento das modelagens.

A partir do material disponibilizado no site, o experimento se organiza em quatro blocos de estudo: os três primeiros tratam, respectivamente, da modelagem da Porta

Pantográfica, da Janela Basculante e do Balanço Vai e Vem e no quarto bloco os alunos produzem uma modelagem de sua escolha.

O trabalho a ser feito nos três primeiros Blocos está organizado em três etapas, conforme apresentado no capítulo 4, e possui objetivos bem específicos:

- Primeira Etapa: Modelo Geométrico é apresentado ao aluno, que faz uma primeira investigação das características e do movimento do modelo tentando identificar os padrões matemáticos envolvidos.
- Segunda Etapa: Aluno realiza atividades direcionadas para o entendimento das relações matemáticas envolvidas na construção do modelo e responde aos questionamentos propostos.
- Terceira Etapa: O aluno constrói um modelo semelhante ao estudado na primeira etapa considerando suas ideias, percepções e conclusões.

No total, o experimento foi planejado para ocorrer em oito aulas organizadas nos quatro blocos descritos acima. O quadro abaixo apresenta a organização destes Blocos. Nele fazemos referências as oito "Aulas" que estão organizadas no site "Geometria em Movimento".

BLOCO DE ESTUDO	AULA	TAREFA	DURAÇÃO
BLOCO I Modelagem da Porta Pantográfica	1	Etapa I: Exploração do modelo Etapa II:Realização das atividades guiadas da "Aula 1"	2 horas
	2	Etapa II: Realização das atividades guiadas da "Aula 2".	2 horas
	3	Etapa III: Realização da atividade guiada da "Aula 3" e construção do modelo de uma Porta Pantográfica.	2 horas
BLOCO II Modelagem da Janela Basculante	4	Etapa I: Exploração do modelo Etapa II: Realização das atividades guiadas da "Aula 4"	2 horas
	5	Etapa III: Construção do modelo de uma Janela Basculante.	2 horas
BLOCO III Modelagem do Balanço Vai e Vem	6	Etapa I: Exploração do modelo Etapa II: Realização das atividades guiadas da "Aula 6"	2 horas
	7	Etapa III: Construção do modelo de um Balanço Vai e Vem.	2 horas
BLOCO IV Modelagem livre	8	Construção do modelo geométrico do objeto escolhido.	2 horas

Quadro 8 - Quadro-resumo dos blocos de estudo disponíveis no site "Geometria em Movimento".

É com o conhecimento construído nos três primeiros blocos que os alunos são convidados a produzirem uma modelagem do mecanismo/situação de sua escolha, o quarto Bloco do experimento.

5.2 A realização do Experimento

O experimento foi implementado com uma turma de alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, do turno da manhã, na escola Olimpio Vianna Albrecht, escola pública da rede municipal da cidade de São Leopoldo. A turma tinha um total de 32 alunos, com idades variando entre 11 e 15 anos. Esta turma possuía dois alunos considerados pela escola como alunos de inclusão. A professora da turma é autora desta dissertação, ou seja, já trabalhava com os alunos desde o início do ano (2011) em que foi realizado o experimento didático.

As atividades foram realizadas no período de 6 de setembro a 5 de outubro de 2011 com uma duração total de 16 horas de aula. A disciplina de matemática conta com quatro períodos de aulas semanais com duração de 1 hora cada um. Com esta turma, os encontros aconteceram nas terças e quartas, com dois períodos em cada dia.

A dinâmica do trabalho foi a seguinte:

- todos os encontros aconteceram no laboratório de informática da escola, com alunos trabalhando em duplas. Os alunos que optaram por trabalhar juntos espontaneamente formaram duplas e, os demais, foram agrupados por sorteio. No total, foram formadas dezesseis duplas, sendo a metade formada por afinidade e a outra metade por sorteio. Os alunos considerados alunos de inclusão, optaram por trabalhar juntos durante o experimento didático. O laboratório utilizado dispunha de 28 computadores com acesso à Internet e um projetor multimídia.

- em todos os encontros, os alunos fizeram registros de suas ideias e responderam aos questionamentos propostos criando um documento digital com extensão HTML. O software utilizado para a criação destes documentos foi o Kompouser, um editor de páginas HTML gratuito.

- ao final de cada encontro, a professora (que também é autora deste trabalho) conduziu momentos de apresentação dos trabalhos desenvolvidos pelas duplas, propondo uma discussão coletiva do grupo. A ideia, para este momento da aula, era compartilhar e sistematizar o conhecimento produzido pelos alunos nos momentos de trabalho em dupla.

A concepção inicial do experimento didático foi readaptada durante sua aplicação, com a reestruturação de algumas atividades, isto porque sentimos a necessidade de intervir em momentos que não estavam previstos, de forma a esclarecer as dúvidas que se apresentavam e ampliar o desenvolvimento de “hábitos do pensamento” que se mostraram pouco compreendidos pelos alunos.

Quanto à modelagem a ser feita no Bloco IV, antes do início da aplicação do experimento didático, explicamos o que seria construir um modelo geométrico. Nesta explicação utilizamos, como exemplo, nosso próprio modelo geométrico (Figura 34) construído durante a graduação e já apresentado no capítulo 1 desta dissertação.

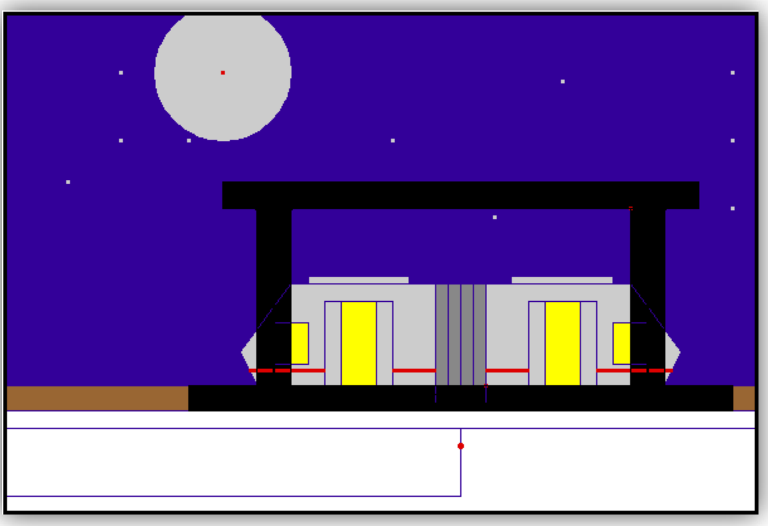


Figura 34 – Modelagem Geométrica que representa o metrô da região de Porto Alegre.

Ao final desta apresentação, entendendo que as possibilidades de construção de um modelo geométrico estavam compreendidas, combinamos com os alunos que todas as duplas deveriam indicar, antes do início do experimento didático, o objeto que gostariam de modelar mesmo que mais tarde mudassem de ideia. Realizamos este pedido, pois acreditamos que, com esta primeira indicação poderíamos verificar se, ao final do estudo dos modelos estabelecidos nos três primeiros Blocos, os alunos aceitariam o desafio que se propuseram a solucionar ou se mudariam sua escolha considerando a dificuldade em trabalhar com a modelagem geométrica, propondo a construção de um modelo mais simples.

O quadro a seguir apresenta as escolhas feitas pelas duplas. Das 16 duplas, somente 4 não apresentaram uma escolha inicial .

DUPLA	**MODELO ESCOLHIDO**
1	Asa Delta sobrevoando um viaduto com automóveis em movimento e um campo de futebol com jogadores.
2	Prédio com porta abre e fecha + pessoas entrando e saindo.
3	*Não indicaram modelo escolhido*
4	Skatista em pista fazendo manobras.
5	Teleférico
6	*Não indicaram modelo escolhido*
7	Ônibus + pessoas entrando e saindo.
8	Parque de diversão
9	Elevador
10	Pracinha de brinquedos
11	Palhaço malabarista
12	Carro de corrida em pista (competição).
13	Pula-pula + Gira-gira
14	*Não indicaram modelo escolhido*
15	*Não indicaram modelo escolhido*
16	Barco *Viking*

Quadro 9 –Indicação das duplas sobre o objeto que gostariam de modelar.

No que segue, relataremos o desenrolar do experimento acompanhado de *análises a posteriori*, pois a análise *a priori* (atividades planejadas) já foi apresentada na segunda seção do capítulo 4. Organizamos nossa análise através dos Blocos que constituem o experimento e usamos como material os registros escritos dos alunos no software Kompouser, seus arquivos criados no GeoGebra, a coletânea de modelagens geométricas construídas e, também, nossos próprios registros de observação realizados durante os momentos de trabalho e apresentação das duplas.

5.2.1 O desenrolar e a análise *a posteriori* do Bloco I

Na primeira aula do Bloco I, os alunos exploraram o modelo da porta pantográfica apresentado no site "Geometria em Movimento" (Figura 35). Nesta Etapa 1, os hábitos de pensamento que foram mais diretamente desenvolvidos são a visualização (HP-1) e a reconhecimento de padrões e invariantes (HP-2), pois os alunos devem observar o modelo (HP-1) tentando compreender as relações matemáticas envolvidas (HP-2) em sua construção.

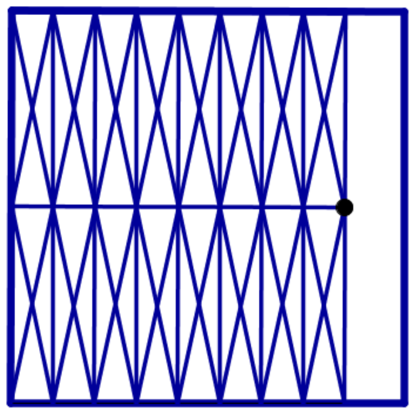


Figura 35 - Modelo geométrico de porta pantográfica disponibilizado no site Geometria em Movimento.

De modo geral, os alunos ficaram encantados com o movimento do modelo da porta pantográfica e estimulados com o desafio de trabalhar com a modelagem geométrica. Porém, observamos, neste primeiro momento, que os alunos tinham muita dificuldade em perceber as propriedades matemáticas envolvida na construção do modelo (segmento de reta, reta paralela, reta perpendicular, pontos).

Em uma primeira manifestação, os alunos indicaram a existência de um único ponto, referindo-se ao ponto que colocamos em destaque no modelo para simular a "maçaneta da porta". Com isso, constatamos a necessidade de um amplo desenvolvimento da visualização (HP-1). Percebemos que os alunos *visualizam* apenas os elementos que estão em destaque ou bem identificados na construção. Assim, com o intuito de auxiliá-los durante a apresentação, foi proposto um debate mais específico sobre os elementos geométricos presentes na construção. Nossa estratégia foi apresentar o arquivo do modelo da Porta Pantográfica mostrando os elementos "escondidos" da construção (Figura 36).

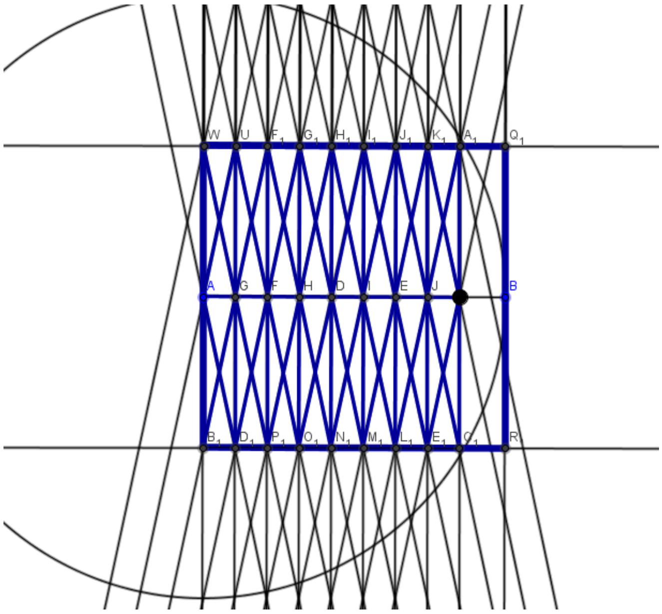


Figura 36 - Elementos escondidos do modelo geométrico de porta pantográfica disponibilizado no site "Geometria em Movimento".

Não nomeamos ou identificamos os elementos envolvidos na construção do modelo geométrico, pois isto continuava sendo um desafio para os alunos. O objetivo de nossa estratégia foi ampliar a possibilidade de visualização (HP-1), estimulando, assim, a percepção do que há na base da construção de um modelo geométrico (HP-2).

Na Etapa 2 deste Bloco I, os alunos trabalharam com os conceitos de reta, semirreta, segmento, retas paralelas, retas perpendiculares e ponto médio de um segmento. São os conceitos cruciais na construção do modelo da porta pantográfica.

As atividades realizadas correspondem as "Aula 1" e "Aula 2" disponibilizadas no site "Geometria em Movimento"

Como hábitos de pensamento presentes nesta etapa, destacamos a exploração (HP-3) das animações anexadas ao site, a compreensão dos mesmos a partir do raciocínio por continuidade (HP-7) e o registro escrito das conclusões estabelecidas (HP-6)

Os alunos, nesta etapa, não apresentaram dificuldade de adaptação ao uso do software GeoGebra e demonstraram tranquilidade na utilização da tecnologia, mesmo com os diferentes ambientes sendo acessados simultaneamente (site Geometria em Movimento, software GeoGebra e software Kompouser). Porém, os alunos tiveram duas dificuldades: compreender os questionamentos propostos e conseguir expressar, oralmente ou por escrito, o que estavam visualizando na tela do computador (HP-6).

No que se refere à dificuldade dos alunos em expressar o que estavam visualizando (HP-6), mediamos a situação insistindo que informassem, com as próprias palavras, o que estavam observando. Percebemos uma tendência dos alunos em esperar que a professora desse a resposta, demonstrando muita preocupação em acertar a mesma.

A seguir apresentaremos algumas das perguntas colocadas nas "Aula 1" e "Aula 2" do site e algumas das respostas apresentadas pelos alunos, tendo como propósito exemplificar as suas dificuldades de expressão.

> <u>Questionamento:</u> "*Quando uma reta pode ser desenhada passando por três pontos? Como devem estar posicionados três pontos para que a reta passe por eles*?"
>
> <u>Resposta</u> "*Quando ela é feita por dois pontos e o outro esta em cima dela. A única diferença que o ultimo ponto deve ser colocado entre A e B.*" (Dupla 6)

> <u>Questionamento</u>: "*Escreva a regra que explica o que é uma reta paralela a reta a.*"
>
> <u>Resposta</u>: "*Uma reta que só pode ser feita quando ha outra reta alinhada a* outros *pontos.*" (Dupla 9)

> <u>Questionamento</u>: Escreva a regra que explica o que é uma reta perpendicular a reta A.
>
> <u>Resposta</u>: "*Uma reta passada por outros pontos."* (Dupla 4). "*Uma se move na horizontal e a outra na vertical*" (Dupla 1)

> <u>Questionamento</u>: Escreva uma regra que explique as características de um Ponto Médio.
>
> <u>Resposta</u>:"*O ponto médio é o ponto que intermédia os dois pontos e nunca sai do meio*." (Dupla 16). "*Que o ponto médio sempre fica no centro da reta, e quando a reta se movimenta ele sempre fica no centro."* (Dupla 13)

Estas transcrições das respostas dos alunos evidenciam suas dificuldades na organização de ideias para a elaboração dos textos. Fica evidente, inclusive pelos erros de ortografia, que os alunos não têm o hábito de escrever suas conclusões em Matemática.

No início da "Aula 2", reservamos um momento para discutir as respostas e a linguagem apresentadas pela turma, buscando possibilitar o desenvolvimento do registro oral e escrito das relações percebidas (HP-6). Decidiu-se, com o intuito de facilitar a continuidade do trabalho e a comunicação, que elegeríamos conjuntamente (professora e a turma) uma resposta para cada questionamento, considerando o que a turma havia registrado na aula anterior. As respostas escolhidas respeitavam a compreensão dos alunos para aquele momento e também o vocabulário que estavam utilizando. Assim ficaram as respostas (R) aos questionamentos (Q):

Q: Quando uma reta pode ser desenhada passando por três pontos? Como devem estar posicionados três pontos para que a reta passe por eles?

R: Os pontos precisam estar alinhados.

Q: Escreva a regra que explica o que é uma reta paralela a reta a.

R:São retas que nunca se cruzam.

Q: Escreva a regra que explica o que é uma reta perpendicular a reta A

R:Uma reta que cruza a outra formando um ângulo de 90°.

Q: Escreva uma regra que explique as características de um Ponto Médio.

R:Um ponto médio é um ponto que fica no meio de um segmento, que marca o meio do segmento.

As respostas escolhidas sugerem que houve um desenvolvimento dos hábitos do pensamento dos alunos, pois nelas é possível perceber uma visualização (HP-1) e percepção (HP-2) adequada das relações geométricas estudadas.

Na Etapa 3 do Bloco I, os alunos trabalharam na modelagem da porta pantográfica. A expectativa era de que, concluídas as atividades da Etapa 2 e, com isso, entendidos os conceitos relativos aos elementos geométricos a serem usados na simulação do movimento da porta, os alunos fariam a construção de um modelo similar ao já explorado na Etapa 1.

Iniciamos o trabalho resgatando o debate, no grande grupo, que já havia acontecido na primeira aula, quando falamos da identificação das relações geométricas que garantem o movimento. Durante o debate, os alunos conseguiram perceber os padrões e invariantes do modelo (HP-2). Nesse sentido, houve uma evolução da percepção visual (HP-1) e, nessa atitude dos alunos, vemos que nossa análise *a priori*, quanto ao desenvolvimento de hábitos de pensamento, foi correspondida.

Percebemos que a maior dificuldade dos alunos foi quanto aos primeiros passos da construção. Identificamos nesta dificuldade a necessidade de desenvolvimento do hábito do pensamento de *criar, ser inventor* (HP-4). Nossa estratégia para o desenvolvimento deste “hábito do pensamento” foi propor uma vivência da modelagem onde informávamos os primeiros passos da construção. O objetivo da Etapa 3 continuou sendo a construção de um modelo similar ao explorado, mas mudamos a estratégia de condução da atividade.

No site “Geometria em Movimento”, na Aula 3, os alunos tiveram acesso à sequência inicial do passo-a- passo do início da construção:

Atividade 6

**Ajuda para construir a PORTA PANTOGRÁFICA.*

Para a construção do modelo de porta pantográfica iniciem a construção com os seguintes passos:
- desenhe um segmento que passa pelos ponto A e B
- desenhe um ponto C sobre esta reta (entre os pontos A e B)
- desenhe um segmento que tem extremidades nos ponto A e C.
- desenhe uma reta perpendicular a este segmento passando pelo ponto A.
- desenhe o ponto D que é ponto médio dos pontos A e C.
- desenhe o ponto E que é ponto médio dos pontos A e D.
- desenhe o ponto F que é ponto médio dos pontos C e D.
...

Agora é, novamente, com vocês! Concluam a construção da porta pantográfica.

Em grande grupo (e aqui foi utilizado o projetor multimídia) retomamos a construção do modelo e a expectativa era de que, iniciando a construção até um certo ponto, os alunos conseguiriam concluí-la. A construção obtida ao final do procedimento está na Figura 37.

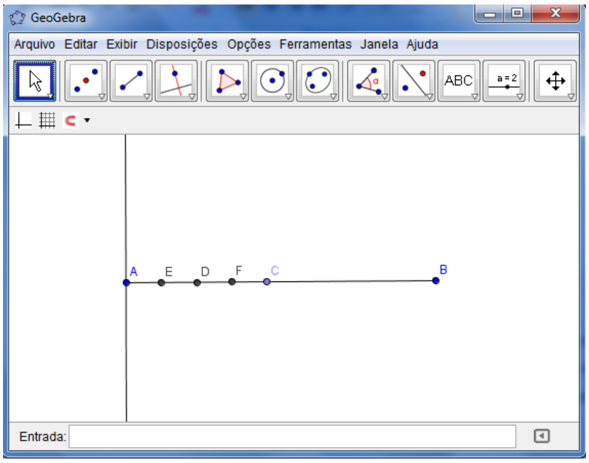


Figura 37 – Construção obtida com o procedimento disponibilizado na Atividade 6.

Poucos foram os alunos (duas duplas – quatro alunos) que, após esta mediação, não conseguiram finalizar o modelo da Porta Pantográfica. Abaixo, trazemos transcrições dos relatórios dos alunos onde informam suas conquistas e dificuldades quanto à modelagem da porta pantográfica.

