

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

INSTABILIDADES ELETROSTÁTICAS  
OCASIONADAS POR FEIXES DE ÍONS EM PLASMAS

Eda Homrich da Jornada

Tese realizada sob a orientação do Dr. John D. Gaffey Jr. e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento final dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

\* Trabalho parcialmente financiado pelas seguintes instituições: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP).

Porto Alegre  
1979

A meus pais

A meu esposo e aos meus filhos

## AGRADECIMENTOS

A meu orientador, Dr. John D. Gaffey Jr, meus agradecimentos pelos ensinamentos recebidos, pelas sugestões e pela as sistência dedicada em todas as fases deste trabalho.

A Dra. Maria Z. Caponi, minha gratidão pelos conhecimentos transmitidos e pelas valiosas discussões realizadas durante o andamento deste trabalho.

Ao Prof. Theodor A.J. Maris e ao Prof. Darcy Dillenburg, desejo expressar meu reconhecimento e gratidão pela implantação e apoio dedicado ao grupo de Física de Plasma deste Instituto. Agradeço, também, ao Prof. Darcy Dillenburg, pela paciência, pe las discussões e sugestões feitas na leitura desta Tese.

Agradeço,

a Ruth S. Schneider, pelo constante estímulo recebido;

a Maria Cecilia do Amaral, pela eficiente e cuidadosa tarefa de datilografia;

a Zuleika Berto, pelo auxílio na classificação das referências bibliográficas;

a todos os colegas e amigos que, de um modo ou de outro contribuiram para que este trabalho pudesse ser realizado.

## RESUMO

Analisa-se as instabilidades eletrostáticas ocasionadas pela injeção de um feixe de íons num plasma magnetizado, infinito, homogêneo e sem colisões, como um possível mecanismo de aquecimento do plasma. A direção do feixe é suposta formar um ângulo arbitrário com relação ao campo magnético. As razões de crescimento das instabilidades são calculadas para diversas frequências naturais de oscilação do plasma, discutindo-se as restrições que essas instabilidades impõem ao ângulo de injeção e à densidade do feixe. Para frequências próximas à frequência híbrida inferior, analisam-se os modos íon-íon transversal ao campo e a instabilidade das duas correntes modificada. Para frequências na região da frequência acústica iônica, consideram-se quatro casos limites do modo íon-acústico, com distintas características. Estuda-se também um modo íon-acústico modificado, cujas ondas, para parâmetros adequadamente escolhidos, possuem velocidade de fase comparável a das ondas acústicas lentas.

As equações dos momentos da teoria quasilinear são usadas para o cálculo da variação temporal do momentum e da energia térmica de cada componente do plasma, na presença das instabilidades. Os íons do plasma são aquecidos pela maior parte das ondas, exceto as feitas às instabilidades no modo das duas correntes modificado e às instabilidades em um dos modos íon-acústicos.

## ABSTRACT

Electrostatic instabilities excited by an energetic ion beam injected at an arbitrary angle with respect to the magnetic field in a infinite, homogeneous, collisionless plasma are examined as a possible plasma heating mechanism. The instability growth rates are calculated for several natural oscillation frequencies of the plasma, and threshold conditions on the angle of injection and on the beam density are derived for the instabilities. For frequencies near the lower-hybrid frequency, the cross-field ion-ion mode and the modified two-stream instability are analyzed. When the frequency is close to the ion-acoustic frequency, four limiting cases of the ion-acoustic mode, with distinct characteristics, are considered. A modified ion-acoustic mode, which propagates with a phase velocity comparable to the phase velocity of the slow acoustic waves, for appropriately chosen parameters, is also derived.

The quasilinear moment equations are used to calculate the time evolution of the momentum and the thermal energy of each plasma component in the presence of the instabilities. The background ions are heated by most of the instabilities, exceptions being the modified two-stream mode and one of the ion-acoustic modes.

## Í N D I C E

I - INTRODUÇÃO	1
II - RELAÇÃO DE DISPERSÃO	8
III - PLASMA FRIO	11
IV - ÍONS DO PLASMA DE FUNDO E DO FEIXE FRIOS, ELÉTRONS QUENTES	26
V - ÍONS DO PLASMA DE FUNDO FRIOS, ELÉTRONS E ÍONS DO FEIXE QUENTES	56
VI - ÍONS DO FEIXE FRIOS, ELÉTRONS E ÍONS DO PLASMA QUENTES	77
VII - DISCUSSÃO E CONCLUSÕES	90
APÊNDICE A	106
APÊNDICE B	114
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123

## I - INTRODUÇÃO

O estudo de instabilidades em plasmas é motivado pela sua importância tanto em problemas de astrofísica como em problemas relacionados com plasmas de laboratório. No presente trabalho, investigamos o surgimento de instabilidades num plasma ocasionado pela injeção de um feixe neutro no mesmo, cujo interesse em experiências ligadas a fusão termonuclear controlada deve-se a possibilidade de obtenção de uma forma de aquecimento adicional necessário para que o plasma atinja as temperaturas de fusão ( $\sim 10^8$  K). O aquecimento ôhmico é um método simples e eficiente de gerar plasmas relativamente quentes e densos. Entretanto a quantidade de energia térmica obtida através deste processo é limitada pela resistividade do plasma, que decresce a altas temperaturas, bem como pela corrente que o plasma pode suportar sem tornar-se instável. Assim, outros mecanismos de aquecimento são necessários para elevar a temperatura do plasma aos valores requeridos para a ignição. No momento, o método de aquecimento através de microinstabilidades ocasionadas pela injeção de feixes neutros de isótopos atômicos de hidrogênio é o que tem produzido melhores resultados em reatores do tipo tokamak. Em algumas situações especiais que requerem o emprego de feixes mais intensos e com maiores energias do que as obtidas para os feixes neutros ( $\sim 150$  keV), tem sido utilizado feixes de íons negativos (S77), porém ainda não se dispõem de suficientes dados que permitam assegurar o sucesso desta técnica. Além disso, recentemente foi desenvolvida nova técnica de produção de feixes neutros intensos (O77). Aquecimento devido à compressão magnética do plasma e o gerado por mi

croonda na frequência de cíclotron dos elétrons constituem os outros dois métodos aplicados nos reatores do tipo tokamaks. Estes assuntos são amplamente discutidos nos artigos de revisão de Steiner (S75) de Jassby (J77) de Murakami e Eubank (M78) e no de Furth (F79). A aplicação do estudo de instabilidades provocadas pela injeção de um feixe no plasma a problemas de física do espaço é abordada por Montgomery et alii (M75). No entanto, em vista do atual interesse em estudos de obtenção da fusão termonuclear controlada, as hipóteses feitas neste trabalho, bem como as discussões baseadas em dados numéricos, utilizam condições e parâmetros típicos encontrados em reatores de fusão do tipo tokamak com injeção de feixes neutros (E76a, E76b). Além disso, como esse feixe é rapidamente ionizado através das colisões com as partículas do plasma utilizamos a expressão "feixe de íons" quando nos referimos a propagação do mesmo no plasma.

A frequência de oscilação  $\omega_r$  e a razão de crescimento  $\gamma$  das ondas são calculadas de uma relação de dispersão obtida da equação de Vlasov linearizada. Isto significa que os nossos resultados são válidos em uma escala de tempo  $\tau \sim 1/\gamma$  muito menor do que o intervalo de tempo necessário para que ocorram duas colisões sucessivas entre as partículas do plasma, o que justifica o emprego da equação de Vlasov, isto é, da equação de Boltzmann sem o termo de colisões. A aproximação linear desta equação significa que as instabilidades causam apenas uma pequena perturbação no estado de equilíbrio do plasma, estado este caracterizado por uma função distribuição de equilíbrio  $f_0$ . Como a equação de Vlasov admite um grande número de soluções de equilíbrio, a escolha de uma particular distribuição  $f_0$  deve ser feita em termos

do conhecimento da forma como o plasma foi preparado. Em particular, a distribuição de Maxwell-Boltzmann que empregamos, é uma das possíveis soluções de equilíbrio e descreve corretamente o estado de um plasma no qual as partículas do mesmo realizam muitas colisões antes de atingir o equilíbrio. Para que os resultados da teoria linearizada de Vlasov sejam válidas é necessário que  $\gamma \ll \omega_r$ , isto é, o intervalo de tempo  $\gamma^{-1}$  associado com o crescimento das instabilidades deve ser longo comparado aos períodos característicos de oscilação  $2\pi/\omega_r$  do plasma. Neste caso  $\omega_r$  é uma das frequências de oscilação natural do sistema.

Supomos também que o plasma é homogêneo e uniformemente magnetizado, isto é,  $\vec{B} = B_0 \vec{z}$ , o que significa haver isotropia do plasma de fundo na direção perpendicular ao campo magnético. Assim, como a direção na qual o feixe é injetado no plasma é considerada arbitrária, as direções do campo e do feixe definem um plano no qual a anisotropia da função distribuição ocasiona o surgimento das instabilidades.

O plasma é suposto infinito ou seja, as dimensões do plasma  $R_{\text{plasma}}$  são consideradas muito maiores do que os comprimentos de onda típicos das perturbações e as partículas do plasma com velocidades térmicas são supostas moverem-se num período  $2\pi\omega_r^{-1}$  um intervalo de comprimento pequeno comparado com o comprimento da onda das perturbações. Assim, os resultados obtidos satisfazem a condição  $R_{\text{plasma}} \gg k^{-1} \gg \lambda_{Dj}$ , onde  $\lambda_{Dj}$  é o comprimento de Debye das partículas  $j$  com velocidades térmicas  $v_{tj}$ . A condição  $k\lambda_{Dj} \ll 1$ , implica em que os resultados obtidos da descrição microscópica de Vlasov do sistema, para um plasma frio, coincidem com os resultados obtidos através da teoria de fluidos quan

do  $\gamma \ll \omega_p$ .

As instabilidades que analisamos são de natureza eletrostática, isto é, estão associadas com o crescimento de acumulação de carga no plasma. Não consideramos instabilidades eletromagnéticas porque as razões de crescimento destas são menores por um fator  $v/c$  ( $v$  é uma velocidade característica do plasma e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo) do que as razões de crescimento eletrostáticas típicas em plasmas cujo parâmetro  $\beta \ll 1$ .

Obtivemos razões de crescimento de instabilidades para diversas frequências naturais de oscilação do plasma. As instabilidades associadas a uma dada frequência dizemos corresponder a um dado modo de propagação. Nesse sentido, estudamos sete modos de propagação. Fazendo a hipótese de plasma frio, obtivemos as instabilidades íon-íon transversais ao campo e o das duas correntes modificado, para as quais a direção de propagação das ondas ocorre numa direção quase perpendicular ao campo magnético. No modo íon-íon transversal ao campo o feixe interage predominantemente com os íons do plasma, enquanto que no outro modo, ele interage principalmente com os elétrons. Supondo os elétrons do plasma quentes e os íons do feixe e do plasma frios, estudamos dois modos acústicos denominados de não ressonante e ressonante pois no primeiro deles o termo dos elétrons ressonantes com as ondas foi desprezado na relação de dispersão, tendo o mesmo termo sido incluído na análise do modo ressonante. No modo íon-acústico não ressonante o feixe transfere quase todo o seu momentum aos íons do plasma e a direção de propagação das ondas depende do valor relativo da densidade do feixe e da densidade do plasma. No modo íon-acústico ressonante as ondas propagam-se quase perpendicular

mente ao campo magnético e o feixe interage predominantemente com os elétrons. Considerando os íons do plasma frios e os elétrons e íons do feixe quentes, obtivemos o modo íon-feixe ressonante, no qual a razão entre a temperatura do feixe e a temperatura dos elétrons é muito pequena, menor do que a razão entre a densidade do feixe e a densidade das partículas do plasma; e o modo íon-acústico, para o qual o valor da mesma razão de temperatura é maior do que a mesma razão de densidades. Em ambos os modos consideramos as ondas propagando-se paralelamente ao campo magnético. No modo íon-feixe ressonante, a maior taxa de transferência de momentum ocorre entre o feixe e os íons do plasma, enquanto que no modo íon-acústico a mesma ocorre predominantemente entre o feixe e os elétrons. Nesses dois modos, os termos ressonantes dos íons do feixe e dos elétrons e íons do plasma com as ondas são considerados no cálculo da razão de crescimento das instabilidades. A hipótese de que os íons do feixe são frios e os elétrons e íons do plasma são quentes conduziu a um modo que denominamos de íon-acústico modificado, para o qual a direção de propagação das ondas ocorre numa direção quase perpendicular ao campo magnético. Neste modo os termos dos elétrons e íons do plasma e dos íons do feixe ressonantes com as ondas foram incluídos no cálculo da razão de crescimento das instabilidades. A quantidade de momentum dos íons do feixe que é transferida às partículas do plasma de fundo depende da razão inicial entre a temperatura dos elétrons e a temperatura dos íons do plasma.

A modificação nas propriedades macroscópicas do plasma como o momentum e a energia de suas partículas constituintes, ocasionada pelo surgimento das instabilidades é calculada, para cada

modo, usando a teoria quasilinear, na qual a função distribuição  $f_0$  é suposta variar lentamente no tempo. Esta hipótese permite que se utilizem os resultados de aproximação linear da equação de Vlasov em escalas de tempo pequenas, contadas a partir do início do aparecimento das instabilidades. Os resultados assim obtidos fornecem dados que nos possibilitam propor uma evolução das quantidades mensuráveis do plasma, além da importância das diversas instabilidades como um método de aquecimento do mesmo.

A apresentação dos assuntos que constituem o objetivo deste trabalho foi organizado da seguinte forma:

No Capítulo II apresentamos as hipóteses gerais que fizemos e baseadas nestas, escrevemos a relação de dispersão para as instabilidades eletrostáticas, da qual derivam-se todos os modos discutidos nos capítulos seguintes.

No Capítulo III, usando as aproximações compatíveis à hipótese de plasma e feixe frios, analisamos as instabilidades no modo  $\bar{\omega}$ - $\bar{\omega}$  transversal ao campo e as no modo das duas correntes modificado.

No Capítulo IV as instabilidades nos modos  $\bar{\omega}$ -acústico não ressonante e ressonante são obtidas através de aproximações adequadas às hipóteses de serem os elétrons do plasma quentes e de serem frios os íons do plasma e os íons do feixe.

No Capítulo V, supondo que os elétrons e íons do feixe são quentes e que os íons do plasma são frios, estudamos as instabilidades  $\bar{\omega}$ -feixe ressonante e  $\bar{\omega}$ -acústica.

No Capítulo VI é analisada a instabilidade no modo  $\bar{\omega}$ -acústico modificado, obtida da suposição de que os íons do feixe são frios, enquanto que as partículas que constituem o plasma

de fundo são quentes.

No Capítulo VII, o resumo e as discussões dos resultados obtidos são apresentados.

No Apêndice A, são dados os detalhes dos cálculos utilizados na obtenção da relação de dispersão usada no Capítulo II.

No Apêndice B, usando a teoria quasilinear, são obtidas as equações que fornecem a evolução temporal do momentum e da energia cinética de cada componente do plasma.

## II - RELAÇÃO DE DISPERSÃO

Consideremos um plasma de Vlasov magnetizado, infinito e homogêneo, constituído de elétrons e íons de fundo em repouso, através do qual se move um feixe de íons com uma velocidade  $\vec{v}_b$  e que forma um ângulo  $\theta$  com relação às linhas do campo. O propósito deste capítulo é o de escrever a relação de dispersão eletrostática para ondas que se propaguem neste plasma num ângulo  $\pi/2 - \delta$  relativamente ao campo magnético  $\vec{B}$ , frente as seguintes suposições:

a) a direção  $\hat{z}$  é tomada ao longo do campo magnético uniforme  $\vec{B}$ ;

b) as três componentes do plasma possuem função distribuição de velocidades de Maxwell;

c)  $\Omega_b \approx \Omega_i \ll \omega \ll \Omega_e$  e  $k_{\perp} r_e \ll 1 \ll k_{\perp} r_i, k_{\perp} r_b$ , onde  $\Omega_j = |q_j| B_0 / m_j c$  e  $r_j = (2T_j / m_j)^{1/2} / \Omega_j$  são respectivamente a frequência de ciclotron e o raio de Larmor da  $j$ -ésima ( $j = e, i, b$ ) componente do plasma,  $\omega$  a frequência da onda e  $k_{\perp}$  a componente do vetor de onda  $\vec{k}$  perpendicular ao campo magnético. Portanto os elétrons são supostos fortemente magnetizados, enquanto que os íons não são efetivamente afetados pelo campo magnético.

d)  $v_{ti} < v_b < v_{te}$ , onde  $v_{tj} = (2T_j / m_j)^{1/2}$  é a velocidade térmica da  $j$ -ésima componente do plasma e  $T_j$  a temperatura associada com a largura da função distribuição de velocidade  $f_{0j}$ ;

e) as três espécies do plasma apresentam carga unitária. Assim, usando a condição de quasineutralidade,  $n_e = n_i + n_b$ , onde  $n_j$  é a densidade de partículas da  $j$ -ésima componente do plasma.

Levando em consideração as suposições acima, a relação de dispersão que descreve as propriedades dielétricas deste meio é fornecido pela expressão (ver Apêndice A),

$$\begin{aligned}
 D(\vec{k}, \omega) &= 1 + \sum_j \chi_j(\vec{k}, \omega) \\
 &= 1 + \frac{k_{\perp}^2 \omega_{pe}^2}{k^2 \Omega_e^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{te}^2} Z'\left(\frac{\omega}{k_{\parallel} v_{te}}\right) \\
 &\quad - \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{ti}^2} Z'\left(\frac{\omega}{k v_{ti}}\right) - \frac{\omega_{pb}^2}{k^2 v_{tb}^2} Z'\left(\frac{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_b}{k v_{tb}}\right) = 0 \quad (\text{II.1})
 \end{aligned}$$

onde  $\chi_j(\vec{k}, \omega)/4\pi$  é a polarizabilidade associada à  $j$ -ésima componente do plasma,  $Z'(z)$  é a derivada da função dispersão de plasma  $Z$  (F61),  $\omega_{pj} = (4\pi n_j q_j^2/m_j)^{1/2}$  a frequência de plasma da  $j$ -ésima componente do plasma,  $k_{\parallel}$  a projeção do vetor de onda  $\vec{k}$  na direção do campo magnético.

Nos capítulos seguintes faremos uma análise das instabilidades que ocorrem nesse plasma devido à injeção do feixe, fazendo hipóteses de serem frias ou quentes as componentes do plasma. Por componente fria ou quente entende-se componentes cujas partículas possuem distribuição de velocidades tal que a velocidade térmica das mesmas é muito menor ou muito maior, respectivamente, do que a velocidade de fase das ondas. Essas hipóteses permitem realizar uma investigação analítica de possíveis modos de propagação de ondas que satisfazem a relação de dispersão (II.1), uma vez que podemos substituir  $Z$  por sua expansão para grande ou pequeno argumento, no caso de componente fria ou quente, respectivamente, simplificando consideravelmente a relação de disper-

são. Tais expansões são dadas por,

$$Z(z) \approx i\pi^{1/2} e^{-z^2} - z^{-1}(1 + (2z^2)^{-1} + 3(4z^4)^{-1} + \dots) , \quad (\text{II.2})$$

para  $|z| \gg 1$  ,

$$Z(z) \approx i\pi^{1/2} e^{-z^2} - 2z(1 - 2z^2/3 + 4z^4/15 - \dots) , \quad (\text{II.3})$$

para  $|z| \ll 1$  .

Os termos exponenciais que figuram nas expansões (II.2) e (II.3) dão origem aos termos de amortecimento ou crescimento de Landau. Referem-se às partículas ressonantes, isto é, aquelas que estão em fase com a onda. Sua magnitude é usualmente desprezível em relação aos demais termos da relação de dispersão quando fazemos a hipótese de componente fria.

Além das simplificações acima mencionadas, estudaremos apenas ondas que se propaguem no plano  $\vec{B}$ ,  $\vec{v}_b$  conforme Figura II.1.

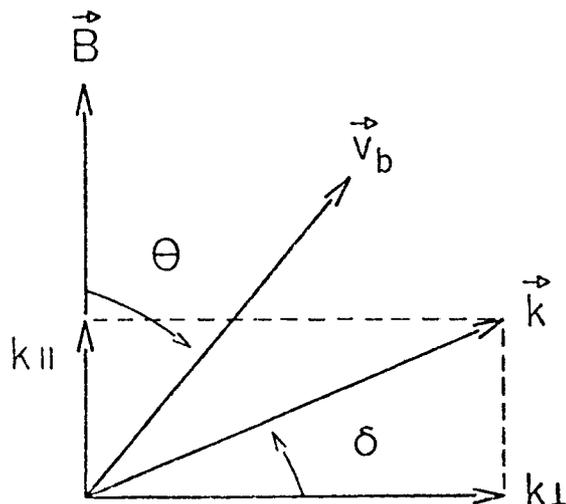


Figura II.1 - A figura mostra a geometria considerada.

## III - PLASMA FRIO

Neste capítulo estudaremos as instabilidades que surgem no plasma fazendo a suposição de que tanto as partículas de fundo como os íons do feixe são frios. Conforme vimos no capítulo anterior, esta hipótese permite-nos usar, para cada componente, a expansão (II.2) para a função dispersão de plasma  $Z$ . Mantendo apenas o termo de 1.<sup>a</sup> ordem na expansão, desprezando o termo ressonante onda-partícula e calculando a derivada a relação ao argumento da função, obtemos para a relação de dispersão (II.1),

$$D(\vec{k}, \omega) = 1 + \frac{k_{\perp}^2 \omega_{pe}^2}{k^2 \Omega_e^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{pi}^2} \right) - \frac{\omega_{pb}^2}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_b)^2} = 0, \quad (\text{III.1})$$

onde  $\bar{\omega}_{pe} = \omega_{pe} \sin \delta$ . A contribuição de cada componente à função dielétrica total  $D(\vec{k}, \omega)$  é dada por:

$$\chi_e = \frac{k_{\perp}^2 \omega_{pe}^2}{k^2 \Omega_e^2} - \frac{\bar{\omega}_{pe}^2}{\omega^2}, \quad (\text{III.2a})$$

$$\chi_i = -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}, \quad (\text{III.2b})$$

$$\chi_b = -\frac{\omega_{pb}^2}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_b)^2}. \quad (\text{III.2c})$$

Estamos interessados em determinar quais ondas apresentam uma razão de crescimento positiva, isto é, quais ondas de frequência  $\omega = \omega_r + i\gamma$ , onde  $\omega_r = \text{Re}\omega$  e  $\gamma = \text{Im}\omega$  possuem  $\gamma > 0$ . Isto se verifica quando  $\omega \leq \vec{k} \cdot \vec{v}_b$ , pois nesta região de velocidades a de

rivada da função distribuição total do plasma apresenta uma inclinação positiva (K73). Em vista disso, escrevemos

$$\omega = \vec{k} \cdot \vec{v}_b + \delta\omega \quad ,$$

$$\delta\omega = \delta\omega_r + i\gamma \quad ,$$

sendo  $|\delta\omega| \ll \vec{k} \cdot \vec{v}_b$ . Desprezando termos de alta ordem em  $(\delta\omega/\vec{k} \cdot \vec{v}_b)$ , obtemos para (III.1),

$$2(\omega_{pi}^2 + \bar{\omega}_{pe}^2) \left( \frac{\delta\omega}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right)^3 + \left[ (\vec{k} \cdot \vec{v}_b)^2 \left( 1 + \frac{k_{\perp}^2 \omega_{pe}^2}{k^2 \Omega_e^2} \right) - (\omega_{pi}^2 + \bar{\omega}_{pe}^2) \right] \left( \frac{\delta\omega}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right)^2 = \omega_{pb}^2 \quad (III.3)$$

A equação (III.3) mostra que a maior razão de crescimento da onda ocorre quando

$$\vec{k} \cdot \vec{v}_b = (\omega_{pi}^2 + \bar{\omega}_{pe}^2)^{1/2} (1 + \omega_{pe}^2 \cos^2 \delta / \Omega_e^2)^{-1/2} \quad . \quad (III.4)$$

Neste caso, a solução da (III.3) é dada por

$$\omega_r = \vec{k} \cdot \vec{v}_b \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{n_b}{2n_i} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pi}^2 + \bar{\omega}_{pe}^2} \right)^{1/3} \right\} \quad , \quad (III.5)$$

$$\gamma = \frac{3^{1/2} \vec{k} \cdot \vec{v}_b}{2} \left\{ \frac{n_b}{2n_i} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pi}^2 + \bar{\omega}_{pe}^2} \right\}^{1/3} \quad , \quad (III.6)$$

isto é, os modos mais instáveis propagam-se paralelamente ao feito ( $\theta + \delta = \pi/2$ ).

É interessante observarmos que, para propagação de onda aproximadamente perpendicular ao campo magnético temos  $\bar{\omega}_{pe}^2 \ll \omega_{pi}^2$ . Nesta situação, as expressões (III.4) - (III.6) são as obtidas por Gaffey (G76) para o modo ion-ion transversal ao campo (cross-field ion-ion mode), ou seja,

$$(\vec{k} \cdot \vec{v}_b)^{ii} = \omega_{pi} (1 + \omega_{pe}^2 \cos^2 \delta / \Omega_e^2)^{-1/2}, \quad (\text{III.4a})$$

$$\omega_r^{ii} = (\vec{k} \cdot \vec{v}_b)^{ii} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} \right\}, \quad (\text{III.5a})$$

$$\gamma^{ii} = \frac{3^{1/2} (k \cdot v_b)^{ii}}{2} \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3}. \quad (\text{III.6a})$$

Outra situação de interesse é obtida para propagação de onda menos perpendicular à direção do campo magnético, quando  $\bar{\omega}_{pe}^2 \gg \omega_{pi}^2$ . Neste limite, as expressões (III.4) - (III.6) reduzem-se a

$$(\vec{k} \cdot \vec{v}_b)^{mts} = \bar{\omega}_{pe} (1 + \omega_{pe}^2 \cos^2 \delta / \Omega_e^2)^{-1/2}, \quad (\text{III.4b})$$

$$\omega_r^{mts} = (\vec{k} \cdot \vec{v}_b)^{mts} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{n_b}{2n_i} \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} \right\}, \quad (\text{III.5b})$$

$$\gamma^{mts} = \frac{3^{1/2} (k \cdot v_b)^{mts}}{2} \left\{ \frac{n_b}{2n_i} \frac{m_e}{m_i} \right\}^{1/3}. \quad (\text{III.6b})$$

Ao modo (III.4b) - (III.6b) damos o nome de modo das duas correntes modificado (modified two-stream mode). Um modo se

melhante a esse foi analisado por Buneman (B59) e por Fried e Wong (F66) num plasma não magnetizado.

Como os possíveis valores para os ângulos  $\delta$  das ondas no modo das duas correntes modificado são sempre superiores aos valores para os ângulos  $\delta$  das ondas no modo íon-íon transversal ao campo ( $\delta^{mts} > \delta^{ii}$ ), temos  $(\vec{k} \cdot \vec{v}_b)^{ii} < (\vec{k} \cdot \vec{v}_b)^{mts}$ . Dessa forma, a razão de crescimento das ondas no modo das duas correntes modificado pode ser da mesma ordem que a razão de crescimento  $\gamma^{ii}$  do modo íon-íon transversal ao campo.

A ocorrência dos modos (III.4) - (III.6) impõe certas restrições sobre a direção de propagação do feixe, temperatura e densidade do plasma, que discutimos a seguir. Esses modos foram obtidos da relação de dispersão (II.1) supondo,

a) elétrons frios, ou seja,

$$\frac{\omega}{k_{||} v_{te}} \approx \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_b}{k_{||} v_{te}} \gg 1 \quad ,$$

isto é,

$$\frac{\text{sen}(\theta + \delta)}{\text{sen} \delta} > \frac{v_{te}}{v_b} > 1 \quad , \quad (\text{III.7a})$$

que impõe uma restrição sobre o ângulo de injeção  $\theta$  do feixe para cada direção de propagação  $\delta$  da onda. Ademais, a expressão (III.7a) mostra que não ocorrem instabilidades que se propaguem exatamente na direção do campo magnético, uma vez que a relação não fica satisfeita para  $\delta = \pi/2$ . Quando as ondas se propagam na direção do feixe ( $\theta + \delta = \pi/2$ ), da restrição (III.7a) e das condi

ções  $\bar{\omega}_{pe}^2 \ll \omega_{pi}^2$  ou  $\bar{\omega}_{pe}^2 \gg \omega_{pi}^2$ , obtemos  $\text{sen} \delta^{ii} < v_b/v_{te}$  ou  $\text{sen} \delta^{ii} < (m_e/m_i)^{1/2}$  para o modo íon-íon transversal ao campo e  $v_b/v_{te} < \text{sen} \delta^{mts} < (m_e/m_i)^{1/2}$  para o modo das duas correntes modificado. Para o valor típico  $v_b/v_{te} = 0,12$  e considerando  $\theta + \delta = \pi/2$ , temos,

$$\delta^{ii} < 1,34^\circ$$

e

$$1,34^\circ < \delta^{mts} < 6,89^\circ .$$

Ambos os modos propagam-se quase perpendicularmente ao campo magnético ( $k_\perp \gg k_\parallel$ ).

b) íons frios,

$$\frac{\omega}{kv_{ti}} \approx \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_b}{kv_{ti}} = \text{sen}(\theta + \delta) \frac{v_b \omega_{pe}}{v_{te} \omega_{pi}} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{1/2} \gg 1 ,$$

isto é,

$$\left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{1/2} \gg \frac{\omega_{pi} v_{te}}{\omega_{pe} v_b} \text{cosec}(\theta + \delta) , \quad (\text{III.7b})$$

que impõe uma restrição sobre a razão de temperaturas das partículas de fundo para cada ângulo de injeção  $\theta$  do feixe e direção de propagação  $\delta$  da onda. Concluimos também que a temperatura  $T_e$  dos elétrons deve aumentar em relação a temperatura  $T_i$  dos íons, a medida que nos afastamos da condição  $\theta + \delta = \pi/2$ , relativa aos modos mais instáveis, sendo que a razão  $T_e/T_i$  torna-se muito grande para  $\theta + \delta \approx 0, \pi$  ( $0 < \theta + \delta < \pi$ ). Quando  $(\theta + \delta) = \pi/2$  e  $v_b/v_{te} = 0,12$ ,

a restrição (III.3b) fornece a condição  $(T_e/T_i)^{1/2} \gg 0,19$  para ambos os modos.

c) Íons do feixe frios,

$$\frac{|\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_b|}{kv_{tb}} = \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_b}{kv_{tb}} \left( \frac{n_b}{2n_i} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pi}^2 + \bar{\omega}_{pe}^2} \right)^{1/3} \gg 1 ,$$

que fornece a seguinte condição sobre a densidade das partículas do feixe em relação a densidade dos íons do plasma de fundo,

$$\left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} \gg \text{cosec}(\theta + \delta) \frac{v_{te} \omega_{pi}}{v_b \bar{\omega}_{pe}} \left( \frac{T_b}{T_e} \right)^{1/2} \left( \frac{\omega_{pi}^2 + \bar{\omega}_{pe}^2}{\omega_{pi}^2} \right)^{1/3} . \quad (\text{III.7c})$$

Da condição  $|\delta\omega| \ll \vec{k} \cdot \vec{v}_b$  temos ainda,

$$\frac{n_b}{2n_i} \ll \frac{\omega_{pi}^2 + \bar{\omega}_{pe}^2}{\omega_{pi}^2} . \quad (\text{III.7d})$$

Para o modo íon-íon transversal ao campo e para o modo das duas correntes modificado, as condições (III.7c) e (III.7d) impõem sobre as razões das densidades as seguintes restrições,

$$1 \gg \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)_{ii}^{1/3} \gg \left( \frac{T_b m_e}{T_e m_i} \right)^{1/2} \frac{v_{te}}{v_b} \text{cosec}(\theta + \delta) , \quad (\text{III.7e})$$

$$\left( \frac{\omega_{pe} \text{sen} \delta}{\omega_{pi}} \right)^{2/3} \gg 1 \gg \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)_{mts}^{1/3} \gg \left( \frac{T_b}{T_e} \right)^{1/2} \left( \frac{\omega_{pi} \text{sen}^2 \delta}{\omega_{pe}} \right)^{1/3} \frac{v_{te}}{v_b} \text{cosec}(\theta + \delta) .$$

(III.7f)

Assim, para  $\theta + \delta = \pi/2$  e  $v_b/v_{te} = 0,12$ , obtemos para a razão de temperaturas  $T_b/T_e$  as restrições,

$$\left(\frac{T_b}{T_e}\right)^{1/2} \ll 5,2 \left(\frac{n_b}{2n_i}\right)_{ii}^{1/3}$$

para o modo ãon-ãon transversal ao campo e

$$\left(\frac{T_b}{T_e}\right)^{1/2} \ll 5,2$$

para o modo das duas correntes modificado. Mesmo para uma direção  $(\theta + \delta)$  arbitrãria, o valor para a razão  $T_b/T_e$  requerida no modo ãon-ãon transversal ao campo ã sempre inferior ao valor da mesma razão no modo das duas correntes modificado, pois a razão  $(T_b/T_e)_{ii}/(T_b/T_e)_{mts}$  ã da ordem de  $(n_b/2n_i)^{1/3}$ .

A ocorrẽncia de instabilidades no plasma ocasiona uma variaãõ na funãõ distribuiãõ do mesmo. Esta variaãõ ã respon sãvel por alterações temporais nas propriedades macroscõpicas do plasma, isto ã, propriedades mẽdias do plasma tais como o momen tum e a energia do sistema. O fato de existir um grande interes se no cãlculo dessas quantidades ã porque atravẽs dele podemos avaliar a importãncia ou nãõ de um dado modo de propagaãõ de on da do ponto de vista de aquecimento do plasma e conseqüentemente, estabelecer que caracterĩsticas o feixe deve apresentar (tais co mo densidade e temperatura relativas as do plasma de fundo, ângu lo e velocidade de injeãõ) para que se produza o efeito deseja do. Alẽm disso, permite obter uma melhor compreensãõ do mecanis mo de interaçãõ do feixe com o plasma. Por tais razões, nosso prõ

ximo objetivo  $\bar{e}$  determinar a evoluçãõ temporal do momentum e energia t $\bar{e}$ rmica de cada componente do plasma, a medida que o feixe  $\bar{e}$  desacelerado no plasma. Usaremos para este propõsito, a teoria quasilinear ou teoria da turbul $\bar{e}$ ncia fraca. Supondo que a variaçãõ temporal da razãõ de crescimento  $\gamma(t)$  seja pequena, podemos escrever para a derivada temporal do momentum da j- $\bar{e}$ sima componente do plasma (Ap $\bar{e}$ ndice B),

$$\frac{\partial \vec{p}_j}{\partial t} = m_j n_j \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial t} = \int d\vec{k} \vec{k} \frac{\partial \epsilon_{\vec{k}}}{\partial t} \frac{\text{Im} \chi_j}{\gamma}, \quad (\text{III.8})$$

onde  $\partial \epsilon_{\vec{k}} / \partial t = 2\gamma \epsilon_{\vec{k}}$   $\bar{e}$  a derivada temporal da energia espectral das ondas e  $\vec{v}_j$  a velocidade m $\bar{e}$ dia da j- $\bar{e}$ sima componente do plasma. Tomando a parte imagin $\bar{a}$ ria das expressões (III.2), substituindo  $\partial \epsilon_{\vec{k}} / \partial t$  por  $2\gamma \epsilon_{\vec{k}}$  e usando (III.8), obtemos para as 3 componentes,

$$m_e n_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = 4 \int d\vec{k} \vec{k} \gamma \epsilon_{\vec{k}} \frac{\omega_r \bar{\omega}_{pe}^2}{(\omega_r^2 + \gamma^2)^2} \quad (\text{el $\bar{e}$ trons})$$

$$m_i n_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = 4 \int d\vec{k} \vec{k} \gamma \epsilon_{\vec{k}} \frac{\omega_r \omega_{pi}^2}{(\omega_r^2 + \gamma^2)^2} \quad (\text{i $\bar{e}$ ons})$$

$$m_b n_b \frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t} = -4 \int d\vec{k} \vec{k} \gamma \epsilon_{\vec{k}} \frac{\omega_{pb}^2 (\vec{k} \cdot \vec{v}_b - \omega_r)}{[(\omega_r - \vec{k} \cdot \vec{v}_b)^2 + \gamma^2]^2} \quad (\text{feixe})$$

Na teoria quasilinear, o momentum total do sistema  $\bar{e}$  conservado. Como na aproximaçãõ eletrost $\bar{a}$ tica as ondas n $\bar{a}$ õ trans

portam momentum, o momentum das partículas do sistema deve ser conservado. Deste modo, as expressões acima mostram que  $\omega_r$  deve ser menor do que  $\vec{k} \cdot \vec{v}_b$ , ou seja, os íons do feixe movem-se no sentido oposto ao movimento das partículas do plasma de fundo. Além disso, como estamos considerando  $\gamma(t) > 0$ , a velocidade  $\vec{v}_b(t)$  do feixe decresce no tempo.

É interessante fazer uma estimativa do momentum de cada componente do plasma transferida na direção  $\delta_o = \pi/2 - \theta$ , correspondente à situação de máxima razão de crescimento da onda. A direção de propagação  $\delta_o$  da onda que deve, evidentemente, satisfazer as relações (III.7a) - (III.7c) pode ser obtida de (III.4a) e (III.4b). Para o modo íon-íon transversal ao campo, temos

$$\delta_o^{ii} = \cos^{-1} \left\{ \Omega_e / \omega_{pe} \left[ (\omega_{pi} / kv_b)^2 - 1 \right]^{1/2} \right\} .$$

Para o modo das duas correntes modificado,

$$\delta_o^{mts} = \cos^{-1} \left\{ \left[ (\omega_{pe} / kv_b)^2 - 1 \right] / \left[ (\omega_{pe} / \Omega_e)^2 + (\omega_{pe} / kv_b)^2 \right] \right\}^{1/2} .$$

Supondo por simplicidade um espectro de ondas unidimensional,  $\epsilon_{\vec{k}} = \epsilon_k \delta(\delta - \delta_o)$ , temos

$$\frac{\partial p_e}{\partial t} = 4 \int dk k \gamma \epsilon_k \bar{\omega}_{pe}^2 \left( \frac{1 + \omega_{pe}^2 \cos^2 \delta_o / \Omega_e^2}{\omega_{pi}^2 + \bar{\omega}_{pe}^2} \right)^{3/2} , \quad (\text{III.9a})$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = 4 \int dk k \gamma \epsilon_k \omega_{pi}^2 \left( \frac{1 + \omega_{pe}^2 \cos^2 \delta_o / \Omega_e^2}{\omega_{pi}^2 + \bar{\omega}_{pe}^2} \right)^{3/2} , \quad (\text{III.9b})$$

$$\frac{\partial p_b}{\partial t} = -4 \int dk k \gamma \epsilon_k (\omega_{pi}^2 + \bar{\omega}_{pe}^2) \left( \frac{1 + \omega_{pe}^2 \cos^2 \delta_o / \Omega_e^2}{\omega_{pi}^2 + \bar{\omega}_{pe}^2} \right)^{3/2}, \quad (\text{III.9c})$$

onde usamos a aproximação  $\omega_r^2 + \gamma^2 \approx (\vec{k} \cdot \vec{v}_b)^2$  e substituímos  $\vec{k} \cdot \vec{v}_b$ ,  $\gamma$  e  $\delta\omega_r = \omega_r - \vec{k} \cdot \vec{v}_b$  pelas suas expressões dadas em (III.4), (III.5) e (III.6). De (III.9c) podemos ainda obter a evolução temporal da energia cinética média dos íons do feixe na direção  $\delta_o$ ,

$$\frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} = m_b n_b \frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t} \cdot \vec{v}_b = -4 \int dk k \gamma \epsilon_k (1 + \omega_{pe}^2 \cos^2 \delta_o / \Omega_e^2). \quad (\text{III.10})$$

A medida que a energia cinética média  $\epsilon_b$  do feixe decresce no tempo para  $\gamma > 0$ , a energia térmica das partículas do plasma, bem como a energia eletrostática das ondas aumenta. A variação no tempo da energia térmica  $W_j$  associada a  $j$ -ésima componente do plasma é dada por (Apêndice B),

$$\frac{\partial W_j}{\partial t} = \frac{3}{2} n_j \frac{\partial T_j}{\partial t} = 2 \int d\vec{k} \epsilon_k \left\{ \gamma \text{Re} \chi_j + (\omega_r - \vec{k} \cdot \vec{v}_j) \text{Im} \chi_j \right\}. \quad (\text{III.11})$$

A derivada temporal da energia térmica pode ainda ser expressa como,

$$\frac{\partial W_j}{\partial t} = \left( \frac{\partial W_j}{\partial t} \right)_{nr} + \left( \frac{\partial W_j}{\partial t} \right)_r,$$

onde os índices  $nr$  e  $r$  indicam as contribuições das partículas não ressonantes ( $|\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_j| \gg \gamma$ ) e ressonantes ( $\omega \sim \vec{k} \cdot \vec{v}_j$ ) a  $\partial W_j / \partial t$ . A variação na energia térmica devida às partículas não ressonantes é um processo reversível e pode ser descrito através da teo

ria de fluidos (hidrodinâmica). Ocorre devido ao reajuste das partículas não ressonantes sob efeito da variação na energia eletrostática das ondas. Quando  $\gamma(t)$  vai a zero,  $(\partial W_j / \partial t)_{nr} = 0$ . A variação na energia térmica devida às partículas ressonantes é um processo irreversível, no qual a energia mecânica associada com as oscilações das partículas sob a ação do potencial eletrostático da onda diminui se  $\epsilon_{\vec{k}}$  diminui. Entretanto, a contribuição das partículas ressonantes à variação de energia térmica é distinta de zero quando  $\gamma(t)$  vai a zero.

Para o caso de plasma frio que estamos considerando neste capítulo, a equação (III.11) fornece,

$$\frac{\partial W_e}{\partial t} = 2 \int d\vec{k} \gamma \epsilon_{\vec{k}} \left\{ \cos^2 \gamma \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r^2 + \gamma^2} \right\},$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} = 2 \int d\vec{k} \gamma \epsilon_{\vec{k}} \left\{ \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_r^2 + \gamma^2} \right\},$$

$$\frac{\partial W_b}{\partial t} = 2 \int d\vec{k} \gamma \epsilon_{\vec{k}} \left\{ \frac{\omega_{pb}^2}{(\omega_r - \vec{k} \cdot \vec{v}_b)^2 + \gamma^2} \right\}.$$

Da mesma forma como para o caso da variação do momento de cada componente do plasma, vamos calcular as quantidades acima para os modos mais instáveis ( $\theta + \delta_e = \pi/2$ ), supondo unidimensional o espectro de ondas  $\epsilon_{\vec{k}}$ . Novamente usando a aproximação  $\omega_r^2 + \gamma^2 \approx (\vec{k} \cdot \vec{v}_b)^2$  e substituindo  $\vec{k} \cdot \vec{v}_b$ ,  $\gamma$  e  $\delta \omega_r$  pelas expressões (III.4) - (III.6), obtemos,

$$\frac{\partial W_e}{\partial t} \approx 2 \int dk \gamma \epsilon_k \left\{ \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \cos^2 \delta_o + \frac{\bar{\omega}_{pe}^2}{\omega_{pi}^2 + \bar{\omega}_{pe}^2} (1 + \omega_{pe}^2 \cos^2 \delta_o / \Omega_e^2) \right\}, \quad (\text{III.11a})$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} \approx 2 \int dk \gamma \epsilon_k \left\{ \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pi}^2 + \bar{\omega}_{pe}^2} (1 + \omega_{pe}^2 \cos^2 \delta_o / \Omega_e^2) \right\}, \quad (\text{III.11b})$$

$$\frac{\partial W_b}{\partial t} \approx 2 \int dk \gamma \epsilon_k \left\{ \frac{\omega_{pb}^2 (1 + \omega_{pe}^2 \cos^2 \delta_o / \Omega_e^2)}{\omega_{pi}^2 + \bar{\omega}_{pe}^2} \left( \frac{n_b}{2n_i} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pi}^2 + \bar{\omega}_{pe}^2} \right)^{-2/3} \right\}. \quad (\text{III.11c})$$

Particularizando as expressões (III.9a) - (III.9c) e (III.11a) - (III.11c) para os dois modos limites  $\bar{\omega}_{pe}^2 \ll \omega_{pi}^2$  e  $\omega_{pi}^2 \ll \bar{\omega}_{pe}^2$ , verificamos que, para o modo íon-íon transversal ao campo ( $\bar{\omega}_{pe}^2 \ll \omega_{pi}^2$ ),

$$1) \quad \frac{\partial p_e}{\partial t} \ll \frac{\partial p_i}{\partial t} \approx \frac{\partial p_b}{\partial t},$$

isto é, o momentum cedido pelo feixe às partículas do plasma de fundo é transferido predominantemente aos íons. Este resultado é facilmente interpretado lembrando que no modo íon-íon transversal ao campo as ondas com máxima razão de crescimento propagam-se paralelamente ao feixe ( $\delta_o + \theta = \pi/2$ ), a grandes ângulos com relação ao campo magnético ( $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$ ). Assim, a interação entre os íons de fundo e os íons do feixe é muito maior do que a interação entre os elétrons e os íons do feixe, já que os elétrons, sendo magnetizados, movem-se numa direção quase perpendicular a de propagação do feixe.

$$2) \quad \frac{\partial W_e}{\partial t} \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \cos^2 \delta_o \frac{\partial W_E}{\partial t} \approx \frac{\partial W_E}{\partial t} ,$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} \approx (1 + \omega_{pe}^2 \cos^2 \delta_o / \Omega_e^2) \frac{\partial W_E}{\partial t} \approx 2 \frac{\partial W_E}{\partial t} ,$$

$$\frac{\partial W_b}{\partial t} \approx 2^{2/3} (1 + \omega_{pe}^2 \cos^2 \delta_o / \Omega_e^2) \left( \frac{n_b}{n_i} \right)^{1/3} \frac{\partial W_E}{\partial t} \ll \frac{\partial W_E}{\partial t} ,$$

onde  $W_E = \int d\vec{k} \epsilon_{\vec{k}} \bar{\epsilon}$  é a densidade de energia eletrostática das ondas. Da relação (III.10) obtemos ainda,

$$\frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} \approx -2 \frac{\partial W_i}{\partial t} \approx -4 \frac{\partial W_E}{\partial t} .$$

Concluimos assim que,  $\bar{\epsilon}$  medida que o feixe é desacelerado através do plasma, produzindo uma instabilidade do tipo íon-íon transversal ao campo propagando-se na direção de máxima razão de crescimento, aproximadamente 25% de sua energia cinética é transferida aos elétrons sob a forma de calor, 50% aos íons de fundo sob a forma de calor e 25% ao campo das ondas. Os íons do feixe não são efetivamente aquecidos nesse modo de propagação. Convém notarmos ainda que, embora o momentum dos íons do feixe seja transferido essencialmente aos íons de fundo, isto é  $\partial p_b / \partial t \approx \partial p_i / \partial t$ , a variação temporal da energia cinética dos íons  $\partial \epsilon_i / \partial t$  é desprezível frente a variação da energia cinética dos íons do feixe  $\partial \epsilon_b / \partial t$ , porque inicialmente os íons do plasma de fundo estão em repouso ( $v_i = 0$ ).

No caso do modo das duas correntes modificado ( $\omega_{pi}^2 \ll \bar{\omega}_{pe}^2$ ) obtemos,

$$1) \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} \ll \frac{\partial p_e}{\partial t} \approx \frac{\partial p_b}{\partial t} ,$$

ou seja, os íons do feixe transferem seu momentum predominantemente aos elétrons do plasma. Também nesse caso, o resultado acima encontra uma explicação simples. A direção de propagação das ondas com máxima razão de crescimento para o modo das duas correntes modificado, coincide com a direção de injeção do feixe no plasma. Entretanto a condição  $\omega_{pi}^2 \ll \omega_{pe}^2$ , imposta sobre esse modo, permite que as ondas se propaguem a menores ângulos com relação ao campo magnético, do que as ondas no modo íon-íon transversal ao campo. Assim, como as ondas no modo das duas correntes modificado propagam-se em direções mais próximas à região onde os elétrons do plasma oscilam, a interação dos íons do feixe com os elétrons pode ser grande comparada com a interação dos íons do feixe com os íons do plasma de fundo;

$$2) \quad \frac{\partial W_e}{\partial t} \approx (1 + \omega_{pe}^2 \cos^2 \delta_o / \Omega_e^2) \frac{\partial W_E}{\partial t} \approx \frac{\partial W_E}{\partial t} ,$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} \approx (1 + \omega_{pe}^2 \cos^2 \delta_o / \Omega_e^2) \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2} \frac{\partial W_E}{\partial t} \ll \frac{\partial W_E}{\partial t} ,$$

$$\frac{\partial W_b}{\partial t} \approx 2^{2/3} (1 + \omega_{pe}^2 \cos^2 \delta_o / \Omega_e^2) \left( \frac{n_b}{n_i} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2} \right)^{1/3} \frac{\partial W_E}{\partial t} \ll \frac{\partial W_E}{\partial t} ,$$

e da expressão (III.10),

$$\frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} \approx -2 (1 + \omega_{pe}^2 \cos^2 \delta_o / \Omega_e^2) \frac{\partial W_E}{\partial t} \approx -2 \frac{\partial W_E}{\partial t} .$$

Portanto, quando o feixe atravessa o plasma produzindo ondas de máxima razão de crescimento no modo das duas correntes modificado, o decréscimo da energia cinética do feixe manifesta-se sob a forma de aquecimento dos elétrons e no acréscimo da energia eletrostática das ondas. O aquecimento dos íons do plasma de fundo e dos íons do feixe é insignificante comparada com a variação da energia térmica dos elétrons e da energia eletrostática associada às ondas. Além disso, como inicialmente os elétrons estão em repouso ( $v_e = 0$ ), a variação de sua energia cinética é pequena comparada com a variação da energia cinética do feixe ( $\partial \epsilon_e / \partial t \ll \ll \partial \epsilon_b / \partial t$ ), embora a variação do momentum das duas espécies seja comparável ( $\partial p_e / \partial t \approx \partial p_b / \partial t$ ).

## IV - ÍONS DO PLASMA DE FUNDO E DO FEIXE FRIOS, ELÊTRONS QUENTES

Vamos analisar agora quais as instabilidades que ocorrem no plasma descrito no Capítulo II, supondo que os elétrons sejam quentes e os íons frios. Nesse caso, a relação de dispersão (II.1) pode ser simplificada, usando para os elétrons a expansão (II.3) da função  $Z$  para pequeno argumento e para os íons do feixe e do plasma de fundo a expansão (II.2) relativa a grande argumento. Calculando as derivadas de  $Z$  em relação ao seu argumento e mantendo apenas os termos de primeira ordem nas expansões, obtemos,

$$\begin{aligned}
 D(\vec{k}, \omega) = & 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \cos^2 \delta + (k\lambda_{De})^{-2} \left\{ 1 + \frac{i\pi^{1/2}\omega_r}{k_{||}v_{te}} \exp\left(-\omega_r^2/k_{||}^2v_{te}^2\right) \right\} \\
 & - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{i\pi^{1/2}\omega_r}{k^3\lambda_{Di}^2v_{ti}} \exp\left(-\omega_r^2/k^2v_{ti}^2\right) - \frac{\omega_{pb}^2}{(\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}_b)^2} \\
 & + \frac{i\pi^{1/2}(\omega_r - \vec{k}\cdot\vec{v}_b)}{k^3\lambda_{Db}^2v_{tb}} \exp\left\{-\frac{(\omega_r - \vec{k}\cdot\vec{v}_b)^2}{k^2v_{tb}^2}\right\} = 0 \quad , \quad (IV.1)
 \end{aligned}$$

onde  $\lambda_{Dj} = (T_j/4\pi n_j q_j^2)^{1/2}$  é o comprimento de Debye da componente  $j$ . Assim como no capítulo anterior, desejamos estudar modos de propagação de ondas cuja razão de crescimento  $\gamma$  seja positiva, portanto, ondas de frequência  $\omega \approx \vec{k}\cdot\vec{v}_b$ . Fazendo em (IV.1) as substituições  $\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}_b = \delta\omega$ ,  $\omega_r - \vec{k}\cdot\vec{v}_b = \delta\omega_r$ , sendo  $|\delta\omega| \ll \vec{k}\cdot\vec{v}_b$  e expandindo  $\omega^{-2}$  em potências de  $\delta\omega/\vec{k}\cdot\vec{v}_b$ , somente até o termo de primeira ordem, obtemos sucessivamente,

$$\begin{aligned}
D(\vec{k}, \omega) = & 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \cos^2 \delta + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} - \left( \frac{\omega_{pi}}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right)^2 + 2 \left( \frac{\omega_{pi}}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right)^2 \left( \frac{\delta \omega}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right) \\
& - \left( \frac{\omega_{pb}}{\delta \omega} \right)^2 + i\pi^{1/2} \left\{ \frac{\omega_r \exp(-\omega_r^2/k_{||}^2 v_{te}^2)}{k^2 \lambda_{De}^2 k_{||} v_{te}} \right. \\
& \left. + \frac{\omega_r \exp(-\omega_r^2/k^2 v_{ti}^2)}{k^3 \lambda_{Di}^2 v_{ti}} + \frac{\delta \omega_r \exp(-\delta \omega_r^2/k^2 v_{tb}^2)}{k^3 \lambda_{Db}^2 v_{tb}} \right\} = 0, \quad (IV.2a)
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
D(k, \omega) \left( \frac{\delta \omega}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right)^2 = & \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \left\{ 1 + k^2 \lambda_{De}^2 \left( 1 + \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \delta}{\Omega_e^2} \right) - \left( \frac{k C_s}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right)^2 \right\} \left( \frac{\delta \omega}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right)^2 + \\
& + 2 \left( \frac{\omega_{pi}}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right)^2 \left( \frac{\delta \omega}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right)^3 - \left( \frac{\omega_{pb}}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right)^2 + i\pi^{1/2} \left\{ \frac{\omega_r \exp(-\omega_r^2/k_{||}^2 v_{te}^2)}{k^2 \lambda_{De}^2 k_{||} v_{te}} \right. \\
& \left. + \frac{\omega_r \exp(-\omega_r^2/k^2 v_{ti}^2)}{k^3 \lambda_{Di}^2 v_{ti}} + \frac{\delta \omega_r \exp(-\delta \omega_r^2/k^2 v_{tb}^2)}{k^3 \lambda_{Db}^2 v_{tb}} \right\} \left( \frac{\delta \omega}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right)^2 \approx 0, \quad (IV.2b)
\end{aligned}$$

onde  $C_s = (T_e/m_i)^{1/2} = \omega_{pi} \lambda_{De}$  é a velocidade do som iônica. Os dois primeiros termos exponenciais da parcela entre chaves contribuem para a razão de crescimento total  $\gamma$  das ondas com sinal oposto ao último termo. Esses termos dão origem ao amortecimento de Landau devido aos elétrons e íons do plasma de fundo, e ao crescimento de Landau devido aos íons do feixe, respectivamente. Dentre os diversos modos de propagação de onda que satisfazem a equação (IV.2) e possuem razão de crescimento positiva, vamos consi-

derar o ramo acústico constituído pelas ondas de frequência  $\omega_r$  da  
das por

$$\omega_r \approx \vec{k} \cdot \vec{v}_b = kC_s \left\{ 1 + k^2 \lambda_{De}^2 (1 + \omega_{pe}^2 \cos^2 \delta / \Omega_e^2) \right\}^{-1/2} \approx kC_s, \quad (\text{IV.3})$$

analisando duas situações limites:

a - Consideramos que os termos ressonantes que ocorrem em (IV.2b) sejam desprezíveis frente aos demais. Por esta razão denominamos esse modo de propagação, de modo íon-acústico não-resonante.

b - Consideramos que o termo cúbico e os termos que dão origem ao amortecimento de Landau devido aos íons e crescimento de Landau devido ao feixe sejam muito pequenos, comparados aos demais termos da expressão (IV.2b). Além disso, supomos que os íons do feixe interajam com os elétrons ressonantes e por isso denominamos tal modo de propagação de modo íon-acústico ressonante.

Por conveniência, supomos ainda que ambos os modos acima sejam ocasionados por uma injeção de feixe paralela ao campo magnético, isto é, para  $\theta = 0^\circ$ .

O modo íon-acústico não ressonante foi discutido primeiramente por Gaffey (G76). Tendo em vista as expressões (IV.2b) e (IV.3) e as hipóteses feitas acima no ítem a, a frequência  $\omega_r$  e a razão de crescimento  $\gamma$  desse modo são dadas por,

$$\omega_r^{ia} = \vec{k} \cdot \vec{v}_b \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} \right\}, \quad (\text{IV.4a})$$

$$\gamma^{ia} = \frac{3^{1/2}}{2} \vec{k} \cdot \vec{v}_b \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} . \quad (\text{IV.4b})$$

As suposições feitas no ítem b fornecem para a frequência  $\omega_r$  e a razão de crescimento  $\gamma$ , relativas ao modo íon-acústico ressonante,

$$\tilde{\omega}_r^{ia} = \vec{k} \cdot \vec{v}_b - \frac{k C_s}{\pi^{1/4}} \left( \frac{n_b v_{te}}{2n_i v_b} \right)^{1/2} \exp\left( \frac{v_b^2}{2v_{te}^2} \right) , \quad (\text{IV.5a})$$

$$\tilde{\gamma}^{ia} = \frac{k C_s}{\pi^{1/4}} \left( \frac{n_b v_{te}}{2n_i v_b} \right)^{1/2} \exp\left( \frac{v_b^2}{2v_{te}^2} \right) . \quad (\text{IV.5b})$$

A ocorrência das instabilidades descritas neste capítulo não se verifica para quaisquer valores das grandezas que caracterizam o plasma, tais como a velocidade de injeção do feixe, a densidade e a temperatura de seus componentes. Para que se propaguem ondas acústicas, essas grandezas, bem como a direção de propagação das ondas, devem satisfazer certas restrições provenientes das hipóteses que foram feitas na derivação dos modos. Inicialmente, procedemos à investigação das restrições comuns a todos os modos acústicos que satisfazem a equação (IV.2b) e cuja frequência  $\omega_r$  é dada por (IV.3).

1 - A suposição de que os elétrons sejam quentes,

$$\frac{\omega}{k_{\parallel} v_{te}} \approx \frac{k C_s}{k_{\parallel} v_{te}} \ll 1 ,$$

impõe uma restrição sobre a direção de propagação das ondas, qual

seja

$$\text{sen } \delta > \left( \frac{m_e}{2m_i} \right)^{1/2} . \quad (\text{IV.6a})$$

Assim, propagação exatamente perpendicular ao campo magnético é proibida para esses modos.

2 - A suposição de que os íons do plasma de fundo sejam frios,

$$\frac{\omega}{kv_{ti}} \approx \frac{c_s}{v_{ti}} \gg 1 ,$$

fornece a usual condição sobre a razão de temperaturas dos elétrons e dos íons do plasma de fundo, referente a um modo de propagação acústica,

$$\frac{T_e}{T_i} \gg 2 . \quad (\text{IV.6b})$$

Desejamos agora discutir que características distintas os modos acústicos não-ressonante e ressonante exibem. O motivo desta análise comparativa deve-se principalmente ao fato de que o modo não-ressonante exclui o termo de amortecimento de Landau devido aos elétrons o qual, por estarmos considerando os elétrons quentes, pode, à primeira vista, não parecer tratar-se de uma boa aproximação. Assim, vamos discutir as demais suposições feitas sobre os modos.