Uma das manifestações:

“*Percebemos que a nossa porta não conseguiu estabelecer todos os objetivos corretos. No inicio estabelecemos o que foi pedido, percebemos a porta pantográfica é meio que movimentada por*

> *movimentos idênticos a de uma sanfona e todos eles movimentados por movimentos matemáticos. Ao decorrer da construção conseguimos observar que usamos muitas linhas feitas por dois pontos*." (Dupla 1)

Ao analisar o relatório desta dupla, observamos que o modelo não funcionou, pois onde deveriam utilizar, no GeoGebra , o menu *Reta paralela*, a dupla utilizou menu *Reta definida por dois pontos,* sem que houvesse a preocupação de informar o paralelismo entre as retas. Esta atitude dos alunos, conforme discutido no capítulo 3, reflete um primeiro estágio de entendimento da geometria dinâmica - o entendimento se apoia na visualização (HP-1) e não nas relações matemáticas (HP-2). Porém, ao movimentar o modelo (HP-3), a dupla conseguiu perceber o "erro" e repensar suas ideias.

Uma outra dupla assim se manifestou:

> *"A porta pantográfica é movimentada através de propriedades da matemática que foram atribuídas ao trabalho. Isto quer dizer que não poderíamos ter feito o "esqueleto" do trabalho sem ter criado retas paralelas e perpendiculares, nem semirretas e segmentos, ou qualquer atribuição sem estar disposta em sua devida ordem. Se assim fosse, a porta se desmancharia. Temos que dispor das informações por passos que são importantíssimos para a conclusão do trabalho."* (Dupla 11)

Neste relatório, a dupla ressalta a importância de se seguir uma ordem de construção para que se tenha o adequado funcionamento do modelo. O que entendemos é que a dupla percebeu a importância de utilizar relações matemáticas para construir o modelo

Outras duas manifestações de duplas:

> *"hoje eu e minha companheira, tentamos fazer uma porta pantográfica mas fizemos mais do que a metade. nos no começo achamos chato essa coisa de matemática pensamos que ia ser moleza mas não e o ruim e que esta tudo ligado ,na matemática depois que conseguimos fazer mais do que a metade nos alegramos por que achamos que não tinhamos toda essa capassidade de fazer coisas relacionadas a matemática. funciona porque esta ligado a geometria e a matemática,a regularidade dos angolos.*" (Dupla 14 (alunos de inclusão))

> "*Esta aula foi interessante porque foi legal fazer a porta pantográfica, ficamos o trabalho todo pensando e refletindo como a matemática é tão presente no nosso dia-a-dia.Usamos todos os tipos de pontos para a construção da porta pantográfica, a porta funciona por causa das combinações matemáticas, com pontos médios, as retas paralelas, retas perpendiculares, reta definida por dois pontos, etc...*
>
> *Ficamos sabendo que a matemática não serve apenas para fazer cálculos,mais também para fazer desenhos com movimentos do nosso cotidiano*." (Dupla 8)

Estes dois últimos relatos contemplam o objetivo principal deste trabalho quanto ao desenvolvimento de hábitos do pensamento matemático – vemos nestes relatos os alunos modificando seu olhar diante das situações cotidianas de forma a perceber a presença da matemática em atividades do dia-a-dia.

5.2.2 O desenrolar e a análise *a posteriori* do Bloco II

Na primeira aula do Bloco II (Aula 4), os alunos exploraram o modelo da janela basculante apresentado no site "Geometria em Movimento" (Figura 38). Nesta primeira etapa, os hábitos de pensamento que foram mais diretamente desenvolvidos são a visualização (HP-1) e o reconhecimento de padrões e invariantes (HP-2), pois os alunos devem observar o modelo (HP-1) tentando compreender as relações matemáticas envolvidas (HP-2) em sua construção.

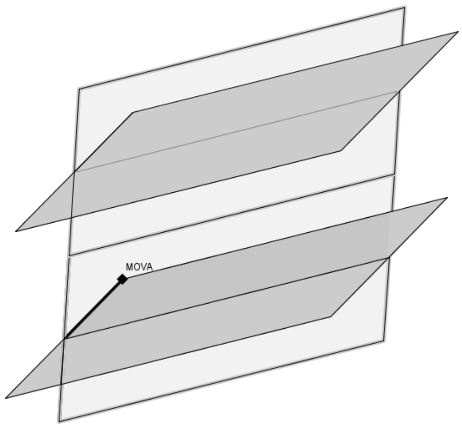


Figura 38 - Modelo geométrico de janela basculante disponibilizado no site Geometria em Movimento.

Como no primeiro modelo geométrico estudado, os alunos ficaram animados e a ideia de construir um modelo de janela basculante motivou a turma. A diferença agora foi que houve uma maior facilidade, por parte dos alunos, em identificar as relações matemáticas envolvidas na construção do modelo (HP-2). Assim, nesta apresentação, não mostramos o arquivo GeoGebra da construção, de forma que não foram vistos os elementos escondidos do modelo.

Na Etapa 2 deste Bloco II, os alunos trabalharam com os conceitos de reta, semirreta, segmento, retas paralelas, retas perpendiculares, ponto médio de um segmento, ângulo, ângulos opostos pelo vértice e ângulo alternos. São os conceitos cruciais na construção do modelo da janela basculante.

Nesta etapa 2, voltamos nossa atenção para o desenvolvimento do hábito de pensamento de registrar constatações matemáticas (HP-6). Nossa estratégia foi ampliar os momentos de discussão em grande grupo, seguindo a estratégia utilizada na última atividade da sequência de atividades proposta no Bloco I. Assim, para a etapa 2 do Bloco II foram propostos dois momentos de centralização da atenção da turma para discussão em grupo das relações matemáticas que estavam sendo trabalhadas, onde a proposta era o desenvolvimento do registro oral e escrito das relações percebidas (HP-6). As atividades realizadas correspondem as "Aula 4" e "Aula 5" disponibilizadas no site "Geometria em Movimento".

Os alunos, na grande maioria, conseguiram desenvolver as atividades propostas sem maiores dificuldades e no que se refere aos registros (HP-6), houve um progresso. Observamos uma postura mais autônoma e confiante, sem tanta preocupação com o "erro". Porém, mesmo com as discussões em grande grupo, os alunos continuaram com certa dificuldade em descrever e justificar o que percebiam na tela do computador. Nesse sentido, também, a linguagem utilizada continuou informal, mas observamos uma maior preocupação em registrar os elementos matemáticos envolvidos nas relações matemáticas, como mostram os registros transcritos abaixo. É importante ressaltar que nossa opção pela escolha dos trechos transcritos aqui é limitada, pois, de modo geral, os alunos começaram (acreditamos que motivados pelas discussões em grande grupo) a trocar informações e as respostas se assemelhavam muito. Devido à distribuição dos computadores no laboratório de informática (os alunos utilizavam sempre os mesmos computadores) e a proximidade entre as duplas, as respostas apresentaram-se muito semelhantes.

A seguir apresentamos algumas das perguntas colocadas nas "Aula 4" e "Aula 5" do site e algumas das respostas apresentadas pelos alunos, tendo como propósito exemplificar o desenvolvimento do hábito de pensamento de *registrar relações e processos* (HP-6).

> Questionamento: "Você consegue definir uma "regra" para explicar as características do menu "Ângulo" do GeoGebra?"
>
> Resposta: "*quando mexemos os dois pontos os dois ângulos se mexem juntos e ficam com o mesmo valor.*" (Dupla 1)

Para a definição da "regra" da relação ângulos opostos pelo vértice, uma dupla propôs:

> Resposta: **"***Os ângulos de uma reta, tanto inferior como superior, formam 180°. Os dois juntos, 360°. Se houver uma reta b intercalando esta reta a, a metade da reta b intercederá na medida da reta a. O que mede entre a metade definida pela reta b até a parte de cima da reta a é o*

complemento do que mede da metade para baixo. E juntas, ambas formam um ângulo de 180°." (Dupla 11)

Já para a definição da "regra" da relação ângulos alternos, alguns alunos propuseram:

Resposta: "*É que sempre quando você fizer ângulos paralelos há mesma reta eles sempre vão ser iguais.*" (Dupla 13)

Resposta: "*Se há retas paralelas em uma figura, cortadas por uma reta transversal, acontece o que observamos, de os ângulos manterem o mesmo grau. Poderemos dispor infinitas retas paralelas cortadas pela transversal, que o ângulo formado pela reta que corta e pela qual é cortada será sempre o mesmo.*" (Dupla 6)

Para a definição da "regra" que define a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo, os alunos propuseram:

Resposta: "*O triângulo tem 3 ângulos diferentes e mais 3 espelhados iguais.*" (Dupla 10)

Resposta: *"Sempre 180."* (Dupla 5)

Para o questionamento sobre a "regra" que define a *soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer* tínhamos grandes expectativas, pois trata-se de uma animação exclusivamente criada para desenvolver este conceito de forma significativa e autônoma. Para nossa surpresa, os alunos, na grande maioria, não conseguiram construir a "regra", mesmo utilizando todos os níveis de interação. Ao investigarmos o porquê da dificuldade, descobrimos que, nossa opção por caracterizar retas de auxílio da animação com a aparência tracejada, dificultou o entendimento dos alunos. Para eles, retas tracejadas (não contínuas) não são retas e não vale a propriedade dos ângulos opostos, logo, não haveria como estabelecer uma regra sem utilizar outros artifícios (somar com o software os ângulos internos do triângulo).

Na Etapa 3 do Bloco I, os alunos trabalharam na modelagem da janela basculante. A expectativa era que, concluídas as atividades da Etapa 2 e, com isso, entendidos os conceitos relativos aos elementos geométricos a serem usados na simulação do movimento da janela, os alunos fariam a construção de um modelo similar ao já explorado na Etapa 1.

Das dezesseis duplas que participaram do experimento didático, apenas quatro não conseguiram concluir a construção da Janela Basculante. A desenvoltura dos alunos com o modelagem geométrica foi ampliada neste segundo estudo. Também, indicamos como fator para um maior sucesso o trabalho conjunto da turma. Todas as descobertas eram compartilhadas no grande grupo e, assim, o trabalho em dupla ampliou-se para o trabalho na turma.

O nível de entendimento dos alunos, quanto à regularidade do movimento do modelo, merece destaque nesta terceira etapa do Bloco II. O modelo que os alunos conseguiram construir coletivamente era de uma janela que girava 360°, não existindo, assim, uma limitação no movimento da janela. Oito duplas questionaram esta característica, observando que, no modelo apresentado pelo site, o movimento é limitado, já que não permite um giro de 360° da janela, o que realmente acontece em um modelo real.

Com estas duplas, trabalhamos a ideia do movimento de um pêndulo – o ponto é inserido sobre um arco de circunferência, e o arco limita o movimento do ponto, não permitindo o giro de 360°. Para as demais duplas, consideramos importante não impor a limitação do movimento da janela, e nossa estratégia foi questionar o funcionamento do modelo real para que, com isso, pudessem reavaliar suas construções.

No que segue, apresentamos dois trabalhos apresentados pelos alunos: um sem o controle de movimento com giro de 360° e outro com o ponto MOVA sobre um arco de circunferência.

- Primeiro modelo (Figura 39) - não apresenta um controle do movimento da janela; nele, o ponto (ressaltado por nós com a aparência de X) percorre um círculo (destacado por nós através da cor vermelha).

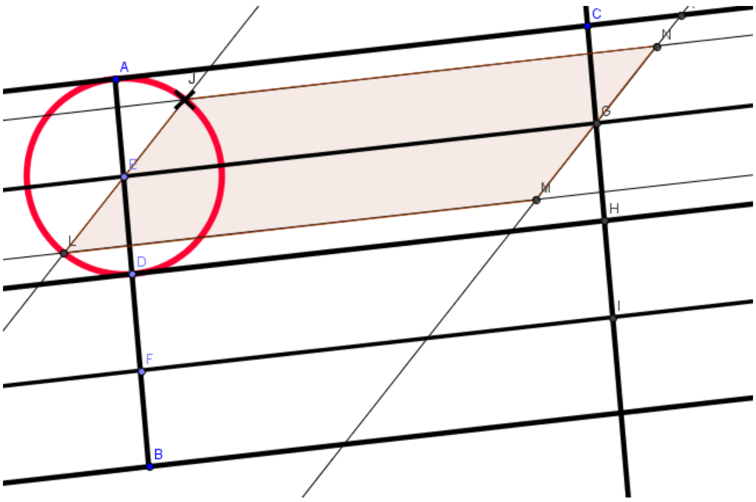


Figura 39 – Modelo de janela basculante apresentada pela dupla 8.

- Segundo modelo (Figura 40) - apresenta este controle do movimento; nele, o ponto (destacado por nós com o símbolo X) percorre um arco de circunferência (destacado através da cor vermelha), o que limita o movimento.

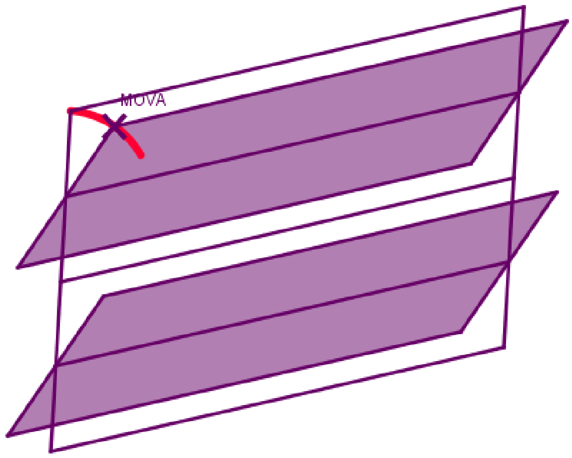


Figura 40 – Modelo de janela basculante apresentada pela dupla 3.

Observamos que, para alguns alunos, a janela “funcionar” era o suficiente para aquele momento. No que se refere aos hábitos do pensamento planejados para serem desenvolvidos nesta etapa, entendemos que ambos os trabalhos demonstram a criação de estratégias (HP-4) adequadas para implementação da construção. A diferença está na visualização (HP-1) e, consequentemente, no entendimento do movimento do modelo.

5.2.3 O desenrolar e a análise *a posteriori* do Bloco III

Na primeira aula do Bloco III, os alunos exploraram o modelo do balanço vai e vem apresentado no site “Geometria em Movimento” (Figura 41). Nesta Etapa 1, os hábitos de pensamento que foram mais diretamente desenvolvidos são a visualização (HP-1) e o reconhecimento de padrões e invariantes (HP-2), pois os alunos devem observar o modelo (HP-1) tentando compreender as relações matemáticas envolvidas (HP-2) em sua construção.

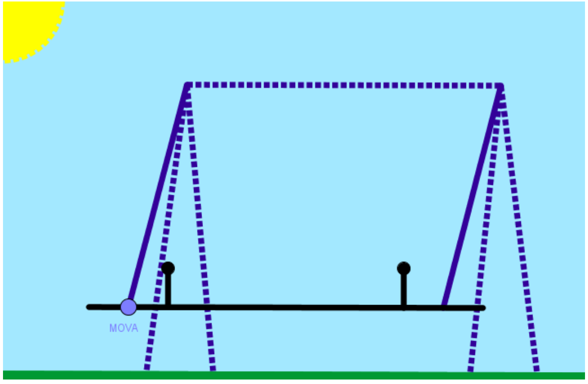


Figura 41 - Modelo geométrico de balanço Vai e Vem disponibilizado no site Geometria em Movimento.

Dada a familiarização dos alunos com a proposta do experimento didático e o desenvolvimento dos hábitos do pensamento (alcançado nos blocos anteriores), ao contrário dos modelos anteriores, nesta modelagem, o debate em grande grupo foi bem sucinto, pois, rapidamente, os alunos perceberam e indicaram as relações geométricas envolvidas na construção do modelo (retas paralelas – dois pares de lados paralelos). Este modelo foi considerado muito simples pelos alunos, fato que gerou interesse e ansiedade para iniciar a construção do modelo do balaço vai e vem.

Na Etapa 2 deste Bloco III, os alunos trabalharam com os conceitos de reta, semirreta, segmento, retas paralelas. São os conceitos cruciais na construção do modelo do balanço vai e vem.

As atividades realizadas correspondem as “Aula 6” e “Aula 7” disponibilizadas no site “Geometria em Movimento”

Como hábitos de pensamento presentes nesta etapa, destacamos a exploração (HP-3) das animações anexadas ao site, a compreensão dos mesmos a partir do raciocínio por continuidade (HP-7) e o registro escrito das conclusões estabelecidas (HP-6).

A ansiedade em iniciar a construção do modelo também esteve presente nesta segunda etapa do Bloco III, o que acabou acelerando a conclusão das atividades. Os alunos estavam comprometidos com a realização das atividades, mas foram sucintos em suas justificativas orais e escritas. Imaginamos, ao final desta etapa, que esta terceira repetição de um procedimento possa ser desnecessária, e que o tempo destinado à modelagem escolhida pelos alunos possa ser ampliado em uma futura aplicação deste experimento didático.

Na sequência, trazemos alguns trechos transcritos dos relatórios dos alunos, nos quais é possível perceber esta associação entre o comprometimento com a atividade e a pressa em finalizar a tarefa.

Alunos falando sobre a construção do Losango e do Quadrado:

“para fazer o losângo usamos as seguintes ferramentas: segmento definido por dois pontos,o ponto médio,uma reta perpendicular,circulo definido pelo centro e um de seus pontos,reta definida por dois pontos e formamos o losângo.” (Dupla 1)

*“Passos Da contrução do Losango: * Colocamos uma reta definida por dois pontos e um ponto médio. Após isso um circulo em cima do ponto médio até os dois pontos A e B. E uma reta perpendicular . Depois disso, colocamos seguimentos definidos por dois pontos, formando o losango, fixamos os pontos B e F,usamos a interseção de dois objetos e colorimos."* (Dupla 10)

“Fizemos o quadrado do seguinte modo: Formamos um círculo, sendo que seus pontos originários foram A e B. Traçamos uma reta passando por esses pontos, cortando o círculo pela metade. Desta reta, traçamos uma perpendicular passando por ela e pela ponto A. A figura originada foi um círculo cortado por duas transversais, formando quatro ângulos de 90°. A partir daí, colocamos pontos de interseção nos objetos que eram as retas e o círculo e traçamos segmentos nestes pontos, formando um quadrado no centro do círculo. A figura, então, formou um círculo, um quadrado cortado por duas perpendiculares e quatro triângulos. Então, fomos na ferramenta "Exibir/esconder objeto", ocultamos as retas que eram desnecessárias e deixamos apenas o quadrado com o ponto B (um vértice) que é responsável pelos movimentos de aumento e redimensionamento do quadrado.” (Dupla 11)

Na Etapa 3 do Bloco III, os alunos trabalharam na modelagem do balanço vai e vem. A expectativa era de que, concluídas as atividades da Etapa 2 e, com isso, entendidos os conceitos relativos aos elementos geométricos a serem usados na simulação do movimento da porta, os alunos fariam a construção de um modelo similar ao já explorado na Etapa 1.

Todas as duplas que participaram do experimento didático concluíram a construção do modelo de um balanço vai e vem. Como percebido desde a apresentação do modelo, os alunos reconheceram as relações matemáticas envolvidas na construção (HP-2) e conseguiram replicar o modelo sem dificuldade (HP-4). Novamente, o trabalho conjunto da turma representou um fator de sucesso para a construção do modelo.

Quanto à percepção e entendimento dos alunos sobre a regularidade do movimento do modelo, mesmo tendo ressaltado a característica de giro limitado do balanço, quatro duplas não conseguiram inserir esta característica em suas construções. No modelo de balanço vai e vem, o princípio do movimento é, novamente, similar ao de um pêndulo (ponto sobre um arco de circunferência), mas alguns alunos continuaram trabalhando com o ponto sobre um círculo.