3 - A hipótese de que os íons do feixe sejam frios, fornece uma restrição sobre a densidade do feixe relativa à densida

de das partículas que constituem o plasma de fundo. Para o modo íon-acústico não-ressonante, em virtude das expressões (IV.4) temos,

$$\frac{|\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_b|}{k v_{tb}} \approx \frac{c_s}{v_{tb}} \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} \gg 1 ,$$

ou ainda,

$$\left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} \gg \left( \frac{2T_b}{T_e} \right)^{1/2} . \quad (\text{IV.7a})$$

Para o modo íon-acústico ressonante, a mesma hipótese, usando as expressões (IV.5), fornece,

$$\frac{|\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_b|}{k v_{tb}} \approx \frac{c_s}{\pi^{1/4} v_{tb}} \left( \frac{n_b v_{te}}{n_i v_b} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{v_b^2}{2v_{te}^2}\right) \gg 1 ,$$

ou ainda,

$$\frac{n_b}{n_i} \gg 2\pi^{1/2} \frac{T_b}{T_e} \frac{v_b}{v_{te}} \exp\left(-\frac{v_b^2}{v_{te}^2}\right) . \quad (\text{IV.7b})$$

4 - Em virtude das expressões (IV.4), a hipótese  $|\delta\omega| \ll \ll \vec{k} \cdot \vec{v}_b$  fornece para o modo não-ressonante,

$$\left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} \ll 1 . \quad (\text{IV.8a})$$

A mesma suposição, aplicada ao modo ressonante, devido

a (IV.3) e (IV.5) conduz à desigualdade.

$$\frac{n_b}{n_i} \ll \pi^{1/2} \frac{v_b}{v_{te}} \exp\left(-\frac{v_b^2}{v_{te}^2}\right), \quad (\text{IV.8b})$$

a qual, para  $v_b/v_{te} = 0,12$ , que é um típico valor obtido experimentalmente, fornece,

$$\frac{n_b}{n_i} \ll 0,2. \quad (\text{IV.8c})$$

Note-se que, fixar o valor da razão  $v_b/v_{te}$ , equivale a fixar o ângulo de propagação da onda, pois da condição  $\vec{k} \cdot \vec{v}_b \approx kC_s$ , temos que

$$1 \geq \sin\delta \approx \frac{v_{te}}{v_b} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}, \quad (\text{IV.9})$$

que é consistente com a restrição (IV.6a) para o valor da razão  $v_b/v_{te}$  acima considerado. Ademais, (IV.9) nos dá um limite inferior para a razão  $v_b/v_{te}$ ,

$$v_b/v_{te} \geq \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \approx 2,33 \times 10^{-2}. \quad (\text{IV.10})$$

Vamos considerar agora as hipóteses feitas nos itens a e b, as quais distinguem o modo não-ressonante do modo ressonante. O modo não-ressonante supõe que o termo cúbico em  $\delta\omega/\vec{k} \cdot \vec{v}_b$  é mais importante do que o termo exponencial correspondente ao amortecimento de Landau devido aos elétrons, ou seja,

$$2 \left( \frac{\omega_{pi}}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right)^2 \left| \frac{\delta\omega}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right|^3 \gg \frac{\pi^{1/2} \omega_r \exp(-\omega_r^2 / k_{||}^2 v_{te}^2)}{k^2 \lambda_{De}^2 k_{||} v_{te}} \left| \frac{\delta\omega}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right|^2 . \quad (IV.11)$$

Substituindo  $\omega_r$  por  $\vec{k} \cdot \vec{v}_b$  e usando em vista de (IV.4),  $|\delta\omega| = \vec{k} \cdot \vec{v}_b (n_b/2n_i)^{1/3}$ , obtemos

$$\left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} \gg \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{v_b}{v_{te}} \exp\left(-\frac{v_b^2}{v_{te}^2}\right) .$$

Por conveniência, vamos introduzir as notações

$$x = v_b / v_{te}$$

$$f(x) = \pi^{1/2} x e^{-x^2} .$$

Assim, a desigualdade acima, expressa em termos da função  $f(x)$  é escrita de forma compacta como,

$$\frac{n_b}{n_i} \gg \frac{f^3(x)}{4} . \quad (IV.12a)$$

Para o modo ion-acústico ressonante, a hipótese  $b$  é oposta a expressa em (IV.11), isto é, o termo cúbico em  $\delta\omega/\vec{k} \cdot \vec{v}_b$  é desprezível comparado ao termo ressonante elétron-onda. Essa su posição, juntamente com as substituições  $\omega_r \approx \vec{k} \cdot \vec{v}_b = kC_s$  e  $|\delta\omega| = 2^{1/2} \pi^{-1/4} kC_s (n_b/2n_i)^{1/2} (v_b/v_{te})^{1/2} \exp(v_b^2/2v_{te}^2)$ , obtida das relações (IV.5), fornece a restrição,

$$\frac{n_b}{n_i} \ll \frac{f^3(x)}{4} . \quad (IV.12b)$$

Assim, analisadas as distintas restrições impostas sobre os dois modos acústicos limites, obtivemos que o modo não-ressonante, usando (IV.7a), (IV.8a) e (IV.12a) deve satisfazer as desigualdades,

$$1 \gg n_b/2n_i \gg (2T_b/T_e)^{3/2} \quad , \quad (\text{IV.13a})$$

$$n_b/n_i \gg f_{nr}^3(x_{nr})/4 \quad . \quad (\text{IV.14a})$$

O modo ion-acústico ressonante, das relações (IV.7b), (IV.8b) e (IV.12b) deve satisfazer,

$$f_r(x_r) \gg n_b/n_i \gg 2(T_b/T_e)f_r(x_r) \quad , \quad (\text{IV.13b})$$

$$f_r^3(x_r)/4 \gg n_b/n_i \quad . \quad (\text{IV.14b})$$

Os índices  $nr$  e  $r$  introduzidos nas expressões acima, servem para diferenciar os valores das funções  $f(x)$  e das variáveis  $x$  relativas aos modos não-ressonante e ressonante, respectivamente. As desigualdades (IV.13a) e (IV.13b), vistas como restrições sobre a razão entre a densidade dos íons do feixe e a densidade dos íons do plasma de fundo requerem, ambas, que a temperatura  $T_b$  do feixe seja pequena comparada com a temperatura  $T_e$  dos elétrons. As restrições (IV.14a) e (IV.14b) estabelecem condições distintas sobre a razão  $v_b/v_{te}$  e conseqüentemente, em vista de (IV.9), informação sobre a direção de propagação dos dois modos. De (IV.14a) e (IV.14b), para um mesmo valor da razão  $n_b/n_i$ ,

temos que,

$$f_r(x_r) \gg f_{nr}(x_{nr}) \quad . \quad (IV.15)$$

Desta condição, vamos inicialmente expressar a relação entre as variáveis  $x_r$  e  $x_{nr}$ . Do gráfico da função  $f(x)$  em função de  $x$  (Figura IV.1), onde  $x_M = 2^{-1/2}$  indica o valor de  $x$  que maximiza  $f(x)$  e  $x_1 \approx 2,33 \times 10^{-2}$  é o mínimo valor admitido para a razão  $v_b/v_{te}$ , obtido de (IV.10), vemos que a desigualdade (IV.14) é satisfeita em duas regiões:

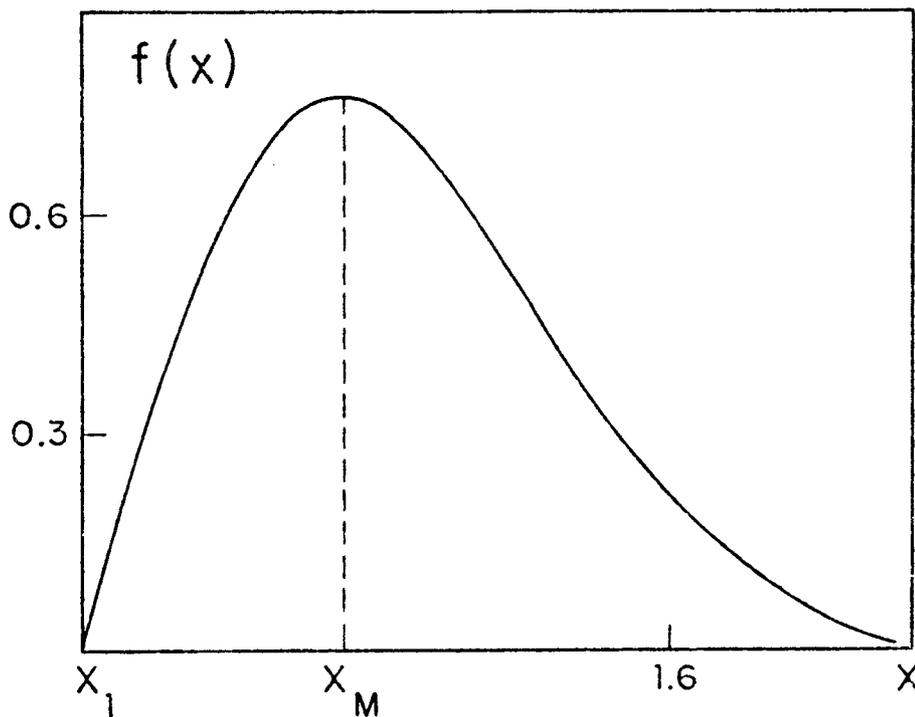


Figura IV.1 - Gráfico da função  $f(x) = \pi^{1/2} x \exp(-x^2)$  em função de  $x = v_b/v_{te}$ , ou de  $x_M = 2^{-1/2}$  é o valor de  $x$  que maximiza a função ( $f(x_M) = 0,76$ ) e  $x_1 = 0,0233$  é o mínimo valor admitido para a razão  $v_b/v_{te}$ .

1 - Quando  $x_1 < x < x_M$ , a condição (IV.14) é satisfeita se,

$$x_r \gg x_{nr} \quad . \quad (IV.15a)$$

2 - Quando  $x > x_M$ , a condição (IV.14) é satisfeita se,

$$x_r \ll x_{nr} \quad . \quad (IV.15b)$$

Entretanto, se consideramos ondas cuja razão de crescimento é máxima, a região de variação da função  $f(x)$  é aquela que corresponde a pequenos valores de  $x$ , isto é, a região indicada no ítem 1. Esta escolha deve-se ao fato de que em ambos os modos acústicos limites, a razão de crescimento é proporcional a  $\vec{k} \cdot \vec{v}_b = kv_b \sin \delta$  (expressões (IV.4b), (IV.5b) e (IV.3)) e portanto, é maximizada para ângulos  $\delta$  próximos a  $\pi/2$  (propagação paralela ao campo magnético), que correspondem, devido a (IV.9), a pequenos valores de  $x$ . Assim, a desigualdade (IV.14) para ondas de máxima razão de crescimento é satisfeita quando (IV.15a) se verifica ou, em termos de direção de propagação das ondas, quando

$$\delta_M < \delta_r \ll \delta_{nr} \lesssim \pi/2 \quad (IV.16)$$

onde  $\delta_M \sim 1^\circ 53'$  é o ângulo correspondente a  $x = x_M$ . Portanto, concluímos que no modo íon-acústico não-ressonante, as ondas com máxima razão de crescimento propagam-se mais paralelamente ao campo magnético do que as ondas com máxima razão de crescimento no modo íon-acústico ressonante. Este resultado pode ser interpreta

do como sendo devido a uma competição existente entre o favorecimento de propagação de ondas paralelamente à direção de injeção do feixe, através da proporcionalidade  $\gamma \sim \vec{k} \cdot \vec{v}_b$  e simultaneamente sendo essa mesma direção a que contribui ao decréscimo das ondas, pois é a direção em que os elétrons magnetizado se movimentam e assim, a direção na qual a contribuição do termo de amortecimento de Landau devido aos elétrons é maximizada. Logo, se o termo elétron-onda é desprezível (modo não-ressonante), a máxima razão de crescimento será obtida quando houver propagação de ondas na direção do campo magnético. Se no entanto tal termo é importante, a máxima razão de crescimento das instabilidades não pode ocorrer para propagação exatamente paralela ao campo, pois favorece o amortecimento de Landau. Por último, convém observar que os dois modos acústicos limites não se propagam simultaneamente pois, de (IV.15a) vemos que no mínimo uma das velocidades que aparecem na expressão devem ser distintas, isto é, ou o feixe é injetado com distintas velocidades no plasma, ou a velocidade térmica dos elétrons é distinta, de um modo em relação ao outro, ou ambas velocidades são distintas. Para uma melhor compreensão dessas conclusões, apresentamos na Figura IV.2 as curvas de  $\gamma^{ia}/kv_b$  e  $\tilde{\gamma}^{ia}/kv_b$  em função do ângulo de propagação das ondas em relação ao campo magnético, isto é, em função de  $(90 - \delta)^\circ$ ; para uma razão fixa de densidades  $n_b/n_i = 2 \times 10^{-3}$ . A condição  $\text{sen} \delta > 2,33 \times 10^{-2}$  ( $x < 1$ ) estabelece o limite superior de  $(90 - \delta)^\circ \approx 88,665^\circ$  para a dependência angular das razões de crescimento  $\gamma$  das ondas. Não pode haver a ocorrência dessas ondas para ângulos  $(90 - \delta)^\circ$  maiores do que este valor. Usando as condições (IV.14a) e (IV.14b) com  $n_b/n_i = 2 \times 10^{-3}$ , obtemos que o valor da razão  $v_b/v_{te} = x$  deve ser infe

rior a  $0,114$  ( $\delta = 11,79^\circ$ ), para o modo não ressonante, e superior ao mesmo valor, relativamente ao modo ressonante. Assim, as ondas no modo não ressonante podem se propagar no intervalo  $0^\circ \leq (90 - \delta)^\circ < 78,21^\circ$ , enquanto que as no modo ressonante, no intervalo  $78,21^\circ < (90 - \delta)^\circ < 88,665^\circ$ ; e os valores de  $\gamma^{ia}/kv_b$  e  $\tilde{\gamma}^{ia}/kv_b$  correspondentes, são indicados pelas curvas cheias na Figura IV.2. Logo, a máxima razão de crescimento das ondas no modo ressonante, que ocorre quando a direção de propagação se aproxima de  $(90 - \delta)^\circ = 78,21^\circ$ , é muito menor do que o valor da máxima razão de crescimento das ondas no modo não ressonante, sendo da ordem do mínimo valor de  $\gamma^{ia}/kv_b$ , pois este ocorre quando  $(90 - \delta)^\circ \leq 78,21^\circ$ .

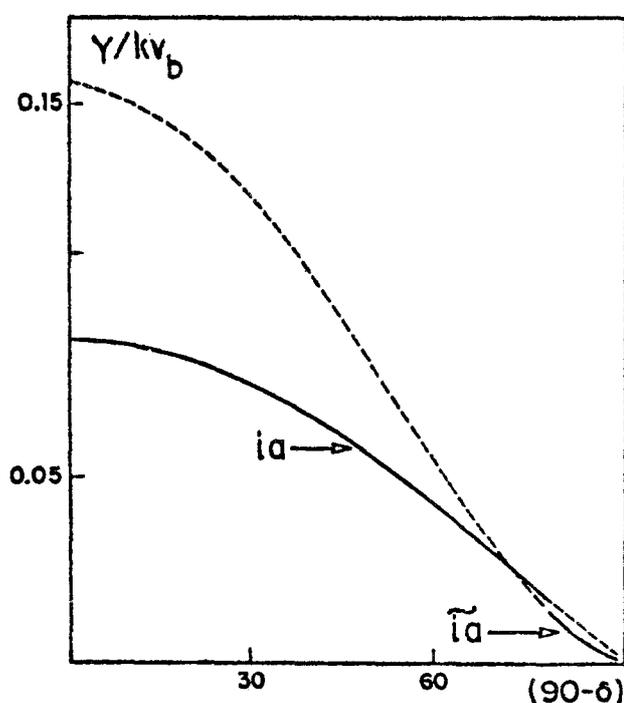


Figura IV.2 - As curvas cheias fornecem os valores admitidos para as razões de crescimento  $\gamma/kv_b$  das instabilidades íon-acústicas em função do ângulo de propagação  $(90 - \delta)^\circ$  das ondas, para uma razão de densidades  $n_b/n_i = 2 \times 10^{-3}$ . No modo não-ressonante (ia), as ondas podem se propagar no intervalo  $0^\circ \leq (90 - \delta)^\circ < 78,21^\circ$ . Quando  $(90 - \delta)^\circ > 78,21^\circ$ , ocorre a propagação das instabilidades no modo ressonante (iã).

Se supomos que a razão  $v_b/v_{te}$  é a mesma, então a razão  $(n_b/n_i)$  difere de um modo em relação a outro. Das expressões (IV.13) concluimos que,

$$(n_b/n_i)_{nr} \gg (n_b/n_i)_r, \quad (IV.17)$$

ou seja, o modo ressonante requer um feixe de menor densidade, se ambos os modos propagam-se na mesma direção, isto é, possuem o mesmo valor para a razão  $v_b/v_{te}$ . Se além dessa hipótese, o valor de frequência  $\omega_r \approx \vec{k} \cdot \vec{v}_b \approx kC_s$  é a mesma nos dois modos, então devido à condição (IV.17) e às expressões (IV.4b) e (IV.5b),

$$\tilde{\gamma}^{ia} < \gamma^{ia}, \quad (IV.18)$$

isto é, a razão de crescimento relativa ao modo ressonante é menor do que a razão de crescimento relativa ao modo não-ressonante. Uma estimativa numérica, tomando  $v_b/v_{te} = 0,12$  e consequentemente  $\delta \approx 11^\circ$ , estabelece

$$(n_b/n_i)_{nr} \gg 2 \times 10^{-3} \gg (n_b/n_i)_r.$$

Assim, consistentes com essa desigualdade, vamos usar para a razão de densidades  $n_b/n_i$  os valores:  $(n_b/n_i)_{nr} = 2 \times 10^{-2}$  e  $(n_b/n_i)_r = 2 \times 10^{-4}$ . Desse modo, a razão de crescimento  $\gamma$  relativa a cada modo vale aproximadamente,

$$\gamma^{ia} \approx 0.2 kC_s$$

e

$$\tilde{\gamma}^{ia} \approx 0.02 kC_s .$$

O valor de  $\gamma$  relativo ao modo não-ressonante  $\bar{e}$  de ordem dez vezes maior do que o correspondente ao modo ressonante, para os parâmetros acima considerados. Para a razão de temperatura  $T_b/T_e$ , obtemos das relações (IV.13),

$$(T_b/T_e)_{nr} \ll 2 \times 10^{-2} ,$$

e

$$(T_b/T_e)_r \ll 5 \times 10^{-4} .$$

Assim, para valores de parâmetros usuais de plasmas de reatores, o modo ressonante requer que a razão  $T_e/T_b$  seja cerca de 100 vezes o valor da mesma razão no modo não-ressonante. Isso significa que a hipótese de elétrons quentes, comum a ambos modos acústicos,  $\bar{e}$  mais forte quando ocorre no plasma propagação de ondas íon-acústicas ressonantes e por esse motivo, o termo ressonante elétron-onda não pode ser excluído na análise desse modo.

Usando a restrição (IV.14a) com o mínimo valor admissível de  $f(x) = 0,041$ , o qual ocorre quando  $x = 2,33 \times 10^{-2}$ , obtemos o menor valor limite para a razão de densidade relativa ao modo não ressonante. Como resultado obtemos que  $n_b/n_i \gg 1,75 \times 10^{-5}$ . Para o modo ressonante, a desigualdade (IV.14b), utilizando o máximo valor de  $f(x) = 0,76$ , obtemos uma estimativa para maior valor limite da razão  $n_b/n_i$ , a qual fornece  $n_b/n_i \ll 0,11$ .

Na Figura IV.3 apresentamos as curvas de  $\gamma^{ia}/kv_b$  e

$\tilde{\gamma}^{ia}/kv_b$  em função da razão de densidades  $n_b/n_i$  no intervalo  $10^{-1} > n_b/n_i > 10^{-4}$ , tendo em vista a discussão anterior. Escolhemos para a razão de velocidade  $v_b/v_{te}$ , dois valores,  $x = 0,12$  (o que fornece  $f(x) \approx 0,21$  e  $\delta \approx 11,2^\circ$ ) e  $x = 0,2$  (o que fornece  $f(x) \approx 0,34$  e  $\delta \approx 6,7^\circ$ ). Para o modo não ressonante, a restrição (IV.14a) impõe a condição  $n_b/n_i \gg 2,3 \times 10^{-2}$ , quando  $x = 0,12$  e  $n_b/n_i \gg 10^{-2}$ , quando  $x = 0,2$ . Para o modo ressonante, de (IV.14b), obtemos que  $n_b/n_i \ll 2,3 \times 10^{-2}$ , quando  $x = 0,12$  e  $n_b/n_i \ll 10^{-2}$ , quando  $x = 0,2$ .

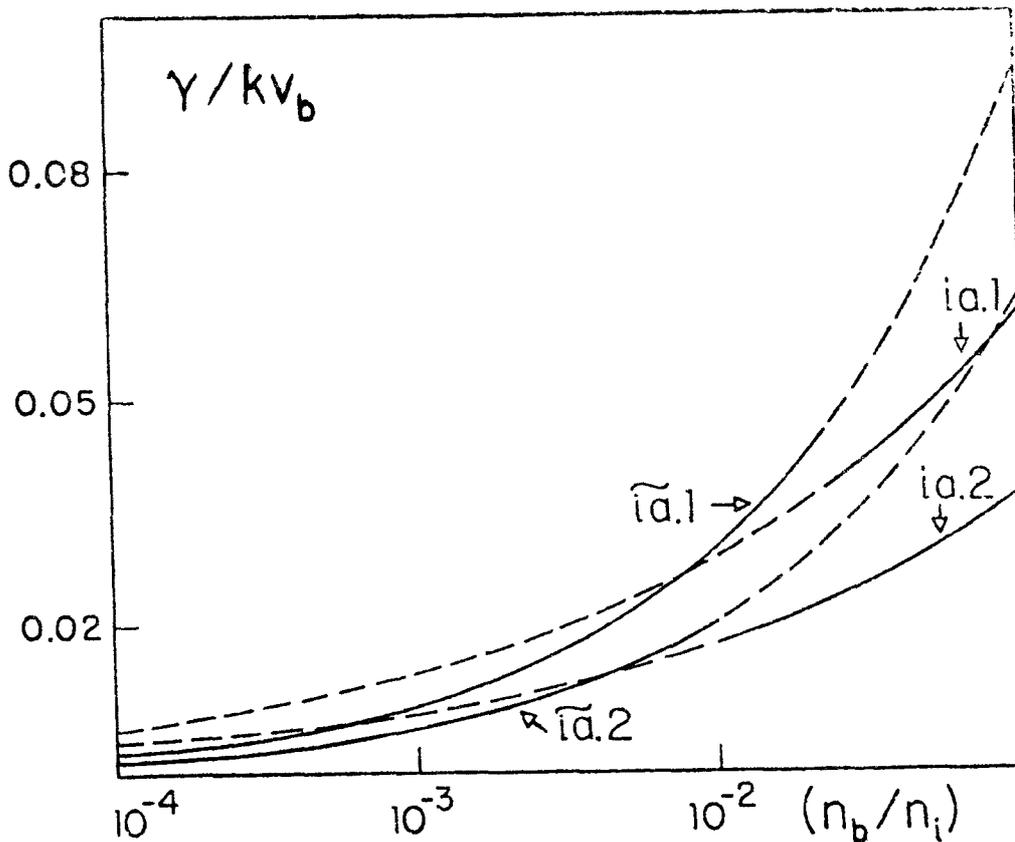


Figura IV.3 - As curvas cheias fornecem os valores de  $\gamma/kv_b$  das instabilidades ion-acústicas no modo não ressonante, considerando  $v_b/v_{te} = 0,12$  (ia.1) e  $v_b/v_{te} = 0,2$  (ia.2) e os de  $\gamma/kv_b$  no modo ressonante, para  $v_b/v_{te} = 0,12$  (iã.1) e  $v_b/v_{te} = 0,2$  (iã.2), em função de  $n_b/n_i$ .

As curvas cheias que aparecem na figura fornecem os possíveis valores para  $\gamma/kv_b$ , excluídos os pontos extremos. As mesmas ilustram o fato de que numa dada direção de propagação das ondas, a máxima razão de crescimento  $\gamma$  ocorre para o modo não ressonante, pois permite que a razão  $n_b/n_i$  assumam os maiores valores. A Figura IV.3 ainda mostra que o valor de  $\gamma$ , para um mesmo valor da razão  $n_b/n_i$ , é maior para o menor valor de  $x$ , conforme já discutimos na Figura IV.2.

Como vimos no Capítulo III, a variação temporal do momento de cada componente do plasma é dada pela expressão (III.8). Para estimarmos essas quantidades, relativas as instabilidades discutidas no presente capítulo, necessitamos primeiramente calcular  $\text{Im}\chi_j$ . Para o modo não-ressonante, em vista de (IV.2a) e da hipótese (a),

$$\begin{aligned} D(\vec{k}, \omega) &= 1 + \sum_j \chi_j(\vec{k}, \omega) \\ &= 1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \delta}{\Omega_e^2} - \left( \frac{\omega_{pi}}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right)^2 \left[ 1 - 2 \frac{\delta \omega}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right] - \left( \frac{\omega_{pb}}{\delta \omega} \right)^2 . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \chi_e &= \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \delta}{\Omega_e^2} , \\ \chi_e &= - \left( \frac{\omega_{pi}}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right)^2 \left[ 1 - 2 \frac{\delta \omega}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right] , \\ \chi_b &= - \left( \frac{\omega_{pb}}{\delta \omega} \right)^2 . \end{aligned}$$

Portanto, em vista de (IV.3) e das expressões (IV.4), relativas ao modo não-ressonante, temos para as partes reais e imaginárias de  $\chi_j$ ,

$$\text{Re}\chi_e = \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \delta}{\Omega_e^2} \quad , \quad (\text{IV.18a})$$

$$\text{Im}\chi_e = 0 \quad , \quad (\text{IV.19a})$$

$$\text{Re}\chi_i = - \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \left[ 1 + \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} \right] \quad , \quad (\text{IV.18b})$$

$$\text{Im}\chi_i = \frac{3^{1/2}}{k^2 \lambda_{De}^2} \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} \quad , \quad (\text{IV.19b})$$

$$\text{Re}\chi_b = \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} \quad , \quad (\text{IV.18c})$$

$$\text{Im}\chi_b = - \frac{3^{1/2}}{k^2 \lambda_{De}^2} \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} = - \text{Im}\chi_i \quad . \quad (\text{IV.19c})$$

Para o modo ressonante, considerando a hipótese b, temos de (IV.2a),

$$\begin{aligned} \sum_j \chi_j(\vec{k}, \omega) &= \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \delta}{\Omega_e^2} - \left( \frac{\omega_{pi}}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right)^2 - \left( \frac{\omega_{pb}}{\delta \omega} \right)^2 \\ &+ \frac{i \pi^{1/2} \omega_r \exp(-\omega_r^2 / k_{||}^2 v_{te}^2)}{k^2 \lambda_{De}^2 k_{||} v_{te}} \quad , \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

onde,

$$\chi_e = \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \delta}{\Omega_e^2} + \frac{i \pi^{1/2} \omega_r \exp(-\omega_r^2 / k_{||}^2 v_{te}^2)}{k^2 \lambda_{De}^2 k_{||} v_{te}},$$

$$\chi_i = -\left(\frac{\omega_{pi}}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b}\right)^2 + \frac{i \pi^{1/2} \omega_r \exp(-\omega_r^2 / k^2 v_{ti}^2)}{k^2 \lambda_{Di}^2 k v_{ti}},$$

$$\chi_b = -\left(\frac{\omega_{pb}}{\delta \omega}\right)^2 = -\frac{\omega_{pb}^2}{(\delta \omega_r^2 + \gamma^2)^2} (\delta \omega_r - i \gamma)^2.$$

Para os íons, incluímos na expressão acima o termo de amortecimento de Landau que, embora desprezível em (IV.20), é o único responsável pela parte imaginária de  $\chi_i$ . Este termo torna-se importante no cálculo da variação temporal da energia térmica associada aos íons. Logo, em vista de (IV.3) e (IV.5), obtemos para as componentes reais e imaginárias de  $\chi_j$  relativas ao modo ressonante

$$\text{Re} \chi_e = \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \delta}{\Omega_e^2} = \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \left[ \left(\frac{k C_s}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b}\right)^2 - k^2 \lambda_{De}^2 \right], \quad (\text{IV.20a})$$

$$\text{Im} \chi_e = \frac{\pi^{1/2}}{k^2 \lambda_{De}^2} \frac{v_b}{v_{te}} \exp(-v_b^2 / v_{te}^2) = \frac{f_r(x_r)}{k^2 \lambda_{De}^2}, \quad (\text{IV.21a})$$

$$\text{Re} \chi_i = -\frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \left(\frac{k C_s}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b}\right)^2 \approx -\frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2}, \quad (\text{IV.20b})$$

$$\text{Im} \chi_i = \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \left[ \frac{\pi}{2} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^3 \exp\left(-\frac{T_e}{T_i}\right) \right]^{1/2}. \quad (\text{IV.21b})$$

Como  $\delta\tilde{\omega}_r^{ia} = -\tilde{\gamma}^{ia}$ , obtemos para o feixe,

$$\text{Re}\chi_b = 0 \quad , \quad (\text{IV.20c})$$

$$\text{Im}\chi_b = -\frac{\omega_{pb}^2}{2\gamma^2} \approx -\frac{1}{2\tilde{\gamma}^{ia}} \frac{\tilde{\omega}_r^{ia}}{\tilde{\gamma}^{ia}} \frac{n_b}{n_i} \frac{\tilde{\omega}_r^{ia}}{k^2 \lambda_{De}^2} \quad (\text{IV.21c})$$

Portanto, de (III.8), substituindo  $\partial\epsilon_{\vec{k}}/\partial t$  por  $2\gamma\epsilon_{\vec{k}}$  e usando (IV.19), obtemos para o modo íon-acústico não-ressonante.

$$m_e n_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = 0 \quad , \quad (\text{IV.22a})$$

$$m_i n_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = 2 \times 3^{1/2} \int d\vec{k} \frac{\vec{k}\epsilon_{\vec{k}}}{k^2 \lambda_{De}^2} \left(\frac{n_b}{2n_i}\right)^{1/3} \quad , \quad (\text{IV.22b})$$

$$m_b n_b \frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t} = - m_i n_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} \quad , \quad (\text{IV.22c})$$

ou seja, os íons do feixe transferem todo seu momentum aos íons do plasma de fundo, permanecendo os elétrons em repouso.

Para o modo íon-acústico-ressonante, em vista de (III.8), (IV.3) e das expressões (IV.21), obtemos

$$m_e n_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = 2\pi^{1/2} \int d\vec{k} \frac{\vec{k}\epsilon_{\vec{k}}}{k^2 \lambda_{De}^2} \frac{v_b}{v_{te}} \exp(-v_b^2/v_{te}^2) \quad , \quad (\text{IV.23a})$$

$$m_i n_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = 2\pi^{1/2} \int d\vec{k} \frac{\vec{k}\epsilon_{\vec{k}}}{k^2 \lambda_{De}^2} \left(\frac{m_e}{2m_i}\right)^{1/2} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e T_e}{2m_i T_i}\right) \quad , \quad (\text{IV.23b})$$

$$m_b n_b \frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t} \approx - m_e n_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} , \quad (\text{IV.23c})$$

isto é, quase todo o momentum do feixe é transferido aos elétrons. O momentum dos íons do plasma de fundo não sofre variação significativa e conseqüentemente, os íons permanecem praticamente em repouso.

Vimos assim que, no modo íon-acústico não ressonante os íons do feixe interagem predominantemente com os íons do plasma de fundo, enquanto que no modo ressonante, a principal interação existente é a dos íons do feixe com os elétrons.

Vamos a seguir discutir a importância dos modos do ponto de vista de aquecimento do plasma. Usando a definição (III.11) da variação temporal da energia térmica e as expressões (III.19), (III.21b) e (IV.4), obtemos para o modo não-ressonante

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_e}{\partial t} &= 3^{1/2} \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} \vec{k} \cdot \vec{v}_b \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} \left[ \left( \frac{k C_s}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right)^2 - k^2 \lambda_{De}^2 \right] \\ &\approx 3^{1/2} \int \frac{d\vec{k}}{k \lambda_{De}} \epsilon_{\vec{k}} \omega_{pi} \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} , \end{aligned} \quad (\text{IV.24a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_i}{\partial t} &= 3^{1/2} \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} \vec{k} \cdot \vec{v}_b \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} \left[ 1 - 2 \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} \right] \\ &\approx 3^{1/2} \int \frac{d\vec{k}}{k \lambda_{De}} \epsilon_{\vec{k}} \omega_{pi} \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} , \end{aligned} \quad (\text{IV.24b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_b}{\partial t} &= 2 \times 3^{1/2} \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} \vec{k} \cdot \vec{v}_b \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{2/3} \\ &\approx 2 \times 3^{1/2} \int \frac{d\vec{k}}{k \lambda_{De}} \epsilon_{\vec{k}} \omega_{pi} \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{2/3} . \end{aligned} \quad (\text{IV.24c})$$

De (IV.22c) obtemos a expressão da variação temporal da energia cinética média dos íons do feixe,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} &= m_b n_b \frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t} \cdot \vec{v}_b = -2 \times 3^{1/2} \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} \vec{k} \cdot \vec{v}_b \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} \\ &\approx -2 \times 3^{1/2} \int \frac{d\vec{k}}{k \lambda_{De}} \epsilon_{\vec{k}} \omega_{pi} \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} . \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

A variação temporal da densidade de energia eletrostática das ondas, para o modo não-ressonante, pode ser escrita como,

$$\frac{\partial W_E}{\partial t} = \int d\vec{k} \frac{\partial \epsilon_{\vec{k}}}{\partial t} = 2 \int d\vec{k} \gamma^{ia} \epsilon_{\vec{k}} \quad (\text{IV.26a})$$

$$= 3^{1/2} \int \frac{d\vec{k}}{k \lambda_{De}} \epsilon_{\vec{k}} k^2 \lambda_{De}^2 \omega_{pi} \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} . \quad (\text{IV.26b})$$

Assim, como  $k \lambda_{De} \ll 1$  e  $n_b/n_i \ll 1$ , das expressões (IV.24), (IV.25) e (IV.26) concluímos que,

$$\frac{\partial W_E}{\partial t} \leq \frac{\partial W_b}{\partial t} \ll \frac{\partial W_e}{\partial t} \approx \frac{\partial W_i}{\partial t} \approx -\frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} . \quad (\text{IV.27})$$

A temperatura média dos íons do feixe e a energia eletrostática das ondas não se altera significativamente. Os elétrons e os íons do plasma de fundo ganham aproximadamente a mesma quantidade de energia às expensas da desaceleração do feixe. Logo, o modo não-ressonante é interessante do ponto de vista de aquecimento do plasma por injeção de feixe.

Para o modo íon-acústico ressonante, substituindo (IV.20), (IV.21) e (IV.5) em (III.11), temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_e}{\partial t} &= 2 \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} \left\{ \tilde{\gamma}^{ia} \left[ \left( \frac{k C_s}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} \right)^2 - k^2 \lambda_{De}^2 \right] + \tilde{\omega}_r^{ia} f_r(x_r) \right\} \\ &\approx 2 \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} \left[ \tilde{\gamma}^{ia} + \tilde{\omega}_r^{ia} f_r(x_r) \right], \end{aligned} \quad (IV.28a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_i}{\partial t} &= 2 \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} \left\{ -\tilde{\gamma}^{ia} + \tilde{\omega}_r^{ia} \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^3 \exp\left(-\frac{T_e}{T_i}\right) \right]^{1/2} \right\} \\ &\approx 2 \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} \tilde{\omega}_r^{ia} \left\{ -\frac{\tilde{\gamma}^{ia}}{\vec{k} \cdot \vec{v}_b} + \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^3 \exp\left(-\frac{T_e}{T_i}\right) \right]^{1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (IV.28b)$$

$$\frac{\partial W_b}{\partial t} = -2 \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} \frac{\delta \tilde{\omega}_r^{ia}}{2 \tilde{\gamma}^{ia}} \frac{\tilde{\omega}_r^{ia}}{\tilde{\gamma}^{ia}} \frac{n_b}{n_i} \tilde{\omega}_r^{ia}.$$

Lembrando que  $\delta \tilde{\omega}_r^{ia} = -\tilde{\gamma}^{ia} \approx \tilde{\omega}_r^{ia} \left( \frac{n_b}{2 n_i f_r(x_r)} \right)^{1/2}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_b}{\partial t} &= \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} \tilde{\omega}_r^{ia} \frac{\tilde{\omega}_r^{ia}}{\tilde{\gamma}^{ia}} \frac{n_b}{n_i} \\ &= 2 \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} \tilde{\omega}_r^{ia} \left( \frac{\tilde{\gamma}^{ia}}{\tilde{\omega}_r^{ia}} \right) f_r(x_r) \quad . \end{aligned} \quad (\text{IV.28c})$$

Para a variação temporal da energia cinética média dos íons do feixe, usando (IV.23c), obtemos

$$\left| \frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} \right| = m_b n_b \left| \frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t} \cdot \vec{v}_b \right| = 2 \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} \tilde{\omega}_r^{ia} f_r(x_r) \gg \frac{\partial W_b}{\partial t} \quad (\text{IV.29})$$

Por último, a variação temporal da densidade de energia eletrostática, relativa ao modo ressonante, pode ser expressa como,

$$\frac{\partial W_E}{\partial t} = 2 \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} \tilde{\gamma}^{ia} k^2 \lambda_{De}^2 \quad . \quad (\text{IV.30})$$

Das expressões (IV.28) - (IV.30) concluímos que,

$$\frac{\partial W_e}{\partial t} = 2 \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} \tilde{\gamma}^{ia} + \left| \frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} \right| \quad , \quad (\text{IV.31a})$$

ou seja, a taxa de crescimento da energia térmica dos elétrons excede a taxa de decréscimo da energia cinética do feixe. A quantidade adicional de energia térmica, sendo dada pelo primeiro termo do lado direito na expressão acima, é extraída dos íons do plasma pois,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_i}{\partial t} = & -2 \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} \tilde{\gamma}^{ia} + \\ & + (2\pi)^{1/2} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{T_e}{2T_i}\right) \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} \tilde{\omega}_r^{ia} . \end{aligned} \quad (\text{IV.31b})$$

A suposição de que o termo de amortecimento de Landau devido aos elétrons, seja muito maior do que o termo de amortecimento de Landau devido aos íons, implica na desigualdade,

$$\left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^3 \exp\left(-\frac{T_e}{T_i}\right) \right]^{1/2} \ll f_r(x_r) , \quad (\text{IV.32})$$

a qual permite concluir que a parcela de variação de energia térmica dos íons, corresponde à última integral do lado direito em (IV.31b), é desprezível frente à variação temporal de energia cinética do feixe pois,

$$\begin{aligned} 2 \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^3 \exp\left(-\frac{T_e}{T_i}\right) \right]^{1/2} \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} \tilde{\omega}_r^{ia} \\ \ll 2 f_r(x_r) \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} \tilde{\omega}_r^{ia} = \left| \frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} \right| . \end{aligned}$$

Além disso,

$$\frac{\partial W_e}{\partial t} \gg \frac{\partial W_i}{\partial t} .$$

Assim, os íons do plasma extraem uma quantidade (muito

pequena) de energia do feixe (expressa em (IV.31b) através da integral positiva), mas também perdem uma quantidade de energia, a qual é cedida aos elétrons (expressa através da integral negativa). A Figura IV.4 mostra simultaneamente a variação de  $\tilde{\gamma}^{ia}/\vec{k}\cdot\vec{v}_b$  em função de  $x$ , para uma razão de densidades  $n_b/n_i$  fixa, no caso escolhida como  $2 \times 10^{-3}$ ; e a variação de  $[\pi/2(T_e/T_i)^3 \exp(-T_e/T_i)]^{1/2}$  em função de  $T_e/T_i$ . Do gráfico podemos obter uma interessante conclusão sobre o efeito produzido no plasma, devido à propagação de ondas acústicas ressonantes, que distingue este modo dos demais analisados neste trabalho. Vamos supor que o sistema plasma-feixe se encontre inicialmente numa situação tal, que a taxa de variação de energia térmica dos íons seja nula, ou seja, que a quantidade de energia extraída do feixe pelos íons, seja idêntica à quantidade de energia cedida aos elétrons, pelos íons. Para  $x=0,16$ , o que significa um ângulo de propagação da onda  $\delta = 8,37^\circ$ , a razão de temperaturas  $T_e/T_i$  necessária para que isso ocorra deve valer aproximadamente 14. As restrições que o modo íon-acústico ressonante impõem ficam satisfeitas para estes valores, pois:

1) A razão  $T_e/T_i = 14$  satisfaz a condição  $T_e/T_i \gg 2$ .

2) As razões  $n_b/n_i = 2 \times 10^{-3}$  e  $v_b/v_{te} = x = 0,16$ , a qual fornece  $f_r(x_r) = 2,76 \times 10^{-1}$ , satisfazem a restrição  $n_b/n_i \ll f_r^3(x_r)/4$ , pois  $f_r^3(x_r)/4 \approx 5,3 \times 10^{-3}$ .

3) A desigualdade (IV.32) também se verifica, pois

$$\left[ \pi/2(T_e/T_i)^3 \exp(-T_e/T_i) \right]^{1/2} \approx 6,0 \times 10^{-2} < 2,76 \times 10^{-1} .$$

Podemos ainda obter uma restrição sobre a razão de temperaturas  $T_b/T_e$  relativa a esses parâmetros. Usando (IV.13b),  $t_e$

mos que  $T_b/T_e \ll 3,62 \times 10^{-3}$ . Assim, para que a temperatura dos íons permaneça constante, é necessário que os íons do feixe sejam muito frios comparados ao plasma.

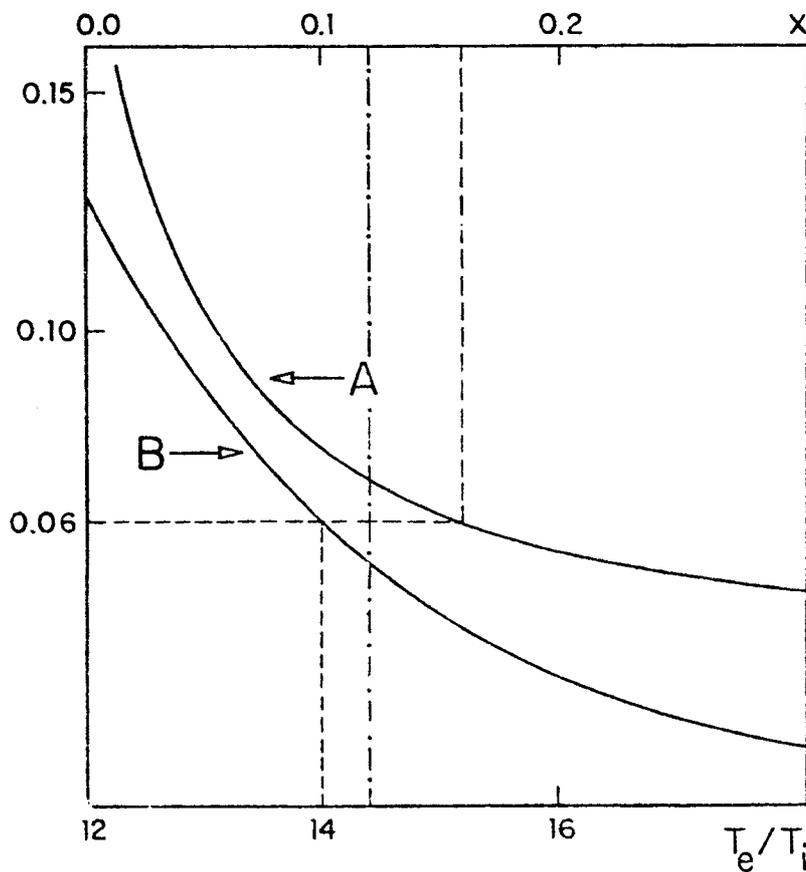


Figura IV.4 - A curva A fornece os valores da razão de crescimento  $\tilde{\gamma}^{ia}/k \cdot \vec{v}_b$  das instabilidades no modo íon-acústico ressonante em função de  $x = v_b/v_{te}$ , para uma razão de densidades  $n_b/n_i = 2 \times 10^{-3}$ . A curva B refere-se aos valores de  $[\pi/2 (T_e/T_i)^3 \exp(-T_e/T_i)]^{1/2}$  em função da razão de temperaturas  $T_e/T_i$ . Quando  $A = B$ , situação indicada pela linha tracejada, a variação temporal da energia térmica dos íons ( $\partial W_i/\partial t$ ) é nula. Quando  $A > B$  ou  $A < B$ , tem-se que  $\partial W_i/\partial t < 0$  ou  $\partial W_i/\partial t > 0$ , respectivamente.

Como  $\partial T_e / \partial t > \partial T_i / \partial t$ , a razão  $T_e / T_i$  tende a crescer à medida que o tempo passa. Isso significa, na Figura IV.4, que os valores reais de  $T_e / T_i$  deslocam-se para a direita do ponto inicialmente considerado, no caso  $T_e / T_i = 14$  e portanto, ocasionando uma diminuição na parcela de energia positiva extraída do feixe. Por outro lado, como a energia térmica dos elétrons está aumentando no tempo, e o feixe se desacelerando, a razão  $v_b / v_{te} = x$  diminui no tempo e portanto, o sistema, para um dado valor inicial de  $x$  (no caso  $x = 0,16$ ), tende a evoluir no tempo de forma a passar pelos valores de  $x$  à esquerda do ponto  $x$  inicial. Em consequência disso, maior quantidade de energia dos íons será transferida aos elétrons. Assim, os íons vão apresentar uma taxa de variação de energia térmica negativa, ou seja, eles se esfriam com o tempo. Também pode ocorrer que inicialmente  $\partial W_i / \partial t > 0$ , como por exemplo, considerando que  $x = 0,16$  e  $T_e / T_i = 13$ , inicialmente. Entretanto, esta taxa de variação sempre tende a diminuir no tempo, podendo tornar-se negativa ou não. Para obter esta informação devemos lembrar que, estando os valores de  $x$  a diminuir no tempo, a direção de propagação da onda tende a tornar-se cada vez mais paralela ao campo, aumentando conseqüentemente a razão de crescimento da onda. Entretanto  $\tilde{\gamma}^{ia}$  não cresce indefinidamente no tempo. Quando a razão  $v_b / v_{te}$  atinge o valor limite tal que  $f_r(x_r) \gg (4n_b / n_i)^{1/3}$ , o modo íon-acústico ressonante não pode mais se propagar. Conforme discussão anterior, para  $n_b / n_i = 2 \times 10^{-3}$ , o ângulo  $\delta$  correspondente a máxima razão de crescimento da onda deve ser menor do que  $11,79^\circ$  aproximadamente.

As expressões (IV.28c) e (IV.29) mostram que a varia

ção temporal da energia térmica do feixe é pequena comparada com sua variação temporal de energia cinética, pois  $\tilde{\gamma}^{ia}/\tilde{\omega}_r^{ia} \ll 1$ . Além disso, como  $k^2 \lambda_{De}^2 \ll 1$ , das expressões (IV.30) e (IV.28a-b), concluimos que a variação temporal da densidade de energia das ondas é pequena comparada com a taxa de variação de energia térmica, transferida dos íons para os elétrons do plasma.

Resumindo, vimos que no modo íon-acústico ressonante, o feixe interage predominantemente com os elétrons, sendo estas as partículas que mais se aquecem no plasma. A temperatura dos elétrons aumenta numa taxa maior do que a taxa de diminuição de energia cinética do feixe, pois retiram energia dos íons do plasma. Assim, a condição  $T_e/T_i \gg 2$  necessária para a propagação do modo, permanecerá sendo satisfeita durante a ocorrência da instabilidade. O modo requer que a razão de densidade  $n_b/n_i$  seja pequena, muito menor do que  $10^{-1}$  aproximadamente. Para uma razão  $n_b/n_i = 2 \times 10^{-3}$ , as ondas podem se propagar no intervalo  $1,335^\circ < \delta < 11,79^\circ$ , sendo que a máxima razão de crescimento  $\tilde{\gamma}_{max}^{ia}$ , é menor do que o valor limite  $0,014 kV_b$ . Supondo, inicialmente, que o plasma seja caracterizado por uma razão de densidade  $n_b/n_i = 2 \times 10^{-3}$  e por uma razão de temperaturas  $T_e/T_i = 14$ , vimos que na direção  $\delta \approx 8,37^\circ$  ( $x = 0,16$ ), a temperatura dos íons permanece constante. O modo ressonante requer um feixe muito frio. Para os valores acima, obtivemos que  $T_b/T_e \ll 3,62 \times 10^{-3}$ . Além disso, como a razão  $v_b/v_{te}$  diminui a medida que transcorre o tempo, a direção de propagação da onda se modifica de forma a aumentar o valor da razão de crescimento da onda. Quando  $\delta \leq 11,79^\circ$ , que é o valor limite máximo da direção de propagação das ondas no modo ressonante, cal

culado para a razão  $n_b/n_i$  considerada, o modo não mais existe. Para ângulos maiores do que este valor, tem início no plasma a propagação das ondas acústicas não ressonantes. Neste modo, o qual requer que a razão de densidades  $n_b/n_i$  seja superior a  $10^{-5}$  aproximadamente, a interação predominante dá-se entre os íons do feixe e os íons do plasma. Todas as espécies do plasma se aquecem, sendo a taxa de variação temporal da energia dos elétrons da mesma ordem da correspondente taxa associada aos íons, logo a razão  $T_e/T_i$  mantém-se aproximadamente constante durante a ocorrência da instabilidade, mantendo-se a restrição  $T_e/T_i \gg 2$  requerida pelo modo. Também para este modo, a razão  $v_b/v_{te}$  diminui no tempo, ou seja, a direção de propagação  $\delta$  das ondas aumenta no tempo, até que seja atingido o máximo valor da razão de crescimento  $\gamma_{\max}^{ia} = 0,087 kV_b$ , quando  $\delta = 90^\circ$ .

## V - ÍONS DO PLASMA DE FUNDO FRIOS, ELÉTRONS E ÍONS DO FEIXE QUENTES

Vamos considerar novamente um plasma que satisfaz às hipóteses estabelecidas no Capítulo II, supondo ainda que o mesmo seja composto de íons de fundo frios e de elétrons e de íons do feixe quentes. Usando a expansão para pequeno argumento para os termos relativos aos elétrons e aos íons do feixe e a expansão para grande argumento relativamente ao termo que corresponde aos íons de fundo, a relação de dispersão (II.1) pode ser simplificada, resultando

$$\begin{aligned}
 D(\vec{k}, \omega) = & 1 + \frac{\omega_p^2 \cos^2 \delta}{\Omega_e^2} + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \left[ 1 + \frac{i\pi^{1/2} \omega_r}{k_{||} v_{te}} \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{k_{||}^2 v_{te}^2}\right) \right] \\
 & - \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} \left[ \frac{k^2 v_{ti}^2}{2\omega^2} - \frac{i\pi^{1/2} \omega_r}{k v_{ti}} \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{k^2 v_{ti}^2}\right) \right] \\
 & + \frac{1}{k^2 \lambda_{Db}^2} \left[ 1 + i\pi^{1/2} \frac{(\omega_r - \vec{k} \cdot \vec{v}_b)}{k v_{tb}} \left[ \exp - \left( \frac{\omega_r - \vec{k} \cdot \vec{v}_b}{k v_{tb}} \right)^2 \right] \right] \quad (V.1)
 \end{aligned}$$

A relação (V.1) apresenta solução para ondas de razão de crescimento  $\gamma$  positiva obtida, segundo os argumentos apresentados em capítulos anteriores, supondo  $\omega = \vec{k} \cdot \vec{v}_b + \delta\omega$ , sendo  $|\delta\omega| \ll \vec{k} \cdot \vec{v}_b$ . Para a frequência de oscilação real  $\omega_r$ , obtemos,

$$\omega_r = k C_s \left[ 1 + (k \lambda')^2 \right]^{-1/2}, \quad (V.2)$$

onde  $\lambda'$  é um comprimento de Debye efetivo definido como

$$\lambda' = \lambda_{De} \left[ 1 + \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \delta}{\Omega_e^2} + \frac{1}{k^2 \lambda_{Db}^2} \right]^{1/2} . \quad (V.3)$$

Na expressão acima  $\lambda_{Db}$  simboliza o comprimento de Debye usual associado aos íons do feixe. Para a razão de crescimento  $\gamma$ , encontramos a seguinte expressão

$$\gamma = \frac{\pi^{1/2} \omega_r^3}{2k^2 C_s^2} \left\{ \frac{\lambda_{De}^2}{\lambda_{Db}^2} \frac{(\vec{k} \cdot \vec{v}_b - \omega_r)}{k v_{tb}} \exp \left[ - \left( \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_b - \omega_r}{k v_{tb}} \right)^2 \right] - \frac{\lambda_{De}^2}{\lambda_{Di}^2} \frac{\omega_r}{k v_{ti}} \exp \left( - \frac{\omega_r^2}{k^2 v_{ti}^2} \right) - \frac{\omega_r}{k_{||} v_{te}} \exp \left( - \frac{\omega_r^2}{k_{||}^2 v_{te}^2} \right) \right\} . \quad (V.4)$$

Essas ondas são instáveis ( $\gamma > 0$ ) se  $\vec{k} \cdot \vec{v}_b > \omega_r$  e se a soma das contribuições dos dois últimos termos, que são os termos de amortecimento de Landau devido aos elétrons e aos íons, for menor do que o termo de crescimento de Landau devido aos íons do feixe (1º termo).

Dois casos limites serão analisados detalhadamente:

1) Supomos inicialmente que

$$\left( \frac{\lambda_{De}}{\lambda_{Db}} \right)^2 \gg 1 , \quad \text{ou seja} , \quad \frac{T_b}{T_e} \ll \frac{n_b}{n_e} \ll 1 . \quad (V.5)$$

Neste limite, a frequência de oscilação é dada aproximadamente por  $\omega_r = k C_{sb}$ , onde  $C_{sb} = \omega_{pi} \lambda_{Db}$  é uma velocidade acústica de íons efetiva, menor do que a velocidade acústica de íons usual, isto é,  $C_{sb} < C_s$ . Denominamos este modo de propagação de modo íon-

-feixe ressonante.

2) Consideramos também a situação limite oposta,

$$\left(\frac{\lambda_{De}}{\lambda_{Db}}\right)^2 \ll 1, \quad \text{ou seja}, \quad \frac{n_b}{n_e} \ll \frac{T_b}{T_e}. \quad (\text{V.6})$$

Esta suposição fornece para a frequência de oscilação os valores,

$$\text{a) } \omega_r = \frac{kC_s}{(1 + k^2\lambda_{De}^2)^{1/2}}, \quad \text{se } \omega_{pe}^2 \ll \Omega_e^2$$

ou seja, trata-se de uma onda acústica de íons usual.

$$\text{b) } \omega_r = \frac{kC_s}{(1 + k^2\lambda_{Deff}^2)^{1/2}}, \quad \text{se } \omega_{pe}^2 \leq \Omega_e^2.$$

Neste caso, a frequência de oscilação das ondas acústicas de íons acima difere da usual, devido a um comprimento de Debye efetivo  $\lambda_{Deff}$  que aparece no denominador. Este comprimento de Debye é definido através da expressão

$$k^2\lambda_{Deff}^2 = k^2\lambda_{De}^2 + k_{\perp}^2r_e^2,$$

onde  $r_e^2 = v_{te}^2/\Omega_e^2$  é o raio de Larmor associado aos elétrons.

Assim, quando a situação limite 2) se verifica, fornecendo ondas com frequências de oscilação dadas pelas expressões (a) ou (b), dizemos que ocorre a propagação de ondas no modo íon-acústico.

As suposições feitas neste capítulo, relativamente às

componentes do plasma, as quais permitem colocar a relação de dispersão (II.1) na sua forma aproximada (V.1), impõem restrições sobre a direção de propagação das ondas e sobre as características do feixe. Vamos a seguir calcular estas restrições para os dois casos limites de ondas acústicas, acima obtidas.

Para o modo íon-feixe ressonante:

a) A suposição de que os elétrons sejam quentes fornece uma restrição sobre o ângulo de propagação da onda,

$$\frac{\omega_r}{k_{||} v_{te}} = \frac{k C_{sb}}{k_{||} v_{te}} = \frac{\omega_{pi} \lambda_{Db}}{v_{te} \text{sen} \delta} \ll 1 \quad ,$$

donde,

$$\text{sen} \delta > \frac{v_{tb}}{v_{te}} \left( \frac{n_e}{2n_b} \right)^{1/2} \quad . \quad (V.7)$$

b) A suposição de que os íons sejam frios impõe,

$$\frac{\omega}{k v_{ti}} = \frac{C_{sb}}{v_{ti}} = \left( \frac{1}{2} \frac{T_b n_e}{T_i n_b} \right)^{1/2} \gg 1 \quad . \quad (V.8a)$$

Assim, usando (V.5) e (V.8a), obtemos

$$\frac{T_b}{T_e} < \frac{n_b}{n_e} < \frac{T_b}{2T_i} \quad , \quad (V.8b)$$

que também fornece uma condição sobre a razão de temperaturas das partículas do plasma de fundo,

$$T_e/T_i > 2 \quad . \quad (V.8c)$$

c) A suposição de que os íons do feixe sejam quentes impõe a restrição

$$\frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_b - \omega_r}{kv_{tb}} = \frac{v_b \text{sen}(\theta + \delta) - C_{sb}}{v_{tb}} \ll 1, \quad ,$$

ou seja,

$$\text{sen}(\theta + \delta) < \frac{v_{tb}}{v_b} \left[ 1 + \left( \frac{n_e}{2n_b} \right)^{1/2} \right]. \quad (V.9)$$

d) O critério para que ocorra instabilidade ( $\gamma > 0$ ) fornece, supondo  $T_e \gg T_i$ , a restrição

$$\frac{\lambda_{De}^2}{\lambda_{Db}^2} \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_b - \omega_r}{kv_{tb}} \exp \left[ - \left( \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_b - \omega_r}{kv_{tb}} \right)^2 \right] > \frac{\lambda_{De}^2}{\lambda_{Di}^2} \frac{\omega_r}{kv_{ti}} \exp \left( - \frac{\omega_r^2}{k^2 v_{ti}^2} \right).$$

Desta expressão, obtemos a seguinte condição para a razão entre as velocidades de fase da onda e a velocidade térmica do feixe,

$$\frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_b - \omega_r}{kv_{tb}} > 2^{-1/2} \left( \frac{n_e T_b}{n_b T_i} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \left( \frac{\omega_r}{kv_{ti}} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\lambda_{De}}{\lambda_{Db}} \right)^2 \frac{T_i}{T_e} \left( \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_b - \omega_r}{\omega_r} \right)^2 \right] \right\}$$

Como  $(\lambda_{De}/\lambda_{Db})^2 (T_i/T_e) \approx 1$  e  $(\vec{k} \cdot \vec{v}_b - \omega_r)^2/\omega_r^2 \ll 1$ , podemos escrever a condição acima aproximadamente como,

$$\frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_b - \omega_r}{kv_{tb}} > 2^{-1/2} \left( \frac{n_e T_b}{n_b T_i} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{1}{2} \frac{n_e T_b}{n_b T_i} \right). \quad (V.10)$$

Para o modo íon-acústico:

a) A condição sobre o ângulo de propagação das ondas para o modo íon-acústico, obtida da hipótese de elétrons quentes, é menos restritiva,

$$\frac{\omega_r}{k_{\parallel} v_{te}} \approx \frac{C_s}{v_{te} \sin \delta} \ll 1 \quad ,$$

donde,

$$\sin \delta > \left( \frac{m_e}{2m_i} \right)^{1/2} \quad . \quad (V.11)$$

b) Da condição de que os íons sejam frios, temos

$$\frac{\omega_r}{k v_{ti}} \approx \frac{C_s}{v_{ti}} = \left( \frac{T_e}{2T_i} \right)^{1/2} \gg 1 \quad ,$$

ou seja,

$$\frac{T_e}{T_i} > 2 \quad . \quad (V.12)$$

c) A suposição de íons do feixe quentes fornece a restrição

$$\frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_b - \omega_r}{k v_{tb}} \approx \frac{v_b \sin(\theta + \delta) - C_s}{v_{tb}} \ll 1 \quad ,$$

ou ainda,

$$\text{sen}(\theta + \delta) < \frac{v_{tb}}{v_b} \left[ 1 + \left( \frac{T_e}{2T_b} \right)^{1/2} \right] . \quad (\text{V.13})$$

d) Neste caso, o critério para haver instabilidade pode ser escrita como,

$$\frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_b - \omega_r}{kv_{tb}} \frac{T_e}{T_b} \frac{n_b}{n_e} > \left( \frac{m_e}{2m_i} \right)^{1/2} \left[ \text{cosec} \delta + \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{T_e}{2T_i}\right) \right] . \quad (\text{V.14})$$

Da equação (V.14) tem-se que a máxima razão de crescimento é dada quando as ondas propagam-se na direção de  $\vec{v}_b$ , pois o termo de crescimento de Landau assume o máximo valor; e perpendicularmente a  $\vec{B}$ , pois nesta situação o termo de amortecimento de Landau devido aos elétrons é mínimo. Entretanto, esta última condição ( $k_{\parallel} \rightarrow 0$ ) equivale a supor que os elétrons sejam frios e portanto não pode ser satisfeita pelas ondas acústicas deste capítulo.

Tendo em vista a restrição (V.7) ou a (V.11), a maximização de (V.4) com relação a sua dependência angular é facilmente obtida. O resultado deste cálculo fornece  $\delta = \pi/2$  e  $\theta = \cos^{-1}(2^{-1/2} v_{tb}/v_b + \omega_r/kv_{tb})$ , isto é, a máxima razão de crescimento ocorre quando  $\vec{k}$  é paralelo a  $\vec{B}$  e  $\vec{v}_b$  não é paralelo a  $\vec{B}$ . Assim,

$$\gamma_{\max} = \frac{\pi^{1/2} \omega_r^3}{2k^2 C_s^2} \left\{ \frac{\lambda_{De}^2}{\lambda_{Db}^2} \frac{\exp(-1/2)}{2^{1/2}} - \frac{\lambda_{De}^2}{\lambda_{Di}^2} \frac{\omega_r}{kv_{ti}} \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{k^2 v_{ti}^2}\right) - \frac{\omega_r}{kv_{te}} \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{k^2 v_{te}^2}\right) \right\} . \quad (\text{V.15})$$

Na expressão acima, o termo devido aos íons do feixe, o qual contribui para o crescimento da onda, assume seu maior valor, enquanto que o termo devido aos elétrons, dependendo dos parâmetros  $T_b/T_e$  e  $n_e/n_b$ , é em geral menor do que o seu máximo valor de  $(2e)^{-1/2}$ .

Substituindo  $\omega_r$  por  $kC_{sb}$ , (V.15) nos dá o maior valor que a razão de crescimento das ondas no modo íon-feixe ressonante podem atingir,

$$\frac{\gamma_{\max}^{IB}}{kC_{sb}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left\{ \exp\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\lambda_{Db}}{\lambda_{Di}}\right)^3 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\lambda_{Db}^2}{\lambda_{Di}^2}\right) - \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \left(\frac{\lambda_{Db}}{\lambda_{De}}\right)^3 \exp\left(-\frac{m_e}{2m_i} \frac{\lambda_{Db}^2}{\lambda_{Di}^2}\right) \right\} \quad (V.15a)$$

As figuras V.1 e V.2 mostram a variação da razão de crescimento  $\gamma_{\max}^{IB}/kC_s$  em função da razão de temperaturas  $T_e/T_i$  e da razão de densidades  $n_b/n_i$ , respectivamente, mantendo os demais parâmetros fixos. No caso da Figura V.1, consideramos, tendo em vista as restrições (V.5), (V.7) e (V.8),  $T_b/T_i = 2 \times 10^{-2}$ ,  $v_b/v_{te} = 0,12$  e  $n_b/n_i = 2 \times 10^{-3}$ . O intervalo da razão de temperaturas variou desde  $T_e/T_i = 10$  até  $T_e/T_i = 10^2$  e correspondente a essa variação, da expressão  $\theta = \cos^{-1}[2^{-1/2}v_{tb}/v_b + \omega_r/kv_{tb}]$ , o intervalo  $81,75 \leq \theta \leq 87,40^\circ$  para o ângulo de injeção do feixe. Logo, o feixe se propaga quase perpendicularmente ao campo magnético. A figura V.1 mostra que a razão de crescimento da onda diminui com o aumento da razão  $T_e/T_i$ . Isto é devido ao tipo de dependência do ângulo  $\theta$  em relação a razão  $T_e/T_i$ . Quanto maior esta razão, maior o ângulo  $\theta$ , isto é, mais perpendicularmente ao campo magnético o

feixe está sendo injetado. Este resultado pode ser facilmente interpretado lembrando que na presente análise, a razão de crescimento  $\gamma_{\max}^{IB}/kC_{sb}$  varia unicamente devido à variação do termo de amortecimento de Landau devido aos elétrons. O termo de crescimento devido ao feixe é mantido constante, pois consideramos  $(\vec{k} \cdot \vec{v}_b - \omega_r)/kv_{tb} = 2^{-1/2}$ ; e como  $T_b/T_i$  e  $n_b/n_i$  foram tomados fixos, a contribuição do termo devido aos íons também não varia. Assim, a maior razão de crescimento de  $\gamma_{\max}^{IB}/kC_{sb}$  é obtida quanto menor o termo devido aos elétrons, isto é, quanto menor a interação do feixe com os elétrons, o que implica em maior valor para o ângulo  $\theta$ . Entretanto, como  $\gamma_{\max}^{IB}/kC_s = [10/(T_e/T_i)]^{1/2} \gamma_{\max}^{IB}/kC_{sb}$ , os valores de  $\gamma_{\max}^{IB}/kC_s$ , em função de  $T_e/T_i$ , diminuem com o acréscimo dessa razão. Assim, para os dados relativos à Figura V.1, obtemos que o máximo valor de  $\gamma_{\max}^{IB}/kC_s$  ocorre quando  $\theta = 81,75^\circ$  ( $T_e/T_i = 10$ ), valendo  $\gamma_{\max}^{IB} = 0,23 kC_s = 0,032 kv_b$ .

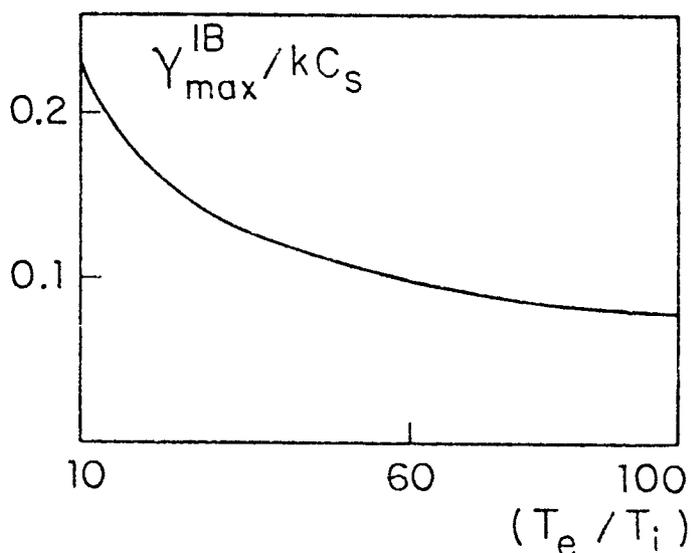


Figura V.1 - Gráfico da razão de crescimento  $\gamma_{\max}^{IB}/kC_s$  das instabilidades no modo íon-feixe ressonante, em função da razão de temperaturas  $T_e/T_i$ , considerando  $T_b/T_i = 2 \times 10^{-2}$ ,  $v_b/v_{te} = 0,12$  e  $n_b/n_i = 2 \times 10^{-3}$ . O máximo valor ocorre quando  $T_e/T_i = 10$  ( $\theta = 81,75^\circ$ ) e vale  $\gamma_{\max}^{IB} = 0,23 kC_s$ .