No que segue, apresentamos trechos transcritos do material dos alunos, nos quais eles descrevem a construção do balanço vai e vem e tentam justificar seu funcionamento:

> *"O balanço funciona porque há a propriedade do paralelismo. Utilizamos bastante da circunferência e de seu arco para poder fazer com que o balanço vá-e-venha tendo um limite de fluxo. Fundamental para que a construção não desmorone é a propriedade que consiste nas retas paralelas."* (Dupla 11)

> *"Para começar nossa construção usamos,Circulo definido pelo centro e um dos seus pontos,Depois colocamos uma semireta entre o ponto do centro do circulo e outro no ponto do circulo,Reta perpendicular passando pela semireta e pelo seu ponto,depois colocamos um ponto de interseção de dois objetos,reta paralela,clicando na semireta e depois no ponto de interseção de dois objetos,e por ultimo colocamos uma reta definida por dois pontos."* (Dupla 8)

Apesar de algumas duplas não terem demonstrado, a partir de suas construções, o controle total do movimento, entendemos que houve um desenvolvimento da turma quanto à visualização (HP-1) e compreensão do movimento do modelo, o que indica o amadurecimento crescente em cada aluno, que trabalha e produz dentro de suas possibilidades.

5.2.4 O desenrolar e a análise *a posteriori* no Bloco IV

Este último bloco da sequência didática foi reservado para a construção dos modelos escolhidos pelos alunos. A expectativa era que, a partir do estudo dos três modelos anteriores e do desenvolvimento dos "hábitos do pensamento", os alunos conseguissem planejar e construir seus próprios modelos geométricos.

Foi com entusiasmo que os alunos se engajaram nas suas produções. Entre os modelos produzidos, encontramos muitos brinquedos, mas também automóveis, teleféricos, elevadores, portas, janelas e um palhaço malabarista. Aqui é importante destacar que foi nesta experiência com o site "Geometria em Movimento" que os alunos tiveram um primeiro contato com geometria dinâmica. Naturalmente, nesse sentido, muitas das produções apresentadas podem ser classificadas como simples e baseadas nas modelagens que foram estudadas nos Blocos I, II e III.

Quando comparamos as ideias dos alunos sobre os modelos que implementariam, apresentadas no início da experiência, com a construção efetivamente realizada (Quadro 9), percebemos que, de modo geral, o desafio de trabalhar com a modelagem geométrica foi bem aceito.

Das dezesseis duplas de trabalho apenas quatro não indicaram o modelo que seria construído. Considerando as duplas que fizeram uma indicação de modelo (12 duplas), observamos que: nove mantiveram a escolha inicial conseguindo completar a construção (em alguns casos com pequenas adaptações) do modelo escolhido e três alteraram sua escolha inicial.

DUPLA	MODELO INDICADO NO INÍCIO DO EXPERIMENTO DIDÁTICO	MODELO APRESENTADO NO FINAL DO EXPERIMENTO DIDÁTICO
1	Asa Delta sobrevoando um viaduto com automóveis em movimento e um campo de futebol com jogadores.	Ônibus
2	Prédio com porta abre e fecha + pessoas entrando e saindo.	Prédio com porta abre-fecha (modelo incompleto).
3	*Não indicaram o modelo escolhido*	Roda Gigante (modelo esteticamente incompleto)
4	Skatista fazendo manobras em uma pista.	Teleférico
5	Teleférico	Teleférico
6	*Não indicaram o modelo escolhido*	Roda Gigante
7	Ônibus + pessoas entrando e saindo.	Ônibus
8	Parque de diversão	Parque de diversão
9	Elevador	Elevador
10	Pracinha de brinquedos	Pracinha de brinquedos
11	Palhaço malabarista[11]	Aluno A – Palhaço Malabarista
		Aluno B – Teleférico
12	Carro de corrida em pista (competição).	Carro de corrida em pista (competição).
13	Pula-pula + Gira-gira	Roda Gigante
14	*Não indicaram o modelo escolhido*	Porta Pantográfica (incompleta)
15	*Não indicaram o modelo escolhido*	Fachada da residência
16	Barco Viking	Barco Viking

Quadro 10 – Quadro comparativo entre os modelos propostas pelos alunos antes do experimento didático e o que eles realmente produziram.

Nas duplas em que houve a troca do modelo a ser construído é possível perceber que o modelo imaginado era realmente complexo em sua construção (Asa Delta sobrevoando

[11] Os alunos da dupla 11, por escolha própria, optaram por trabalhar individualmente no último Bloco do experimento didático. Assim, os separamos em Aluno A e Aluno B para análise dos modelos geométricos apresentados.

um viaduto com automóveis em movimento e um campo de futebol com jogadores; Skatista fazendo manobras em uma pista; e Pula-pula + Gira-gira). Acreditamos que para estas três duplas as possibilidades e limitações de um trabalho com modelagem geométrica, discutidas na apresentação realizada antes do início do experimento didático, não foram bem compreendidas. Percebemos, também, que os novos modelos indicados (ônibus, teleférico e roda gigante) já haviam sido escolhidos por outras duplas da turma. Entendemos, nesse sentido, que não houve a intenção de apenas cumprir uma tarefa visto que se tratava do mesmo grau de dificuldade já existente para outra dupla.

A respeito do desenvolvimento dos "hábitos do pensamento", consideramos que, de maneira geral, o experimento didático conseguiu cumprir com seu objetivo. Ao analisar as modelagens geométricas feitas pelos alunos[12], foram determinados cinco diferentes níveis de produção. São eles:

- Nível 0: não é possível identificar o desenvolvimento de hábitos do pensamento.
- Nível 1: desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4).
- Nível 2: desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4); de visualizar (HP-1); de reconhecer padrões e invariantes (HP-2); e de raciocinar por continuidade (HP-7)
- Nível 3: desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4); de visualizar (HP-1); de reconhecer padrões e invariantes (HP-2); de explorar novas possibilidades, novos menus do GeoGebra (HP-3); e de raciocinar por continuidade (HP-7)
- Nível 4: desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4); de visualizar (HP-1); de reconhecer padrões e invariantes (HP-2); de explorar novas possibilidades, novos menus do GeoGebra conseguindo estabelecer dois movimentos, não simultâneos, ao modelo (HP-3); e de raciocinar por continuidade (HP-7)
- Nível 5: desenvolvimento da habilidade de criar, inventar (HP-4); de visualizar (HP-1); de reconhecer padrões e invariantes (HP-2); de explorar novas possibilidades, novos menus do GeoGebra conseguindo estabelecer dois

[12] As modelagens feitas pelos alunos estão publicadas no site "Geometria em Movimento" (endereço http://odin.mat.ufrgs.br/modelagem/duplasemodelagens.html)

movimentos simultâneos ao modelo (HP-3)(HP-5); e de raciocinar por continuidade (HP-7)

Estes níveis de produção foram estabelecidos a partir dos hábitos do pensamento[13] identificados no planejamento e construção do modelo.

No quadro abaixo apresentamos a classificação das duplas de acordo com os cinco Níveis de Produção.

Níveis de Produção	**Dupla – Modelo Geométrico**
Nível 0	Dupla 3- Roda Gigante Dupla 14 – Porta Pantográfica
Nível 1	Dupla 2 – Prédio com porta abre e fecha
Nível 2	Dupla 5 – Teleférico Dupla 12 – Carro em pista de corrida Aluno B Dupla 11 - Teleférico Dupla 1 – Ônibus
Nível 3	Dupla 16 – Barco Viking Dupla 13 – Roda Gigante Dupla 6 – Roda Gigante
Nível 4	Dupla 4 – Teleférico Dupla 8 – Parque de diversão Dupla 9 – Elevador Aluno A Dupla 11 – Palhaço Malabarista Dupla 15 – Fachada da residência
Nível 5	Dupla 10 – Pracinha de brinquedos Dupla 7 – Ônibus

Quadro 11 – Classificação dos modelos apresentados pelas duplas de acordo com o Nível de Produção.

No que segue faremos as análises *a posteriori* da produção dos alunos, em cada um dos cinco níveis, trazendo os modelos geométricos que foram construídos pelas diferentes duplas. Ao final do capítulo mostraremos uma sistematização dos principais resultados de forma a validar o experimento e o produto didático utilizado.

[13] Hábitos do pensamento: *Visualizar* (HP-1); *Reconhecer padrões ou invariantes* (HP-2); *Fazer experiências e explorações* (HP-3); *Criar, ser inventor* (HP-4); *Fazer conjecturas* (HP-5); *Descrever, formal e informalmente, relações e processos* (HP-6); *Raciocinar por continuidade.* (HP-7).

Análise *a posteriori* das duplas do Nível 0

A Dupla 3 apresentou uma “Roda-Gigante” (Figura 42).

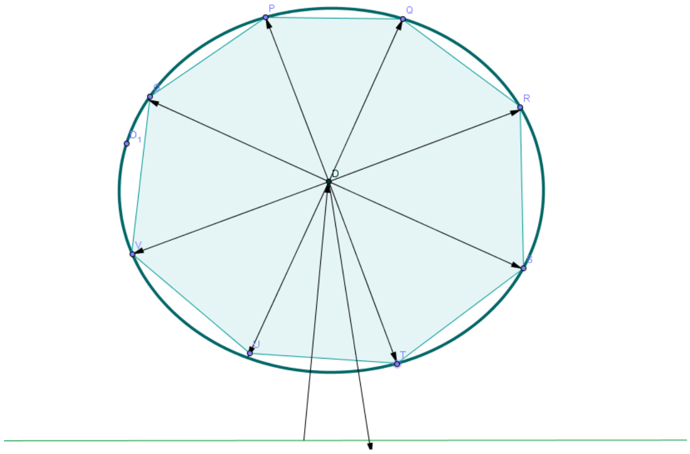


Figura 42 - Modelagem geométrica apresentada pela dupla 3.

A dupla iniciou seu procedimento de construção inserindo uma elipse passando por C com focos em A e B. O ponto D foi inserido visualmente para marcar o centro desta elipse. Então, sobre a elipse, foram inseridos sete novos pontos (além do ponto já existente – ponto C). Do ponto D para cada um destes pontos foi inserido um *vetor definido por dois pontos*. A construção é finalizada com a inserção de um polígono passando pelos pontos que estão sobre a elipse.

Esta construção não tem relações geométricas que garantam o movimento de “giro” da roda; trata-se de um desenho da Roda Gigante, uma impressão visual (HP-1) do modelo. Ao analisar o procedimento de construção desta dupla, recordamos que a tela do computador que utilizavam estava fora de proporção distorcendo, desta forma, a visualização da imagem. Entendemos que este problema com a tela justifique a utilização de uma elipse no lugar de um círculo para a construção do modelo de roda gigante.

O que concluímos, ao analisar este trabalho, é que esta dupla, mesmo tendo realizado as atividades propostas nos blocos anteriores, não conseguiu compreender os princípios da modelagem geométrica, permanecendo no estágio inicial do trabalho com a geometria dinâmica. Assim, não foi possível analisar o nível de desenvolvimento de hábitos de pensamento.

A dupla 14 retomou a construção da “Porta Pantográfica” (Figura 43) seguindo o passo a passo desta construção disponível na “Aula 3” do Bloco I.

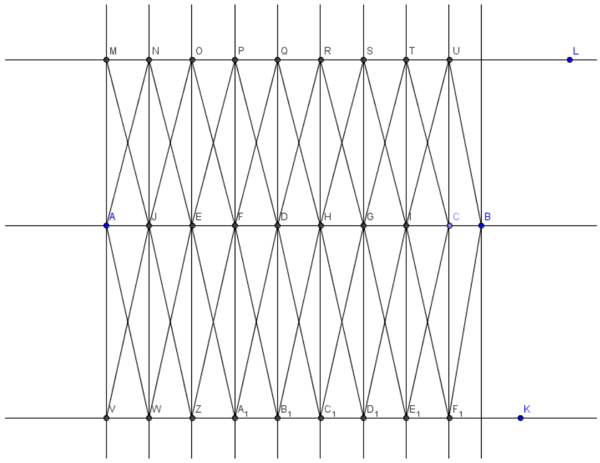


Figura 43 - Modelagem geométrica apresentada pela dupla 14.

Esta dupla, formada pelos alunos de inclusão da turma, entendeu que a proposta exigia a escolha de um novo objeto para construir o seu modelo, mas mesmo assim decidiu apresentar a construção que já havia feito no Bloco I do experimento didático, e justificou sua decisão afirmando que este trabalho os motivava muito e que representava uma conquista no estudo da matemática. Porém, considerando os hábitos do pensamento, novamente, não foi possível identificar o desenvolvimento, por tratar-se de uma réplica e não de um projeto autêntico.

Análise *a posteriori* das duplas do Nível 1

O modelo do “Prédio com porta abre-fecha” (Figura 44) apresentado pela Dupla 2 é um ótimo exemplo do estágio inicial do desenvolvimento de hábitos do pensamentos.

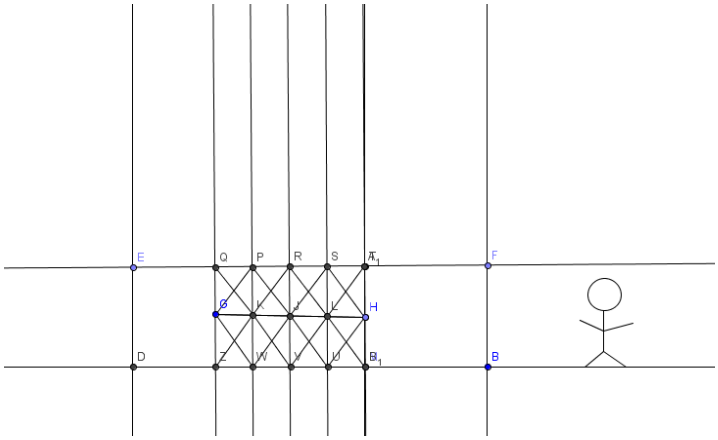


Figura 44 - Modelagem geométrica apresentada pela dupla 2.

A dupla iniciou sua construção inserindo uma reta que serviria como base (chão) para o modelo. Delimitou as “paredes do prédio” a partir do menu reta perpendicular e, para a construção da porta do prédio, seguiu o passo a passo indicado para a construção da porta pantográfica disponível na “Aula 3”. O “homenzinho” do modelo é um elemento solto, não possui relações geométricas em sua construção.

Quanto ao desenvolvimento dos hábitos do pensamento a dupla *pensou, inventou e demonstrou suas ideias* (HP-4) na construção deste modelo ao conseguir inserir as relações geométricas estudadas para incrementar o modelo inicialmente escolhido (Prédio com porta abre-fecha).

Trata-se de um modelo geométrico que não está esteticamente concluído (elementos matemático não foram “escondidos”), mas que apresenta relações matemáticas nos passos de sua construção, viabilizando seu funcionamento como modelo de um prédio onde a porta abre e fecha. A ideia inicial da dupla era fazer um prédio no qual as pessoas estivessem entrando através de uma porta que se abre automaticamente. Considerando a dificuldade da relação que deveria ser estabelecida para sincronizar dois movimentos simultâneos (abre e fecha a porta com a aproximação das pessoas), esperávamos uma reformulação da ideia e indicação de um novo projeto. Contudo, a dupla seguiu com a sua ideia inicial conseguindo uma ótima adaptação do modelo (prédio com porta pantográfica que abre e fecha).

Análise *a posteriori* das duplas do Nível 2

Fazem parte deste grupo quatro duplas. Todas elas apresentaram modelos bastante simples, nos quais é possível identificar uma utilização adequada das relações geométricas estudadas nos blocos anteriores. Os procedimentos de construção usam relações que simulam corretamente o movimento da situação/mecanismo real. Nesse sentido, no que se refere aos “hábitos do pensamento”, entendemos que as duplas escolheram um objeto conseguindo visualizar (HP-1) e perceber as invariantes envolvidas no movimento (HP-2) de forma adequada e, quanto à construção, utilizaram, sem maiores dificuldades, o GeoGebra (HP-7) estabelecendo relações geométricas corretas para o funcionamento do modelo (HP-4).

A Dupla 5 apresentou a modelagem “Teleférico” (Figura 45) .

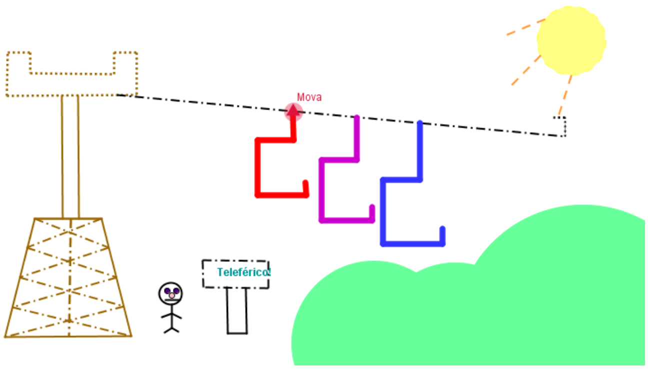


Figura 45 - Modelagem geométrica apresentada pela dupla 5.

Nesta modelagem os três “carrinhos” percorrem o “cabo” de uma ponta a outra (nos dois sentidos) em um movimento sincronizado que mantém sempre a mesma distância entre eles. A dupla iniciou sua construção inserindo uma segmento de reta na tela do GeoGebra e sobre ele um ponto (MOVA). A partir deste ponto, a dupla criou os “banquinhos” do teleférico tendo o cuidado de ligá-los (distância entre eles) através do menu *circunferência de comprimento fixo*. O formato dos “banquinhos” é dado pelas relações de perpendicularidade e paralelismo.

O aluno B da Dupla 11 também apresentou a modelagem geométrica de um teleférico (Figura 46). Acreditamos que sua escolha foi influenciada pela ideia apresentada pela dupla 5.

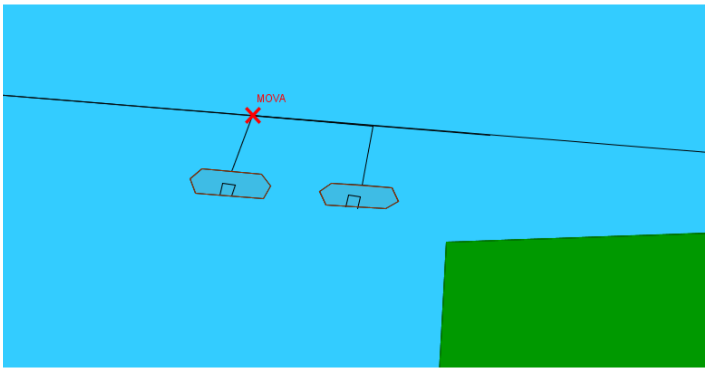


Figura 46 - Modelagem geométrica apresentada pelo aluno B da dupla 11.

Nesta modelagem, novamente, os “carrinhos” percorrem o “cabo” de uma ponta a outra (nos dois sentidos) em um movimento sincronizado que mantém sempre a mesma distância entre eles. O aluno construiu o modelo (determinou o formato e a distância entre os carrinhos) utilizando unicamente o menu *segmento de comprimento fixo*.

As duas construções, apesar de serem do mesmo mecanismo e com movimentos similares, são muito diferentes em suas relações geométricas. Nesta modelagem do teleférico o aluno não implementou sua construção a partir de relações matemáticas (retas paralelas e perpendiculares), mas sim, utilizando o menu *Segmento de comprimento fixo*. Em sua exploração aos menus do GeoGebra, o aluno descobriu que utilizando o menu *segmento de comprimento fixo* conseguia o movimento de translação do segmento na tela do computador. Assim, ao movimentar a construção tem-se a impressão visual de “estabilidade sob ação de movimento”.

Esta estratégia utilizada na construção do teleférico é diferente da esperada, mas, no que se refere aos “hábitos do pensamento”, entendemos que o aluno escolheu um modelo visualizando (HP-1) e percebendo (HP-2) adequadamente seu movimento, conseguindo determinar (HP-7) estabilidade de movimento para sua construção mesmo que com a utilização de uma estratégia diferenciada (HP-4).

A “Pista de Corrida” apresentada pela Dupla 12 (Figura 47) tem um bom acabamento visual o que demonstra um cuidado na criação dos detalhes do modelo (alunos criando, demonstrando suas ideias / HP-4).

Neste modelo é possível observar dois “carros” que percorrem a “pista” de uma ponta a outra em um movimento vai e vem, sendo que a distância entre eles se mantém constante. Trata-se, assim como na modelagem do Teleférico da dupla 5, de uma construção bem simples com movimento linear. Nesta construção, os alunos ligaram a um ponto (MOVA) retas paralelas e perpendiculares e determinaram as características (detalhes) dos "carros" a partir de segmentos, pontos médios e polígonos.

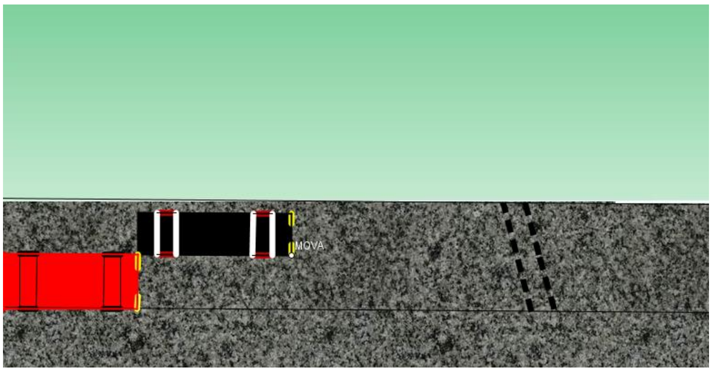


Figura 47 - Modelagem geométrica apresentada pela dupla 12.

É importante destacar que esta dupla, também como a dupla 5, conseguiu desenvolver exatamente o modelo indicado antes do início da sequência de atividades.

A quarta dupla deste grupo de Nível 2, a Dupla 1 , apresentou a modelagem "Ônibus" (Figura 48). O modelo do Ônibus percorre uma "pista" de uma ponta a outra em um movimento linear de vai e vem. Assim, como os modelos anteriores, é uma construção com movimento linear, simples. Esta dupla iniciou a construção inserindo um segmento na tela do GeoGebra e sobre ele um ponto (MOVA). A caracterização do "ônibus" deu-se pelas relações de perpendicularidade e paralelismo.

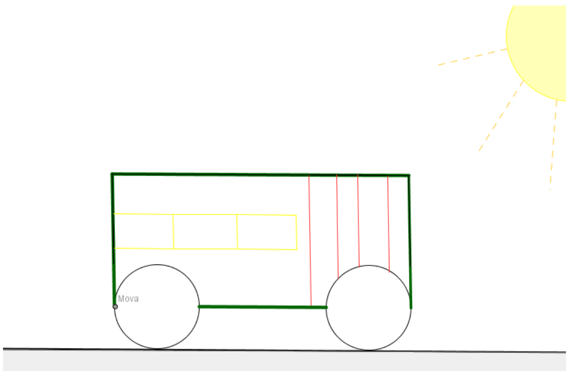


Figura 48 - Modelagem geométrica apresentada pela dupla 1.

A ideia inicial desta dupla era construir uma asa delta sobrevoando um viaduto com automóveis em movimento e um campo de futebol com jogadores. Trata-se de um projeto muito complexo considerando os movimentos simultâneos indicados, o que, consequentemente, exigiu uma reformulação da escolha do modelo a ser construído. A dupla optou pela construção do modelo de um Ônibus inspirada no movimento linear dos automóveis.

Análise *a posteriori* das duplas do Nível 3

Seguindo a análise no nível de desenvolvimento dos "hábitos do pensamento", as próximas três modelagens geométricas representam um terceiro nível de produção. Identificamos nestas modelagens, além da utilização adequada das relações matemáticas estudadas nos blocos anteriores, uma exploração de novos menus (novas relações matemáticas). Nesse sentido, no que se refere aos "hábitos do pensamento", as duplas escolheram um modelo visualizando (HP-1) e percebendo as relações geométricas (HP-2) do movimento. Na sequência, conseguiram implementar a construção no GeoGebra (HP-7) utilizando estratégias bem estabelecidas (HP-4), mas, também, inovando em suas construções ao explorar (HP-3) e utilizar novas relações matemáticas existentes no software.

Fazem parte deste grupo quatro duplas. Todas elas apresentaram modelos bastante simples, mas nos quais é possível identificar uma utilização adequada das relações geométricas estudadas nos blocos anteriores. Os procedimentos de construção usam relações que simulam corretamente o movimento da situação/mecanismo real.

A modelagem geométrica de um Barco Viking (Figura 49) foi apresentada pela Dupla 16.

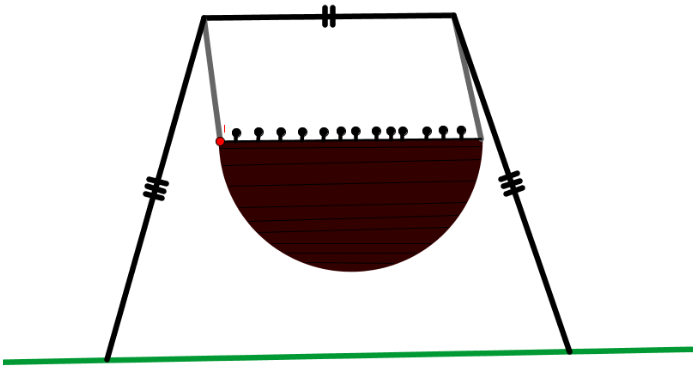


Figura 49 - Modelagem geométrica apresentada pela dupla 16.

A dupla conseguiu completar o desafio proposto construindo o modelo indicado antes do início da sequência didática. Utilizaram como base para o movimento do modelo as relações matemáticas estudas no Bloco III. Trata-se da adaptação de um mecanismo já estudado, e, em função disso, destacamos a criatividade dos alunos (HP-4) para conseguir relacionar o material de estudo com a ideia do modelo escolhido.

Além das relações estudadas no terceiro bloco, a ferramenta S*emicírculo definido por Dois Pontos* foi utilizada para criar uma parte arredondada no modelo, para que o mesmo ficasse visualmente semelhante ao brinquedo. Basicamente a construção do modelo é dada pelos passos do balanço vai e vem com o acréscimo de um semicírculo em um dos lados dando o formato de barco viking.

A dupla 13 apresentou a modelagem geométrica de uma Roda Gigante (Figura 50).

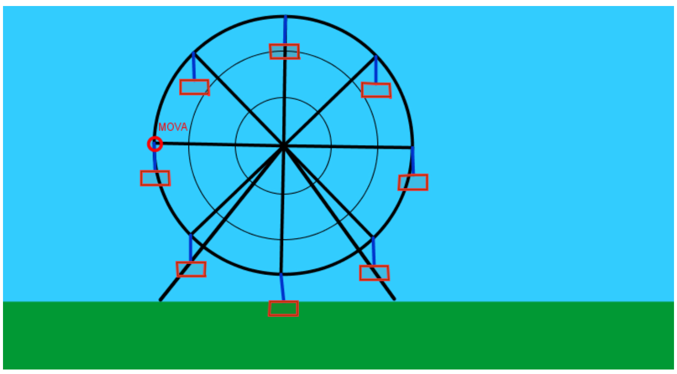


Figura 50 - Modelagem geométrica apresentada pela dupla 13.

Esta modelagem geométrica simula o movimento de uma Roda Gigante. Os princípios de construção deste modelo estão embasados na percepção do controle de movimento discutido no Bloco II - ponto sobre círculo. Com a dificuldade em construir o modelo escolhido (Pula-pula e Gira-gira), a dupla optou por trabalhar com a ideia de ponto sobre círculo e escolheu modelar uma roda gigante.

Esta ideia do movimento de "giro" (ponto sobre o círculo) foi incrementada, através da decoração feita pela dupla e o resultado é um perfeito funcionamento do mecanismo que simula o movimento de uma roda gigante. Trabalhamos com esta dupla o conceito de Bissetriz, que foi utilizado em sua construção. No procedimento de construção, os alunos iniciaram inserindo um circulo na tela do GeoGebra. Sobre este circulo, inseriram um ponto (MOVA) e passando por ele e pelo centro do circulo uma reta. O próximo passo foi determinar a reta perpendicular a reta que passa pelo ponto MOVA e a bissetriz destas duas retas. Com as retas determinadas, a dupla marcou os pontos de intersecção entre elas e o círculo. Nestes pontos foram construídos os "banquinhos" da roda gigante.

Para a construção dos "banquinhos" a dupla 13 utilizou o menu *Segmento de comprimento fixo*. Como comentamos anteriormente, este procedimento de construção é diferente do esperado para este experimento didático (segmentos que quando postos em movimento são transladados pela tela do computador, dando a impressão *de estabilidade sob ação de movimento*).

Porém, como também já citamos anteriormente, no que se refere aos "hábitos do pensamento", entendemos que o aluno escolheu um modelo visualizando (HP-1) e percebendo (HP-2) adequadamente seu movimento, conseguindo determinar estabilidade de movimento (HP-7) para sua construção mesmo que com a utilização de uma estratégia diferenciada (HP-4).

A dupla 6 também apresentou a modelagem geométrica de uma roda gigante (Figura 51). Sua escolha também foi influenciada pela discussão realizada no Bloco II sobre controle do movimento de giro.

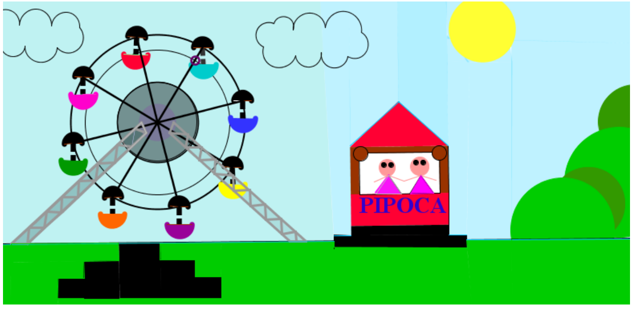


Figura 51 - Modelagem geométrica apresentada pela dupla 6.

Novamente foram utilizadas as ideias discutidas no Bloco II (ponto sobre círculo – dando a ideia de "giro"). Também com esta dupla, trabalhamos o conceito de Bissetriz (utilizado na construção do modelo).

Os princípios de construção desta roda gigante são os mesmos da dupla anterior, mas, neste modelo, a dupla utilizou, na construção dos "banquinhos", as relações matemáticas estudadas nos blocos anteriores (retas paralelas e retas perpendiculares) para estabelecer sua construção.

Esta dupla não indicou o modelo escolhido antes do início do experimento didático, mas seu trabalho reflete o compromisso e dedicação com a elaboração do mesmo. O modelo representa um perfeito funcionamento do mecanismo e uma ótima aproximação visual do brinquedo.

Análise *a posteriori* das duplas do Nível 4

As próximas cinco modelagens geométricas apresentadas aqui são mais elaboradas e possuem um diferencial: o duplo movimento. Desta forma, foram classificadas como o grupo que representa o quarto estágio de desenvolvimento dos "hábitos do pensamento". A tentativa de construir modelos com uma composição de movimentos esteve muito presente nos debates e nas ideias das apresentações dos alunos. Identificamos, nesta tentativa de ir além do que foi trabalhado em aula, um ótimo exemplo da postura investigativa, corajosa e autônoma da turma.

Assim, no que se refere aos hábitos do pensamento, as duplas escolheram um modelo visualizando (HP-1) e percebendo as relações geométricas (HP-2) do movimento. Com isso, conseguiram implementar a construção no GeoGebra (HP-7) utilizando estratégias bem estabelecidas (HP-4), mas, também, inovando em suas construções ao explorar (HP-3) a ideia de duplo movimento, mesmo que não conseguindo simultaneidade entre eles.

Aqui, novamente temos a modelagem de um teleférico (Figura 52), mas, agora apresentado pela dupla 4.

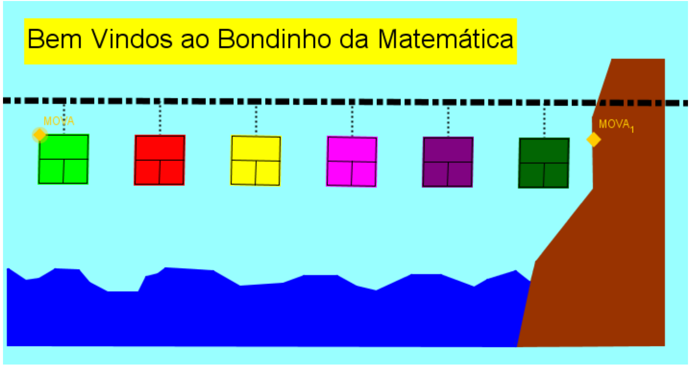


Figura 52 - Modelagem geométrica apresentada pela dupla 4.

Os passos de construção deste modelo de Teleférico se assemelham aos do modelo apresentado pela dupla 5 (relações de perpendicularismo e paralelismo presentes na construção). A diferença está na elaboração e construção de um duplo movimento.

Neste modelo, a dupla também inseriu um segmento na tela do GeoGebra e um ponto MOVA sobre ele, mas manteve uma das extremidades deste segmento ligada a outro segmento que permite o movimento de sobe e desce do "cabo". Enquanto um ponto de movimentação simula o deslocamento do "carrinho" pelo "cabo", o outro simula o "local de desembarque dos passageiros" (mais para cima ou mais para baixo).

Devido à dificuldade encontrada para construir o modelo indicado antes do início do experimento didático (Skatista fazendo manobras em uma pista), esta dupla, assim como o aluno B da dupla 11, inspirada no trabalho da dupla 5, decidiu construir um Teleférico. É importante destacar, novamente, o cuidado com a construção da modelagem geométrica, de modo que entendemos que o intuito da dupla não foi apenas o de cumprir uma tarefa.

A dupla 8 apresentou a modelagem geométrica de um parque de diversão (Figura 53).

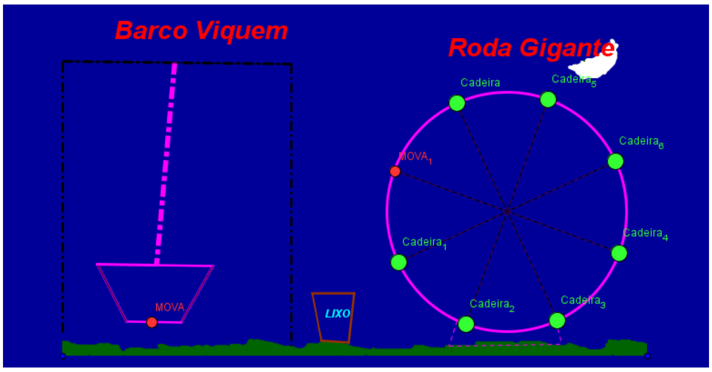


Figura 53 - Modelagem geométrica apresentada pela dupla 8.

O modelo de Parque de Diversão apresenta dois pontos de movimentação. Enquanto um ponto de movimentação simula o vai e vem do Barco Viking, o outro simula o “giro” da Roda Gigante. Esta dupla uniu em um único modelo dois objetos já apresentados em modelagens anteriores (dupla 16 e dupla 6), o que demonstra uma vontade de ir além do estudo realizado.

A dupla conseguiu completar o desafio proposto no início do experimento construindo o modelo inicialmente indicado. Utilizaram como base para o movimento do modelo as relações matemáticas estudadas nos Blocos II e III. Trata-se, portanto, de uma adaptação dos mecanismos já estudados, e, nesse sentido, destacamos a criatividade (HP-4) dos alunos em relacionar seus conhecimentos com a ideia apresentada (modelo escolhido).

A terceira dupla deste grupo de Nível 4, a Dupla 9 , apresentou a modelagem de um elevador (Figura 54). Na modelagem do elevador, assim como nos dois modelos anteriores, existem dois pontos de movimentação. Enquanto um ponto simula o subir e descer do modelo, o outro simula o abrir e fechar de sua porta. A dupla iniciou a construção inserindo um segmento (no sentido vertical) na tela do GeoGebra e sobre ele um ponto (MOVA). A partir das relações de paralelismo e perpendicularismo, o aluno estabeleceu o contorno do “elevador” que foi concluído com a inserção de um polígono. Para a construção da porta, a dupla inseriu sobre um dos lados que estabelece o contorno do elevador um segmento e sobre ele um segundo ponto MOVA. Foram utilizadas as relações de paralelismo, perpedicularismo e ponto médio para a construção da “porta do elevador”. Esta porta tem como base para sua construção o movimento estudado no Bloco I (porta pantográfica). Trata-se de uma adaptação dos mecanismos já estudados, indicando, novamente, a criatividade (HP-4) dos alunos em relacionar seus conhecimentos com a ideia apresentada (modelo escolhido).

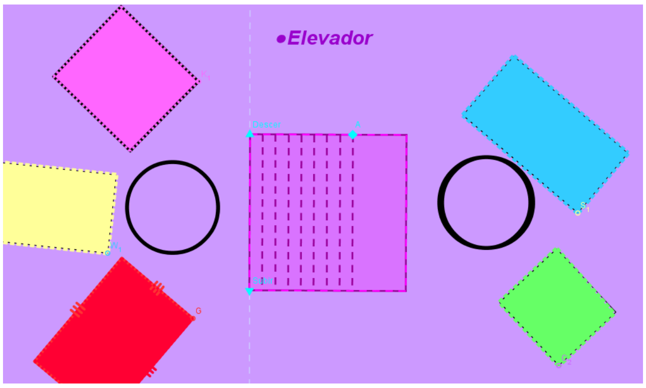


Figura 54 - Modelagem geométrica apresentada pela dupla 9.

O palhaço malabarista foi a modelagem geométrica (Figura 55) apresentada pelo aluno A da Dupla 11.

Figura 55 - Modelagem geométrica apresentada pelo aluno A da dupla 11.

Neste modelo, um ponto simula o subir e descer dos “braços” e das “bolas” que estão na altura da “cabeça do palhaço” e, o outro, simula o “chutar a bola” que sobe e desce conforme o movimento do “pé do palhaço”.

Nesta construção o movimento das “mãos” do palhaço é linear, ou seja, ambos sobem e descem em uma construção determinada a partir de retas paralelas, retas perpendiculares e segmentos de comprimento fixo. Quanto ao movimento do “pé do palhaço”, observamos um trabalho muito bem elaborado, constituindo um ótimo referencial para a análise do conhecimento desenvolvido pelo aluno. No movimento do “pé”, o aluno trabalhou com o menu *Reflexão em relação a uma reta* para conseguir o efeito de afastamento entre o “pé” e a “bola”.

Abaixo, trazemos uma sequência de imagens (Figura 56) do modelo que busca identificar a estratégia utilizada pelo aluno.

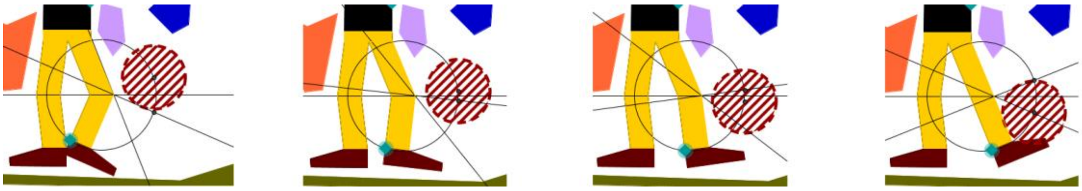


Figura 56 - Sequência de imagens de identificação do movimento do modelo de Palhaço Malabarista apresentado pelo aluno A da dupla 11.

Observe nas imagens que o ponto MOVA do “pé” está sobre um círculo o que permite a articulação do joelho, e que existe uma reta paralela ao chão passando exatamente no “joelho” (ponto de articulação). É esta reta paralela ao “chão” que funciona como reta de reflexão para o ponto que esta no centro da “bola”.

Este modelo apresenta uma estratégia de construção muito interessante (HP-4) que indica uma considerável exploração (HP-3) das relações geométricas disponíveis no software.

O último modelo deste nível de produção, “Fachada da residência” apresentada pela Dupla 15 (Figura 57), tem um lindo acabamento visual que demonstra o cuidado com a criação dos detalhes do modelo (alunos criando, demonstrando suas ideias / HP-4).

É fácil perceber que esta dupla utilizou o estudo do Bloco I como base para seu projeto. A ideia do movimento da Porta Pantográfica foi duplamente utilizada na “Fachada da residência” (janela e porta). O objetivo desta construção foi considerado inovador, pois buscou inserir um “duplo movimento” aos objetos – abrir e fechar da janela e da porta simultaneamente. A dificuldade em articular estes movimentos determinou, como estratégia (HP-4) para a construção, a criação de dois pontos de movimento para a modelagem – um para a porta e outro para a janela.

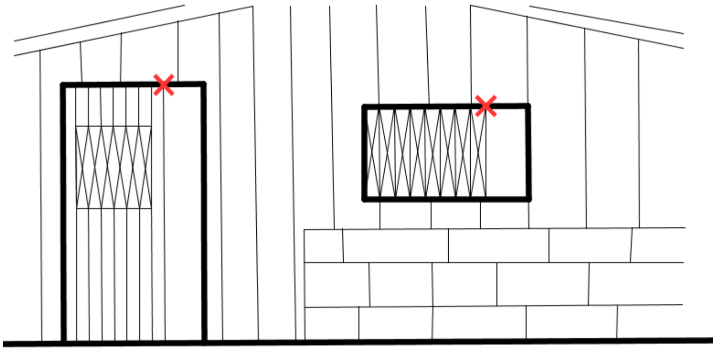


Figura 57 - Modelagem geométrica apresentada pela dupla 15.