Para a Figura V.2, supusemos  $T_e/T_i = 10$ ,  $T_b/T_i = 0,2$ ,  $v_b/v_{te} = 0,12$  e  $2,5 \times 10^{-3} \leq n_b/n_i < 1,0 \times 10^{-2}$ , tendo em vista as restrições que o modo íon-feixe ressonante deve satisfazer. Para o intervalo de variação do ângulo de injeção do feixe, relativo à variação da razão de densidade  $n_b/n_i$ , obtivemos que  $65,94^\circ \leq \theta \leq 77,67^\circ$ . Novamente temos que o feixe deve ser injetado numa direção mais perpendicular do que paralela ao campo magnético. A curva obtida apresenta um valor máximo dado por  $\gamma_{\max}^{IB} \approx 0,53 kC_s \approx 0,44 kv_b$  quando  $n_b/n_i \approx 5,7 \times 10^{-3}$  ( $\theta \approx 73,94^\circ$ ). Este valor da razão  $n_b/n_i$ , que maximiza a razão de crescimento da onda, verifica a equação

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\lambda_{Db}}{\lambda_{Di}}\right)^3 \left[4 - \left(\frac{\lambda_{Db}}{\lambda_{Di}}\right)^2\right] \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\lambda_{Db}^2}{\lambda_{Di}^2}\right) + \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \left(\frac{\lambda_{Db}}{\lambda_{De}}\right)^3 \left[4 - \left(\frac{\lambda_{Db}}{\lambda_{De}}\right)^2\right] \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m_e}{m_i} \frac{\lambda_{Db}^2}{\lambda_{De}^2}\right),$$

obtida da condição de maximização analítica de  $\gamma_{\max}^{IB}/kC_s$  com relação a  $n_b/n_i$ . A razão de crescimento  $\gamma_{\max}^{IB}$ , para os parâmetros da Figura V.2, varia devido aos termos de amortecimento de Landau dos elétrons e íons do plasma, sendo maximizada quando a contribuição da soma destes dois termos for mínima. Como supusemos  $(\omega_r - \vec{k} \cdot \vec{v}_b)/kv_{tb} = 2^{-1/2}$ , a contribuição dos íons do feixe à razão de crescimento total das ondas é constante, da mesma forma que no caso anterior. Se o feixe for injetado numa direção quase perpendicular ao campo magnético, a interação do mesmo com os íons do plasma é grande e em consequência diminuindo o valor total de  $\gamma_{\max}^{IB}$ . Se a direção for mais paralela, então a contribuição dos elétrons torna-se importante e novamente ocasionando uma diminui

ção na razão de crescimento das ondas. Assim, o valor máximo de  $\gamma_{\max}^{IB}$  deve ocorrer a um ângulo situado num valor intermediário entre os valores limites acima, como mostra a análise feita na Figura V.2.

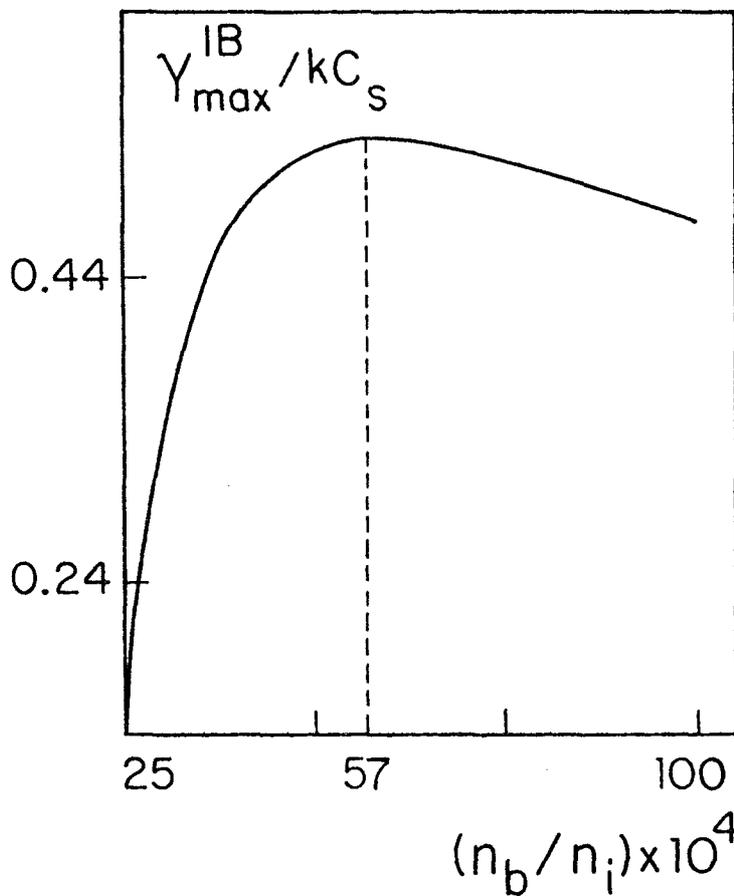


Figura V.2 - Variação da razão de crescimento  $\gamma_{\max}^{IB} / kC_s$  das instabilidades no modo íon-feixe ressonante em função da razão de densidades. Considerou-se  $T_e/T_i = 10$ ,  $T_b/T_i = 0,2$  e  $v_b/v_{te} = 0,12$ . O máximo valor da razão de crescimento vale  $\gamma_{\max}^{IB} = 0,53 kC_s$  e ocorre quando  $n_b/n_i = 5,7 \times 10^{-3}$  ( $\theta = 73,94^\circ$ ).

Para o modo íon-acústico, a razão de crescimento (V.15) pode ser escrita como

$$\frac{\gamma_{\max}^{\text{IA}}}{kC_s} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left\{ \left(\frac{\lambda D_e}{\lambda D_b}\right)^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{T_e}{T_i}\right) - \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_e}{2m_i}\right) \right\} \quad (\text{V.15b})$$

A variação de  $\gamma_{\max}^{\text{IA}}/kC_s$  em função de temperaturas  $T_e/T_i$  pode ser vista na Figura V.3. A curva foi obtida considerando-se  $v_b/v_{te} = 0,12$ ,  $n_b/n_i = 2 \times 10^{-3}$  e  $T_b/T_i = 2$ . Em vista das restrições impostas sobre o modo íon-acústico, escolhemos o intervalo de temperaturas  $40 \leq T_e/T_i \leq 100$ , o qual fornece para o ângulo  $\theta$  de injeção do feixe, o intervalo  $87,96^\circ \leq \theta \leq 88,78^\circ$ . Assim, para os parâmetros acima, as instabilidades no modo íon-acústico, da mesma forma que as instabilidades no modo íon-feixe ressonante, ocorrem para uma direção do feixe quase perpendicular ao campo magnético. Além disso, como na expressão (V.15b) os elétrons contribuem com um termo constante dado por  $2^{-1} \left[ (\pi m_e / 2m_i)^{1/2} \exp(-m_e / 2m_i) \right]$ , a variação de  $\gamma_{\max}^{\text{IA}}$  é devida somente à variação dos termos de Landau dos íons do feixe e do plasma. Para uma razão de densidades  $n_b/n_i$  fixa, o termo associado ao feixe cresce, enquanto que o termo associado aos íons (para  $T_e/T_i > 10$ ) decresce, com o aumento da razão  $T_e/T_i$  (conseqüentemente, com o aumento de  $\theta$ ). Dessa forma, o máximo valor da razão de crescimento das ondas ocorre para o maior ângulo  $\theta$  possível. Para os valores acima, obtivemos que este máximo vale  $0,023 kC_s = 0,003 kv_b$  e ocorre quando  $\theta = 88,78^\circ$ . Os valores para a razão de crescimento das ondas íon-acústicas po

dem ser acrescidos, bastando considerar maiores valores da razão  $n_b/n_i$ . Assim, supondo  $T_e/T_i = 10$ ,  $T_b/T_i = 1$ ,  $v_b/v_{te} = 0,12$  e  $n_b/n_i = 10^{-2}$ , obtemos  $\gamma_{\max}^{IA} = 0,042 kC_s = 0,006 kv_b$  e  $\theta = 85,36^\circ$ .

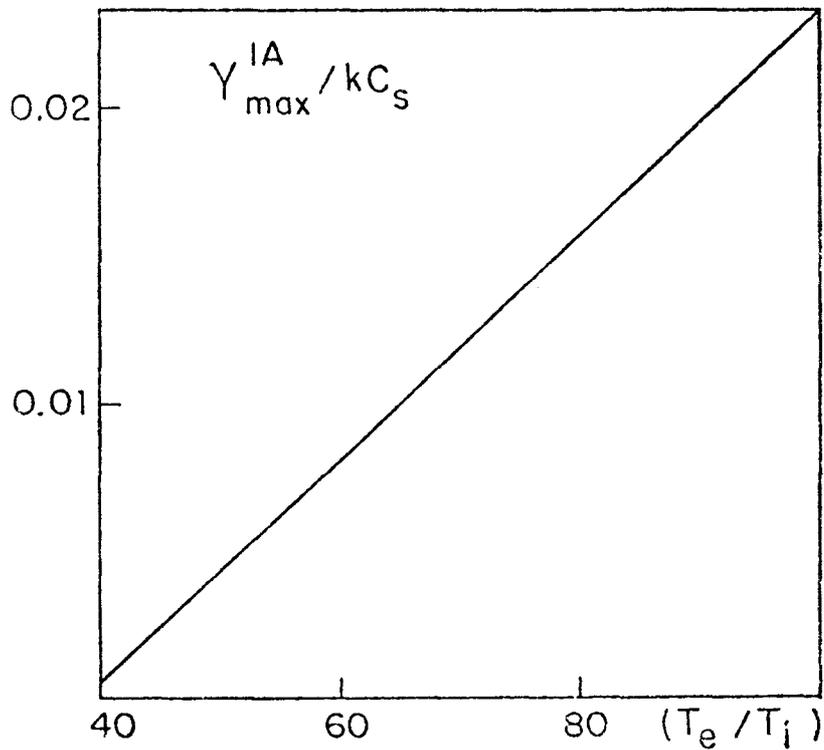


Figura V.3 - Gráfico da razão de crescimento  $\gamma_{\max}^{IA}/kC_s$  das instabilidades no modo ion-acústico em função da razão de temperaturas  $T_e/T_i$ , supondo  $v_b/v_{te} = 0,12$ ,  $n_b/n_i = 2 \times 10^{-3}$  e  $T_b/T_i = 2$ . A figura mostra um comportamento linear da razão de crescimento no intervalo de temperaturas considerado. Quando  $T_e/T_i = 100$  ( $\theta = 88,78^\circ$ ), obtemos  $\gamma_{\max}^{IA}/kC_s = 0,023 kC_s$ .

A seguir vamos analisar, usando a teoria quasilinear, o mecanismo da transferência de energia cinética do feixe para o plasma de fundo e para as ondas, durante o estágio inicial da instabilidade.

Usando (III.8) e (V.1), obtemos a variação temporal do momentum de cada componente do plasma.

$$m_e n_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = 2\pi^{1/2} \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} \frac{\omega_r}{k_{\parallel} v_{te}} \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{k_{\parallel}^2 v_{te}^2}\right) \quad (V.16a)$$

$$m_i n_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = 2\pi^{1/2} \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{Di}^2} \epsilon_{\vec{k}} \left[ \frac{\gamma}{\omega_r} \frac{k^2 v_{ti}^2}{\pi^{1/2} \omega_r^2} + \frac{\omega_r}{k v_{ti}} \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{k^2 v_{ti}^2}\right) \right] \quad (V.16b)$$

$$m_b n_b \frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t} = -2\pi^{1/2} \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{Db}^2} \epsilon_{\vec{k}} \frac{(\vec{k} \cdot \vec{v}_b - \omega_r)}{k v_{tb}} \exp\left[-\left(\frac{\omega_r - \vec{k} \cdot \vec{v}_b}{k v_{tb}}\right)^2\right] \quad (V.16c)$$

Para que existam ondas com razão de crescimento positiva, a parte real ( $\omega_r$ ) da frequência deve ser menor do que  $\vec{k} \cdot \vec{v}_b$ . Portanto, o feixe movimenta-se em sentido oposto ao plasma de fundo, decrescendo a velocidade  $v_b(t)$  do feixe, relativamente à velocidade  $v(t)$  dos elétrons e íons e conseqüentemente, decrescendo  $\gamma$ .

Das expressões (V.16a) - (V.16c), considerando  $\delta = \pi/2$

e  $\theta = \cos^{-1}(2^{-1/2}v_{tb}/v_b + \omega_r/kv_{tb})$ , obtemos a variação temporal do momentum de cada componente relativa aos modos mais instáveis. Introduzindo as notações  $m_j n_j (\partial v_{j\parallel} / \partial t)$  e  $m_j n_j (\partial v_{j\perp} / \partial t)$  para simbolizar as derivadas temporais do momentum nas direções paralela e perpendicular ao campo magnético, obtemos

$$m_j n_j \partial v_{j\perp} / \partial t = 0 \quad , \quad (V.17)$$

já que os modos mais instáveis possuem  $k_{\perp} = 0$ , isto é, a relaxação de velocidade ocorre somente na direção paralela a  $\vec{B}$ . Se supomos que o espectro de energia das ondas seja unidimensional, isto é,  $\epsilon_{\vec{k}} = \epsilon_k \delta(\delta - \pi/2)$ , obtemos para a direção paralela,

$$m_e n_e \frac{\partial v_{e\parallel}}{\partial t} = 2\pi^{1/2} \int \frac{dk k}{k^2 \lambda_{De}^2} \frac{\omega_r}{v_{te}} \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{k^2 v_{te}^2}\right) \epsilon_k \quad , \quad (V.18a)$$

$$m_i n_i \frac{\partial v_{i\parallel}}{\partial t} = 2\pi^{1/2} \int \frac{dk k}{k^2 \lambda_{De}^2} \left(\frac{\lambda_{De}}{\lambda_{Di}}\right)^2 \left[ \left(\frac{kv_{ti}}{\omega_r}\right)^3 \frac{\gamma_{\max}}{\pi^{1/2} v_{ti}} + \frac{\omega_r}{v_{ti}} \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{k^2 v_{ti}^2}\right) \right] \epsilon_k \quad , \quad (V.18b)$$

$$m_b n_b \frac{\partial v_{b\parallel}}{\partial t} = -2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \int \frac{dk k}{k^2 \lambda_{De}^2} \frac{\lambda_{De}^2}{\lambda_{Db}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) k \epsilon_k \quad . \quad (V.18c)$$

Logo, a razão entre a taxa de variação de momentum dos íons e a taxa de variação de momentum dos elétrons é dada aproximadamente por,

$$\frac{\partial p_{i\parallel}/\partial t}{\partial p_{e\parallel}/\partial t} = \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \left(\frac{\lambda_{De}}{\lambda_{Db}}\right)^3 \exp\left(\frac{m_e}{2m_i} \frac{\lambda_{Db}^2}{\lambda_{De}^2}\right) \times \left[ \frac{2^{3/2}}{\pi^{1/2}} \frac{\gamma_{\max}}{\omega_r} + \left(\frac{\lambda_{Db}}{\lambda_{Di}}\right)^3 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\lambda_{Db}^2}{\lambda_{Di}^2}\right) \right] \quad (V.19)$$

Para o modo íon-feixe ressonante ( $\lambda_{De}^2 > \lambda_{Db}^2$ ), o momentum do feixe é transferido predominantemente aos íons do plasma. Para a máxima razão de crescimento, de (V.19) temos,  $(\partial p_{i\parallel}/\partial t)/(\partial p_{e\parallel}/\partial t) \approx 8,3 \times 10^3$  relativamente aos dados da figura V.1 e  $(\partial p_{i\parallel}/\partial t)/(\partial p_{e\parallel}/\partial t) \approx 2,9$  para os parâmetros da Figura V.2.

Para o modo íon-acústico ( $\lambda_{Db}^2 > \lambda_{De}^2$ ) não é possível pretermos a priori qual das espécies do plasma de fundo recebe a maior quantidade de momentum do feixe. Para os parâmetros da Figura V.3 temos,  $(\partial p_{i\parallel}/\partial t)/(\partial p_{e\parallel}/\partial t) \approx 0,06$ , enquanto que, para  $T_e/T_i = 10$ ,  $T_b/T_i = 1$ ,  $v_b/v_{te} = 0,12$  e  $n_b/n_i = 10^{-2}$ , para os quais  $\gamma_{\max}^{IA} = 0,042 kC_s$ , temos  $(\partial p_{i\parallel}/\partial t)/(\partial p_{e\parallel}/\partial t) = 0,1$ . Em ambos os casos, a maior parte do momentum do feixe é transferido aos elétrons.

Da expressão (V.18c) obtemos a evolução temporal da energia cinética média dos íons do feixe para a razão de crescimento  $\gamma_{\max}$ ,

$$\frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} = -\left(\frac{2\pi}{e}\right)^{1/2} \int \frac{dkk}{k^2 \lambda_{Db}^2} \left(\omega_r + \frac{kv_{tb}}{2^{1/2}}\right) \epsilon_k \quad (V.20)$$

Particularizando esta expressão para os dois modos limites temos,

$$\left(\frac{\partial \epsilon_b}{\partial t}\right)_{IB} = -\left(\frac{2\pi}{e}\right)^{1/2} \left[1 + \left(\frac{n_b}{n_e}\right)^{1/2}\right] \int \frac{dkk}{k^2 \lambda_{Db}^2} \omega_r \epsilon_k, \quad (V.20b)$$

para o modo íon-feixe ressonante e

$$\left(\frac{\partial \epsilon_b}{\partial t}\right)_{IA} = -\left(\frac{2\pi}{e}\right)^{1/2} \left[1 + \left(\frac{T_b}{T_e}\right)^{1/2}\right] \int \frac{dk k}{k^2 \lambda_{Db}^2} \omega_r \epsilon_k, \quad (V.20c)$$

para o modo íon-acústico.

Como já foi discutido em capítulos anteriores, a medida que  $(\partial \epsilon_b / \partial t)$  diminui no tempo, aumenta a temperatura de ao menos uma das espécies constituintes do plasma e aumenta também, a energia eletrostática das ondas. A seguir calculamos a variação temporal de tais quantidades, considerando que no plasma esteja ocorrendo as instabilidades íon-feixe ressonante e íon-acústica. Substituindo-se (V.1) em (III.11) obtemos,

$$\frac{\partial W_e}{\partial t} = \int d\vec{k} \frac{\partial \epsilon_{\vec{k}}}{\partial t} \left[ \frac{k_{\perp}^2 \omega_{pe}^2}{k^2 \Omega_e^2} + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} + \frac{\pi^{1/2}}{k^2 \lambda_{De}^2} \frac{\omega_r}{\gamma} \frac{\omega_r}{k_{\parallel} v_{te}} \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{k_{\parallel}^2 v_{te}^2}\right) \right], \quad (V.21a)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} = \int d\vec{k} \frac{\partial \epsilon_{\vec{k}}}{\partial t} \left[ \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_r^2} + \frac{\pi^{1/2}}{k^2 \lambda_{Di}^2} \frac{\omega_r}{\gamma} \frac{\omega_r}{k v_{ti}} \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{k^2 v_{ti}^2}\right) \right], \quad (V.21b)$$

$$\frac{\partial W_b}{\partial t} = \int d\vec{k} \frac{\partial \epsilon_{\vec{k}}}{\partial t} \left[ \frac{1}{k^2 \lambda_{Db}^2} + \frac{\pi^{1/2}}{k^2 \lambda_{Db}^2} \frac{(\omega_r - \vec{k} \cdot \vec{v}_b)^2}{\gamma k v_{tb}} \exp\left(-\left(\frac{\omega_r - \vec{k} \cdot \vec{v}_b}{k v_{tb}}\right)^2\right) \right]. \quad (V.21c)$$

Como estamos considerando  $\gamma > 0$ , as expressões acima indicam que  $T_e$ ,  $T_i$  e  $T_b$  aumentam a medida que o tempo passa. Para os modos mais instáveis, obtemos

$$\frac{\partial W_e}{\partial t} = 2 \frac{\lambda_{Db}^2}{\lambda_{De}^2} \int \frac{dk}{k^2 \lambda_{Db}^2} \left[ \frac{\gamma_{\max}}{\omega_r} + \frac{\pi^{1/2} \omega_r}{k v_{te}} \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{k^2 v_{te}^2}\right) \right] \omega_r \epsilon_k \quad (V.22a)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} = 2 \frac{\lambda_{Db}^2}{\lambda_{Di}^2} \int \frac{dk}{k^2 \lambda_{Db}^2} \left[ \frac{\gamma_{\max}}{\omega_r} \frac{k^2 v_{ti}^2}{2\omega_r^2} + \frac{\pi^{1/2} \omega_r}{k v_{ti}} \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{k^2 v_{ti}^2}\right) \right] \omega_r \epsilon_k \quad (V.22b)$$

$$\frac{\partial W_b}{\partial t} = 2 \int \frac{dk}{k^2 \lambda_{Db}^2} \left( \frac{\gamma_{\max}}{\omega_r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{e} \right)^{1/2} \frac{k v_{tb}}{\omega_r} \right) \omega_r \epsilon_k \quad (V.22c)$$

Particularizando as expressões acima para o modo íon-feixe ressonante, obtemos para as razões das variações de energia térmica,

$$\left( \frac{\partial W_e}{\partial t} / \frac{\partial W_b}{\partial t} \right)_{IB} \approx \frac{\lambda_{Db}^2}{\lambda_{De}^2} \left[ \frac{\gamma_{\max}^{IB}}{\omega_r} + \left( \frac{\pi m_e}{2m_i} \right)^{1/2} \frac{\lambda_{Db}}{\lambda_{De}} \right] \left[ \frac{\gamma_{\max}^{IB}}{\omega_r} + \left( \frac{\pi n_b}{2en_e} \right)^{1/2} \right]^{-1} \approx \left( \frac{\lambda_{Db}}{\lambda_{De}} \right)^2 < 1$$

e

$$\left( \frac{\partial W_i}{\partial t} / \frac{\partial W_b}{\partial t} \right)_{IB} = \left[ \frac{\gamma_{\max}^{IB}}{\omega_r} + \left( \frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{\lambda_{Db}^3}{\lambda_{Di}^3} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\lambda_{Db}^2}{\lambda_{Di}^2}\right) \right] \left[ \frac{\gamma_{\max}^{IB}}{\omega_r} + \left( \frac{\pi n_b}{2en_e} \right)^{1/2} \right]^{-1} .$$

Como  $(\lambda_{De}/\lambda_{Di})^3 \exp(-\lambda_{Db}^2/2\lambda_{Di}^2) \geq \exp(-0.5)(n_b/n_e)$ ,

$$\left( \frac{\partial W_i}{\partial t} / \frac{\partial W_b}{\partial t} \right)_{IB} \geq 1 .$$

Logo, para o modo íon-feixe ressonante, os elétrons apresentam a menor taxa de variação de energia térmica.

Similarmente, para o modo íon-acústico, temos

$$\left(\frac{\partial W_e}{\partial t} / \frac{\partial W_b}{\partial t}\right)_{IA} \approx \frac{\lambda_{Db}^2}{\lambda_{De}^2} \left[ \frac{\gamma_{max}^{IA}}{\omega_r} + \left(\frac{\pi n_e}{2m_i}\right)^{1/2} \right] \left[ \frac{\gamma_{max}^{IA}}{\omega_r} + \left(\frac{\pi n_b}{2en_e}\right)^{1/2} \frac{\lambda_{Db}}{\lambda_{De}} \right]^{-1}$$

Lembrando que para este modo  $\lambda_{Db}^2 / \lambda_{De}^2 > 1$ ,

$$\left(\frac{\partial W_e}{\partial t} / \frac{\partial W_b}{\partial t}\right)_{IA} \geq 1 .$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W_i}{\partial t} / \frac{\partial W_b}{\partial t}\right)_{IA} &= \frac{\lambda_{Db}^2}{\lambda_{De}^2} \left[ \frac{\gamma_{max}^{IA}}{\omega_r} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{\lambda_{De}^3}{\lambda_{Di}^3} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\lambda_{De}^2}{\lambda_{Di}^2}\right) \right] \\ &\times \left[ \frac{\gamma_{max}^{IA}}{\omega_r} + \left(\frac{\pi n_b}{2en_e}\right)^{1/2} \frac{\lambda_{Db}}{\lambda_{De}} \right]^{-1} \geq \frac{\lambda_{Db}^2}{\lambda_{De}^2} > 1 . \end{aligned}$$

Usando os parâmetros das figuras V.2 e V.3, relativamente ao máximo valor da razão de crescimento das instabilidades, podemos obter uma estimativa para a razão das variações temporais de energias térmicas,

$$\left(\frac{\partial W_e}{\partial t} / \frac{\partial W_b}{\partial t}\right) \approx \begin{cases} 1,13 \times 10^{-4}, & \text{para o modo íon-feixe ressonante .} \\ 4,01, & \text{para o modo íon-acústico .} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial W_i}{\partial t} / \frac{\partial W_b}{\partial t}\right) \approx \begin{cases} 0,9, & \text{para o modo íon-feixe ressonante .} \\ 1,79, & \text{para o modo íon-acústico .} \end{cases}$$

Para a energia cinética média do feixe, temos

$$\left| \frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} \right| \approx \begin{cases} 1,35 \times 10^4 \int \frac{dkk}{k^2 \lambda_{De}^2} \frac{\partial \epsilon_k}{\partial t} & \text{para o modo íon-feixe ressonante,} \\ 3,71 \int \frac{dkk}{k^2 \lambda_{De}^2} \frac{\partial \epsilon_k}{\partial t} & \text{para o modo íon-acústico.} \end{cases}$$

Lembrando que a variação temporal da densidade de energia das ondas é dada pela expressão

$$\frac{\partial W_E}{\partial t} = \int dkk \frac{\partial \epsilon_k}{\partial t},$$

concluimos que, para ambos os modos  $\left| \frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} \right| \gg \frac{\partial W_E}{\partial t}$ .

Dessa forma, sendo a densidade de energia total do sistema conservada, a maior parte da energia cinética  $\epsilon_b$  perdida pelo feixe é transformada em energia térmica dos íons do plasma e dos íons do feixe, quando ocorre uma instabilidade no modo íon-feixe ressonante. Somente uma pequena fração daquela energia contribue para o aumento da energia associada às ondas e energia térmica dos elétrons. No caso da instabilidade íon-acústica, a energia cinética  $\epsilon_b$  perdida pelos íons do feixe é transformada principalmente em energia térmica dos elétrons e íons do plasma de fundo. O acréscimo de energia térmica do feixe e de energia das ondas é pequeno comparado ao aumento de energia térmica das partículas do plasma. Assim, ambos os modos são interessantes do ponto de vista de aquecimento do plasma.

Como no modo íon-feixe ressonante as temperaturas  $T_i$  e

$T_b$ , relativas aos íons do plasma de fundo e do feixe, respectivamente, crescem no tempo mais rapidamente do que a temperatura  $T_e$  dos elétrons, este modo satura a medida que a razão  $T_b/T_e$  se aproxima do valor limite  $T_b/T_e \lesssim n_b/n_e$ . Quando esta razão de temperaturas torna-se maior do que  $n_b/n_e$ , ocorre o modo íon-acústico. Para este modo, vemos que a temperatura  $T_i$  dos íons e a temperatura  $T_e$  dos elétrons cresce no tempo mais rapidamente do que a temperatura  $T_b$  dos íons do feixe. Entretanto, como a razão de crescimento de  $T_e$  é somente um pouco maior do que a razão de crescimento da temperatura  $T_i$ , a razão  $T_e/T_i$  é aproximadamente constante e a condição  $T_e/T_i > 2$  é satisfeita num intervalo de tempo relativamente grande. O pequeno acréscimo na temperatura  $T_b$  dos íons do feixe reduz muito pouco o crescimento de Landau devido ao feixe. Conseqüentemente, o modo íon-acústico pode ocorrer no plasma num intervalo de tempo relativamente longo (mas pequeno comparado com o intervalo de tempo entre duas colisões sucessivas) antes de ocorrer a saturação do modo.

## VI - ÍONS DO FEIXE FRIOS, ELÉTRONS E ÍONS DO PLASMA QUENTES

Se o plasma do Capítulo II for constituído por um feixe de íons frios e por elétrons e íons do plasma de fundo quentes, a relação de dispersão (II.1) pode ser escrita como

$$D(\vec{k}, \omega) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \delta}{\Omega_e^2} + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \left\{ 1 + \frac{i\pi^{1/2} \omega_r}{k_{||} v_{te}} \exp(-\omega_r^2 / k_{||}^2 v_{te}^2) \right\} \\ + \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} \left\{ 1 + \frac{i\pi^{1/2} \omega_r}{k v_{ti}} \exp(-\omega_r^2 / k^2 v_{ti}^2) \right\} - \frac{\omega_{pb}^2}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_b)^2} = 0 \quad , \quad (VI.1)$$

onde usamos as expansões da função de dispersão do plasma para grande e pequeno argumentos, adequadas às suposições acima, mantendo apenas os termos de 1ª ordem e desprezando o termo de Landau associado ao feixe.

Introduzindo as notações compactas:

$$A = \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \left\{ 1 + T_e / T_i + k^2 \lambda_{De}^2 (1 + \omega_{pe}^2 \cos^2 \delta / \Omega_e^2) \right\} \quad , \quad (VI.2a)$$

$$B = \pi^{1/2} \left\{ \frac{\omega_r}{k_{||} v_{te}} \frac{\exp(-\omega_r^2 / k_{||}^2 v_{te}^2)}{k^2 \lambda_{De}^2} + \frac{\omega_r}{k v_{ti}} \frac{\exp(-\omega_r^2 / k^2 v_{ti}^2)}{k^2 \lambda_{Di}^2} \right\} \quad , \quad (VI.2b)$$

$$C = \omega_{pb}^2 / (A^2 + B^2) \quad , \quad (VI.2c)$$

podemos expressar a razão de crescimento  $\gamma$  das ondas que satisfazem a relação de dispersão (VI.1) em função de A, B e C. Escrevendo  $\omega = \omega_r + i\gamma = \vec{k} \cdot \vec{v}_b + \delta\omega$  e  $\delta\omega = \delta\omega_r + i\gamma$ , obtemos de (VI.1) e das definições (VI.2a) - (VI.2c), que  $\gamma$  deve satisfazer a seguinte

te equação biquadrada:

$$4\gamma^4 + 4AC\gamma^2 - B^2C^2 = 0 \quad , \quad (\text{VI.3})$$

e que a parte real da frequência satisfaz às expressões

$$\omega_r = \vec{k} \cdot \vec{v}_b + \delta\omega_r \quad , \quad (\text{VI.4a})$$

sendo

$$\delta\omega_r = -\frac{CB}{2\gamma} \quad . \quad (\text{VI.4b})$$

Resolvendo a equação (VI.3) para ondas com razão de crescimento positivas, obtemos

$$\gamma = (AC/2)^{1/2} \left\{ -1 + [1 + B^2/A^2]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad , \quad (\text{VI.5a})$$

ou ainda,

$$\gamma = (\vec{k} \cdot \vec{v}_b - \omega_r)(A/B) \left\{ -1 + (1 + B^2/A^2)^{1/2} \right\} \quad . \quad (\text{VI.5b})$$

Portanto, a razão de crescimento  $\gamma$  será tanto maior, quanto menor a razão  $B^2/A^2$ , ou seja, quando os termos de amortecimento de Landau devido aos elétrons e aos íons forem muito pequenos comparados com os termos não ressonantes da relação de dispersão (VI.1). De um modo geral,  $B \leq A$  pois estamos supondo que os íons e os elétrons do plasma sejam quentes e estamos considerando o limite de grandes comprimentos de onda, isto é,  $k\lambda_{De} \ll 1$ . No limite  $B^2/A^2 \ll 1$ ,

obtemos de (VI.5), (VI.4a) e (VI.4b),

$$\gamma_{\max} = k C'_s (B/2A) \quad (\text{VI.6a})$$

e

$$\omega_r = \vec{k} \cdot \vec{v}_b - k C'_s, \quad (\text{VI.6b})$$

onde  $C'_s = \beta C_s$  e  $\beta = (n_b/n_i)^{1/2} \left\{ 1 + T_e/T_i + k^2 \lambda_{De}^2 (1 + \omega_{pe}^2 \cos^2 \delta / \Omega_e^2) \right\}^{-1/2}$  é uma velocidade acústica iônica efetiva. Por essa razão denominamos o modo de propagação (VI.6) de modo acústico efetivo. Como estamos considerando o limite  $B \ll A$ , concluímos que  $\gamma_{\max} \ll \delta \omega_r$ . Além disso, o valor da frequência  $\omega_r$  das ondas do modo íon-acústico efetivo depende, não somente da direção de propagação  $\delta$  da onda com relação à direção de injeção  $\theta$  do feixe, mas também do valor relativo entre a velocidade média  $v_b$  do feixe e a velocidade acústica iônica efetiva  $C'_s$ . Essas velocidades podem ser da mesma ordem de grandeza, dependendo dos valores da razão de densidades  $(n_b/n_i)$  e da razão de temperaturas  $T_e/T_i$  do plasma, pois a condição  $v_b < v_{te}$ , expressa em função de  $C'_s$ , fornece

$$\frac{v_b}{C'_s} < \left( 2 \frac{m_i}{m_e} \frac{n_i}{n_b} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right)^{1/2}, \quad (\text{VI.7})$$

onde o lado direito da desigualdade acima assume um valor grande comparado à unidade. Devido à suposição  $\omega_r/k_{\parallel} v_{te} \ll 1$ , os modos de maior frequência podem se propagar numa direção mais paralela ao campo magnético do que os modos de menor frequência. Essa su

posição fornece a seguinte restrição sobre a direção de propagação das ondas:

$$\text{sen } \delta > \frac{C_s'}{v_{te}} \left( \frac{v_b}{C_s} \text{sen}(\theta + \delta) - 1 \right) . \quad (\text{VI.8a})$$

Esta condição é satisfeita mesmo para  $(\theta + \delta) = \pi/2$  e  $\delta = \pi/2$  pois  $v_b < v_{te}$ . Entretanto, como estamos considerando ondas com razão de crescimento positivas, é necessário que o lado direito da desigualdade (VI.8a) seja positiva, para que  $B$ , e portanto  $\gamma_{\text{max}}$ , sejam maiores do que zero. Impondo esta restrição e o fato de que  $\text{sen } \delta \leq 1$ , obtemos de (VI.8a),

$$\frac{v_{te}}{v_b} \left[ 1 + \beta \left( \frac{m_e}{2m_i} \right)^{1/2} \right] > \text{sen}(\theta + \delta) > \frac{v_{te}}{v_b} \beta \left( \frac{m_e}{2m_i} \right)^{1/2} . \quad (\text{VI.8b})$$

A hipótese de que os íons do plasma sejam quentes, impõe a seguinte condição sobre as direções de propagação  $\delta$  da onda e de injeção  $\theta$  do feixe,

$$\text{sen}(\theta + \delta) < \frac{v_{te}}{v_b} \left( \frac{T_i}{T_e} \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left[ 1 + \beta \left( \frac{T_e}{2T_i} \right)^{1/2} \right] . \quad (\text{VI.8c})$$

Expressando a mesma condição como uma restrição sobre a razão de densidades, temos que

$$\left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/2} \gg \left( 1 + \frac{T_i}{T_e} \right)^{1/2} \left( \frac{v_b}{v_{ti}} \text{sen}(\theta + \delta) - 1 \right) . \quad (\text{VI.8d})$$

A desigualdade (VI.8d) evidencia a impossibilidade de

propagação de ondas acústicas efetivas na direção do feixe ( $\theta + \delta = \pi/2$ ) para velocidades térmicas tais que  $v_{ti} < v_b < v_{te}$  (o que requer um valor para  $T_e/T_i > 0,038$  supondo  $v_b/v_{te} = 0,12$ ), pois estamos considerando um feixe pouco denso ( $n_b/n_i \ll 1$ ). Da suposição de que os íons do feixe sejam frios, obtemos,

$$\left(\frac{n_b}{2n_i}\right)^{1/2} \gg \left(\frac{T_b}{T_e} + \frac{T_b}{T_i}\right)^{1/2}, \quad (\text{VI.8e})$$

a qual requer que a temperatura  $T_b$  dos íons do feixe seja pequena comparada com as temperaturas  $T_e$  e  $T_i$  dos elétrons e íons do plasma.