Análise *a posteriori* das duplas do Nível 5

As últimas duas modelagens geométricas apresentadas são muito elaboradas e possuem o diferencial de duplo movimento simultâneo. Devido a isso, classificamos-as como quinto estágio do desenvolvimento dos “hábitos do pensamento” (o nível mais alto para este experimento didático). Apenas estas duas duplas conseguiram construir modelos com uma composição de movimentos simultâneos, um objetivo que, como comentamos anteriormente, esteve muito presente nos debates e nas ideias apresentadas pela turma.

No que se refere aos hábitos do pensamento, estas duplas escolheram um modelo visualizando (HP-1) e percebendo as relações geométricas (HP-2) do movimento. Com isso, conseguiram implementar a construção no GeoGebra (HP-7) utilizando estratégias bem estabelecidas (HP-4), mas também inovaram em suas construções ao explorar e utilizar novas relações geométricas (HP-3), chegando a construir modelos com movimentos simultâneos ao buscar conexões dentro da própria matemática (HP-5).

A modelagem geométrica de “Ônibus” (Figura 58), apresentada pela dupla 7, tem um ponto que desloca o ônibus de um lado para o outro, enquanto as rodas giram acompanhando o movimento.

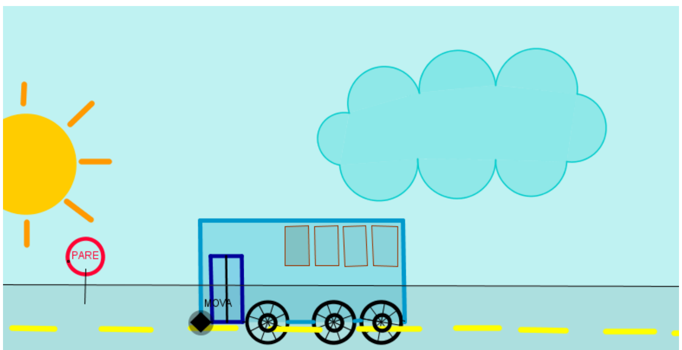


Figura 58 - Modelagem geométrica apresentada pela dupla 7.

A Figura 59 mostra os objetos “escondidos” desta construção.

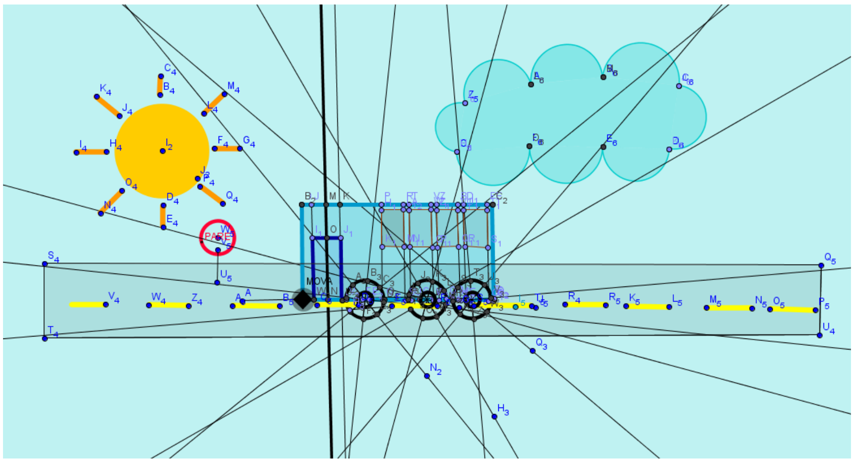


Figura 59 – Imagem demonstrativa dos objetos escondidos na modelagem geométrica apresentada pela dupla 7.

O contorno do “ônibus” e suas “rodas” foram construídas a partir das relações de paralelismo e perpendicularismo, mas o diferencial deste modelo está no giro das rodas. Para estabelecer o efeito de “giro”, a dupla criou três retas a partir dos pontos N_2, H_3 e O_3 (soltos na tela do GeoGebra) e os respectivos centros das “rodas do ônibus”. As demais retas que compõem os “aros das rodas” foram construídas utilizando os menus *reta perpedicular* e *bissetriz.* O aluno, através do uso desta estratégia, criou um efeito limitado para movimento. As retas que “giram” estão presas pelo centro das “rodas” à construção que se movimenta verticalmente, mas também aos pontos N_2, H_3 e O_3 que limitam o movimento não permitindo um giro completo (360°). Trata-se de uma estratégia limitada para o movimento, porém, uma ótima solução (HP-4) encontrada pelo aluno para criar movimento simultâneo.

A Praça de Brinquedos (Figura 60) foi o modelo apresentado pela dupla 10. Este trabalho também atingiu o objetivo de construir movimentos simultâneos ao combinar os movimentos de um gira-gira com o de um balanço vai e vem.

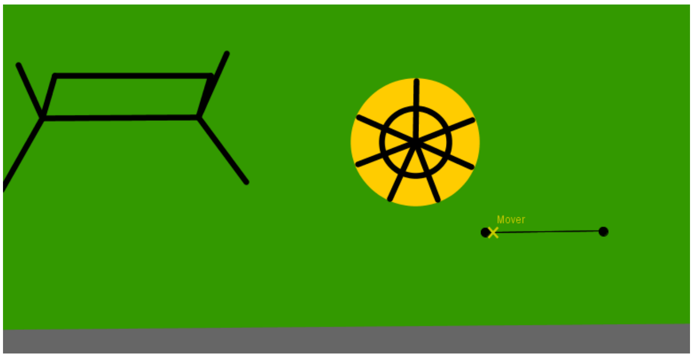


Figura 60 - Modelagem geométrica apresentada pela dupla 10.

Os alunos utilizaram como base para a sua construção o seguinte procedimento: construir um segmento e, sobre ele, colocar um ponto MOVA. Construir um novo segmento com uma extremidade no ponto MOVA e outro em uma das extremidades do segmento inicial - ao movimentarmos o ponto MOVA estaremos variando o comprimento do segundo segmento. Utilizando a ferramenta Ângulo com amplitude fixa e, determinando como amplitude o comprimento do segundo segmento, os alunos conseguiram uma composição de movimentos. Inseriram o comprimento do segundo segmento no movimento dos dois objetos que correspondiam a praça de brinquedos. Assim, quando movimentamos o ponto MOVA estamos automaticamente movimentando o gira-gira e o balanço vai e vem.

Este modelo apresenta uma estratégia de construção (HP-4) surpreendente considerando as ferramentas e relações geométricas utilizadas em sua construção.

5.2.5 Síntese das análises *a posteriori*

As atividades propostas no experimento didático buscaram verificar e desenvolver os "hábitos do pensamento" propostos no estudo de Goldenberg (1998). Entendemos que, ao identificar movimentos que estão presentes no dia-a-dia e conseguir perceber a geometria envolvida, os alunos puderam observar o mundo sob a ótica da matemática. Assim, iniciaram a construção de seus modelos geométricos, com aprofundamento dos "hábitos do pensamento" e, consequentemente, das diversas formas do pensamento matemático.

O experimento didático foi além do tradicional estudo de ponto, reta e plano presente na escola Básica. O software GeoGebra, com suas inúmeras possibilidades, permitiu uma abordagem dinâmica de temas importantes da geometria, cujo aprendizado exige muita abstração por parte do aluno. Nesse sentido, entendemos que a atividade de modelagem geométrica funcionou como um estímulo para o aprendizado dos estudantes e, desta forma, potencializou o trabalho voltado para o desenvolvimento dos “hábitos do pensamento” matemático.

Em uma análise do trabalho desenvolvido destacamos os seguintes aspectos:

- Houve uma aceitação positiva dos alunos com o software GeoGebra e com o site “Geometria em Movimento”, o que potencializou o estudo e o entendimento das relações matemáticas trabalhadas durante o experimento didático;
- a utilização do software Kompouser para a elaboração dos registros escritos dos alunos foi interessante, pois ao final do experimento didático suas ideias e construções estavam organizadas em textos dinâmicos que facilitavam tanto a leitura da pesquisadora quanto a dos demais colegas da turma.
- o comprometimento e o interesse dos alunos na realização das atividades foi relevante, e a dispersão ocorreu em poucos momentos, afetando um número pequeno de duplas;
- os alunos demonstraram autonomia para fazer explorações com o software, em decorrência, talvez, da familiaridade e confiança na utilização de tecnologias;
- os alunos demonstraram um maior desenvolvimento do hábito do pensamento – 4 (*criar, ser inventor),* o que já era esperado considerando o caráter investigativo e lúdico da atividade de modelagem geométrica,
- a dificuldade geral da turma foi efetuar os registros escritos das relações matemáticas observadas, o que evidencia não ser a redação de textos matemáticos - a comunicação escrita das ideias - um hábito cultivado na escola.

Entendemos que o interessante para o trabalho com a modelagem geométrica é a possibilidade de modificar o olhar diante das situações cotidianas – perceber a presença da matemática em atividades do dia-a-dia. Porém, os dados coletados revelam que a principal lacuna na formação matemática dos alunos é comunicar por escrito as ideias matemáticas. Esse fato é comprovado em outras pesquisas como em Fonseca (2000) e Ponte (2004), e aqui, reafirmamos a importância a ser dada a esta questão.

6 CONCLUSÃO

Quando iniciamos as pesquisas para a realização desta dissertação, tínhamos interesse em desenvolver um trabalho no Ensino Fundamental tendo, como foco, a demonstração em matemática. A partir das investigações realizadas junto aos nossos alunos de uma turma de oitavo ano, em parte apresentadas no capítulo 2, percebemos que pouco ainda eram suas habilidades quanto à organização e à elaboração de argumentos que explicassem o "porquê" de certas propriedades matemáticas, nos contextos da aritmética e da geometria.

Ainda no momento inicial da pesquisa, lendo sobre o modelo de Van Hielle, que trata dos diferentes níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico (apresentados no capítulo 2), e sendo que é no terceiro nível que os alunos compreendem argumentos de natureza dedutiva, identificamos que os dois primeiros níveis – o da *visualização* e o da *análise* - poderiam ser trabalhados com os alunos em atividades de modelagem geométrica.

Dada nossa experiência anterior com atividades de modelagem, vimos que com elas os alunos poderiam desenvolver hábitos do pensamento nos níveis da visualização e análise, os quais, mais adiante, ajudariam no entendimento e na produção de argumentações de natureza dedutiva – as demonstrações. Com a modelagem geométrica também teríamos, no seu aspecto lúdico, uma motivação para a aprendizagem da geometria. Foi conhecendo mais de perto a realidade de nossa turma de oitavo ano, que redefinimos nosso tema de dissertação.

Assim, nosso propósito nesse trabalho foi responder a pergunta enunciada na Introdução:

Para a elaboração da proposta didática, nos baseamos no trabalho de Goldenberg (1998) que trata do desenvolvimento dos hábitos de pensamento e identificamos de que forma estes hábitos se fazem presentes em uma atividade de modelagem geométrica. Como metodologia de pesquisa, buscamos inspiração na Engenharia Didática, uma metodologia baseada na concepção, realização, observação e análise de uma sequência de atividades que visa determinada aprendizagem.

A proposta didática, no que se refere a sequência de atividades, buscou estimular o desenvolvimento de hábitos do pensamento, inicialmente através da visualização, manipulação e análise de três modelos já construídos no GeoGebra - uma porta pantográfica, uma janela basculante e um balanço vai e vem. Para cada modelo, a ser construído pelos alunos, planejamos o desenrolar da atividade em três etapas: apresentação do modelo geométrico; aluno realiza atividades direcionadas para o entendimento das relações matemáticas envolvidas na construção do modelo e responde aos questionamentos propostos; aluno constrói um modelo semelhante ao que foi apresentado considerando suas ideias, percepções e conclusões.

Após esta fase de construção orientada de modelos, os alunos deveriam, como tarefa final, escolher um objeto do mundo real e construir seu modelo utilizando o software GeoGebra. Para implementar a modelagem geométrica do modelo escolhido, conforme ideias apresentadas no capítulo 2, o aluno evidencia, a partir de suas escolhas e atitudes, hábitos do pensamento já desenvolvidos ou em processo de construção.

Para organizar a sequencia de atividades, foi desenvolvido o site “Geometria em Movimento”, que está disponível na web em http://odin.mat.ufrgs.br/modelagem/. Durante a aplicação do experimento didático este material serviu como canal de comunicação entre professor e aluno e ampliou os *tempos e espaços* da aprendizagem ao levar a discussão da turma para além da sala de aula. O site é voltado para o ensino da Geometria e prioriza o desenvolvimento do pensamento matemático. Quanto ao conteúdo, segue o currículo da escola e trata dos seguintes conceitos e propriedades matemáticas: pontos, reta, semirreta, segmento de reta, retas paralelas, retas perpendiculares, ponto médio, ângulo e quadriláteros.

Conforme foi transcorrendo a experiência, vimos um crescente envolvimento dos alunos nas construções que estavam sendo produzidas no GeoGebra e foi com muita motivação que realizaram o trabalho final – a construção de modelo geométrico do objeto por eles escolhido. A condução do trabalho com uso do software GeoGebra, mostrou que, de um modo geral, os alunos se envolveram nas explorações e investigações das relações geométricas, percebendo invariantes, levantando conjecturas e comunicando oralmente suas descobertas. Mas vale aqui relembrar que, por si só, a tecnologia não garante o desenvolvimento do pensamento matemático e, é por isso que fizemos um planejamento detalhado para a sequência de atividades. Entretanto, mesmo com a organização do estudo dos modelos geométricos na forma de atividades de exploração guiada, na primeira modelagem foi preciso fazer uma reformulação das atividades planejadas, prolongando o tempo de sua realização. Observamos que a dificuldade dos alunos, neste início do experimento didático, estava centrada no entendimento da linguagem utilizada no site e na compreensão da ideia de estabilidade sob ação do movimento. Porém, acreditamos que a reestruturação da linguagem e a indicação, em grande grupo, dos primeiros passos para a implementação do modelo foram suficientes para que o aluno se adaptasse com a proposta de trabalho.

Cabe salientar que, inicialmente, os alunos esperavam que o professor informasse o que fazer e como fazer. Com o avançar dos encontros, pudemos perceber que os alunos tornaram-se mais autônomos na realização das atividades. Assim, a utilização da tecnologia atendeu à expectativa, quanto às ações e reflexões dos alunos. Entendemos que o uso de atividades guiadas contribuiu para que os alunos avançassem em suas investigações e apresentassem uma melhor compreensão dos conceitos geométricos abordados. A maior dificuldade apresentada pelos alunos foi quanto ao registro por escrito (HP-6) das descobertas realizadas. Houve necessidade de intervenções específicas da professora na condução do processo de comunicação escrita das ideias exploradas pelos alunos, uma vez que, sozinhos, apresentavam muitas dificuldades. A pouca autonomia na formulação de registros escritos decorre, talvez, do fato de os alunos não terem sido incentivados, anteriormente, ao hábito de comunicar de forma sistematizada suas ideias.

Os resultados do experimento didático mostram que os alunos apresentam maior facilidade na comunicação oral de suas ideias, nos momentos de socialização do grupo. Apontam, também, que o aluno, quando ganha espaço para expressar suas ideias, amplia seu envolvimento com a atividade, mostrando um desenvolvimento do hábito de *criar, ser inventor* (HP-4).

No capítulo 5 da dissertação, na análise das produções dos alunos, registramos um significativo desenvolvimento dos hábitos do pensamento matemático, onde a tecnologia foi de fundamental importância. Na análise *a posteriori* do bloco IV, constatamos que os modelos geométricos criados pelos alunos no software GeoGebra apresentam características bem específicas que permitem a constatação dos hábitos do pensamento que estão sendo utilizados, bem como, o seu grau de desenvolvimento.

Após esta análise da produção dos alunos, podemos dizer que nossa proposta de trabalho com modelagem geométrica no Ensino Fundamental traz uma possibilidade, que julgamos muito interessante, de utilização de tecnologias na educação matemática, no caso no contexto da geometria.

No que diz respeito à postura dos alunos na realização desta tarefa final, foi possível constatar que, estavam genuinamente interessados na construção dos modelos e não em apenas atender a atividade proposta pelo professor. A maioria dos alunos sentiu orgulho dos modelos produzidos e foi com entusiasmo que solicitaram um espaço para apresentação de seus trabalhos na mostra pedagógica da escola (Figura 61).

Figura 61 – Mosaico de imagens da Mostra Pedagógica da escola.

Finalizamos, afirmando que, com a atividade de modelagem geométrica, é possível desenvolver os hábitos do pensamento matemático em alunos que cursam o Ensino Fundamental. Destacamos, nesse sentido, que os ambientes de geometria dinâmica são fundamentais para o sucesso desta atividade, pois neles o aluno pode simular movimentos e fazer manipulações diretamente na tela do computador e, os efeitos produzidos provocam, nos alunos, uma constante vontade de aperfeiçoar o modelo construído. Em cada novo aperfeiçoamento são os hábitos de pensamento que estão sendo desenvolvidos.

Se no inicio do experimento identificamos, nos alunos, uma dificuldade para produzirem demonstrações matemáticas, ao final deste trabalho diríamos que estes mesmos alunos, tendo desenvolvido hábitos de pensamento através das atividades de modelagem geométrica, poderiam ser iniciados no trabalho com demonstrações. Assim, a aprendizagem da demonstração matemática no Ensino Fundamental pode vir a ser uma continuação desta pesquisa, no futuro.

REFERÊNCIAS

ARMELLA, L. M., KAPUT, J. J. From static to dynamic mathematics: historicaland representational perspectives. 2008. Disponível em: http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/artigos/esm_2008_v68/11semiotic.pdf. Acesso em 7 maio 2012.

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. Didáticas das matemáticas (Dir. Jean Brun). Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. (Horizontes Pedagógicos).

BALACHEFF, N. **Processus de Preuve et Situations de Validation,** Educacional Studies in Mathematics, vol. 18, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1987.

BASSO. Marcus V. A., GRAVINA, Maria A. (2011) **Mídias Digitais na Educação Matemática**, em GRAVINA, Maria Alice; BÚRIGO, Elisabete Zardo; BASSO, Marcus Vinícius de Azevedo; GARCIA, Vera Clotilde Vanzetto (orgs.), Matemática, Mídias Digitais e Didática - tripé para formação de professores de Matemática. Porto Alegre. Cap 1, p. 4- 25.

BORRÕES, M. (1998). **O Computador na Educação Matemática**. Programa Nónio século XXI.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEC, 1997.

CUOCO, A., GOLDENBERG, E. P., MARK, J. **"Habits of Mind: an organizing principle for mathematics curriculum"** Journal of Mathematical Behavior 15(4), 375-402 (1996).

DAVIS, P. J. HERSH, R. **A experiência matemática**. Lisboa: Gradativa , 1995.

DORO, A. T., Argumentação e Prova: Análise de Argumentos Geométricos de Alunos da Educação Básica. Tese de Mestrado. São Paulo: PUC, 2007.

D’AMBROSIO, Ubiratam. **Etnomatemática**. São Paulo: Ática, 1988. 88p.

FONSECA, H. (2000). **Os processos matemáticos e o discurso em atividades de investigação na sala de aula** (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências). Lisboa: APM.

GOLDENBERG, E. P. (1998 a). “**Hábitos de pensamento” um princípio organizador para o currículo (I)**. Educação e Matemática, 47, 31-35.

GOLDENBERG, E. P. (1998 b). **“Hábitos de pensamento” um princípio organizador para o currículo (II)**. Educação e Matemática, 48, 37-44.

GOLDENBERG, E. P (Eds). 1999. **Quatro Funções da Investigação na Aula de Matemática** Lisboa: APM e Projeto MPT.

GOULART, Juliana. B. **O ESTUDO DA EQUAÇÃO** $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ **UTILIZANDO O SOFTWARE GRAFEQ - Uma proposta para o Ensino Médio.** Tese de Mestrado. Porto Alegre: UFRGS, 2009.

GRAVINA, Maria A., **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo**, Tese de Doutorado. Porto Alegre, RS, UFRGS, 2001.