Na Figura VI.1 mostramos o comportamento da razão de crescimento  $\gamma_{\max}$  à medida que o ângulo de propagação  $\delta$  da onda se modifica, considerando fixas a direção  $\theta$  de injeção do feixe, a razão de velocidades  $v_b/v_{te}$ , a razão de densidades  $n_b/n_i$  e a razão de temperaturas  $T_e/T_i$ . Na curva I os valores de  $\gamma_{\max}/kv_b$  em função de  $\delta$  foram calculados tomando  $T_e/T_i = 2$ , enquanto que para a curva II consideramos  $T_e/T_i = 0,05$ . Em ambas as curvas usamos  $n_b/n_i = 10^{-3}$ ,  $v_b/v_{te} = 0,12$  e  $\theta = 0^\circ$ . Para a razão  $T_e/T_i = 2$ , das restrições (VI.8b) e (VI.8c), obtivemos que  $0,144^\circ < \theta + \delta < 8,04^\circ$ . As mesmas restrições, calculadas para a razão  $T_e/T_i = 0,05$ , fornecem  $0,24^\circ < \theta + \delta < 60,76^\circ$ . De um modo geral, um valor grande para a razão  $T_e/T_i$  implica numa pequena região permitida para a variação de  $\theta + \delta$ . Assim, como estamos interessados na variação de  $\gamma_{\max}$  em função de  $\delta$ , para  $0 \leq \delta \leq \pi/2$  tomamos  $\theta = 0^\circ$ . Da condição (VI.8e), para o valor da razão  $n_b/n_i$  considerada, obtivemos que a temperatura dos elétrons deve ser da ordem de dez mil vezes o valor da

temperatura dos íons do feixe ( $T_b/T_e < 1,67 \times 10^{-4}$  quando  $T_e/T_i = 2$  e  $T_b/T_e < 4,76 \times 10^{-4}$  quando  $T_e/T_i = 0,05$ ). Para a curva I, a máxima razão de crescimento ocorre quando  $5,5^\circ < \delta < 6,0^\circ$  aproximadamente. Para a outra curva, a maximização é obtida para uma direção de propagação em torno de  $40^\circ$  aproximadamente. Essas direções, para os parâmetros considerado, satisfazem a equação

$$\frac{e^{-y^2}(1-2y^2)}{\sin^2 \delta} + \frac{2^{1/2}}{\beta} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \frac{v_b}{v_{te}} \frac{m_i}{m_e} (1-2z^2y^2) \exp(-z^2y^2) = 0 \quad ,$$

onde  $y = \omega_r/k v_{te}$  e  $yz = \omega_r/kv_{ti}$ , obtida da maximização analítica de  $\gamma_{\max}/kv_b$  em relação a direção de propagação  $\delta$ , supondo  $\theta = 0^\circ$ .

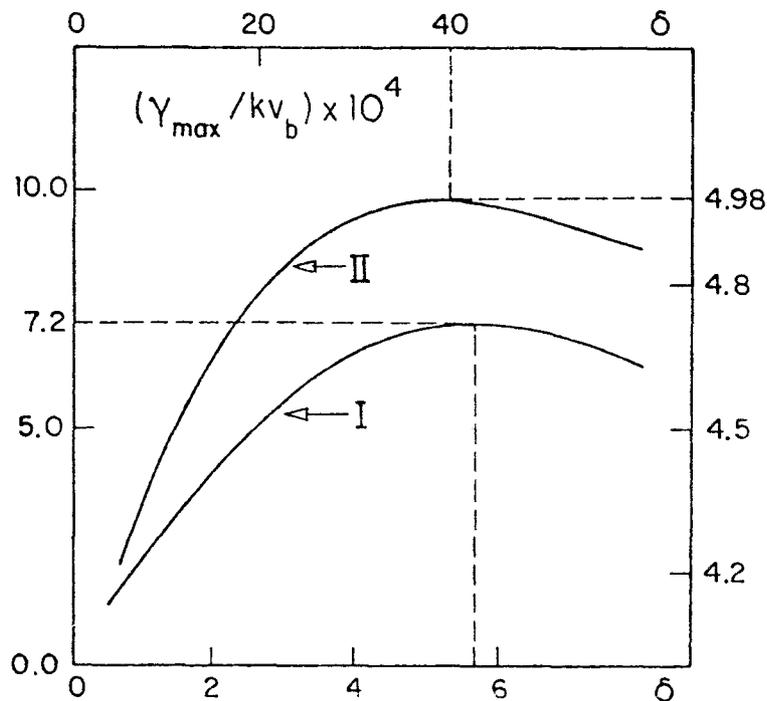


Figura VI.1 - Variação da razão de crescimento  $\gamma_{\max}/kv_b$  das instabilidades no modo íon-acústico modificado em função do ângulo  $\delta$ , para  $n_b/n_i = 10^{-3}$ ,  $v_b/v_{te} = 0,12$  e  $\theta = 0^\circ$ . A curva I, ( $0,5^\circ < \delta < 8,0^\circ$ ), foi obtida tomando  $T_e/T_i = 2$ , sendo maximizada quando  $5,5^\circ < \delta < 6,0^\circ$ . Para a curva II ( $5^\circ < \delta < 60^\circ$ ), obtida supondo  $T_e/T_i = 0,05$ , o máximo valor ocorre em  $\delta = 40^\circ$ .

Na Figura VI.2 mostramos a variação de  $\gamma_{\max}/kv_b$  em função da razão de temperaturas  $T_e/T_i$ . A curva mostrada foi obtida considerando o feixe na direção do campo magnético ( $\theta = 0^\circ$ ) e a onda se propagando numa direção quase perpendicular a esta, isto é,  $\delta = 10^\circ$ . Para os demais parâmetros, tomamos novamente  $n_b/n_i = 10^{-3}$  e  $v_b/v_{te} = 0,12$ . Para estes valores, a restrição (VI.8d), vista como uma restrição sobre a razão de temperaturas  $T_e/T_i$ , impõe que  $T_e/T_i < 1,26$ . Assim, escolhemos o intervalo  $0,1 < T_e/T_i < 1,26$  para analisar o comportamento da razão de crescimento das ondas a medida que  $T_e/T_i$  se modifica. Relativamente a estas razões de temperaturas das componentes do plasma, obtêm-se de (VI.8e), que  $T_b/T_e < 4,55 \times 10^{-4}$ , ou seja, que o feixe deve ser muito frio. A curva mostra que  $\gamma_{\max}$  apresenta um valor máximo quando  $T_e/T_i = 0,8$ , aproximadamente. A direção de propagação  $\delta$  da onda foi considerada quase perpendicular ao campo pois, quanto maior o valor de  $\delta$ , menor é o valor possível para a razão  $T_e/T_i$  obtida da restrição (VI.8d). Assim, por exemplo, para os parâmetros acima, mas supondo  $\delta = 45^\circ$ , a restrição (VI.8d) requer que  $T_e/T_i < 0,076$ , que é um valor pouco usual para plasmas de reatores.

Quando a velocidade térmica dos íons do plasma for comparável à velocidade média do feixe, isto é, se  $v_{ti} \sim v_b < v_{te}$ , então a restrição (VI.8c), para um plasma com  $n_b/n_i = 10^{-3}$  e  $v_b/v_{te} = 0,12$ , no qual ocorra a propagação de ondas na direção do feixe ( $\theta + \delta = \pi/2$ ) é satisfeita para uma razão de temperaturas  $T_e/T_i < 0,038$ . Neste caso, a velocidade de fase das ondas do modo acústico modificado torna-se comparável à velocidade de fase  $v_{ph} = v_b - C_s(n_b/n_i)^{1/2}$  das ondas acústicas lentas estudadas por Grésillon e Doveil (G75).

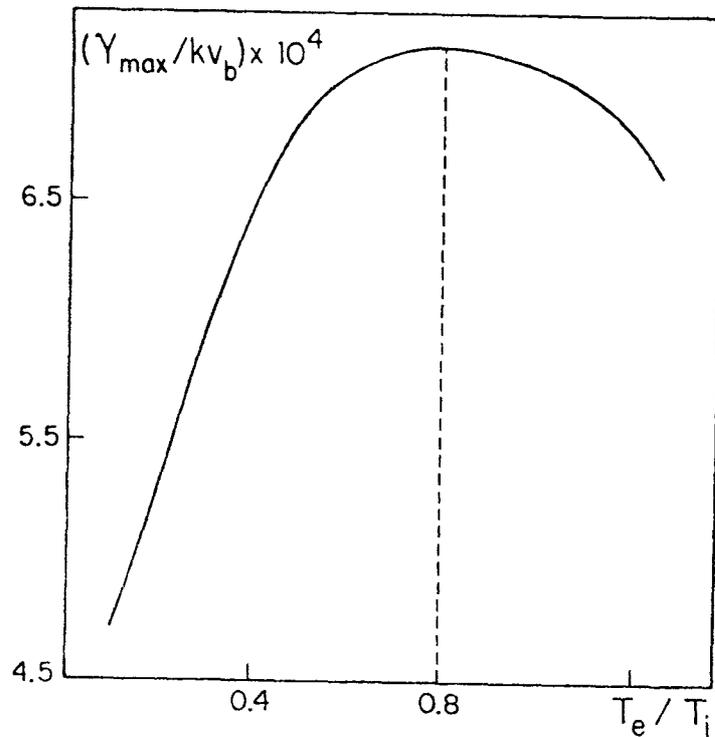


Figura VI.2 - A figura mostra a variação da razão de crescimento  $\gamma_{\max}/kv_b$  das instabilidades no modo íon-acústico modificado em função da razão de temperaturas, no intervalo  $0,1 \leq T_e/T_i \leq 1,26$ . Considerou-se  $\theta = 0^\circ$ ,  $\delta = 10^\circ$ ,  $n_b/n_i = 10^{-3}$  e  $v_b/v_{te} = 0,12$ . O máximo valor da curva ocorre quando  $T_e/T_i = 0,8$  e vale  $\gamma_{\max} = 7,25 \times 10^{-4} kv_b$ .

Para estudar a variação no tempo das propriedades macroscópicas do plasma devido a interação das ondas acústicas modificadas com as partículas do plasma e analisar a importância destas instabilidades como um possível mecanismo de aquecimento do plasma, vamos novamente calcular a variação temporal do momento e a variação temporal das energias envolvidas no processo de desaceleração do feixe, usando a teoria quasilinear. O cálculo dessas quantidades envolve as expressões das partes reais e ima-

ginárias de  $\chi_j$ . Da relação de dispersão (VI.1), temos,

$$\text{Re}\chi_e = \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \cos^2 \delta + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \quad , \quad (\text{VI.9a})$$

$$\text{Im}\chi_e = \frac{\pi^{1/2}}{k^2 \lambda_{De}^2} \frac{\omega_r}{k_{||} v_{te}} \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{k_{||}^2 v_{te}^2}\right) \quad , \quad (\text{VI.10a})$$

$$\text{Re}\chi_i = \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} \quad , \quad (\text{VI.9b})$$

$$\text{Im}\chi_i = \frac{\pi^{1/2}}{k^2 \lambda_{Di}^2} \frac{\omega_r}{k v_{ti}} \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{k^2 v_{ti}^2}\right) \quad , \quad (\text{VI.10b})$$

$$\text{Re}\chi_b = -\frac{\omega_{pb}^2 \{(\omega_r - \vec{k} \cdot \vec{v}_b)^2 - \gamma^2\}}{\{(\omega_r - \vec{k} \cdot \vec{v}_b)^2 + \gamma^2\}^2} = -\frac{\omega_{pb}^2}{(k C_s')^2} \quad , \quad (\text{VI.9c})$$

quando  $B^2 \ll A^2$  e

$$\text{Im}\chi_b = \frac{2\omega_{pb}^2 (\omega_r - \vec{k} \cdot \vec{v}_b) \gamma}{\{(\omega_r - \vec{k} \cdot \vec{v}_b)^2 + \gamma^2\}^2} = \frac{B}{A} R_e D_b \quad , \quad (\text{VI.10c})$$

quando  $B^2 \ll A^2$ . Assim, de (III.8), (VI.10a), (VI.10b) e (VI.10c), obtemos para a variação temporal do momentum, no limite  $B^2 \ll A^2$ ,

$$\frac{\partial \vec{p}_e}{\partial t} = 2\pi^{1/2} \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \frac{\omega_r}{k_{||} v_{te}} \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{k_{||}^2 v_{te}^2}\right) \vec{k} \epsilon_{\vec{k}} \quad , \quad (\text{VI.11a})$$

$$\frac{\partial \vec{p}_i}{\partial t} = 2\pi^{1/2} \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{Di}^2} \frac{\omega_r}{k v_{ti}} \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{k^2 v_{ti}^2}\right) \vec{k} \epsilon_{\vec{k}} \quad , \quad (\text{VI.11b})$$

$$\frac{\partial \vec{p}_b}{\partial t} = -4 \int d\vec{k} \left( \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} + \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} \right) \frac{\gamma_{\max}}{k C_s'} \vec{k} \epsilon_{\vec{k}} \quad . \quad (\text{VI.11c})$$

Para a variação temporal da energia cinética média do feixe, em vista de (VI.11c) temos,

$$\frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} = -4 \int d\vec{k} \left( \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} + \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} \right) \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_b}{k C_s'} \gamma_{\max} \epsilon_{\vec{k}} \quad . \quad (\text{VI.12a})$$

De (III.11) e das expressões (VI.9) e (VI.10), obtemos para a variação temporal da energia térmica associada às três componentes do plasma,

$$\frac{\partial W_e}{\partial t} = 2 \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \left\{ 1 + \frac{k^2 v_{te}^2 \cos^2 \delta}{2\Omega_e^2} + \frac{\pi^{1/2} \omega_r^2 \exp(-\omega_r^2/k_{\parallel}^2 v_{te}^2)}{\gamma_{\max} k_{\parallel} v_{te}} \right\} \gamma_{\max} \epsilon_{\vec{k}} \quad , \quad (\text{VI.12b})$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} = 2 \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{Di}^2} \left\{ 1 + \frac{\pi^{1/2} \omega_r}{\gamma_{\max}} \frac{\omega_r}{k v_{ti}} \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{k^2 v_{ti}^2}\right) \right\} \gamma_{\max} \epsilon_{\vec{k}} \quad , \quad (\text{VI.12c})$$

$$\frac{\partial W_b}{\partial t} = 2 \int d\vec{k} \left( \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} + \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} \right) \gamma_{\max} \epsilon_{\vec{k}} \quad . \quad (\text{VI.12d})$$

Assim, como a variação temporal da densidade de energia das on

das  $\bar{e}$  dada por

$$\frac{\partial W_E}{\partial t} = 2 \int d\vec{k} \gamma_{\max} \epsilon_{\vec{k}} \quad , \quad (\text{VI.12e})$$

da expressão (VI.12d) concluimos que a mesma  $\bar{e}$  pouco modificada pela presença das instabilidades, comparativamente à variação de energia térmica sofrida pelos íons do feixe, ou seja,  $\partial W_E / \partial t \ll \partial W_b / \partial t$ . Portanto, a energia obtida do freamento do feixe  $\bar{e}$  é transferida predominantemente aos íons do feixe e ao plasma de fundo sob a forma de energia térmica. Todas as espécies se aquecem. Entretanto, as condições iniciais do plasma, isto é, os valores iniciais de  $T_e/T_i$ ,  $v_b/v_{te}$ ,  $n_b/n_i$  e  $\theta$  decidem qual a espécie que mais se aquece devido às instabilidades. Assim, para os parâmetros da curva I da Figura VI.1, os íons do plasma apresentam a maior variação de energia térmica, enquanto que para a curva II, são os elétrons que recebem o maior acréscimo de temperatura. Para uma melhor compreensão deste comportamento, expressamos inicialmente a diferença entre as variações temporais de energias térmicas dos elétrons e íons como:

$$\frac{\partial W_e}{\partial t} - \frac{\partial W_i}{\partial t} = 2 \int \frac{d\vec{k}}{k^2 \lambda_{De}^2} \epsilon_{\vec{k}} k v_b \left[ \frac{\gamma}{k v_b} R(\gamma, \theta, T_e/T_i) \right] \quad , \quad (\text{VI.13})$$

onde  $R(\theta, \gamma, T_e/T_i)$  é a seguinte função,

$$R = 1 - \frac{T_e}{T_i} + \frac{\pi^{1/2} \omega_r}{\gamma} \frac{\omega_r}{k_{||} v_{te}} \left[ \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{k_{||}^2 v_{te}^2}\right) - \text{sen} \delta \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{k^2 v_{ti}^2}\right) \right] \quad .$$

Logo, analisando o sinal do termo entre colchetes da expressão (VI.13), podemos obter informação sobre o sinal da diferença de energias do lado esquerdo, em função da razão de temperaturas  $T_e/T_i$ . Assim, na Figura VI.3, mostramos a variação de  $(\gamma/kv_b)R(T_e/T_i)$  em função de  $T_e/T_i$ , utilizando os mesmos parâmetros da Figura VI.2, isto é, para  $\theta = 0^\circ$ ,  $\delta = 10^\circ$ ,  $n_b/n_i = 10^{-3}$ ,  $v_b/v_{te} = 0,12$  e  $0,1 < T_e/T_i < 1,26$ . Da curva obtida, verificamos que os elétrons são mais aquecidos do que os íons ( $\partial W_e/\partial t > \partial W_i/\partial t$ ) quando  $T_e/T_i < 0,3$ , aproximadamente, e que esta situação inverte-se quando  $T_e/T_i > 0,3$ .

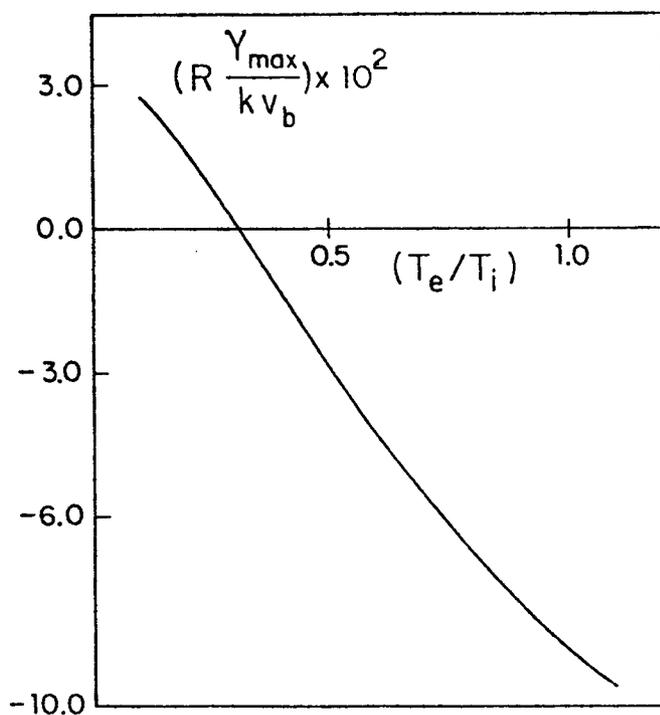


Figura VI.3 - A curva acima fornece o comportamento da função  $R \gamma_{\max}/kv_b$  em termos da razão de temperaturas  $T_e/T_i$ . No intervalo  $T_e/T_i < 0,3$ , no qual a curva é positiva,  $\partial W_e/\partial t > \partial W_i/\partial t$ , ao passo que no intervalo  $T_e/T_i > 0,3$ , no qual a curva torna-se negativa, tem-se  $\partial W_e/\partial t < \partial W_i/\partial t$ .

Deste modo, se inicialmente a temperatura dos elétrons for superior a  $0,3 T_i$ , o valor da razão  $T_e/T_i$  decresce no tempo e se a temperatura inicial dos elétrons for inferior a  $0,3 T_i$ , então o mecanismo de interação do feixe com o plasma é tal que o valor da razão  $T_e/T_i$  cresce no tempo. Portanto, somos levados a concluir que, embora inicialmente possa ocorrer como variação temporal na razão  $T_e/T_i$ , esta tende a se estabilizar no decorrer do tempo.

## VII - DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Os resultados obtidos neste trabalho acham-se resumidos nas tabelas VII.1, VII.2, VII.3 e VII.4. Para o modo íon-íon transversal ao campo, as ondas propagam-se quase perpendicularmente ao campo magnético, sendo a maior parte do momentum do feixe transferido aos íons do plasma. A energia livre disponível do processo de desaceleração do feixe no plasma é absorvida predominantemente pelos íons do plasma, sob a forma de energia térmica (50% da energia cinética média do feixe), pelas ondas (25%) e pelos elétrons sob a forma de energia térmica (25%). A máxima razão de crescimento das instabilidades no modo íon-íon transversal ao campo, para uma razão de densidades  $n_b/n_i = 2 \times 10^{-3}$ , vale  $\gamma_{\max}^{ii} = 0,087 kv_b$ .

No modo das duas correntes modificado, do Capítulo III, a direção de propagação das ondas, à semelhança do modo anterior, ocorre a grandes ângulos com relação ao campo magnético, embora não tão perpendicularmente. Em consequência disto, o feixe interage com os elétrons e os cálculos realizados mostram que o momentum do feixe é transferido principalmente aos elétrons. As maiores taxas de crescimento das energias envolvidas no processo de freamento do feixe no plasma ocorrem para os elétrons, sob a forma de energia térmica e para a energia associada às ondas, em quantidades aproximadamente equivalentes. O valor típico da máxima razão de crescimento das instabilidades no modo das duas correntes modificado, calculado para uma razão de densidades  $n_b/n_i = 2 \times 10^{-3}$  é dado por  $\gamma_{\max}^{mts} = 0,002 kv_b$ . Estudos teóricos e experimentais de instabilidades de ondas com frequências da ordem da

freqüência híbrida inferior  $\omega_{LH} = \omega_{pi} (1 + \omega_{pe}^2 / \Omega_e^2)^{-1/2}$  foram efetuadas por Chang (C75), que considerou o feixe percorrendo o plasma perpendicularmente ao campo magnético. De seus resultados concluiu que 1) a máxima razão de crescimento dessas instabilidades ocorria quando  $\omega/k_{\parallel} \approx v_{te}$ ; 2) as instabilidades eram insensíveis à variação da razão  $T_e/T_i$ ; 3) o intervalo de variação do ângulo  $\delta$  reduzia com o aumento da temperatura  $T_b$ ; 4) ocorria aquecimento do plasma. Resultados bastante semelhantes a estes obtivemos com relação aos modos íon-íon transversal ao campo e o das duas correntes modificado. No entanto, nossa análise mostrou que as instabilidades são maximizadas quando  $\theta + \delta = \pi/2$  e a velocidade de fase da onda, neste caso é dada por  $\omega/k = v_b \ll v_{te}$  em contradição ao resultado obtido por Chang. Critérios para haver a ocorrência de instabilidades no modo das duas correntes modificado, para ondas propagando-se paralelamente ao campo foram determinados por Fried e Wong (F66). Os mesmos obtiveram que, para um dado valor de  $n_b/n_i$  fixo, existe um valor crítico de  $T_b$  acima do qual a onda estabiliza-se, em concordância com nossa análise. Na experiência simulada através de computador feita por Davidson et alii (D70), os resultados foram obtidos para a situação em que dois feixes de íons frios moviam-se em direções opostas com velocidade relativa  $2v_d(0)$  através de elétrons com velocidade média inicial nula. Foi mostrado que, durante o estágio inicial das instabilidades, para as quais a máxima razão de crescimento  $\gamma_{max} = 3^{1/2} (m_e/4m_i)^{1/3} \omega_{pe}/2$  correspondia a  $k_0 v_d(0) = \omega_{pe}$ , a energia livre era transferida aos elétrons e para as ondas, em razões aproximadamente constantes, semelhantemente ao resultado obtido neste trabalho para o modo das duas correntes modificado. A im-

portância da instabilidade de ondas com frequência da ordem da frequência híbrida inferior, como fonte adicional de aquecimento do plasma, é discutida por McBride et alii (M72) e por Papadopoulos et alii (P71).

No Capítulo IV, vimos que a direção de propagação das ondas no modo íon-acústico não ressonante depende da razão  $n_b/n_i$ , cujo valor, em vista das restrições impostas pelo modo, deve ser superior a  $10^{-5}$  aproximadamente. Para uma razão  $n_b/n_i = 2 \times 10^{-3}$  as ondas podem se propagar no intervalo  $90^\circ \geq \delta > 11,79^\circ$ . O momento do feixe é transferido predominantemente aos íons do plasma. As energias térmicas dos elétrons e dos íons do plasma aumentam numa mesma taxa e somente uma quantidade insignificante da energia cinética do feixe contribui ao aumento da temperatura dos íons do feixe e da energia eletrostática das ondas. Como a razão  $T_e/T_i$  mantém-se aproximadamente constante, a restrição  $T_e/T_i \gg 2$ , necessária para que sejam geradas as instabilidades acústicas, não será transgredida durante a propagação das instabilidades. Além disso, como a razão  $v_b/v_{te}$  diminui no tempo, a direção de propagação das ondas modifica-se tornando-se cada vez mais paralela ao campo magnético. Quando  $\delta = 90^\circ$ , supondo  $n_b/n_i = 2 \times 10^{-3}$ , obtivemos  $\gamma_{\max}^{ia} = 0,087 kv_b$  que corresponde ao máximo valor que a razão de crescimento das ondas no modo íon-acústico não ressonante podem atingir para o valor  $n_b/n_i$  considerado. O intervalo para a variação do ângulo de propagação  $\delta$  aumenta com a densidade do feixe relativa  $\bar{n}$  do plasma. Assim, para uma razão  $n_b/n_i = 10^{-2}$ , obtivemos  $90^\circ \leq \delta < 6,7^\circ$ . As observações experimentais de Mah et alii (M70) fornecem evidências de que ondas acústicas são as responsáveis pelo aquecimento dos íons. Entretanto, esta experiência foi

realizada num plasma de apenas duas componentes, no qual tanto os elétrons como os íons apresentam velocidades médias distintas de zero.

Como vimos no Capítulo IV, as ondas no modo íon-acústico ressonante propagam-se numa direção quase perpendicular ao campo magnético. Para uma razão  $n_b/n_i = 2 \times 10^{-3}$ , obtivemos  $1,34^\circ < \delta < 11,79^\circ$ . Esta direção é tanto mais perpendicular quanto maior o valor da razão  $n_b/n_i$ , a qual deve ser inferior a 0,1 aproximadamente. Nesse modo, o feixe transfere quase todo o seu momentum aos elétrons, sendo estas as partículas que mais se aquecem. A interação dessas ondas com o plasma caracteriza-se por ocasionar uma variação temporal na energia térmica dos elétrons, superior à taxa de decréscimo da energia cinética média do feixe, no mesmo intervalo de tempo. Isto ocorre porque os íons do feixe sendo muito frios ( $T_b/T_e \ll 3,62 \times 10^{-3}$  quando  $n_b/n_i = 2 \times 10^{-3}$  e  $\delta = 8,37^\circ$ ), interagindo com os íons do plasma, resfriam os mesmos, ocasionando uma transferência de energia térmica dos íons para os elétrons do plasma de fundo. Assim, durante o intervalo de tempo no qual ocorre a propagação dessas instabilidades, a razão  $T_e/T_i$  aumenta, mantendo-se conseqüentemente, a condição  $T_e/T_i \gg 2$  requerida pelo modo. Entretanto, como a razão  $v_b/v_{te}$  diminui, a direção de propagação da onda torna-se cada vez mais paralela ao campo magnético, ocasionando um acréscimo na razão de crescimento  $\tilde{\gamma}^{ia}$  das ondas. Quando a direção de propagação atinge um valor superior ao limite  $\delta \leq 11,79^\circ$ , para o qual a razão de crescimento das ondas no modo íon-acústico é maximizada, sendo dada por  $\tilde{\gamma}_{\max}^{ia} < 0,014 kv_b$ , o modo deixa de existir, estabelecendo-se as condições necessárias para haver propagação de instabili

dades acústicas não ressonantes. Stix (S73) discute o problema de instabilidades acústicas propagando-se quase perpendicularmente ao campo, levando em conta, na sua relação de dispersão, o termo ressonante das ondas com os íons do feixe. Mostrou que a condição para haver a ocorrência destas instabilidades, sob condição estacionária do feixe, violava a sua hipótese de que a densidade do feixe fosse pequena comparada com a densidade do plasma e discutiu a possibilidade do termo de amortecimento de Landau dos elétrons, o qual foi ignorado em sua análise, exercer um papel importante na análise destas instabilidades.