GRAVINA, Maria A., SANTAROSA, Lucila.M. **Aprendizagem Matemática em ambientes informatizados**. IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998.

GRAVINA, Maria A., DIAS, Mariângela T., BARRETO, Marina M., MEIER, Melissa (2011a) **Geometria Dinâmica na Escola**, em GRAVINA, Maria Alice; BÚRIGO, Elisabete Zardo; BASSO, Marcus Vinícius de Azevedo; GARCIA, Vera Clotilde Vanzetto (orgs.), Matemática, Mídias Digitais e Didática - tripé para formação de professores de Matemática. Porto Alegre. Cap 2, p. 26- 45.

GRAVINA, Maria A., DIAS, Mariângela T., BARRETO, Marina M., MEIER, Melissa (2011b) **Modelagem com Geometria Dinâmica na Escola**. Anais da XIII CIAEM – Conferência Interamericana de Educação Matemática - disponível em: http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1388.pdf. Acesso 6 maio 2012.

GUIA DO TUTOR – **Curso de Licenciatura em Pedagogia a Distância** – Faculdade de Educação (FACED/UFRGS) – Núcleo de Estudos em Tecnologias Digitais na Educação – NETE

JORGE FILHO, Alberto. **Revista "Construir Notícias"**. Novembro/Dezembro, n° 31, Ano 05, 2006.

HEALY, S. V. (L.)., e HOYLES, C. **Justifying and Proving in School Mathematics**. Technical Report, University of London, Institute of Education, 1998.

LAGE, Maria A. **Mobilização de formas de pensamento matemático no estudo de transformações geométricas**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Belo Horizonte: PUCMINAS, 2008.

MORAN, José M. (2002) **O que é educação a distância (*).** Disponível em: http://www.eca.usp.br/prof/moran/dist.htm. Acesso em 6 maio 2012.

MORAN, José M. BEHRENS, Marilda A. MASETTO, Marcos T. **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica**. Campinas, São Paulo: Papirus, 2003.

MOREIRA, Marco Antonio. **Mapas Conceituais e Aprendizagem Significativa**. Revista Chilena de Educação Científica, v. 4, n. 2, 2005.

NEVADO, Rosane Aragón; CARVALHO, Marie Jane Soares de; MENEZES, Crediné Silva de. **Educação a distância mediada pela internet: uma abordagem interdisciplinar na formação de professores em serviço,** em NEVADO , Rosane Aragón; CARVALHO, Marie Jane Soares; CREDINÉ, Silva de Menezes (orgs.). Aprendizagem em rede na educação a distância: estudos e recursos para formação de professores. Porto Alegre: Ricardo Lenz, 2007, p.17-33.

PAIS, Luiz C. **Ensinar e Aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PIETROPAOLO, R. C**. (Re)significar a Demonstração nos Currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática**. Tese de Doutorado. São Paulo: PUC, 2005.

POLYA, George. **O ensino por meio de problemas**. RPM 7.Sociedade Brasileira de Matemática . 1985. 11-16

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático** - 2 reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P. (2004). **Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal**. Investigar em Educação, 2. 93-169.

PONTE, J. P. et AL. **Investigações matemáticas na sala de aula** – Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

SANGIACOMO, Ligia. **O processo da mudança de estatuto: de desenho para a figura geométrica. Uma engenharia didática com o auxílio do Cabri – Geométre.** Dissertação de Mestrado. PUC-SP. São Paulo, 1996.

SILVA, A., VELOSO, E., PORFÍRIO, J., ABRANTES, P. O currículo de matemática e as Atividades de Investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999, p. 69-85.

TORI, R. **Cursos híbridos ou blended learning**. IN: LITTO, F. e FORMIGA, M. (Org) Educação a Distância: o estado da arte. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

VAN HIELE. P.: **Structure and Insight.** Orlando, FL: Academis Press, 1976.

APÊNDICES

APÊNDICE 1 – QUESTIONÁRIO APLICADO COM ALUNOS ANTES DA REALIZAÇÃO DO EXPERIMENTO DIDÁTICO BUSCANDO VERIFICAR A EXPECTATIVA E ENTENDIMENTO QUANTO A REALIZAÇÃO DO MESMO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Agronomia - 91509-900 - Porto Alegre - RS
Fone/Fax: (051) 3308.6212
mat-ppgensimat@ufrgs.br http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem

E. M. E. F. OLIMPIO VIANNA ALBRECHT

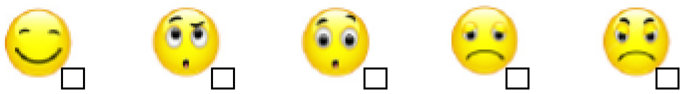
DISCIPLINA DE MATEMÁTICA - PROFESSORA MELISSA MEIER

Nome:____ Turma:__________
Data:__/__/____

1- Você possui computador em casa? ☐ SIM ☐ NÃO
2- Tem acesso a internet em sua casa? ☐ SIM ☐ NÃO
3- Tem acesso a computador de parentes ou vizinhos para realizar as tarefas escolares?
☐ SIM ☐ NÃO
4- Utiliza o computador, na maior parte do tempo, para qual atividade?

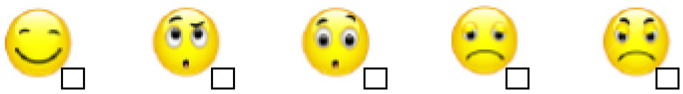
5- Costuma utilizar o computador para realizar atividades escolares? Quais? Para qual disciplina?

6- Como você se sente nas aulas de matemática?



☐ Animado(a) ☐ Preocupado(a) ☐ Assustado(a) ☐ Desanimado(a) ☐ Chateado(a)

7- Como você se sente com relação as aulas de matemática no laboratório de informática?



☐ Animado(a) ☐ Preocupado(a) ☐ Assustado(a) ☐ Desanimado(a) ☐ Chateado(a)

APÊNDICE 2 – QUESTIONÁRIO APLICADO COM ALUNOS ANTES DA REALIZAÇÃO DO EXPERIMENTO DIDÁTICO BUSCANDO VERIFICAR CAPACIDADE DE ARGUMENTAÇÃO EM MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Agronomia - 91509-900 - Porto Alegre - RS
Fone/Fax: (051) 3308.6212
mat-ppgensimat@ufrgs.br http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem

E. M. E. F. OLIMPIO VIANNA ALBRECHT

DISCIPLINA DE MATEMÁTICA - PROFESSORA MELISSA MEIER

Nome:_______________________________________ Turma:__________

Data:__/__/____

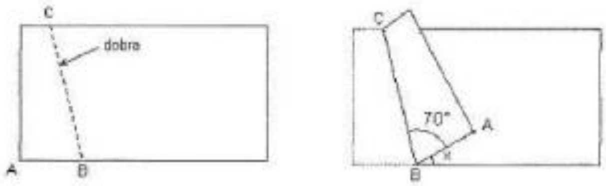
QUESTÃO 1

As figuras abaixo são quadriláteros:

É verdade que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre 360°? Justifique sua resposta:

QUESTÃO 2

Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.



Justifique sua resposta.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Agronomia - 91509-900 - Porto Alegre - RS
Fone/Fax: (051) 3308.6212
mat-ppgensimat@ufrgs.br http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem

QUESTÃO 3

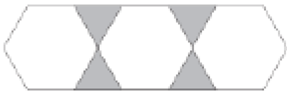
A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

QUESTÃO 4

A figura abaixo é formada por hexágonos regulares e triângulos equiláteros. Sua área total é 154 cm². Qual é a área da região sombreada?



Justifique sua resposta:

QUESTÃO 5:

Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?
Justifique

APÊNDICE 3 – QUESTIONÁRIO APLICADO COM PROFESSORES BUSCANDO VERIFICAR O ENTENDIMENTO SOBRE O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO DEDUTIVO NA ESCOLA BÁSICA

TRABALHO DE PESQUISA

MELISSA MEIER - melissameier@gmail.com

TEMPO DE DOCENCIA:____
TEMPO DE DOCENCIA NA ESCOLA BÁSICA:_____________________________________
NÍVEIS EM QUE ESTA TRABALHANDO ATUALMENTE:______________________________

1- Acredito que a DEMONSTRAÇÃO deve fazer parte do ensino/aprendizagem de matemática na escola básica.
( ) SIM
( ) NÃO

*Se você respondeu **SIM** para esta primeira pergunta solicito que, na continuidade deste trabalho, responda apenas as questões **2, 3, 4 e 5**. Por outro lado, se você respondeu **NÃO** , por favor, responda apenas as questões **2, 6, 7 e 8**.

2- A partir de que idade/escolaridade pode-se trabalhar com demonstrações (pensamento dedutivo)?
Resposta:
____
____

3- Quem deve fazer a demonstração de um determinada conteúdo na escola básica?
( ) Professor
( ) Aluno
( ) Outro. Especifique:____

4- Consigo demonstrar todos os conteúdos que trabalho na escola básica.
( ) Sim
( ) Não
( ) Outro. Justificativa:____

5- Acredito ser necessário demonstrar, em sala de aula, todos os conteúdos matemáticos que trabalho na escola básica.
( ) Sim
( ) Não
( ) Outro. Justificativa:____

6- O aluno da escola básica (anos finais) não tem maturidade para compreender ou construir uma demonstração.
( ) Concordo
( ) Não concordo
( ) Outro. Justificativa:____

7- O aluno da escola básica (anos finais) não possui pensamento dedutivo (capacidade de generalização).
( ) Concordo
( ) Não concordo
( ) Outro. Justificativa:____

8- O tempo para o ensino/aprendizagem de matemática, na escola básica, não é suficiente para trabalhar demonstrações.
( ) Concordo
( ) Não concordo
( ) Outro. Justificativa____

APÊNDICE 4 – IMAGENS DOS ALUNOS TRABALHANDO DURANTE A APLICAÇÃO DO EXPERIMENTO DIDÁTICO

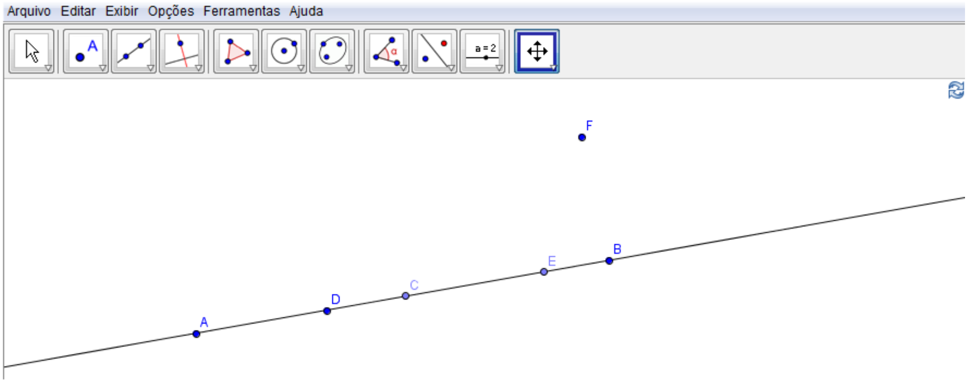
APÊNDICE 5 – SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES UTILIZADAS NA PESQUISA E DISPONÍVEIS NO SITE "GEOMETRIA EM MOVIMENTO"

AULA 1

ATIVIDADE 1

Analise o arquivo do GeoGebra

*CLIQUE **AQUI** (link de acesso ao arquivo) PARA ACESSAR O ARQUIVO. (imagem representativa da animação abaixo)*



Movimente os pontos que estão na figura e responda em seus registros da aula:

Responda em seus registros da aula:

1- Quais são os pontos que pertencem a reta?

2- Quais pontos não pertencem a reta?

3- É possível marcar mais pontos sobre a reta?

4- Existem pontos na reta entre os pontos A e B?

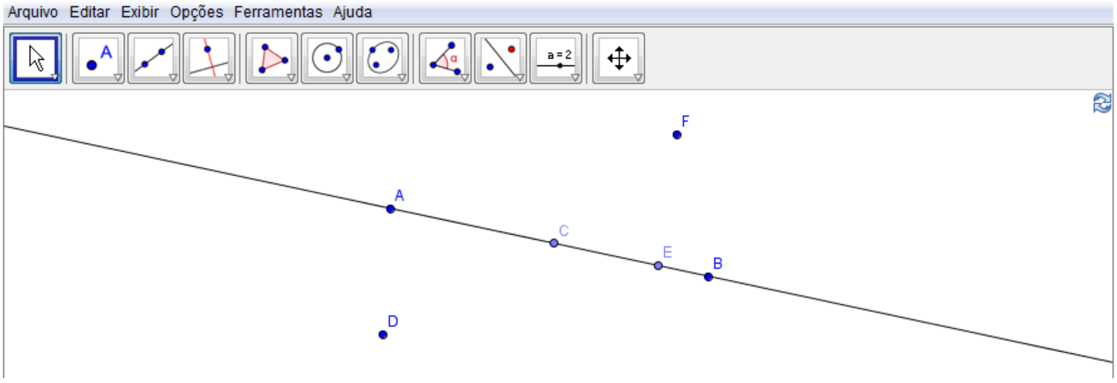
5- Quantos pontos posso colocar a mais sobre a reta?

6- Quantos pontos a mais posso colocar fora da reta?

7- Escreva como vocês relacionam: quantidade de pontos - reta.

8- Qual a regra que vocês estabeleceram para decidir se um ponto esta sobre a reta?

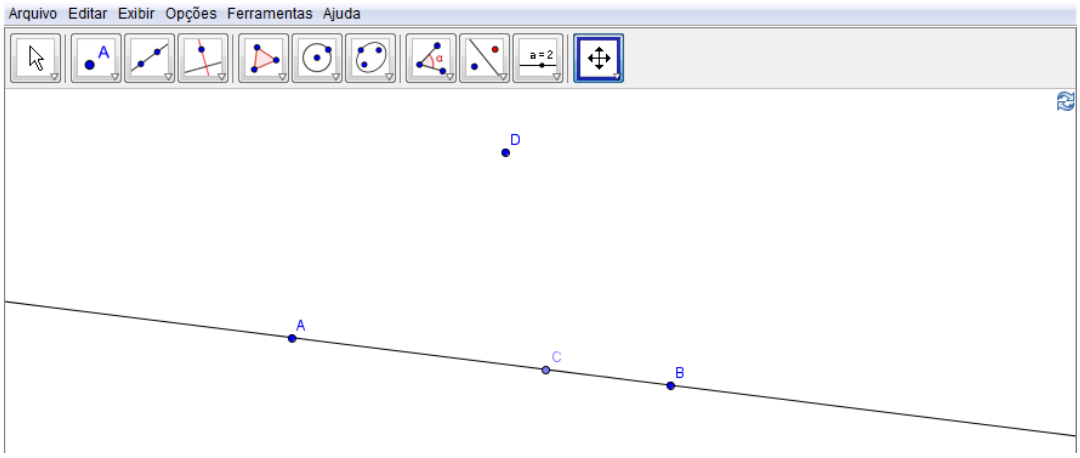
A próxima imagem representa uma possível movimentação dos objetos deste arquivo.



ATIVIDADE 2

Analise o arquivo do GeoGebra

CLIQUE ***AQUI*** *(link de acesso ao arquivo) PARA ACESSAR O ARQUIVO (imagem representativa da animação abaixo)*



1- Desenhe uma reta que passe pelo ponto A e pelo ponto D, movimente os pontos A e D e observe o que acontece

2- Quantas retas consigo desenhar passando pelo ponto A e pelo ponto C?

3- Os ponto A, B e C pertencem a mesma reta?

4- Os ponto A, C e D pertencem a mesma reta?

5- Sempre podemos desenhar uma reta passando por dois pontos?

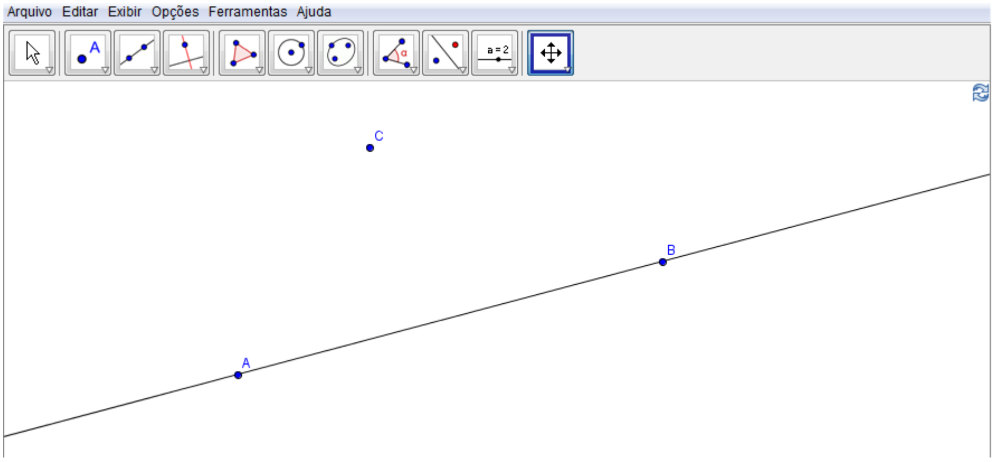
6- Sempre podemos desenhar uma reta passando por três pontos?

7- Quando uma reta pode ser desenhada passando por três pontos? Como devem estar posicionados três pontos para que a reta passe por eles?

ATIVIDADE 3

Analise o arquivo do Geogebra.

*CLIQUE **AQUI** PARA ACESSAR O ARQUIVO. (imagem representativa da animação abaixo)*



1- Quantas retas vocês conseguem desenhar passando pelo ponto C?

2- Quantas retas que passam por C são paralelas a reta a?

3- Quantas retas que passam por C são perpendiculares a reta a?

4- Constua um ponto D e a reta que passa por D e é paralela a reta inicial da figura. Movimente o ponto D e observe o que acontece.

5- Construa o ponto E e a reta que passa por E e é perpendicular a reta inicial da figura. Movimente E e observe o que acontece .

4- Escreva a regra que explica o que é uma reta paralela a reta a.

5- Escreva a regra que explica o que é uma reta perpendicular a reta a.

ATIVIDADE 4

Construa no Geogebra - passos de construção:

*- desenhe o segmento **a** que tem extremidades nos pontos **A** e **B***

*- coloque um ponto médio sobre este segmento **a** (COMO FAZER: selecione a opção Ponto médio ou centro e clique sobre o ponto A e, em seguinda, sobre o ponto B.*

- movimento os ponto A e B (extremos do segmento) e verifique o que acontece.

- desenhe uma reta b passando por A (COMO FAZER: selecione a opção Reta definida por dois pontos e clique sobre o ponto A e, em seguida, sobre um local qualquer da tela do Geogebra).

- desenhe uma paralela a reta b passando pelo ponto B. (COMO FAZER: selecione a opção Reta Paralela e clique sobre a reta b e, em seguida, sobre ao ponto B)

- desenhe uma paralela a reta b passando pelo ponto C (ponto médio) . (COMO FAZER: selecione a opção Reta Paralela e clique sobre a reta b e, em seguida, sobre o ponto C (ponto médio)).

- movimente os pontos extremos do segmento e verifique o que acontece.

- movimente a reta b e verifique o que acontece.

Para registrar:

1- Descreva o que você esta observando quando movimenta os objetos.

2- Escreva uma regra que explique as características de um PONTO MÉDIO

AULA 2

ATIVIDADE 5

Agora é com você!
Construa a PORTA PANTOGRÁFICA.

Para a construção do modelo de porta pantográfica fique atento para os seguintes detalhes:
- comprimentos que modificam de tamanho com o movimento da porta.
- identifique, no modelo, as características matemáticas (FATOS OBSERVADOS) que estudamos na AULA 1. Você vai usá-las agora!

É importante observar que existem as características matemáticas que possibilitam o movimento da PORTA PANTOGRÁFICA e que os "enfeites" (detalhes na porta) são os A MAIS da construção que, para este primeiro momento, podem ficar como complementos, ok?!

AULA 3

ATIVIDADE 6

Ajuda para construir a PORTA PANTOGRÁFICA.* *;-)***

Para a construção do modelo de porta pantográfica iniciem a construção com os seguintes passos:
- desenhe uma reta que passa pelos pontos A e B
- desenhe um ponto C sobre esta reta (entre os pontos A e B)
- desenhe um segmento que tem extremidades nos ponto A e C.
- desenhe uma reta perpendicular a este seguimento passando pelo ponto A.
- desenhe o ponto D que é ponto médio dos pontos A e C.
- desenhe o ponto E que é ponto médio dos pontos A e D.
- desenhe o ponto F que é ponto médio dos pontos C e D.
...

Agora é, novamente, com vocês! Concluam a construção da porta pantográfica.

TAREFA

Para esta aula fica a solicitação de um registro do trabalho desenvolvido. A dupla deve criar uma página para explicar o que pensaram e decidiram durante a construção da porta pantográfica. É fundamental, também, que a dupla tente explicar porque o modelo funciona (explicar a matemática envolvida nesta construção).

AULA 4

ATIVIDADE 1

Criar arquivo no GeoGebra. Siga os passos disponibilizados abaixo:

- coloque os pontos A, B e C na tela

- selecione a opção Semirreta Definida por Dois Pontos e clique sobre o ponto A e depois sobre o ponto B

- selecione a opção Semirreta Definida por Dois Pontos e clique sobre o ponto A e depois sobre o ponto C

- selecione a opção Ângulo e clique sobre a semirreta a e em seguida sobre a semirreta b

SALVE ESTA CONSTRUÇÃO, POIS VOCÊ IRÁ UTILIZÁ-LA NOVAMENTE NA ATIVIDADE 3.

Movimente os pontos que estão na figura e responda em seus registros da aula:

1- O que acontece quando você movimenta o ponto A

2- O que acontece quando você movimenta o ponto B e C?

ATIVIDADE 2

Criar arquivo no GeoGebra.

ABRA UMA NOVA JANELA NO GEOGEBRA PARA QUE O ARQUIVO DA ATIVIDADE 1 CONTINUE DISPONÍVEL PARA A PRÓXIMA ATIVIDADE.

Siga os passos disponibilizados abaixo:

- desenhe o círculo de centro A e extremidade B

- sobre o círculo coloque um ponto C e o ponto D

- selecione a opção Semirreta Definida por Dois Pontos e clique sobre o ponto A e depois sobre o ponto C

- selecione a opção Semirreta Definida por Dois Pontos e clique sobre o ponto A e depois sobre o ponto D

- selecione a opção Ângulo e clique sobre a semirreta a e em seguida sobre a semirreta b (clicar sobre as semirretas no sentido anti horário)

Responda em seus registros da aula:

1- O que muda quando você movimenta o ponto C? E quando você movimenta o ponto D?

2- Qual a posição do ponto C quando o ângulo no vértice A é de 180°?

2- Movimento o ponto C de forma que ele percorra uma volta inteira no círculo, qual o ângulo indicado no GeoGebra depois deste movimento?

3- Você consegue definir uma "regra" para explicar as características do menu "Ângulo" do GeoGebra?

ATIVIDADE 3

RETOMANDO O ARQUIVO DA ATIVIDADE 1, prossiga com a construção - passos de construção:

- desenhe uma reta c passando pelos pontos A e B

- desenhe uma reta d passando pelos pontos A e C

- selecione a opção Ângulo e clique sobre as reta c e d (clicar sobre as retas no sentido anti horário)

Movimente os pontos que estão na figura e responda em seus registros da aula:

1- Existe alguma semelhança entre os ângulos marcados? Qual?

2- Você consegue imaginar qual seria o ângulo para os outros dois "espaços" que não estão com o ângulo marcado?

3- Você consegue imaginar se os ângulos nestes "espaços" possuem alguma semelhança? Qual?

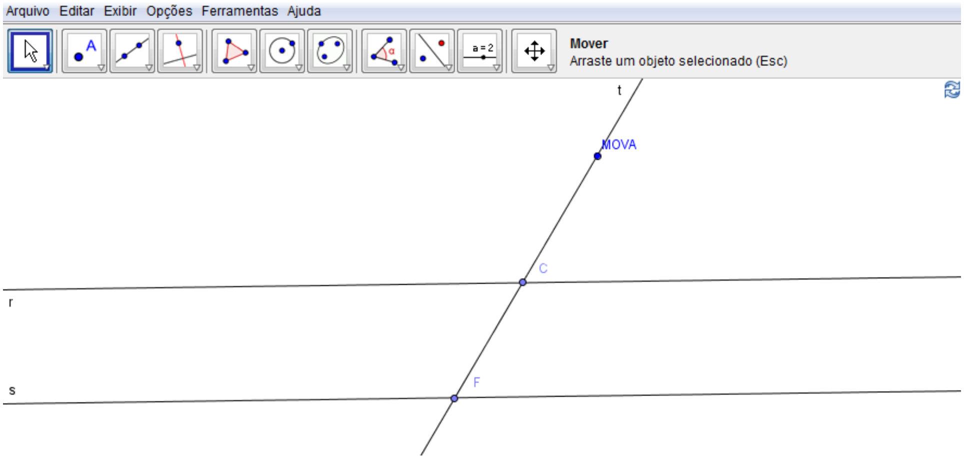
4- Movimento o ponto B e observe a relação entre o ângulo marcado e o espaço que não possui a marcação do ângulo. Você consegue definir qual é essa relação?

5- Você consegue definir uma "regra" para explicar as características do que esta percebendo?

ATIVIDADE 4

Analise o arquivo Geogebra.

Clique AQUI para acessar o arquivo. (imagem representativa da animação abaixo)



1- Determine o ângulo nos espaços C e F (utilize a ferramenta ângulo).

2- Movimente a reta r ou s de forma que as retas fiquem sobrepostas. Enquanto movimenta a reta, observe os ângulos que você determinou.

Responda em seus registros da aula:

1- O que se pode dizer sobre os ângulos que você marcou?

2- Movimente a reta t e observe os ângulos marcados. O que se pode dizer sobre este par de ângulos?

3- Na mesma figura, com as três retas r, s e t, marque outros pares de ângulo (usando cores diferentes para cada par) que tenham a mesma propriedade do par analisado. Porque isso acontece?

4- Escreva uma "regra" que explique o que você observou nesta atividade.

ATIVIDADE 5

Vamos aplicar o aprendemos em TRIÂNGULO! Construa no GeoGebra:

- coloque três pontos A, B e C na tela do GeoGebra

- una esses pontos utilizando segmentos

Você desenhou um triângulo, certo?!

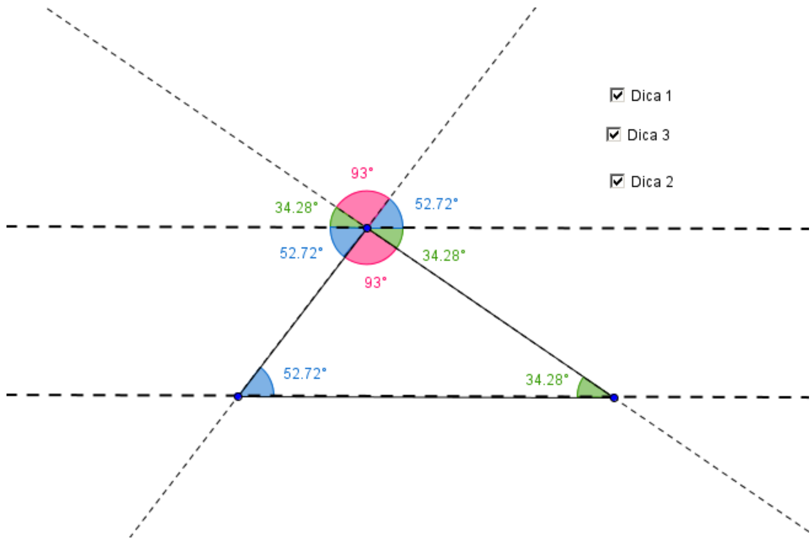
- meça os ângulos internos desse triângulo e some-os (PEÇA AJUDA E MOSTRO COMO FAZER ESTA SOMA NO GEOGEBRA, OK?!)

1- Some os ângulos internos que você mediu e anote o resultado em seus registros da aula.

Responda em seus registros de aula:

1- Quando você movimenta os vértices do triângulo o que acontece com a soma dos ângulos internos?

Clique AQUI e analise a construção feita no GeoGebra. (imagem representativa da animação abaixo)



A partir dos elementos da construção e de sua analise tente explicar, em seus registros de aula, porque a relação observada é válida para qualquer triângulo (todos os triângulos).

AULA 5

ATIVIDADE 6

Agora é com vocês!
Fazer a modelagem da JANELA BASCULANTE.

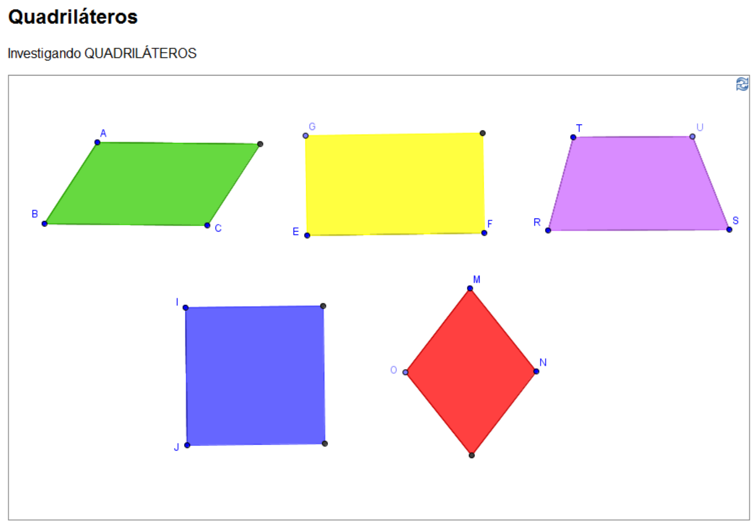
É importante observar que existem as caracteristicas matemáticas que possibilitam o movimento da JANELA BASCULANTE e que os detalhes da janela (perspectiva - idéia de profundidade) são os A MAIS da construção que, para este primeiro momento, podem ficar como complementos, ok?!

AULA 6

ATIVIDADE 1

Movimente os pontos livres dos quadriláteros e responda em seus registros da aula :

(imagem representativa da animação abaixo)



DICA DO QUE SÃO RELAÇÕES MATEMÁTICAS: perpendicularismo, paralelismo, lados de mesmo tamanho, ângulos...

1- Quais relações matemáticas permanecem fixas quando você movimenta os pontos livres do quadrilátero verde?

2- Quais relações matemáticas permanecem fixas quando você movimenta os pontos livres do quadrilátero amarelo?

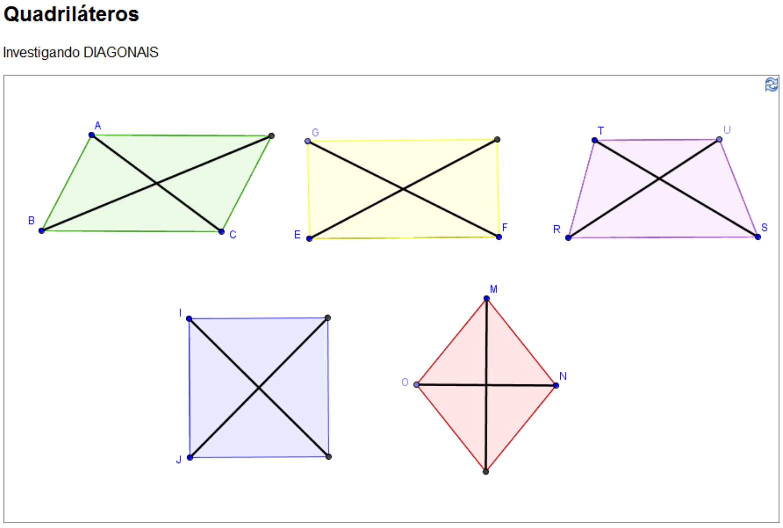
3- Quais relações matemáticas permanecem fixas quando você movimenta os pontos livres do quadrilátero lilás?

4- Quais relações matemáticas permanecem fixas quando você movimenta os pontos livres do quadrilátero azul?

5- Quais relações matemáticas permanecem fixas quando você movimenta os pontos livres do quadrilátero vermelho?

ATIVIDADE 2

Analise o arquivo do GeoGebra com os mesmos quadriláteros da atividade 1, mas agora com as DIAGONAIS das figuras em destaque.
CLIQUE AQUI PARA ACESSAR O ARQUIVO. (imagem representativa da animação abaixo)



Movimente os pontos livres de cada um dos quadriláteros e responda em seus registros da aula:

DICA DO QUE SÃO RELAÇÕES MATEMÁTICAS: mesmo tamanho, ângulo formado entre as diagonais, se cruzam no ponto médio.

1- Quais relações matemáticas você observa nas diagonais do quadrilátero verde?
2- Quais relações matemáticas você observa nas diagonais do quadrilátero amarelo?
3- Quais relações matemáticas você observa nas diagonais do quadrilátero lilás?
4- Quais relações matemáticas você observa nas diagonais do quadrilátero azul?
5- Quais relações matemáticas você observa nas diagonais do quadrilátero vermelho?

ATIVIDADE 3

Cada grupo (vamos estabelecer durante a aula) deve construir, no GeoGebra, um dos quadriláteros notáveis. Os passos da construção e as relações matemáticas utilizadas devem registradas em um arquivo html (komposer).

PARALELOGRAMO faremos juntos durante a aula.

GRUPO I - QUADRADO
GRUPO II - LOSANGO
GRUPO III - RETÂNGULO
GRUPO IV - TRAPÉZIO

ATIVIDADE 4

Solicite a folha RESUMO do conteúdo trabalhado nesta aula. A dupla deve devolver esta folha, com as respostas, até o final da aula.

AULA 7

ATIVIDADE 5

Agora é com vocês!

Duas tarefas para hoje:

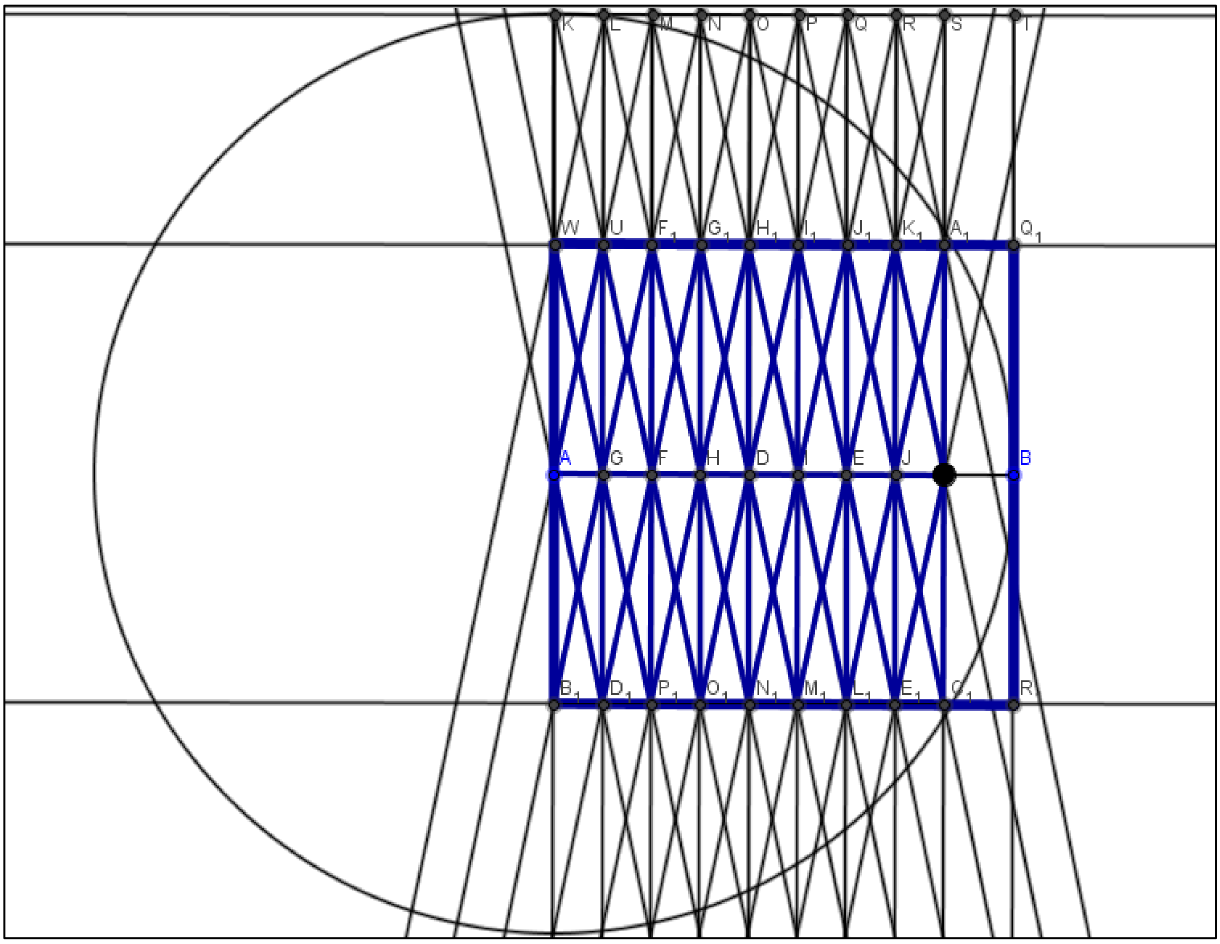
1- Construir no GeoGebra o quadrilátero indicado na aula passada e descrever no kompouser os passos desta construção.
2- Fazer uma réplica da modelagem do BALANÇO VAI-VEM e escrever no kompouser (em seus registros de aula) a matemática envolvida nesta construção (justificar matematicamente o porquê do balanço funcionar).

AULA 8

ATIVIDADE FINAL

Agora é com você!
Construa a sua modelagem geométrica.
Sempre que necessário retorne ao material estudado em aulas anteriores para relembrar as relações estudadas, ok?!