A razão de crescimento das ondas no modo íon-feixe ressonante do Capítulo V, é maximizada para uma direção de propagação das ondas paralela ao campo magnético e para um ângulo de injeção do feixe dado por  $\theta = \cos^{-1} (2^{-1/2} v_{tb}/v_b + C_{sb}/v_{tb})$ . Para os valores típicos dos parâmetros usados na obtenção das figuras V.1 e V.2, o feixe forma um grande ângulo com a direção de propagação da onda e o seu momentum é transferido predominantemente aos íons do plasma. Quando  $T_b/T_i = 2 \times 10^{-2}$ ,  $v_b/v_{te} = 0,12$ ,  $n_b/n_i = 2 \times 10^{-3}$  e  $10 \leq T_e/T_i \leq 10^2$ , obtivemos para o ângulo  $\theta$  o intervalo  $81,75^\circ < \theta < 87,40^\circ$  e para o máximo valor da razão de crescimento, o valor  $\gamma_{\max}^{IB} \approx 0,032 kv_b$ , correspondente a  $\theta = 81,75^\circ$ . Quando  $T_e/T_i = 10$ ,  $T_b/T_i = 0,2$ ,  $v_b/v_{te} = 0,12$  e  $2,5 \times 10^{-3} \leq n_b/n_i \leq 1,0 \times 10^{-2}$ , obtivemos o intervalo  $65,94^\circ \leq \theta \leq 77,67^\circ$  relativamente ao ângulo de injeção do feixe e o valor máximo da razão de crescimento sendo  $\gamma_{\max}^{IB} = 0,44 kv_b$ , o qual ocorre quando  $n_b/n_i \approx 5,7 \times 10^{-3}$  e  $\theta \approx 73,94^\circ$ . Além disso, vimos que nesse modo, a maior quantidade de absorção da energia cinética do feixe é aquela utilizada no acréscimo da energia térmica dos íons do plasma e íons do fei

xe. A energia associada às ondas e a energia térmica dos elétrons é pouco modificada devido às instabilidades. Logo, a razão de temperaturas  $T_b/T_e$  cresce no tempo, podendo ocasionar uma violação na condição  $T_b/T_e \ll n_b/n_e$  imposta pelo modo íon-feixe ressonante. Se isso ocorrer, isto é, se decorrer um intervalo de tempo suficiente para que  $T_b/T_e$  torne-se comparável ao valor da razão de densidades  $n_b/n_e$ , então não haverá a propagação dessas ondas no plasma.

Experimentalmente esse modo foi analisado por Taylor e Coroniti (T72) num plasma não magnetizado, com  $T_e/T_i > 5$ , no qual foi injetado um feixe de íons frios. Os íons do feixe foram aquecidos e a razão de temperaturas  $T_e/T_i$  diminuiu, devido à ocorrência de instabilidades acústicas, até ser atingida a condição limite  $T_e/T_i = 5$ . Além disso, constataram que a saturação destas ondas ocorria antes de haver uma relaxação significativa da função distribuição do feixe. Esses resultados concordaram também com a experiência de D'Angelo et alii (D78).

No caso das instabilidades íon-acústicas do Capítulo V, da mesma forma como as do modo íon-feixe ressonantes, a direção de propagação das ondas é paralela ao campo magnético e o ângulo  $\theta = \cos^{-1}(2^{-1/2}v_{tb}/v_b + C_s/v_{tb})$  assume valores tipicamente grandes. Para os dados da Figura V.3, ou seja, para  $T_b/T_i = 2$ ,  $n_b/n_i = 2 \times 10^{-3}$ ,  $v_b/v_{te} = 0,12$  e  $40 \leq T_e/T_i \leq 100$ , obtivemos o intervalo  $87,96^\circ \leq \theta \leq 88,78^\circ$  e o valor  $\gamma_{\max}^{IA} = 0,003 kv_b$  para o máximo valor da razão de crescimento das ondas, quando  $\theta = 88,78^\circ$ . Feixes de maior densidade ocasionam ondas com razão de crescimento superior ao valor anterior. Assim, para  $T_e/T_i = 10$ ,  $T_b/T_i = 1$ ,  $v_b/v_{te} = 0,12$  e  $n_b/n_i = 10^{-2}$ , obtivemos  $\gamma_{\max}^{IA} = 0,006 kv_b$  quando

$\theta = 85,36^\circ$ . Neste modo, a maior transferência de momentum do feixe é feita aos elétrons, sendo a energia cinética média do feixe utilizada predominantemente como energia térmica das partículas do plasma de fundo. A variação da energia térmica dos íons do feixe e a variação da energia associada às ondas é pequena comparada às taxas de acréscimo das energias térmicas sofridas pelos íons e elétrons do plasma. Entretanto, como a razão de acréscimo de temperatura  $T_e$  dos elétrons é pouco superior à taxa de variação da temperatura  $T_i$  dos íons, a razão  $T_e/T_i$  é aproximadamente constante no tempo. Assim, a condição  $T_e/T_i > 2$  requerida pelo modo permanecerá sendo satisfeita e as ondas íon-acústicas podem se propagar no plasma num intervalo de tempo relativamente longo. Aquecimento dos íons do plasma provocado por ondas de frequência  $\omega_r = kC_s < \omega_{pi}$  foi observado na experiência de Baker (B72), na qual o plasma era constituído de elétrons e de dois feixes de íons, um rápido e outro lento. As medidas de razão de aquecimento foram realizadas numa direção não perpendicular ao campo magnético. O surgimento das instabilidades acústicas ocorriam para um valor da razão  $T_e/T_i > 4$ .

No modo íon-acústico modificado do Capítulo VI, a direção de propagação das ondas e a variação das propriedades macroscópicas do plasma é muito sensível à razão inicial das temperaturas  $T_e/T_i$ . Para  $n_b/n_i = 10^{-3}$ ,  $v_b/v_{te} = 0,12$  e  $\theta = 0^\circ$ , analisamos o efeito dessas instabilidades para dois valores distintos da razão  $T_e/T_i$ . Quando consideramos  $T_e/T_i = 2$ , obtivemos para o máximo valor da razão de crescimento das ondas, as quais podem se propagar no intervalo  $0,14^\circ < \delta < 8,04^\circ$ , o valor  $\gamma_{max} \approx 7,2 \times 10^{-4} kv_b$  para  $5,5^\circ < \delta < 6,0^\circ$  aproximadamente. Também vimos que neste caso, a va

riação da energia térmica dos íons do plasma é superior à variação da mesma energia correspondente aos elétrons, uma vez que a onda, propagando-se numa direção quase perpendicular ao campo magnético, interage mais fortemente com os íons do que com os elétrons do plasma. Assim, quando  $T_e/T_i = 2$ , ocorre uma diminuição na razão  $T_e/T_i$ . Quando consideramos  $T_e/T_i = 0,05$ , o intervalo angular para a direção de propagação das ondas situa-se entre os limites  $0,24^\circ < \delta < 60,76^\circ$ , sendo o ângulo  $\delta \approx 40^\circ$ , o correspondente ao máximo valor da razão de crescimento das ondas, no caso  $\gamma_{\max} \approx 4,98 \times 10^{-4} kv_b$ . Para essa razão de temperaturas, os elétrons extraem maior quantidade de energia do feixe do que os íons do plasma, ocasionando um acréscimo na razão  $T_e/T_i$ . Isso se deve ao fato de que as ondas, propagando-se menos perpendicularmente ao campo magnético que no caso em que  $T_e/T_i = 2$  permitem ao feixe interagir com os elétrons. Assim, considerando ambas as situações e a análise feita na Figura VI.3, concluimos que, embora a razão  $T_e/T_i$  sofra uma variação inicial, a mesma tende a tornar-se constante durante a ocorrência dessas instabilidades. Em ambos os casos, a temperatura do feixe deve ser inicialmente pequena, tipicamente inferior a  $10^{-4} T_e$  aproximadamente, embora, posteriormente aumente devido às instabilidades. Além disso, vimos que a energia associada às ondas pouco é influenciada devido às instabilidades no modo íon-acústico modificado. Grésillon e Doveil (G75), realizando experiências de injeção de um feixe de íons em plasmas num dispositivo multipolar, detetaram ondas instáveis para velocidade de injeção  $v_b$  compreendidas entre  $(1 - 2)C_s$  quando  $n_b/n_i = 0,1$  e  $T_e/T_i = 20$ . Estas instabilidades são ocasionadas pela fusão do modo íon-acústico usual ( $\omega = kC_s$ ) e do modo íon-fei

xe lento ( $\omega = kv_b - C_s (n_b/n_i)^{1/2}$ ), naquela região de velocidades  $v_b$ . Nossos cálculos indicam que o modo íon-feixe lento, obtido do modo íon-acústico modificado quando  $n_b/n_i = 10^{-3}$  e  $T_e/T_i < 0,038$  é instável para velocidades de injeção do feixe da ordem de  $5,2 C_s$ .

O resumo dos resultados obtidos neste trabalho é ilustrado no diagrama da Figura VII.1, onde sugerimos uma possível evolução das instabilidades e o efeito destas como uma fonte de aquecimento do plasma. Relembramos que, na obtenção desses resultados, supusemos que a distorção da função distribuição de equilíbrio devido às instabilidades fosse suficientemente pequena para que o uso da teoria linear e da teoria quasilinear pudessem ser justificados. Além disto, para que o plasma se desenvolvesse na forma proposta na figura VII.1, é necessário supormos ainda que a saturação das ondas não ocorra antes de ser atingido o estado final e que o tempo total necessário para que o plasma evolua, desde o estado inicial até o estado final, ainda seja pequeno comparado ao intervalo de tempo entre duas colisões sucessivas. Cálculos realizados (J79) mostraram que, para ondas de máxima razão de crescimento no modo íon-feixe ressonante e íon-acústico do Capítulo V, o tempo de relaxação do feixe, devido a instabilidades, é significativamente menor do que o tempo necessário para que o feixe seja desacelerado através de colisões.

Várias extensões do presente trabalho poderiam ser consideradas. Além do problema da transferência de energia, um estudo interessante que sugerimos é o de analisar, usando a teoria quasilinear, como se altera a função distribuição de equilíbrio devido às instabilidades tratadas neste trabalho, em particular, obter a forma da função distribuição quando o estado de estabili

dade marginal do sistema ( $\gamma = 0$ ) é atingido. Neste tipo de análise (K73, D72), as partes ressonantes e não ressonantes das interações das partículas com as ondas são consideradas separadamente. Em geral, na parte ressonante da função distribuição ocorre a formação de um achatamento na função distribuição (K66). A parte não ressonante da função distribuição também sofre alteração, pois relaciona-se com as partículas que adquirem energia às expensas das ondas, numa forma de movimento ordenado, incorretamente e usualmente denominado de temperatura, como no presente trabalho. Este movimento oscilatório ordenado das partículas não ressonantes com as ondas pode, eventualmente, ser convertido em energia térmica através de processos não incluídos na teoria quasilinear como, por exemplo, no caso de haver o aprisionamento das partículas no potencial das ondas. O estudo destes processos constitui uma outra possibilidade de futuros trabalhos. Efeitos desta natureza, para instabilidades distintas das que analisamos, mostraram (M72, D70, N69, O65) serem responsáveis pela saturação não linear das ondas.

É importante salientar que, mesmo para instabilidades inicialmente pequenas ( $\gamma \ll \omega_p$ ), como as consideradas neste trabalho, a amplitude da perturbação inicial pode crescer de tal forma que a distorção provocada na distribuição de equilíbrio inicial invalide o emprego da teoria de perturbação na determinação da evolução temporal da função distribuição de equilíbrio inicial (teoria quasilinear). Neste caso, os termos não lineares na equação de Vlasov tornam-se importantes e conduzem a uma relação de dispersão não linear (D62, S72). O estudo do comportamento de instabilidades neste regime não linear da equação de Vlasov, consti

tui-se num interessante problema que também pretendemos investigar.

Os resultados podem ser estendidos a regiões mais amplas dos parâmetros de interêsse resolvendo-se a relação de dispersão (II.1) numericamente, trabalho este tornado agora menos complexo, em vista do tratamento analítico dos modos de propagação que satisfazem à mesma.

Finalmente, como uma última sugestão, mencionamos a de investigação da ocorrência de instabilidades de ondas com menores frequências, incluindo, para os íons, os efeitos de raio de Larmor finito ( $k_{\perp} r_i \sim 1$ ) isto é, para frequências da ordem da frequência de cíclotron dos íons, caso no qual os íons devem ser considerados magnetizados, e que tem sido a motivação de estudo em diversos trabalhos, tanto teóricos como experimentais (A76, P76, P77, H78).

MODOS	FREQUÊNCIA	RAZÃO DE CRESCIMENTO E DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO DAS ONDAS	VARIACÃO TEMPORAL DAS ENERGIAS E RESTRIÇÕES
i-i	$\omega_r^{ii} = \vec{k} \cdot \vec{v}_b \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} \right\}$ $(\vec{k} \cdot \vec{v}_b)^{ii} = \frac{\omega_{pi}}{\left( 1 + \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \delta}{\Omega_e^2} \right)^{1/2}}$	$\gamma^{ii} = \frac{3^{1/2}}{2} \vec{k} \cdot \vec{v}_b \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3}$ $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$	$\frac{\partial W_b}{\partial t} \ll \frac{\partial W_e}{\partial t} \sim \frac{\partial W_i}{\partial t} < \left  \frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} \right $ $\text{sen } \delta < (m_e/m_i)^{1/2}$ $(T_e/T_i)^{1/2} \gg (\omega_{pi}/\omega_{pe})(v_{te}/v_b) \text{ cosec}(\theta+\delta) \gg \text{cosec}(\theta+\delta)$ $1 \gg (n_b/2n_i)^{1/3} \gg (T_b m_e/T_e m_i)^{1/2} (v_{te}/v_b) \text{ cosec}(\theta+\delta)$
mts	$\omega_r^{mts} = \vec{k} \cdot \vec{v}_b \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{n_b m_e}{2n_i m_i} \right)^{1/3} \right\}$ $(\vec{k} \cdot \vec{v}_b)^{mts} = \frac{\omega_{pe} \text{ sen } \delta}{\left( 1 + \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \delta}{\Omega_e^2} \right)^{1/2}}$	$\gamma^{mts} = \frac{3^{1/2}}{2} \vec{k} \cdot \vec{v}_b \left( \frac{n_b m_e}{2n_i m_i} \right)^{1/3}$ $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$	$\frac{\partial W_b}{\partial t} \sim \frac{\partial W_i}{\partial t} \ll \frac{\partial W_e}{\partial t} \sim \left  \frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} \right $ $(m_e/m_i)^{1/2} < \text{sen } \delta < \frac{v_b}{v_{te}} \text{ sen}(\theta+\delta)$ $(T_e/T_i)^{1/2} \gg (\omega_{pi}/\omega_{pe})(v_{te}/v_b) \text{ cosec}(\theta+\delta)$ $(\omega_{pe} \text{ sen } \delta / \omega_{pi})^{2/3} \gg 1 \gg (n_b/2n_i)^{1/3} \gg$ $(T_b/T_e)^{1/2} (v_{te}/v_b)(\omega_{pi}/\omega_{pe})^{1/3} (\text{sen } \delta)^{2/3} \text{ cosec}(\theta+\delta)$

IONS DO FEIXE E PLASMA FRIOS

MODOS	FREQUENCIA	RAZÃO DE CRESCIMENTO E DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO DAS ONDAS	VARIACÃO TEMPORAL DAS ENERGIAS E RESTRIÇÕES
<p>IONS DO PLASMA E DO FEIXE FRIOS, ELETRONS QUENTES</p>	$\omega_r^{ia} = \vec{k} \cdot \vec{v}_b \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3} \right\}$	$\gamma^{ia} = \frac{3^{1/2}}{2} \vec{k} \cdot \vec{v}_b \left( \frac{n_b}{2n_i} \right)^{1/3}$	$\frac{\partial W_E}{\partial t} \sim \frac{\partial W_b}{\partial t} \ll \frac{\partial W_e}{\partial t} \sim \frac{\partial W_i}{\partial t} < \left  \frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} \right $ <p><math>\theta = 0^\circ</math> , <math>\text{sen} \delta &gt; (m_e/m_i)^{1/2}</math></p> <p><math>T_e/T_i \gg 2</math> , <math>v_b/v_{te} \geq (m_e/m_i)^{1/2}</math></p> <p><math>1 \gg n_b/2n_i \gg (2T_b/T_e)^{3/2}</math></p> <p><math>n_b/n_i \gg f_{nr}^3(x_{nr})/4</math></p> <p><math>x = v_b/v_{te}</math> , <math>f(x) = \pi^{1/2} x e^{-x^2}</math> .</p>
	$\vec{k} \cdot \vec{v}_b = kc_s \left\{ 1 + k^2 \lambda_D^2 \left( 1 + \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \delta}{\Omega_e^2} \right) \right\}^{-1/2}$	$\delta = \text{sen}^{-1} \left\{ \frac{v_{te} (m_e/m_i)^{1/2}}{v_b} \right\}$	$\tilde{\gamma}^{ia} = \frac{kc_s}{\pi} \left( \frac{v_{te} n_b}{v_b 2n_i} \right)^{1/2} \exp \left( \frac{v_b^2}{2v_{te}^2} \right)$
$\tilde{ia}$	$\tilde{\omega}_r^{ia} = \vec{k} \cdot \vec{v}_b - \frac{kc_s}{\pi} \left( \frac{v_{te} n_b}{v_b 2n_i} \right)^{1/2} \exp \left( \frac{v_b^2}{2v_{te}^2} \right)$	$\delta = \text{sen}^{-1} \left\{ \frac{v_{te} (m_e/m_i)^{1/2}}{v_b} \right\}$	$\frac{\partial W_E}{\partial t} , \frac{\partial W_b}{\partial t} , \left  \frac{\partial W_i}{\partial t} \right  \ll \left  \frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} \right  < \frac{\partial W_e}{\partial t}$ <p><math>\theta = 0^\circ</math> , <math>\text{sen} \delta &gt; (m_e/m_i)^{1/2}</math></p> <p><math>T_e/T_i \gg 2</math> , <math>v_b/v_{te} \geq (m_e/m_i)^{1/2}</math></p> <p><math>f_r(x_r) \gg n_b/n_i \gg 2(T_b/T_e) f_r(x_r)</math></p> <p><math>f_r^3(x_r)/4 \gg n_b/n_i</math></p> <p><math>x = v_b/v_{te}</math> , <math>f(x) = \pi^{1/2} x e^{-x^2}</math> .</p>

TABELA VII.3

MODOS	FREQUÊNCIA	RAZÃO DE CRESCIMENTO E DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO DAS ONDAS	VARIACÃO TEMPORAL DAS ENERGIAS E RESTRIÇÕES
<p>IB</p> <p><math>\omega_r^{IB} = k\omega_{pi} \lambda_{Db}</math></p>	<p><math>\frac{\gamma_{max}^{IB}}{kC_{sb}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left\{ \exp\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\lambda_{Db}^3}{3 \lambda_{Di}} \exp\left(-\frac{\lambda_{Db}^2}{2\lambda_{Di}}\right) - \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \frac{\lambda_{Db}^3}{3 \lambda_{De}} \exp\left(-\frac{m_e \lambda_{Db}^2}{2m_i \lambda_{De}}\right) \right\}</math></p> <p><math>\delta = \pi/2</math></p> <p><math>\theta = \cos^{-1} (2^{-1/2} v_{tb}/v_b + C_{sb}/v_{tb})</math></p>	<p><math>\frac{\partial W_E}{\partial t}, \frac{\partial W_e}{\partial t} \ll \frac{\partial W_b}{\partial t} &lt; \frac{\partial W_i}{\partial t} &lt; \left  \frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} \right </math></p> <p><math>\lambda_{De}^2 / \lambda_{Db}^2 \gg 1, T_b/T_e \ll n_b/n_e \ll 1</math></p> <p><math>\text{sen } \delta &gt; (v_{tb}/v_{te})(n_e/2n_b)^{1/2}, T_e/T_i &gt; 2</math></p> <p><math>\text{sen}(\theta + \delta) &lt; (v_{tb}/v_b) [1 + (n_e/2n_b)^{1/2}]</math></p>	<p><math>\lambda_{De}^2 / \lambda_{Db}^2 \gg 1, T_b/T_e \ll n_b/n_e \ll 1</math></p> <p><math>\text{sen } \delta &gt; (v_{tb}/v_{te})(n_e/2n_b)^{1/2}, T_e/T_i &gt; 2</math></p> <p><math>\text{sen}(\theta + \delta) &lt; (v_{tb}/v_b) [1 + (n_e/2n_b)^{1/2}]</math></p>
<p>IA</p> <p><math>\omega_r^{IA} = kC_s (1 + k^2 \lambda_{Deff}^2)^{-1/2}</math></p> <p><math>\lambda_{Deff}^2 = \lambda_{De}^2 + k_{\perp}^2 r_e^2 / k^2</math></p>	<p><math>\frac{\gamma_{max}^{IA}}{kC_s} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left\{ \frac{\lambda_{De}^2}{\lambda_{Db}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{T_e}{2T_i}\right) - \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_e}{2m_i}\right) \right\}</math></p> <p><math>\delta = \pi/2</math></p> <p><math>\theta = \cos^{-1} (2^{-1/2} v_{tb}/v_b + C_s/v_{tb})</math></p>	<p><math>\frac{\partial W_E}{\partial t}, \frac{\partial W_b}{\partial t} &lt; \frac{\partial W_i}{\partial t} \lesssim \frac{\partial W_e}{\partial t} &lt; \left  \frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} \right </math></p> <p><math>\lambda_{De}^2 / \lambda_{Db}^2 \ll 1, n_b/n_e \ll T_b/T_e</math></p> <p><math>\text{sen } \delta &gt; (m_e/2m_i)^{1/2}, T_e/T_i &gt; 2</math></p> <p><math>\text{sen}(\theta + \delta) &lt; (v_{tb}/v_b) [1 + (T_e/2T_b)^{1/2}]</math></p>	<p><math>\frac{\partial W_E}{\partial t}, \frac{\partial W_b}{\partial t} &lt; \frac{\partial W_i}{\partial t} \lesssim \frac{\partial W_e}{\partial t} &lt; \left  \frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} \right </math></p> <p><math>\lambda_{De}^2 / \lambda_{Db}^2 \ll 1, n_b/n_e \ll T_b/T_e</math></p> <p><math>\text{sen } \delta &gt; (m_e/2m_i)^{1/2}, T_e/T_i &gt; 2</math></p> <p><math>\text{sen}(\theta + \delta) &lt; (v_{tb}/v_b) [1 + (T_e/2T_b)^{1/2}]</math></p>

IONS DO PLASMA FRIOS, ELÉTRONS E IONS DO FEIXE QUENTES

MODOS	FREQUÊNCIA	RAZÃO DE CRESCIMENTO E DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO DAS ONDAS	VARIACÃO TEMPORAL DAS ENERGIAS E RESTRIÇÕES
<p>FEIXE FRIO, ELÉTRONS E IONS QUENTES</p>	$\omega_r = \vec{k} \cdot \vec{v}_b - k C'_s$ $C'_s = C_s \left[ \frac{n_i}{n_b} \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \right]^{-1/2} = \beta C_s$	$\gamma_{max} = k C'_s (B/2A)$ $B^2 \ll A^2$ $B = \pi^{1/2} \left\{ \frac{\omega_r}{k_{  } v_{te}} \frac{\exp(-\omega_r^2/k^2 v_{te}^2)}{k^2 \lambda_{De}^2} + \frac{\omega_r}{k v_{ti}} \frac{\exp(-\omega_r^2/k^2 v_{ti}^2)}{k^2 \lambda_{Di}^2} \right\}$ $A \approx (k \lambda_{De})^{-2} (1 + T_e/T_i)$ $k_{\perp} \geq k_{  }$	$\frac{\partial W_E}{\partial t} \ll \frac{\partial W_b}{\partial t} < \frac{\partial W_i}{\partial t} > \frac{\partial W_e}{\partial t} \sim \left  \frac{\partial \epsilon_b}{\partial t} \right $ $\text{sen } \delta > (C'_s/v_{te}) ((v_b/C'_s) \text{sen}(\theta+\delta) - 1)$ $\text{sen}(\theta+\delta) < (v_{te}/v_b) (T_i m_e / T_e m_i)^{1/2} \left[ 1 + \beta (T_e/2T_i)^{1/2} \right]$ $(n_b/2n_i) \gg (1 + T_i/T_e) (v_b/v_{ti}) \text{sen}(\theta+\delta) - 1)^2$ $(n_b/2n_i) \gg T_b/T_e + T_b/T_i$

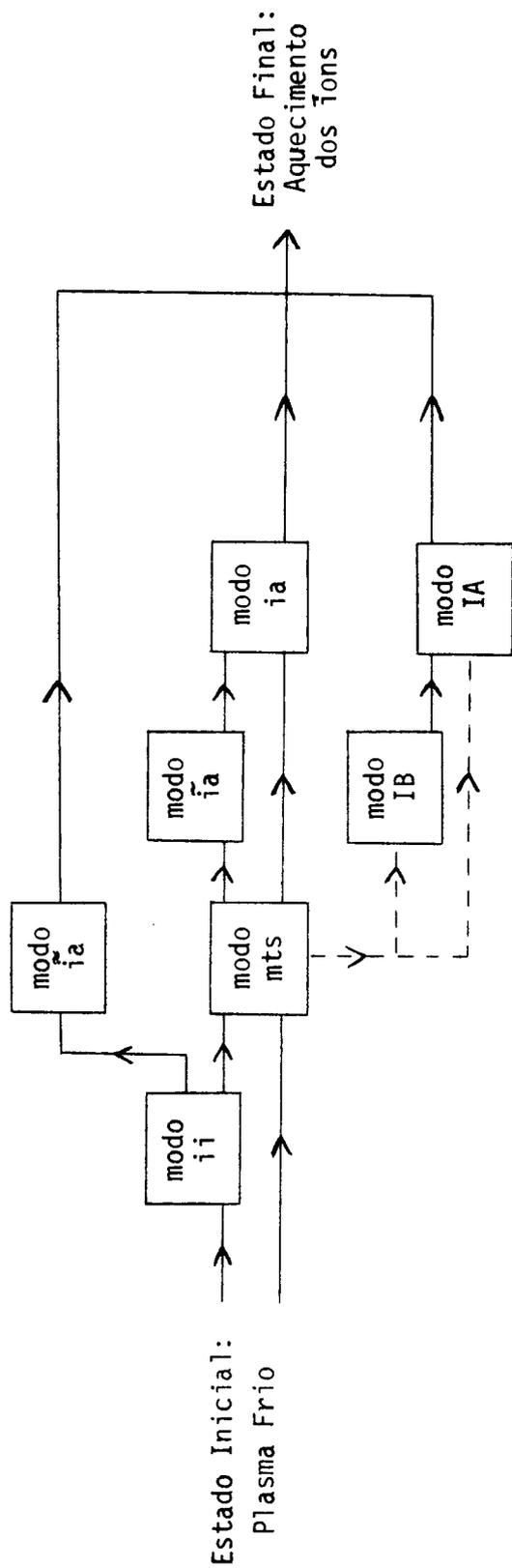


Figura VII.1 - As linhas tracejadas entre dois modos servem para indicar que outros modos de propagação, aqui não analisados, devem ocorrer entre tais modos a fim de fornecer ao plasma, as condições necessárias para o sistema evoluir na forma proposta.

## APÊNDICE A

## OBTENÇÃO DA RELAÇÃO DE DISPERSÃO (II.1)

Para um plasma constituído por elétrons (e) magnetizados e por íons do feixe (b) e do plasma (i) não magnetizados, o resultado da linearização da equação de Vlasov pode ser expresso através das seguintes equações:

$$\left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} + \frac{q_e}{m_e} \frac{\vec{v} \times \vec{B}_0}{c} \cdot \vec{\nabla}_v \right) f_{e0} = 0 \quad (\text{A.1a})$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} + \frac{q_e}{m_e} \frac{\vec{v} \times \vec{B}_0}{c} \cdot \vec{\nabla}_v \right) f_{e1} = - \frac{q_e}{m_e} \left( \vec{E}_1 + \frac{\vec{v} \times \vec{B}_1}{c} \right) \cdot \vec{\nabla}_v f_{e0} \quad (\text{A.2a})$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} f_{\alpha 0} = 0 \quad \alpha = i, b \quad (\text{A.1b})$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) f_{\alpha 1} = - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left( \vec{E}_1 + \frac{\vec{v} \times \vec{B}_1}{c} \right) \cdot \vec{\nabla}_v f_{\alpha 0} \quad \alpha = i, b \quad (\text{A.2b})$$

onde  $f_{j0}$  e  $f_{j1}$  ( $j = e, i, b$ ) significam as funções distribuição de equilíbrio e perturbada,  $\vec{B}_0$  é o campo magnético externo,  $\vec{E}_1$  e  $\vec{B}_1$  são os campos perturbados. Resolvendo as equações (A.2a) e (A.2b) pelo método das características, obtêm-se (K73 p.399 e p.404) para as transformações de Fourier das  $f_{j1}$ :

$$f_{e\vec{k}} = - \frac{q_e}{m_e} \int_{-\infty}^0 \left( \vec{E}_{\vec{k}} + \frac{\vec{v}' \times \vec{B}_{\vec{k}}}{c} \right) \cdot \vec{\nabla}_{v'} f_{e0}(\vec{v}') \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{X} - \omega\tau)] d\tau, \text{Im}(\omega) > 0, \quad (\text{A.3a})$$

$$f_{\alpha\vec{k}} = -\frac{iq_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\left(\vec{E}_{\vec{k}} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}_{\vec{k}}}{c}\right)}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} f_{\alpha 0}, \quad \alpha = i, b, \quad \text{Im}(\omega) > 0 \quad (\text{A.3b})$$

onde

$$\vec{E}_1(\vec{x}, t) = \int \vec{E}_{\vec{k}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t) d\vec{k}$$

$$\vec{B}_1(\vec{x}, t) = \int \vec{B}_{\vec{k}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t) d\vec{k}$$

$$f_{\alpha 1}(\vec{x}, \vec{v}, t) = \int f_{\alpha\vec{k}}(\vec{v}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t) d\vec{k}$$

$$f_{\alpha 1}(\vec{x}', \vec{v}', t') = f_{\alpha 1}(\vec{x}, \vec{v}, t), \quad \text{para } t' = t,$$

$$f_{\alpha 1}(\vec{x}', \vec{v}', t' \rightarrow \infty) = 0$$

$$\vec{x} = \vec{x}' - \vec{x}$$

$$\tau = t' - t,$$

sendo  $\vec{x}'(t')$  e  $\vec{v}'(t')$  as soluções das órbitas das partículas na presença dos campos de equilíbrio, que satisfazem às condições

$$\vec{x}'(t' = t) = \vec{x}$$

$$\vec{v}'(t' = t) = \vec{v}.$$

Para os elétrons, tem-se:

$$\begin{aligned} v'_x &= v_{\perp} \cos(\phi - \omega_c \tau) & x' &= x - \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \sin(\phi - \omega_c \tau) + \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \sin \phi \\ v'_y &= v_{\perp} \sin(\phi - \omega_c \tau) & y' &= y + \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos(\phi - \omega_c \tau) - \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos \phi \\ v'_z &= v_{\parallel} & z' &= v_{\parallel} \tau + z \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

e  $v_{\perp}^2$  e  $v_{\parallel}$  são constantes de movimento. Como estamos interessados apenas em ondas eletrostáticas,  $\vec{E}_{\vec{k}} = -i\vec{k}\Phi_{\vec{k}}$ , onde  $\Phi = \int \Phi_{\vec{k}} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t) d\vec{k}$  é o potencial eletrostático. Neste caso os termos  $\vec{v} \times \vec{B}_{\vec{k}}$  que figuram nas expressões (A.3a) e (A.3b) devem ser emitidos pois  $B_{\vec{k}} = 0$ .