APÊNDICE 6 – PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DA PORTA PANTOGRÁFICA – GEOGEBRA



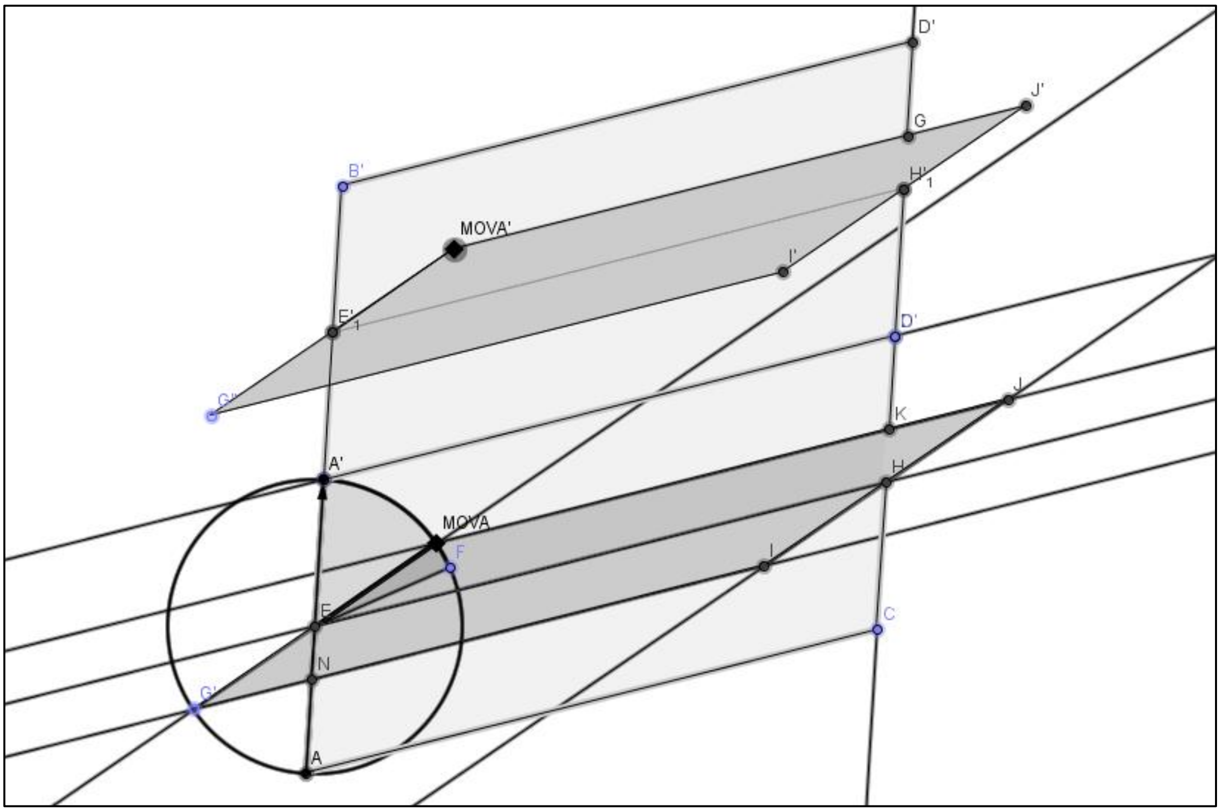
N.	Nome	Definição	Legenda
1	Ponto A		
2	Ponto B		
3	Segmento a	Segmento [A, B]	
4	Ponto C	Ponto sobre a	
5	Segmento b	Segmento [A, C]	
6	Reta c	Reta passando por A e perpendicular a a	
7	Reta d	Reta passando por C e perpendicular a a	
8	Reta e	Reta passando por B e perpendicular a a	
9	Ponto D	Ponto médio de AC	
10	Ponto E	Ponto médio de CD	
11	Ponto F	Ponto médio de DA	
12	Ponto G	Ponto médio de AF	
13	Ponto H	Ponto médio de FD	
14	Ponto I	Ponto médio de DE	
15	Ponto J	Ponto médio de EC	

16	Reta f	Reta passando por J e paralela a d	
17	Reta g	Reta passando por E e paralela a f	
18	Reta h	Reta passando por I e paralela a g	
19	Reta i	Reta passando por D e paralela a h	
20	Reta j	Reta passando por H e paralela a i	
21	Reta k	Reta passando por F e paralela a j	
22	Reta l	Reta passando por G e paralela a k	
23	Círculo p	Círculo por B com centro A	
24	Ponto K	Ponto de interseção de p, c	
25	Reta m	Reta passando por K e paralela a a	
26	Segmento n	Segmento [A, K]	
27	Ponto L	Ponto de interseção de l, m	
28	Ponto M	Ponto de interseção de k, m	
29	Ponto N	Ponto de interseção de j, m	
30	Ponto O	Ponto de interseção de i, m	
31	Ponto P	Ponto de interseção de h, m	
32	Ponto Q	Ponto de interseção de g, m	
33	Ponto R	Ponto de interseção de f, m	
34	Ponto S	Ponto de interseção de d, m	
35	Ponto T	Ponto de interseção de e, m	
36	Segmento q	Segmento [B, T]	
37	Segmento r	Segmento [S, C]	
38	Segmento s	Segmento [J, R]	
39	Segmento t	Segmento [Q, E]	
40	Segmento a_1	Segmento [I, P]	
41	Segmento b_1	Segmento [O, D]	
42	Segmento c_1	Segmento [H, N]	
43	Segmento d_1	Segmento [M, F]	
44	Segmento e_1	Segmento [G, L]	
45	Segmento f_1	Segmento [K, A]	
46	Segmento g_1	Segmento [K, S]	
47	Segmento h_1	Segmento [K, T]	
48	Reta i_1	Reta KF	
49	Reta j_1	Reta passando por L e paralela a i_1	
50	Reta k_1	Reta passando por M e paralela a j_1	
51	Reta l_1	Reta passando por N e paralela a k_1	
52	Reta m_1	Reta passando por O e paralela a l_1	
53	Reta n_1	Reta passando por P e paralela a m_1	
54	Reta p_1	Reta passando por Q e paralela a n_1	
55	Reta q_1	Reta SE	
56	Reta r_1	Reta passando por R e paralela a q_1	
57	Reta s_1	Reta passando por Q e paralela a r_1	
58	Reta t_1	Reta passando por P e paralela a s_1	

59	Reta a_2	Reta passando por O e paralela a t_1	
60	Reta b_2	Reta passando por N e paralela a a_2	
61	Reta c_2	Reta passando por M e paralela a b_2	
62	Ponto U	Ponto de interseção de e_1, i_1	
63	Reta d_2	Reta passando por U e paralela a m	
64	Ponto V	Ponto de interseção de r, n	
65	Ponto W	Ponto de interseção de n, d_2	
66	Ponto Z	Ponto de interseção de d, r	
67	Ponto A_1	Ponto de interseção de d_2, r	
68	Reta e_2	Reta RA_1	
69	Reta f_2	Reta A_1J	
70	Reta g_2	Reta LW	
71	Reta h_2	Reta WG	
72	Ponto B_1	Ponto de interseção de c, b_2	
73	Reta i_2	Reta passando por B_1 e paralela a a	
74	Ponto C_1	Ponto de interseção de d, n_1	
75	Ponto D_1	Ponto de interseção de a_2, l	
76	Ponto E_1	Ponto de interseção de f, m_1	
77	Reta j_2	Reta E_1C	
78	Reta k_2	Reta D_1A	
79	Ponto F_1	Ponto de interseção de d_1, b_2	
80	Ponto G_1	Ponto de interseção de k_1, a_2	
81	Ponto H_1	Ponto de interseção de l_1, t_1	
82	Ponto I_1	Ponto de interseção de m_1, s_1	
83	Ponto J_1	Ponto de interseção de n_1, r_1	
84	Ponto K_1	Ponto de interseção de p_1, q_1	
85	Ponto L_1	Ponto de interseção de f_2, l_1	
86	Ponto M_1	Ponto de interseção de q_1, k_1	
87	Ponto N_1	Ponto de interseção de r_1, j_1	
88	Ponto O_1	Ponto de interseção de s_1, i_1	
89	Ponto P_1	Ponto de interseção de t_1, h_2	
90	Segmento l_2	Segmento [W, B_1]	
91	Segmento m_2	Segmento [W, A_1]	
92	Ponto Q_1	Ponto de interseção de q, d_2	
93	Ponto R_1	Ponto de interseção de e, i_2	
94	Segmento n_2	Segmento [W, Q_1]	
95	Segmento p_2	Segmento [B_1, R_1]	
96	Segmento q_2	Segmento [B_1, C_1]	
97	Segmento r_2	Segmento [R_1, Q_1]	
98	Segmento s_2	Segmento [W, G]	
99	Segmento t_2	Segmento [G, F_1]	
100	Segmento a_3	Segmento [A, U]	
101	Segmento b_3	Segmento [U, F]	

102	Segmento c_3	Segmento [F, G_1]	
103	Segmento d_3	Segmento [F_1, H]	
104	Segmento e_3	Segmento [H, H_1]	
105	Segmento f_3	Segmento [G_1, D]	
106	Segmento g_3	Segmento [D, I_1]	
107	Segmento h_3	Segmento [H_1, I]	
108	Segmento i_3	Segmento [I, J_1]	
109	Segmento j_3	Segmento [I_1, E]	
110	Segmento k_3	Segmento [E, K_1]	
111	Segmento l_3	Segmento [J_1, J]	
112	Segmento m_3	Segmento [J, A_1]	
113	Segmento n_3	Segmento [K_1, C]	
114	Segmento p_3	Segmento [B_1, G]	
115	Segmento q_3	Segmento [A, D_1]	
116	Segmento r_3	Segmento [D_1, F]	
117	Segmento s_3	Segmento [G, P_1]	
118	Segmento t_3	Segmento [P_1, H]	
119	Segmento a_4	Segmento [F, O_1]	
120	Segmento b_4	Segmento [O_1, D]	
121	Segmento c_4	Segmento [H, N_1]	
122	Segmento d_4	Segmento [N_1, I]	
123	Segmento e_4	Segmento [D, M_1]	
124	Segmento f_4	Segmento [M_1, E]	
125	Segmento g_4	Segmento [I, L_1]	
126	Segmento h_4	Segmento [L_1, J]	
127	Segmento i_4	Segmento [E, E_1]	
128	Segmento j_4	Segmento [E_1, C]	
129	Segmento k_4	Segmento [J, C_1]	
130	Segmento l_4	Segmento [U, D_1]	
131	Segmento m_4	Segmento [P_1, F_1]	
132	Segmento n_4	Segmento [G_1, O_1]	
133	Segmento p_4	Segmento [N_1, H_1]	
134	Segmento q_4	Segmento [I_1, M_1]	
135	Segmento r_4	Segmento [L_1, J_1]	
136	Segmento s_4	Segmento [K_1, E_1]	
137	Segmento t_4	Segmento [C_1, A_1]	
138	Segmento a_5	Segmento [A, C]	

APÊNDICE 7 – PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DA JANELA BASCULANTE – GEOGEBRA



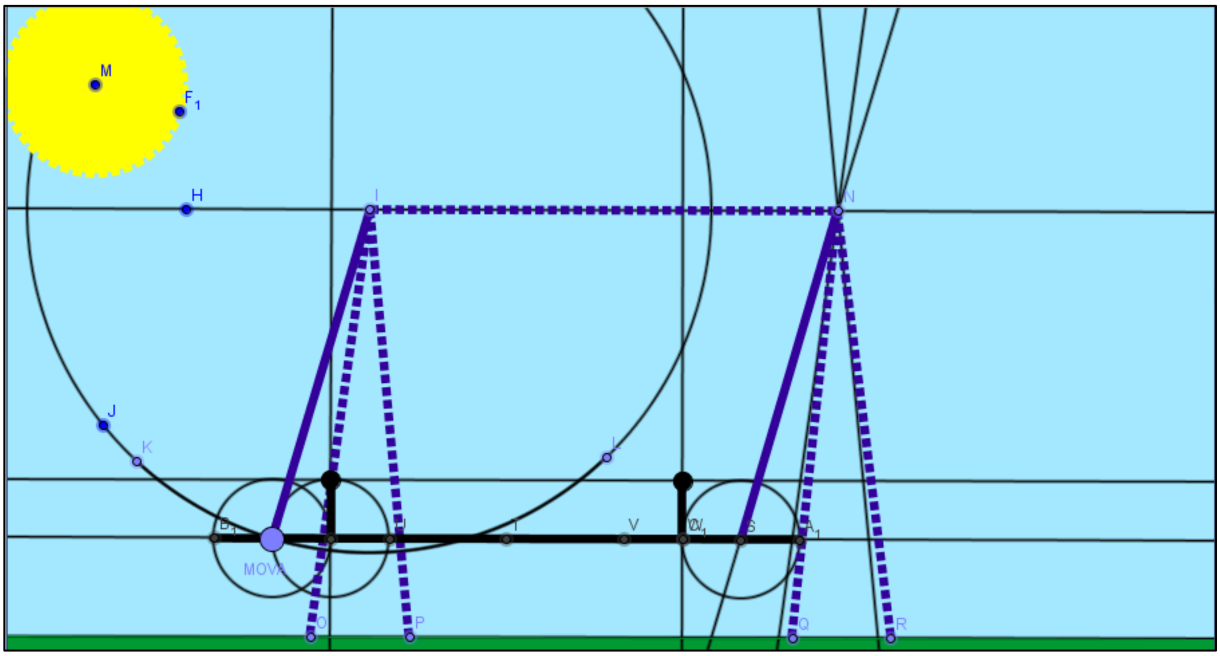
N.	Nome	Definição	Legenda
1	Ponto A		
2	Ponto B	Ponto sobre Círculo[A, 4]	
3	Segmento a	Segmento [A, B]	
4	Ponto C	Ponto sobre Círculo[A, 8]	
5	Segmento b	Segmento [A, C]	
6	Reta c	Reta passando por B e paralela a b	
7	Reta d	Reta passando por C e paralela a a	
8	Ponto D	Ponto de interseção de c, d	
9	Ponto E	Ponto médio de BA	
10	Reta e	Reta passando por E e paralela a c	
11	Círculo f	Círculo por B com centro E	
12	Círculo g	Círculo por B com centro E	
13	Ponto F	Ponto sobre g	
14	Setor h	SetorCircular[E, F, B]	
15	Ponto MOVA	Ponto sobre h	
16	Segmento i	Segmento [E, MOVA]	
17	Reta j	Reta EMOVA	
18	Ponto G'	Reflexão (ou Inversão) de MOVA em relação a E	

19	Reta k	Reta passando por MOVA e paralela a e	
20	Reta l	Reta passando por G' e paralela a e	
21	Ponto H	Ponto de interseção de d, e	
22	Reta m	Reta passando por H e paralela a j	
23	Ponto I	Ponto de interseção de l, m	
24	Ponto J	Ponto de interseção de k, m	
25	Quadrilátero polígono1	Polígono G', E, H, I	
25	Segmento g'	Segmento [G', E] de Quadrilátero polígono1	
25	Segmento e_1	Segmento [E, H] de Quadrilátero polígono1	
25	Segmento h_1	Segmento [H, I] de Quadrilátero polígono1	
25	Segmento i_1	Segmento [I, G'] de Quadrilátero polígono1	
26	Quadrilátero polígono2	Polígono A, B, D, C	
26	Segmento a_1	Segmento [A, B] de Quadrilátero polígono2	
26	Segmento b_1	Segmento [B, D] de Quadrilátero polígono2	
26	Segmento d_1	Segmento [D, C] de Quadrilátero polígono2	
26	Segmento c_1	Segmento [C, A] de Quadrilátero polígono2	
27	Quadrilátero polígono3	Polígono E, MOVA, J, H	
27	Segmento e_2	Segmento [E, MOVA] de Quadrilátero polígono3	
27	Segmento g_1	Segmento [MOVA, J] de Quadrilátero polígono3	
27	Segmento j_1	Segmento [J, H] de Quadrilátero polígono3	
27	Segmento h_2	Segmento [H, E] de Quadrilátero polígono3	
28	Ponto K	Ponto de interseção de d_1, g_1	
29	Ponto L	Ponto de interseção de l, i_1	
30	Ponto M	Ponto de interseção de a, a_1	
31	Ponto N	Ponto de interseção de l, a	
32	Segmento n	Segmento [E, N]	
33	Segmento p	Segmento [B, A]	
34	Segmento q	Segmento [B, D]	
35	Segmento r	Segmento [D, K]	
36	Segmento s	Segmento [H, C]	
37	Segmento t	Segmento [C, A]	

38	Segmento f_1	Segmento [E, H]	
39	Segmento k_1	Segmento [G', MOVA]	
40	Segmento l_1	Segmento [MOVA, J]	
41	Segmento m_1	Segmento [J, I]	
42	Segmento n_1	Segmento [G', I]	
43	Segmento p_1	Segmento [E, MOVA]	
44	Vetor u	Vetor[A, B]	
45	Ponto E'_1	Translação de E por u	
46	Ponto MOVA'	Translação de MOVA por u	
47	Ponto J'	Translação de J por u	
48	Ponto H'_1	Translação de H por u	
49	Quadrilátero polígono3'	Polígono E'_1, MOVA', J', H'_1	
49	Segmento e'	Segmento [E'_1, MOVA'] de Quadrilátero polígono3'	
49	Segmento mova'	Segmento [MOVA', J'] de Quadrilátero polígono3'	
49	Segmento j'	Segmento [J', H'_1] de Quadrilátero polígono3'	
49	Segmento h'	Segmento [H'_1, E'_1] de Quadrilátero polígono3'	
50	Ponto G''	Translação de G' por u	
51	Ponto E'	Translação de E por u	
52	Ponto H'	Translação de H por u	
53	Ponto I'	Translação de I por u	
54	Quadrilátero polígono1'	Polígono G'', E', H', I'	
54	Segmento g''	Segmento [G'', E'] de Quadrilátero polígono1'	
54	Segmento e'_1	Segmento [E', H'] de Quadrilátero polígono1'	
54	Segmento h'_1	Segmento [H', I'] de Quadrilátero polígono1'	
54	Segmento i'	Segmento [I', G''] de Quadrilátero polígono1'	
55	Ponto A'	Translação de A por u	
56	Ponto B'	Translação de B por u	
57	Ponto D'	Translação de D por u	
58	Ponto C'	Translação de C por u	
59	Quadrilátero polígono2'	Polígono A', B', D', C'	
59	Segmento a'	Segmento [A', B'] de Quadrilátero polígono2'	
59	Segmento b'	Segmento [B', D'] de Quadrilátero polígono2'	
59	Segmento d'	Segmento [D', C'] de Quadrilátero polígono2'	

59	Segmento c'	Segmento [C', A'] de Quadrilátero polígono2'	
60	Segmento q_1	Segmento [B, B']	
61	Segmento r_1	Segmento [B', D']	
62	Segmento s_1	Segmento [B, C']	
63	Segmento t_1	Segmento [MOVA', J']	
64	Segmento a_2	Segmento [J', I']	
65	Segmento b_2	Segmento [G'', I']	
66	Segmento c_2	Segmento [G'', MOVA']	
67	Segmento d_2	Segmento [E', MOVA']	
68	Ponto G	Ponto de interseção de d', t_1	
69	Segmento f_2	Segmento [D', G]	
70	Segmento g_2	Segmento [C', H']	

APÊNDICE 8 – PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO BALANÇO VAI E VEM – GEOGEBRA



N.	Nome	Definição	Legenda
1	Ponto C		
2	Ponto A		
3	Ponto B		
4	Quadrilátero polígono1	Polígono[A, B, 4]	
4	Ponto D	Polígono[A, B, 4]	
4	Ponto E	Polígono[A, B, 4]	
4	Segmento a	Segmento [A, B] de Quadrilátero polígono1	
4	Segmento b	Segmento [B, D] de Quadrilátero polígono1	
4	Segmento c	Segmento [D, E] de Quadrilátero polígono1	
4	Segmento d	Segmento [E, A] de Quadrilátero polígono1	
5	Ponto F	Ponto sobre d	
6	Reta e	Reta passando por F e paralela a a	
7	Ponto G	Ponto sobre b	
8	Quadrilátero polígono2	Polígono A, F, G, B	
8	Segmento a_1	Segmento [A, F] de Quadrilátero polígono2	
8	Segmento f	Segmento [F, G] de Quadrilátero polígono2	

8	Segmento g	Segmento [G, B] de Quadrilátero polígono2	
8	Segmento b_1	Segmento [B, A] de Quadrilátero polígono2	
9	Ponto H		
10	Reta h	Reta passando por H e paralela a f	
11	Ponto I	Ponto sobre h	
12	Ponto J		
13	Círculo k	Círculo por J com centro I	
14	Ponto K	Ponto sobre k	
15	Ponto L	Ponto sobre k	
16	Arco p	ArcoCircular[I, K, L]	
17	Ponto MOVA	Ponto sobre p	
18	Segmento i	Segmento [I, MOVA]	
19	Ponto N	Ponto sobre h	
20	Reta j	Reta passando por N e paralela a i	
21	Reta l	Reta passando por MOVA e paralela a h	
22	Ponto O	Ponto sobre f	
23	Segmento m	Segmento [I, O]	
24	Ponto P	Ponto sobre f	
25	Segmento n	Segmento [I, P]	
26	Reta q	Reta passando por N e paralela a m	
27	Reta r	Reta passando por N e paralela a n	
28	Ponto Q	Ponto sobre f	
29	Ponto R	Ponto sobre f	
30	Segmento s	Segmento [N, Q]	
31	Segmento t	Segmento [N, R]	
32	Ponto S	Ponto de interseção de j, l	
33	Segmento c_1	Segmento [N, S]	
34	Segmento d_1	Segmento [I, N]	
35	Ponto T	Ponto médio de MOVAS	
36	Ponto U	Ponto médio de MOVAT	
37	Ponto V	Ponto médio de TS	
38	Ponto W	Ponto médio de VS	
39	Ponto Z	Ponto médio de MOVAU	
40	Círculo e_1	Círculo por Z com centro MOVA	
41	Círculo f_1	Círculo por W com centro S	
42	Ponto A_1	Ponto de interseção de f_1, l	
43	Ponto B_1	Ponto de interseção de e_1, l	
44	Segmento g_1	Segmento [B_1, A_1]	
45	Reta h_1	Reta passando por Z e perpendicular a g_1	
46	Ponto C_1	Ponto de interseção de f_1, g_1	

47	Reta i_1	Reta passando por C_1 e perpendicular a g_1	
48	Círculo k_1	Círculo por MOVA com centro Z	
49	Ponto D_1	Ponto de interseção de k_1, h_1	
50	Reta j_1	Reta passando por D_1 e paralela a g_1	
51	Ponto E_1	Ponto de interseção de i_1, j_1	
52	Segmento l_1	Segmento [D_1, Z]	
53	Segmento m_1	Segmento [E_1, C_1]	
54	Ponto M		
55	Ponto F_1		
56	Círculo p_1	Círculo por F_1 com centro M	