Da equação de Poisson e das expressões (A.3a) e (A.3b), para ondas eletrostáticas tem-se:

$$k^2 \Phi_{\vec{k}} = \left\{ i\omega_{pe}^2 \int d\vec{v} \int_{-\infty}^0 \vec{k} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}'} f_{e0}(\vec{v}') \exp[i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\tau)] d\tau - \right. \\ \left. \omega_{pi}^2 \int d\vec{v} \frac{\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} f_{i0}}{(\omega - \vec{k}\cdot\vec{v})} - \omega_{pb}^2 \int d\vec{v} \frac{\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} f_{b0}}{(\omega - \vec{k}\cdot\vec{v})} \right\} \Phi_{\vec{k}} ,$$

donde

$$D(\vec{k}, \omega) = 1 + \left\{ -\frac{i\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\vec{v} \int_{-\infty}^0 \vec{k} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}'} f_{e0}(\vec{v}') \exp[i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\tau)] d\tau + \right. \\ \left. \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \int d\vec{v} \frac{\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} f_{i0}}{(\omega - \vec{k}\cdot\vec{v})} + \frac{\omega_{pb}^2}{k^2} \int d\vec{v} \frac{\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} f_{b0}}{(\omega - \vec{k}\cdot\vec{v})} \right\} = 0 \quad (A.5)$$

Supondo as funções de equilíbrio de Maxwell,

$$f_{oe} = A_e \exp(-v_{\parallel}^2/v_{te}^2) \exp(-v_{\perp}^2/v_{te}^2)$$

$$f_{oi} = A_i \exp(-v^2/v_{ti}^2)$$

$$f_{ob} = A_b \exp[-(\vec{v} - \vec{v}_b)^2/v_{tb}^2] ,$$

onde  $A_j = (\pi^{3/2} v_{tj}^3)^{-1}$ , as integrais de velocidade relativas aos íons e ao feixe podem ser expressas como:

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \int d\vec{v} \frac{\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_v f_{i0}}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})} &= -\frac{2\omega_{pi}^2}{k^2 v_{ti}^2} \int d\vec{v} \frac{(\vec{k} \cdot \vec{v}) f_{i0}}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}} = -\frac{2\omega_{pi}^2}{k^2 v_{ti}^2} \left\{ -1 - \frac{\omega}{kv_{ti}} Z\left(\frac{\omega}{kv_{ti}}\right) \right\} = \\
&= -\frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{ti}^2} Z'\left(\frac{\omega}{kv_{ti}}\right), \quad (A.6a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_{pb}^2}{k^2} \int d\vec{v} \frac{\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_v f_{b0}}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})} &= -\frac{2\omega_{pb}^2}{k^2 v_{tb}^2} \int d\vec{v} \frac{\vec{k} \cdot (\vec{v} - \vec{v}_b) f_{b0}}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})} \\
&= -\frac{2\omega_{pb}^2}{k^2 v_{tb}^2} \left\{ -1 - \frac{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_b)}{kv_{tb}} Z\left(\frac{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_b}{kv_{tb}}\right) \right\} \\
&= -\frac{\omega_{pb}^2}{k^2 v_{tb}^2} Z'\left(\frac{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_b}{kv_{tb}}\right), \quad (A.6b)
\end{aligned}$$

onde  $Z(z)$  é a função dispersão do plasma e  $Z'(z) = -2(1+zZ(z))$  é a sua derivada (F61).

Para o termo de elétrons, utilizamos coordenadas cilíndricas, escolhendo  $v_{||}$  ao longo da direção  $\hat{z}$ . Tomando o vetor  $\vec{k}$  no plano  $xz$ , isto é,  $\vec{k} = k_{\perp} \hat{x} + k_{||} \hat{z}$  e lembrando que  $v_{\perp}^2$  e  $v_{||}$  são constantes de movimento temos,

$$\begin{aligned}
\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_v f_{e0}(\vec{v}') &= 2\vec{k} \cdot \left[ (\vec{v}' - v'_{||} \hat{z}) \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}^2} + v'_{||} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{||}^2} \hat{z} \right] \\
&= 2k_{\perp} v'_{\perp} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}^2} + 2k_{||} v'_{||} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{||}^2} \hat{z} = -\frac{2f_{e0}}{v_{te}^2} \left[ k_{\perp} v_{\perp} \cos(\phi - \omega_c \tau) + k_{||} v_{||} \right]
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
R &\equiv -i \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\vec{v} \int_{-\infty}^0 \vec{k} \cdot \vec{v} v' f_{e0}(\vec{v}') \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{X} - \omega\tau)] d\tau \\
&= \frac{i2\omega_{pe}^2}{\pi^{3/2} k^2 v_{te}^5} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{||} \exp(-v_{||}^2/v_{te}^2) \times \\
&\quad \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp} \exp(-v_{\perp}^2/v_{te}^2) \int_{-\infty}^0 d\tau \left\{ \left[ k_{\perp} v_{\perp} \cos(\phi - \omega_c \tau) + k_{||} v_{||} \right] \times \right. \\
&\quad \left. \exp \left\{ i \left[ \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} (-\sin(\phi - \omega_c \tau) + \sin\phi) + (k_{||} v_{||} - \omega)\tau \right] \right\} \right\} \quad (A.7)
\end{aligned}$$

A integral sobre  $\tau$  pode ainda ser expressa como,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^0 d\tau \left\{ \exp[i(k_{||} v_{||} - \omega)\tau] \exp\left[i \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \sin\phi\right] \left[ k_{||} v_{||} + i\omega_c \frac{\partial}{\partial\phi} \right] \times \right. \\
&\quad \left. \exp\left[-i \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \sin(\phi - \omega_c \tau)\right] \right\} \\
&= \sum_{l, n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^0 d\tau \left\{ \exp[i(k_{||} v_{||} + n\omega_c - \omega)\tau] J_l\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c}\right) J_n\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c}\right) \times \right. \\
&\quad \left. \exp(il\phi) \left[ k_{||} v_{||} + i\omega_c \frac{\partial}{\partial\phi} \right] \exp(-in\phi) \right\} \quad (A.8)
\end{aligned}$$

onde utilizamos a seguinte identidade envolvendo as funções de Bessel (W66)

$$\exp[\pm ia \sin(\phi - b)] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(a) \exp[\pm im(\phi - b)]$$

Integrando (A.8), obtemos

$$= -i \sum_{\ell, n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c}\right) J_{\ell}\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c}\right) \exp[i(\ell - n)\phi] \left(1 + \frac{\omega}{k_{\parallel} v_{\parallel} + n\omega_c - \omega}\right). \quad (\text{A.9})$$

Substituindo (A.9) em (A.7),

$$R = \frac{4\omega_{pe}^2}{\pi^{1/2} k_{\perp}^2 v_{te}^5} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{\parallel} \exp(-v_{\parallel}^2/v_{te}^2) \left(1 + \frac{\omega}{k_{\parallel} v_{\parallel} + n\omega_c - \omega}\right) \times \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp} J_n^2\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c}\right) \exp(-v_{\perp}^2/v_{te}^2) \right\} \quad (\text{A.10})$$

Calculando a integral sobre  $v_{\perp}$ , obtemos (W66),

$$\int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp} J_n^2\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c}\right) \exp(-v_{\perp}^2/v_{te}^2) = \frac{v_{te}^2}{2} \exp\left(-\frac{a_e^2}{2}\right) I_n\left(\frac{a_e^2}{2}\right), \quad (\text{A.11})$$

onde  $a_e = k_{\perp} v_{te}/\omega_c$  e  $I_n$  é a função de Bessel modificada. Para as duas integrais em  $v_{\parallel}$  obtemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv_{\parallel} \exp(-v_{\parallel}^2/v_{te}^2) = \pi^{1/2} v_{te}, \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{\parallel} \frac{\omega \exp(-v_{\parallel}^2/v_{te}^2)}{k_{\parallel} v_{\parallel} + n\omega_c - \omega} &= \frac{\omega}{k_{\parallel}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-v_{\parallel}^2/v_{te}^2) d(v_{\parallel}/v_{te})}{v_{\parallel}/v_{te} - (\omega - n\omega_c)/k_{\parallel} v_{te}} dv_{\parallel} \\ &= \frac{\omega}{k_{\parallel}} \pi^{1/2} Z\left(\frac{\omega - n\omega_c}{k_{\parallel} v_{te}}\right) dv_{\parallel} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Substituindo (A.11), (A.12) e (A.13) em (A.10),

$$R = \frac{2\omega_{pe}^2}{k_{\perp}^2 v_{te}^2} \exp\left(-\frac{a_e^2}{2}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n\left(\frac{a_e^2}{2}\right) \left[1 + \frac{\omega}{k_{\parallel} v_{te}} Z\left(\frac{\omega - n\omega_c}{k_{\parallel} v_{te}}\right)\right]$$

Considerando apenas os harmônicos  $n=0, \pm 1$  e usando as propriedades

$$I_n(x) = I_{-n}(x) \quad , \quad (n \text{ inteiro})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-x} I_n(x) = 1 \quad ,$$

$$Z\left(\frac{\omega - \omega_c}{k v_{te}}\right) \approx - Z\left(\frac{\omega + \omega_c}{k v_{te}}\right) \quad , \quad (\omega \ll |\omega_c|)$$

obtemos,

$$R = \frac{2 \omega_{pe}^2}{k^2 v_{te}^2} \left\{ 1 + \frac{\omega}{k_{||} v_{te}} I_0\left(\frac{a_e^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{a_e^2}{2}\right) Z\left(\frac{\omega}{k_{||} v_{te}}\right) \right\} .$$

Como  $\frac{a_e^2}{2} = \frac{(k_{\perp} r_e)^2}{2} \ll 1$ , podemos utilizar as aproximações

$$\exp\left(-\frac{a_e^2}{2}\right) \approx 1 - \frac{a_e^2}{2} \quad ,$$

$$I_n\left(\frac{a_e^2}{2}\right) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{a_e^2}{2}\right)^n .$$

Assim, lembrando que  $zZ(z) = -[1 + Z'(z)/2]$ , obtemos,

$$R = \frac{k_{\perp}^2 \omega_{pe}^2}{k^2 \omega_c^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{te}^2} Z'\left(\frac{\omega}{k_{||} v_{te}}\right) .$$

Portanto, substituindo-se (A.14), (A.6a) e (A.6b) em (A.5) e usando a notação  $\omega_c = -\Omega_e$ , obtêm-se a expressão (II.1):

$$\begin{aligned}
D(\vec{k}, \omega) = & 1 + \frac{k_{\perp}^2 \omega_{pe}^2}{k^2 \Omega_e^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{te}^2} Z' \left( \frac{\omega}{k_{\parallel} v_{te}} \right) - \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{ti}^2} Z' \left( \frac{\omega}{k v_{ti}} \right) - \\
& - \frac{\omega_{pb}^2}{k^2 v_{tb}^2} Z' \left( \frac{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_b}{k v_{tb}} \right) . \tag{A.14}
\end{aligned}$$

## APÊNDICE B

## VARIAÇÃO TEMPORAL DO MOMENTUM E DA ENERGIA TÉRMICA DAS PARTÍCULAS DO PLASMA NA TEORIA QUASILINEAR

Obtenção da Equação para a Variação Temporal da Função Distribuição Não Perturbada  $f_{j0}$ 

Um plasma constituído por elétrons (e) magnetizados e por íons do feixe (b) e do plasma (i) não magnetizados, na ausência de colisões, satisfaz às equações de Vlasov:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} + \frac{q_e}{m_e} \left( \vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}_0}{c} \right) \cdot \vec{\nabla}_v \right] f_e = 0 \quad (\text{B.1a})$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_v \right] f_\alpha = 0, \quad \alpha = i, b \quad (\text{B.1b})$$

Desejamos resolver as equações acima por um método de perturbação, isto é,

$$f_j(\vec{x}, \vec{v}, t) = f_{j0} + f_{j1} \quad j = e, i, b$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 \quad (\text{B.2})$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$$

onde as quantidades assinaladas pelo índice 0 apresentam uma variação lenta no tempo, enquanto que as indicadas pelo índice 1

possuem uma rápida oscilação no tempo. Vamos supor ainda que a escala de variação espacial das quantidades que variam lentamente no tempo seja muito maior do que a escala de variação espacial das quantidades que flutuam rapidamente no tempo. Assim, nesta pequena escala espacial, podemos escrever para as médias espaciais:

$$\langle f_j \rangle = \frac{1}{V} \int f_j(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{x} = f_{\alpha_0}(\vec{v}, t) \quad (\text{B.3a})$$

$$\langle \vec{E} \rangle = \frac{1}{V} \int \vec{E} d\vec{x} = \vec{E}_0 \quad (\text{B.3b})$$

$$\langle \vec{B} \rangle = \frac{1}{V} \int \vec{B} d\vec{x} = \vec{B}_0 \quad (\text{B.3c})$$

$$\langle f_{j1} \rangle = \langle \vec{E}_1 \rangle = \langle \vec{B}_1 \rangle = 0 \quad (\text{B.4})$$

Supondo que não exista campo elétrico externo ( $\vec{E}_0 = 0$ ), que as instabilidades são de origem eletrostática ( $\vec{B}_1 = 0$ ) e que a distribuição  $f_{j0}$  seja espacialmente uniforme, obtemos, em vista das definições (B.2), para as equações (B.1a) e (B.1b)

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} + \frac{q_j}{m_e} \left( \vec{E}_1 + \delta_{je} \frac{\vec{v} \times \vec{B}_0}{c} \right) \cdot \vec{\nabla}_v \right] (f_{j0} + f_{j1}) = 0, \quad j=e, i, b \quad (\text{B.5})$$

onde o símbolo da delta de Kronecker  $\delta_{ej}$  foi introduzido para indicar que o campo magnético contribui na equação acima, somente quando o componente  $j$  refere-se aos elétrons.

Tomando a média espacial da equação (B.5) obtêm-se,

$$\frac{\partial f_{j0}}{\partial t} + \delta_{je} \frac{q_j}{m_j c} (\vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot \vec{\nabla}_v f_{j0} = - \frac{q_j}{m_j} \vec{\nabla}_v \cdot \langle \vec{E}_1 f_{j1} \rangle \quad (\text{B.6})$$

Assim, para resolver a equação para  $f_{j0}$ , necessitamos conhecer  $f_{j1}$ . A equação para a perturbação  $f_{j1}$  é obtida subtraindo-se da equação (B.5), a equação (B.6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{j1}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f_{j1} + \delta_{je} \frac{q_j}{m_j} \frac{\vec{v} \times \vec{B}_0}{c} \cdot \vec{\nabla}_v f_{j1} + \frac{q_j}{m_j} \vec{E}_1 \cdot \vec{\nabla}_v f_{j0} \\ = - \frac{q_j}{m_j} \left[ \vec{E}_1 \cdot \vec{\nabla}_v f_{j1} - \vec{\nabla}_v \cdot \langle \vec{E}_1 f_{j1} \rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

A teoria quasilinear consiste em desprezar na equação (B.7) os termos não lineares nas quantidades perturbadas, resultando,

$$\frac{\partial f_{j1}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f_{j1} + \delta_{je} \frac{q_j}{m_j} \frac{\vec{v} \times \vec{B}_0}{c} \cdot \vec{\nabla}_v f_{j1} = - \frac{q_j}{m_j} \vec{E}_1 \cdot \vec{\nabla}_v f_{j0} \quad (\text{B.8})$$

Desejamos substituir  $f_{j1}$ , obtida através da equação (B.8) na equação (B.6). Se  $\vec{E}_1$  for suficientemente pequeno para que seja válido:

- a) Desprezar efeitos de segunda ordem nas quantidades perturbadas em (B.7);
- b) Desprezar seu efeito sobre as órbitas das partículas não perturbadas;
- c) Supor que  $f_{j0}$  seja uma função de equilíbrio, então

a equação (B.8) pode ser resolvida pelo método das características. Neste caso, a equação (B.8) torna-se idêntica às equações (A.2a) e (A.2b) do Apêndice A, e assim podemos utilizar os resultados (A.3a) e (A.3b) da transformada de Fourier das funções distribuições perturbadas para determinar o termo do lado direito da equação (B.6). Em termos das transformadas de Fourier de  $f_{j1}$  e  $E_1$ , podemos escrever, sucessivamente,

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_1 f_{j1} \rangle &= \frac{1}{V} \int d\vec{x} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \int \vec{E}_{\vec{q}} f_{j\vec{k}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{x}) \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{1}{V} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \vec{E}_{-\vec{k}} f_{j\vec{k}} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Definindo as seguintes quantidades,

$$\chi_{\vec{v}}^{(\alpha)} = \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \frac{\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} f_{\alpha 0}}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}}, \quad \alpha = i, b \quad (\text{B.10a})$$

$$\chi_{\vec{v}}^{(e)} = -\frac{i\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^0 \vec{k} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}'} f_{e0}(\vec{v}') \exp[i\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega\tau] d\tau, \quad (\text{B.10b})$$

e

$$\epsilon_{\vec{k}} = \frac{1}{V} \frac{\vec{E}_{\vec{k}} \cdot \vec{E}_{-\vec{k}}}{8\pi(2\pi)^3}, \quad \epsilon_{\vec{k}}(t) = \epsilon_{\vec{k}}(0) e^{2\gamma t}, \quad (\text{B.11})$$

onde  $\epsilon_{\vec{k}}$  é a densidade de energia espectral das ondas, isto é,

$$W_E = \int \epsilon_{\vec{k}} d\vec{k},$$

e as quantidades  $\chi_{\vec{v}}^{(j)}$  ( $j = e, i, b$ ) relacionam-se com a função polarizabilidade  $\chi_j/4\pi$ , associada à componente  $j$  do plasma através de,

$$\int d\vec{v} \chi_{\vec{v}}^{(j)} = \chi_j \quad , \quad j = e, i, b \quad , \quad (B.12)$$

podemos, em vista destas definições e das expressões (A.3a) e (A.3b) do Apêndice A, escrever,

$$\langle \vec{E}_1 f_{j1} \rangle = - \frac{2i}{n_j q_j} \int d\vec{k} \epsilon_{\vec{k}} \vec{k} \chi_{\vec{v}}^{(j)} \quad , \quad j = e, i, b \quad . \quad (B.13)$$

Assim, como no Apêndice A consideramos  $f_{e0} = f_{e0}(v^2)$ , o termo  $(\vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot \vec{\nabla}_v f_{e0}$  que aparece na equação (B.6) é nula. Logo, em vista disto e de (B.13), a equação para  $f_{j0}$  pode ser expressa simplesmente como:

$$\frac{\partial f_{j0}}{\partial t} = \frac{2i}{n_j m_j} \vec{\nabla}_v \cdot \int d\vec{k} \epsilon_{\vec{k}} \vec{k} \chi_{\vec{v}}^{(j)} \quad , \quad (B.14)$$

onde  $\epsilon_{\vec{k}}$  e  $\chi_{\vec{v}}^{(j)}$  foram definidas nas expressões (B.11), (B.10a), (B.10b) e (B.12), sendo que  $\chi_j$  satisfaz às equações

$$\vec{D}(\vec{k}, \omega) = 1 + \sum_j \chi_j = 0 \quad , \quad \sum_j \text{Re} \chi_j = -1 \quad , \quad \sum_j \text{Im} \chi_j = 0 \quad , \quad (B.15)$$

$$\omega = \omega_r + i\gamma \quad , \quad (B.16)$$

$$\partial \epsilon_{\vec{k}} / \partial t = 2\gamma \epsilon_{\vec{k}} \quad . \quad (B.17)$$

Além disto, frente a troca  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$  temos ainda que,

$$\varepsilon_{\vec{k}} = \varepsilon_{-\vec{k}} \quad , \quad (B.18a)$$

$$\text{Re}\chi_j(\vec{k}) = \text{Re}\chi_j(-\vec{k}) \quad , \quad \text{Im}\chi_j(\vec{k}) = -\text{Im}\chi_j(-\vec{k}) \quad , \quad (B.18b)$$

$$\omega_r(\vec{k}) = -\omega_r(-\vec{k}) \quad , \quad \gamma(\vec{k}) = \gamma(-\vec{k}) \quad . \quad (B.18c)$$

### Cálculo dos Momenta

a) A densidade de partículas (normalizada) é definida como:

$$\frac{n_j(\vec{x}, t)}{n_j} = \int d\vec{v} f_{j0}(\vec{x}, \vec{v}, t) \quad .$$

Logo, para a derivada temporal desta quantidade, em vista de (B.14), temos,

$$\int d\vec{v} \frac{\partial f_{j0}}{\partial t}(\vec{x}, \vec{v}, t) = \frac{2i}{n_j m_j} \int d\vec{k} \varepsilon_{\vec{k}} \int d\vec{v} \vec{v} \cdot \vec{k} \chi_{\vec{v}}^{(j)} = 0 \quad ,$$

ou seja, na teoria quasilinear, há conservação da densidade de partículas.

b) O momentum da componente  $j$  é definido como:

$$\vec{p}_j = m_j n_j \vec{v}_j = m_j n_j \int d\vec{v} \vec{v} f_{j0}(\vec{x}, \vec{v}, t) \quad .$$

Assim, para a sua derivada temporal obtemos,

$$\frac{\partial \vec{p}_j}{\partial t} = 2i \int d\vec{k} \epsilon_{\vec{k}} \int d\vec{v} \vec{v} \vec{\nabla}_v \cdot \vec{k} \chi_{\vec{v}}^{(j)} ,$$

ou ainda, integrando por partes e usando (B.12), (B.17), (B.18a) e (B.18b),

$$\frac{\partial \vec{p}_j}{\partial t} = -2i \int d\vec{k} \epsilon_{\vec{k}} \vec{k} \chi_j = \int d\vec{k} \vec{k} \frac{\partial \epsilon_{\vec{k}}}{\partial t} \frac{\text{Im} \chi_j}{\gamma} . \quad (\text{B.19})$$

Para a variação temporal do momentum total das partículas, usando (B.15), temos,

$$\sum_j \frac{\partial \vec{p}_j}{\partial t} = \int d\vec{k} \frac{\vec{k}}{\gamma} \frac{\partial \epsilon_{\vec{k}}}{\partial t} \sum_j \text{Im} \chi_j = 0 ,$$

isto é, na teoria quasilinear, há conservação do momentum total (ondas eletrostáticas não transportam momentum).

c) A energia térmica, ou energia cinética aleatória, relativa à energia cinética média, é definida como:

$$W_j = \frac{3n_j T_j}{2} = \frac{m_j n_j}{2} \int d\vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_j) \cdot (\vec{v} - \vec{v}_j) f_{j0}(\vec{x}, \vec{v}, t) .$$

Assim, para a sua derivada temporal temos,

$$\frac{\partial W_j}{\partial t} = i \int d\vec{k} \epsilon_{\vec{k}} \int d\vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_j) \cdot (\vec{v} - \vec{v}_j) \vec{\nabla}_v \cdot \vec{k} \chi_{\vec{v}}^{(j)} .$$

Integrando por partes,

$$\frac{\partial W_j}{\partial t} = -2i \int d\vec{k} \epsilon_{\vec{k}} \int d\vec{v} \chi_{\vec{v}}^{(j)} \vec{k} \cdot (\vec{v} - \vec{v}_j) \quad ,$$

somando e subtraindo  $\omega$  no integrando da integral acima, temos,

$$\frac{\partial W_j}{\partial t} = 2i \int d\vec{k} \epsilon_{\vec{k}} \int d\vec{v} \chi_{\vec{v}}^{(j)} (\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) - 2i \int d\vec{k} \epsilon_{\vec{k}} \int d\vec{v} \chi_{\vec{v}}^{(j)} (\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_j). \quad (B.20)$$

Para a última integral à direita na equação (B.20), podemos es  
crever,

$$\Pi_j \equiv -2i \int d\vec{k} \epsilon_{\vec{k}} \int d\vec{v} \chi_{\vec{v}}^{(j)} (\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_j) = -2i \int d\vec{k} \epsilon_{\vec{k}} (\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_j) \chi_j \quad ,$$

ou ainda, em vista de (B.15), (B.16) e das propriedades (B.18a),  
(B.18b) e (B.18c),

$$\Pi_j \equiv 2 \int d\vec{k} \epsilon_{\vec{k}} \left[ \gamma \text{Re} \chi_j + (\omega_r - \vec{k} \cdot \vec{v}_j) \text{Im} \chi_j \right] \quad . \quad (B.21)$$

A primeira integral no lado direito de (B.20) pode fa-  
cilmente ser calculada para os termos relativos aos íons do plas-  
ma e do feixe. Usando a definição (B.10a), temos,

$$I_{\alpha} = 2i\omega_{p\alpha}^2 \int \frac{d\vec{k}}{k^2} \epsilon_{\vec{k}} \vec{k} \cdot \int d\vec{v} \vec{\nabla}_{\vec{v}} f_{\alpha 0} = 0 \quad \alpha = i, b \quad . \quad (B.22a)$$

Para os elétrons esta integral pode ser calculada integrando-se ao longo das órbitas não perturbadas, conforme o procedimento utilizado no Apêndice A. O valor da integral também é nulo, à semelhança do resultado obtido para os íons do feixe e do plasma, isto é,

$$I_e = -2i \int d\vec{k} \epsilon_{\vec{k}} \int d\vec{v} \chi_{\vec{v}}^{(e)} (\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) = 0 \quad . \quad (\text{B.22b})$$

Assim, substituindo (B.21), (B.22a) e (B.22b) em (B.20),

$$\frac{\partial W_j}{\partial t} = 2 \int d\vec{k} \epsilon_{\vec{k}} \left[ \gamma \text{Re} \chi_j + (\omega_r - \vec{k} \cdot \vec{v}_j) \text{Im} \chi_j \right] \quad . \quad (\text{B.23})$$

Para a variação temporal da energia térmica total das partículas, usando (B.15), temos,

$$\sum_j \vec{v}_j \cdot \frac{\partial \vec{p}_j}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial W_j}{\partial t} = -2 \int d\vec{k} \gamma \epsilon_{\vec{k}} = -\frac{\partial W_E}{\partial t} \quad ,$$

isto é, o acréscimo em energia cinética das partículas do plasma é acompanhado por um decréscimo ( $\gamma > 0$ ) em energia eletrostática das ondas.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- A76 ARUNASALAM, V. Quasilinear theory of ion-cyclotron-resonance heating of plasmas and associated longitudinal cooling. Physical Review Letters, New York, 37(12):746-9, Sept. 1976.
- B59 BUNEMAN, O. Dissipation of currents in ionized media. Physical Review, New York, 115(3):503-17, Aug. 1959.
- B72 BAKER, D.R. Measurements of the self-stabilization of a two-ion-beam instability. Physical Review Letters, New York, 28(18):1189-92, May 1972.
- C75 CHANG, R.P.H. Lower-hybrid beam-plasma instability. Physical Review Letters, New York, 35(5):285-8, Aug. 1975.
- D62 DRUMMOND, W.E. & PINES, D. Non-linear stability of plasma oscillations. Nuclear Fusion, Vienna, part 3:1049-57, 1962. Supplement.
- D70 DAVIDSON, R.C., KRALL, N.A., PAPADOPOULOS, K., SHANNY, R. Electron heating by electron-ion beam instabilities. Physical Review Letters, New York, 24(11):579-82, Mar. 1970.
- D72 DAVIDSON, R.C. Methods in nonlinear plasma theory. New York, Academic Press, 1972.
- D78 D'ANGELO, N., HERINK, K., REINLEITNER, L. On ion beam-plasma wave modes and ion beam deceleration by ion-acoustic turbulence. Physics Letters, Amsterdam, 65A(3):231-2, Mar. 1978.

- E76a Estados Unidos. Energy Research and Development Administration. Fusion power research and development; summary report on magnetic confinement experiments. Washington, 1976. (ERDA 76-34)
- E76b Estados Unidos. Energy Research and Development Administration. Neutral beam energy and power requirements for the next generation of tokamaks. Washington, 1976. (ERDA-76-77)
- F61 FRIED, B.D. & CONTE, S.D. The plasma dispersion function. New York, Academic Press, 1961.
- F66 FRIED, B.D. & WONG, A.Y. Stability limits for longitudinal waves in ion beam-plasma interaction. The Physics of Fluids, New York, 9(6):1084-9, June, 1966.
- F79 FURTH, H.P. Progress toward a tokamak fusion reactor. Scientific American, New York, 241(2):38-49, Aug. 1979.
- G75 GRÉSILLON, D. & DOVEIL, F. Normal modes in the ion-beam-plasma system. Physical Review Letters, New York, 34(2):77-80, Jan. 1975.
- G76 GAFFEY Jr., J.D. Instability of energetic ion beam injection in tokamaks. Journal of Plasma Physics, London 16(2):171-9, Oct. 1976.
- H78 HAUCK, J.P.; BÖHMER, H.; RYNN, N.; BENFORD, G. Ion beam excitation of ion-cyclotron waves and ion heating in plasmas with drifting ions. Journal of Plasma Physics, London, 19(2):237-52, Apr. 1978.
- J77 JASSBY, D.L. Neutral-beam-driven tokamak fusion reactors, Nuclear Fusion, Vienna, 17(2):309-65, Apr. 1977.

- J79 JORNADA, E.H. da; GAFFEY Jr., J.D.; CAPONI, M.Z. Acoustic instabilities and plasma heating resulting from energetic ion beam injection. Journal of Plasma Physics, London, 21(2):193-204, Apr. 1979.
- K66 KENNEL, C.F. & ENGELMANN, F. Velocity space diffusion from weak plasma turbulence in a magnetic field. The Physics of Fluids, New York, 9(12):2377-88, Dec. 1966.
- K73 KRALL, N.A. & TRIVELPIECE, A.W. Principles of plasma physics. New York, McGraw-Hill, 1973.
- M70 MAH, S.Q.; SKARSGARD, H.M.; STRILCHUK, A.R. Current-induced ion heating in a toroidal plasma. Physical Review Letters, New York, 25(20):1409-13, Nov. 1970.
- M72 McBRIDE, J.B.; OTT, E.; BORIS, J.P.; ORENS, J.H. Theory and simulation of turbulent heating by the modified two-stream instability. The Physics of Fluids, New York, 15(12):2367-83, Dec. 1972.
- M75 MONTGOMERY, M.D.; GARY, S.P.; FORSLUND, D.W.; FELDMAN, W.C. Electromagnetic ion-beam instabilities in the solar wind. Physical Review Letters, New York, 35(10):667-70, Sept. 1975.
- M79 MURAKAMI, M. & EUBANK, H.P. Recent progress in tokamak experiments. Physics Today, New York, 32(5):25-32, May, 1979.
- N69 NISHIKAWA, K. & WU, Ching-Sheng. Effect of electron trapping on the ion-wave instability. Physical Review Letters, New York, 23(18):1020-2, Nov. 1969.

- 065 O'NEIL, T.M. Collisionless damping of nonlinear plasma oscillations. The Physics of Fluids, New York, 8(12): 2255-62, Dec. 1965.
- 077 OTT, E. & MANHEIMER, W.M. Cross-field injection, propagation and energy deposition of intense ion beams with application to tokamak plasma heating. Nuclear Fusion, Vienna, 17(5):1057-65, Oct. 1977.
- P71 PAPADOPOULOS, K.; DAVIDSON, R.C.; DAWSON, J.M.; HABER, I.; HAMMER, D.A.; KRALL, N.A.; SHANNY, R. Heating of counterstreaming ion beams in an external magnetic field. The Physics of Fluids, New York, 14(4):849-57, Apr. 1971.
- P76 PERKINS, F.W. Ion-streaming instabilities: electromagnetic and electrostatic. The Physics of Fluids, New York, 19(7):1012-20, July 1976.
- P77 PERKINS, F.W. Heating tokamaks via the ion-cyclotron and ion-ion hybrid resonances. Nuclear Fusion, Vienna, 17(6): 1197-223, Dec. 1977.
- S72 SLEEPER, A.; WEINSTOCK, J.; BEZZERIDES, B. Nonlinear saturation of the ion-acoustic instability. Physical Review Letters, New York, 29(6):343-5, Aug. 1972.
- S73 STIX, T.H. Stability of a toroidal plasma subject to neutral injection. The Physics of Fluids, New York, 16(11): 1922-6, Nov. 1973.
- S75 STEINER, D. The technological requirements for power by fusion. Proceedings of the IEEE, New York, 63(11): 1568-608, Nov. 1975.

- S77 STEWART, L.D. Comparison of methods for the production of neutral beams. Princeton, Plasma Physics Laboratory, Dec. 1977. 11 p. PPPL-1391.
- T72 TAYLOR, R.J. & CORONITI, F.V. Ion heating via turbulent ion acoustic waves. Physical Review Letters, New York, 29(1):34-8, July 1972.
- W66 WATSON, G.N. Theory of Bessel functions. London, Cambridge University Press, 1966.